

ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Astronomia

# Dinamica delle Galassie a Spirale e delle Galassie Ellittiche

Presentata da:  
Elisabetta Reggiani

Relatore:  
Chiar.ma Prof. Marcella Brusa

---

Anno Accademico 2021/2022



# Indice

Introduzione . . . . .	III
<b>1 Morfologia delle Galassie</b>	<b>1</b>
1.1 Classificazione di Hubble . . . . .	1
1.1.1 Galassie Ellittiche . . . . .	2
1.1.2 Galassie a Spirale . . . . .	2
1.1.3 Galassie Lenticolari . . . . .	2
1.1.4 Galassie Irregolari . . . . .	2
<b>2 Dinamica delle Galassie</b>	<b>3</b>
2.1 Sistemi Collisionali e Non Collisionali . . . . .	3
2.1.1 Tempo di Rilassamento a due corpi . . . . .	3
2.2 Equazione di Boltzmann . . . . .	6
2.2.1 Equazioni di Jeans . . . . .	7
2.3 Teorema del Viriale . . . . .	8
<b>3 Dinamica delle Galassie Ellittiche</b>	<b>9</b>
3.1 Galassie Ellittiche come Sistemi Anisotropi . . . . .	9
3.2 Profili di Brillanza . . . . .	9
3.3 Piano Fondamentale . . . . .	10
<b>4 Dinamica delle Galassie a Spirale</b>	<b>12</b>
4.1 Curva di Rotazione . . . . .	12
4.2 Legge di Tully Fisher . . . . .	14
4.3 Dinamica dei Bracci a Spirale . . . . .	14



## Introduzione

La Dinamica Stellare è la disciplina che si occupa di descrivere la struttura e l'evoluzione dei sistemi stellari. Quest'elaborato si pone come obiettivo quello di illustrare una panoramica sui modelli e le tecniche necessari allo studio dei moti delle stelle all'interno delle galassie, per poi tradurli in pratica tramite applicazioni alle due tipologie principali di galassie.

Dopo aver introdotto le principali caratteristiche delle galassie attraverso la Classificazione di Hubble, verrà affrontata la peculiarità di questi sistemi, ovvero la *non collisionalità*, introducendo il concetto di *Tempo di Rilassamento a due corpi*. In seguito, si illustreranno le equazioni che permettono di descrivere un sistema non collisionale, ovvero l'*Equazione di Boltzmann* e le *Equazioni di Jeans*, con conseguente caratterizzazione del Teorema del Viriale per questo tipo di sistemi.

In conclusione, si approfondirà dapprima la dinamica delle galassie ellittiche attraverso lo studio della loro *anisotropia*, del *profilo di brillantezza* e del *Piano Fondamentale*; successivamente, per quanto concerne le galassie a spirale, si tratterà la *Curva di Rotazione*, la *Legge di Tully Fisher* che ne descrive la luminosità e si terminerà con una descrizione della dinamica dei bracci a spirale attraverso la *teoria delle Onde di Densità* di Lin e Shu.



# Capitolo 1

## Morfologia delle Galassie

Le galassie sono i mattoni che costituiscono il nostro universo. Si stima ve ne siano centinaia di miliardi, ciascuna delle quali - a sua volta - contiene centinaia di miliardi di stelle. E' possibile caratterizzarle, in modo globale, per le loro principali osservabili (Massa, Dimensione e Velocità delle stelle al loro interno) con i seguenti estremi:

- Massa delle galassie ( $M$ )  $10^6 M_\odot \leq M \leq 10^{12} M_\odot$  ( $M_\odot = 1.98 \cdot 10^{33}$  g)
- Dimensione delle galassie ( $R_e$ <sup>1</sup>)  $100 \text{ pc} \leq R_e \leq 100 \text{ kpc}$  ( $1 \text{ pc} = 3.08 \cdot 10^{18}$  cm)
- Velocità delle stelle ( $\sigma$ )  $50 \text{ km/s} \leq \sigma \leq 400 \text{ km/s}$

La Via Lattea, la galassia nella quale ci troviamo, rientra tra le più grandi, con una massa di  $3 \cdot 10^{11} M_\odot$  e un diametro stimato di 32600 pc.

### 1.1 Classificazione di Hubble

Il primo schema di classificazione morfologica delle galassie è stato la *Sequenza di Hubble*, presentata nel 1936 da Edwin Hubble (Figura 1.1). Si trattava, come suggerisce

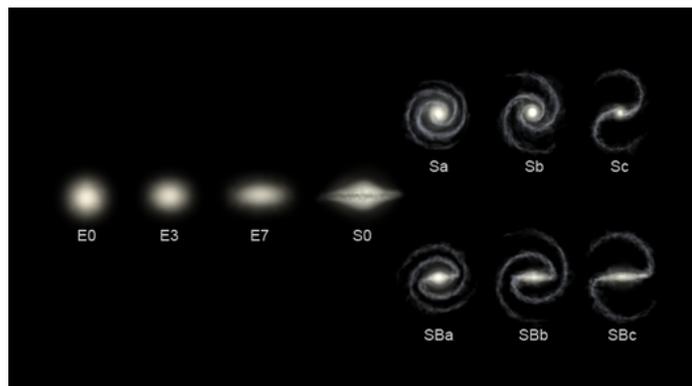


Figura 1.1: Sequenza di Hubble. Fonte: Wikipedia

il nome, di una classificazione evolutiva: Hubble teorizzò che le galassie *Early Type* si evolvessero nelle *Late Type*. Questa teoria è stata confutata grazie agli studi di dinamica ed evoluzione stellare della seconda parte del XX secolo. Tra le galassie *Early Type* si trovano le galassie Ellittiche e Lenticolari, mentre tra le *Late Type* si trovano le galassie a Spirale. Tutte quelle che non rientrano in queste categorie sono dette *Irregolari*.

<sup>1</sup>Raggio di una distribuzione sferica tale per cui il profilo cumulativo di brillantezza a quella distanza è pari a metà della Luminosità totale  $L_p(R_e) = \frac{L}{2}$

### 1.1.1 Galassie Ellittiche

Le galassie ellittiche hanno forma ellissoidale ed una bassa percentuale di polveri e gas. Le popolazioni di stelle al loro interno sono antiche e donano a questi corpi il caratteristico colore rossastro. Si indicano con la lettera E seguita da un numero che indica la sottoclasse di appartenenza in base allo schiacciamento a cui sono soggette, ovvero al parametro *ellitticità*  $\varepsilon = 1 - \frac{b}{a}$ : una galassia E0 ha forma sferoidale, mentre una galassia E7 è molto schiacciata e allungata. Non essendo presente gas freddo, non vi è formazione stellare al loro interno.

