

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Combinatoria e Topologia
di
Arrangiamenti di Iperpiani

Tesi di Laurea in
Geometria

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Luca Migliorini

Presentata da:
Francesco Minotti

2° Sessione
Anno Accademico 2010-2011

Indice

1	Introduzione	5
2	Definizioni ed Esempi	7
2.1	Definizioni di Base	7
2.2	Esempi	8
2.3	Costruzioni di Base	9
3	Combinatoria	13
3.1	Il Poset $L(\mathcal{A})$	13
3.2	La Funzione di Möbius	19
3.3	Il Polinomio di Poincaré	24
4	Algebre	35
4.1	$A(\mathcal{A})$ per Arrangiamenti Centrali	35
4.2	$A(\mathcal{A})$ per Arrangiamenti Affini	43
4.3	Fattorizzazioni delle Algebre	52
4.4	Forme Differenziali	58
5	La Coomologia di $M(\mathcal{A})$	65
5.1	L'Isomorfismo di Thom	65
5.2	Il Lemma di Brieskorn	69
	Bibliografia	71

1 Introduzione

Immaginiamo di prendere un filo di lana e di volerlo suddividere in un certo numero di pezzi, diciamo n . Per fare questo dobbiamo scegliere un numero appropriato di punti sui quali agire con le nostre forbici, tagliando il filo. La domanda che sorge spontanea è: quanti punti devo scegliere? Ebbene, in questo caso la risposta è banale: supponendo che i punti debbano essere distinti gli uni dagli altri, me ne serviranno certamente $(n - 1)$.

Consideriamo ora, al posto del precedente filo di lana, uno scampolo di stoffa. In questo caso vogliamo operare dei tagli rettilinei per suddividere lo scampolo in un certo numero di parti. Chiaramente, in questa situazione, la posizione reciproca delle linee lungo le quali opero l'incisione diventa molto importante. È facile osservare infatti che, in generale, non è più vero che con $(n - 1)$ rette ottengo n porzioni di stoffa! Si osservi infine che la questione si complica ulteriormente se al posto di un tessuto si prende in esame una torta che deve essere tagliata in tante fettine!

Questo tipo di problema può essere interpretato matematicamente nel modo seguente:

- il filo può essere pensato come una retta su cui identifico un certo numero di punti;
- lo scampolo di stoffa è in realtà un piano all'interno del quale posiziono un certo numero di rette;
- la torta è uno spazio a tre dimensioni che viene suddiviso in tante fette mediante un certo numero di piani che lo fendono.

Generalizzando si può quindi assimilare l'oggetto che voglio suddividere in porzioni più piccole con uno spazio vettoriale su \mathbb{R} di dimensione fissata l ; in questo modo lo strumento che utilizzo per sezionare il suddetto spazio vettoriale è rappresentato dai sottospazi di dimensione $l - 1$, ossia gli **iperpiani**.

Una volta effettuato questo processo di astrazione, risulta chiaro il motivo per cui, aumentando la dimensione dello spazio, aumenta la complessità del problema. Infatti, quando si prendono due punti su una retta, questi ultimi possono o coincidere o essere distinti: in questo caso non esistono altre possibilità. Se invece considero due rette in un piano, può accadere che queste coincidano, siano parallele oppure che si intersechino in un punto.

Prendendo poi due piani in uno spazio 3-dimensionale, si hanno le seguenti possibilità: essi possono coincidere, essere paralleli oppure avere una retta in comune. Anche se apparentemente questo rispecchia esattamente il comportamento del caso precedente, in realtà è riscontrabile una maggior complessità, che deriva dal fatto che anche le rette ottenute come intersezione dei piani possono essere posizionate reciprocamente in modi differenti: possono a loro volta intersecarsi in un punto, essere parallele, sghembe (si ricordi che siamo in uno spazio a tre dimensioni) o eventualmente coincidere.

In questo modo siamo arrivati a comprendere come il numero di parti, dette anche camere, in cui uno spazio vettoriale su \mathbb{R} viene suddiviso una volta assegnata una collezione \mathcal{A} di iperpiani non dipende esclusivamente dal numero degli iperpiani che la compongono: esso dipende anche dal modo in cui questi iperpiani si intersecano fra loro. La collezione di iperpiani \mathcal{A} è ciò che si dice **arrangiamento**. Come vedremo in seguito, lo studio delle intersezioni costituisce in effetti il primo passo verso un'analisi metodica delle proprietà di questi arrangiamenti, almeno dal punto di vista combinatorio.

È possibile inoltre affrontare questo argomento anche da altri punti di vista. Si pensi infatti a ciò che si ottiene sottraendo dallo spazio vettoriale che si sta considerando l'unione degli iperpiani di \mathcal{A} . In questo modo si ottiene uno spazio topologico che viene solitamente denominato **complemento** dell'arrangiamento. Chiaramente, se lo spazio vettoriale è un \mathbb{R}^l , quel che si

ottiene non è altro che un'unione disgiunta di aperti di \mathbb{R}^l stesso. In questo caso, comunque, le caratteristiche topologiche, come per esempio i gruppi di coomologia, risultano piuttosto banali. Molto più interessante è ciò che si ottiene invece considerando spazi vettoriali su \mathbb{C} , piuttosto che su \mathbb{R} . Considerando infatti un \mathbb{C}^l e sottraendo un qualsivoglia numero di iperpiani complessi (isomorfi quindi a \mathbb{C}^{l-1}), di certo non ottengo un'unione disgiunta di aperti. Questo risulta chiaro se si pensa a \mathbb{C}^l come ad \mathbb{R}^{2l} , dal quale sottraggo un certo numero di sottospazi isomorfi a \mathbb{R}^{2l-2} . In questo modo è evidente, quindi, che ciò che su \mathbb{R} risultava banale dal punto di vista topologico acquisisce invece, su \mathbb{C} , una certa complessità nonché un certo interesse.

In questo elaborato si affronteranno in primo luogo le problematiche relative all'aspetto **combinatorio** degli arrangiamenti di iperpiani: questo verrà fatto considerando spazi vettoriali generici, in modo da rendere la trattazione il più generale possibile; l'esposizione sarà inoltre accompagnata da alcuni esempi 'notevoli' che saranno riproposti, e di volta in volta arricchiti di nuovi particolari, nel corso della sezione in modo da seguire di pari passo l'introduzione di nuovi concetti e la dimostrazione di nuove proprietà.

Dopo questa prima parte si passerà al capitolo intitolato '**Algebra**', capitolo in cui verranno costruite ed analizzate alcune algebre, costruite e basate sulle caratteristiche combinatorie dell'arrangiamento che si considera. Anche in questo caso si lavorerà con anelli e campi generici. Il ruolo di queste costruzioni algebriche sarà poi svelato nel corso dell'ultimo capitolo della tesi, quando esse serviranno a risolvere i problemi relativi allo studio della coomologia del complemento. Come già accennato, il capitolo sulla **coomologia** sarà incentrato sugli arrangiamenti in spazi vettoriali complessi. Il risultato centrale di questa tesi sarà ottenuto grazie al Teorema 5.11 da cui seguiranno altri corollari e proposizioni, fra cui il Lemma di Brieskorn 5.16. In sostanza ciò che emergerà è il fatto che la struttura dei gruppi di coomologia del complemento è determinata in tutto e per tutto dalle caratteristiche combinatorie dell'arrangiamento.

2 Definizioni ed Esempi

2.1 Definizioni di Base

I seguenti simboli verranno utilizzati lungo tutto il testo: \mathbb{N} per i numeri naturali, \mathbb{Z} per i numeri interi, \mathbb{Q} per i numeri razionali, \mathbb{R} per i numeri reali, \mathbb{C} per i numeri complessi, \mathbb{F}_q per il campo con q elementi, \mathbb{K} ed \mathbb{L} per campi arbitrari.

Definizione 2.1. *Sia \mathbb{K} un campo e sia $V_{\mathbb{K}}$ uno spazio vettoriale di dimensione l . Un **iperpiano** H in $V_{\mathbb{K}}$ è un sottospazio affine di dimensione $(l - 1)$. Un **arrangiamento di iperpiani** $\mathcal{A}_{\mathbb{K}} = (\mathcal{A}_{\mathbb{K}}, V_{\mathbb{K}})$ è un insieme finito di iperpiani in $V_{\mathbb{K}}$. Con il simbolo Φ_l indichiamo l'arrangiamento di iperpiani vuoto, non contenente cioè alcun iperpiano (il pedice l indica la dimensione dello spazio vettoriale).*

Più in generale, un **arrangiamento di sottospazi** è un insieme finito di sottospazi affini di V senza alcuna restrizione sulle loro dimensioni. Siccome ci interesseremo esclusivamente degli arrangiamenti di iperpiani, eviteremo di specificare ogni volta 'arrangiamento di iperpiani', scrivendo solamente 'arrangiamento'.

Il pedice \mathbb{K} verrà usato solo quando si vorrà richiamare l'attenzione sul campo. Un arrangiamento \mathcal{A} in V si dice **l -arrangiamento** se $\dim V = l$. Sia V^* il duale di V , ossia lo spazio delle forme lineari su V . Sia $S = S(V^*)$ l'algebra simmetrica di V^* . Si scelga una base $\{e_1, \dots, e_l\}$ per V e sia $\{x_1, \dots, x_l\}$ la base duale per V^* in modo che $x_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Possiamo così identificare $S(V^*)$ con l'algebra polinomiale $S = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_l]$. Ogni iperpiano $H \in \mathcal{A}$ è il nucleo di un polinomio α_H di grado 1 definito a meno di una costante moltiplicativa. È conveniente quindi scrivere $p \doteq q$ per $p, q \in S$ se $p = cq$ per qualche $c \in \mathbb{K}^*$. In questo modo se $\ker(\alpha_H) = H = \ker(\alpha'_H)$, allora $\alpha_H \doteq \alpha'_H$.

Definizione 2.2. *Il prodotto*

$$Q(\mathcal{A}) \doteq \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H$$

*è chiamato **polinomio definente** di \mathcal{A} . Si conviene che $Q(\Phi_l) = 1$ è il polinomio definente dell'arrangiamento vuoto.*

Definizione 2.3. *Diciamo che \mathcal{A} è **senza centro** se $\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H = \emptyset$. Se invece $T = \bigcap_{H \in \mathcal{A}} H \neq \emptyset$, diciamo che \mathcal{A} è **centrato** con **centro** T . Se \mathcal{A} è centrato si possono scegliere le coordinate in modo che ogni iperpiano passi per l'origine. In questo caso \mathcal{A} si dice **centrale**. Se \mathcal{A} è centrale, allora ogni α_H è una forma lineare e $Q(\mathcal{A})$ è un polinomio omogeneo il cui grado è proprio la cardinalità di \mathcal{A} . Conveniamo che l'arrangiamento vuoto sia centrale. Quando vorremo sottolineare che l'arrangiamento preso in considerazione può essere sia centrato che senza centro lo chiameremo **affine**.*

Definizione 2.4. *Un **arrangiamento proiettivo** è un insieme finito di iperpiani proiettivi in uno spazio proiettivo.*

Siccome il complemento di un iperpiano proiettivo in uno spazio proiettivo è uno spazio affine, il complemento di un arrangiamento proiettivo non vuoto può essere visto come il complemento di un arrangiamento affine. Gli arrangiamenti proiettivi non verranno quindi discussi separatamente.

2.2 Esempi

Consideriamo prima di tutto qualche arrangiamento reale. L'unico 1-arrangiamento centrale consiste nell'iperpiano $\{0\}$. Un 1-arrangiamento affine consiste in un insieme finito di punti. Per $l = 2, 3$ utilizzeremo x, y, z invece di x_1, x_2, x_3 . Un 2-arrangiamento centrale reale è un insieme finito di rette passanti per l'origine. Un 2-arrangiamento affine è un insieme finito di rette nel piano.

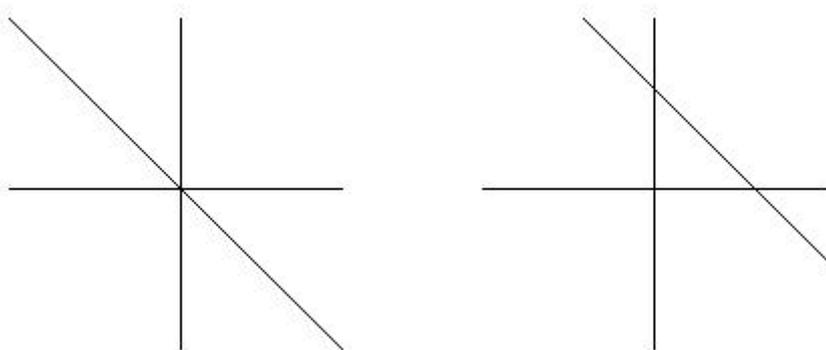


Figura 1: $Q(\mathcal{A}) = xy(x + y)$ e $Q(\mathcal{A}) = xy(x + y - 1)$

Esempio 2.5. Si definisca \mathcal{A} mediante $Q(\mathcal{A}) = xy(x + y)$. Allora \mathcal{A} è centrale e consiste di tre rette passanti per l'origine; si veda Figura 1.

Esempio 2.6. Si definisca \mathcal{A} mediante $Q(\mathcal{A}) = xy(x + y - 1)$. Allora \mathcal{A} è senza centro e consiste di tre rette affini; si veda Figura 1.

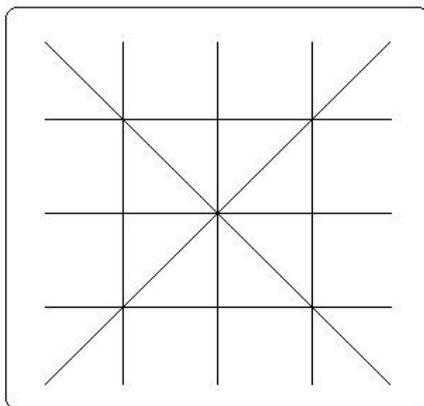
I 3-arrangiamenti reali sono esempi da cui si evince, almeno in parte, la complessità del caso generale.

Esempio 2.7. Prendiamo \mathbb{R}^3 con la sua base usuale. Si consideri il cubo di vertici $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. I suoi nove piani di simmetria formano un 3-arrangiamento centrale definito da

$$Q(\mathcal{A}) = xyz(x - y)(x + y)(x - z)(x + z)(y - z)(y + z)$$

Questi nove piani si intersecano in rette che rappresentano assi di simmetria per il cubo. Ci riferiremo a questo arrangiamento come all'arrangiamento B_3 .

Possiamo cercare di visualizzare i 3-arrangiamenti reali centrali tramite il processo di de-conificazione che verrà illustrato nella definizione 2.16. Come al solito pensiamo al piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ come alla semisfera con i punti del bordo identificati secondo la relazione antipodale. La figura che disegniamo è quindi l'intersezione dell'arrangiamento con la semisfera. La stessa idea può essere sfruttata per ottenere una figura leggermente diversa ma più facile da realizzare. Assumendo infatti che la retta all'infinito faccia parte di \mathcal{A} , possiamo identificare il suo complemento in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con \mathbb{R}^2 e disegnare il corrispondente arrangiamento affine. **Ricordiamo che due rette parallele nel piano proiettivo hanno un punto in comune che appartiene alla 'retta all'infinito'**. Nell'esempio 2.7 possiamo pensare al piano $z = 0$ come al piano all'infinito. Sostituendo $z = 1$ nelle altre forme lineari otteniamo un 2-arrangiamento affine. Per ricordare che la retta all'infinito fa parte del nostro arrangiamento disegniamo un riquadro all'infinito, come illustrato in Figura 2. Si noti come sia facile individuare dal disegno le 13 rette di intersezione del 3-arrangiamento dell'esempio 2.7 semplicemente trovando i 13 punti di intersezione in Figura 2.

Figura 2: L'arrangiamento B_3

Esempio 2.8. Sia $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ l'arrangiamento **Booleano** definito da

$$Q(\mathcal{A}) = x_1 x_2 \cdots x_l$$

Questo è l'arrangiamento degli iperpiani coordinati in \mathbb{R}^l

Esempio 2.9. Per $1 \leq i < j \leq l$ sia $H_{i,j} = \ker(x_i - x_j)$. Sia $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ l'arrangiamento a **treccia** definito da

$$Q(\mathcal{A}) = \prod_{1 \leq i < j \leq l} (x_i - x_j)$$

Gli esempi fatti finora hanno senso anche su campi finiti. Il prossimo invece può essere formulato esclusivamente su campi finiti.

Esempio 2.10. Sia V uno spazio vettoriale l -dimensionale su un campo finito di q elementi, \mathbb{F}_q . Sia \mathcal{A} l'arrangiamento centrale in V consistente di tutti gli iperpiani attraverso l'origine.

2.3 Costruzioni di Base

Definizione 2.11. Si denota con $|\mathcal{A}|$ la cardinalità di \mathcal{A} .

Nell'Esempio 2.8 si ha $|\mathcal{A}| = l$. Nell'Esempio 2.9 si ha $|\mathcal{A}| = l(l-1)/2$. Nell'Esempio 2.10 si ha

$$|\mathcal{A}| = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{l-1}$$

L'ultima affermazione può essere provata in due modi diversi. Usando l'induzione, contiamo il numero di forme lineari distinte $\alpha = c_1 x_1 + \cdots + c_l x_l$. Se $c_l \neq 0$, allora ce ne sono q^{l-1} . Se $c_l = 0$, allora per ipotesi induttiva ce ne sono $1 + q + \cdots + q^{l-2}$. Se invece fissiamo un isomorfismo di V con il suo duale, allora possiamo contare il numero di rette, sfruttando il fatto che il numero di rette equivale al numero di iperpiani. Siccome V ha $q^l - 1$ elementi diversi da zero ed ogni retta ne contiene $q - 1$, ci sono $(q^l - 1)/(q - 1)$ rette in V .

È chiaro da questi esempi che una parte delle informazioni celate nell'arrangiamento \mathcal{A} può essere catturata semplicemente osservando le modalità di intersezione dei suoi iperpiani.

Definizione 2.12. Sia $L(\mathcal{A})$ l'insieme di tutte le intersezioni non vuote di elementi di \mathcal{A} . Conveniamo che $L(\mathcal{A})$ contenga anche V come intersezione del sottoinsieme vuoto di \mathcal{A} .

Definizione 2.13. Sia (\mathcal{A}, V) un arrangiamento. Se $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ è un sottoinsieme, allora (\mathcal{B}, V) è detto **sottoarrangiamento** di (\mathcal{A}, V) . Per $X \in L(\mathcal{A})$ si definisce un sottoarrangiamento \mathcal{A}_X di \mathcal{A} nel modo seguente

$$\mathcal{A}_X = \{H \in \mathcal{A} \mid X \subseteq H\}$$

Si noti che $\mathcal{A}_V = \Phi_l$ e che, per un qualsiasi arrangiamento \mathcal{A} , se $X \neq V$ allora \mathcal{A}_X ha centro X .

Si definisce inoltre un arrangiamento (\mathcal{A}^X, X) nel modo seguente

$$\mathcal{A}^X = \{X \cap H \mid H \in \mathcal{A} \text{ e } X \cap H \neq \emptyset\}$$

Chiameremo \mathcal{A}^X la **restrizione** di \mathcal{A} ad X . Si noti che $\mathcal{A}^V = \mathcal{A}$.

Illustriamo ora il metodo di ‘**deletion-restriction**’ (cancellazione-restrizione), uno strumento fondamentale per ottenere formule ricorsive per problemi di conteggio legati agli arrangiamenti.

Definizione 2.14. Sia \mathcal{A} un arrangiamento non vuoto e sia $H_0 \in \mathcal{A}$. Sia $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \{H_0\}$ e sia $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}^{H_0}$. Definiamo $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ **terna** di arrangiamenti con iperpiano **distinto** H_0 .

Forniamo ora un esempio concreto di applicazione del metodo deletion-restriction.

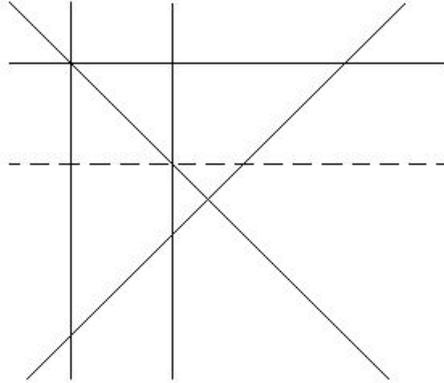


Figura 3: Un esempio di conteggio delle camere

Esempio 2.15. Sia (\mathcal{A}, V) un arrangiamento reale. Vogliamo contare quante sono le parti in cui lo spazio V viene suddiviso dagli iperpiani dell'arrangiamento. Queste parti vengono dette **camere**.

Sia quindi $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ l'insieme delle camere di \mathcal{A} . Sia $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ una terna di arrangiamenti con iperpiano distinto H_0 . Vogliamo dimostrare che

$$|\mathcal{C}(\mathcal{A})| = |\mathcal{C}(\mathcal{A}')| + |\mathcal{C}(\mathcal{A}'')|$$

Per fare questo consideriamo l'insieme P delle camere di $\mathcal{C}(\mathcal{A}')$ che intersecano l'iperpiano H_0 . Consideriamo anche l'insieme Q delle camere, sempre di $\mathcal{C}(\mathcal{A}')$, che **non** intersecano H_0 . Evidentemente si ha

$$|\mathcal{C}(\mathcal{A}')| = |P| + |Q|$$

Si noti che l'iperpiano H_0 divide tutte le camere di P in due camere di $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ lasciando inalterate le camere di Q . Considerando quindi l'arrangiamento che si ottiene aggiungendo ad \mathcal{A}' l'iperpiano H_0 , si ottiene $\mathcal{C}(\mathcal{A}' \cup \{H_0\}) = 2|P| + |Q|$. Ma $\mathcal{A}' \cup \{H_0\} = \mathcal{A}$ per la definizione 2.14. Per cui

$$\mathcal{C}(\mathcal{A}) = 2|P| + |Q|$$

Infine si noti che esiste una biiezione fra P e $\mathcal{C}(\mathcal{A}'')$ data da $C \mapsto C \cap H_0$, per cui

$$\mathcal{C}(\mathcal{A}'') = P$$

Dalle ultime tre considerazioni segue l'asserto. In Figura 3 è illustrato un esempio di conteggio delle camere. La retta tratteggiata indica l'iperpiano distinto H_0 . Si verifica facilmente che $|P| = 4$, $|Q| = 10$ e quindi $|\mathcal{C}(\mathcal{A})| = 18$.

Un'altra costruzione fondamentale è quella della **conificazione**. Questo metodo consente infatti di comparare arrangiamenti affini con arrangiamenti centrali.

Definizione 2.16. *Un l -arrangiamento affine \mathcal{A} definito da $Q(\mathcal{A}) \in S$ dà luogo ad un $(l+1)$ -arrangiamento centrale $\mathbf{c}\mathcal{A}$, che viene chiamato **cono** su \mathcal{A} . Sia $Q' \in \mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_l]$ il polinomio $Q(\mathcal{A})$ omogeneizzato. Si definisce $Q(\mathbf{c}\mathcal{A}) = x_0 Q'$. Si noti che $|\mathbf{c}\mathcal{A}| = |\mathcal{A}| + 1$. Chiameremo $K_0 = \ker(x_0)$ l'iperpiano **aggiuntivo**.*

Mediante questa costruzione di conificazione, l'arrangiamento (\mathcal{A}, V) viene di fatto immerso in $(\mathbf{c}\mathcal{A}, W)$ tramite l'identificazione dello spazio V con il sottospazio affine $\ker(x_0 - 1)$ di W . Esiste inoltre un'operazione inversa. Prendendo infatti un $(l+1)$ -arrangiamento \mathcal{A} si può costruire l' l -arrangiamento $\mathbf{d}\mathcal{A}$, detto **deconificazione** di \mathcal{A} , che in generale non è centrato. Questo processo si realizza scegliendo un iperpiano $K_0 \in \mathcal{A}$ e un sistema di coordinate tali per cui $K_0 = \ker(x_0)$. Se a questo punto $Q(\mathcal{A}) \in \mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_l]$ è il polinomio definente di \mathcal{A} , $Q(\mathbf{d}\mathcal{A})$ si ottiene sostituendo ad x_0 il valore 1 in $Q(\mathcal{A})$. Questo processo di deconificazione può essere visto d'altro canto nel modo seguente: proiettivizzo l'arrangiamento (\mathcal{A}, V) introducendo in V l'usuale relazione d'equivalenza $x \sim y$ sse $y = \lambda x$, per un certo $\lambda \in \mathbb{K}^*$; a questo punto rimuovo l'immagine di K_0 considerandolo come l'iperpiano all'infinito e identifico il suo complemento con uno spazio affine.

Concludiamo questa sezione con altre due definizioni di un certo interesse.

Definizione 2.17. *Definiamo la **varietà** di \mathcal{A} mediante*

$$N(\mathcal{A}) = \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H = \{v \in V \mid Q(\mathcal{A})(v) = 0\}$$

Definizione 2.18. *Definiamo il **complemento** di \mathcal{A} mediante*

$$M(\mathcal{A}) = V \setminus N(\mathcal{A})$$

A volte risulta conveniente sopprimere la dipendenza dall'arrangiamento \mathcal{A} e scrivere $Q = Q(\mathcal{A})$, $L = L(\mathcal{A})$, $N = N(\mathcal{A})$, $M = M(\mathcal{A})$, etc.

