

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

**Dinamica dei due e/o pochi corpi:
sistemi binari, sistema solare**

Tesi di Laurea

Presentata da:
Marco Gherardelli

Relatore:
**Chiar.ma Prof.ssa
Marcella Brusa**

Anno Accademico 2021-2022

*"Guardate le stelle e non i vostri piedi.
Provate a dare un senso a ciò che vedete,
e chiedervi perché l'universo esiste. Siate curiosi."
Stephen Hawking*

Abstract

La dinamica dei due corpi è un problema di meccanica celeste di grande rilevanza per l'astrofisica, permette di studiare l'interazione tra due masse puntiformi che si muovono sotto una mutua attrazione gravitazionale, descritta dalle leggi universali della gravitazione di Newton. Inoltre è l'unico problema riguardante la dinamica gravitazionale per il quale si ha una completa e generale soluzione analitica.

Nel **capitolo 1** vengono introdotti gli strumenti matematici e il formalismo alla base del *problema dei due corpi*, utile per lo studio dell'interazione gravitazionale tra due masse puntiformi; arrivando a ricavare anche le *leggi di Keplero*. Risulta immediato immaginare che i sistemi osservati nell'universo non siano strettamente formati da soli due corpi, bensì potrebbe capitare che il numero n di corpi sia tale che $n > 2$.

Successivamente, nel **capitolo 2**, viene trattato un caso più generale del problema dei due corpi, il *problema dei tre corpi*. Come si può intuire in questo caso si estenderà l'analisi all'interazione gravitazionale di 3 corpi, trattando inizialmente il problema nel quale uno dei tre corpi ha massa trascurabile rispetto agli altri due, detto *problema dei tre corpi circolare ristretto*. A seguire si tratta il caso generale del problema dei tre corpi, in cui le masse sono tra loro confrontabili. Al contrario del problema dei due corpi quello dei tre corpi non ha una soluzione analitica, viene risolto numericamente.

In conclusione, nel **capitolo 3**, si trattano le interazioni di stelle o altri corpi in *sistemi binari* o *a tre corpi*, con alcune applicazioni astrofisiche. Vengono messi in luce esempi riguardanti il problema dei due corpi in *ammassi globulari* e dei tre corpi nel *sistema solare*, trattando in questo caso l'effetto dell'interazione a più corpi sulla *precessione del perielio di Mercurio*.

Indice

Abstract	i
1 Il problema dei due corpi	1
1.1 Moto in un potenziale centrale	1
1.2 Verso il problema di Keplero	3
2 Il problema dei tre corpi	5
2.1 Il problema dei tre corpi circolare ristretto	5
2.1.1 L'integrale di Jacobi	7
2.1.2 Superfici di Hill o di zero velocità	8
2.1.3 Punti Lagrangiani	9
2.2 Il problema dei tre corpi generale	10
3 Applicazioni astrofisiche	12
3.1 Sistemi binari	12
3.1.1 Sistemi binari in ammassi globulari	13
3.2 Sistema solare	13
3.2.1 Teoria delle perturbazioni	14
3.2.2 Precessione del perielio di Mercurio	14
Bibliografia	17

Capitolo 1

Il problema dei due corpi

1.1 Moto in un potenziale centrale

Il problema dei due corpi è solitamente risolto tramite un approccio Hamiltoniano, cioè trattando il problema come composizione di una parte imperturbata e una perturbazione. L'intento è di ridurre il moto a quello di una particella in campo centrale, seguendo il cosiddetto *problema di Keplero*.

Il moto in un campo centrale è quello di una particella la cui energia potenziale dipende esclusivamente da una distanza r da un punto fissato detto origine. Il potenziale sarà quindi $V = V(\mathbf{r})$, si potrà definire la forza agente lungo la direzione indicata da \mathbf{r} come

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{dV}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (1.1)$$

In componenti cartesiane si ha che $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, perciò la derivazione parziale di r rispetto x, y, z darà

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} 2x \right) = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Di conseguenza le 3 componenti della forza sono

$$F_x = -\frac{dV}{dr} \frac{x}{r}, \quad F_y = -\frac{dV}{dr} \frac{y}{r}, \quad F_z = -\frac{dV}{dr} \frac{z}{r}.$$

Un moto in un potenziale centrale presenta alcune caratteristiche, per esempio sarà planare come il potenziale, e prendendo come centro del campo l'origine si ha che il momento angolare, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, si conserva. Ciò è possibile perché il campo non ha una componente ortogonale al vettore posizione, infatti $d\mathbf{L}/dt = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = 0$, è facilmente verificabile che tale termine sia nullo perché il prodotto vettoriale di $\dot{\mathbf{r}}$ per se stesso (dato $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$) è nullo e allo stesso tempo \mathbf{r} ha la stessa direzione di $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \dot{\mathbf{p}}$. Siccome il moto è planare c'è la possibilità di descriverlo facendo uso di coordinate polari (r, φ) nel piano del moto. La Lagrangiana è

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r), \quad (1.2)$$

si nota come φ non compaia, per questo viene detta coordinata ciclica. Applicando la nota equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0, \quad (1.3)$$

alla lagrangiana (1.2), e usando come coordinata proprio φ , si ottiene

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0 \quad \text{i.e.} \quad mr^2\dot{\varphi} = L = L_z = \text{costante}, \quad (1.4)$$

che è il modulo del momento angolare, z è posto ortogonale al piano dell'orbita. Quanto appena riportato permette di ricavare la nota II legge di Keplero, definendo infatti un settore infinitesimo confinato da

$$dA = \frac{1}{2}r^2d\varphi, \quad (1.5)$$

e derivando rispetto al tempo si ottiene la cosiddetta velocità areolare

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{costante}, \quad (1.6)$$

"il vettore posizione della particella spazia aree uguali in tempi uguali". È possibile considerare un moto radiale in cui $r = r(t)$, si definisce così

$$E = 2T - \mathcal{L} = T + V = \text{costante},$$

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r).$$

Con qualche semplice passaggio algebrico si può ricavare

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - V_{eff}(r)]} \quad \longrightarrow \quad dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V_{eff}(r)]}}, \quad (1.7)$$

dove si è posto

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (1.8)$$

La parte radiale del moto agisce come un moto in una dimensione con energia potenziale efficace $V_{eff}(r)$ e dove $L^2/2mr^2$ è detta energia centrifuga. I raggi per cui $E = V_{eff}(r)$ sono punti di inversione radiale e corrispondono a valori di $\dot{r} = 0$, avendo un moto finito si avranno pericentro (indicato r_{peri}) e apocentro (indicato r_{apo}), mentre in caso il moto sia infinito si avrà solo $r_{apo} = \infty$.