### 1.1.2 Galassie a Spirale

Le galassie a spirale sono composte da un *Bulge* centrale denso e luminoso, attorno al quale si trova un disco sottile dove giacciono i bracci a spirale che si diramano dal centro. In queste zone, grazie alla grande presenza di gas freddo, avviene un'intensa attività di formazione stellare che si traduce nel colore azzurro di queste galassie, donato dalle nuove stelle calde e luminose. Si indicano con la lettera S e si suddividono in sottocategorie (indicate con a,b,c...) in base al grado di avvolgimento dei bracci a spirale attorno al Bulge e al loro rapporto di dimensioni. Il Bulge, inoltre, può avere forma allungata, e in tal caso si parla di galassie a *Spirale Barrata*, che si indicano con SB. La Via Lattea è di tipo SBb.

### 1.1.3 Galassie Lenticolari

Le galassie Lenticolari si trovano morfologicamente a metà tra le galassie ellittiche e quelle a spirale. Possiedono un Bulge centrale e un disco di materiale, ma non vi è traccia di bracci a spirale. Si indicano con S0, e contengono un elevato quantitativo di gas.

### 1.1.4 Galassie Irregolari

Le galassie irregolari non mostrano alcuna forma regolare riconoscibile o assimilabile alle altre categorie. Sono state divise da Hubble in due classi: Irregolari di tipo I e di tipo II, a seconda che contengano o meno strutture peculiari.

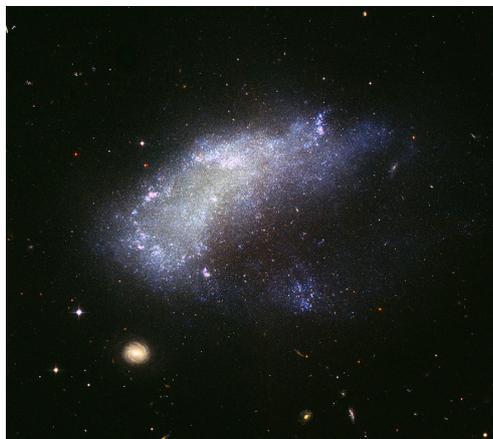


Figura 1.2: Galassia Irregolare NGC 1427A. Fonte: NASA, ESA, immagine ottenuta da Hubble Space Telescope

# Capitolo 2

## Dinamica delle Galassie

La dinamica delle galassie si occupa di studiare i moti dei corpi all'interno di una galassia, che consiste nel risolvere un modello dove un gran numero di corpi massicci orbita in un sistema autogravitante. Poiché il numero di stelle all'interno di una galassia oscilla tra  $10^{10}$  e  $10^{12}$ , mentre il gas occupa una minima parte della massa totale, si potranno trascurare gli effetti dinamici delle nubi di gas.

Per poter studiare questi sistemi è sufficiente la meccanica classica di Newton: infatti non ci sono evidenze che la relatività generale influisca sui calcoli, fatta eccezione per le regioni centrali delle galassie (dove si trovano i Buchi Neri Super Massicci).

In conclusione, l'insieme delle stelle in una galassia può essere considerato come un sistema di  $N$  corpi. E' fondamentale andare a studiare se, tra di loro, i corpi urtano geometricamente oppure no; ovvero se sono soggetti ad un'interazione gravitazionale, cioè un cambiamento reciproco delle loro traiettorie.

Nella sezione che segue si andrà a mostrare che questi sistemi sono *non collisionali* e si andranno a definire le equazioni necessarie al loro studio.

### 2.1 Sistemi Collisionali e Non Collisionali

Si parta da un argomento geometrico: si consideri un sistema di  $N$  corpi sferici di raggio  $R_{\odot}$  (raggio solare  $\simeq 6.96 \cdot 10^{10}$  cm) all'interno di una regione limitata di spazio di dimensione  $\ell$ . Si può studiare la collisionalità andando a valutare il *libero cammino medio*  $\lambda$ , cioè la distanza media che due stelle possono percorrere senza urtarsi:

$$\lambda = \frac{\ell^3}{3NR_{\odot}^2}$$

Inserendo i valori tipici di una galassia ellittica ( $N \sim 10^{11}$ ,  $\ell \sim 10^4 pc$ ) si trova che due stelle collidono mediamente dopo aver percorso  $\lambda \simeq 10^{12} \ell$ . Poiché dal momento del Big Bang le stelle non possono aver percorso queste distanze, le galassie sono detti *sistemi non collisionali*. Un'analisi più formale porta a questa stessa conclusione a partire dalla definizione di *Tempo di Rilassamento a Due Corpi*.

#### 2.1.1 Tempo di Rilassamento a due corpi

Si consideri una stella di massa  $m_t$  (massa di test) e la si faccia interagire con un sistema di  $N$  corpi di massa  $m_f$  (massa di campo). Si tratta di un problema agli  $N$  corpi non integrabile, ma che può essere comunque risolto, con un metodo qualitativo, se scomposto in  $N$  problemi dei 2 corpi, che sono integrabili.

Si consideri l'urto gravitazionale illustrato nella Figura 2.1.

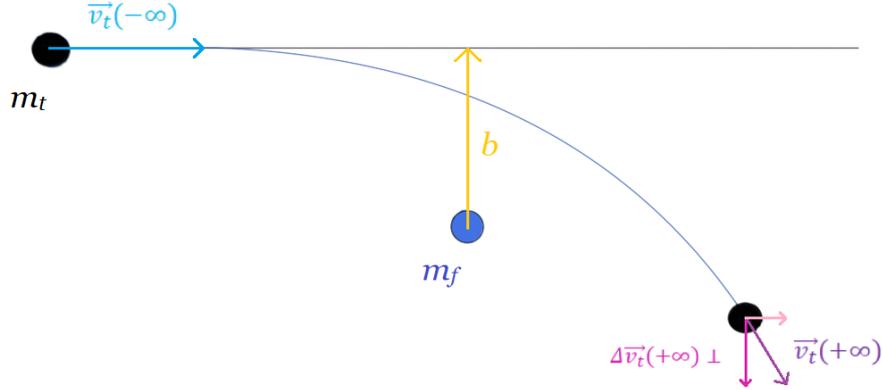


Figura 2.1: Urto gravitazionale tra due corpi (S.D.R: Orbita Relativa). L'interazione si traduce nell'acquisto di Energia Cinetica da parte della stella di test  $m_t$  nella direzione perpendicolare a quella di ingresso nel sistema. L'effetto in figura è volutamente amplificato: le interazioni delle stelle avvengono a parametri  $b$  molto più grandi e pertanto sono più deboli.

Il Tempo di Rilassamento a 2 Corpi ( $t_{2b}$ ) è il tempo necessario affinché, dopo  $N$  interazioni gravitazionali a 2 corpi, la somma dei guadagni energetici nella direzione perpendicolare a quella di ingresso nel sistema nel S.D.R dell'Orbita Relativa sia uguale all'energia cinetica iniziale della stella.

