

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Astronomia

# **Meccanismi di trasporto dell'energia in astrofisica**

Tesi di laurea

Presentata da:  
Alessia Bartolomei

Relatore:  
Chiar.ma Prof.ssa Marcella Brusa

---

Anno accademico 2021-2022

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Conduzione</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Trasporto radiativo</b>	<b>5</b>
3.1	Radiazione negli interni stellari . . . . .	5
3.1.1	Equazione del trasporto radiativo . . . . .	5
3.2	Opacità . . . . .	6
3.3	Radiazione nelle atmosfere . . . . .	8
3.3.1	Equazione del trasporto nelle atmosfere stellari . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Convezione</b>	<b>12</b>
4.1	Gradiente adiabatico . . . . .	12
4.2	Criterio di Schwarzschild . . . . .	14
4.3	Equazione del flusso convettivo . . . . .	16
	<b>Bibliografia</b>	<b>19</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

In astrofisica l'energia, prodotta attraverso numerosi processi tra cui le reazioni nucleari, può essere trasportata attraverso tre meccanismi possibili: conduzione, trasporto radiativo e convezione.

<b>Meccanismo di trasporto</b>	<b>Agente</b>
Conduzione	Elettrone
Radiazione	Fotone
Convezione	Celle di gas

La conduzione avviene attraverso gli elettroni e diventa importante dal punto di vista astrofisico nel caso di materia degenere.

Il trasporto radiativo, invece, si basa sul trasferimento di energia sotto forma di fotoni. La radiazione può originarsi in ogni parte dell'universo, e ciò rende i fotoni il principale mezzo di trasporto dell'energia in astrofisica. Il fascio di radiazione percorre di solito lunghe distanze prima di essere rilevato, perciò lungo una certa linea di vista (L.O.S.) i fotoni possono provenire da contributi diversi. Infatti, la radiazione può raggiungere l'osservatore indisturbata, ma può anche interagire con la materia durante il tragitto, comportando una perdita di informazione. L'energia persa può essere poi riemessa contribuendo a un'altra L.O.S, come si vedrà in seguito.

La convezione, infine, è un meccanismo di trasporto di energia e materia che si basa sullo scambio di celle di gas. Dal punto di vista astrofisico, l'esempio più conosciuto di trasporto convettivo è quello che avviene all'interno del sole, e quindi in generale all'interno delle stelle, ma può avvenire anche nelle atmosfere, come in quella terrestre. In generale, la convezione si origina dalla presenza di un gradiente termico tra due fluidi, in cui il fluido di temperatura maggiore si trova sotto a quello più freddo.

È possibile descrivere ognuno dei tre meccanismi analizzando la struttura stellare. Infatti, negli interni stellari l'energia può essere trasportata dai fotoni, dalle celle di gas oppure dagli elettroni, a seconda delle condizioni della stella. Inoltre il trasporto radiativo è il principale meccanismo di trasporto dell'energia nelle atmosfere stellari.

Nelle stelle l'energia viene prodotta all'interno del nucleo attraverso reazioni termonucleari. Viene poi trasportata verso l'esterno da uno dei tre meccanismi, principalmente la radiazione o la convezione. Il flusso di energia verso l'esterno dipende soprattutto dal gradiente termico  $\nabla T$ , senza il quale non si avrebbe trasporto di energia, ma sono rilevanti anche altri fattori come l'opacità  $\kappa$ , ovvero il coefficiente di assorbimento di energia per grammo, introdotto nell'equazione del trasporto radiativo.

# Capitolo 2

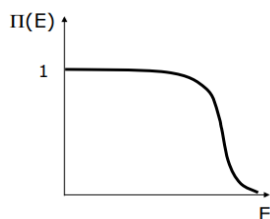
## Conduzione

La conduzione elettronica, così come il trasporto radiativo, si basa sulla collisione di particelle energetiche con altre particelle di minore energia.

Negli interni stellari la conduzione dovrebbe essere il meccanismo principale, in quanto l'energia degli elettroni è molto maggiore dell'energia dei fotoni. Questo però non avviene a causa del libero cammino medio  $\ell$ , ovvero la distanza media che una particella percorre prima di urtarne un'altra. Nel caso di gas perfetto il libero cammino medio dei fotoni è maggiore di quello degli elettroni, e quindi la conduzione è un fenomeno trascurabile negli interni stellari.

Questo meccanismo diventa però rilevante in condizioni di materia degenere.

Un gas viene definito degenere quando la sua pressione dipende solo dalla densità e non più dalla temperatura, come invece avviene per i gas perfetti. Ciò si realizza in condizioni di elevata densità, per esempio nelle ultime fasi dell'evoluzione di una stella, nelle nane bianche e nelle stelle di neutroni. Le particelle sono portate ad occupare livelli energetici più alti, perché i livelli di energia inferiore sono già occupati e di conseguenza questo cancella la dipendenza dalla temperatura. Normalmente, infatti, è quest'ultima a definire il livello energetico più probabile assunto dalle particelle.



**Figura 1:** Distribuzione statistica di Fermi-Dirac (*Fonte:* [2]).

Si passa, perciò, da una statistica di Maxwell (gas perfetto) ad una statistica di Fermi-Dirac indipendente dalla temperatura (gas degenere).

Nel caso di degenerazione completa si dice che tutti i livelli energetici sono occupati fino all'energia di Fermi, che è la massima energia assunta dalle particelle.

Nella materia degenere, quindi, gli elettroni non possono cedere energia ad altre particelle meno energetiche in quanto tutti gli stati energetici più bassi sono occupati, e ciò comporta un aumento del libero cammino medio e un conseguente aumento dell'efficienza del meccanismo di trasporto.