Ricordando la definizione di L da (1.4) è possibile una sua riscrittura evidenziandone la traiettoria

$$d\varphi = \pm \frac{Ldr}{mr^2\sqrt{\frac{2}{m}[E - V_{eff}(r)]}} = \pm \frac{Ldr}{r^2\sqrt{2m[E - V_{eff}(r)]}}, \quad (1.9)$$

dove $\varphi = \varphi(r)$. Considerandone l'integrale, cioè variazioni di φ per moti finiti in un periodo radiale, si ottiene

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{peri}}^{r_{apo}} \frac{Ldr}{r^2\sqrt{2m[E - V_{eff}(r)]}}, \quad (1.10)$$

tale equazione deriva dal *Teorema di Bertrand*¹. Per valori di $\Delta\varphi = 2\pi n/k$, con n e k interi, avremo orbite chiuse. Generalmente non si hanno orbite chiuse, bensì a rosetta.

1.2 Verso il problema di Keplero

Il problema dei due corpi porta a considerare l'interazione tra due particelle, la cui Lagrangiana \mathcal{L} sarà

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|), \quad (1.11)$$

dove si è posto $r_i^2 = |\mathbf{r}_i^2|$. Prendendo l'origine nel centro di massa, così che $\mathbf{r}_1m_1 + \mathbf{r}_2m_2 = 0$ sia la posizione del centro di massa e definendo $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ come vettore separazione, è facile notare che

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}.$$

È possibile ora sostituire questi due valori nella (1.11) e ottenere

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - V(r), \quad (1.12)$$

dove con $m = (m_1m_2)/(m_1 + m_2) = (m_1m_2)/(M)$ si indica la *massa ridotta*, anche indicata in letteratura con μ , mentre M è la *massa totale* del sistema. Il problema dei due corpi è ridotto al problema del moto di una particella di massa m in un campo centrale con energia potenziale indicata da $V(r)$.

Nel caso del problema gravitazionale dei due corpi l'energia potenziale è

$$V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad \longrightarrow \quad V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} = -\frac{GMm}{r}, \quad (1.13)$$

in meccanica celeste è frequente trovare $\mu = GM = G(m_1 + m_2)$, dove μ è detta *massa gravitazionale*, da non confondere con quella ridotta. Si è ricavata quindi la notazione di un problema che descrive il moto di una particella di massa m in un potenziale centrale, con energia potenziale $\propto -1/r$, noto come *problema di Keplero*.

Precedentemente, nell'equazione (1.8), si è osservato che per un moto in un campo centrale il moto radiale è 1D con una energia potenziale efficace pari a

$$V_{eff}(r) = -\frac{m\mu}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}; \quad (1.14)$$

il suo minimo corrisponde a $V_{eff,min} = -\mu m^2/2L^2$ e si ottiene per $r = L^2/m^2\mu$. Il moto è possibile solo per $E > V_{eff}$, se $E < 0$ il moto è finito, mentre per $E > 0$ il moto è infinito. Presa (1.9) e sostituendo il valore $V = -m\mu/r$ in (1.8) si ha

$$d\varphi = \frac{\tilde{L}dr}{r^2\sqrt{2\left[\tilde{E} + \frac{\mu}{r}\right] - \frac{\tilde{L}^2}{r^2}}} \quad \xrightarrow{\text{integrando}} \quad \varphi = \arccos \frac{\tilde{L}^2/\mu r - 1}{\sqrt{1 + \frac{2\tilde{E}\tilde{L}^2}{\mu^2}}} + \varphi_0, \quad (1.15)$$

¹Tutte le orbite sono chiuse se $V \propto -1/r$, i.e. per un potenziale Kepleroiano (dove $\Delta\varphi = 2\pi$ e quindi $T_\varphi = T_r$) oppure se $V \propto r^2$, che rappresenta un potenziale armonico (dove $\Delta\varphi = \pi$ e quindi $T_\varphi = 2T_r$).

dove \tilde{L} e \tilde{E} sono il momento angolare e l'energia totale per unità di massa. Nel termine di destra compare φ_0 che è una costante. Definendo $l = L^2/m^2\mu = \tilde{L}^2/\mu$ ed $e = \sqrt{1 + (2EL^2/m^3\mu^2)} = \sqrt{1 + (2\tilde{E}\tilde{L}^2/\mu^2)}$ si ottiene

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos f, \quad (1.16)$$

dove $f = \varphi - \omega$ è detta *anomalia vera* e $\omega \equiv \varphi_0$ *argomento del pericentro*, cioè il valore di φ al pericentro.

Considerando i moti finiti ($E < 0$), ovvero orbite esclusivamente ellittiche, possono essere scritte le relazioni per i due semiassi, maggiore e minore. Si riportano i termini in cui si sono sostituite le relazioni tra e , l , L ed E

$$a = \frac{l}{(1 - e^2)} = \frac{\mu}{2|\tilde{E}|}, \quad b = \frac{l}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{\tilde{L}}{\sqrt{2|\tilde{E}|}}. \quad (1.17)$$

Ricordando che la relazione per la distanza r da uno dei due fuochi è

$$r = \frac{l}{1 + e\cos\varphi} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\varphi},$$

dove si è posto $\omega = 0$, facendo sì che $f = \varphi$. Pertanto l'apocentro sarà $r_{apo} = a(1 + e)$ e il pericentro $r_{peri} = a(1 - e)$.