L'espressione per il  $t_{2b}$  si può ottenere partendo dalla definizione di due sistemi di riferimento:

- Sistema di Riferimento Inerziale di Laboratorio  $O$
- Sistema di Riferimento Inerziale dell'Orbita Relativa  $O'$

Nel S.D.R.  $O'$  l'interazione gravitazionale si traduce in una variazione dell'impulso della stella di massa  $m_t$ . Questa variazione di impulso è data dall'approssimazione di Born a grandi valori di  $b$ :

$$\mu \|\Delta v_{\perp}\| \sim \frac{2Gm_t m_f}{b \cdot v} \quad \text{dove } v = \|\vec{v}_t(-\infty)\| \quad (2.1)$$

Dove  $\mu = \frac{m_t m_f}{m_t + m_f}$  è la massa ridotta,  $G$  è la costante gravitazionale e  $b$  il *parametro di impatto*, ovvero la distanza minima tra le due stelle in assenza di interazione.

Per ricavare il valore della velocità nel S.D.R.  $O$  si sfruttano le trasformazioni di Galileo, da cui si ottiene:

$$\vec{v} = \vec{v}_{CM} + \frac{\mu}{m_t} \vec{v}$$

dove  $\vec{v}_{CM}$  è la velocità del centro di massa in  $O$ . Poiché, in un problema a due corpi, il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme, si avrà che:

$$\Delta \vec{v} = \frac{\mu}{m_t} \Delta \vec{v}$$

In termini di modulo:

$$\|\Delta\vec{v}\| = \frac{\mu}{m_t}\|\Delta\vec{v}\| \quad (2.2)$$

Unendo le equazioni (2.1) e (2.2) ed elevando al quadrato si ottiene la seguente *Approssimazione Impulsiva*:

$$\|\Delta\vec{v}_{t\perp}\|^2 \sim \frac{4G^2m_f^2}{b^2v^2} \quad (2.3)$$

Che quantifica il riscaldamento perpendicolare a cui è soggetta la stella di massa  $m_t$  a seguito dell'interazione gravitazionale con la massa di campo.

Per poter sommare i contributi di ogni singolo urto si devono conoscere la distribuzione delle posizioni delle stelle di campo e delle loro velocità. Queste informazioni sono raccolte nella *Funzione di Distribuzione* - uno strumento descritto nel dettaglio nella sezione successiva - che contiene le informazioni su tutti gli  $N$  corpi del sistema.

Considerando un sistema omogeneo e isotropo, la funzione di distribuzione si definisce:

$$f(\vec{x}_f, \vec{v}_f) = n_f g(\|\vec{v}_f\|) \quad (2.4)$$

Dove  $n_f$  è il numero di stelle per unità di volume e  $g(\|\vec{v}_f\|)$  è la distribuzione delle velocità di campo del sistema, che dipende dal modulo di  $\vec{v}_f$  ma non dalla sua direzione. Il numero  $N$  di stelle che si incontra nell'unità di tempo  $\Delta t$  a distanza  $b$  nell'intervallo  $[b, b + db]$  si ottiene tenendo conto che non è possibile incontrare oggetti con  $\vec{v}_f = \vec{v}_t$ :

$$N = 2\pi b db \Delta t \|\vec{v}_t - \vec{v}_f\| n_f g(\|\vec{v}_f\|) d^3\vec{v}_f \quad (2.5)$$

Il riscaldamento perpendicolare dopo  $N$  interazioni si ottiene integrando il termine del singolo evento per il numero di stelle  $N$ :

$$\sum \|\Delta\vec{v}_{t\perp}\|^2 = 8\pi G^2 m_f^2 n_f \Delta t \int_0^\infty \frac{db}{b} \int \frac{g(\|\vec{v}_f\|)}{\|\vec{v}_t - \vec{v}_f\|} d^3\vec{v}_f \quad (2.6)$$

I cui integrali sono separabili poiché ci troviamo in approssimazione impulsiva.

L'integrale in  $d^3\vec{v}_f$  ha la forma di un potenziale di un sistema a simmetria sferica, che prende il nome di *Potenziale di Rosenbluth*  $\psi(\|\vec{v}_t\|)$ . L'integrale in  $db$ , invece, presenta due divergenze:

- *Divergenza infrarossa*: avviene a  $b \rightarrow \infty$  ed è dovuta al numero infinito di urti debolissimi che avvengono a distanze infinite; questo avviene perché la forza gravitazionale è una forza a lungo raggio. È stata risolta grazie ad un celebre argomento di Chandrasekhar, che scelse come valore massimo di integrazione la dimensione della galassia.
- *Divergenza Ultravioletta*: avviene a  $b \rightarrow 0$ ; si tratta di un limite geometrico, che dal punto di vista astrofisico si risolve scegliendo come estremo minore di integrazione la distanza  $b_0$  a cui l'orbita devia di  $90^\circ$ . Rimane comunque da tenere a mente che l'approssimazione di Born è valida per grandi  $b$ .

Fatte queste premesse sugli estremi di integrazione, si ha che l'integrale in  $db$  è equivalente al *Logaritmo di Coulomb*  $\ln\Lambda$ . La sommatoria diventa:

$$\sum \|\Delta\vec{v}_{t\perp}\|^2 = 8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln\Lambda \psi(\|\vec{v}_t\|) \Delta t \quad (2.7)$$

Imponendo  $\sum \|\Delta\vec{v}_{t\perp}\|^2 = \|\Delta\vec{v}_t\|^2$  e isolando  $\Delta t$  si ottiene la formula per il tempo di rilassamento a due corpi:

$$t_2 b = \frac{\|\Delta\vec{v}_t\|^2}{8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln\Lambda \psi(\|\vec{v}_t\|)} \quad (2.8)$$

## Tempo di Rilassamento e Tempo Dinamico

Per comprendere meglio il ruolo del tempo di rilassamento è utile confrontarlo con il tempo dinamico della galassia, ovvero il tempo di attraversamento del sistema.

Si consideri una galassia sferica all'equilibrio di raggio  $R$ , numero di stelle  $N$  e masse in gioco  $m_t = m_f$ . Essendo all'equilibrio, il Teorema del Viriale rende vera la seguente equazione:

$$\sigma_V^2 = \frac{Gm_f}{R} \quad (2.9)$$

Dove per  $\sigma_V$  si intende la velocità media delle stelle di campo all'equilibrio.

Per velocità  $\vec{v}_t$  grandi si può approssimare  $\psi \sim \frac{1}{\sigma}$ , per cui l'equazione (2.8) si può scrivere come:

$$t_2b = \frac{\sigma^3 R^3}{6G^2 m_f^2 N \ln \Lambda} \quad (2.10)$$

Il tempo dinamico di attraversamento si definisce come  $t_{dyn} = \frac{2R}{\sigma_V}$ ; pertanto il rapporto fra tempo di rilassamento e tempo dinamico, dopo un po' di algebra, sarà:

$$\frac{t_2b}{t_{dyn}} \approx \frac{0.1N}{\ln N} \quad (2.11)$$

Il risultato dell'equazione (2.11) può sembrare controintuitivo, perché ci si aspetta che più corpi sono presenti nel sistema, e più il  $t_{2b}$  sia piccolo. In realtà, tutto ciò da cui dipende il tempo di rilassamento è il *trasferimento di energia*: a parità di energia, in un sistema con molti corpi ciascuno di essi possiederà (e sarà quindi in grado di trasferire) minor energia che in un sistema dove ce ne sono meno. Pertanto, i sistemi affollati risultano essere *non collisionali*.