3 Combinatoria

3.1 Il Poset $L(\mathcal{A})$

Definizioni

Definizione 3.1. Sia \mathcal{A} un arrangiamento e sia $L = L(\mathcal{A})$ l'insieme delle intersezioni non vuote di elementi di \mathcal{A} . Si definisce un **ordine parziale** su L mediante

$$X \leq Y \iff Y \subseteq X$$

Questa relazione d'ordine è detta inclusione **inversa**. Segue che V è l'unico elemento minimale.

Definizione 3.2. Si definisce la **funzione di rango** $r : L \rightarrow \mathbb{Z}$ come segue: $r(X) = \text{codim}(X)$. In questo modo $r(V) = 0$ e $r(H) = 1$ per ogni $H \in \mathcal{A}$. Gli iperpiani H sono detti **atomi** di L .

Siano $X, Y \in L$. Si definisce il loro **meet** come $X \wedge Y = \cap\{Z \in L \mid X \cup Y \subseteq Z\}$. Se $X \cap Y \neq \emptyset$ si definisce anche il **join** tramite $X \vee Y = X \cap Y$.

Lemma 3.3. Sia \mathcal{A} un arrangiamento e sia $L = L(\mathcal{A})$. Allora:

- (1) Ogni elemento di $L \setminus \{V\}$ è il join di un certo insieme di atomi.
- (2) Per ogni $X \in L$ tutti i sottoinsiemi massimali e linearmente ordinati

$$V = X_0 < X_1 < \dots < X_p = X$$

hanno la stessa cardinalità. Perciò $L(\mathcal{A})$ è un **poset** (insieme parzialmente ordinato) **geometrico**.

(3) Se \mathcal{A} è centrale, allora tutti i join sono definiti, cosicchè L è un **reticolo**. Per ogni $X, Y \in L$ la funzione di rango soddisfa

$$r(X \wedge Y) + r(X \vee Y) \leq r(X) + r(Y)$$

Perciò, per ogni arrangiamento centrale, $L(\mathcal{A})$ è un **reticolo geometrico**.

Dimostrazione. L'asserto (1) segue dalle definizioni. La (2) è una conseguenza del fatto che il numero massimo di iperpiani linearmente indipendenti che possono contenere un sottospazio è dato dalla sua codimensione. Per verificare (3) si ricordi che

$$\dim(X + Y) + \dim(X \cap Y) = \dim(X) + \dim(Y)$$

e anche che $\dim(X + Y) \leq \dim(X \wedge Y)$, dalla definizione. □

Lemma 3.4. Elementi massimali di $L(\mathcal{A})$ hanno lo stesso rango.

Dimostrazione. Questo è chiaro se \mathcal{A} è un arrangiamento centrale, in quanto $L(\mathcal{A})$ ha un unico elemento massimale.

Se invece \mathcal{A} è senza centro potrebbe avere più elementi massimali. In questo caso consideriamo il sottoinsieme $M(\mathcal{A})$ di $L(\mathcal{A})$ contenente tutti gli elementi di rango massimo: questo insieme è non vuoto e contiene esclusivamente elementi massimali del poset. Fissiamo ora un $X \in M(\mathcal{A})$ ponendo $d := r(X)$. Esistono allora iperpiani linearmente indipendenti H_1, \dots, H_d in \mathcal{A} tali che $X = H_1 \cap \dots \cap H_d$. A questo punto supponiamo per assurdo che esista un elemento

massimale $Y \in L(\mathcal{A})$ tale che $r(Y) \neq r(X)$. Siccome non può essere $r(Y) > r(X)$ per come è stato scelto X , sarà $e := r(Y) < r(X) = d$. Possiamo quindi vedere Y come intersezione di iperpiani K_1, \dots, K_e linearmente indipendenti fra loro. Siccome $e < d$ si ha che almeno uno degli iperpiani H_i , $i = 1, \dots, d$ è linearmente indipendente dai K_j , $j = 1, \dots, e$. Sia H uno di questi iperpiani. Allora $Y \cap H \neq \emptyset$ e $r(Y \cap H) = \text{codim}(Y \cap H) > \text{codim}(Y) = r(Y)$. Questo contraddice l'ipotesi di massimalità per Y , provando l'asserto. \square

Definizione 3.5. Il rango di \mathcal{A} , $r(\mathcal{A})$, è il rango di un elemento massimale di $L(\mathcal{A})$. L'arrangiamento si dice **essenziale** se $r(\mathcal{A}) = l$. Se \mathcal{A} è un arrangiamento centrale, sia $T(\mathcal{A}) = \bigcap_{H \in \mathcal{A}} H$ l'unico elemento massimale di $L(\mathcal{A})$.

Definizione 3.6. Due arrangiamenti $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, V)$ e $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, W)$ si dicono **reticolo-equivalenti**, o *L-equivalenti*, se esiste una biiezione $\pi : L(\mathcal{A}) \rightarrow L(\mathcal{B})$ che preservi l'ordine.

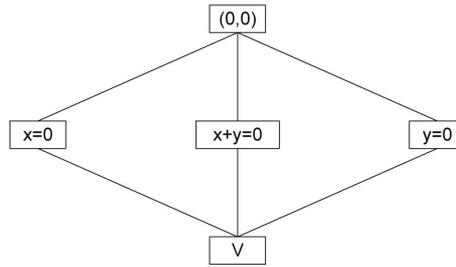


Figura 4: Il diagramma di Hasse di $Q(\mathcal{A}) = xy(x + y)$

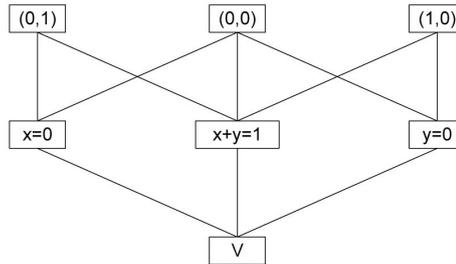


Figura 5: Il diagramma di Hasse di $Q(\mathcal{A}) = xy(x + y - 1)$

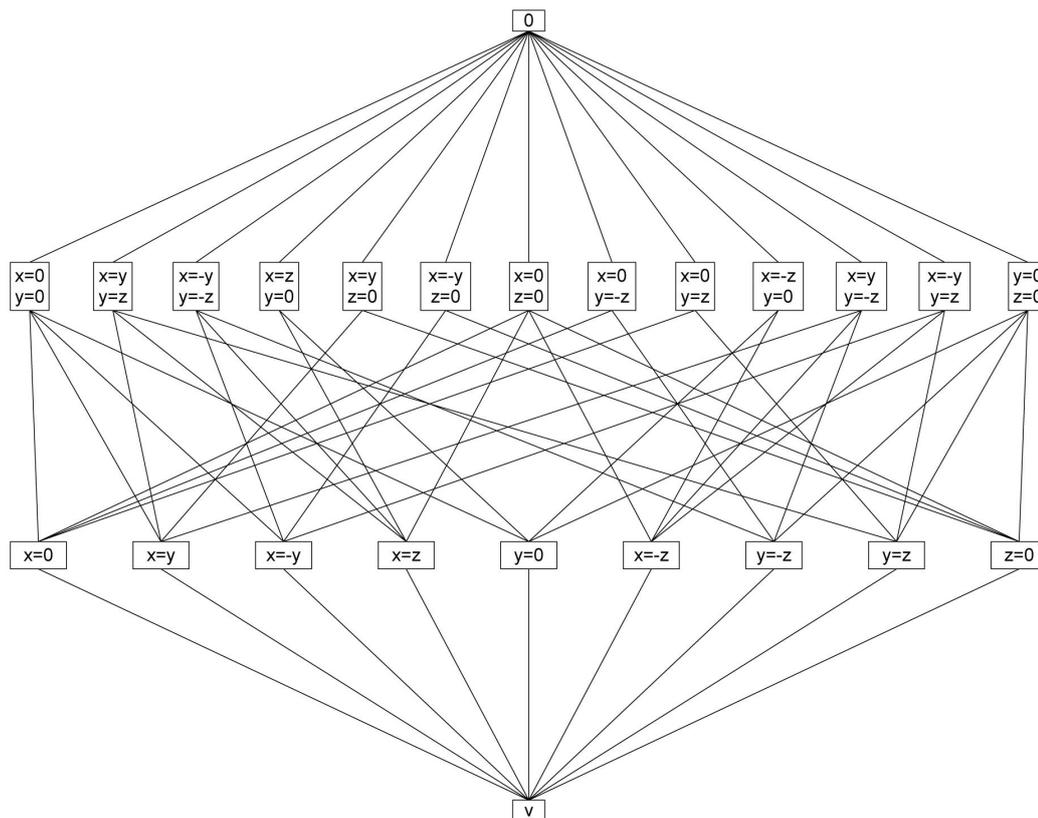


Figura 6: Il diagramma di Hasse dell'arrangiamento B_3

Definizione 3.7. Sia $L_p(\mathcal{A}) = \{X \in L(\mathcal{A}) \mid r(X) = p\}$. Il diagramma di Hasse di $L(\mathcal{A})$ è composto da vertici corrispondenti agli elementi di $L(\mathcal{A})$, disposti su più livelli. Ciascun livello contiene tutti e soli gli elementi di L_p per $p \geq 0$. Siano $X \in L_p$ e $Y \in L_{p+1}$. Allora X e Y sono collegati da un lato del diagramma di Hasse se $X < Y$.

Se \mathcal{A} è definito mediante un polinomio $Q(\mathcal{A})$, risulta a volte conveniente contrassegnare gli elementi di $L(\mathcal{A})$ con le equazioni che soddisfano. I diagrammi di Hasse degli Esempi 2.5,2.6,2.7 sono riportati nelle Figure 4,5,6.

Esempi

Esempio 3.8. Il reticolo $L(\mathcal{A})$ dell'arrangiamento Booleano. Sia $H_i = \ker(x_i)$. Sia $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ dove $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq l$. Sia $H_I = H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_p}$. Il reticolo $L(\mathcal{A})$ è formato dai 2^l sottospazi H_I al variare di I .

Definizione 3.9. Sia $I = \{1, \dots, l\}$. Sia $\mathcal{P}(l)$ l'insieme delle partizioni di I . Un elemento di $\mathcal{P}(l)$ è una collezione $\Lambda = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$ di sottoinsiemi di I non vuoti e a due a due disgiunti, che chiamiamo **blocchi** di Λ , la cui unione dà l'insieme I .

Su $\mathcal{P}(l)$ esiste un ordine parziale che si introduce in maniera naturale mediante la convenzione che $\Lambda \leq \Gamma$ se Λ è più fine di Γ . Questo significa che i blocchi di Γ sono unioni di blocchi di Λ . In questo modo $\mathcal{P}(l)$ acquisisce una struttura di poset, detta **reticolo delle partizioni**.

Proposizione 3.10. Il reticolo $L(\mathcal{A})$ dell'arrangiamento a treccia è isomorfo al reticolo delle partizioni.

Dimostrazione. Sia $I = \{1, \dots, l\}$. Al fine di trovare un isomorfismo fra $L(\mathcal{A})$ e $\mathcal{P}(l)$ è conveniente definire $H_{i,j} = \ker(x_i - x_j)$ per $i, j \in I$ e $H_{i,i} = V$ per ogni $i \in I$. Sia $X \in L(\mathcal{A})$. Si definisca una relazione \sim_X su I per cui $i \sim_X j$ se e solo se $X \subseteq H_{i,j}$. Siccome $H_{i,i} = V$, $H_{i,j} = H_{j,i}$ e $H_{i,j} \cap H_{j,k} \subseteq H_{i,k}$, si ha che \sim_X è una relazione d'equivalenza. Definiamo ora Λ_X come la partizione di I i cui blocchi corrispondono alle classi d'equivalenza della relazione \sim_X .

La mappa $\pi : L(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{P}(l)$ data da $\pi(X) = \Lambda_X$ è un isomorfismo fra reticoli. Infatti è iniettiva perchè

$$X = \bigcap_{k=1}^r \left(\bigcap_{i,j \in \Lambda_k} H_{i,j} \right)$$

è determinato dai blocchi di Λ . È suriettiva perchè data una qualsiasi partizione $\Lambda = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$ possiamo definire X grazie all'intersezione appena usata e troviamo $\Lambda_X = \Lambda$. Si noti infine che $X \leq Y$ se e solo se ogni blocco di Λ_Y è unione di blocchi di Λ_X . \square

Definizione 3.11. Dato un poset L e $X, Y \in L$ con $X < Y$, si definiscono i seguenti sottoposet e segmenti

$$\begin{aligned} L_X &= \{Z \in L \mid Z \leq X\}, & L^X &= \{Z \in L \mid Z \geq X\} \\ [X, Y] &= \{Z \in L \mid X \leq Z \leq Y\}, & [X, Y) &= \{Z \in L \mid X \leq Z < Y\} \end{aligned}$$

Lemma 3.12. Sia \mathcal{A} un arrangiamento e sia $X \in L(\mathcal{A})$. Allora:

- (1) $L(\mathcal{A})_X = L(\mathcal{A}_X)$
- (2) $L(\mathcal{A})^X = L(\mathcal{A}^X)$
- (3) se $Y \in L$ e $X \leq Y$, allora $L((\mathcal{A}_Y)^X) = L(\mathcal{A}_Y)^X = [X, Y]$

Esempio 3.13. Il reticolo $L(\mathcal{A})$ dell'Esempio 2.10 consiste di tutti i sottospazi di V . Se $X \in L(\mathcal{A})$ è p -dimensionale, allora $L(\mathcal{A}^X)$ è il reticolo di tutti gli iperpiani in X mentre $L(\mathcal{A}_X)$ è isomorfo al reticolo di tutti gli iperpiani dello spazio $(l-p)$ -dimensionale V/X . Se $X < Y$, allora $[X, Y]$ è isomorfo al reticolo dei sottospazi di Y/X .

Si rammenti la Definizione 3.5 secondo cui un arrangiamento è essenziale se e solo se contiene l iperpiani linearmente indipendenti. Per un arrangiamento centrale questo è equivalente alla condizione $T(\mathcal{A}) = \{0\}$. L'arrangiamento a treccia non è essenziale: $T(\mathcal{A})$ è infatti la retta $x_1 = x_2 = \dots = x_l$. Tutti gli altri arrangiamenti visti finora sono essenziali.

Definizione 3.14. Siano (\mathcal{A}_1, V_1) e (\mathcal{A}_2, V_2) arrangiamenti e sia $V = V_1 \oplus V_2$. Si definisce l'arrangiamento **prodotto** $(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, V)$ mediante

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \{H_1 \oplus V_2 \mid H_1 \in \mathcal{A}_1\} \cup \{V_1 \oplus H_2 \mid H_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

Proposizione 3.15. Siano $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ arrangiamenti. Si definisca un ordine parziale sull'insieme $L(\mathcal{A}_1) \times L(\mathcal{A}_2)$ delle coppie (X_1, X_2) con $X_i \in L(\mathcal{A}_i)$ nel modo seguente

$$(X_1, X_2) \leq (Y_1, Y_2) \iff X_1 \leq Y_1 \text{ e } X_2 \leq Y_2$$

Esiste allora un isomorfismo di reticoli naturale

$$\pi : L(\mathcal{A}_1) \times L(\mathcal{A}_2) \rightarrow L(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$$

definito da $\pi(X_1, X_2) = X_1 \oplus X_2$.

Definizione 3.16. Un arrangiamento (\mathcal{A}, V) si dice **riducibile** se, in seguito ad un cambio di coordinate, $(\mathcal{A}, V) = (\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, V_1 \oplus V_2)$. Altrimenti (\mathcal{A}, V) si dice **irriducibile**.

Esempio 3.17. L'arrangiamento B_3 è irriducibile. L'arrangiamento Booleano è il prodotto di l copie dell'1-arrangiamento $(\{0\}, \mathbb{K})$. L'arrangiamento a treccia è il prodotto dell'1-arrangiamento vuoto con un arrangiamento irriducibile.

Sia \mathcal{A} un l -arrangiamento affine. Si ricordi il processo di conificazione esposto nella Definizione 2.16. Sia $H \in \mathcal{A}$ il kernel del polinomio di grado 1 $\alpha_H \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_l]$. Allora H corrisponde a $\mathbf{c}H \in \mathbf{c}\mathcal{A}$, il nucleo della forma lineare ottenuta omogeneizzando α_H in $\mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_l]$. Si noti che $\dim H = l - 1$ e che $\dim \mathbf{c}H = l$. Si ricordi che $\mathbf{c}\mathcal{A}$ contiene anche l'iperpiano aggiuntivo $K_0 = \ker(x_0)$.

Proposizione 3.18. Sia \mathcal{A} un arrangiamento affine con cono $\mathbf{c}\mathcal{A}$. Sia $\mathcal{B} = (\{0\}, \mathbb{K})$ l'arrangiamento unidimensionale centrale non vuoto. Si definisca la biiezione $\phi : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{c}\mathcal{A}$ mediante $\phi(H \oplus \mathbb{K}) = \mathbf{c}H$ e $\phi(V \oplus \{0\}) = K_0$. Allora ϕ induce una mappa fra poset che, oltre ad essere suriettiva, preserva anche il rango $\phi : L(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \rightarrow L(\mathbf{c}\mathcal{A})$.

Dimostrazione. Sia $X \in L(\mathcal{A})$. Scriviamo $X = H_1 \cap \dots \cap H_p$ e poniamo $\mathbf{c}X = \mathbf{c}H_1 \cap \dots \cap \mathbf{c}H_p$. Si verifica che $\mathbf{c}X$ non dipende dalla rappresentazione di X come intersezione di iperpiani. Definiamo quindi $\phi(X \oplus \mathbb{K}) = \mathbf{c}X$ e $\phi(X \oplus \{0\}) = \mathbf{c}X \cap K_0$. È facile verificare che la mappa così definita è suriettiva e preserva il rango. \square

Arrangiamenti Super-Risolubili

Le prossime definizioni sono standard per i reticoli in generale, ma noi li useremo solo per arrangiamenti centrali. Per semplificare la notazione poniamo $L = L(\mathcal{A})$ e assumiamo che \mathcal{A} sia centrale ed essenziale, con $r(\mathcal{A}) = l$ e $T = T(\mathcal{A})$.

Definizione 3.19. Una coppia $(X, Y) \in L \times L$ si dice **coppia modulare** se per ogni $Z \in L$ tale che $Z \leq Y$ si ha

$$Z \vee (X \wedge Y) = (Z \vee X) \wedge Y$$

Lemma 3.20. Sono equivalenti:

- (1) la coppia $(X, Y) \in L \times L$ è modulare;
- (2) $r(X) + r(Y) = r(X \vee Y) + r(X \wedge Y)$;
- (3) $X \wedge Y = X + Y$;
- (4) $X + Y \in L$.

Dimostrazione. Le condizioni (3) e (4) sono ovviamente equivalenti.

(1) \Rightarrow (2) La mappa $\tau_X : [X \wedge Y, Y] \rightarrow [X, X \vee Y]$ definita da $\tau_X(Z) = X \vee Z$ preserva l'ordine ed è iniettiva, perchè per ipotesi $\tau_X(Z) \wedge Y = (Z \vee X) \wedge Y = Z \vee (X \wedge Y) = Z$. Segue che

$$r(Y) - r(X \wedge Y) \leq r(X \vee Y) - r(X)$$

Combinando ciò con il Lemma 3.3 (3), si ha il risultato cercato.

(2) \Rightarrow (3) Si noti che $X + Y \subseteq X \wedge Y$. Se vale (2), allora $\text{codim}(X \wedge Y) = \text{codim}(X + Y)$ cosicchè i due spazi coincidono.

(3) \Rightarrow (1) Sia $Z \subseteq Y$, ossia $Z \leq Y$. Il risultato segue allora da

$$Z \vee (X \wedge Y) = Z \cap (X + Y) = (Z \cap X) + Y = (Z \vee X) \wedge Y$$

\square

Definizione 3.21. Un elemento $X \in L$ si dice **modulare** se (X, Y) è una coppia modulare per ogni $Y \in L$.

Corollario 3.22. Un elemento $X \in L$ è modulare se e solo se $X + Y \in L$ per ogni $Y \in L$.

Lemma 3.23. Sia $X \in L$ un elemento modulare. Allora, per $Y \in L$, la mappa $\sigma_X : [Y, X \vee Y] \rightarrow [X \wedge Y, X]$ definita da $\sigma_X(Z) = X \wedge Z$ è un isomorfismo con inverso $\tau_Y(Z) = Y \vee Z$.

Dimostrazione. Entrambe le mappe preservano l'ordine. Siccome X è un elemento modulare, se $Z \in [X \wedge Y, X]$ allora $\sigma_X \tau_Y(Z) = X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee Z = Z$. Similmente, se $Z \in [Y, X \vee Y]$ allora $\tau_Y \sigma_X(Z) = Y \vee (X \wedge Z) = (Y \vee X) \wedge Z = Z$. \square

Esempio 3.24. Per ogni arrangiamento centrale \mathcal{A} , gli elementi $V, T = T(\mathcal{A})$ e tutti gli atomi sono modulari.

Esempio 3.25. Si consideri $Q(\mathcal{A}) = xyz(x + y - z)$. Questo non è altro che il cono costruito sul 2-arrangiamento dell'Esempio 2.6. In $L(\mathcal{A})$ ogni $H \in \mathcal{A}$ è modulare, ma non c'è alcun elemento di rango 2 che lo sia.

Lemma 3.26. Un elemento $X \in L$ è modulare se e solo se (X, Y) è una coppia modulare per ogni $Y \in L$ tale che $X \wedge Y = V$.

Dimostrazione. Fissiamo $X \in L$ e assumiamo che (X, Y) sia una coppia modulare per ogni $Y \in L$ tale che $X \wedge Y = V$. Vogliamo mostrare che (X, Z) è una coppia modulare per ogni $Z \in L$. Poniamo $a = r(Z) - r(X \wedge Z)$. Esistono di certo degli iperpiani linearmente indipendenti $H_1, \dots, H_a \in \mathcal{A}$ tali che

$$Z = (X \wedge Z) \vee H_1 \vee \dots \vee H_a$$

Sia allora $Y = H_1 \vee \dots \vee H_a$. Per l'indipendenza degli iperpiani $H_i \in \mathcal{A}$ per $i = 1, \dots, a$ si ha che $r(Y) = a$. Inoltre di certo $Z = (X \wedge Z) \vee Y$ (e quindi $Z \geq Y$). Si ha allora

$$r(X \wedge Y) = r(X \wedge Z \wedge Y) \leq r(X \wedge Z) + r(Y) - r((X \wedge Z) \vee Y) = r(X \wedge Z) + a - r(Z) = 0$$

Quindi $X \wedge Y = V$. Segue per ipotesi che (X, Y) è una coppia modulare, per cui $X + Y = V$. Allora

$$X + Z = X + ((X \wedge Z) \vee Y) = X + ((X \wedge Z) \cap Y) = (X \wedge Z) \cap (X + Y) = X \wedge Z$$

Questo è sufficiente per affermare che (X, Z) è una coppia modulare. \square

Lemma 3.27. Se Y è un elemento modulare in L e X è un elemento modulare in L_Y , allora X è un elemento modulare in L .

Dimostrazione. Sia $Z \in L$. Per il Lemma 3.20 è sufficiente mostrare che $X + Z = X \wedge Z$. Si ha che

$$X + Z = (X + Y) + Z = X + (Y + Z) = X + (Y \wedge Z) = X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z = X \wedge Z$$

come richiesto. \square

Definizione 3.28. Sia \mathcal{A} un arrangiamento con $r(\mathcal{A}) = l$. Diciamo che \mathcal{A} è **super-risolubile** se $L(\mathcal{A})$ possiede una catena massimale di elementi modulari

$$V = X_0 < X_1 < \dots < X_l = T$$

Esempio 3.29. L'arrangiamento dell'esempio 3.25 non è super-risolubile perchè non ha alcun elemento modulare di rango 2.

L'arrangiamento B_3 , l'arrangiamento a treccia e l'arrangiamento Booleano sono invece super-risolubili.

Nell'arrangiamento Booleano ogni elemento del reticolo è modulare cosicchè ogni catena massimale è formata da elementi modulari.

Nell'arrangiamento B_3 i soli elementi modulari di rango 2 sono $x = y = 0$, $x = z = 0$ e $y = z = 0$; si veda la Figura 6. Per cui una catena massimale di elementi modulari è

$$V < \{x = 0\} < \{x = y = 0\} < \{0\}$$

Non tutti gli elementi dell'arrangiamento a treccia sono modulari, ma

$$V < \{x_1 = x_2\} < \{x_1 = x_2 = x_3\} < \dots < \{x_1 = x_2 = \dots = x_l\} = T$$

è una catena di elementi modulari.