Come si è visto nella sezione precedente la velocità areolare è costante in un moto a potenziale centrale (II legge di Keplero), con quanto riportato fino a questo punto è possibile mostrare come ricavare anche I e III legge di Keplero. Usando la conservazione del momento angolare $\tilde{L} = r^2\dot{\varphi} = 2dA/dt = \text{costante}$, per un'orbita ellittica si ha che il periodo T è

$$\tilde{L}dt = 2dA \quad \longrightarrow \quad T\tilde{L} = 2A = 2ab\pi, \quad (1.18)$$

dove $A = ab\pi$ è l'area dell'ellisse. Applicando ora le relazioni (1.17) si può scrivere

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} = \frac{\pi\mu}{\sqrt{2|\tilde{E}|^3}}, \quad (1.19)$$

che è effettivamente la III legge di Keplero, $T \propto a^{3/2}$; si può notare che il periodo ha solamente una dipendenza dall'energia. È possibile utilizzare un'altra notazione per la III legge di Keplero, ovvero

$$T^2\mu = 4\pi^2 a^3 \quad \text{oppure} \quad \mu = n^2 a^3,$$

dove $n = 2\pi/T$ è detto *moto medio*.

La I legge di Keplero, secondo l'enunciato è: "*l'orbita di ogni pianeta è un'ellisse e il sole occupa uno dei due fuochi*". Tale legge non è altro che un caso speciale del risultato generale in cui le orbite sono ellissi, ovvero per $E < 0$.

Capitolo 2

Il problema dei tre corpi

Il problema dei tre corpi può essere citato come segue: "*conosciute le posizioni e le velocità di tre corpi che interagiscono gravitazionalmente, considerati masse puntiformi, in un dato tempo, determinare le loro posizioni e le velocità ad ogni tempo*". Un grande lavoro in merito a questo problema è stato svolto da Poincaré e Hill. La difficoltà del problema deriva dal fatto che non ci sia una trasformazione di coordinate che possa semplificarlo, in contrasto con il problema dei due corpi, dove le soluzioni sono trovate semplicemente nel sistema di coordinate del centro di massa. Analogamente il problema ristretto dei tre corpi permette di utilizzare un sistema di coordinate che ruota alla stessa velocità attorno al centro di massa dei due corpi primari.

2.1 Il problema dei tre corpi circolare ristretto

Come accennato nell'**abstract**, il problema circolare ristretto dei tre corpi porta ad estendere l'analisi all'interazione gravitazionale di tre corpi in cui il terzo ha massa trascurabile rispetto agli altri due. La notazione delle masse prevede m_1 , m_2 con $m_1 > m_2$ e m_3 tale che $m_3 = m \ll m_2$. I corpi m_1 ed m_2 sono detti *primario* e *secondario* mentre la massa m viene detta *massa di test*. Per la trattazione di questo problema è necessario introdurre una nuova notazione, le unità verranno scelte in modo che le proprietà del sistema dipendano solo da un parametro μ .

- La massa viene posta in modo tale da avere $\mu_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = 1 - \mu$ (massa del primario) e $\mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \mu$ (massa del secondario), cosicché $\mu_1 + \mu_2 = 1$;
- le distanze del centro di massa sono rispettivamente poste uguali a $d_1 = \mu$ (distanza del primario) e $d_2 = 1 - \mu$ (distanza del secondario);
- l'unità di tempo è scelta affinché $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)} = 4\pi^2 \xrightarrow{i.e.} T = 2\pi$, ovvero il *moto medio* sia pari a $n = 2\pi/T = 1$.

I sistemi di riferimento che si utilizzano sono quello *siderale (inerziale)* generato da (ξ, η, ζ) e quello *sinodico (non inerziale)* generato da $(x, y, z \equiv \zeta)$. Le seguenti notazioni sono fondamentali per la descrizione dell'Hamiltoniana che descrive il moto della particella di test, successivamente manipolando tale Hamiltoniana si troverà un termi-

ne rilevante per i sistemi di riferimento non inerziali detto *potenziale efficace*.

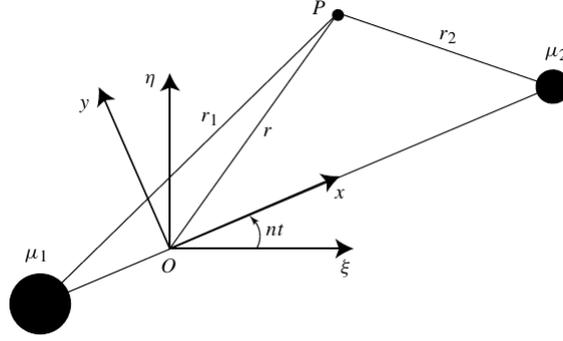


Figura 2.1: Visione planare della relazione tra coordinate siderali e sinodiche della particella al punto P. L'origine sarà nel punto O, centro di massa dei due corpi. Gli assi ξ e z coincidono con l'asse di rotazione e le frecce indicano la direzione di rotazione positiva.

Come si nota dalla figura (2.1), dato un generico punto P si definiscono r_1 e r_2 , distanze che separano P da primario e da secondario, e a ogni istante si conosce il valore di r_1 e r_2 ; mentre r è la posizione rispetto al centro di massa. I due sistemi di coordinate saranno collegati dalle equazioni

$$\begin{cases} x = \xi \cos(nt) + \eta \sin(nt) \\ y = -\xi \sin(nt) + \eta \cos(nt) \end{cases} \quad (2.1)$$

Per quanto riguarda le distanze che separano P invece si avrà

$$r_1 = \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2} = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2 + (\zeta - \zeta_2)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2}.$$

Si riporta l'Hamiltoniana che descrive il moto della particella nel sistema siderale

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) - \frac{m\mu_1}{r_1} - \frac{m\mu_2}{r_2}. \quad (2.2)$$

Con $\mathbf{p} = (p_\xi, p_\eta, p_\zeta)$ si indicano i momenti coniugati, tramite una funzione generatrice sarebbe possibile effettuare una trasformazione al sistema con coordinate (ξ, η, ζ) per avere nuove dipendenze in (x, y, z) ; siccome la trasformazione è solamente una rotazione la somma dei quadrati dei momenti rimarrebbe invariata

$$p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2.$$

L'Hamiltoniana (2.2) scritta in funzione di (x, y, z) è

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}(\tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_y^2 + \tilde{p}_z^2) + \phi(r_1, r_2) + n(y\tilde{p}_y - x\tilde{p}_x). \quad (2.3)$$

Con la notazione tilde si intendono i momenti e l'hamiltoniana normalizzati per la massa, come è possibile osservare in tale formulazione compaiono tre termini: il primo indica l'energia cinetica, il secondo è un termine potenziale definito $\phi = -(1 - \mu)/r_1 - \mu/r_2$, mentre il terzo è un termine di Coriolis, presente dal momento che ci si trova in un sistema di riferimento non inerziale.