Si deve però considerare che se l'età del sistema è maggiore del suo  $t_{2b}$  allora il sistema è collisionale, e gli urti gravitazionali diventano rilevanti. Nel caso delle galassie si ottiene che il  $t_{2b}$  supera di gran lunga l'età dell'universo (tipicamente di 6 ordini di grandezza); confermando l'argomento geometrico proposto inizialmente, ovvero che le galassie sono sistemi non collisionali.

Come conseguenza di questo, non è possibile trattare le galassie con le equazioni della meccanica statistica; ragion per cui è necessario introdurre l'Equazione di Boltzmann.

## 2.2 Equazione di Boltzmann

Nella sezione precedente è stata introdotta la *Funzione di Distribuzione*  $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ , uno strumento molto utile e potente per poter studiare i moti delle stelle nelle galassie. Si vedrà ora come questa funzione sia indispensabile per identificare le equazioni per la Dinamica Stellare.

Si consideri un insieme di stelle che si muove sotto l'azione di un potenziale regolare  $\phi(\vec{x}, t)$  all'interno di un insieme  $\Omega$  nello spazio delle fasi. Il numero  $N$  di stelle in questo insieme è dato dall'integrale  $N(\Omega) = \int_{\Omega} f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3\vec{x} d^3\vec{v}$ . Noto un valore iniziale  $f(\vec{x}, \vec{v}, t_0)$  e il potenziale di interazione, è possibile conoscere il valore di  $f$  ad ogni  $t$ . Sia  $\vec{w} = (\vec{x}, \vec{v})$ , in modo che  $\dot{\vec{w}} = (\dot{\vec{x}}, \dot{\vec{v}}) = (\vec{v}, -\nabla\phi)$ . Poiché il numero di stelle in una galassia si conserva, la densità di stelle  $f(\vec{w}, t)$  soddisfa un'equazione di continuità simile a quella dei fluidi incomprimibili:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 w_i \frac{\partial f}{\partial w_i} = 0 \quad (2.12)$$

Poiché  $x_i$  e  $v_i$  sono coordinate indipendenti dallo spazio delle fasi e dal potenziale, l'equazione (2.12) può essere scritta nella seguente forma, che prende il nome di *Equazione di Boltzmann non collisionale*:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f - \nabla \phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (2.13)$$

### 2.2.1 Equazioni di Jeans

Per poter descrivere la dinamica delle galassie si devono trovare le soluzioni dell'equazione (2.13). Si introducano quattro funzioni:

$$\text{Densità Spaziale di Stelle} \rightarrow \varrho := \int f d^3 \vec{v} \quad (2.14)$$

$$\text{Velocità Media} \rightarrow \bar{v}_i := \frac{1}{\varrho} \int v_i f d^3 \vec{v} \quad (2.15)$$

$$\text{Prodotto medio di velocità} \rightarrow \overline{v_i v_j} := \frac{1}{\varrho} \int v_i v_j f d^3 \vec{v} \quad (2.16)$$

$$\text{Tensore di Dispersione di Velocità} \rightarrow \sigma_{ij}^2 := \frac{1}{\varrho} \int (v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j) f d^3 \vec{v} = \sigma_{ji}^2 \quad (2.17)$$

Integrando l'Equazione di Boltzmann nelle velocità si ottengono le equazioni dei *momenti* di  $f$ :

$$1^a \text{ Equazione di Jeans} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \varrho + \frac{\partial}{\partial x_i} (\varrho v_i) = 0 \quad (2.18)$$

analoga all'equazione di continuità dei fluidi: nei sistemi non collisionali, invece che conservarsi la *massa*, si conserva la *densità spaziale*.

Ora si moltiplichino l'Equazione di Boltzmann per una velocità  $v_j$  e si integri:

$$2^a \text{ Equazione di Jeans} \rightarrow \frac{\partial(\varrho \bar{v}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho v_i \bar{v}_j)}{\partial x_i} + \varrho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0 \quad (2.19)$$

che a sua volta è analoga alla Legge di Conservazione dell'Impulso.

Combinando le equazioni (2.18) e (2.19) si ottiene:

$$3^a \text{ Equazione di Jeans} \rightarrow \varrho \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \varrho v_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} = -\varrho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial(\varrho \sigma_{ij}^2)}{\partial x_i} \quad (2.20)$$

analoga all'Equazione di Eulero per un fluido incomprimibile sotto l'azione di un potenziale gravitazionale  $\phi$  e di un tensore di stress  $\varrho \sigma_{ij}^2$ , che ha le caratteristiche di una pressione anisotropa.

Studiando i momenti agli ordini successivi è possibile ottenere un set infinito di Equazioni di Jeans, che è però destinato non essere mai "chiuso", come accade invece per i fluidi: dall'Equazione di Boltzmann non discende un'equazione di stato. Per poter chiudere il sistema, è necessario analizzare il Tensore di Dispersione di Velocità  $\sigma_{ij}^2$ : si tratta di un tensore in grado di definire, attorno ad ogni vettore velocità, un *ellissoide di dispersione* che caratterizza, tramite la sua dipendenza dalla direzione di misurazione, il tensore della Temperatura. Da questo discende l'*anisotropicità* delle galassie, che sarà vista nel dettaglio nel prossimo capitolo.

## 2.3 Teorema del Viriale

A partire dalle Equazioni di Jeans, calcolando le medie su  $\vec{x}$ , si può ottenere un insieme di identità tensoriali che prende il nome di *Teorema del Viriale Tensoriale*. Se si considera il più semplice elemento di questo insieme, ovvero un tensore di secondo ordine, e ne si ricava la traccia, si ottiene la forma scalare del Teorema del Viriale (TdV):

$$2T = -U \quad (2.21)$$

un'equazione che rappresenta la condizione di equilibrio di un sistema autogravitante in cui  $T$  è l'energia cinetica e  $U < 0$  è la sua energia potenziale gravitazionale.

Nel caso di sistemi soggetti a *forze conservative*, è valida la Legge di Conservazione dell'Energia:

$$T = |U| + E \quad (2.22)$$

Andando ad analizzare il Piano Viriale (Figura 2.2) si ha che un sistema è all'equilibrio se e solo se le sue coordinate ( $|U|, T$ ) si trovano sulla Retta del Viriale (con equazione  $T = \frac{|U|}{2}$ ). Per ogni sistema descritto dalla legge (2.22) si avrà che il punto di equilibrio è dato dall'intersezione tra la retta di conservazione dell'energia e quella del TdV.