3.2 La Funzione di Möbius

La Funzione di Möbius

Definizione 3.30. Sia \mathcal{A} un arrangiamento e sia $L = L(\mathcal{A})$. Si definisce la **funzione di Möbius** $\mu_{\mathcal{A}} = \mu : L \times L \rightarrow \mathbb{Z}$ come segue:

$$\begin{cases} \mu(X, X) = 1 & \text{se } X \in L, \\ \sum_{X \leq Z \leq Y} \mu(X, Z) = 0 & \text{se } X, Y, Z \in L \text{ e } X < Y, \\ \mu(X, Y) = 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si noti che per X fissato i valori di $\mu(X, Y)$ possono essere calcolati ricorsivamente. Infatti, nel caso in cui $X < Y$, si può sviluppare la formula della definizione nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \mu(X, Y) &= - \sum_{X \leq Z_1 < Y} \mu(X, Z_1) = - \sum_{X \leq Z_1 < Y} \left(- \sum_{X \leq Z_2 < Z_1} \mu(X, Z_2) \right) = \dots = \\ &= - \sum_{X \leq Z_1 < Y} \left(- \dots \left(- \sum_{X \leq Z_p < Z_{p-1}} \mu(X, Z_p) \right) \dots \right) \end{aligned}$$

con $\mu(X, Z_p) = -\mu(X, X) = -1$. Si osservi che il processo ha sempre termine perchè $p = r(Y) - r(X) - 1$.

Segue che se ν è una qualche altra funzione che soddisfa le proprietà della definizione di μ , allora $\nu = \mu$. Vediamo una utile riformulazione di $\mu(X, Y)$.

Lemma 3.31. Sia \mathcal{A} un arrangiamento. Per $X, Y \in L$ con $X \leq Y$, sia $S(X, Y)$ l'insieme dei sottoarrangiamenti centrali $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tali che $\mathcal{A}_X \subseteq \mathcal{B}$ e $T(\mathcal{B}) = Y$. Allora

$$\mu(X, Y) = \sum_{\mathcal{B} \in S(X, Y)} (-1)^{|\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}_X|}$$

Dimostrazione. Chiamiamo $\nu(X, Y)$ la parte destra dell'espressione. Si noti che

$$\bigcup_{X \leq Z \leq Y} S(X, Z) = \{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \mid \mathcal{A}_X \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_Y\}$$

dove l'unione è disgiunta. Da questo segue che

$$\sum_{X \leq Z \leq Y} \nu(X, Z) = \sum_{\mathcal{A}_X \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_Y} (-1)^{|\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}_X|} = \sum_{\mathcal{C}} (-1)^{|\mathcal{C}|}$$

L'ultima somma è effettuata su tutti i sottoinsiemi \mathcal{C} dell'arrangiamento $\mathcal{A}_Y \setminus \mathcal{A}_X$. Se $X = Y$ allora la somma fa 1. Se $X < Y$ allora \mathcal{A}_X è un sottoinsieme proprio di \mathcal{A}_Y , per cui la somma fa 0 (raggruppando i sottoinsiemi secondo la loro cardinalità si ritrova il binomio di Newton). Abbiamo così provato che $\nu(X, Y)$ soddisfa le proprietà della Definizione 3.30, per cui $\nu(X, Y) = \mu(X, Y)$. \square

Vediamo un'altra interessante formula per $\mu(X, Y)$.

Definizione 3.32. Sia \mathcal{A} un arrangiamento e sia $L = L(\mathcal{A})$. Sia $ch(L)$ l'insieme di tutte le catene di L :

$$ch(L) = \{(X_1, \dots, X_p) \mid X_1 < \dots < X_p\}$$

Denotiamo il primo elemento di $c \in ch(L)$ con \underline{c} , l'ultimo elemento di c con \bar{c} , e la cardinalità di c con $|c|$.

Sia $ch[X, Y] = \{c \in ch(L) \mid \underline{c} = X, \bar{c} = Y\}$ e $ch[X, Y) = \{c \in ch(L) \mid \underline{c} = X, \bar{c} < Y\}$.

Proposizione 3.33. Per ogni $X, Y \in L$

$$\mu(X, Y) = \sum_{c \in ch[X, Y]} (-1)^{|c|-1}$$

Dimostrazione. Mostriamo che il lato destro dell'espressione soddisfa le proprietà della Definizione 3.30. Questo è chiaro quando $X = Y$ e quando X e Y sono incomparabili. Supponiamo invece che $X < Y$. Allora

$$\begin{aligned} & \sum_{Z \in [X, Y]} \sum_{c \in ch[X, Z]} (-1)^{|c|-1} = \\ &= \sum_{Z \in [X, Y)} \sum_{c \in ch[X, Z]} (-1)^{|c|-1} + \sum_{c \in ch[X, Y]} (-1)^{|c|-1} = \sum_{c \in ch[X, Y)} (-1)^{|c|-1} + \sum_{c \in ch[X, Y]} (-1)^{|c|-1} = \\ &= \sum_{c \in ch[X, Y)} (-1)^{|c|-2} + \sum_{c \in ch[X, Y]} (-1)^{|c|-1} = 0 \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che la mappa $(X, X_2, \dots, X_p) \mapsto (X, X_2, \dots, X_p, Y)$ da $ch[X, Y)$ a $ch[X, Y]$ è una biiezione. \square

L'Inversione di Möbius

Lemma 3.34. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento e sia $L = L(\mathcal{A})$. Allora*

$$\begin{cases} \mu(X, X) = 1 & \text{se } X \in L \\ \sum_{X \leq Z \leq Y} \mu(Z, Y) = 0 & \text{se } X, Y \in L \text{ e } X < Y \end{cases}$$

Dimostrazione. Scriviamo gli elementi di L in una r -upla, $L = \{X_1, \dots, X_r\}$, in modo che $X_i \leq X_j$ implichi $i \leq j$. Sia \mathbf{A} la matrice $r \times r$ che ha elementi $\mu(X_i, X_j)$ alle posizioni (i, j) . Sia \mathbf{B} la matrice $r \times r$ con elemento 1 in corrispondenza delle posizioni (i, j) per cui $X_i \leq X_j$ e 0 altrimenti. Entrambe \mathbf{A} e \mathbf{B} sono unitriangolari superiori. Inoltre segue dalla definizione di μ che $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_r$, dove \mathbf{I}_r è la matrice identità. Segue che $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_r$, e quindi l'asserto. \square

Il prossimo risultato è la formula di inversione di Möbius.

Proposizione 3.35. *Siano f, g funzioni su $L(\mathcal{A})$ con valori in un gruppo abeliano. Allora*

$$g(Y) = \sum_{X \in L_Y} f(X) \iff f(Y) = \sum_{X \in L_Y} \mu(X, Y)g(X)$$

$$g(X) = \sum_{Y \in L^X} f(Y) \iff f(X) = \sum_{Y \in L^X} \mu(X, Y)g(Y)$$

Dimostrazione. Ciascuna delle quattro implicazioni è basata su uno scambio dell'ordine di sommazione e sulle proprietà di μ fornite dalla definizione e dal Lemma 3.34. Illustriamo come esempio l'implicazione sinistra-destra della prima formula.

$$\sum_{Z \in L_Y} \mu(Z, Y)g(Z) = \sum_{Z \in L_Y} \mu(Z, Y) \sum_{X \in L_Z} f(X) = \sum_{X \in L_Y} \left(\sum_{X \leq Z \leq Y} \mu(Z, Y) \right) f(X) = f(Y)$$

come richiesto. \square

Lemma 3.36. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento e sia $L = L(\mathcal{A})$.*

(1) *Supponiamo $Y \in L$ e $Y \neq V$. Allora per ogni $Z \in L$*

$$\sum_{X \vee Y = Z} \mu(V, X) = 0$$

(2) *Supponiamo $Y \in L$ e sia $T \in L$ un elemento massimale tale che $Y < T$. Allora per ogni $Z \in L$*

$$\sum_{X \wedge Y = Z} \mu(X, T) = 0$$

Dimostrazione. Proviamo (1). La dimostrazione di (2) è simile. Si noti che $X \vee Y = Z$ implica $X \leq Z$, $Y \leq Z$ e $r(Z) \geq r(Y)$. Procediamo per induzione su $r(Z)$. Se $Z = Y$, allora la somma da calcolare è $\sum_{X \leq Y} \mu(V, X) = 0$, in quanto $Y \neq V$. Se invece $Z > Y$, allora

$$\sum_{X \vee Y = Z} \mu(V, X) = \sum_{X \vee Y \leq Z} \mu(V, X) - \sum_{X \vee Y < Z} \mu(V, X) = \sum_{X \leq Z} \mu(V, X) - \sum_{W < Z} \left(\sum_{X \vee Y = W} \mu(V, X) \right)$$

Il primo termine è nullo per definizione. Il secondo è nullo per ipotesi induttiva. \square

Lemma 3.37. Sia $(\mathcal{A}, V) = (\mathcal{A}_1, V_1) \times (\mathcal{A}_2, V_2)$ il prodotto diretto di due arrangiamenti. Sia $\mu_i = \mu_{\mathcal{A}_i}$ e sia $\mu = \mu_{\mathcal{A}}$. Siano $X, Y \in L(\mathcal{A})$ dove $X = (X_1, X_2)$ e $Y = (Y_1, Y_2)$ con $X_i, Y_i \in L(\mathcal{A}_i)$. Allora

$$\mu(X, Y) = \mu_1(X_1, Y_1)\mu_2(X_2, Y - 2)$$

Dimostrazione. Si definisca ν su $L(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ mediante $\nu(X, Y) = \mu_1(X_1, Y_1)\mu_2(X_2, Y_2)$. Allora ν soddisfa le condizioni che definiscono μ , per cui esse sono uguali. \square

La Funzione $\mu(\mathbf{X})$

Definizione 3.38. Per $X \in L$ si definisce $\mu(X) = \mu(V, X)$.

Chiaramente $\mu(V) = 1$, $\mu(H) = -1$ per ogni $H \in \mathcal{A}$ e se $r(X) = 2$, allora $\mu(X) = |\mathcal{A}_X| - 1$. In generale non è possibile dare una formula esplicita per $\mu(X)$.

Si richiami la mappa $\phi : L(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \rightarrow L(\mathbf{c}\mathcal{A})$ della Proposizione 3.18.

Proposizione 3.39. Sia $\phi : L(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \rightarrow L(\mathbf{c}\mathcal{A})$. Sia μ la funzione di Möbius di $L(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ e sia μ_c la funzione di Möbius di $L(\mathbf{c}\mathcal{A})$. Per ogni $Z \in L(\mathbf{c}\mathcal{A})$ si ha

$$\mu_c(Z) = \sum_{Y \in \phi^{-1}(Z)} \mu(Y)$$

Dimostrazione. Segue dal Lemma 3.37 che $\mu(X \oplus \mathbb{K}) = -\mu(X \oplus \{0\})$ per $X \in L(\mathcal{A})$. Se $K_0 \not\leq Z$ allora esiste un unico $Y \in L(\mathcal{A})$ tale che $Z = \mathbf{c}Y$. Per cui $\phi^{-1}(Z) = \{Y \oplus \mathbb{K}\}$ e quindi $\mu(Y \oplus \mathbb{K}) = \mu_c(\mathbf{c}Y)$. Se invece $K_0 \leq Z$ procediamo per induzione su $r(Z)$. Se $r(Z) = 1$, allora $Z = K_0$. Siccome $\phi^{-1}(K_0) = \{V \oplus 0\}$, si ha $\mu_c(K_0) = -1 = \mu(V \oplus \{0\})$. Supponiamo ora $r(Z) \geq 2$.

$$\begin{aligned} \mu_c(Z) &= - \sum_{\substack{Y \in L(\mathbf{c}\mathcal{A}) \\ Y < Z}} \mu_c(Y) = - \sum_{\substack{Y \in L(\mathbf{c}\mathcal{A}) \\ Y < Z}} \sum_{X \in \phi^{-1}(Y)} \mu(X) = - \sum_{\substack{X \in L(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \\ \phi(X) < Z}} \mu(X) = \\ &= - \sum_{\substack{X \in L(\mathcal{A}) \\ \mathbf{c}X < Z}} \mu(X \oplus \mathbb{K}) - \sum_{\substack{X \in L(\mathcal{A}) \\ \mathbf{c}X \cap K_0 < Z}} \mu(X \oplus \{0\}) = \\ &= \sum_{\substack{X \in L(\mathcal{A}) \\ \mathbf{c}X \cap K_0 \leq Z}} \mu(X \oplus \{0\}) - \sum_{\substack{X \in L(\mathcal{A}) \\ \mathbf{c}X \cap K_0 < Z}} \mu(X \oplus \{0\}) = \\ &= \sum_{\substack{X \in L(\mathcal{A}) \\ \mathbf{c}X \cap K_0 = Z}} \mu(X \oplus \{0\}) = \sum_{\substack{Y \in L(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \\ \phi(Y) = Z}} \mu(Y) \end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza è dovuta all'ipotesi induttiva, mentre la quinta sfrutta il fatto che se $K_0 \leq Z$, allora $\{X \in L(\mathcal{A}) \mid \mathbf{c}X < Z\} = \{X \in L(\mathcal{A}) \mid \mathbf{c}X \cap K_0 \leq Z\}$ \square

Proposizione 3.40. Si definisca \mathcal{A} mediante il polinomio $Q(\mathcal{A}) = x_1 x_2 \cdots x_l$. Allora per $X \in L(\mathcal{A})$ si ha

$$\mu(X) = (-1)^{r(X)}$$

Dimostrazione. Si definisca $\nu(X) = (-1)^{r(X)}$. È sufficiente provare che ν soddisfi le proprietà che definiscono μ . Chiaramente $\nu(V) = (-1)^0 = 1$. Se $X \neq V$, allora $X = H_I$ per un certo I con $|I| = p = r(X) > 0$. Se $V \leq Y \leq X$, allora $Y = H_J$ dove $J \subseteq I$ e

$$q = r(Y) = |J| \leq |I| = r(X) = p$$

Per cui

$$\sum_{Z \leq X} \nu(Z) = \sum_{J \subseteq I} (-1)^q = \sum_{q=0}^p (-1)^q \binom{p}{q} = 0$$

come richiesto. □

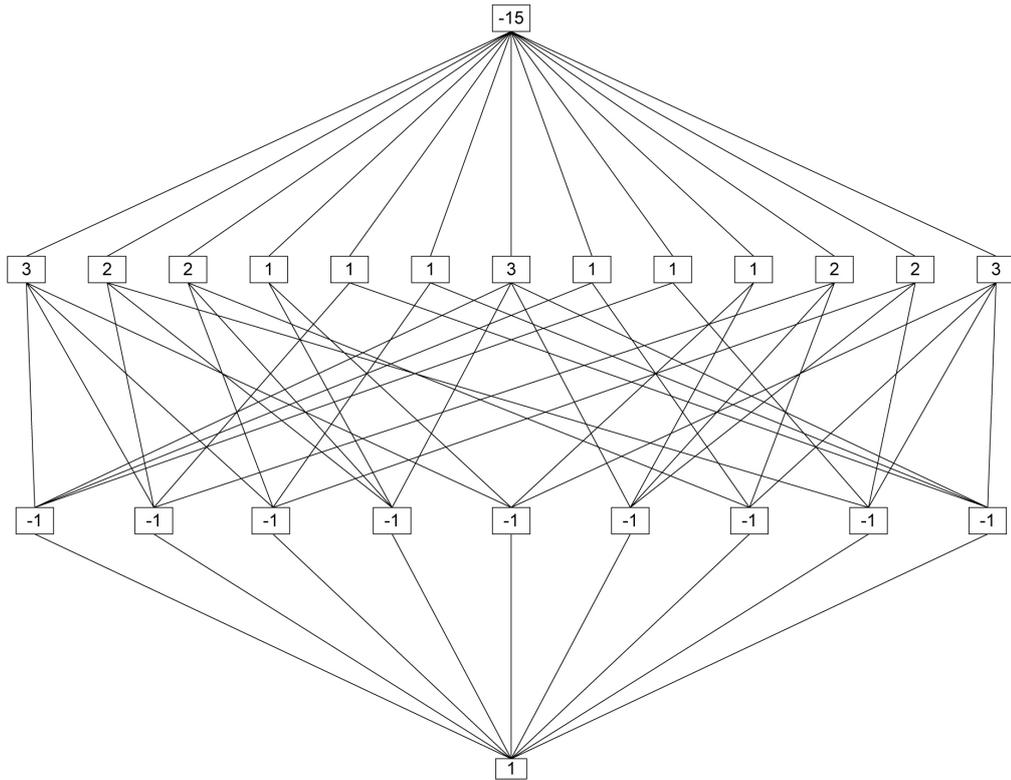


Figura 7: I valori di $\mu(X)$ per l'arrangiamento B_3

In Figura 7 sono riportati i valori di $\mu(X)$ per tutti gli $X \in L$ dell'Esempio 3.7, il cui diagramma di Hasse è stato illustrato in Figura 6.

Definizione 3.41. Per ogni arrangiamento centrale \mathcal{A} si ponga $\mu(\mathcal{A}) = \mu(T(\mathcal{A}))$.

Segue dal Lemma 3.37 che se \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 sono arrangiamenti centrali, allora $\mu(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) = \mu(\mathcal{A}_1)\mu(\mathcal{A}_2)$.

Proposizione 3.42. Sia \mathcal{A} l'arrangiamento dell'Esempio 2.10. Se $X \leq Y$ allora $\mu(X, Y) = (-1)^k q^{k(k-1)/2}$ dove $k = \dim(X/Y)$. In particolare, $\mu(\mathcal{A}) = (-1)^l q^{l(l-1)/2}$.

Dimostrazione. Siccome il segmento $[X, Y]$ è isomorfo al reticolo di tutti i sottospazi di X/Y , è sufficiente provare la seconda formula. Procediamo per induzione su l .

Se $l = 1$, allora $L = \{V, T\}$, cosicchè $\mu(\mathcal{A}) = -1$.

supponiamo ora che $l \geq 2$ e ricordiamo che il numero di rette in V è $1 + q + \dots + q^{l-1}$. Appliciamo ora il Lemma 3.36.1 con $Z = T = \{0\}$ e $Y \in \mathcal{A}$. Allora per forza $X = T$ oppure $X \in R$ dove R è l'insieme delle rette non contenute nell'iperpiano Y . In questo modo otteniamo

$$0 = \mu(T) + \sum_{X \in R} \mu(X) = \mu(\mathcal{A}) + \sum_{X \in R} \mu(\mathcal{A}_X)$$

Chiaramente si ha

$$|R| = (1 + q + \dots + q^{l-1}) - (1 + q + \dots + q^{l-2}) = q^{l-1}$$

Siccome ogni \mathcal{A}_X è isomorfo all'arrangiamento di tutti gli iperpiani di V/X , l'ipotesi induttiva ci assicura che $\mu(\mathcal{A}_X) = (-1)^{l-1} q^{(l-1)(l-2)/2}$. Si ottiene quindi

$$\mu(\mathcal{A}) = -q^{l-1} (-1)^{l-1} q^{(l-1)(l-2)/2}$$

come richiesto. \square

Teorema 3.43. *Se $X \leq Y$, allora $\mu(X, Y) \neq 0$ e $\text{sign}\mu(X, Y) = (-1)^{r(X)-r(Y)}$.*

Dimostrazione. Siccome la funzione di Möbius del segmento $[X, Y]$ è la restrizione della funzione di Möbius $\mu_{\mathcal{A}}$, si ha $\mu(X, Y) = \mu((\mathcal{A}_Y)^X)$. Da questo segue che è sufficiente dimostrare l'asserto per gli arrangiamenti centrali, nel qual caso basta verificare che $\mu(\mathcal{A}) \neq 0$ e che $\text{sign}\mu(\mathcal{A}) = (-1)^{r(\mathcal{A})}$. Procediamo per induzione su $r(\mathcal{A})$.

L'asserto è chiaro per $r(\mathcal{A}) = 0$.

Supponiamo $r(\mathcal{A}) \geq 1$. Si scelga $H \in \mathcal{A}$ e si applichi il Lemma 3.36.1 con $Y = H$ e $Z = T(\mathcal{A})$. Otteniamo così

$$0 = \mu(\mathcal{A}) + \sum_{X \in M} \mu(X) = \mu(\mathcal{A}) + \sum_{X \in M} \mu(\mathcal{A}_X)$$

dove M è l'insieme degli $X \in L$ tali che $X \neq T(\mathcal{A})$ e che $X \vee H = T(\mathcal{A})$. Se $X \in M$ allora

$$r(\mathcal{A}) = r(X \vee H) \leq r(X \vee H) + r(X \wedge H) \leq r(X) + r(H) = r(X) + 1$$

Segue che $r(X) = r(\mathcal{A}) - 1$ e quindi $r(\mathcal{A}_X) = r(\mathcal{A}) - 1$. Possiamo allora usare l'ipotesi induttiva per cui $\mu(\mathcal{A}_X) \neq 0$ e $\text{sign}\mu(\mathcal{A}_X) = (-1)^{r(\mathcal{A}_X)} = (-1)^{r(\mathcal{A})-1}$. L'asserto segue a questo punto dall'equazione $\mu(\mathcal{A}) = -\sum_{X \in M} \mu(\mathcal{A}_X)$. \square

3.3 Il Polinomio di Poincaré

In questa sezione definiremo uno dei più importanti invarianti di un arrangiamento in ambito combinatorio, il suo polinomio di Poincaré, e ne studieremo le proprietà.

Definizione 3.44. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento con poset delle intersezioni L e funzione di Möbius μ . Sia t una indeterminata. Si definisce il **polinomio di Poincaré** nel modo seguente*

$$\pi(\mathcal{A}, t) = \sum_{X \in L} \mu(X) (-t)^{r(X)}$$

Segue dal Teorema 3.43 che $\pi(\mathcal{A}, t)$ ha coefficienti non negativi. In qualche caso è facile calcolare direttamente i valori di μ in modo da ottenere il polinomio di Poincaré.

Esempi

Esempio 3.45. Se $\mathcal{A} = \Phi_l$ è vuoto, allora $\pi(\mathcal{A}, t) = 1$.

Il polinomio di Poincaré dell'Esempio 2.5 è $\pi(\mathcal{A}, t) = 1 + 3t + 2t^2 = (1+t)(1+2t)$.

Il polinomio di Poincaré dell'Esempio 2.6 è $\pi(\mathcal{A}, t) = 1 + 3t + 3t^2$.

Il polinomio di Poincaré dell'Esempio 2.7 è

$$\pi(\mathcal{A}, t) = 1 + 9t + 23t^2 + 15t^3 = (1+t)(1+3t)(1+5t)$$

. Il polinomio di Poincaré dell'arrangiamento Booleano è

$$\pi(\mathcal{A}, t) = \sum_{p=0}^l \binom{l}{p} t^p = (1+t)^l$$

Questi esempi possono dare la falsa impressione che il polinomio di Poincaré di ogni arrangiamento centrale sia scomponibile in fattori lineari $(1+bt) \in \mathbb{Z}[t]$. Un controesempio è dato dall'Esempio 3.25, in cui $\pi(\mathcal{A}, t) = 1 + 4t + 6t^2 + 3t^3 = (1+t)(1+3t+3t^2)$. La Proposizione 3.47 mostrerà che il fattore $(1+t)$ divide in effetti il polinomio di Poincaré di ogni arrangiamento centrale. Altri fattori del tipo $(1+bt) \in \mathbb{Z}[t]$ in generale non esistono.

Lemma 3.46. *Siano \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 arrangiamenti e sia $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Allora*

$$\pi(\mathcal{A}, t) = \pi(\mathcal{A}_1, t)\pi(\mathcal{A}_2, t)$$

Dimostrazione. Sia $V = V_1 \oplus V_2$. Siccome $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}_1) \times L(\mathcal{A}_2)$, si ha

$$\begin{aligned} \pi(\mathcal{A}, t) &= \\ &= \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(X)(-t)^{r(X)} = \\ &= \sum_{X_1 \oplus X_2 \in L(\mathcal{A}_1) \times L(\mathcal{A}_2)} \mu(X_1 \oplus X_2)(-t)^{r(X_1 \oplus X_2)} = \\ &= \sum_{X_1 \in L(\mathcal{A}_1), X_2 \in L(\mathcal{A}_2)} \mu(X_1)\mu(X_2)(-t)^{r(X_1)}(-t)^{r(X_2)} = \\ &= \pi(\mathcal{A}_1, t)\pi(\mathcal{A}_2, t) \end{aligned}$$

come richiesto. □

Proposizione 3.47. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento affine con cono $\mathbf{c}\mathcal{A}$. Allora*

$$\pi(\mathbf{c}\mathcal{A}, t) = (1+t)\pi(\mathcal{A}, t)$$

Dimostrazione. Se $\mathcal{B} = (\{0\}, \mathbb{K})$, allora $\pi(\mathcal{B}, t) = 1+t$. Segue dal Lemma 3.46 che $\pi(\mathcal{A} \times \mathcal{B}, t) = (1+t)\pi(\mathcal{A}, t)$. Siccome $\phi : L(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \rightarrow L(\mathbf{c}\mathcal{A})$ è suriettiva ed inoltre preserva il rango, segue dalla Proposizione 3.39 che $\pi(\mathbf{c}\mathcal{A}, t) = \pi(\mathcal{A} \times \mathcal{B}, t)$. □

Definizione 3.48. *Si definisce il polinomio caratteristico di \mathcal{A} nel modo seguente*

$$\chi(\mathcal{A}, t) = t^l \pi(\mathcal{A}, -t^{-1}) = \sum_{X \in L} \mu(X) t^{\dim(X)}$$

Si noti che $\chi(\mathcal{A}, t)$ è un polinomio monico di grado l . Procediamo ora a calcolare i polinomi caratteristici degli Esempi 2.9 e 2.10.