Il flusso conduttivo si scrive come:

$$F_e \sim -N_e k_B v \ell \frac{dT}{dr}$$

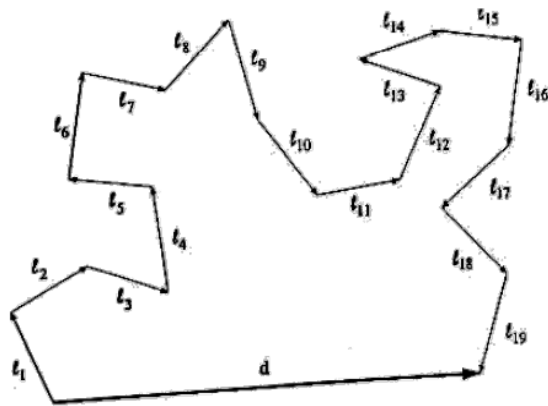
dove  $N_e$  è il numero di elettroni per unità di volume,  $k_B$  è la costante di Boltzmann,  $v$  è la velocità e  $\frac{dT}{dr}$  è il gradiente di temperatura necessario per il trasporto di energia.

# Capitolo 3

## Trasporto radiativo

### 3.1 Radiazione negli interni stellari

Il trasporto radiativo, come già accennato, è uno dei meccanismi di trasporto principali negli interni stellari, grazie al maggiore libero cammino medio ( $\ell$ ) dei fotoni. Questi ultimi vengono emessi nelle regioni più calde della stella e viaggiano verso i gusci esterni più freddi (gradiente termico). Non si deve, però, pensare al trasporto radiativo come a un flusso ordinato di fotoni che si propaga in linea retta verso la superficie. Il fotone si muove in maniera casuale, compiendo un numero  $N$  di scambi con altre particelle per percorrere una certa distanza  $d$ , come si può osservare in **Figura 2**.



**Figura 2:** Spostamento  $d$  di un fotone in movimento casuale (*Fonte:* [2]).

Lo spostamento  $d$  di un fotone si calcola come:

$$d = \ell\sqrt{N}$$

Per esempio, al fotone sono necessari 100 scambi per percorrere uno spazio di  $10\ell$ . I tempi necessari al trasporto dell'energia sono quindi molto lunghi; in particolare i fotoni prodotti nel nucleo del Sole impiegano  $10^6$  anni per raggiungere la superficie.

#### 3.1.1 Equazione del trasporto radiativo

Nel caso di trasporto radiativo, per descrivere il gradiente termico si introduce l'equazione del trasporto radiativo. Per ricavarla, si parte dall'espressione della pressione di

radiazione:

$$P_{rad} = \frac{1}{3}aT^4$$

dove  $T$  è la temperatura e  $a = 7.564 \times 10^{-16} Jm^{-3}K^{-4}$ . Derivando rispetto ad  $r$  si ottiene:

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = \frac{4}{3}aT^3 \frac{dT}{dr}$$

Il gradiente di pressione si può scrivere anche come:

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = -\frac{\kappa\rho}{c}F_{rad}$$

Eguagliando quindi le due espressioni

$$\frac{dT}{dr} \frac{4}{3}aT^3 = -\frac{\kappa\rho}{c}F_{rad}$$

e considerando il flusso di radiazione  $F_{rad} = \frac{L}{4\pi r^2}$ , otteniamo

$$\boxed{\left. \frac{dT}{dr} \right|_{rad} = -\frac{3}{4ac} \frac{\kappa\rho}{T^3} \frac{L}{4\pi r^2}} \quad (3.1)$$

che è l'equazione del trasporto radiativo, dove  $c$  è la velocità della luce,  $\rho$  è la densità,  $r$  è il raggio e  $L$  è la luminosità.

La nuova variabile  $\kappa$  è l'opacità, che verrà approfondita nel prossimo paragrafo.

È importante notare come il gradiente termico sia proporzionale al flusso di radiazione (e viceversa, come si vedrà in seguito). Questa relazione può essere letta come una legge di proporzionalità tra causa ( $\frac{dT}{dr}$ ) ed effetto ( $F_{rad}$ ). Inoltre si ha una forte dipendenza dalle condizioni ambientali del guscio della stella che si considera (densità, temperatura, opacità).

## 3.2 Opacità

L'opacità è una misura della resistenza opposta dalla materia al passaggio della radiazione. La causa dell'opacità è l'interazione della radiazione con gli elettroni.

Un gas può essere opaco a una lunghezza d'onda e trasparente a un'altra, a seconda della densità e della temperatura. Infatti, come già accennato, è soprattutto quest'ultima a determinare il livello di popolamento degli elettroni, e di conseguenza quali lunghezze d'onda vengono assorbite.

L'opacità è una quantità molto importante per determinare il trasporto di energia, sia negli interni stellari sia nelle atmosfere, in quanto i processi che la causano contribuiscono alla diminuzione del flusso di radiazione.

In maggior dettaglio, i processi si distinguono in:

- **Assorbimento legato-legato (BB)**

Un elettrone che si trova in uno stato legato di energia  $E_1$  assorbe un fotone e si porta ad uno stato legato di energia  $E_2$ . Il fotone deve avere una frequenza  $\nu_{BB}$  tale per cui  $h\nu_{BB} = E_2 - E_1$ .

Questo è un processo di assorbimento selettivo, in quanto per avvenire il fotone

deve avere una specifica frequenza, corrispondente alla differenza di energia tra lo stato finale e lo stato iniziale.

Per fare questo tipo di transizioni, sono necessari degli elettroni legati. Per questo motivo negli interni stellari l'assorbimento BB è trascurabile, visto che gran parte degli atomi a quelle temperature sono ionizzati. Tale processo è, invece, estremamente rilevante per le atmosfere, essendo la causa della formazione delle righe spettrali. In generale, questa tipologia di assorbimento diventa importante per temperature al di sotto di  $\sim 10^6 K$ .

L'assorbimento legato-legato è anche detto "fotoeccitazione", mentre il suo processo inverso è l'emissione. Il fotone emesso ha la stessa energia del fotone assorbito, ma viene emesso in una direzione casuale.

- **Assorbimento legato-libero (BF)**

Un elettrone che si trova in uno stato legato di energia  $E_1$  assorbe un fotone di frequenza  $\nu_{BF}$  e si posiziona su un'orbita libera di energia  $E_3$ . Questo processo è anche definito come "fotoionizzazione".

Perché avvenga questa transizione è sufficiente una qualsiasi energia superiore al potenziale di ionizzazione  $\chi_{ion}$ .

$$h\nu_{BF} = E_3 - E_1 > \chi_{ion}$$

Tale processo è quindi molto meno selettivo del precedente e può avvenire negli interni stellari, soprattutto nei gusci più esterni dove le temperature sono abbastanza basse da consentire la presenza di elettroni legati.