Questo vuol dire che sistemi con  $E > 0$  non raggiungono mai l'equilibrio.

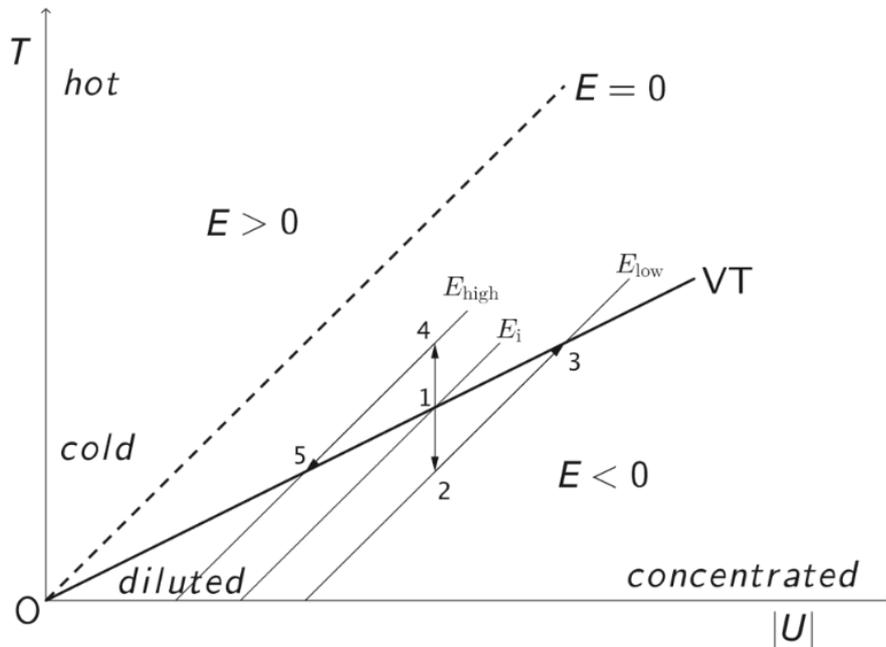


Figura 2.2: Piano Viriale. A seconda dei valori di  $T$  e  $|U|$  i sistemi hanno caratteristiche differenti: con  $|U|$  piccoli, i sistemi sono *non compatti*, mentre con valori grandi *compatti*; con piccoli valori di  $T$  si parla di sistemi *freddi*, in caso contrario di sistemi *caldi*. Fonte: *Introduction to Stellar Dynamics*, L.Ciotti, Cambridge University Press.

Dal Piano Viriale si estrapola un'altra caratteristica dei sistemi autogravitanti, ovvero il *calore specifico negativo*. Fornendo energia ad un sistema autogravitante (freccia 1 nella Figura 2.2), questo si rilasserà all'equilibrio in una configurazione ad energia cinetica minore (5), cioè più fredda. Viceversa, sottraendo energia (freccia 2 nella Figura 2.2), il sistema si rilasserà in una configurazione più calda (3).

# Capitolo 3

## Dinamica delle Galassie Ellittiche

Nell'affrontare la dinamica delle galassie ellittiche si sottolineeranno le loro principali caratteristiche, tra cui l'anisotropia e la descrizione tramite Profili di Brillanza. Si andranno poi a delineare le principali leggi che descrivono il rapporto tra le osservabili, contenute e riassunte dal Piano Fondamentale.

### 3.1 Galassie Ellittiche come Sistemi Anisotropi

Una delle caratteristiche principali delle galassie ellittiche è lo *schiacciamento intrinseco* a cui queste sono soggette.

Inizialmente, si pensava si trattasse di una banale applicazione della Teoria di Newton, per la quale *un fluido in rotazione si schiaccia nel piano perpendicolare all'asse di rotazione*. MacLaurin aveva determinato le configurazioni di equilibrio di una massa fluida rotante, denominate *Ellissoidi di MacLaurin*, con cui aveva associato ad ogni schiacciamento osservato la corrispondente velocità di rotazione. Grazie a Carl Jacobi, inoltre, si era collegata la proprietà di triassialità delle galassie ellittiche al comportamento di oggetti che ruotano oltre la relativa velocità critica.

Quando si cominciarono a plottare le curve di rotazione delle galassie ellittiche, però, si trovarono delle velocità di rotazione che non avevano nulla a che fare con quelle previste dallo schiacciamento di MacLaurin. Fu James Binney il primo a collegare l'incongruenza con l'anisotropia del tensore di dispersione di velocità, data dal fatto che *le galassie ellittiche sono oggetti che non si trovano all'equilibrio termodinamico*. Qualitativamente, si può dire - utilizzando uno schema di meridiani e paralleli simile a quello terrestre - che le galassie ellittiche sono più "calde" lungo i piani paralleli e più "fredde" lungo i meridiani.

### 3.2 Profili di Brillanza

In virtù dell'assenza di gas al loro interno, le galassie ellittiche si possono considerare corpi *trasparenti*. Infatti, andando a valutare il *covering factor*, con valori tipici di una galassia Early Type questo è:

$$\frac{N_* R_\odot^2}{R_e} \approx 10^{-13} \quad (3.1)$$

Cioè le stelle contenute al suo interno non si oscurano a vicenda né si sovrappongono: questo permette di poter lavorare sulla proiezione della galassia su un piano verticale. Si assuma una galassia E0 riempita uniformemente da una densità costante e omogenea. Ci sono quattro risultati importanti applicabili in queste condizioni:

- **Equazione Integrale di Inversione di Abel**

$$\rho(r) = -\frac{1}{\pi} \int_R^\infty \frac{dI(r)}{dR} \cdot \frac{dR}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad (3.2)$$

Dove  $r$  è la distanza tra origine e linea di vista e  $R$  il raggio dell'isofota<sup>2</sup> proiettata. L'equazione ci dice che a partire dalla proiezione di una distribuzione sferica  $I(R)$  è possibile ricavare l'equazione di  $\rho(r)$  che descrive la densità;

- **Risultato sulle Isofote di un Ellissoide**

Le isofote di un ellissoide bi/triassiale proiettato sono *ellissi*. Se le isofote *non sono allineate* l'ellissoide è triassiale. Se sono allineate, potrebbe essere sia biassiale che triassiale;

- **Legge di Sersic per il Profilo di Brillanza delle Galassie Ellittiche**

$$I(R) = I(0)e^{-b(m)\left(\frac{R}{R_e}\right)^{\frac{1}{m}}} \text{ con } b(m) = 2m - \frac{1}{3} \quad (3.3)$$

Un'equazione al primo ordine che, se considerata all'ordine zero con  $m = 4$ , corrisponde alla *Legge Empirica di De Vacouler*:

$$I(R) = I(0) = e^{-7.67\left(\frac{R}{R_e}\right)^{\frac{1}{4}}} \quad (3.4)$$

- **Campo Gravitazionale per un Ellissoide triassiale**

Noto il campo gravitazionale è cui è soggetto un ellissoide triassiale, si possono conoscere le sue *orbite stabili*.