Proposizione 3.49. *Sia \mathcal{A} l'arrangiamento dell'Esempio 2.10. Allora*

$$\pi(\mathcal{A}, t) = (1+t)(1+qt) \cdots (1+q^{l-1}t)$$

Dimostrazione. Proviamo l'espressione equivalente

$$\chi(\mathcal{A}, t) = (t-1)(t-q) \cdots (t-q^{l-1})$$

Sia W uno spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{F}_q . Sia $w = |W|$ la cardinalità di W . Allora $|\text{hom}(W, V)| = w^l$. Classifichiamo ora gli elementi di $\text{hom}(W, V)$ secondo le loro immagini. Se $X \in L$, si definiscano sottoinsiemi P_X, Q_X di $\text{hom}(W, V)$ mediante

$$P_X = \{\phi \in \text{hom}(W, V) \mid \text{im}\phi = X\}$$

$$Q_X = \{\phi \in \text{hom}(W, V) \mid \text{im}\phi \subseteq X\}$$

Se $\text{im}\phi \subseteq X$, allora $\text{im}\phi = Y$ per un certo $Y \subseteq X$. Per cui si ha un'unione disgiunta

$$Q_X = \bigcup_{Y \geq X} P_Y$$

Dall'inversione di Möbius si ha

$$|P_Y| = \sum_{X \geq Y} \mu(Y, X) |Q_X|$$

Siccome $Q_X = \text{hom}(W, X)$, si ha $|Q_X| = w^{\dim X}$. Prendendo $Y = V$ troviamo

$$|P_V| = \sum_{X \in L} \mu(X) w^{\dim X}$$

Se $\phi \in \text{hom}(W, V)$, sia $\phi^* \in \text{hom}(V^*, W^*)$ la mappa trasposta. Si ha che ϕ è suriettiva se e solo se ϕ^* è iniettiva. Per cui P_V è il numero delle mappe iniettive in $\text{hom}(V^*, W^*)$. Questo numero è pari a zero se $\dim W < \dim V$. Supponiamo allora $\dim W \geq \dim V$. Sia x_1, \dots, x_l una base per V^* . Se ϕ è iniettiva, ci sono $w-1$ possibilità di scelta per $\phi(x_1)$. Siccome $\phi(x_2)$ deve giacere al di fuori dell'1-spazio generato da $\phi(x_1)$, ci sono $(w-q)$ possibilità per $\phi(x_2)$. Similmente ci sono $(w-q^2)$ possibilità per $\phi(x_3)$ e così via. Per cui

$$|P_V| = (w-1)(w-q) \cdots (w-q^{l-1})$$

Siccome le formule valgono per infiniti interi w , la proposizione è dimostrata uguagliando le due espressioni di $|P_V|$. \square

Proposizione 3.50. *Sia \mathcal{A} l'arrangiamento a treccia. Allora*

$$\pi(\mathcal{A}, t) = (1+t)(1+2t) \cdots (1+(l-1)t)$$

Dimostrazione. Proviamo la formula equivalente

$$\chi(\mathcal{A}, t) = t(t-1)(t-2)\cdots(t-(l-1))$$

Sia $I = \{1, \dots, l\}$. Sia W un insieme di cardinalità $|W| = w$. Sia $M = W^I$ l'insieme di tutte le mappe da I in W , cosicchè $|M| = w^l$. Ogni $\phi \in M$ determina una relazione d'equivalenza \sim_ϕ su I tale che $i \sim_\phi j$ se e solo se $\phi(i) = \phi(j)$. Sia Λ_ϕ la partizione corrispondente. Classifichiamo gli elementi di M usando le partizioni Λ_ϕ . Si richiami la Definizione 3.9. Dato $X \in L(\mathcal{A})$ si definiscano sottoinsiemi P_X e Q_X di M mediante

$$P_X = \{\phi \in M \mid \Lambda_\phi = \Lambda_X\} \quad Q_X = \{\phi \in M \mid \Lambda_\phi \geq \Lambda_X\}$$

Se $\Lambda_\phi \geq \Lambda_X$, allora $\Lambda_\phi = \Lambda_Y$ per un certo $Y \geq X$ cosicchè si ha un'unione disgiunta

$$Q_X = \bigcup_{Y \geq X} P_Y$$

Per l'inversione di Möbius si ottiene allora

$$|P_Y| = \sum_{X \geq Y} \mu(Y, X) |Q_X|$$

Sia $B(X)$ l'insieme dei blocchi di Λ_X e sia $b(X) = |B(X)|$. Se $\phi \in Q_X$, allora ϕ è costante sui blocchi di Λ_X . Perciò esiste una biiezione da Q_X a $W^{B(X)}$. In particolare, $|Q(X)| = w^{b(X)}$.

A questo punto si noti che $b(X) = \dim X$. Questo risulta chiaro scegliendo una base per X che consista di vettori v^k definiti da

$$v_i^k = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in \Lambda_k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Nel caso $Y = V$ si trova

$$|P_V| = \sum_{X \in L} \mu(X) w^{\dim X}$$

Siccome Λ_V è la partizione in cui ogni blocco è un singleton (ossia contiene un solo elemento), P_V è l'insieme delle mappe iniettive da I a W . Si ha quindi

$$|P_V| = w(w-1)\cdots(w-(l-1))$$

Siccome queste formule valgono per tutti gli interi positivi, l'asserto è provato. \square

Il Teorema di Deletion-Restriction

La formula di $\mu(X, Y)$ ottenuta al Lemma 3.31 fornisce un'espressione molto utile di $\pi(\mathcal{A}, t)$.

Lemma 3.51. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento. Allora*

$$\pi(\mathcal{A}, t) = \sum_{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}} (-1)^{|\mathcal{B}|} (-t)^{r(\mathcal{B})}$$

Dimostrazione. Sia $S(X) = S(V, X)$ come nell'enunciato del Lemma 3.31. Il suddetto Lemma ci consente di scrivere

$$\pi(\mathcal{A}, t) = \sum_{X \in L} \mu(X)(-t)^{r(X)} = \sum_{X \in L} \left(\sum_{\mathcal{B} \in S(X)} (-1)^{|\mathcal{B}|} \right) (-t)^{r(X)}$$

Se $\mathcal{B} \in S(X)$, allora $T(\mathcal{B}) = X$, cosicchè $r(\mathcal{B}) = r(X)$. Il risultato segue dal fatto che ogni sottoarrangiamento centrale \mathcal{B} di \mathcal{A} interviene in un unico $S(X)$. \square

Ora siamo pronti per il principale risultato di questa sezione, il teorema di deletion-restriction.

Teorema 3.52. (Deletion-Restriction) *Se $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ è una terna di arrangiamenti, allora*

$$\pi(\mathcal{A}, t) = \pi(\mathcal{A}', t) + t\pi(\mathcal{A}'', t)$$

Dimostrazione. Sfruttiamo la formula del Lemma 3.51. È conveniente indicare con $H = H_0$ l'iperpiano distinto. Si separi la sommatoria su $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ in due somme: R' ed R'' . Qui R' rappresenta la somma su quei \mathcal{B} che non contengono H , mentre R'' rappresenta la somma su quei \mathcal{B} che contengono H . Segue dal Lemma 3.51 con \mathcal{A}' al posto di \mathcal{A} che

$$R' = \pi(\mathcal{A}', t)$$

Al fine di calcolare R'' si richiami la definizione di $S(X, Y)$ dal Lemma 3.31. Siccome $H \in \mathcal{B}$, $\mathcal{A}_H \subseteq \mathcal{B}$. Cosicchè se $T(\mathcal{B}) = Y$, allora $\mathcal{B} \in S(H, Y)$. Sia $L'' = L(\mathcal{A}'')$. Allora

$$\begin{aligned} R'' &= \sum_{H \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}} (-1)^{|\mathcal{B}|} (-t)^{r(\mathcal{B})} = \sum_{Y \in L''} \sum_{\mathcal{B} \in S(H, Y)} (-1)^{|\mathcal{B}|} (-t)^{r(Y)} = \\ &= - \sum_{Y \in L''} \sum_{\mathcal{B} \in S(H, Y)} (-1)^{|\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}_H|} (-t)^{r(Y)} = - \sum_{Y \in L''} \mu(H, Y) (-t)^{r(Y)} = \\ &= t\pi(\mathcal{A}'', t) \end{aligned}$$

La penultima uguaglianza segue dal Lemma 3.31. L'ultima uguaglianza segue dal fatto che la funzione di Möbius μ'' di L'' è la restrizione di μ ad L'' cosicchè $\mu(Y) = \mu(H, Y)$, e la funzione di rango r'' di L'' soddisfa $r(Y) = r''(Y) + 1$. \square

Corollario 3.53. *Sia $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ una terna di arrangiamenti. Allora*

$$\chi(\mathcal{A}, t) = \chi(\mathcal{A}', t) - \chi(\mathcal{A}'', t)$$

Dimostrazione. Dalla Definizione 3.48 segue che per un qualsiasi arrangiamento \mathcal{B} ,

$$\pi(\mathcal{B}, t) = (-t)^l \chi(\mathcal{B}, -t^{-1})$$

Applicando questa formula al risultato del Teorema 3.52 si trova l'asserto. \square

Definizione 3.54. Sia \mathcal{A} un arrangiamento centrale e sia $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ una terna con iperpiano distinto $H \in \mathcal{A}$. H si dice **separatore** se $T(\mathcal{A}) \notin L(\mathcal{A}')$.

Corollario 3.55. Sia \mathcal{A} un arrangiamento centrale e sia $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ una terna con iperpiano distinto $H \in \mathcal{A}$. Allora:

- (1) se H è un separatore, allora $\mu(\mathcal{A}) = -\mu(\mathcal{A}'')$ e quindi $|\mu(\mathcal{A})| = |\mu(\mathcal{A}'')|$;
- (2) se H non è un separatore, allora $\mu(\mathcal{A}) = \mu(\mathcal{A}') - \mu(\mathcal{A}'')$ e $|\mu(\mathcal{A})| = |\mu(\mathcal{A}')| + |\mu(\mathcal{A}'')|$.

Dimostrazione. Segue dal Teorema 3.43 che $\pi(\mathcal{A}, t)$ ha termine di grado massimo

$$(-1)^{r(\mathcal{A})} \mu(\mathcal{A}) t^{r(\mathcal{A})}$$

La conclusione segue dalla comparazione dei termini di grado massimo di entrambi i lati dell'equazione del Teorema 3.52. Se H è un separatore, allora $r(\mathcal{A}') < r(\mathcal{A})$ e quindi $\pi(\mathcal{A}', t)$ non contribuisce. \square

Definizione 3.56. Gli arrangiamenti \mathcal{A} e \mathcal{B} si dicono **π -equivalenti** se $\pi(\mathcal{A}, t) = \pi(\mathcal{B}, t)$

Esempio 3.57. È chiaro che arrangiamenti L -equivalenti sono anche π -equivalenti. Il viceversa è però falso.

Si considerino infatti gli arrangiamenti

$$Q(\mathcal{A}) = xyz(x-z)(x+z)(y-z)(y+z)$$

$$Q(\mathcal{B}) = xyz(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(x-y-z)$$

Dal calcolo del polinomio di Poincaré si trova

$$\pi(\mathcal{A}, t) = (1+t)(1+3t)(1+3t) = \pi(\mathcal{B}, t)$$

Ad ogni modo però questi arrangiamenti non sono L -equivalenti. In Figura 8 si vede infatti che \mathcal{A} possiede due rette, ciascuna delle quali è contenuta in quattro iperpiani. Queste rette corrispondono in figura ai punti d'intersezione che le tre rette orizzontali e le tre rette verticali hanno all'infinito con la retta che fa da riquadro al disegno. Si nota inoltre dalla figura che l'arrangiamento \mathcal{B} non possiede alcuna retta di quel tipo.

La fattorizzazione di questi polinomi di Poincaré è notevole. Ora ci concentreremo infatti su alcuni risultati generali che spiegano questo tipo di fattorizzazione.

Arrangiamenti Super-Risolubili

Abbiamo notato nell'Esempio 3.29 che l'arrangiamento a treccia è super-risolubile. Abbiamo poi dimostrato con la Proposizione 3.50 che il suo polinomio di Poincaré si fattorizza in termini lineari. Il nostro prossimo obiettivo è dimostrare un teorema che fornisca una fattorizzazione di $\pi(\mathcal{A}, t)$ per ogni arrangiamento super-risolubile. Questo risultato è dovuto a Stanley. Si ricordi che un arrangiamento super-risolubile è sempre centrale per definizione.

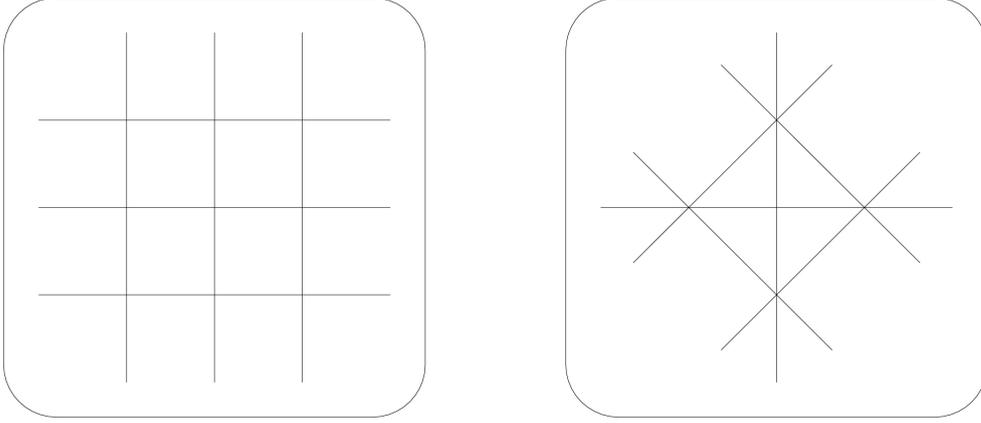


Figura 8: A sinistra l'arrangiamento \mathcal{A} , a destra \mathcal{B} . Esempio di arrangiamenti π -equivalenti ma non L -equivalenti.

Lemma 3.58. *Sia \mathcal{A} un l -arrangiamento super-risolubile con una catena massimale di elementi modulari*

$$V = X_0 < X_1 < \dots < X_l = T$$

Sia $H \in \mathcal{A}$ un complemento di X_{l-1} e sia $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ una terna con iperpiano distinto H . Allora:

(1) $\mathcal{A}_{X_{l-1}}$ è un $(l-1)$ -arrangiamento super-risolubile con una catena massimale di elementi modulari

$$V = X_0 < X_1 < \dots < X_{l-1}$$

La mappa $\tau_H : L(\mathcal{A}_{X_{l-1}}) \rightarrow L(\mathcal{A}'')$ definita da $\tau_X(Z) = H \vee Z$ è un isomorfismo di reticoli. Da questo segue che \mathcal{A}'' è super-risolubile.

(2) *Se H non è un separatore, allora*

$$V = X_0 < X_1 < \dots < X_l = T$$

è una catena massimale di elementi modulari per \mathcal{A}' . Se H è un separatore, allora

$$V = X_0 < X_1 < \dots < X_{l-1}$$

è una catena massimale di elementi modulari per \mathcal{A}' . Perciò \mathcal{A}' è un arrangiamento super-risolubile.

Dimostrazione. Sia $X_p \in L(\mathcal{A}_{X_{l-1}})$. Se X_p è modulare in $L(\mathcal{A})$, allora è modulare anche in $L(\mathcal{A}_{X_{l-1}})$. Segue dal Lemma 3.23 che τ_H è un isomorfismo. Questo implica (1).

Per mostrare che $X_p \in \mathcal{A}'$ è modulare in $L(\mathcal{A}')$ si noti che $H \not\leq X_{l-1}$ perchè per ipotesi H è un complemento di X_{l-1} : segue che $H \not\leq X_p$. Denotiamo il join e il meet in $L(\mathcal{A}')$ mediante \vee' e \wedge' . Preso $Y \in L(\mathcal{A}')$ si ha allora $Y \vee' X_p = Y \vee X_p$ e $Y \wedge' X_p = Y \wedge X_p$. Siccome $r(\mathcal{A}') = l$ se H non è un separatore e $r(\mathcal{A}') = l-1$ se H è un separatore, questo prova (2). \square

Teorema 3.59. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento super-risolubile con una catena massimale di elementi modulari*

$$V = X_0 < X_1 < \dots < X_l = T$$

Siano $b_i = |\mathcal{A}_{X_i} \setminus \mathcal{A}_{X_{i-1}}|$. Allora

$$\pi(\mathcal{A}, t) = \prod_{i=1}^l (1 + b_i t)$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su $|\mathcal{A}|$.

L'asserto è chiaro per $|\mathcal{A}| = 1$.

Si scelga ora H come nel Lemma 3.58, ossia tale che sia un complemento per X_{l-1} . Segue dal Lemma 3.58.1 che \mathcal{A}'' è super-risolubile. Siccome $|\mathcal{A}''| < |\mathcal{A}|$, l'ipotesi induttiva si applica ad \mathcal{A}'' . Siccome $L(\mathcal{A}'')$ è isomorfo ad $L(\mathcal{A}_{X_{l-1}})$ per via dell'applicazione τ_H del Lemma 3.58.1 si trova

$$\pi(\mathcal{A}'', t) = \prod_{i=1}^{l-1} (1 + b_i t)$$

Segue inoltre dal Lemma 3.58.2 che \mathcal{A}' è super-risolubile. Siccome $|\mathcal{A}'| < |\mathcal{A}|$ si può applicare l'ipotesi induttiva ad \mathcal{A}' . Se H non è un separatore allora, considerando la catena di elementi modulari del Lemma 3.58.2, segue che

$$\pi(\mathcal{A}', t) = \prod_{i=1}^{l-1} (1 + b_i t)(1 + (b_l - 1)t)$$

Se H è un separatore allora $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_{X_{l-1}}$. Segue sempre dal Lemma 3.58.2 che

$$\pi(\mathcal{A}', t) = \prod_{i=1}^{l-1} (1 + b_i t)$$

La conclusione segue dal Teorema 3.52: infatti, nel caso in cui H non è un separatore

$$\begin{aligned} \pi(\mathcal{A}, t) &= \pi(\mathcal{A}', t) + t\pi(\mathcal{A}'', t) = \prod_{i=1}^{l-1} (1 + b_i t)(1 + (b_l - 1)t) + t \prod_{i=1}^{l-1} (1 + b_i t) = \\ &= \prod_{i=1}^{l-1} (1 + b_i t)(1 + (b_l - 1)t + t) = \prod_{i=1}^l (1 + b_i t) \end{aligned}$$

Nel caso in cui H è un separatore si ha invece

$$\pi(\mathcal{A}, t) = \pi(\mathcal{A}', t) + t\pi(\mathcal{A}'', t) = \prod_{i=1}^{l-1} (1 + b_i t) + t \prod_{i=1}^{l-1} (1 + b_i t) = \prod_{i=1}^{l-1} (1 + b_i t)(1 + t)$$

Anche in questo caso l'asserto è provato, una volta osservato che nel caso H sia un separatore si ha $b_l = 1$. \square

L'arrangiamento \mathcal{A} dell'Esempio 3.57 definito da

$$Q(\mathcal{A}) = xyz(x - z)(x + z)(y - z)(y + z)$$

è super-risolubile: una catena massimale di elementi modulari è data da $V < \{x = 0\} < \{x = z = 0\} < \{0\}$. Perciò la fattorizzazione $\pi(\mathcal{A}, t) = (1 + t)(1 + 3t)(1 + 3t)$ è giustificata dal Teorema 3.59. L'arrangiamento \mathcal{B} , invece, non è super-risolubile. Nonostante questo, il suo polinomio di Poincaré gode comunque di una fattorizzazione analoga. Il risultato che esporremo nel prossimo paragrafo giustificherà questo fatto.

Partizioni Buone

Nel Teorema 3.59 abbiamo considerato gli insiemi $\pi_i = \mathcal{A}_{X_i} \setminus \mathcal{A}_{X_{i-1}}$. Questi insiemi forniscono una partizione (π_1, \dots, π_l) di \mathcal{A} . Ora forniremo una generalizzazione della nozione di super-risolubilità per un arrangiamento introducendo le cosiddette ‘partizioni buone’. Nella Proposizione 3.63 vedremo che la partizione determinata da una catena massimale di elementi modulari è buona. Inoltre, nel corso del prossimo Capitolo ed in particolare nel Corollario 4.89 dimostreremo che il polinomio di Poincaré di un arrangiamento dotato di una partizione buona ammette una fattorizzazione simile a quella del Teorema 3.59. In questo paragrafo prenderemo in esame esclusivamente arrangiamenti centrali; la generalizzazione della nozione di partizione buona per un arrangiamento affine verrà fornita nella Definizione 4.92.

Definizione 3.60. Una partizione $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_s)$ di \mathcal{A} è detta **indipendente** se per ogni scelta di iperpiani $H_i \in \pi_i$ per $1 \leq i \leq s$, gli iperpiani risultanti sono indipendenti, ossia $r(H_1 \vee \dots \vee H_s) = s$.

Definizione 3.61. Sia $X \in L$. Sia $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_s)$ una partizione di \mathcal{A} . Allora la **partizione indotta** π_X è una partizione su \mathcal{A}_X . I suoi blocchi sono i sottoinsiemi non vuoti $\pi_i \cap \mathcal{A}_X$.

Definizione 3.62. Una partizione $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_s)$ di \mathcal{A} si dice **buona** se:

- (1) π è indipendente;
- (2) se $X \in L \setminus \{V\}$, allora la partizione indotta π_X contiene un blocco che è un singleton.

Proposizione 3.63. Sia \mathcal{A} un l -arrangiamento super-risolubile con una catena massimale di elementi modulari $V = X_0 < X_1 < \dots < X_L = T$. Sia $\pi_i = \mathcal{A}_{X_i} \setminus \mathcal{A}_{X_{i-1}}$. Allora la partizione (π_1, \dots, π_l) è buona.

Dimostrazione. Si scelga $H_i \in \pi_i$ per ogni i . Prima di tutto usiamo l’induzione su i per provare che $r(H_1 \vee \dots \vee H_i) = i$. Questo è chiaro se $i = 1$. Sia $Y = H_1 \vee \dots \vee H_{i-1}$. Allora $Y \leq X_{i-1}$ per come abbiamo costruito la partizione. Siccome $H_i \not\leq X_{i-1}$, abbiamo che $H_i \not\leq Y$. Per cui $H_i \wedge Y = V$. Dall’ipotesi induttiva abbiamo $r(Y) = i - 1$, per cui

$$r(H_1 \vee \dots \vee H_i) = r(Y \vee H_i) = r(Y) + r(H_i) - r(Y \wedge H_i) = (i - 1) + 1 - r(V) = i$$

La terza uguaglianza è dovuta al Lemma 3.20 ed al fatto che tutti gli atomi, in particolare H_i , sono elementi modulari. Questo dimostra che la partizione (π_1, \dots, π_l) è indipendente.

Sia ora $X \in L \setminus \{V\}$. Sia $j \in \{0, 1, \dots, l\}$ il massimo intero tale che $V = X \wedge X_j$. Allora

$$\begin{aligned} 0 < r(X \wedge X_{j+1}) &= r(X) + r(X_{j+1}) - r(X \vee X_{j+1}) \leq r(X) + r(X_{j+1}) - r(X \vee X_j) = \\ &= r(X) + r(X_{j+1}) - (r(X) + r(X_j) - r(X \wedge X_j)) = 1 \end{aligned}$$

La prima e la penultima uguaglianze sono dovute al fatto che gli X_i sono tutti elementi modulari. La disuguaglianza è giustificata da $X_j < X_{j+1}$.

Questo implica che $X \wedge X_{j+1} := H$ è un iperpiano appartenente ad \mathcal{A} . Inoltre $H \in \mathcal{A}_X \cap \pi_{j+1}$. Infatti di certo $H \in \mathcal{A}_X$ e $H \in \mathcal{A}_{X_{j+1}}$; però $H \notin \mathcal{A}_{X_j}$, altrimenti si avrebbe $X \wedge X_j \geq H$, contrariamente a come è stato scelto j . Infine, $\mathcal{A}_X \cap \pi_{j+1}$ non contiene altri iperpiani: se contenesse un iperpiano $K \in \mathcal{A}$ tale che $K \neq H$ allora si avrebbe $K \vee H \leq X$ e $K \vee H \leq X_{j+1}$, per cui $X \wedge X_{j+1} \geq K \vee H > H = X \wedge X_{j+1}$, il che è assurdo. Quindi $\mathcal{A}_X \cap \pi_{j+1} = \{X \wedge X_{j+1}\}$ è un singleton. \square

Proveremo nel Corollario 4.89 che se \mathcal{A} possiede una partizione buona $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_s)$, ponendo $b_i = |\pi_i|$ si ottiene

$$\pi(\mathcal{A}, t) = \prod_{i=1}^s (1 + b_i t)$$

L'arrangiamento \mathcal{B} definito da $Q(\mathcal{B}) = xyz(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(x-y-z)$ dell'Esempio 3.57 ha una partizione buona $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$. Possiamo prendere $\pi_1 = \{\ker(z)\}$, $\pi_2 = \{\ker(x), \ker(x-y+z), \ker(x-y-z)\}$, $\pi_3 = \{\ker(y), \ker(x+y-z), \ker(x+y+z)\}$. Perciò il Corollario 4.89 giustifica la fattorizzazione $\pi(\mathcal{B}, t) = (1+t)(1+3t)(1+3t)$.