Le equazioni del moto della particella di test nel sistema sinodico sono ora

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{p}_x} = \tilde{p}_x + ny \\ \dot{y} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{p}_y} = \tilde{p}_y - nx \\ \dot{z} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{p}_z} = \tilde{p}_z \end{array} \right. \xrightarrow{\text{derivando}} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{p}}_x = \ddot{x} - ny \\ \dot{\tilde{p}}_y = \ddot{y} + nx \\ \dot{\tilde{p}}_z = \ddot{z} \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Allo stesso modo è possibile derivare l'hamiltoniana in funzione delle coordinate e ottenere le derivate dei momenti coniugati, si troverebbe

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{p}}_x = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + n\tilde{p}_y \\ \dot{\tilde{p}}_y = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial y} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - n\tilde{p}_x \\ \dot{\tilde{p}}_z = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial z} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

È facile osservare che i due sistemi (2.4) e (2.5) presentano gli stessi termini, sarà possibile eguagliarli per ottenere

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} - 2ny = \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2nx = \frac{\partial U}{\partial y} \\ \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Dove si è definito

$$U = -\phi + \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2), \quad (2.7)$$

2.1.1 L'integrale di Jacobi

L'energia totale non è conservata nel problema ristretto dei tre corpi, dal momento che gli effetti della particella di test sui primari sono trascurabili. In questo caso l'hamiltoniana dipenderebbe esplicitamente dal tempo, ma definendo un'importante integrale del moto, detto *integrale di Jacobi*, si avrà che la $\tilde{\mathcal{H}}$ dell'equazione (2.3) non è dipendente esplicitamente dal tempo. L'integrale di Jacobi è definito

$$C_J = -2\tilde{\mathcal{H}}. \quad (2.8)$$

L'hamiltoniana non avrà più il significato fisico di energia, tuttavia fornirà informazioni sul sistema. L'integrale di Jacobi, essendo un integrale del moto, è conservato a ogni

istante di tempo, a differenza delle costanti del moto, e fornisce informazioni su quali regioni dell'orbita possano essere occupate (*regioni permesse*) o meno (*regioni proibite*).

È possibile scrivere esplicitamente quanto vale (2.8) sostituendo nella equazione (2.3) i valori dei momenti coniugati dal sistema (2.4), trovando

$$C_J = -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + 2U. \quad (2.9)$$

Riscritto

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 2U - C_J, \quad (2.10)$$

e notando che la quantità a destra dell'equazione dovrà essere ≥ 0 , il moto è possibile solo nelle regioni dove

$$U(x, y, z) \geq C_J/2 = \text{costante}. \quad (2.11)$$

L'integrale di Jacobi non fornisce informazioni riguardo la forma dell'orbita, bensì esclusivamente quali regioni siano o meno permesse.

2.1.2 Superfici di Hill o di zero velocità

A partire dalle equazioni appena riportate è possibile ricavare un limite tra le zone permesse e non, descritto da vere e proprie superfici, dette *superfici di zero velocità* (o *di Hill*) identificabili con la condizione $U(x, y, z) = C_J/2$, ottenute imponendo che $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 0$. Avendo la posizione e la velocità della particella di test l'integrale di Jacobi può essere calcolato.

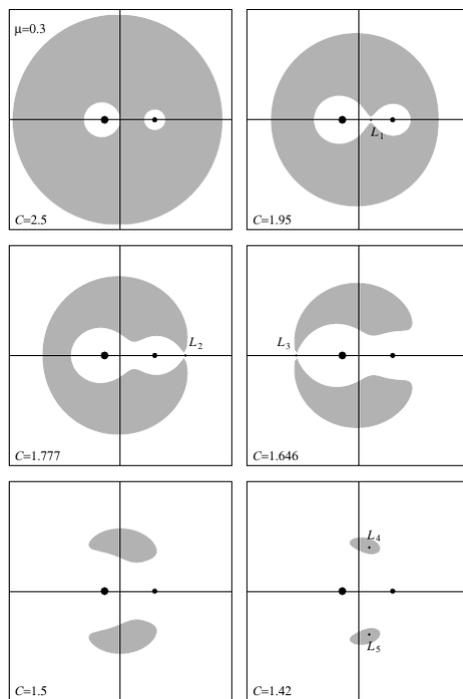


Figura 2.2: Regioni proibite (aree grigie) al variare del valore dell'integrale di Jacobi C_J , con $\mu = 0.3$.

Dall'equazione (2.11) e dalla figura (2.2) si può notare come al diminuire del valore di C_J si allarghino le regioni permesse, aumentando quelle che sono le connessioni tra i vari punti, la particella di test potrà andare da una regione all'altra senza passare

dalle regioni proibite. Per valori di C_J grandi le regioni permesse sono sostanzialmente tre: vicino ai primari, senza poter passare da uno all'altro (prima immagine in alto a sinistra in figura (2.2)) e in un'orbita molto lontana da loro. I punti indicati con L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 , presenti nella figura (2.2), sono i cosiddetti *punti lagrangiani* e si nota la loro presenza al diminuire del valore di C_J . Il primo punto L_1 indica che un piccolo corpo potrebbe orbitare attorno al primario, venendo ad essere catturato dal secondario o viceversa, tuttavia non potrà mai fuggire da questo sistema dal momento che è circondato da regioni proibite. La sua orbita viene detta *stabile secondo Hill*. Per il minor valore di C_J si hanno due regioni proibite prima di sparire completamente. I punti L_1, L_2, L_3 , sono sulla stessa linea su cui si trovano i primari, un'altra rappresentazione di ciò può essere vista tramite le figure di seguito.