Il fatto che tutte le galassie ellittiche condividono questi risultati le rende corpi *omologhi* sia nella forma che nelle orbite; questo ha come conseguenza l'esistenza di un potente strumento, analizzato nella successiva sezione.

### 3.3 Piano Fondamentale

Il Piano Fondamentale (PF) è un piano nello spazio 3D logaritmico ( $\log L, \log \sigma, \log R_e$ ) su cui si trovano tutte le galassie ellittiche. Si tratta di un piano sottile descritto dall'equazione:

$$\log L = \alpha \cdot \log R_e + \beta \cdot \log \sigma_0 + \gamma \text{ con } \alpha \approx 1; \beta \approx 2 \quad (3.5)$$

Questo piano contiene tutte le correlazioni tra le osservabili delle galassie ellittiche. Infatti, se si guarda la proiezione del PF sul piano  $\log L - \log \sigma$  si ottiene:

$$\text{Legge di Faber-Jackson} \quad L \propto \sigma_0^4 \quad (3.6)$$

Mentre, sul piano  $\log L - \log R_e$ :

$$\text{Legge di Cormendy} \quad L \propto R_e \quad (3.7)$$

---

<sup>2</sup>Linea che collega punti con la stessa luminosità. Le isofote di un ellissoide sono figure concentriche e omotetiche (conservano l'eccentricità) la cui coassialità può non conservarsi nel caso di ellissoidi triassiali. Il fenomeno è detto *Ishophotal Twisting* ed è comune a molte galassie ellittiche.

Infine, sul piano  $\log R_e - \log \sigma_0$  si ottiene:

$$\text{Legge } D_n - \sigma \quad R_e \propto \sigma_0^x \text{ con } x \approx 4 \quad (3.8)$$

Si tratta di tre leggi con fasce d'errore associate non restringibili, dovute al fatto che il PF non è parallelo a nessuno dei tre piani e non è infinitamente sottile.

Il motivo per cui tutte le galassie ellittiche sono contenute in questo piano è dato dal fatto che esse sono sistemi:

1. **Omologhi**: il parametro  $\gamma$  che ne identifica lo spessore è circa lo stesso per ogni galassia ellittica.
2. **All'Equilibrio Dinamico**: cioè vale il Teorema del Viriale. Infatti, considerando la forma scalare  $2T = U$  si può ottenere la relazione logaritmica:

$$\log L = 1 \cdot \log R_e + 2 \cdot \log \sigma_0 + \log C_v \quad \text{dove } C_v = \frac{K_v}{G\Upsilon_*} \quad (3.9)$$

Inoltre si ha  $K_v^3 := \frac{\sigma_v^2 R_e}{\sigma_0 R_v}$ , mentre  $\Upsilon_*$  è il rapporto Massa/Luminosità in termini di costanti solari.

Il valore di  $C_v$  potrebbe potenzialmente essere diverso di galassia in galassia, ma risulta invece essere sempre all'incirca lo stesso. Questo avviene perché le galassie ellittiche sono sistemi *omologhi*.

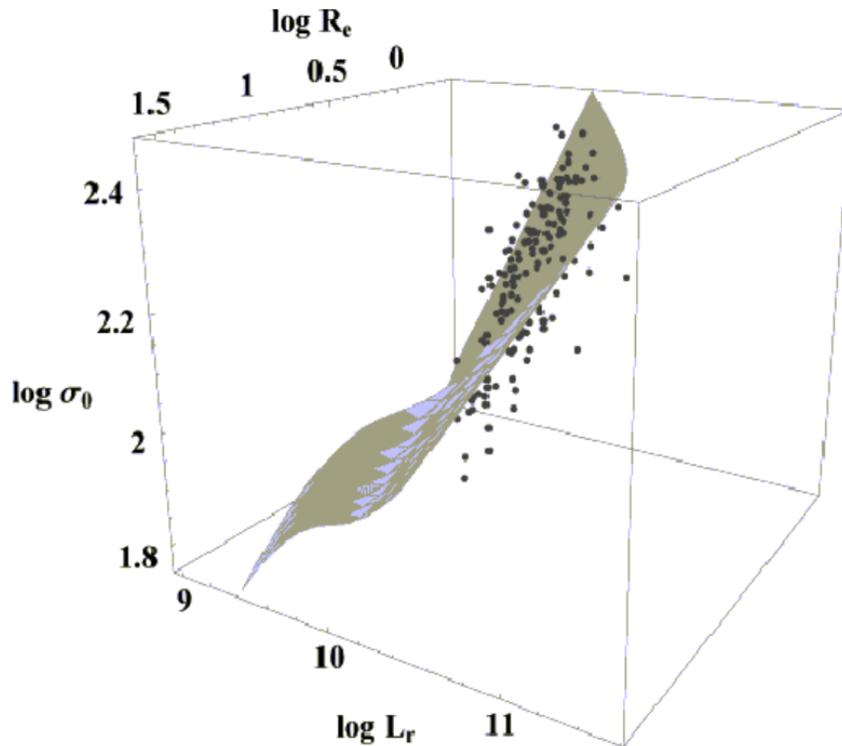


Figura 3.1: Piano Fondamentale. Fonte: <https://i.stack.imgur.com/y7Qrg.gif>

<sup>3</sup>Le quantità con pedice v sono quelle del sistema virializzato.

# Capitolo 4

## Dinamica delle Galassie a Spirale

Le galassie a spirale si possono scomporre, dal punto di vista dinamico, in diverse zone. Nel Bulge centrale, le stelle possiedono moti caotici simili al caso delle ellittiche, mentre al di fuori di esso, nella zona del Disco Galattico, le stelle seguono moti ordinati, con velocità caratterizzate dalla *Curva di Rotazione* della galassia. Nelle successive sezioni si affronterà il percorso seguito per ottenere la corretta *Curva di Rotazione* per le galassie a spirale, e si utilizzeranno le informazioni ottenute per definire la *Legge di Tully Fisher*. Infine, sarà necessario un accenno alla dinamica dei *bracci a spirale*.

### 4.1 Curva di Rotazione

La Curva di Rotazione è una proprietà del campo gravitazionale di un sistema a simmetria assiale (come il Disco Galattico) che descrive con quale velocità *può* muoversi, con orbita pressoché circolare, un corpo ad una certa distanza  $r$  dalla buca di potenziale del sistema.