Funzioni di Conteggio

Vedremo in seguito che il polinomio di Poincaré di un arrangiamento coincide con il polinomio di Poincaré di alcune algebre graduate che assoceremo ad \mathcal{A} nel prossimo Capitolo. Qui dimostriamo che il polinomio di Poincaré è anche una funzione di conteggio. Si supponga prima di tutto che \mathcal{A} sia un arrangiamento reale. Si richiami dalle Definizioni 2.17, 2.18 e dall'Esempio 2.15 che il complemento $M(\mathcal{A})$ è un'unione disgiunta di camere

$$M(\mathcal{A}) = \cup_{C \in \mathcal{C}(\mathcal{A})} C$$

Con il prossimo Teorema, dovuto a Zaslavsky, mostriamo che il numero totale delle camere è determinato dal polinomio di Poincaré.

Teorema 3.64. (Zaslavsky) *Sia \mathcal{A} un arrangiamento reale. Allora*

$$|\mathcal{C}(\mathcal{A})| = \pi(\mathcal{A}, 1)$$

Dimostrazione. Per induzione sulla cardinalità di \mathcal{A} . Se \mathcal{A} è vuoto, allora $|\mathcal{C}(\mathcal{A})| = 1 = \pi(\mathcal{A}, 1)$. Inoltre abbiamo mostrato nell'Esempio 2.15 che $|\mathcal{C}(\mathcal{A})| = |\mathcal{C}(\mathcal{A}')| + |\mathcal{C}(\mathcal{A}'')|$. Perciò il risultato segue direttamente dal Teorema 3.52. \square

Si assuma ora che \mathcal{A} sia un l -arrangiamento sul campo finito \mathbb{F}_q . Allora il complemento $M(\mathcal{A})$ consiste di un numero finito di punti. La sua cardinalità è ancora determinata dal polinomio di Poincaré.

Teorema 3.65. *Sia \mathcal{A} un l -arrangiamento su \mathbb{F}_q . Sia $|M(\mathcal{A})|$ la cardinalità del suo complemento. Allora*

$$|M(\mathcal{A})| = q^l \pi(\mathcal{A}, -q^{-1}) = \chi(\mathcal{A}, q)$$

Dimostrazione. Se \mathcal{A} è vuoto, allora $|M(\mathcal{A})| = q^l = \chi(\mathcal{A}, q)$. Si supponga che \mathcal{A} sia non vuoto e sia $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ una terna. Evidentemente

$$|M(\mathcal{A})| = |M(\mathcal{A}')| - |M(\mathcal{A}'')|$$

Perciò le funzioni $|M(\mathcal{A})|$ e $\chi(\mathcal{A}, q)$ sono uguali sull'arrangiamento Φ_l ed inoltre soddisfano la stessa formula di ricorsione per il Corollario 3.53. Segue che esse coincidono. \square

4 Algebre

4.1 $A(\mathcal{A})$ per Arrangiamenti Centrali

In questa sezione assumiamo che \mathcal{A} sia un arrangiamento centrale e che \mathcal{K} sia un anello commutativo. Assoceremo ad \mathcal{A} un'algebra anticommutativa graduata $A(\mathcal{A})$ su \mathcal{K} . Nella letteratura, quest'algebra è spesso chiamata algebra di **Orlik-Solomon**.

Costruzione di $A(\mathcal{A})$

Definizione 4.1. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento su \mathbb{K} . Sia \mathcal{K} un anello commutativo. Sia*

$$E_1 = \bigoplus_{H \in \mathcal{A}} \mathcal{K}e_H$$

e sia

$$E = E(\mathcal{A}) = \Lambda(E_1)$$

l'algebra esterna di E_1 .

Si noti che E_1 possiede una \mathcal{K} -base data dagli elementi e_H in corrispondenza biunivoca con gli iperpiani di \mathcal{A} . Si scriva $uv = u \wedge v$ e si noti che $e_H^2 = 0$, $e_H e_K = -e_K e_H$ per $H, K \in \mathcal{A}$. L'algebra E è graduata. Se $|\mathcal{A}| = n$, allora

$$E = \bigoplus_{p=0}^n E_p$$

dove $E_0 = \mathcal{K}$, E_1 coincide con la sua precedente definizione ed E_p è generato su \mathcal{K} da tutti gli $e_{H_1} \cdots e_{H_p}$ con $H_k \in \mathcal{A}$.

Definizione 4.2. *Si definisce una mappa \mathcal{K} -lineare $\partial_E = \partial : E \rightarrow E$ mediante $\partial 1 = 0$, $\partial e_H = 1$ e per $p \geq 2$*

$$\partial(e_{H_1} \cdots e_{H_p}) = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} e_{H_1} \cdots \widehat{e_{H_k}} \cdots e_{H_p}$$

per ogni $H_1, \dots, H_p \in \mathcal{A}$

Definizione 4.3. *Data una p -upla di iperpiani, $S = (H_1, \dots, H_p)$, si scriva $|S| = p$,*

$$e_S = e_{H_1} \cdots e_{H_p} \in E \quad \cap S = H_1 \cap \cdots \cap H_p$$

Siccome \mathcal{A} è centrale, $\cap S \in L$ per ogni S .

Se $p = 0$, conveniamo che se $S = ()$ è la n -upla vuota, allora $e_S = 1$ e $\cap S = V$. Siccome la funzione rango su L è la codimensione, è chiaro che $r(\cap S) \leq |S|$.

Definizione 4.4. *S si dice **indipendente** se $r(\cap S) = |S|$ e **dipendente** se $r(\cap S) < |S|$.*

Questa terminologia ha un significato geometrico. La p -upla S è indipendente se le forme lineari corrispondenti $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sono linearmente indipendenti. Equivalentemente, gli iperpiani di S sono in posizione generale. Sia \mathbf{S}_p l'insieme di tutte le p -uple (H_1, \dots, H_p) e sia $\mathbf{S} = \bigcup_{p \geq 0} \mathbf{S}_p$.

Lemma 4.5. *La mappa $\partial : E \rightarrow E$ soddisfa:*

- (1) $\partial^2 = 0$;
 (2) se $u \in E_p$ e $v \in E$, allora $\partial(uv) = (\partial u)v + (-1)^p u(\partial v)$.

Dimostrazione. Il punto (1) è l'usuale formula del bordo. È sufficiente provare (2) per $u = e_S$ e $v = e_T$ per $S, T \in \mathbf{S}$: in questo caso l'asserto segue da un calcolo diretto. \square

Si noti come questo lemma non abbia nulla a che fare con gli arrangiamenti. Esso afferma due proprietà comuni delle algebre esterne. Siccome la mappa ∂ è omogenea di grado -1 , da (1) segue che (E, ∂) è un complesso a catena. La parte (2) esprime invece il fatto che ∂ è una derivazione dell'algebra esterna. Essa può essere caratterizzata come l'unica derivazione di E tale che $\partial e_H = 1$.

Definizione 4.6. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento. Sia $I = I(\mathcal{A})$ l'ideale di E generato dagli elementi ∂e_S per tutti gli $S \in \mathbf{S}$ dipendenti.*

I è un ideale graduato in quanto è generato da elementi omogenei. Sia $I_p = I \cap E_p$. Allora

$$I = \bigoplus_{p=0}^n I_p$$

Definizione 4.7. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento. Sia $A = A(\mathcal{A}) = E/I$. Sia $\varphi : E \rightarrow A$ l'omomorfismo naturale e sia $A_p = \varphi(E_p)$. Se $H \in \mathcal{A}$, sia $a_H = \varphi(e_H)$ e se $S \in \mathbf{S}$, sia $a_S = \varphi(e_S)$.*

Lemma 4.8. *Se $S \in \mathbf{S}$ e $H \in S$, allora $e_S = e_H \partial e_S$*

Dimostrazione. Se $H \in S$, allora $e_H e_S = 0$. Cosicché $0 = \partial(e_H e_S) = e_S - e_H \partial e_S$ \square

Siccome entrambi E ed I sono graduati, A è un'algebra anticommutativa graduata. Siccome gli elementi di \mathbf{S}_1 sono indipendenti, abbiamo $I_0 = 0$ e quindi $A_0 = \mathcal{K}$. Gli unici elementi dipendenti di \mathbf{S}_2 sono della forma $S = (H, H)$. Siccome $e_S = e_H^2 = 0$, si ha $I_1 = 0$. Per cui gli elementi a_H sono linearmente indipendenti su \mathcal{K} e $A_1 = \bigoplus_{H \in \mathcal{A}} \mathcal{K} a_H$. Se $p > l$, allora ogni elemento di \mathbf{S}_p è dipendente. Segue dal Lemma 4.8 che $A_p = 0$. Per cui

$$A = \bigoplus_{p=0}^l A_p$$

Esempio 4.9. Supponiamo $l = 2$ e $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\}$. Scriviamo $a_k = a_{H_k}$. Verifichiamo allora che

$$A(\mathcal{A}) = \mathcal{K} \oplus \bigoplus_{p=1}^n \mathcal{K} a_p \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-1} \mathcal{K} a_k a_n$$

Abbiamo già calcolato A_0 , A_1 e sappiamo che $A_p = 0$ per $p > 2$. Rimane da determinare A_2 . Siccome $\dim V = 2$, (H_i, H_j, H_k) è dipendente per ogni (i, j, k) . Per cui I_2 contiene gli elementi

$$\partial(e_i e_j e_k) = e_j e_k - e_i e_k + e_i e_j = e_i e_j + e_j e_k + e_k e_i$$

Segue che A_2 è generato dagli elementi $a_p a_q$ sottoposti alle relazioni

$$a_i a_j + a_j a_k + a_k a_i = 0$$

per ogni (i, j, k) . Questo mostra che A_2 è generato dagli $a_k a_n$ con $1 \leq k < n$. Infatti per ogni i, j l'identità applicata alla terna (i, j, n) mostra che A_2 è generato dagli $a_k a_n$ con $1 \leq k < n$. Rimane da mostrare che la somma è diretta. Supponiamo che $\sum_{k=1}^{n-1} c_k a_k a_n = 0$ con $c_k \in \mathcal{K}$. Allora $\sum_{k=1}^{n-1} c_k e_k e_n \in I_2$. Si ricordi che I_2 è generato dagli elementi $\partial(e_i e_j e_k)$. Siccome $\partial\partial = 0$, troviamo che $\partial I_2 = 0$ e quindi

$$\partial\left(\sum_{k=1}^{n-1} c_k e_k e_n\right) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k (e_n - e_k) = 0$$

Siccome e_1, \dots, e_n sono linearmente indipendenti su \mathcal{K} segue che $c_k = 0$ per ogni k .

Esempio 4.10. Se \mathcal{A} è l'arrangiamento Booleano, allora $S = (H_1, \dots, H_p)$ è indipendente se e solo se H_1, \dots, H_p sono iperpiani distinti. Per cui se S è dipendente allora $e_S = 0$. Segue che $I = 0$ e $A = E$.

Aciclicità del complesso A

In generale, dato un complesso a catena (C_*, d_*) , in cui la mappa d^* agisce abbassando il grado

$$\dots \rightarrow C_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} C_i \xrightarrow{d_i} C_{i-1} \rightarrow \dots$$

il complesso si dice aciclico se vale la condizione $\text{im}d_* = \ker d_*$. Equivalentemente il complesso è aciclico se $\text{im}d_{i+1} = \ker d_i \forall i$, ossia se la successione sopra descritta è esatta.

Un altro modo di definire un complesso aciclico consiste nel richiedere che tutti i gruppi di omologia successivi al primo siano nulli.

Se $S = (H_1, \dots, H_p)$, diciamo che $H_i \in S$. Se T è una sottosequenza di S , scriviamo $T \subseteq S$. Se $T = (K_1, \dots, K_q)$, scriviamo $(S, T) = (H_1, \dots, H_p, K_1, \dots, K_q)$. In questo modo $e_{(S,T)} = e_S e_T$ ed in particolare per $H \in \mathcal{A}$ si ha $e_{(H,S)} = e_H e_S$.

Lemma 4.11. $\partial_E I \subseteq I$.

Dimostrazione. Si ricordi che I è una combinazione \mathcal{K} -lineare di elementi della forma $e_T \partial e_S$ dove $T, S \in \mathbf{S}$ e S è dipendente. Si ha

$$\partial(e_T \partial e_S) = (\partial e_T)(\partial e_S) \pm e_T(\partial^2 e_S) = (\partial e_T)(\partial e_S) \in I$$

□

Definizione 4.12. Siccome $\partial_E I \subseteq I$, possiamo definire $\partial_A : A \rightarrow A$ mediante $\partial_A \varphi u = \varphi \partial_E u$ per $u \in E$.

Lemma 4.13. La mappa $\partial_A : A \rightarrow A$ soddisfa:

- (1) $\partial^2 = 0$;
- (2) se $a \in A_p$ e $b \in A$, allora $\partial_A(ab) = (\partial_A a)b + (-1)^p a(\partial_A b)$;
- (3) se \mathcal{A} è non vuoto, allora il complesso a catena (A, ∂_A) è aciclico.

Dimostrazione. I punti (1) e (2) seguono dalle corrispondenti proprietà di ∂_E . Siccome ∂_A è una mappa omogenea di grado -1 , (A, ∂_A) è un complesso a catena. Segue da (1) che $\text{im}\partial_A \subseteq \ker \partial_A$. Per provare che il complesso è aciclico dobbiamo mostrare l'inclusione inversa.

Siccome \mathcal{A} è non vuoto, possiamo scegliere $H \in \mathcal{A}$. Sia $v = e_H$. Allora $\partial_E v = 1$. Sia $b = \varphi v$ e sia $a \in A$. Si scelga $u \in E$ tale che $\varphi u = a$. Allora $\partial_E(vu) = (\partial_E v)u - v(\partial_E u) = u - v(\partial_E u)$. Siccome $\varphi \partial_E = \partial_A \varphi$ e φ è un omomorfismo di \mathcal{K} -algebre, applicando φ al primo ed all'ultimo termine troviamo $a = \partial_A(ba) + b\partial_A a$ per ogni $a \in A$. Ora, se scegliamo $a \in \ker \partial_A$, si trova $a = \partial_A(ba)$, il che prova $\ker \partial_A \subseteq \text{im} \partial_A$. \square

Studiamo ora l'ideale I tornando alla notazione $\partial = \partial_E$.

Definizione 4.14. *Sia $J = J(\mathcal{A})$ il sottomodulo di E generato su \mathcal{K} da tutti gli e_S tali che $S \in \mathbf{S}$ sia dipendente.*

Lemma 4.15. *J è un ideale di E e vale $I = J + \partial J$.*

Dimostrazione. Se $T \in \mathbf{S}$ è dipendente, allora (S, T) è dipendente per ogni $S \in \mathbf{S}$. Per cui $e_{S \cap T} = e_{(S, T)} \in J$ e quindi J è un ideale.

La formula $e_S = e_H \partial e_S$ quando $H \in S$, applicata ad un S dipendente mostra che $J \subseteq I$. Inoltre le definizioni di J e I implicano che $\partial J \subseteq I$. Per cui $J + \partial J \subseteq I$. Per mostrare l'inclusione inversa si noti prima di tutto che $J + \partial J$ contiene i generatori di I : è sufficiente quindi mostrare che $J + \partial J$ è un ideale. Siccome J è un ideale, basta mostrare che $e_H \partial e_S \in J + \partial J$ quando $H \in \mathcal{A}$ e $S \in \mathbf{S}$ è dipendente. Siccome anche (H, S) è dipendente segue dalla formula che

$$e_H \partial e_S = e_S - \partial(e_H e_S) = e_S - \partial e_{(H, S)}$$

Questo completa la dimostrazione. \square

La Struttura di $A(\mathcal{A})$

In questo paragrafo mostriamo come l'algebra $A(\mathcal{A})$ può essere decomposta in una somma diretta indicizzata dagli elementi di $L(\mathcal{A})$.

Definizione 4.16. *Per $X \in L$ sia $\mathbf{S}_X = \{S \in \mathbf{S} \mid \cap S = X\}$ e sia*

$$E_X = \sum_{S \in \mathbf{S}_X} \mathcal{K} e_S$$

Si noti che $e_S \in E_{\cap S}$ per ogni $S \in \mathbf{S}$.

Lemma 4.17. *Siccome $\mathbf{S} = \cup_{X \in L} \mathbf{S}_X$ è un'unione disgiunta, $E = \oplus_{X \in L} E_X$ è una somma diretta.*

Definizione 4.18. *Sia $\pi_X : E \rightarrow E_X$ la proiezione. Definiamo cioè*

$$\pi_X e_S = \begin{cases} e_S & \text{se } \cap S = X \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il prossimo risultato segue dal Lemma 4.17.

Lemma 4.19. *Se F è un sottomodulo di E , si scriva $F_X = F \cap E_X$. Se $\pi_X(F) \subseteq F$ per tutti gli $X \in L$, allora $\pi_X(F) = F_X$ e $F = \bigoplus_{X \in L} F_X$.*

Lemma 4.20. $J = \bigoplus_{X \in L} J_X$.

Dimostrazione. Siccome J è generato dagli elementi e_S con $S \in \mathbf{S}$ dipendenti, segue dalla definizione di π_X che $\pi_X(J) \subseteq J$. Il risultato segue dal Lemma 4.19. \square

Definizione 4.21. *Sia $J' = J'(\mathcal{A})$ il sottomodulo di E generato da tutti gli e_S con $S \in \mathbf{S}$ indipendente. Per cui si ha $E = J \oplus J'$. Sia $\pi = \pi_{\mathcal{A}} : E \rightarrow J'$ la proiezione che annulla J . Sia $K = K(\mathcal{A}) = \pi(\partial J)$.*

Lemma 4.22. $I = J \oplus K$.

Dimostrazione. La mappa $1 - \pi : E \rightarrow J$ è la proiezione che annulla J' . Siccome $J \subseteq I$, abbiamo che $(1 - \pi)I = J$. Segue dal Lemma 4.15 che $\pi(I) = \pi(J + \partial J) = \pi(\partial J) = K$. Dal fatto che $(1 - \pi)I = J \subseteq I$ si ottiene $\pi I \subseteq I$ e quindi $I = (1 - \pi)I \oplus \pi I = J \oplus K$. \square

Lemma 4.23. $K = \bigoplus_{X \in L} K_X$.

Dimostrazione. Per il Lemma 4.19, è sufficiente mostrare che $\pi_X K \subseteq K$ per ogni $X \in L$. Dal Lemma 4.20 si ha $K = \pi(\partial J) = \sum_{Y \in L} \pi(\partial J_Y)$. Il modulo ∂J_Y è generato dagli elementi ∂e_S con S dipendente e $\cap S = Y$. Sia $S = (H_1, \dots, H_p)$ e sia $S_k = (H_1, \dots, \hat{H}_k, \dots, H_p)$. Allora $\partial e_S = \sum_{k=1}^p e_{S_k}$. Se S_k è dipendente, allora $\pi e_{S_k} = 0$. Se S_k è indipendente allora $\cap S_k = \cap S = Y$ perchè S è dipendente. Questo implica che $\pi(\partial e_S) \in E_Y$, cosicchè $\pi(\partial J_Y) \subseteq E_Y$. Per $Y \neq X$ si ha $\pi_X(E_Y) = 0$. Perciò $\pi_X(K) = \pi(\partial J_X) \subseteq \pi(\partial J) = K$. \square

Proposizione 4.24. $I = \bigoplus_{X \in L} I_X$.

Dimostrazione. Si richiami il fatto che $I = J \oplus K$. Abbiamo visto che $\pi_X(J) \subseteq J$ nel Lemma 4.20 e $\pi_X(K) \subseteq K$ nel Lemma 4.23. Perciò $\pi_X I \subseteq I$. La conclusione segue dal Lemma 4.19. \square

Definizione 4.25. *Se $X \in L$, sia $A_X = \varphi(E_X)$.*

Teorema 4.26. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento centrale e sia $A = A(\mathcal{A})$. Allora*

$$A = \bigoplus_{X \in L} A_X$$

Dimostrazione. Siccome $E = \bigoplus E_X$, $A = \sum A_X$. La Proposizione 4.24 mostra che la somma è diretta. \square

Corollario 4.27. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento centrale. Allora*

$$A_p = \bigoplus_{X \in L_p} A_X$$

Dimostrazione. Supponiamo che $a \in A_X$ dove $X \in L_p$. Scriviamo $a = \varphi(u)$ con $u \in E_X$. Si scriva $u = \sum_{S \in \mathbf{S}_X} c_S e_S$ con $c_S \in \mathcal{K}$. Se $S \in \mathbf{S}_X$ è dipendente, allora $e_S \in I$ e $\varphi(e_S) = 0$. Se S è indipendente, allora $r(\cap S) = r(X) = p$ implica $e_S \in E_p$ e $\varphi(e_S) \in A_p$. Perciò $a = \varphi(u) \in A_p$ e quindi

$$\sum_{X \in L_p} A_X \subseteq A_p$$

Viceversa, supponiamo $a \in A_p$ e scriviamo $a = \varphi(u)$ dove $u \in E_p$. Scriviamo $u = \sum_{S \in \mathbf{S}_p} c_S e_S$ con $c_S \in \mathcal{K}$. Se $S \in \mathbf{S}_p$ è dipendente, allora $\varphi(e_S) = 0$. Se $S \in \mathbf{S}_p$ è indipendente, sia $X = \cap S$. Allora $r(X) = p$ e $e_S \in E_X$ implica $\varphi(e_S) \in A_X$. Perciò

$$A_p \subseteq \sum_{X \in L_p} A_X$$

La somma risulta diretta per il Teorema 4.26. \square

La Mappa Iniettiva $A(\mathcal{A}_X) \rightarrow A(\mathcal{A})$

Se \mathcal{B} è un sottoarrangiamento di \mathcal{A} , allora vediamo $E(\mathcal{B})$ come una sottoalgebra di $E(\mathcal{A})$ e $L(\mathcal{B})$ come un sottolattice di $L(\mathcal{A})$. Si noti che $\mathbf{S}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{S}(\mathcal{A})$ e che un elemento $S \in \mathbf{S}(\mathcal{B})$ è dipendente in $\mathbf{S}(\mathcal{B})$ se e solo se è dipendente in $\mathbf{S}(\mathcal{A})$. La mappa $\partial_{E(\mathcal{B})}$ è la restrizione di $\partial_{E(\mathcal{A})}$ ad $E(\mathcal{B})$. Siccome $J(\mathcal{B}) \subseteq J(\mathcal{A})$ e $J'(\mathcal{B}) \subseteq J'(\mathcal{A})$, la proiezione $\pi_{\mathcal{B}}$ di $E(\mathcal{B})$ su $J'(\mathcal{B})$ è la restrizione ad $E(\mathcal{B})$ della proiezione $\pi_{\mathcal{A}}$ di $E(\mathcal{A})$ su $J'(\mathcal{A})$. Per semplicità utilizzeremo ∂ per denotare entrambe le $\partial_{E(\mathcal{A})}$ e $\partial_{E(\mathcal{B})}$ e π in luogo delle $\pi_{\mathcal{A}}$ e $\pi_{\mathcal{B}}$. Per cui $K(\mathcal{B}) = \pi(\partial J(\mathcal{B})) \subseteq \pi(\partial J(\mathcal{A})) = K(\mathcal{A})$. È conveniente porre uguali a zero quei moduli che non sono definiti. In questo modo, per esempio, $K_X(\mathcal{B}) \subseteq K_X(\mathcal{A})$ per tutti gli $X \in L(\mathcal{A})$, in quanto per convenzione $K_X(\mathcal{B}) = 0$ se $X \notin L(\mathcal{B})$.

Chiaramente, $I(\mathcal{B}) \subseteq I(\mathcal{A}) \cap E(\mathcal{B})$ per ogni sottoarrangiamento \mathcal{B} di \mathcal{A} . Con il prossimo lemma mostriamo che, per gli arrangiamenti del tipo $\mathcal{B} = \mathcal{A}_X$ con $X \in L(\mathcal{A})$, vale

$$I(\mathcal{B}) = I(\mathcal{A}) \cap E(\mathcal{B}) \quad (1)$$

In seguito, nella Proposizione 4.67, vedremo che quest'ultima uguaglianza vale in realtà per tutti i possibili sottoarrangiamenti di \mathcal{A} .