L'elettrone liberato può, in seguito, perdere parte della sua energia cinetica a causa della collisione con altre particelle e può essere ricatturato da un altro atomo emettendo un fotone di minore energia (ricombinazione). Perciò questo è un processo che degrada l'energia.

- **Assorbimento libero-libero (FF)**

Un elettrone libero di energia  $E_3$  assorbe un fotone di frequenza  $\nu_{FF}$  e si posiziona su un'altra orbita libera di energia  $E_4$ .

Tale processo non ha restrizioni per quanto riguarda l'energia del fotone assorbito.

$$h\nu_{FF} = E_4 - E_3$$

Questo assorbimento è fondamentale negli interni stellari ad alte temperature.

- **Diffusione (Scattering)**

Dal punto di vista classico, il processo consiste in una collisione tra un elettrone e un fotone senza perdita di energia (scattering Thomson).

Se il fotone di frequenza  $\nu_S$  ha energia tale che

$$h\nu_S \ll mc^2$$

dove  $m$  è la massa della particella con cui il fotone urta, allora la particella non si muove e il fotone viene deviato.

Si ha, quindi, una diminuzione del flusso nella direzione osservata a causa di una deviazione del fotone, e non di un assorbimento, come nei casi precedenti.

Tale processo avviene, soprattutto, negli interni stellari, e il suo effetto è quello di ritardare l'uscita del fotone dalla stella cambiandone continuamente la direzione.

L'opacità data dallo scattering è rilevante solo ad alte temperature e/o a basse densità, quando i contributi all'opacità dei processi BF e FF perdono importanza.

In particolare, quindi, nel caso già citato degli interni stellari, il coefficiente di assorbimento totale si può scrivere come:

$$\kappa_\nu = \kappa_{BF} + \kappa_{FF} + \kappa_S$$

Il pedice  $\nu$  sta ad indicare la dipendenza dell'opacità dalla frequenza.

### 3.3 Radiazione nelle atmosfere

La radiazione elettromagnetica che si osserva dalla Terra proviene dall'atmosfera stellare, ovvero dagli strati trasparenti più esterni. Anche in questo caso possiamo descrivere tale flusso dall'interno verso l'esterno con un'equazione del trasporto, analizzando in principio i due contributi all'intensità del fascio di radiazione, per poi dare una trattazione completa.

Il primo contributo al fascio di radiazione è quello dato dai processi di emissione, che tendono ad aumentare l'intensità della radiazione ad una data lunghezza d'onda (o frequenza). L'aumento d'intensità è proporzionale alla densità e alla distanza percorsa dal fotone  $ds$ .

$$dI_\lambda = j_\lambda \rho ds \quad (3.2)$$

$j_\lambda$  rappresenta il coefficiente di emissione, dipendente dalla lunghezza d'onda.  $I_\lambda$  è definita, invece, come l'intensità specifica, ovvero la quantità di radiazione avente lunghezza d'onda compresa tra  $\lambda$  e  $\lambda + d\lambda$  che passa nell'unità di tempo  $dt$  attraverso l'area  $dA$  e l'angolo solido  $d\Omega$ .

Il secondo contributo è quello dovuto all'assorbimento dei fotoni, provocato dai processi già citati, che genera una diminuzione del flusso totale.

Il parametro che rappresenta l'assorbimento è  $\kappa_\lambda$ , ovvero l'opacità.

$$dI_\lambda = -I_\lambda \kappa_\lambda \rho ds \quad (3.3)$$

Se si considera solo l'assorbimento e si integra l'equazione, per un gas di opacità e densità costanti, si ottiene:

$$\int_{I_{\lambda,0}}^{I_{\lambda,f}} \frac{dI_\lambda}{I_\lambda} = - \int_0^s \kappa_\lambda \rho ds$$

$$\Rightarrow I_{\lambda,f} = I_{\lambda,0} e^{-\kappa_\lambda \rho s} \quad (3.4)$$

Questa equazione ci mostra l'andamento esponenziale dell'intensità di radiazione quando quest'ultima attraversa un mezzo di spessore  $s$  e si trascura l'emissione.

#### 3.3.1 Equazione del trasporto nelle atmosfere stellari

Dalle equazioni 3.2 e 3.3, si può scrivere una prima base per l'equazione del trasporto:

$$dI_\lambda = -I_\lambda \kappa_\lambda \rho ds + j_\lambda \rho ds$$

Il tasso con cui i due processi avvengono determina quanto rapidamente varia l'intensità del flusso.



In particolare, il rapporto tra emissione e assorbimento descrive la tendenza dei fotoni della radiazione ad essere sostituiti da una sorgente "locale" (gas). Per descrivere ciò, si introduce la *funzione sorgente*  $S_\lambda$ , ovvero il rapporto tra coefficiente di emissione e coefficiente di assorbimento.

$$\frac{dI_\lambda}{ds} = -I_\lambda\kappa_\lambda\rho + j_\lambda\rho \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{\kappa_\lambda\rho} \frac{dI_\lambda}{ds} = I_\lambda - \frac{j_\lambda}{\kappa_\lambda}$$

dove

$$S_\lambda = \frac{j_\lambda}{\kappa_\lambda}$$

Questo parametro descrive, quindi, come i fotoni del flusso di radiazione vengono assorbiti e sostituiti da fotoni generati localmente dal gas.

L'equazione del trasporto nelle atmosfere stellari diventa perciò:

$$-\frac{1}{\kappa_\lambda\rho} \frac{dI_\lambda}{ds} = I_\lambda - S_\lambda$$

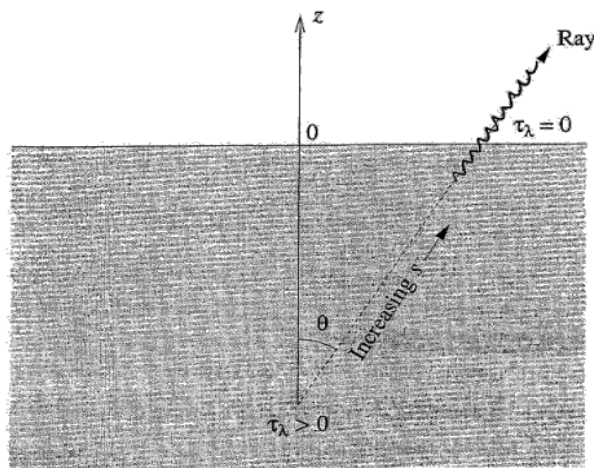
Per semplificare la trattazione, si introduce la *profondità ottica*  $\tau$ .