Il primo approccio al calcolo di questa curva è stato quello kepleriano: nota l'accelerazione di gravità  $\frac{GM}{r^2}$  e l'accelerazione di moto circolare  $\frac{v^2}{r}$ , uguagliando queste quantità si otterrà che la velocità di un corpo a distanza  $r$  segue:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (4.1)$$

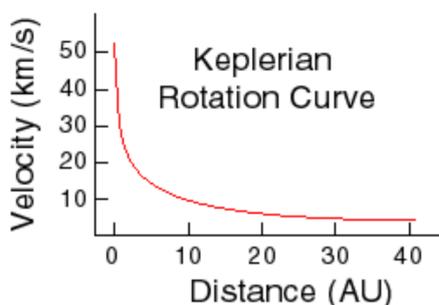


Figura 4.1: Curva Kepleriana. Fonte: *Slides del Corso di Astronomia*, A.A 2019/2020, A. Cimatti

Secondo questa relazione, detta anche *Terza Legge di Keplero per le Orbite Circolari*, gli oggetti più lontani dal centro dovrebbero rimanere “più indietro”. Questo porta ad un apparente paradosso, noto come *Winding Dilemma*: a velocità  $v$  costante, la velocità

angolare  $w = \frac{v}{r}$  decresce con il raggio, e di conseguenza i bracci a spirale dovrebbero avvolgersi molto velocemente, cosa che non accade, in quanto l'avvolgimento dei bracci è costante. Questo portò alla conclusione che le Curve di Rotazione delle Galassie a Spirale *non sono Kepleriane*.

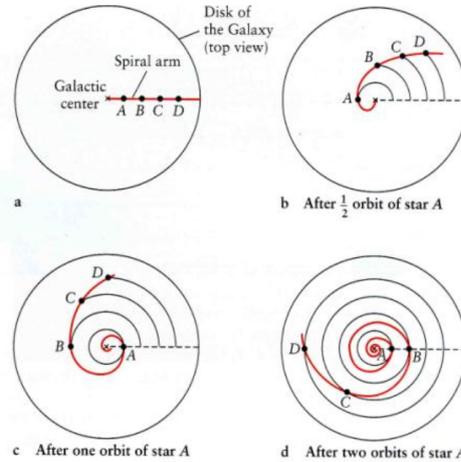


Figura 4.2: Winding Dilemma. Fonte: Materiale didattico di R. Sambruna, George Mason University

L'approccio successivo fu quello di considerare stelle che si muovono in una *distribuzione di densità a simmetria sferica* con moti circolari. In questa situazione valgono il *Primo e Secondo Teorema di Newton* per cui il campo gravitazionale esercitato dal sistema è identico ad uno per cui *tutta la massa è concentrata al centro e solo la massa entro il raggio  $r$  contribuisce al campo*:

$$M(r) = 4\pi \int_0^r t^2 \rho(t) dt \quad (4.2)$$

In questo caso l'andamento della velocità in funzione del raggio considera la distribuzione di materia ed è dato da:

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r^2}} \quad (4.3)$$

Nonostante in questa forma la Curva di Rotazione presupponesse un corretto andamento a picco (dato dall'alta concentrazione di massa nella zona centrale) ed una successiva zona piatta, le curve estrapolate dai dati non coincidevano ancora con quelle osservate. Ci sono due spiegazioni per questo fatto:

1. I teoremi di Newton **non sono validi per le distribuzioni a disco** come nel caso delle galassie a spirale. Questo vuol dire che *anche il materiale esterno ad  $r$  contribuisce al campo gravitazionale*
2. Dev'esserci, nelle galassie, materia rilevante gravitazionalmente ma con sezione d'urto elettromagnetica piccola che contribuisca fortemente al campo gravitazionale. Questa materia è detta **Materia Oscura** (per via del fatto che non assorbe né emette fotoni) e di essa si conosce ancora poco.

Inoltre, la presenza di una zona piatta in corrispondenza del Disco Galattico ci suggerisce che questo si trova in *rotazione differenziale*. La Curva di Rotazione delle galassie a spirale corretta è descritta in Figura 4.3.

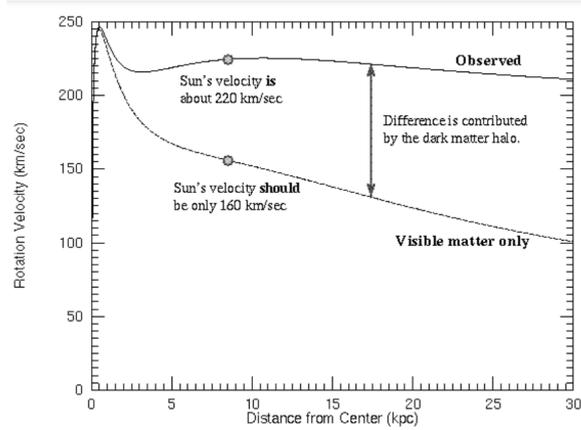


Figura 4.3: Curva di Rotazione: confronto tra prevista e osservata. Per stimare la curva prevista, si è utilizzata solo la materia visibile, mentre per quella osservata, oltre alla luminosità, si è considerata la mappatura delle nubi di HI attraverso l'emissione della riga 21 cm. Fonte: *Slides del Corso di Astronomia, A.A 2019/2020, A. Cimatti*

## 4.2 Legge di Tully Fisher

Anche per le galassie a spirale, come visto per le ellittiche, esiste una relazione tra la luminosità totale della galassia e velocità delle stelle al suo interno. Mentre per le ellittiche, le cui stelle seguono moti caotici, è stato necessario servirsi del tensore di dispersione di velocità  $\sigma_{ij}^2$ , per le galassie a spirale sarà sufficiente utilizzare la velocità di rotazione delle stelle nel disco, presa in corrispondenza della zona piatta della Curva di Rotazione:

$$\text{Legge Empirica di Tully-Fisher} \quad L \propto v_{rot}^4 \quad (4.4)$$

Caratterizzata da una fascia d'errore globale del  $\sim 40\%$ .

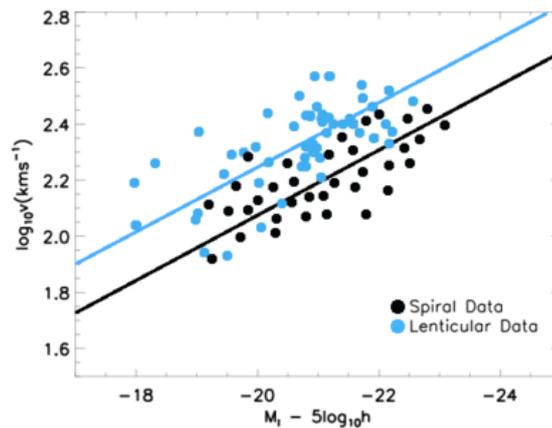


Figura 4.4: Legge di Tully Fisher per galassie a spirale e lenticolari. Fonte: Wikipedia

## 4.3 Dinamica dei Bracci a Spirale

Come già anticipato nel Capitolo 1, i bracci a spirale sono zone con alta densità di gas freddo, popolate principalmente da stelle giovani, grandi e calde, e con un alto rate di formazione stellare. Si possono catalogare in *Bracci Leading* (orientati nella direzione

di rotazione del disco) e *Trailing* (orientati in direzione opposta). Nel corso degli anni, molti studi si sono occupati di spiegarne origine e dinamica caratteristica. La prima teoria sviluppata supponeva che alla formazione della galassia, i bracci altro non fossero che zone ad alta densità di materia che, a causa della rotazione differenziale della galassia, venissero progressivamente avvolti attorno al suo centro.