Lemma 4.28. *Se $X \in L(\mathcal{A})$, allora $I(\mathcal{A}_X) = I(\mathcal{A}) \cap E(\mathcal{A}_X)$.*

Dimostrazione. L'inclusione \subseteq è ovvia. Si supponga $Y \in L(\mathcal{A}_X)$. Se $S \in \mathbf{S}_Y(\mathcal{A})$ allora $S = (H_1, \dots, H_p)$ con $\cap S = Y$. Per cui $Y \subseteq H_k$ per $1 \leq k \leq p$. Siccome $Y \in L(\mathcal{A}_X)$ si ha $X \subseteq Y$ e quindi $X \subseteq H_k$ per $1 \leq k \leq p$. Cosicché $S \in \mathbf{S}_Y(\mathcal{A}_X)$. Questo implica $\mathbf{S}_Y(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{S}_Y(\mathcal{A}_X)$. Siccome però vale $\mathcal{A}_X \subseteq \mathcal{A}$, si ha $\mathbf{S}_Y(\mathcal{A}) = \mathbf{S}_Y(\mathcal{A}_X)$. Per cui $E_Y(\mathcal{A}) = E_Y(\mathcal{A}_X)$ e $J_Y(\mathcal{A}) = J_Y(\mathcal{A}_X)$. Seguendo lo stesso metodo dimostrativo del Lemma 4.23 si trova che $K_Y(\mathcal{A}) = \pi(\partial J_Y(\mathcal{A})) = \pi(\partial J_Y(\mathcal{A}_X)) = K_Y(\mathcal{A}_X)$. Siccome $K_Y(\mathcal{A}_X) \subseteq E(\mathcal{A}_X)$ si ha

$$I(\mathcal{A}) \cap E(\mathcal{A}_X) \subseteq J(\mathcal{A}_X) \oplus \left(\bigoplus_{Y \in L(\mathcal{A}_X)} K_Y(\mathcal{A}_X) \right)$$

Applicando i Lemmi 4.22 e 4.23 ad \mathcal{A}_X , vediamo che il lato destro è proprio $I(\mathcal{A}_X)$. \square

Definizione 4.29. *Sia \mathcal{B} un sottoarrangiamento di \mathcal{A} . Siccome $I(\mathcal{B}) \subseteq I(\mathcal{A}) \cap E(\mathcal{B})$, l'inclusione $E(\mathcal{B}) \subseteq E(\mathcal{A})$ induce un omomorfismo di \mathcal{K} -algebre $i : A(\mathcal{B}) \rightarrow A(\mathcal{A})$ tale che per $H \in \mathcal{A}$*

$$i(e_H + I(\mathcal{B})) = e_H + I(\mathcal{A})$$

Si noti che i è un monomorfismo esattamente quando vale (1).

Proposizione 4.30. *Se $\mathcal{B} = \mathcal{A}_X$, allora la mappa i è un monomorfismo.*

Dimostrazione. Segue dal Lemma 4.28 □

Proposizione 4.31. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento centrale. Se $Y \leq X$, allora $A_Y(\mathcal{A}_X) \simeq A_Y(\mathcal{A})$.*

Dimostrazione. Sia $i : A(\mathcal{A}_X) \rightarrow A(\mathcal{A})$ l'omomorfismo della Definizione 4.29. Per il Lemma 4.28 esso è un monomorfismo. Il modulo $A_Y(\mathcal{A}) = \varphi(E_Y(\mathcal{A}))$ è generato su \mathcal{K} da tutti gli elementi $e_S + I(\mathcal{A})$ con $S \in \mathbf{S}_Y(\mathcal{A})$. Allo stesso modo $A_Y(\mathcal{A}_X)$ è generato su \mathcal{K} da tutti gli elementi $e_S + I(\mathcal{A}_X)$ con $S \in \mathbf{S}_Y(\mathcal{A}_X)$. Siccome $S_Y(\mathcal{A}) = S_Y(\mathcal{A}_X)$, abbiamo che $i(A_Y(\mathcal{A}_X)) = A_Y(\mathcal{A})$. Ciò completa la dimostrazione per il fatto che i è un monomorfismo. □

La Base dei b-circuiti

In questo paragrafo mostriamo che la \mathcal{K} -algebra $A(\mathcal{A})$ è un \mathcal{K} -modulo libero tramite la costruzione di una \mathcal{K} -base standard per $A(\mathcal{A})$.

Prima di tutto introduciamo un ordine lineare arbitrario \prec in \mathcal{A} . Diciamo che una p -upla $S = (H_1, \dots, H_p)$ è **standard** se $H_1 \prec \dots \prec H_p$. Dalla definizione di algebra esterna segue che l'insieme di tutti gli e_S con S standard è una \mathcal{K} -base di $E = E(\mathcal{A})$.

Definizione 4.32. *Una p -upla $S = (H_1, \dots, H_p)$ si dice **circuito** se è minimalmente dipendente. Questo significa che (H_1, \dots, H_p) è dipendente, ma per un qualsiasi k fra 1 e p la $(p-1)$ -upla $(H_1, \dots, \widehat{H}_k, \dots, H_p)$ è indipendente.*

Definizione 4.33. *Data $S = (H_1, \dots, H_p)$, sia $\max S$ l'elemento massimale di S rispetto all'ordine lineare \prec di \mathcal{A} .*

Definizione 4.34. *Una p -upla standard $S \in \mathbf{S}$ si dice **b-circuito** se esiste $H \in \mathcal{A}$ tale che $\max S \prec H$ e (S, H) è un circuito.*

La 'b' davanti alla parola 'circuito' sta per 'broken'. È chiaro che ogni b-circuito è ottenuto scartando l'elemento massimale di un circuito standard.

Definizione 4.35. *Una p -upla standard S si dice χ -**indipendente** se non contiene alcun b-circuito. Si definisce*

$$\mathcal{C}_p = \{S \in \mathbf{S}_p \mid S \text{ è standard e } \chi\text{-indipendente}\}$$

Sia $\mathcal{C} = \cup_{p \geq 0} \mathcal{C}_p$.

Definizione 4.36. *Definiamo il **modulo dei b-circuiti** come segue. Sia $C_0 = \mathcal{K}$. Per $p \geq 1$ sia C_p il \mathcal{K} -modulo libero con base $\{e_S \in E \mid S \in \mathcal{C}_p\}$. Sia infine $C = C(\mathcal{A}) = \oplus_{p \geq 0} C_p$. In questo modo $C(\mathcal{A})$ è un \mathcal{K} -modulo graduato libero.*

Si noti che se S è χ -indipendente, allora S è indipendente. Per cui ogni $S \in \mathcal{C}$ è indipendente. $C(\mathcal{A})$ è per definizione un sottomodulo di $E(\mathcal{A})$. In generale $C(\mathcal{A})$ non è chiuso rispetto alla moltiplicazione di $E(\mathcal{A})$, cosicchè $C(\mathcal{A})$ non è una sottoalgebra. Si richiami la proiezione naturale $\varphi : E(\mathcal{A}) \rightarrow A(\mathcal{A})$ e sia $\psi : C(\mathcal{A}) \rightarrow A(\mathcal{A})$ la sua restrizione. Il nostro scopo è mostrare che ψ è un isomorfismo di moduli graduati.

Esempio 4.37. Si definisca \mathcal{A} mediante $Q(\mathcal{A}) = xyz(x+y)(x+y-z)$. Sia $H_0 = \ker(x+y-z)$, $H_1 = \ker(x)$, $H_2 = \ker(y)$, $H_3 = \ker(z)$, $H_4 = \ker(x+y)$. Si definisca l'ordine lineare su \mathcal{A} mediante $H_i \prec H_j \Leftrightarrow i < j$. In questo modo i circuiti standard sono (H_0, H_1, H_2, H_3) , (H_0, H_3, H_4) e (H_1, H_2, H_4) . Cosicchè i b-circuiti sono (H_0, H_1, H_2) , (H_0, H_3) , (H_1, H_2) . Scrivendo $e_i = e_{H_i}$ otteniamo la seguente base per $C(\mathcal{A})$:

$$\begin{aligned} & 1 \\ & e_0, e_1, e_2, e_3, e_4 \\ & e_0e_1, e_0e_2, e_0e_4, e_1e_3, e_1e_4, e_2e_3, e_2e_4, e_3e_4 \\ & e_0e_1e_4, e_0e_2e_4, e_1e_3e_4, e_2e_3e_4 \end{aligned}$$

Definizione 4.38. Si richiami il fatto che per $S = (H_1, \dots, H_p)$ si scrive $\cap S = H_1 \cap \dots \cap H_p$ e che $E_X = \sum_{\cap S=X} \mathcal{K}e_S$. Sia $C_X(\mathcal{A}) = C_X = C \cap E_X$. Allora ogni C_X è un \mathcal{K} -modulo libero.

Lemma 4.39. Per $p \geq 0$ si ha $C_p = \bigoplus_{X \in L_p} C_X$ e quindi $C = \bigoplus_{X \in L} C_X$.

Dimostrazione. Se $S \in \mathbf{S}$ è χ -indipendente con $|S| = p$, allora S è indipendente. Se $Y = \cap S$, allora $r(Y) = p$ ed $e_S \in \bigoplus_{X \in L_p} C_X$. Viceversa, se $e_S \in C_X$ e $r(X) = p$, allora $|S| = p$, cosicchè $e_S \in C_p$. \square

Lemma 4.40. Se $Y \leq X$, allora $C_Y(\mathcal{A}_X) = C_Y(\mathcal{A})$.

Dimostrazione. Sia $S \in \mathbf{S}(\mathcal{A}_X) \subseteq \mathbf{S}(\mathcal{A})$. È sufficiente provare che S è un b-circuito di \mathcal{A}_X se e solo se S è un b-circuito di \mathcal{A} . Per prima cosa si osservi che S è dipendente in \mathcal{A}_X se e solo se S è dipendente in \mathcal{A} . Cosicchè S è un circuito di \mathcal{A}_X se e solo se è un circuito di \mathcal{A} .

Supponiamo allora che S sia un b-circuito di \mathcal{A}_X . Allora S è ottenuto rimuovendo l'elemento massimale da un circuito standard di \mathcal{A}_X . Quest'ultimo è certamente un circuito standard anche di \mathcal{A} , per cui S è un b-circuito anche di \mathcal{A} .

Viceversa, supponiamo che S sia un b-circuito di \mathcal{A} . Allora esiste $H \in \mathcal{A}$ tale che $\max S \prec H$ per cui (S, H) è un circuito. Siccome S è indipendente mentre (S, H) è dipendente, si ha $\cap S = \cap S \cap H$. Perciò $X \geq \cap S \geq H$ e $(S, H) \in \mathbf{S}_X$. Segue che (S, H) è un circuito di \mathcal{A}_X ed S è un b-circuito di \mathcal{A}_X . \square

Lemma 4.41. Sia H_n l'elemento massimale di \mathcal{A} rispetto all'ordinamento \prec e si scriva $e_n = e_{H_n}$. Allora $e_n C \subseteq C$, cosicchè C è chiuso rispetto alla moltiplicazione per e_n .

Dimostrazione. Siccome un b-circuito è ottenuto da un circuito standard rimuovendo l'elemento massimale, nessun b-circuito ha la forma (S, H_n) . \square

Lemma 4.42. Si supponga che \mathcal{A} sia non vuoto. Sia ∂_C la restrizione della mappa $\partial : E \rightarrow E$ a C . Allora $\partial_C(C) \subseteq C$ e (C, ∂_C) è un complesso aciclico.

Dimostrazione. Scartando un elemento di una p -upla χ -indipendente si ottiene una $(p-1)$ -upla χ -indipendente. Questo mostra che $\partial_C(C) \subseteq C$. Si supponga $c \in C$ e $\partial_C c = 0$. Per il Lemma 4.41, $e_n c \in C$ e

$$c = c - e_n(\partial_C c) = \partial_C(e_n c) \in \partial_C C$$

Questo dimostra che il complesso è aciclico. \square

Teorema 4.43. *Per ogni $X \in L$, la restrizione $\psi_X : C_X(\mathcal{A}) \rightarrow A_X(\mathcal{A})$ è un isomorfismo. La mappa $\psi : C(\mathcal{A}) \rightarrow A(\mathcal{A})$ è un isomorfismo di \mathcal{K} -moduli graduati. L'insieme*

$$\{e_S + I \in A(\mathcal{A}) \mid S \text{ è standard e } \chi\text{-indipendente}\}$$

è una base per $A(\mathcal{A})$ come \mathcal{K} -modulo graduato.

Dimostrazione. Chiaramente, $\psi(C_X) \subseteq A_X$, cosicchè ψ induce una mappa $\psi_X : C_X \rightarrow A_X$. È sufficiente mostrare che questa mappa è un isomorfismo per ogni $X \in L(\mathcal{A})$. Utilizziamo l'induzione su $r = r(\mathcal{A})$.

L'asserto è valido per l'arrangiamento vuoto con $r = 0$ e $C(\mathcal{A}) = \mathcal{K} = A(\mathcal{A})$. Supponiamo ora $r > 0$. Sia $X \in L(\mathcal{A})$ con $r(X) < r$. Allora $r(\mathcal{A}_X) < r$, cosicchè $\psi_X : C_X(\mathcal{A}_X) \rightarrow A_X(\mathcal{A}_X)$ è un isomorfismo grazie all'ipotesi induttiva. Dalla Proposizione 4.31 si ha che $A_X(\mathcal{A}_X) \simeq A_X(\mathcal{A})$ e dal Lemma 4.40 $C_X(\mathcal{A}_X) \simeq C_X(\mathcal{A})$. Segue dalla commutatività del diagramma

$$\begin{array}{ccc} C_X(\mathcal{A}_X) & \xrightarrow{\psi_X(\mathcal{A}_X)} & A_X(\mathcal{A}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_X(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\psi_X(\mathcal{A})} & A_X(\mathcal{A}) \end{array}$$

che $\psi_X(\mathcal{A})$ è un isomorfismo per $X \in L$ con $r(X) < r$. Siccome \mathcal{A} è centrale, esiste un unico elemento massimale $T = T(\mathcal{A})$ di rango r . Rimane da provare l'isomorfismo per $X = T$. Nel diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & C_r & \rightarrow & C_{r-1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & C_0 & \rightarrow & 0 \\ & & \psi_r \downarrow & & \psi_{r-1} \downarrow & & & & \psi_0 \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & A_r & \rightarrow & A_{r-1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & A_0 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

le mappe orizzontali sono i rispettivi operatori ∂ dei due complessi aciclici, cosicchè le sequenze sono esatte. Siccome $A_p = \bigoplus_{X \in L_p} A_X$ e $C_p = \bigoplus_{X \in L_p} C_X$, la prima parte della dimostrazione implica che tutte le mappe verticali eccetto ψ_r sono isomorfismi. Dal diagramma segue però che anche ψ_r è un isomorfismo. Questo completa la dimostrazione perchè $C_r = C_T(\mathcal{A})$, $A_r = A_T(\mathcal{A})$ e $\psi_r = \psi_T(\mathcal{A})$. I restanti asserti seguono dal Teorema 4.25 e dal Lemma 4.39. \square

Corollario 4.44. *L'algebra $A(\mathcal{A})$ è un \mathcal{K} -modulo graduato libero. I \mathcal{K} -moduli $A_X(\mathcal{A})$ per $X \in L$ e $A_p(\mathcal{A})$ per $p \geq 0$ sono anch'essi liberi.*

Dimostrazione. I \mathcal{K} -moduli $C_X(\mathcal{A})$ sono liberi per definizione. Segue dal Teorema 4.43 che $C_X(\mathcal{A}) \simeq A_X(\mathcal{A})$. Perciò $A_X(\mathcal{A})$ è un \mathcal{K} -modulo libero. Abbiamo visto nel Corollario 4.27 che $A_p = \bigoplus_{X \in L_p} A_X$. Perciò A_p è anch'esso libero. \square

4.2 $A(\mathcal{A})$ per Arrangiamenti Affini

In questa sezione generalizzeremo la costruzione e i risultati della sezione precedente agli arrangiamenti affini. Il nostro principale strumento è il rapporto fra l' l -arrangiamento affine \mathcal{A} e l' $(l+1)$ -arrangiamento centrale $\mathbf{c}\mathcal{A}$. Richiamiamo quindi le notazioni e le proprietà basilari del processo di conificazione dalla Definizione 2.16 e dalla Proposizione 3.18. Sia $Q(\mathcal{A}) \in S = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_l]$ il polinomio definente di \mathcal{A} e sia $Q' \in \mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_l]$ il polinomio che si ottiene omogeneizzando $Q(\mathcal{A})$. Allora $\mathbf{c}\mathcal{A}$ è un $(l+1)$ -arrangiamento centrale con polinomio

definite $Q(\mathbf{c}\mathcal{A}) = x_0 Q'$. Il cono $\mathbf{c}\mathcal{A}$ consiste nell'iperpiano $K_0 = \ker(x_0)$ considerato insieme ai $\{\mathbf{c}H \mid H \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathbf{c}H$ è il cono sull'iperpiano affine H . Se $H \in \mathcal{A}$ è il nucleo del polinomio di grado 1 $\alpha_H \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_l]$, allora $\mathbf{c}H \in \mathbf{c}\mathcal{A}$ è il nucleo della forma lineare $\alpha_{\mathbf{c}H}$ ottenuta omogeneizzando α_H in $\mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_l]$. Per esempio, se $\alpha_H = x_1 + x_2 - 1$, allora $\alpha_{\mathbf{c}H} = x_1 + x_2 - x_0$.

Costruzione di $A(\mathcal{A})$

Sia \mathcal{K} un anello commutativo. Le prime definizioni sono le stesse del caso di arrangiamenti centrali. Si definisca un \mathcal{K} -modulo $E_1(\mathcal{A})$ che abbia come base l'insieme degli e_H in corrispondenza uno a uno con gli iperpiani di \mathcal{A} . Sia

$$E(\mathcal{A}) = \Lambda(E_1(\mathcal{A}))$$

l'algebra esterna di E_1 . Sia $\mathbf{S}_p(\mathcal{A})$ l'insieme di tutte le p -uple (H_1, \dots, H_p) di iperpiani di \mathcal{A} . Si definisca $\mathbf{S}(\mathcal{A}) = \cup_{p \geq 0} \mathbf{S}_p(\mathcal{A})$. Per $S = (H_1, \dots, H_p) \in \mathbf{S}(\mathcal{A})$ si definisca $e_S = e_{H_1} \cdots e_{H_p} \in E(\mathcal{A})$. Per $S \in \mathbf{S}(\mathcal{A})$ si definisca anche $\mathbf{c}S \in \mathbf{S}(\mathbf{c}\mathcal{A})$ come la p -upla di iperpiani in $\mathbf{c}\mathcal{A}$ data da $\mathbf{c}S = (\mathbf{c}H_1, \dots, \mathbf{c}H_p)$. Si scriva $e_0 = e_{K_0} \in E(\mathbf{c}\mathcal{A})$. Allora $E(\mathbf{c}\mathcal{A})$ ha una \mathcal{K} -base

$$\{e_0 e_{\mathbf{c}S} \mid S \in \mathbf{S}(\mathcal{A})\} \cup \{e_{\mathbf{c}S} \mid S \in \mathbf{S}(\mathcal{A})\}$$

Data $S = (H_1, \dots, H_p) \in \mathbf{S}(\mathcal{A})$, si richiami che $\cap S = H_1 \cap \cdots \cap H_p$. La differenza cruciale fra gli arrangiamenti centrali e quelli affini risiede nel fatto che in questi ultimi $\cap S$ può essere vuoto. Siccome K_0 viene mandato all'infinito durante il processo di deconificazione, $\cap S = \emptyset$ se e solo se $\cap(\mathbf{c}S) \subseteq K_0$.

Definizione 4.45. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento affine. Diciamo che S è **dipendente** se $\cap S \neq \emptyset$ e $r(\cap S) = \text{codim}(\cap S) < |S|$. Sia $I(\mathcal{A})$ l'ideale di $E(\mathcal{A})$ generato da*

$$\{e_S \mid \cap S = \emptyset\} \cup \{\partial e_S \mid S \text{ è dipendente}\}$$

Si definisce l'algebra $A(\mathcal{A}) = E(\mathcal{A})/I(\mathcal{A})$

Esempio 4.46. Si richiami il 2-arrangiamento affine \mathcal{A} definito da $Q(\mathcal{A}) = xy(x+y-1)$ dell'Esempio 2.6. Sia $H_1 = \ker(x)$, $H_2 = \ker(y)$ e $H_3 = \ker(x+y-1)$. Si noti che $H_1 \cap H_2 \cap H_3 = \emptyset$. Si scriva $e_i = e_{H_i}$ e $a_i = e_i + I(\mathcal{A}) \in A(\mathcal{A})$. Allora $e_1 e_2 e_3 \in I(\mathcal{A})$ e quindi $a_1 a_2 a_3 = 0$. L'ideale $I(\mathcal{A})$ è inoltre generato proprio dall'elemento $e_1 e_2 e_3$. Si ha quindi

$$A(\mathcal{A}) = \mathcal{K} \oplus (\mathcal{K}a_1 \oplus \mathcal{K}a_2 \oplus \mathcal{K}a_3) \oplus (\mathcal{K}a_1 a_2 \oplus \mathcal{K}a_2 a_3 \oplus \mathcal{K}a_3 a_1)$$

Lemma 4.47. *Sia $S \in \mathbf{S}(\mathcal{A})$.*

(1) *Si assuma $\cap S \neq \emptyset$. Allora S è dipendente se e solo se $\mathbf{c}S$ è dipendente.*

(2) *La $(p+1)$ -upla $(K_0, \mathbf{c}S)$ è dipendente se e solo se vale una delle due condizioni:*
$$\begin{cases} (i) \cap S = \emptyset; \\ (ii) S \text{ è dipendente.} \end{cases}$$

Dimostrazione. Se $\cap S \neq \emptyset$, allora $r(\cap S) = r(\cap(\mathbf{c}S))$. Questo prova (1). Se $\cap S = \emptyset$, allora $\cap(\mathbf{c}S) \subseteq K_0$. Per cui $(K_0, \mathbf{c}S)$ è dipendente. Se S è dipendente, allora anche $\mathbf{c}S$ è dipendente e quindi anche $(K_0, \mathbf{c}S)$ lo è. Per il viceversa si supponga che $(K_0, \mathbf{c}S)$ sia dipendente. Se assumiamo che $\cap S \neq \emptyset$ e che S è indipendente, si deriva una contraddizione: infatti, siccome S è indipendente, $\mathbf{c}S$ è indipendente per (1); inoltre, siccome $(K_0, \mathbf{c}S)$ è dipendente, $\cap(\mathbf{c}S) \subseteq K_0$ e quindi $\cap S = \emptyset$. \square

Definiamo ora delle mappe fra $E(\mathcal{A})$ ed $E(\mathbf{c}\mathcal{A})$ in entrambi i sensi.

Definizione 4.48. Sia $S \in \mathbf{S}(\mathcal{A})$. Si definisce un omomorfismo di \mathcal{K} -algebre

$$s : E(\mathbf{c}\mathcal{A}) \rightarrow E(\mathcal{A}) \text{ mediante } s(e_0 e_{\mathbf{c}S}) = 0, \quad s(e_{\mathbf{c}S}) = e_S$$

Si definisce un omomorfismo \mathcal{K} -lineare

$$t : E(\mathcal{A}) \rightarrow E(\mathbf{c}\mathcal{A}) \text{ mediante } t(e_S) = e_0 e_{\mathbf{c}S}$$

Lemma 4.49. Si ha $s(I(\mathbf{c}\mathcal{A})) \subseteq I(\mathcal{A})$. Segue che s induce un omomorfismo di \mathcal{K} -algebre $s : A(\mathbf{c}\mathcal{A}) \rightarrow A(\mathcal{A})$.

Dimostrazione. Sia $S = (H_1, \dots, H_p) \in \mathbf{S}(\mathcal{A})$. Segue dalla Definizione 4.6 che l'ideale $I(\mathbf{c}\mathcal{A})$ è generato da

$$\{\partial(e_0 e_{\mathbf{c}S}) \mid (K_0, \mathbf{c}S) \text{ è dipendente}\} \cup \{\partial(e_{\mathbf{c}S}) \mid \mathbf{c}S \text{ è dipendente}\}$$

Caso 1. Se $(K_0, \mathbf{c}S)$ è dipendente e $\cap S = \emptyset$, allora $s(\partial(e_0 e_{\mathbf{c}S})) = s(e_{\mathbf{c}S}) = e_S$.

Caso 2. Se $(K_0, \mathbf{c}S)$ è dipendente e $\cap S \neq \emptyset$, allora S è dipendente per il Lemma 4.47.2. Per cui si ha $s(\partial(e_0 e_{\mathbf{c}S})) = e_S = e_{H_1}(\partial e_S) \in I(\mathcal{A})$.

Caso 3. Se $\mathbf{c}S$ è dipendente e $\cap S \neq \emptyset$, allora S è dipendente per il Lemma 4.47.1. Per cui si ha $s(\partial e_{\mathbf{c}S}) = \partial e_S \in I(\mathcal{A})$.

Caso 4. Si assuma che $\mathbf{c}S$ sia dipendente e che $\cap S = \emptyset$. Sia $S_k = (H_1, \dots, \widehat{H}_k, \dots, H_p)$ per $k = 1, \dots, p$. Se $\cap S_k = \emptyset$, allora $e_{S_k} \in I(\mathcal{A})$. Se $\cap S_k \neq \emptyset$, allora $\cap(\mathbf{c}S_k) \not\subseteq K_0 \supseteq \cap(\mathbf{c}S)$. Perciò $\cap(\mathbf{c}S)$ è un sottospazio proprio di $\cap(\mathbf{c}S_k)$. Coticchè $\mathbf{c}S_k$ è dipendente. Per il Lemma 4.47.1 anche S_k è dipendente e quindi $e_{S_k} \in I(\mathcal{A})$. Allora si ha $s(\partial e_{\mathbf{c}S}) = \partial e_S = \sum_k (-1)^{k-1} e_{S_k} \in I(\mathcal{A})$. \square

Lemma 4.50. Si ha $t(I(\mathcal{A})) \subseteq I(\mathbf{c}\mathcal{A})$. Segue che t induce un omomorfismo \mathcal{K} -lineare $t : A(\mathcal{A}) \rightarrow A(\mathbf{c}\mathcal{A})$.