Questa nuova quantità evidenzia il fatto che quando si osserva la radiazione proveniente da una stella, si osserva il tragitto percorso dalla radiazione all'interno dell'atmosfera.

Si definisce come:

$$d\tau_\lambda = -\kappa_\lambda\rho ds$$

dove  $s$  è la distanza attraversata dalla radiazione.



**Figura 3:** Profondità ottica misurata lungo il percorso della radiazione (*Fonte:* [2]).

Come si può osservare in **Figura 3**, solitamente si assume  $\tau_\lambda = 0$  per ogni lunghezza d'onda in corrispondenza dello strato di atmosfera più esterno.

All'aumentare della profondità ottica, aumenta la quantità di radiazione assorbita, e quindi la diminuzione del flusso. Infatti, se si considera nuovamente solo l'assorbimento (3.4), si può scrivere:

$$I_\lambda = I_{\lambda,0}e^{-\tau_\lambda}$$

Si osserva dall'equazione che, all'aumentare di  $\tau$ , diminuisce il flusso iniziale. Per esempio, se nel punto di partenza della radiazione  $\tau_\lambda = 1$ , in uscita dall'atmosfera l'intensità della radiazione sarà diminuita di un fattore  $e$ .

La profondità ottica dà, quindi, informazioni sull'opacità del mezzo.

Profondità ottica	Mezzo
$\tau_\lambda \gg 1$	otticamente spesso (thick)
$\tau_\lambda \ll 1$	otticamente sottile (thin)

Essendo la profondità ottica dipendente dalla lunghezza d'onda, un mezzo può essere otticamente spesso per un valore di  $\lambda$  e otticamente sottile per un altro.

Si può, inoltre, calcolare la differenza tra la profondità ottica di partenza ( $s = 0$ ) e quella di arrivo ( $s$ ).

$$\Delta\tau_\lambda = \tau_{\lambda,f} - \tau_{\lambda,0} = - \int_0^s \kappa_\lambda \rho ds$$

Se si considera  $\tau_{\lambda,f} = 0$ , si ottiene la profondità ottica di un flusso di radiazione che ha percorso una distanza  $s$  per uscire dall'atmosfera.

$$\tau_\lambda = \int_0^s \kappa_\lambda \rho ds$$

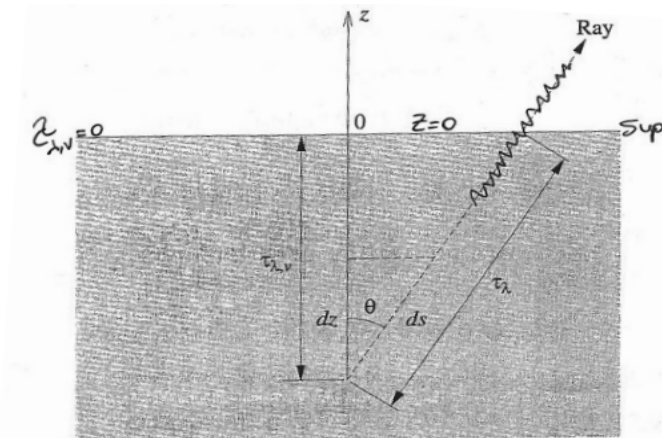
Utilizzando le relazioni trovate per la profondità ottica, si può riscrivere l'equazione del trasporto radiativo come segue:

$$\frac{dI_\lambda}{d\tau_\lambda} = I_\lambda - S_\lambda \quad (3.5)$$

L'unico problema di questa trattazione è il fatto che sia la profondità ottica sia la distanza  $s$  sono definite lungo la traiettoria del flusso, e non indicano direttamente la vera profondità dello strato dell'atmosfera considerato.

Perciò si introduce adesso l'approssimazione degli *strati piani-paralleli*, in cui si considerano gli strati dell'atmosfera come piani e paralleli tra loro. Ciò è possibile in quanto il raggio di curvatura è trascurabile rispetto allo spessore dell'atmosfera.

Da questa approssimazione possiamo definire una nuova quantità, la *profondità ottica verticale*  $\tau_{\lambda,v}$ , che rappresenta la proiezione della profondità ottica  $\tau_\lambda$  sull'asse  $z$ .



**Figura 4:** Approssimazione degli strati piani-paralleli e profondità verticale  $\tau_{\lambda,v}$  (Fonte: [2]).

Si definisce come:

$$\tau_{\lambda,v}(z) = \int_z^0 \kappa_\lambda \rho dz$$

Anche in questa trattazione si ha  $\tau_{\lambda,v} = 0$  nello strato più esterno dell'atmosfera ( $z = 0$ ). Il vantaggio di utilizzare la profondità ottica verticale sta nel fatto che  $\tau_{\lambda,v}$  è una vera coordinata verticale e non dipende dalla direzione del flusso di radiazione.

Come si vede nella **Figura 4**, un flusso che viaggia con un angolo  $\theta$  rispetto all'asse  $z$  percorre una frazione di atmosfera maggiore rispetto a un flusso che viaggia in verticale. Si deve, quindi, trovare una relazione tra la profondità ottica e la profondità ottica verticale, per poi sostituirla nell'equazione del trasporto.

$$dz = dscos\theta \quad \tau_{\lambda,v} = \tau_{\lambda}cos\theta$$

quindi

$$\tau_{\lambda} = \frac{\tau_{\lambda,v}}{cos\theta} = \tau_{\lambda,v}sec\theta$$

Così l'equazione del trasporto diventa:

$$cos\theta \frac{dI_{\lambda}}{d\tau_{\lambda,v}} = I_{\lambda} - S_{\lambda} \quad (3.6)$$

Infine, in alcuni casi, si può riscrivere l'equazione indipendente dalla lunghezza d'onda applicando l'*approssimazione di atmosfera grigia*.