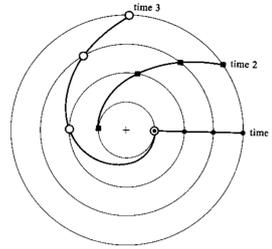


Figura 4.5: Progressivo avvolgimento del braccio a spirale. Fonte: Materiale didattico di M. Rieke, University of Arizona

A quest'ipotesi si opponevano due argomentazioni: in primo luogo, non spiegava la diversa tipologia di popolazione stellare dei bracci rispetto al resto del Disco Galattico; in secondo luogo, i ritmi di avvolgimento previsti sarebbero tali che, dopo poche rotazioni, i bracci risulterebbero così attorcigliati da essere indistinguibili, scomparendo nel giro di un miliardo di anni, in contraddizione con l'età delle galassie.

Furono gli scienziati **Lin** e **Shu**, nel 1964, a proporre un modello alternativo basato sulle *onde di densità*: i bracci non sono concentrazioni fisse di stelle gas avvolte a causa della rotazione differenziale, bensì onde di densità quasi statiche. Le stelle più vicine al centro galattico si muovono con velocità angolare  $\Omega > \Omega_\rho$  dell'onda e la sopravanzano; nel caso delle stelle periferiche ( $\Omega < \Omega_\rho$ ), è l'onda a raggiungerle, inglobarle e poi lasciarle. Si può definire il raggio di co-rotazione  $R_c$  in cui  $\Omega(R_c) = \Omega_\rho$ , zona in cui si trova attualmente il nostro Sole.

Nel momento in cui gas e stelle sono raggiunti dalle onde di densità, il materiale rallenta e si comprime: le nubi di gas collassano e formano stelle di ogni classe spettrale, in tempi scala dell'ordine di centinaia di migliaia di anni. Le stelle più calde e massive terminano la loro vita prima di poter lasciare la zona dell'onda di densità, mentre quelle con vita superiore riescono ad uscirne, andando a popolare le altre zone del disco: è questa la spiegazione alla diversa popolazione (e colorazione) tra Bracci e Disco.

Rimane un'unica questione senza spiegazione: quale perturbazione abbia generato le onde di densità al momento della formazione della galassia. Tra le possibili risposte vi sono: collassi di nuvole di gas, formazione stellare a catena nelle regioni centrali o interazione gravitazionale con altre galassie.

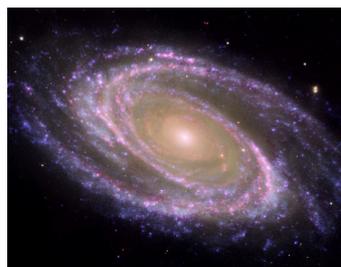


Figura 4.6: Galassia a Spirale M81. Immagine ottenuta combinando i dati dei telescopi Hubble, Spitzer, e GALEX. Fonte: NASA



# Bibliografia

- [1] Ciotti L., *Appunti dalle lezioni frontali di Astrofisica Extragalattica*, A.A. 2021/2022.
- [2] Ciotti L., *Introduction to Stellar Dynamics*, Cambridge University Press, 2021.
- [3] Ciotti L., *Alcune questioni matematiche riguardanti la dinamica stellare*, estratto da *Bollettino della Unione matematica italiana: Matematica nella società e nella cultura. Sezione A*. Zanichelli Editore, 2002.
- [4] Cimatti A., *Appunti dalle lezioni frontali di Astronomia*, A.A. 2019/2020.
- [5] Karttunen H., Kroger P., Oja H., Poutanen M. & Donner K. J., *Fundamental Astronomy*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2016.
- [6] Bertin G., Lin C., *Spiral Structure in Galaxies: A Density Wave Theory*, Regno Unito: MIT Press, 1996.



## Ringraziamenti

Vorrei cominciare ringraziando la mia famiglia, in particolare i miei genitori, che mi hanno sostenuta sempre in ogni iniziativa intrapresa, compresa quella di decidere di studiare Astronomia. Mi hanno insegnato ad inseguire i miei sogni, con la consapevolezza che sarebbero sempre stati un vento gentile a spingere le vele del mio futuro.

Grazie a mia sorella Beatrice, la mia ombra e la mia luce, che in questi anni mi ha guidata come un faro verso la versione migliore di me, sempre al mio fianco durante ogni momento difficile, anche quando eravamo lontane. A lei devo tanti insegnamenti, soprattutto su quanto sia importante avere determinazione e sani principi.

A mia nonna, che tanto ha fatto per me nella sua vita, e che oggi non sarà al mio fianco, ma che spero possa ancora ricordarsi di me con lo stesso affetto con cui la ricordo io.

Ai miei zii, e ai pochi altri parenti stretti che in questi anni sono rimasti accanto a me e alla mia famiglia, mostrando sempre gentilezza e disponibilità.

Vorrei dire grazie alle mie coinquiline, Elisa e Allegra, che in quest'ultimo anno hanno condiviso ogni parte della mia quotidianità, guardato nella mia anima e riso con me dell'assurdità e della bellezza della vita. Sono felice di condividere questo capitolo della mia esperienza con voi, e di poterlo fare ancora a lungo.

A Leonardo, che con la sua anima gentile ha toccato corde di me che non pensavo potessero suonare.

A Francesca, Matteo, Giulia, Annalisa, Carlo, Cianph e Paolo, con cui ho affrontato gli alti e bassi di quest'esperienza universitaria vissuta a metà. Agli altri colleghi, e amici, con cui nel corso di questi tre anni si è formata una famiglia allegra e accogliente.

Alle insegnanti che hanno segnato il mio percorso, Gianna R. e Maria Teresa M., che mi hanno lasciato una formazione letteraria senza eguali e hanno sempre creduto in me e nelle mie potenzialità. A distanza di anni, le loro parole di stima ancora rimangono con me.

Ai professori del corso di Laurea in Astronomia, che mi hanno mostrato le mille sfaccettature della ricerca e hanno reso, a modo loro, indimenticabile quest'esperienza. In particolare, al Prof. Luca Ciotti, per la immensa passione che mi ha trasmesso e l'approccio didattico unico.

Al coro Ars Canto G. Verdi di Parma, che anche in un momento delicato come quello della pandemia non ha smesso di voler portare gioia attraverso la musica, anche in luoghi di guerra.

A tutti gli amici, vicini e lontani, che mi hanno regalato sorrisi quando meno me lo sarei aspettata, e che senza saperlo hanno avuto un grande impatto su di me.

A chi mi ha augurato di riuscire ad ammirare la bellezza del mondo in ogni sua sfaccettatura, e di *coltivare un'invincibile passione* per quello che avrei studiato: tornerò a casa ricca dei tesori accumulati per la strada.

Grazie.