Dimostrazione. *Caso 1.* Se S soddisfa $\cap S = \emptyset$, allora $(K_0, \mathbf{c}S)$ è dipendente per il Lemma 4.47.2. Coticchè si ha $t(e_S) = e_0 e_{\mathbf{c}S} \in I(\mathbf{c}\mathcal{A})$.

Caso 2. Se S è dipendente, allora $\mathbf{c}S$ è dipendente per il Lemma 4.47.1. Si ha quindi $t(\partial e_S) = e_0 \partial(e_{\mathbf{c}S}) \in I(\mathbf{c}\mathcal{A})$. \square

Si noti che $st = 0$. Perciò si ha un complesso

$$0 \rightarrow A(\mathcal{A}) \xrightarrow{t} A(\mathbf{c}\mathcal{A}) \xrightarrow{s} A(\mathcal{A}) \rightarrow 0$$

Proveremo che questa è una sequenza esatta corta sfruttando la base dei b-circuiti.

La Base dei b-circuiti

Estendiamo ora la costruzione della base dei b-circuiti dal caso di arrangiamenti centrali a quello di arrangiamenti affini. Introduciamo un ordine lineare arbitrario \prec fra gli iperpiani dell'arrangiamento affine \mathcal{A} . Si dice che una p -upla $S = (H_1, \dots, H_p)$ è **standard** se $H_1 \prec \dots \prec H_p$. Si noti che $E = E(\mathcal{A})$ ha una \mathcal{K} -base che consiste di tutti gli e_S con S standard. Si richiami che S è dipendente se $\cap S \neq \emptyset$ e $r(\cap S) < |S|$. Generalizziamo ora le nozioni di circuito e b-circuito delle Definizioni 4.32 e 4.34. Una p -upla si dice **circuito** se è minimalmente dipendente. Una p -upla standard si dice **b-circuito** se esiste $H \in \mathcal{A}$ tale che $\max S \prec H$ e (S, H) è un circuito.

Definizione 4.51. Una p -upla standard S si dice χ -indipendente se $\cap S \neq \emptyset$ e non contiene b -circuiti.

Si definisca un ordine lineare \prec per l'arrangiamento centrale \mathbf{cA} in modo tale che:

- (1) $\mathbf{c}H_1 \prec \mathbf{c}H_2$ se $H_1 \prec H_2$ per $H_1, H_2 \in \mathcal{A}$;
- (2) K_0 è l'elemento massimale di \mathbf{cA} .

Lemma 4.52. Sia $S \in \mathbf{S}(\mathcal{A})$. Le seguenti tre condizioni sono equivalenti:

- (1) S è χ -indipendente;
- (2) $\mathbf{c}S$ è χ -indipendente;
- (3) $(\mathbf{c}S, K_0)$ è χ -indipendente.

Dimostrazione. Siccome K_0 è l'elemento masimale in \mathbf{cA} , (2) e (3) sono equivalenti. Dimostriamo prima di tutto che se (1) è falsa allora anche una fra (2) e (3) è falsa. Supponiamo che S non sia χ -indipendente. Allora o $\cap S = \emptyset$ o S contiene un b -circuito. Se $\cap S = \emptyset$, allora $(\mathbf{c}S, K_0)$ è dipendente per il Lemma 4.47.2. Questo contraddice (3). Se S contiene un b -circuito, allora esiste $H \in \mathcal{A}$ con $\max S \prec H$ tale che (S, H) è dipendente. In questo modo $(\cap S) \cap H \neq \emptyset$. Per il Lemma 4.47.1, $(\mathbf{c}S, \mathbf{c}H)$ è dipendente. Siccome $\max(\mathbf{c}S) \prec \mathbf{c}H$, $\mathbf{c}S$ non è χ -indipendente. Questo contraddice (2).

Mostriamo ora che (1) implica (2). Supponiamo che S sia χ -indipendente. Allora $\cap S \neq \emptyset$ ed S è indipendente. Segue dal Lemma 4.47.1 che $\mathbf{c}S$ è indipendente. Siccome $\cap S \neq \emptyset$, si ha $\cap(\mathbf{c}S) \not\subseteq K_0$. Se $\mathbf{c}S$ non fosse χ -indipendente, allora almeno una delle seguenti condizioni sarebbe verificata:

- (a) $(\mathbf{c}S, K_0)$ è dipendente;
- (b) $(\mathbf{c}S, \mathbf{c}H)$ è dipendente per qualche $H \in \mathcal{A}$ con $\max S \prec H$.

Siccome $\mathbf{c}S$ è indipendente, (a) implica che $\cap(\mathbf{c}S) = \cap(\mathbf{c}S) \cap K_0 \subseteq K_0$. Per cui $\cap S = \emptyset$, il che è una contraddizione. Nel caso (b) abbiamo invece $\cap(\mathbf{c}S) \cap \mathbf{c}H = \cap(\mathbf{c}S) \not\subseteq K_0$. Perciò $(\cap S) \cap H \neq \emptyset$. Segue dal Lemma 4.47.1 che (S, H) è dipendente e quindi S non è χ -indipendente. Questa è una contraddizione. \square

Definizione 4.53. Il modulo dei b -circuiti $C(\mathcal{A})$ è definito come segue. Sia $C(\mathcal{A})$ il \mathcal{K} -modulo libero con base $\{1\} \cup \{e_S \in E(\mathcal{A}) \mid S \text{ è } \chi\text{-indipendente}\}$. Allora $C(\mathcal{A})$ è un \mathcal{K} -modulo graduato libero.

Proposizione 4.54. La seguente sequenza è esatta:

$$0 \rightarrow C(\mathcal{A}) \xrightarrow{t} C(\mathbf{cA}) \xrightarrow{s} C(\mathcal{A}) \rightarrow 0$$

Dimostrazione. È chiaro che t è iniettiva. L'implicazione (1) \Rightarrow (3) del Lemma 4.52 mostra che $t(C(\mathcal{A})) \subseteq C(\mathbf{cA})$. L'implicazione (2) \Rightarrow (1) del Lemma 4.52 prova che $s(C(\mathbf{cA})) \subseteq C(\mathcal{A})$. L'implicazione (1) \Rightarrow (2) del Lemma 4.52 mostra la suriettività di s . L'implicazione (3) \Rightarrow (1) del Lemma 4.52 prova che $\ker(s) = t(C(\mathcal{A}))$. \square

Teorema 4.55. Sia $\varphi : E(\mathcal{A}) \rightarrow A(\mathcal{A})$ l'omomorfismo naturale e sia $\psi : C(\mathcal{A}) \rightarrow A(\mathcal{A})$ la sua restrizione. La mappa $\psi : C(\mathcal{A}) \rightarrow A(\mathcal{A})$ è un isomorfismo di \mathcal{K} -moduli graduati. L'insieme

$$\{e_S + I \in A(\mathcal{A}) \mid S \text{ è standard e } \chi\text{-indipendente}\}$$

è una base per $A(\mathcal{A})$ come \mathcal{K} -modulo graduato.

Dimostrazione. Abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C(\mathcal{A}) & \xrightarrow{t} & C(\mathbf{c}\mathcal{A}) & \xrightarrow{s} & C(\mathcal{A}) \rightarrow 0 \\ & & \psi \downarrow & & \psi \downarrow & & \psi \downarrow \\ 0 & \rightarrow & A(\mathcal{A}) & \xrightarrow{t} & A(\mathbf{c}\mathcal{A}) & \xrightarrow{s} & A(\mathcal{A}) \rightarrow 0 \end{array}$$

Si noti che $s : A(\mathbf{c}\mathcal{A}) \rightarrow A(\mathcal{A})$ è suriettiva. Segue dal Teorema 4.43 che $\psi : C(\mathbf{c}\mathcal{A}) \rightarrow A(\mathbf{c}\mathcal{A})$ è un isomorfismo. La riga superiore è esatta per la Proposizione 4.54. A questo punto la configurazione del diagramma mostra che $\psi : C(\mathcal{A}) \rightarrow A(\mathcal{A})$ è un isomorfismo. \square

Corollario 4.56. *L'algebra $A(\mathcal{A})$ è un \mathcal{K} -modulo graduato libero.*

Corollario 4.57. *La seguente sequenza è esatta:*

$$0 \rightarrow A(\mathcal{A}) \xrightarrow{t} A(\mathbf{c}\mathcal{A}) \xrightarrow{s} A(\mathcal{A}) \rightarrow 0$$

Definizione 4.58. *Dato un \mathcal{K} -modulo graduato libero $M = \bigoplus_{p=0}^l M_p$ definiamo il suo **polinomio di Poincaré** $\text{Poin}(M, t)$ nel modo seguente:*

$$\text{Poin}(M, t) = \sum_{p=0}^l (\text{rank } M_p) t^p$$

Nel diagramma commutativo del Teorema 4.55, t ed s sono mappe omogenee su ciascuna riga, rispettivamente di grado 1 e di grado 0. Questo ci fornisce un risultato analogo a quello della Proposizione 3.47.

Corollario 4.59. $\text{Poin}(A(\mathbf{c}\mathcal{A}), t) = (1 + t)\text{Poin}(A(\mathcal{A}), t)$.

Deletion e Restriction

Consideriamo ora le proprietà di A che si ricavano grazie al metodo di deletion-restriction. Supponiamo che \mathcal{A} sia un arrangiamento affine non vuoto. Sia H_0 l'iperpiano distinto. Scriviamo $L = L(\mathcal{A})$, $L' = L(\mathcal{A}')$, $L'' = L(\mathcal{A}'')$ per i poset corrispondenti, e $A = A(\mathcal{A})$, $A' = A(\mathcal{A}')$, $A'' = A(\mathcal{A}'')$. Utilizziamo una notazione analoga per E , E' , E'' , I , I' , I'' , etc.

È facile verificare che $I' \subseteq I$. Sia quindi $i : A' \rightarrow A$ l'omomorfismo di \mathcal{K} -algebre indotto dall'inclusione $E' \subseteq E$. Se $H \in \mathcal{A}$, scriviamo $a_H = e_H + I$. Se $H \in \mathcal{A}'$ è importante distinguere fra a_H come appena definito ed $e_H + I'$: non sappiamo infatti se i è un monomorfismo.

Se $S = (H_1, \dots, H_p) \in \mathbf{S}$, si scriva $a_S = a_{H_1} \dots a_{H_p}$. Se $S \in \mathbf{S}'$, allora $a_S \in iA'$.

Gli iperpiani di \mathcal{A}'' sono della forma $H_0 \cap H$ con $H \in \mathcal{A}'$. Denotiamo i rispettivi generatori di E'' ed A'' con $e_{H_0 \cap H}$ e $a_{H_0 \cap H}$. Se $S = (H_1, \dots, H_p) \in \mathbf{S}$ e σ è una permutazione di $1, \dots, p$, sia $\sigma S = (H_{\sigma 1}, \dots, H_{\sigma p})$. Per definire una mappa \mathcal{K} -lineare θ da E ad un qualche modulo su \mathcal{K} , è sufficiente fissare i valori $\theta(e_S)$ per $S \in \mathbf{S}$ e controllare che $\theta(e_{\sigma S}) = \text{sign}(\sigma)\theta(e_S)$. Per semplicità conveniamo che se $H_0 \in S$, allora H_0 è il primo elemento della p -upla S e scriviamo $S = (H_0, H_1, \dots, H_p)$ dove $H_1, \dots, H_p \in \mathcal{A}'$.

Lemma 4.60. *Esiste una mappa \mathcal{K} -lineare suriettiva $\theta : E \rightarrow E''$ tale che*

$$\begin{aligned} \theta(e_{H_1} \cdots e_{H_p}) &= 0 \\ \theta(e_{H_0} e_{H_1} \cdots e_{H_p}) &= e_{H_0 \cap H_1} \cdots e_{H_0 \cap H_p} \end{aligned}$$

per ogni $(H_1, \dots, H_p) \in \mathbf{S}'$. Questa mappa soddisfa $\theta(I) \subseteq I''$.

Dimostrazione. Siccome $E = E' \oplus e_{H_0}E'$, possiamo definire θ mediante le formule dell'enunciato di questo lemma. È chiaro che $\theta(1) = 0$ e che $\theta(e_{H_0}) = 1$. Si definisca $\lambda : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}''$ mediante $\lambda H = H_0 \cap H$ per $H \in \mathcal{A}'$. Si estenda questa mappa a $\lambda : \mathbf{S}' \rightarrow \mathbf{S}''$ in modo che $\lambda(H_1, \dots, H_p) = (\lambda H_1, \dots, \lambda H_p)$. Nel caso $S = ()$ conveniamo che $\lambda S = ()$. Secondo questa notazione, θ è definita da $\theta(e_S) = 0$ e $\theta(e_{H_0}e_S) = e_{\lambda S}$ per $S \in \mathbf{S}'$. Siccome θ è suriettiva, è sufficiente provare che $\theta(\partial e_T) \in I''$ per ogni $T \in S$ dipendente. Se $T \in S'$, allora $\theta(e_T) = 0$. Per cui assumiamo che $T = (H_0, S)$ sia dipendente. Si noti che $\cap(\lambda S) = H_0 \cap (\cap S) \neq \emptyset$. Per cui λS è dipendente e $\theta(\partial(e_{H_0}e_S)) = \theta(e_S - e_{H_0}\partial e_S) = -\partial(e_{\lambda S}) \in I''$. \square

Corollario 4.61. *Esiste una mappa \mathcal{K} -lineare suriettiva $j : A \rightarrow A''$ tale che il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\theta} & E'' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi'' \\ A & \xrightarrow{j} & A'' \end{array}$$

commuti. In particolare, per ogni $(H_1, \dots, H_p) \in \mathbf{S}'$

$$\begin{aligned} j(a_{H_1} \cdots a_{H_p}) &= 0 \\ j(a_{H_0} a_{H_1} \cdots a_{H_p}) &= a_{H_0 \cap H_1} \cdots a_{H_0 \cap H_p} \end{aligned}$$

Ora, per provare che la sequenza

$$0 \rightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} A'' \rightarrow 0$$

è esatta, utilizziamo i b-circuiti. Fissiamo un ordine lineare su \mathcal{A} , \mathcal{A}' e \mathcal{A}'' in modo che:

- (1) H_0 è l'elemento minimale in \mathcal{A} ;
- (2) l'ordine lineare su \mathcal{A}' è indotto dall'ordine lineare su \mathcal{A} ;
- (3) se $H, K \in \mathcal{A}'$, allora $\lambda H \prec \lambda K$ implica $H \prec K$.

Si scriva $C = C(\mathcal{A})$, $C' = C(\mathcal{A}')$ e $C'' = C(\mathcal{A}'')$.

Lemma 4.62. $C' \subseteq C$.

Dimostrazione. Sia $S' \in \mathbf{S}'$ χ -indipendente. Si noti che $\cap S' \neq \emptyset$. Si assuma che $e_{S'} \notin C$. Allora S' contiene un b-circuito di \mathcal{A} , cosicchè esiste $H \in \mathcal{A}$ tale che $(S', H) \in \mathbf{S}$ contiene un circuito e $\max S' \prec H$. Siccome H_0 è l'elemento minimale dell'ordine lineare, si ha $H \in \mathcal{A}'$. Questo implica che S' contiene un b-circuito di \mathcal{A}' , il che è una contraddizione. \square

Sia $i : C' \rightarrow C$ la mappa di inclusione. Si richiami la definizione di $\theta : E \rightarrow E''$ dal Lemma 4.60.

Lemma 4.63. $\theta(C) = C''$.

Dimostrazione. Dimostriamo innanzi tutto che $\theta(C) \subseteq C''$. Se così non fosse esisterebbe $S \in \mathbf{S}'$ tale che $(H_0, S) \in \mathbf{S}$ è χ -indipendente ma $\lambda S \in \mathbf{S}''$ non lo è. Siccome $\cap(\lambda S) = H_0 \cap (\cap S) \neq \emptyset$, λS contiene un b-circuito. Così esiste $K \in \mathcal{A}'$ tale che $\max \lambda S \prec \lambda K$ e $(\lambda S, \lambda K)$ è dipendente. Segue dalla nostra scelta degli ordini lineari su \mathcal{A} , \mathcal{A}' , \mathcal{A}'' che $\max S \prec K$ e (H_0, S, K) è dipendente. Perciò (H_0, S) contiene un b-circuito, il che è una contraddizione.

Ora mostriamo che $\theta(C) \supseteq C''$. Sia $S'' \in \mathbf{S}''$ χ -indipendente. Per ogni $H'' \in S''$, sia $\mu H'' = \max\{\lambda^{-1}(H'')\} \in \mathcal{A}$. Posizioniamo i $\mu H''$ per $H'' \in S''$ in una p -upla standard $S \in \mathbf{S}$. Chiaramente si ha $\lambda S = S''$. Si supponga che (H_0, S) non sia χ -indipendente. Siccome $H_0 \cap (\cap S) = \cap(\lambda S) = \cap S'' \neq \emptyset$, (H_0, S) contiene un b-circuito. Cosicché esiste $K \in \mathcal{A}'$ tale che $\max S \prec K$ e (H_0, S, K) è dipendente. Segue dalla definizione di S che $\max \lambda S \prec \lambda K$ e $(\lambda S, \lambda K)$ è dipendente. Perciò λS contiene un b-circuito, il che è una contraddizione. \square

Lemma 4.64. *Sia $S_1 \in \mathbf{S}'$ ed $S_2 \in \mathbf{S}'$. Se (H_0, S_1) e (H_0, S_2) sono χ -indipendenti con $\lambda S_1 = \lambda S_2$, allora $S_1 = S_2$.*

Dimostrazione. Si supponga che $S_1 \neq S_2$. Allora esistono $H_i \in S_i$ ($i = 1, 2$) tali che $H_1 \neq H_2$ e $\lambda H_1 = \lambda H_2$. Possiamo assumere che $H_1 \prec H_2$. Cosicché $(H_0, H_1, H_2) \in \mathbf{S}$ è dipendente, e (H_0, H_1) è un b-circuito. Questo contraddice la χ -indipendenza di (H_0, S_1) . \square

Proposizione 4.65. *Sia $j : C \rightarrow C''$ la restrizione di θ . La seguente sequenza è esatta:*

$$0 \rightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} C'' \rightarrow 0$$

Dimostrazione. Per via dei Lemmi 4.62 e 4.63, è sufficiente provare che $\ker(j) \subseteq \text{im}(i)$. Supponiamo che

$$j\left(\sum c_S e_{H_0} e_S\right) = \sum c_S e_{\lambda S} = 0$$

dove la somma è sugli $\{S \in \mathbf{S}' \mid (H_0, S) \text{ è } \chi\text{-indipendente}\}$ e $c_S \in \mathcal{K}$. Per il Lemma 4.64 si ha $c_S = 0$ per ogni S . \square

Teorema 4.66. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento affine. Sia $H_0 \in \mathcal{A}$ e sia $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ la terna corrispondente. Sia $i : A(\mathcal{A}') \rightarrow A(\mathcal{A})$ l'omomorfismo naturale e sia $j : A(\mathcal{A}) \rightarrow A(\mathcal{A}'')$ la mappa \mathcal{K} -lineare definita da*

$$\begin{aligned} j(a_{H_1} \cdots a_{H_p}) &= 0 \\ j(a_{H_0} a_{H_1} \cdots a_{H_p}) &= a_{H_0 \cap H_1} \cdots a_{H_0 \cap H_p} \end{aligned}$$

per $(H_1, \dots, H_p) \in \mathbf{S}(\mathcal{A}')$. Allora la seguente sequenza è esatta:

$$0 \rightarrow A(\mathcal{A}') \xrightarrow{i} A(\mathcal{A}) \xrightarrow{j} A(\mathcal{A}'') \rightarrow 0$$

Dimostrazione. L'asserto segue dalla commutatività del diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C' & \xrightarrow{i} & C & \xrightarrow{j} & C'' \rightarrow 0 \\ & & \psi' \downarrow & & \psi \downarrow & & \psi'' \downarrow \\ 0 & \rightarrow & A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{j} & A'' \rightarrow 0 \end{array}$$

dal Teorema 4.55 e dalla Proposizione 4.65. \square

Proposizione 4.67. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento e sia \mathcal{B} un suo sottoarrangiamento. L'omomorfismo naturale $i : A(\mathcal{B}) \rightarrow A(\mathcal{A})$ è un monomorfismo.*

Dimostrazione. L'asserto è verificato se $|\mathcal{A}| - |\mathcal{B}| = 1$ per il Teorema 4.66. La conclusione segue per induzione su $|\mathcal{A}| - |\mathcal{B}|$. \square

Nel Teorema 4.66 la mappa i ha grado 0, mentre la mappa j ha grado -1 . Perciò otteniamo i seguenti risultati.

Corollario 4.68. *Sia $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ una terna e siano A, A', A'' le algebre corrispondenti. Allora:*

- (1) $\text{Poin}(A, t) = \text{Poin}(A', t) + t\text{Poin}(A'', t)$;
 (2) $\text{rank}A = \text{rank}A' + \text{rank}A''$.

Teorema 4.69. $\text{Poin}(A(\mathcal{A}), t) = \pi(\mathcal{A}, t)$.

Dimostrazione. Procediamo per induzione sulla cardinalità di \mathcal{A} . Quando \mathcal{A} è vuoto, si ha $A(\mathcal{A}) = \mathcal{K}$. Coticchè $\text{Poin}(A(\mathcal{A}), t) = 1 = \pi(\mathcal{A}, t)$. Abbiamo già provato la formula $\pi(\mathcal{A}, t) = \pi(\mathcal{A}', t) + t\pi(\mathcal{A}'', t)$ nel Teorema 3.52. Questa formula di ricorsione abbinata a quella del Corollario 4.68.1 completa la dimostrazione. \square

La Struttura di $A(\mathcal{A})$

Analogamente al caso di arrangiamenti centrali, definiamo per $X \in L$

$$\mathbf{S}_X = \mathbf{S}_X(\mathcal{A}) = \{S \in \mathbf{S}(\mathcal{A}) \mid \cap S = X\}, \quad E_X = E_X(\mathcal{A}) = \sum_{S \in \mathbf{S}_X} \mathcal{K}e_S$$

$$A_X = A_X(\mathcal{A}) = \varphi(E_X), \quad C_X = C_X(\mathcal{A}) = C(\mathcal{A}) \cap E_X(\mathcal{A})$$

Possiamo generalizzare i Lemmi 4.39 e 4.40 senza cambiare le loro dimostrazioni.

Lemma 4.70. *Per $p \geq 0$, si ha $C_p = \oplus_{X \in L_p} C_X$ e quindi $C = \oplus_{X \in L} C_X$.*

Lemma 4.71. *Se $Y \leq X$, allora $C_Y(\mathcal{A}_X) = C_Y(\mathcal{A})$.*

Sia $X \in L$. Siccome la mappa naturale $i : A(\mathcal{A}_X) \rightarrow A(\mathcal{A})$ è iniettiva per la Proposizione 4.67, otteniamo la versione affine della Proposizione 4.31.

Proposizione 4.72. *Se $Y \leq X$, allora $A_Y(\mathcal{A}_X) \simeq A_Y(\mathcal{A})$.*

Teorema 4.73. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento affine e sia $A = A(\mathcal{A})$. Allora*

$$A = \oplus_{X \in L} A_X$$

Dimostrazione. Sia $X \in L$. Si noti che \mathcal{A}_X è un arrangiamento centrale. Per il Lemma 4.71, il Teorema 4.43 e la Proposizione 4.72, si ha

$$C_X(\mathcal{A}) = C_X(\mathcal{A}_X) \simeq A_X(\mathcal{A}_X) \simeq A_X(\mathcal{A})$$

Siccome $C(\mathcal{A}) = \oplus_{X \in L} C_X(\mathcal{A})$ per il Lemma 4.70 e $C(\mathcal{A}) \simeq A(\mathcal{A})$ per il Teorema 4.55, si ha il risultato cercato. \square

Corollario 4.74. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento affine. Allora $A_p = \oplus_{X \in L_p} A_X$*

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del Corollario 4.27. \square

Riassumiamo questi risultati nel prossimo corollario.