Infatti, anche la profondità ottica verticale, come  $\tau$ , dipende dalla lunghezza d'onda, in quanto l'opacità dipende da  $\lambda$ . Nell'approssimazione di atmosfera grigia si può scrivere  $\tau_v$  invece di  $\tau_{\lambda,v}$ , e si può rimuovere la dipendenza da  $\lambda$  anche dalle altre quantità.

Per fare ciò si assume come  $\kappa$  l'opacità media ottenuta dalla media di Rosseland. Quest'ultima si ottiene pesando le singole lunghezze d'onda con la derivata della funzione di Planck e integrando su tutte le lunghezze d'onda.

$$\frac{1}{\bar{\kappa}} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa_{\lambda}} \frac{dB_{\lambda}}{dT} d\lambda}{\int_0^{\infty} \frac{dB_{\lambda}}{dT} d\lambda} \quad \text{dove} \quad B_{\lambda} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$$

L'approssimazione di atmosfera grigia può essere utilizzata per descrivere gli andamenti che non dipendono fortemente dalla lunghezza d'onda. In particolare, si utilizza quando la fonte primaria di opacità è la fotoionizzazione dello ione  $H^{-}$ , perché questo tipo di opacità non varia velocemente con  $\lambda$ . Infatti, l'energia di legame dello ione  $H^{-}$  è di soli 0.74 eV e la radiazione con energia maggiore (lunghezza d'onda inferiore) può facilmente ionizzarlo. Ciò, quindi, contribuisce all'opacità del continuo per un ampio intervallo di lunghezze d'onda.

Tornando alle quantità presenti nell'equazione del trasporto dipendenti dalla lunghezza d'onda, grazie all'approssimazione di atmosfera grigia, la dipendenza può essere eliminata integrando su  $\lambda$ :

$$I = \int_0^{\infty} I_{\lambda} d\lambda \quad S = \int_0^{\infty} S_{\lambda} d\lambda$$

In conclusione l'equazione del trasporto nelle atmosfere stellari diventa:

$$\boxed{cos\theta \frac{dI}{d\tau_v} = I - S} \quad (3.7)$$

# Capitolo 4

## Convezione

La convezione è un meccanismo di trasporto dell'energia che si basa sullo spostamento di celle di gas.

Si prenda l'esempio di due liquidi uno sopra l'altro di due temperature differenti ( $T_2 > T_1$ , con  $T_2$  sotto  $T_1$ ). Il processo del trasporto convettivo avviene se il gradiente termico  $\Delta T$  supera un certo valore critico. Ciò che si osserva è uno spostamento di massa, ovvero uno spostamento di calore.

Si può immaginare il liquido come composto da "celle", la cui resistenza allo spostamento inizialmente è molto grande. Raggiunto il valore critico, la spinta verso l'alto diventa più forte della viscosità tra le celle e la convezione può avere inizio.

La cella in movimento ha una temperatura maggiore della materia circostante. Assumendo che essa si espanda adiabaticamente (ovvero durante il percorso  $dQ = 0$ , dove  $Q$  è il calore), allora sarà più leggera della materia attorno a lei e tenderà a salire incontrando gas sempre più freddo. Tutto il calore  $dQ$  viene, infine, ceduto all'ambiente esterno alla fine del percorso.

Si consideri una cella di massa  $dm$  che sale di una certa quantità  $h$  partendo da una distanza  $r$  dal centro della stella. Il flusso di energia trasportato dalla cella (*flusso convettivo*) sarà:

$$F_{conv} = c_p \Delta T \rho v \quad (4.1)$$

dove  $c_p$  è il calore specifico a pressione costante,  $\Delta T$  è la differenza tra la temperatura della cella e quella dell'ambiente circostante e  $v$  è la velocità della cella convettiva. Inoltre  $\rho v$  rappresenta il flusso di massa che attraversa l'unità di superficie nell'unità di tempo, e  $c_p \Delta T$  l'energia termica per grammo trasportata dalla cella a pressione costante.

Questa equazione può essere riscritta nel seguente modo:

$$F_{conv} = c_p \rho v \left[ \left. \frac{dT}{dr} \right|_{ad} - \frac{dT}{dr} \right] h$$

Si osserva, quindi, che il flusso convettivo è proporzionale all'eccesso di gradiente. Quindi in primo luogo è importante definire un'espressione per il cosiddetto gradiente adiabatico.

### 4.1 Gradiente adiabatico

Per trovare un'espressione del gradiente adiabatico, si parte dall'equazione di stato dei gas perfetti  $P = \frac{k_B \rho T}{\mu H}$ , dove  $H$  è la massa del nucleo di idrogeno.

Facendone il logaritmo  $\log P = \log \rho + \log T - \log \mu + \text{cost}$  e derivando rispetto ad  $r$ , si ottiene:

$$\frac{d \log P}{dr} = \frac{d \log \rho}{dr} + \frac{d \log T}{dr} - \frac{d \log \mu}{dr}$$

Considerando  $\mu$  (peso molecolare medio) come una costante si avrà:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} &= \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \\ \Rightarrow \frac{dP}{dr} &= \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{P}{T} \frac{dT}{dr} \end{aligned} \quad (4.2)$$

In condizioni adiabatiche, come nel caso delle celle convettive, si possono ricavare dal primo principio della Termodinamica le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} P \propto \rho^\gamma &\Rightarrow \frac{dP}{dr} = \gamma \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \\ &\Rightarrow \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{dr} \end{aligned} \quad (4.3)$$

con *esponente adiabatico*  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  dove  $c_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_P$  calore specifico a pressione costante

e  $c_v = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V$  calore specifico a volume costante.

Sostituendo la 4.3 nell'equazione 4.2 si ottiene:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{dr} + \frac{P}{T} \frac{dT}{dr} \Big|_{ad}$$

⇓

$$\frac{dT}{dr} \Big|_{ad} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}$$

Questa è l'espressione del gradiente adiabatico in forma estesa. Essa può essere scritta in forma più compatta come gradiente adiabatico logaritmico  $\nabla_{ad}$ .