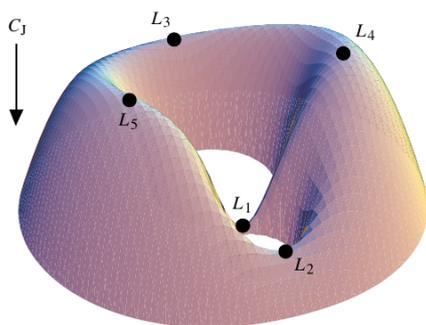


Figura 2.3: Superficie 3D definita da $C_J = 2U$ e localizzazione dei punti lagrangiani per $\mu_2 = 0.2$. La superficie è rappresentata in modo che la parte in alto rappresenti valori negativi di C_J .

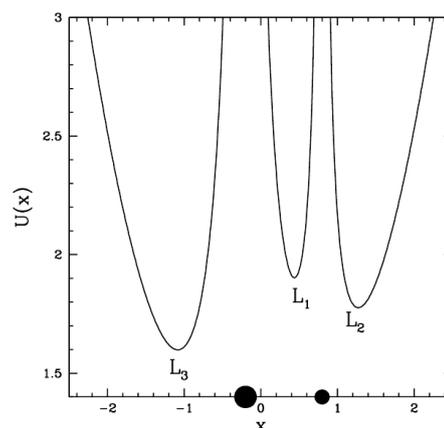


Figura 2.4: Minimi per il potenziale in funzione di x , punti L_1, L_2, L_3 posti sullo stesso piano dei primari.

2.1.3 Punti Lagrangiani

I punti lagrangiani sono punti di equilibrio nei quali velocità ed accelerazione sono nulle, nel sistema di riferimento utilizzato fino ad ora sarà quindi come porre $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = \ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$. Per identificare la posizione dei punti di equilibrio si devono risolvere le equazioni non lineari ottenute derivando la (2.7) rispetto x, y, z ; notando che l'equilibrio sarà raggiunto nel caso in cui $z = 0$. In altre parole tutti i punti di equilibrio sono nel piano orbitale dei primari, pertanto d'ora in avanti verrà utilizzata la restrizione al problema imponendo $z = 0$. Da notare la disposizione in figura (2.3).

In letteratura si fa una ulteriore distinzione parlando dei punti d'equilibrio lagrangiani, si distinguono quelli *collineari* da quelli *triangolari*. I primi prevedono una ulteriore semplificazione rispetto al caso $z = 0$ avendo anche $y = 0$, i secondi invece sono del tipo $y \neq 0$. È fondamentale notare, parlando di punti di *equilibrio* lagrangiani, la distinzione tra equilibrio (o stazionarietà) e stabilità; infatti, se un sistema non è in equilibrio non avrà nessun senso chiedersi se ci sia stabilità o instabilità. Questo torna utile analizzando la stabilità dei punti d'equilibrio lagrangiani; attraverso laboriosi calcoli riguardanti le derivate prime e seconde del potenziale efficace (trattati nel corso di meccanica celeste) è possibile trovare che L_1, L_2 ed L_3 sono instabili per ogni μ ,

mentre L_4 ed L_5 sono linearmente stabili¹ per valori di $\mu < \mu_0$ e instabili per $\mu > \mu_0$. Dove con $\mu_0 = \mu_{critico} = 0.03852$ si indica un termine noto in letteratura con il nome di valore di *Routh* o di *Gascheau*.

2.2 Il problema dei tre corpi generale

In generale il problema dei tre corpi calcola l'evoluzione orbitale di un sistema con rapporto di massa arbitrario e orbite dei tre corpi arbitrarie. Quando le assunzioni del problema ristretto non sono valide, per esempio la massa del terzo corpo non è infinitesima rispetto ai primari oppure l'orbita dei primari non è circolare, poche informazioni sul problema dei tre corpi possono essere ottenute analiticamente. L'unico strumento possibile per trattare il problema è quello dell'integrazione numerica; oggi molto del lavoro, per quanto riguarda l'integrazione numerica, è stato fatto e quindi si ha idea di come anche sistemi di tre corpi possano comportarsi. Tenendo conto dei risultati numerici alcune affermazioni generali possono essere fatte, quantomeno dal punto di vista statistico.

Per riuscire a classificare le famiglie di problemi dei tre corpi è utile introdurre alcune relazioni generali. Si pongono $i = 1, 2, 3$ l'indice che denoterà i tre corpi, I il momento polare d'inerzia del sistema, T l'energia cinetica totale, V l'energia potenziale del sistema ed E l'energia totale del sistema.

La prima relazione da definire è l'equazione del moto

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^3 \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} = -\nabla_i V, \quad (2.12)$$

con $i \neq j$ e dove con \mathbf{r}_i si indica il vettore posizione del i -esimo corpo di massa m_i , mentre con $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ si definisce il vettore posizione del corpo j -esimo rispetto l' i -esimo. In un sistema chiuso di particelle interagenti l'energia si conserva, fornendo informazioni sul sistema. È possibile quindi scrivere

$$E = T + V. \quad (2.13)$$

I termini valgono rispettivamente

$$T = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} m_k \dot{r}_k^2 \quad \text{e} \quad V = \frac{1}{2} \sum_k \sum_j \frac{Gm_k m_j}{r_{kj}}$$

con $k \neq j$. Si può riportare l'identità di Lagrange-Jacobi

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2(2T + E - T) = 2(E + T), \quad (2.14)$$

dove

$$I = \sum_{k=1}^3 m_k r_k^2$$

è il momento polare d'inerzia. L'identità appena riportata è una sorta di accelerazione del momento d'inerzia, in cui E è positivo e T è sempre definito positivo e può variare.

¹Un punto d'equilibrio è linearmente stabile se è stabile a confronto di tutte le piccole perturbazioni.

Si definiscono a questo punto due casistiche, una per $E > 0$ e una per $E < 0$. Nel caso $E > 0$ ci sarà uno splitting del sistema e sicuramente uno dei tre corpi andrà a $+\infty$, si avranno due possibilità:

- *escape*, in cui uno dei tre corpi andrà a distanza ∞ e gli altri formeranno una binaria (su un'orbita ellittica);
- *explosion*, dove tutti e tre i corpi vanno a distanza ∞ .