Considerando che

$$\frac{dT}{dP} \frac{P}{T} = \frac{d \log T}{d \log P} = \nabla$$

il gradiente adiabatico in forma logaritmica ha la seguente espressione:

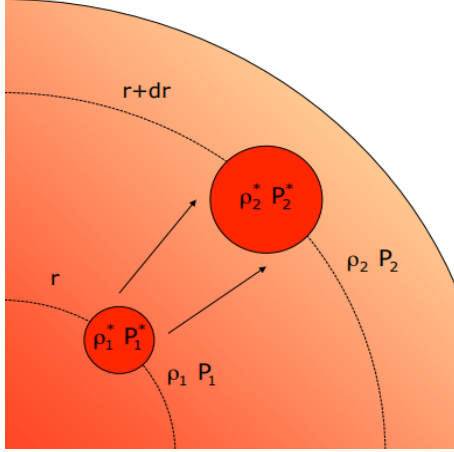
$$\boxed{\nabla_{ad} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)} \quad (4.4)$$

Nel caso di gas monoatomico ( $\gamma = \frac{5}{3}$ ), il gradiente adiabatico è  $\nabla_{ad} = 0.4$ . Questo valore diminuisce a 0.1 nelle regioni in cui avviene la ionizzazione. Il motivo è che, in queste zone, è necessario più calore per aumentare la temperatura, visto che parte dell'energia viene spesa a ionizzare il gas. Di conseguenza i calori specifici aumentano e  $\gamma$  tende ad uno. I calori specifici, infatti, parametrizzano la quantità di calore richiesta per aumentare di un Kelvin la temperatura dell'unità di massa del gas.

## 4.2 Criterio di Schwarzschild

Trovata l'espressione del gradiente adiabatico, si può adesso formulare un criterio che stabilisce se una regione della stella è stabile o meno rispetto alla convezione. Questo criterio è chiamato criterio di Schwarzschild.

Si prenda un elemento di materia ad una certa distanza  $r$  dal centro della stella, che si sposta radialmente verso la superficie in modo adiabatico. Questa cella si espande finché la pressione interna non è in equilibrio con quella esterna.



$\rho^*, P^*$  = densità e pressione dell'elemento di materia considerato.

$\rho, P$  = densità e pressione dell'ambiente.

**Figura 5:** Cella convettiva in espansione adiabatica (*Fonte:* [2]).

L'elemento si sposta adiabaticamente, quindi segue la relazione:

$$P\rho^{-\gamma} = \text{cost} \quad (4.5)$$

Nel punto di partenza della cella  $r$  si ha  $\rho_1^* = \rho_1$ ;  $P_1^* = P_1$ ;  $T_1^* = T_1$ .

Nel punto di arrivo  $r + dr$  si ha invece  $P_2^* = P_2$ .

Queste possono essere definite come le condizioni iniziali e finali del problema.

Essendo la relazione 4.5 costante tra il punto di partenza e il punto di arrivo si ottiene:

$$P_2^* \rho_2^{*\gamma} = P_1^* \rho_1^{*\gamma} \quad \Rightarrow \quad \rho_2^* = \left( \frac{P_2^*}{P_1^*} \right)^{1/\gamma} \rho_1^*$$

Se l'elemento di materia continua a muoversi verso l'esterno, si ha la convezione; se invece l'elemento scende, si ha stabilità (no convezione).

La condizione di stabilità rispetto al trasporto convettivo è fissata dalla densità. Infatti, se l'elemento di materia scende verso l'interno significa che pesa più dell'ambiente circostante, ovvero che  $\rho_2^* > \rho_2$ .

Ricordando le condizioni iniziali e finali della cella, e utilizzando l'espressione della densità trovata precedentemente, si riscrive la condizione come:

$$\rho_1 \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{1/\gamma} > \rho_2$$

Si considera, inoltre, che  $P_2 = P_1 + \frac{dP}{dr} dr$  e  $\rho_2 = \rho_1 + \frac{d\rho}{dr} dr$ .

$$\rho_1 \left( 1 + \frac{1}{P_1} \left( \frac{dP}{dr} dr \right) \right)^{1/\gamma} > \rho_1 + \frac{d\rho}{dr} dr$$

Sviluppando il termine nel riquadro come serie di Taylor e semplificando la disequazione si ottiene infine:

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} < -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr}$$

Questa è la condizione di stabilità generale ed esatta che può essere utilizzata in qualunque strato della stella.

Il criterio di Schwarzschild ha poi una formulazione alternativa più compatta nel caso di gas perfetto. Utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti e i gradienti logaritmici, la condizione di stabilità diventa:

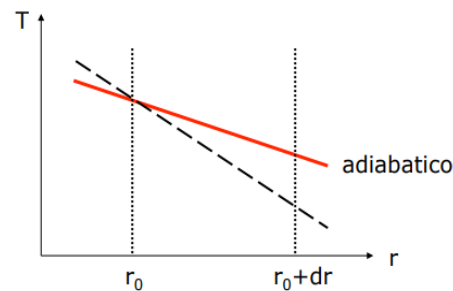
$$\nabla_{ad} > \nabla$$

Viceversa, se  $\nabla$  è maggiore del gradiente adiabatico si ha la convezione. Con buona approssimazione  $\nabla$  è il gradiente radiativo dell'ambiente intorno alla cella di materia.

Per ogni guscio si deve, perciò, calcolare il gradiente radiativo e confrontarlo con il gradiente della cella. Di seguito i due possibili casi per una piccola fluttuazione  $\delta r$  nella posizione della cella:

### Caso 1: Convezione

$$\left| \frac{dT}{dr} \right|_{rad} > \left| \frac{dT}{dr} \right|_{ad}$$



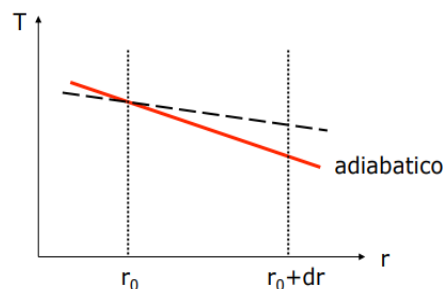
**Figura 6:** Confronto gradiente adiabatico (linea rossa) e gradiente radiativo (linea tratteggiata); caso convettivo (*Fonte:* [2]).

Il valore assoluto del gradiente radiativo è maggiore di quello adiabatico.

Ciò significa che spostando un elemento di gas dalla posizione  $r_0$  alla posizione  $r_0 + dr$  adiabaticamente, quest'ultimo si troverà ad una temperatura superiore a quella dell'ambiente circostante. A parità di pressione, però, se la temperatura è più alta, la densità è più piccola, ovvero la cella è più leggera dell'ambiente. L'elemento continua, quindi, a salire verso la superficie della stella e si osserva la convezione.

### Caso 2: Stabilità (no convezione)

$$\left| \frac{dT}{dr} \right|_{rad} < \left| \frac{dT}{dr} \right|_{ad}$$



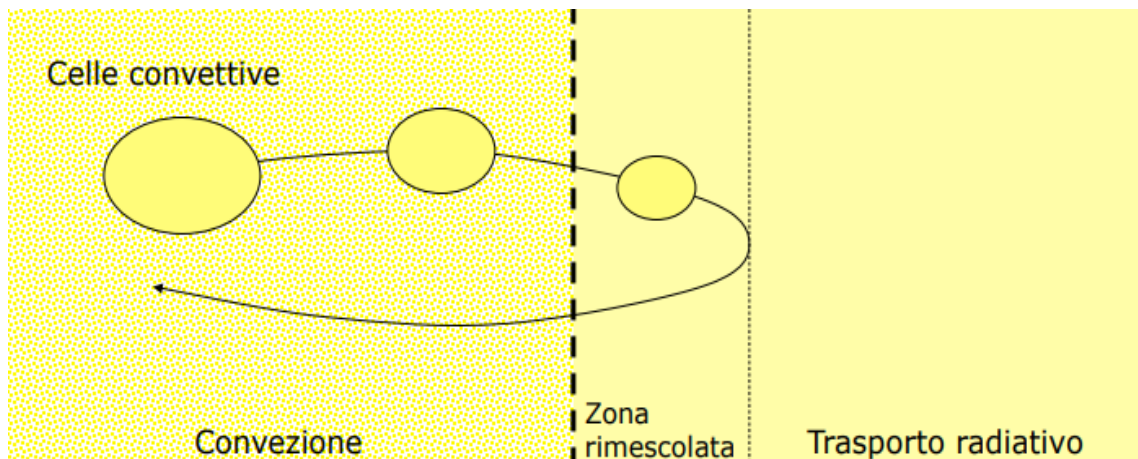
**Figura 7:** Confronto gradiente adiabatico (linea rossa) e gradiente radiativo (linea tratteggiata); caso non convettivo (*Fonte:* [2]).

Il valore assoluto del gradiente radiativo è minore di quello adiabatico. Questo comporta che l'elemento di materia in  $r_0 + dr$  si trova in un ambiente più caldo. A parità di pressione, se la temperatura della cella è più bassa di quella del mezzo circostante, la densità sarà più alta. L'elemento tende, quindi, a tornare verso la posizione di partenza e non si verifica la convezione.

In una stella si possono quindi distinguere le regioni convettive, in cui il gradiente radiativo è maggiore di quello convettivo, e le regioni radiative, in cui avviene l'opposto. Per esempio, il Sole è costituito da una zona radiativa situata al di sopra del nucleo, che si estende per circa il 70% del raggio, e da una zona convettiva soprastante.

Le condizioni che favoriscono l'innescò della convezione all'interno di una stella sono molteplici. Nelle regioni ad alta opacità, per esempio, si ha un gradiente radiativo maggiore, che quindi tende a superare il gradiente adiabatico. La convezione è favorita anche nelle zone a ionizzazione parziale, dove il gradiente adiabatico diminuisce, e nelle regioni centrali in cui il rate di generazione di energia nucleare dipende fortemente dalla temperatura (ciò causa un gradiente radiativo maggiore). In particolare, a parte la catena protone-protone, tutte le altre combustioni nucleari hanno elevate dipendenze dalla temperatura e implicano la presenza di un nucleo convettivo ( $CNO \propto T^{14}$ ;  $3\alpha \propto T^{22}$ ).

Per quanto riguarda, invece, il bordo della regione convettiva, esso si definisce come il punto in cui le celle hanno accelerazione uguale a zero ( $\nabla = \nabla_{ad}$ ). Nonostante gli elementi abbiano accelerazione nulla, hanno ancora una certa velocità. Quindi le celle tendono a sconfinare nella regione radiativa e a creare una zona detta di "rimescolamento". Sebbene l'approccio consueto assuma trascurabili le dimensioni di questa zona, esse sono un problema astrofisico ancora aperto e dibattuto. Un metodo per parametrizzare lo "sbordamento" delle celle convettive è il cosiddetto *overshooting*. Questo fenomeno è particolarmente importante nelle regioni nucleari della stella, dove l'estensione della regione convettiva ha un effetto diretto sulla quantità di combustibile nucleare a disposizione.



**Figura 8:** Overshooting delle celle convettive nelle regioni radiative; la prima linea tratteggiata indica il limite fissato dal criterio ( $\nabla = \nabla_{ad}$ ), la seconda il limite effettivo della zona di rimescolamento (*Fonte:* [2]).

### 4.3 Equazione del flusso convettivo

Definita la condizione per cui la convezione può avvenire, si può riprendere la descrizione del flusso convettivo. Poiché non esiste una trattazione esatta del moto turbolento degli



elementi convettivi, si devono necessariamente introdurre delle approssimazioni e una parametrizzazione per il libero cammino medio delle celle. Quest'ultima è di solito la *mixing lenght theory*, dove il moto delle celle convettive è parametrizzato da una lunghezza di rimescolamento  $\ell$ , ovvero la distanza media che l'elemento percorre prima di dissolversi nell'ambiente circostante.  $\ell$  è a sua volta definita a meno di un parametro libero  $\alpha$ , che viene fissato in modo da riprodurre le osservazioni ( $0.5 < \alpha < 2$ ). Si può, per esempio, calibrare  $\alpha$  in modo che un modello solare riproduca il raggio e la temperatura osservate. Più  $\alpha$  è grande, più è alta l'efficienza della convezione.

$$\ell = \alpha \cdot H_p \quad ; \quad \frac{1}{H_p} = -\frac{1}{P} \frac{dP}{dr}$$

$H_p$ , qui introdotta, corrisponde alla distanza caratteristica entro la quale la pressione si riduce di un e-simo (*altezza di scala di pressione*).