Se si avesse $E < 0$, invece, ci sarebbero più possibilità:

- *interplay*, in cui i tre corpi si trovano in una piccola regione e sono in orbita vicini tra loro;
- *ejection*, dove due corpi sono vicini tra loro (con orbita ellittica) e il terzo corpo viene espulso temporaneamente, dopo un certo intervallo di tempo ritornerà a fare parte del sistema. Se il corpo ha una velocità maggiore della velocità di fuga allora si avrà un escape, tale evento non è più temporaneo;
- *revolution*, configurazione gerarchica in cui c'è una binaria e un terzo corpo le orbita attorno, con un'orbita di semiasse maggiore più grande. Può essere osservata in sistemi stellari tripli.

In questo caso con $E < 0$ le prime due possibilità sono configurazioni temporanee del sistema, la terza configurazione invece è la più stabile, ciò è dimostrato anche dal fatto che sia la configurazione più osservata. I sistemi a tre corpi tendono ad essere instabili, cioè sono fasi brevi dell'evoluzione dinamica di un sistema. Tipicamente si osserva un sistema binario stabile, e un terzo corpo che incontra il sistema, dopodiché avviene un'interazione (detta interplay) e infine l'escape. Il comportamento di sistemi a tre corpi è caotico, cioè con comportamento irregolare e fortemente dipendente dalle condizioni iniziali; tuttavia la distribuzione statistica delle proprietà orbitale è predicibile. Parlando di comportamenti caotici si riporta come esempio la figura (2.5)

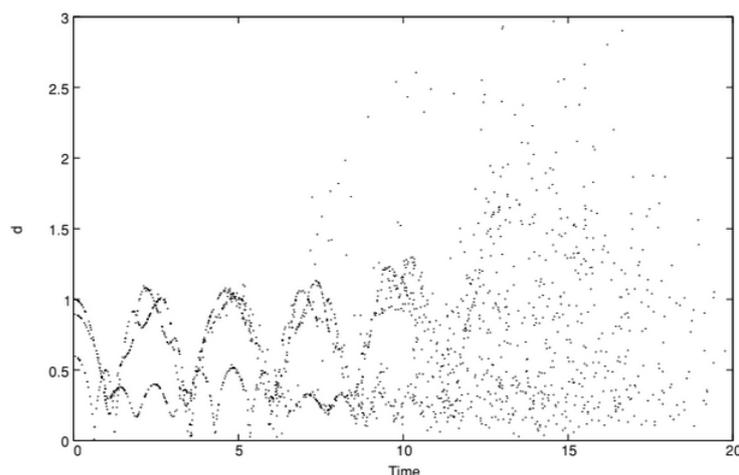


Figura 2.5: Si mostra l'evoluzione temporale di circa 100 sistemi a tre corpi identici, sono introdotte piccole variazioni (al massimo 10^{-3} unità di distanza) sulle posizioni iniziali di uno dei tre corpi. Sulle ordinate la distanza dei tre corpi dal centro di massa, sull'asse delle ascisse c'è il tempo in unità di tempo di crossing. Dopo circa 6 tempi di crossing iniziano a divergere le evoluzioni temporali, aumentando ulteriormente si osserva la caoticità.

Capitolo 3

Applicazioni astrofisiche

3.1 Sistemi binari

Trattando i sistemi binari una delle prime configurazioni che sono state studiate, già nel XVIII secolo da William Herschel, riguarda coppie di stelle; infatti, circa la metà di esse nei dintorni galattici sono sistemi binari. Le stelle binarie sono sistemi di stelle legate gravitazionalmente, ed il loro ruolo è fondamentale per la comprensione della dinamica dei sistemi stellari. Basti pensare che molte delle informazioni sulle strutture stellari, le masse e l'evoluzione delle stelle stesse è stata ricavata dai sistemi binari. Grazie a questi sistemi, ad esempio, è stata scoperta una relazione tra massa e luminosità per le stelle in sequenza principale.

Le binarie appaiono puntiformi se viste da lontano, tuttavia la loro interazione con altre stelle o altri sistemi binari può produrre scambi di energia, per questo il loro comportamento è simile a quello delle molecole nella dinamica dei gas.

Di seguito sono riportate le configurazioni delle binarie stellari, dopodiché verrà trattato come esempio un ammasso globulare. I sistemi di stelle binarie possono essere divisi in:

- *binarie visuali*, sistemi nei quali è possibile distinguere le due componenti. Osservando a distanza di tempo si nota come esse ruotino attorno al baricentro. Tramite lo studio di questi sistemi si calcolano le singole masse che li compongono;
- *binarie astrometriche*, nelle quali si distingue solo un oggetto, ma tramite il moto proprio ondulatorio si determina siano binarie;
- *binarie spettroscopiche*, i cui membri sono talmente vicini da non poter essere risolti dal telescopio, osservandone lo spettro si notano righe shiftate per via dell'effetto doppler. Se nello spettro si identifica una sola riga non si calcoleranno le singole masse, invece identificare due righe significa ottenere una massa in funzione dell'inclinazione;
- *binarie a eclisse*, anche in questo caso non si distinguono i due corpi dal momento che si eclissano, totalmente o parzialmente; potendo osservare variazioni di magnitudine.

3.1.1 Sistemi binari in ammassi globulari

Osservando gli ammassi globulari è possibile notare che i sistemi binari giocano un ruolo fondamentale durante la loro evoluzione, ed in particolare nel fenomeno della *catastrofe gravotermica*, processo che porta all'evaporazione dell'ammasso stesso e al collasso del nucleo. Conseguentemente alla contrazione sarà più frequente che si verifichino incontri ravvicinati tra le stelle presenti nel core, che in prevalenza sono in sistemi binari, e le stelle che provengono dall'alone. Tali incontri possono dare origine a diversi risultati: la *cattura* di un terzo corpo che transita vicino alla binaria, l'*exchange*, cioè il vero e proprio scambio tra la stella che transitava e una del sistema binario, un *fly-by*, ovvero un incontro ravvicinato in cui il terzo corpo se ne va subito, e infine la *ionizzazione*, che implica la rottura del sistema binario a seguito di un incontro particolarmente energetico. Il fenomeno di cattura può avvenire attraverso *tidal capture* (catture mareali), ovvero incontri che portano a deformare le stelle per via del campo di marea, il lavoro fatto in deformazione verrà poi dissipato. Un altro modo è la *three body capture* (cattura di un terzo corpo), cioè la formazione temporanea di sistemi a tre stelle in cui la meno massiva verrà espulsa e si formerà un sistema binario più compatto.

A seguito dei meccanismi appena descritti si avranno sistemi binari sempre più compatti e con meno energia, ceduta dopo ogni interazione per via del *rilassamento a due corpi* e del *Teorema del viriale*. I sistemi binari molto compatti prendono il nome di *hard binaries*¹. Si riporta come esempio l'interazione che potrebbe avvenire tra una stella e un sistema binario, considerando i corpi del sistema di massa m_a ed m_b la massa totale sarà $m_B = m_a + m_b$, la separazione nel sistema binario sarà r . Il terzo corpo ha una massa m_s ed una distanza r_s dal centro del sistema binario, la massa del sistema totale sarà $m_{tot} = m_B + m_s$, mentre l'energia totale sarà $E \approx E_B + E_s$. I valori per la stella e la binaria sono rispettivamente

$$E_s = \frac{m_s m_B}{2(m_s + m_B)} \dot{r}_s^2 - \frac{G m_s m_B}{r_s}, \quad E_B = \frac{m_a m_b}{2(m_B)} \dot{r}^2 - \frac{G m_a m_b}{r}.$$

Per la conservazione dell'energia si dovrebbe avere

$$E_{s,i} + E_{B,i} = E_{s,f} + E_{B,f} \quad \longrightarrow \quad E_{B,f} = E_{B,i} + E_{s,i} - E_{s,f},$$

siccome il sistema è legato l'energia iniziale della binaria ($E_{B,i}$) è negativa. Per quanto riguarda l'energia della stella, considerato che l'interazione con il sistema binario le permetterà di guadagnare energia, e quindi velocità ($v_f > v_i$), si avrà una variazione negativa. In conclusione, l'energia finale del sistema binario è minore di quella iniziale, a testimonianza del fatto che durante l'interazione il sistema abbia ceduto energia alla stella, di conseguenza il sistema binario sarà più compatto.

3.2 Sistema solare

La trattazione del problema dei due corpi, e del problema con un numero di corpi $n > 2$, iniziò a partire dallo studio di corpi nel sistema solare. Si riporta come esempio di problema dei tre corpi nel sistema solare il calcolo della precessione del perielio di

¹Sistemi binari con energia di legame più forte della media degli altri sistemi, occupano le regioni centrali dell'ammasso.

Mercurio. Per avere una trattazione più completa è necessario introdurre alcuni concetti chiave, uno dei quali è la *teoria delle perturbazioni*. Il calcolo della precessione tramite la gravità Newtoniana, facendo uso della teoria delle perturbazioni, permette di trovare un valore di precessione di circa $532 \text{ arcsec/century}$. Per avere il quadro completo servirebbe introdurre la relatività generale, cosa che non verrà fatta in questa tesi, e si aggiungerebbe al termine Newtoniano una correzione di circa $43 \text{ arcsec/century}$.

3.2.1 Teoria delle perturbazioni

Generalmente il moto è governato da un potenziale positivo del tipo $U = U_0 + R$, dove con $U_0 = -\phi_0$ si indica il potenziale kepleriano che rappresenta il termine imperturbato, mentre con R si identifica la funzione di disturbo, che testimonia la presenza di altri corpi. È possibile distinguere due tipologie di perturbazioni: le *perturbazioni generali* e le *perturbazioni speciali*. Le prime rappresentano la categoria di perturbazioni che è possibile risolvere analiticamente. Le perturbazioni speciali permettono invece, tramite l'integrazione numerica, di partire dalle posizioni e dalle velocità ad un dato istante di tempo e di ricavarle ad un istante di tempo successivo. Il secondo tipo di perturbazione è necessario nel momento in cui gli effetti di R sono comparabili a quelli di U_0 , se le perturbazioni fossero piccole si utilizzerebbe il metodo generale.

Si consideri l'hamiltoniana normalizzata per la massa $\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}_0 + \tilde{\mathcal{H}}_1$, dove si ha rispettivamente

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 = \frac{1}{2}(\tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_y^2 + \tilde{p}_z^2) + \phi_0 = \frac{1}{2}(\tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_y^2 + \tilde{p}_z^2) - U_0 \quad e \quad \tilde{\mathcal{H}}_1 = -R.$$

Con tale definizione l'equazione canonica ci da l'equazione derivata del moto (si riporta solo il caso per x):

$$\dot{x} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{p}_x} = \tilde{p}_x, \quad \dot{\tilde{p}}_x = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial x} \quad \longrightarrow \quad \ddot{x} = \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}.$$

3.2.2 Precessione del perielio di Mercurio

L'analisi di questo problema prevede l'utilizzo della teoria perturbativa e in particolare del meccanismo di Lidov-Kozai. Ciò che viene fatto è considerare due pianeti, Mercurio di massa m , che orbita attorno al Sole di massa m_0 , e Giove, detto perturbatore, di massa m_p . La separazione tra m ed m_0 è indicata con x , mentre quella tra m_p ed m_0 è indicata con x_p e si ha che $x \ll x_p$.