Quando  $\ell \ll H_p$  la convezione non è efficiente, mentre se  $\ell \gg H_p$  l'elemento convettivo perde di significato. Deve quindi essere  $\ell \sim H_p$ .

Preso l'equazione del flusso convettivo considerata inizialmente (4.1), essa può essere riscritta in funzione del parametro  $\ell$ . Innanzitutto si definisce il flusso di massa come  $\frac{1}{2}\rho v$ , per sottolineare il fatto che in media la metà delle celle si muovono verso l'alto e l'altra metà verso il basso.

$$F_{conv} = c_p \Delta T \frac{1}{2} \rho v$$

La variabile  $\Delta T$  può essere scritta come proporzionale al gradiente super-adiabatico, ovvero proporzionale all'eccesso di gradiente. Se non c'è una condizione di super-adiabaticità la convezione non si attiva.

$$\Delta T = \frac{d\Delta T}{dr} \cdot \ell$$

L'equazione del flusso convettivo si riscrive, quindi, come:

$$F_{conv} = \frac{1}{2} \rho v c_p \left( \left. \frac{dT}{dr} \right|_{ad} - \frac{dT}{dr} \right) \cdot \ell$$

Moltiplicando e dividendo per  $dP$ ,  $P$  e  $T$ , possiamo ottenere l'equazione del flusso convettivo in funzione dei gradienti logaritmici, ricordando che  $\frac{d \log T}{d \log P} = \frac{P}{T} \frac{dT}{dP}$ .

$$\begin{aligned} F_{conv} &= \frac{1}{2} \rho v c_p \ell \left( \left. \frac{dT}{dP} \right|_{ad} - \frac{dT}{dP} \right) \frac{dP}{dr} \frac{P}{T} \frac{T}{P} \\ &= \frac{1}{2} \rho v c_p \ell \left( \nabla_{ad} - \nabla \right) \frac{dP}{dr} \frac{T}{P} \end{aligned}$$

Considerando, poi, la definizione di  $H_p$ , si ha

$$F_{conv} = \frac{1}{2} \rho v c_p \frac{\ell}{H_p} (\nabla - \nabla_{ad}) T$$

L'equazione del flusso convettivo finale è quindi:

$$\boxed{F_{conv} = \frac{1}{2} \rho v c_p \alpha (\nabla - \nabla_{ad}) T} \quad (4.6)$$

Il tempo caratteristico del fenomeno di rimescolamento delle celle convettive è solitamente breve ed è definito dalla seguente relazione:

$$t_{rim} = \frac{\ell}{v}$$

Se si vuole descrivere la velocità  $v$  degli elementi convettivi, rilevante sia per il flusso convettivo sia per il tempo di rimescolamento, si considera innanzitutto una cella che sta trasportando energia termica in superficie. Sia  $\Delta T$  l'eccesso di temperatura rispetto all'ambiente, per mantenere l'equilibrio di pressione, la "carenza" di densità della cella sarà  $\Delta\rho \sim -\frac{\rho}{T}\Delta T$ . Per il principio di Archimede, durante il tragitto l'elemento convettivo è sottoposto ad una forza che, per unità di volume, si scrive nel seguente modo:

$$f = -g\Delta\rho = g\frac{\rho}{T}\Delta T$$

dove  $g$  è l'accelerazione di gravità.

Dalla forza si può trovare poi l'espressione del lavoro moltiplicando per il percorso medio delle celle convettive.

$$L = g\frac{\rho}{T}\Delta T \cdot \ell$$

Eguagliando dunque il lavoro all'energia cinetica, per il teorema dell'energia cinetica, si può ricavare un'espressione per la velocità degli elementi convettivi.

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = g\frac{\rho}{T}\Delta T \cdot \ell$$

↓

$$v = \sqrt{2g\frac{\Delta T}{T} \cdot \ell}$$

La velocità delle celle dipende, quindi, dall'eccesso di temperatura e dalla lunghezza di rimescolamento  $\ell$ . Il modello adottato è chiaramente semplificato, in quanto trascura la viscosità del mezzo e gli scambi di energia degli elementi convettivi lungo il tragitto.

Tornando, infine, al flusso convettivo trovato nella 4.6, si può ottenere un'espressione simile per il flusso radiativo, riscrivendo l'equazione del trasporto radiativo (3.1).

$$\boxed{F_{rad} = \frac{4ac}{3\kappa\rho} \frac{T^4}{H_p} \nabla} \quad (4.7)$$

Da quest'ultima e dalla 4.6 si può impostare l'equazione generale del flusso negli interni stellari, valida per ogni guscio sferico di spessore  $dr$  posto a una distanza  $r$  dal centro della stella.

$$F = \frac{L_r}{4\pi r^2} = F_{rad} + F_{conv}$$

Negli strati esterni, in cui  $L_r = L$ , l'equazione diventa:

$$F_{rad} + F_{conv} = \frac{L}{4\pi R^2} = \sigma T_e^4$$

dove  $T_e$  è la temperatura superficiale,  $R$  è il raggio della stella e  $\sigma$  è la costante di Stefan-Boltzmann.

# Bibliografia

- [1] M. Salaris, S. Cassisi, *Evolution of Stars And Stellar Population*, 2005, John Wiley and Sons Inc
- [2] F. Ferraro, *Dispense del corso "Astrofisica stellare"*, A.A. 2021/2022
- [3] H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner, *Fundamental Astronomy*, 2016, Springer Nature
- [4] D. Dallacasa, *Dispense del corso "Processi di radiazione e MHD"*, A.A. 2021/2022
- [5] V. Castellani, *Astrofisica stellare*, 1985, Zanichelli