Le equazioni del moto per m_0 e per m nel sistema di riferimento inerziale sono

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\xi}_0}{dt^2} = \frac{Gm(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0)}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0|^3} + \frac{Gm_p(\boldsymbol{\xi}_p - \boldsymbol{\xi}_0)}{|\boldsymbol{\xi}_p - \boldsymbol{\xi}_0|^3}, \quad \frac{d^2 \boldsymbol{\xi}}{dt^2} = -\frac{Gm_0(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0)}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0|^3} - \frac{Gm_p(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_p)}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_p|^3}.$$

Prendendo il sistema eliocentrico, e sottraendo tra loro le due equazioni del moto si ottiene

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{G(m + m_0)\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} - \frac{Gm_p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p|^3} - \frac{Gm_p\mathbf{x}_p}{|\mathbf{x}_p|^3}, \quad (3.1)$$

dove si è considerato $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0$ e $\mathbf{x}_p = \boldsymbol{\xi}_p - \boldsymbol{\xi}_0$. Ricordando $\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla_{\mathbf{x}}\phi$ è possibile scrivere il potenziale gravitazionale

$$\phi(\mathbf{x}) = -\frac{\mu}{x} - \frac{Gm_p}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p|} + \frac{Gm_p\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_p}{|\mathbf{x}_p|^3}, \quad (3.2)$$

tenendo conto che $\mu = G(m + m_0)$ e che $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p| = \sqrt{x^2 + x_p^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_p}$. Dal potenziale (3.2) è possibile ricavare il valore della perturbazione R , che sarà

$$R = \frac{Gm_p}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p|} + \frac{Gm_p \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_p}{|\mathbf{x}_p|^3} = -\tilde{\mathcal{H}}_1.$$

Facendo un'espansione di Taylor e una media temporale² per $\tilde{\mathcal{H}}_1$ su un'orbita interna ed una esterna si otterrà

$$\langle \tilde{\mathcal{H}}_1 \rangle = \frac{Gm_p a^2}{8a_p^3 (1 - e_p^2)^{3/2}} \left[-5 + 6(1 - e^2) - 3(1 - e^2) \cos^2 i + 15e^2 \sin^2 \omega (1 - \cos^2 i) \right], \quad (3.3)$$

dove i e ω sono rispettivamente l'inclinazione e l'argomento al pericentro, riferiti a Mercurio. Mentre a_p ed e_p sono rispettivamente semiasse maggiore ed eccentricità del perturbatore. Al fine di rendere più semplici i passaggi si introduce un nuovo set di variabili, spesso utilizzate in meccanica celeste, chiamate *variabili di Delaunay*. Tali variabili prevedono di sostituire

$$\theta_a = \Omega, \quad \theta_b = \omega, \quad \theta_c = n(t - \tau) = \mathcal{M}; \quad (3.4)$$

$$J_a = \sqrt{a\mu(1 - e^2)} \cos i, \quad J_b = \sqrt{a\mu(1 - e^2)}, \quad J_c = \sqrt{a\mu}.$$

Seguendo questa nuova notazione la (3.3) diventa

$$\langle \tilde{\mathcal{H}}_1 \rangle = \frac{Gm_p J_c^4}{8\mu^2 a_p^3 (1 - e_p^2)^{3/2}} \left[-5 + 6 \frac{J_b^2}{J_c^2} - 3 \frac{J_a^2}{J_c^2} + 15 \left(1 - \frac{J_b^2}{J_c^2}\right) \left(1 - \frac{J_a^2}{J_c^2}\right) \sin^2 \theta_b \right], \quad (3.5)$$

come si può notare l'unica dipendenza è $\theta_b = \omega$, non ci sono dipendenze da θ_a e θ_c . In questo modo $J_a = \text{costante}$ e $J_c = \text{costante}$, cioè $a = \text{costante}$ e $(1 - e^2) \cos^2 i = \text{costante}$. Facendo i calcoli per il sistema Sole-Mercurio-Giove, in cui sono tutti e tre complanari ($i = 0 = i_{\text{merc}}$) ed $e_p = e_{\text{jup}} \simeq 0$, si utilizza la seguente notazione

$$m = m_{\text{merc}}, \quad m_p = m_{\text{jup}}, \quad m_0 = M_\odot, \quad \mu = G(M_\odot + m_{\text{merc}}) \simeq GM_\odot.$$

Sotto assunzione che $J_a = J_b$ e data la notazione appena descritta la perturbazione è

$$\langle \tilde{\mathcal{H}}_1 \rangle = \frac{Gm_p J_c^4}{8\mu^2 a_p^3} \left[-5 + 3 \frac{J_b^2}{J_c^2} \right]. \quad (3.6)$$

Il tasso di precessione del perielio si identifica con $\dot{\omega}$ (derivata di ω), date (3.4) si ha $\dot{\omega} = \dot{\theta}_b = \frac{\partial \langle \tilde{\mathcal{H}}_1 \rangle}{\partial J_b}$, facendo le opportune sostituzioni si giunge a

$$\frac{\partial \langle \tilde{\mathcal{H}}_1 \rangle}{\partial J_b} = \frac{Gm_p J_c^2}{\mu^2 a_p^3} [3J_b] \quad (3.7)$$

$$\dot{\omega} = \frac{3}{4} \frac{m_{\text{jup}}}{M_\odot} \frac{2\pi}{T_{\text{jup}}} \left(\frac{a_M}{a_J} \right)^{3/2} \sqrt{1 - e_M^2} \simeq 155 \text{ arcsec/century}. \quad (3.8)$$

Tale risultato, ottenuto sostituendo i valori reali per le masse, i semiasse maggiori di Mercurio e Giove e l'eccentricità di Mercurio, è l'effetto della sola presenza di Giove sul perielio di Mercurio.

²Fare la media temporale significa $\langle \dots \rangle = \frac{1}{2\pi} \int \dots d\mathcal{M} d\mathcal{M}_p$, dove \mathcal{M} e \mathcal{M}_p sono le anomalie medie della regione interna e della regione esterna.

Bibliografia

- [1] Binney J., Tremaine S., 2008, *Galactic Dynamics*, Princeton University Press, Princeton.
- [2] Murray C.D., Dermott S.F., 1999, *Solar system dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] Valtonen M., Karttunen H., 2006, *The three body problem*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [4] Roy A.E., 2005, *Orbital motion*, 2005 Taylor & Francis.
- [5] Szebehely V., 1967, *Theory of orbits: the restricted problem of three bodies*, Academic Press, New York. and London.
- [6] *Appunti personali del corso di Meccanica Celeste*, presieduto dal Prof. Carlo Nipoti. A.A. 2021/2022.
- [7] *Appunti personali del corso di Astrofisica Extragalattica*, presieduto dal Prof. Luca Ciotti. A.A. 2021/2022.
- [8] *Appunti personali del corso di Astronomia*, presieduto dal Prof. Andrea Cimatti. A.A. 2019/2020.