Corollario 4.75. *L'algebra $A(\mathcal{A})$ è un \mathcal{K} -modulo graduato libero. I \mathcal{K} -moduli $A_X(\mathcal{A})$ per $X \in L$ e $A_p(\mathcal{A})$ per $p \geq 0$ sono anch'essi liberi.*

Dimostrazione. I \mathcal{K} -moduli $C_X(\mathcal{A})$ sono liberi per definizione. Segue dal Lemma 4.71 che $C_X(\mathcal{A}) \simeq A_X(\mathcal{A})$. Perciò $A_X(\mathcal{A})$ è un \mathcal{K} -modulo libero. Abbiamo mostrato nel Corollario 4.74 che $A_p = \bigoplus_{X \in L_p} A_X$. Per cui A_p è anch'esso libero. \square

Proposizione 4.76. *Se $X \in L(\mathcal{A})$, allora il rango del \mathcal{K} -modulo libero $A_X(\mathcal{A})$ è uguale a $(-1)^{r(X)}\mu(X)$.*

Dimostrazione. Il coefficiente direttore di $\pi(\mathcal{A}_X, t)$ è uguale a $(-1)^{r(X)}\mu(X)$. Siccome $\text{Poin}(A(\mathcal{A}_X), t) = \pi(\mathcal{A}_X, t)$, esso è anche uguale a $\text{rank}A_X(\mathcal{A}_X) = \text{rank}A_X(\mathcal{A})$. \square

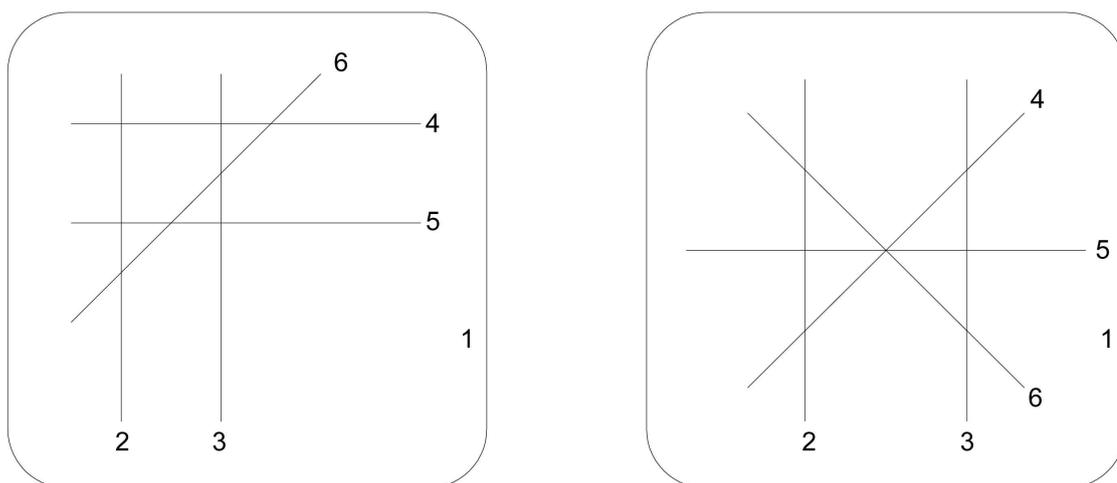


Figura 9: Arrangiamenti, \mathcal{A} a sinistra e \mathcal{B} a destra, A -equivalenti ma non L -equivalenti

A -equivalenza

Definizione 4.77. *Gli arrangiamenti \mathcal{A} e \mathcal{B} si dicono \mathcal{K} -algebra-equivalenti, o più semplicemente A -equivalenti, se esiste un isomorfismo di \mathcal{K} -algebre graduate $\phi : A(\mathcal{A}) \rightarrow A(\mathcal{B})$.*

Chiaramente, arrangiamenti L -equivalenti sono A -equivalenti e arrangiamenti A -equivalenti sono π -equivalenti. L'Esempio 3.57 ci aveva mostrato che arrangiamenti π -equivalenti non sono necessariamente L -equivalenti. In effetti queste tre nozioni non coincidono. Nel suo lavoro 'On the algebra associated with a geometric lattice. *Advances in Math.* (1990)' Falk ha trovato un invariante dell'algebra A che è diverso per i due arrangiamenti dell'Esempio 3.57. Per cui arrangiamenti π -equivalenti non sono necessariamente A -equivalenti. Nel prossimo esempio vengono mostrati due arrangiamenti A -equivalenti ma non L -equivalenti.

Riassumendo:

$$L\text{-equivalenza} \Rightarrow A\text{-equivalenza} \Rightarrow \pi\text{-equivalenza}$$

$$L\text{-equivalenza} \not\Leftarrow A\text{-equivalenza} \not\Leftarrow \pi\text{-equivalenza}$$

Esempio 4.78. I 3-arrangiamenti \mathcal{A} e \mathcal{B} in Figura 9 sono A -equivalenti ma non L -equivalenti. Per vedere che $L(\mathcal{A})$ e $L(\mathcal{B})$ non sono isomorfi, si noti che i due punti tripli di \mathcal{A} giacciono sulla stessa retta (quella all'infinito), mentre i due punti tripli di \mathcal{B} giacciono su rette diverse. Per mostrare che $A(\mathcal{A}) \simeq A(\mathcal{B})$, si denotino gli iperpiani come in Figura 9. Siano e_i , per $1 \leq i \leq 6$, i generatori di $E(\mathcal{A})$ e siano f_i , per $1 \leq i \leq 6$, i generatori di $E(\mathcal{B})$. Si definisca $\phi : E(\mathcal{A}) \rightarrow E(\mathcal{B})$ mediante $\phi(e_i) = f_i$ per $i = 1, 2, 3, 6$ e $\phi(e_4) = f_5 - f_4 + f_1$, $\phi(e_5) = f_6 - f_5 + f_1$. Si noti che $I_2(\mathcal{A})$ è generato da $e_{1,2} - e_{1,3} + e_{2,3}$ e $e_{1,4} - e_{1,5} + e_{4,5}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \phi(e_{1,2} - e_{1,3} + e_{2,3}) &= f_{1,2} - f_{1,3} + f_{2,3} \\ &\in I_2(\mathcal{B}) \\ \phi(e_{1,4} - e_{1,5} + e_{4,5}) &= \phi((e_1 - e_4)(e_1 - e_5)) \\ &= \phi(e_1 - e_4)\phi(e_1 - e_5) \\ &= (f_4 - f_5)(f_5 - f_6) \\ &= f_{4,5} - f_{4,6} + f_{5,6} \\ &\in I_2(\mathcal{B}) \end{aligned}$$

Siccome queste immagini generano $I_2(\mathcal{B})$, segue che ϕ induce un isomorfismo $A(\mathcal{A}) \simeq A(\mathcal{B})$.

4.3 Fattorizzazioni delle Algebre

Sia \mathcal{A} un arrangiamento affine. Sia $\mathbf{c}\mathcal{A}$ il cono su \mathcal{A} . Si richiami il fatto che K_0 è l'iperpiano aggiuntivo e si scriva $e_0 = e_{K_0}$. Sia $\phi : E(\mathbf{c}\mathcal{A}) \rightarrow A(\mathbf{c}\mathcal{A})$ l'omomorfismo naturale e sia $a_0 = \phi(e_0)$. Segue dal Corollario 4.56 che $A(\mathcal{A})$ e $A(\mathbf{c}\mathcal{A})$ sono \mathcal{K} -moduli liberi. Per cui la sequenza esatta corta

$$0 \rightarrow A(\mathcal{A}) \xrightarrow{t} A(\mathbf{c}\mathcal{A}) \xrightarrow{s} A(\mathcal{A}) \rightarrow 0$$

del Corollario 4.57 si scinde. Questo porta al seguente risultato.

Teorema 4.79. *Sia $\mathbf{c}\mathcal{A}$ il cono sull'arrangiamento affine \mathcal{A} . Sia $a_0 \in A(\mathbf{c}\mathcal{A})$ l'elemento corrispondente all'iperpiano aggiuntivo. Esiste allora un isomorfismo di \mathcal{K} -moduli graduati*

$$(\mathcal{K} + \mathcal{K}a_0) \otimes A(\mathcal{A}) \simeq A(\mathbf{c}\mathcal{A})$$

Segue dal Teorema 4.69 che la Proposizione 3.47 è una conseguenza del Teorema 4.79. L'interpretazione topologica di questa fattorizzazione segue dalla Proposizione 5.15 e dal Teorema 5.14 che vedremo in seguito.

In questa sezione dimostreremo che si ottengono fattorizzazioni analoghe in altri due casi: il caso di arrangiamenti super-risolubili e il caso di arrangiamenti dotati di una partizione buona.

Arrangiamenti Super-Risolubili

Si richiami il fatto che un arrangiamento super-risolubile è centrale. Perciò assumiamo che \mathcal{A} sia un arrangiamento centrale.

Lemma 4.80. *Si supponga l'esistenza di un elemento modulare $Y \in L(\mathcal{A})$ con $r(Y) = r(\mathcal{A}) - 1$. Per ogni $H \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_Y$ esiste un isomorfismo di \mathcal{K} -algebre $\rho : A(\mathcal{A}_Y) \rightarrow A(\mathcal{A}^H)$ definito mediante $\rho(a_K) = a_{H \cap K}$ per ogni $K \in \mathcal{A}_Y$.*

Dimostrazione. Siccome $H \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_Y$, si ha $L_Y = L(\mathcal{A}_Y) = [H \wedge Y, Y]$ e $L^H = L(\mathcal{A}^H) = [H, H \vee Y]$. Segue dal Lemma 3.23 che la mappa $\tau : L_Y \rightarrow L^H$ data da $\tau(Z) = Z \vee H = Z \cap H$ è un isomorfismo di reticoli. Se $S = (H_1, \dots, H_p) \in \mathbf{S}(\mathcal{A}_Y)$, si definisca $\tau S = (\tau H_1, \dots, \tau H_p) \in \mathbf{S}(\mathcal{A}^H)$. L'isomorfismo di \mathcal{K} -algebre da $E(\mathcal{A}_Y)$ ad $E(\mathcal{A}^H)$ che manda e_S in $e_{\tau S}$ porta $I(\mathcal{A}_Y)$ in $I(\mathcal{A}^H)$ inducendo così un omomorfismo di \mathcal{K} -algebre $\rho : A(\mathcal{A}_Y) \rightarrow A(\mathcal{A}^H)$ tale che $\rho a_S = a_{\tau S}$. L'inverso di ρ si costruisce usando σ , l'inverso di τ del Lemma 3.23. \square

Lemma 4.81. *Si supponga l'esistenza di un elemento modulare $Y \in L(\mathcal{A})$ con $r(Y) = r(\mathcal{A}) - 1$. Sia $\mathcal{B} = \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_Y$. Allora*

$$A(\mathcal{A}) = A(\mathcal{A}_Y) \oplus \left(\bigoplus_{H \in \mathcal{B}} A(\mathcal{A}_Y) a_H \right)$$

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione 4.67 che possiamo identificare $A(\mathcal{A}_Y)$ con la \mathcal{K} -sottoalgebra di $A(\mathcal{A})$ generata dagli elementi $a_K = e_K + I(\mathcal{A})$ per $K \in \mathcal{A}_Y$. Sia $U = \sum_{H \in \mathcal{B}} A(\mathcal{A}_Y) a_H$. Si noti dapprima che se $H, K \in \mathcal{B}$, allora $a_H a_K \in U$. Infatti, questo è chiaro se $H = K$, in quanto $a_H^2 = 0$. Supponiamo invece che $H \neq K$. Si richiami ancora che la mappa $\tau : L_Y \rightarrow L^H$ data da $\tau Z = Z \cap H$ è un isomorfismo. Segue che esiste $M \in L_Y$ tale che $M \cap H = K \cap H$. Siccome $K \neq H$, si ha $r(K \cap H) = 2$, cosicché $r(M \cap H) = 2$, e quindi $M \in \mathcal{A}_Y$. Siccome $r(M \cap H \cap K) = 2$, la terna (M, H, K) è dipendente, perciò $a_H a_K - a_M a_K + a_M a_H = 0$. Questo mostra che $a_H a_K \in A(\mathcal{A}_Y) a_H + A(\mathcal{A}_Y) a_K \subseteq U$.

Siccome $A(\mathcal{A}_Y)$ è una \mathcal{K} -sottoalgebra di $A(\mathcal{A})$ contenente l'identità, segue che U è chiuso per moltiplicazione e $A(\mathcal{A}_Y)U \subseteq U$. Perciò $A(\mathcal{A}_Y) + U$ è una \mathcal{K} -sottoalgebra di $A(\mathcal{A})$. Ma $\mathcal{A} = \mathcal{A}_Y \cup \mathcal{B}$, cosicché $A(\mathcal{A}_Y) + U$ contiene tutti i generatori a_H di $A(\mathcal{A})$ per $H \in \mathcal{A}$. Segue che

$$A(\mathcal{A}) = A(\mathcal{A}_Y) + U = A(\mathcal{A}_Y) + \left(\sum_{H \in \mathcal{B}} A(\mathcal{A}_Y) a_H \right)$$

Mostriamo ora che questa è in realtà una somma diretta. Abbiamo bisogno che $A(\mathcal{A}_Y) \cap U = 0$. Si richiami il fatto che $A = \bigoplus_{X \in L} A_X$ dove $A_X = \phi(E_X) = \sum_{\cap S = X} \mathcal{K} a_S$. Sia $\pi_X : A \rightarrow A_X$ la proiezione naturale. Allora

$$\pi_X a_S = \begin{cases} a_S & \text{se } \cap S = X \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Mostriamo che $\pi_X(A(\mathcal{A}_Y) \cap U) = 0$ per ogni $X \in L$ verificando che (i) $\pi_X(A(\mathcal{A}_Y)) = 0$ se $X \not\leq Y$, e (ii) $\pi_X(U) = 0$ se $X \leq Y$. L'asserzione (i) è immediata da $A(\mathcal{A}_Y) = \sum_{\cap S \leq Y} \mathcal{K} a_S$. Per provare la (ii) osserviamo che se $H \in \mathcal{B}$ e $X \leq Y$, allora $\pi_X(a_S a_H) = \pi_X(a_{(S,H)}) = 0$ per il fatto che $(\cap S) \cap H \not\leq Y$. Perciò $A(\mathcal{A}_Y) \cap U = 0$.

Rimane da provare che la somma $\sum_{H \in \mathcal{B}} A(\mathcal{A}_Y) a_H$ è anch'essa diretta. Si fissi $H_0 \in \mathcal{B}$ e sia $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ la terna induttiva con iperpiano distinto H_0 . Siano $\lambda : \mathbf{S}' \rightarrow \mathbf{S}''$ e $j : A \rightarrow A''$ le mappe definite nel Lemma 4.60 e nel Corollario 4.61. Siccome $H_0 \in \mathcal{B}$, si ha $\mathbf{S}(\mathcal{A}_Y) \subseteq \mathbf{S}'$. Segue dal Corollario 4.61 che, per $S \in \mathbf{S}(\mathcal{A}_Y)$ e $H \in \mathcal{B}$, si ha $j(a_H a_S) = a_{\lambda S}$ se $H = H_0$, e $j(a_H a_S) = 0$ altrimenti. Per il Lemma 4.80 con H rimpiazzato da H_0 , esiste un isomorfismo di \mathcal{K} -algebre $\rho : A(\mathcal{A}_Y) \rightarrow A''$ con $\rho(a_S) = a_{\lambda S}$. Perciò $j(a_H a_S) = \rho(a_S)$ se $H = H_0$, e $j(a_H a_S) = 0$ altrimenti. Segue che per $u \in A(\mathcal{A}_Y)$ si ha

$$j(a_H u) = \begin{cases} \rho(u) & \text{se } H = H_0 \\ 0 & \text{se } H \in \mathcal{B} \setminus \{H_0\} \end{cases}$$

Si supponga $\sum_{H \in \mathcal{B}} a_H u_H = 0$ dove $u_H \in A(\mathcal{A}_Y)$. Allora

$$0 = j\left(\sum_{H \in \mathcal{B}} a_H u_H\right) = \rho(u_{H_0})$$

e quindi $u_{H_0} = 0$. Siccome H_0 era un iperpiano arbitrario di \mathcal{B} , segue che $u_H = 0$ per ogni $H \in \mathcal{B}$. \square

Teorema 4.82. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento super-risolubile con $r = r(\mathcal{A})$ e con catena massimale di elementi modulari*

$$V = Y_0 < Y_1 < \dots < Y_r = T$$

Sia $A = A(\mathcal{A})$. Per $1 \leq i \leq r$ sia $\mathcal{B}_i = \mathcal{A}_{Y_i} \setminus \mathcal{A}_{Y_{i-1}}$ e sia $B_i = \sum_{H \in \mathcal{B}_i} \mathcal{K} a_H$. La mappa \mathcal{K} -lineare

$$(\mathcal{K} + B_1) \otimes \dots \otimes (\mathcal{K} + B_r) \rightarrow A$$

definita tramite moltiplicazione in A è un isomorfismo di \mathcal{K} -moduli graduati. In particolare, con $b_i = |\mathcal{B}_i|$

$$\text{Poin}(A, t) = (1 + b_1 t) \dots (1 + b_r t)$$

Dimostrazione. Sia $Y = Y_{r-1}$. Allora Y è un elemento modulare di $L(\mathcal{A})$ con $r(Y) = r - 1$. Sia $\mathcal{B} = \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_Y$ e sia $B = \sum_{H \in \mathcal{B}} \mathcal{K} a_H$. Il Lemma 4.81 mostra che la mappa \mathcal{K} -lineare $A(\mathcal{A}_Y) \otimes (\mathcal{K} + B) \rightarrow A$ definita tramite moltiplicazione in A è un isomorfismo di moduli. Il risultato segue per induzione su r . \square

Partizioni Buone di Arrangiamenti Centrali

Si assuma che \mathcal{A} sia un arrangiamento centrale. Sia $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_s)$ una partizione di \mathcal{A} . Denotiamo con (π_i) il \mathcal{K} -modulo libero con base formata da 1 e dagli elementi di π_i . Essa è graduata in modo che $\deg 1 = 0$ e $\deg H = 1$. Si definisca il \mathcal{K} -modulo graduato $(\pi) = (\pi_1) \otimes (\pi_2) \otimes \dots \otimes (\pi_s)$. Conveniamo che $(\pi) = \mathcal{K}$ quando $\mathcal{A} = \Phi_l$. Siccome $\text{Poin}((\pi_i), t) = (1 + |\pi_i|t)$, otteniamo che

$$\text{Poin}((\pi), t) = \prod_{i=1}^s (1 + |\pi_i|t)$$

Definizione 4.83. *Sia $S = (H_1, \dots, H_k) \in \mathbf{S}_k$. Chiamiamo S una k -sezione di π se per $1 \leq i \leq k$*

$$H_i \in \pi_{n(i)}, \quad 1 \leq n(1) < n(2) < \dots < n(k) \leq s$$

Conveniamo che la 0-sezione è $S = ()$. Sia $\mathcal{S}_k \subset \mathbf{S}_k$ l'insieme delle k -sezioni di π , e sia $\mathcal{S} = \cup_{k=0}^s \mathcal{S}_k$. Data $S \in \mathcal{S}_k$, sia $p_S = x_1 \otimes \dots \otimes x_s \in (\pi)$ dove

$$x_j = \begin{cases} H_i & j=n(i) \\ 1 & j \notin \{n(1), \dots, n(k)\} \end{cases}$$

Si noti che $p_{()} = 1$ e che p_S è omogeneo di grado k . Il \mathcal{K} -modulo graduato (π) è libero con base $\{p_S \mid S \in \mathcal{S}\}$. Si richiami la notazione $e_S \in E(\mathcal{A})$ e $a_S \in A(\mathcal{A})$. Ogni elemento dell'algebra $A(\mathcal{A})$ può essere espresso come combinazione lineare di elementi $\{a_S \mid S \in \mathbf{S}\}$, ma questa combinazione non è necessariamente unica.

Definizione 4.84. Si definisce $\kappa : (\pi) \rightarrow A(\mathcal{A})$ come segue. Per $S \in \mathfrak{S}$ si ponga $\kappa(p_S) = a_S$ e sia κ l'unica mappa \mathcal{K} -lineare omogenea di grado 0 che estende questa assegnazione.

Mostriamo che la mappa κ è un isomorfismo di κ -moduli graduati se e solo se la partizione π è buona. Si denoti la parte omogenea di grado k di (π) con $(\pi)_k$. Allora

$$(\pi) = \bigoplus_{k=0}^s (\pi)_k$$

Qui $(\pi)_0 = \mathcal{K}$. Data $S = (H_1, \dots, H_k) \in \mathfrak{S}_k$, si ricordi che $\cap S = H_1 \cap \dots \cap H_k \in L$. Per $X \in L$, si definisca un sottomodulo libero $(\pi)_X$ di (π) con base $\{p_S \mid S \in \mathfrak{S}, \cap S = X\}$. Segue che $(\pi)_\mathcal{K} = \mathcal{K}$.

Lemma 4.85. Sia π una partizione indipendente. Allora, per ogni $k \geq 0$, si ha

$$(\pi)_k = \bigoplus_{X \in L_k} (\pi)_X$$

Dimostrazione. Si noti che $\{p_S \mid S \in \mathfrak{S}_k\}$ è una base per $(\pi)_k$. Se $\cap S = X$, allora $p_S \in (\pi)_X$. Si ha $X \in L_k$ perchè π è indipendente. \square

Lemma 4.86. Per $X, Y \in L$ con $Y \leq X$ la mappa naturale $(\pi_X)_Y \rightarrow (\pi)_Y$ è un isomorfismo.

Dimostrazione. Se $S \in \mathfrak{S}$ con $\cap S = Y$, allora $S \subseteq \mathcal{A}_Y \subseteq \mathcal{A}_X$. Per cui S è una sezione anche di π_X (si ricordi la Definizione 3.61):

$$\{S \mid S \in \mathfrak{S}, \cap S = Y\} = \{S \mid S \text{ è una sezione di } \pi_X, \cap S = Y\}$$

L'isomorfismo $(\pi_X)_Y \ni p_S \mapsto p_S \in (\pi)_Y$ è ottenuto inserendo '1 \otimes ' il numero di volte necessario. \square

Sia $S = (H_1, \dots, H_k) \in \mathfrak{S}_k$. Si ricordi che $S_j = (H_1, \dots, \widehat{H}_j, \dots, H_k)$. Si definisca una mappa \mathcal{K} -lineare $\partial : (\pi)_k \rightarrow (\pi)_{k-1}$ mediante $\partial(p_{(\cdot)}) = 0$, $\partial(p_H) = 1$ e per $k \geq 2$ e $S \in \mathfrak{S}_k$

$$\partial(p_S) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} p_{S_j}$$

Allora $\partial\partial = 0$ e $((\pi)_*, \partial)$ è un complesso a catena.

Lemma 4.87. Se la partizione π contiene un blocco che è un singleton, allora il complesso $((\pi)_*, \partial)$ è aciclico.

Dimostrazione. Assumiamo per semplicità che il singleton sia $\pi_1 = \{H_1\}$. Supponiamo che $x \in (\pi)_k$ sia un ciclo, $\partial x = 0$. Scriviamo x come $x = H_1 \otimes x_1 + 1 \otimes x_2$, dove $x_1, x_2 \in (\pi_2) \otimes \dots \otimes (\pi_s)$. Allora

$$0 = \partial x = 1 \otimes x_1 - H_1 \otimes (\partial x_1) + 1 \otimes (\partial x_2) = 1 \otimes (x_1 + \partial x_2) - H_1 \otimes (\partial x_1)$$

Questo implica che $x_1 = -\partial x_2$. Si definisca $y = H_1 \otimes x_2 \in (\pi)_{k+1}$. Allora

$$\partial y = 1 \otimes x_2 - H_1 \otimes (\partial x_2) = 1 \otimes x_2 + H_1 \otimes x_1 = x$$

come richiesto. \square

Teorema 4.88. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento centrale e sia π una partizione di \mathcal{A} . La mappa \mathcal{K} -lineare omogenea κ della Definizione 4.84 è un isomorfismo se e solo se la partizione π è buona.*

Dimostrazione. Assumiamo che π sia una partizione buona. Procediamo per induzione su $r = r(\mathcal{A})$.

Se $r(\mathcal{A}) = 0$, allora $\mathcal{A} = \Phi_l$. Per cui $(\pi) = \mathcal{K} = A(\mathcal{A})$.

Supponiamo ora che $r = r(\mathcal{A}) > 0$. Si noti che $s \leq r$ perchè π è indipendente. Si consideri il diagramma

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \rightarrow & (\pi)_r & \xrightarrow{\partial} & (\pi)_{r-1} & \xrightarrow{\partial} & \cdots & \xrightarrow{\partial} & (\pi)_1 & \xrightarrow{\partial} & (\pi)_0 & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \kappa_r & & \downarrow \kappa_{r-1} & & & & \downarrow \kappa_1 & & \downarrow \kappa_0 & & \\ 0 & \rightarrow & A_r(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\partial} & A_{r-1}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\partial} & \cdots & \xrightarrow{\partial} & A_1(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\partial} & A_0(\mathcal{A}) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Le mappe verticali sono indotte da $\kappa : (\pi) \rightarrow A(\mathcal{A})$. La riga superiore è esatta per il Lemma 4.87. La riga inferiore è esatta per il Lemma 4.13. Si noti che

$$(\pi)_k = \bigoplus_{Y \in L_k} (\pi)_Y \simeq \bigoplus_{Y \in L_k} (\pi_Y)_Y$$

per i Lemmi 4.85 e 4.86. Si noti anche

$$A_k(\mathcal{A}) = \bigoplus_{Y \in L_k} A_Y(\mathcal{A}) \simeq \bigoplus_{Y \in L_k} A_Y(\mathcal{A}_Y)$$

per il Corollario 4.27 e la Proposizione 4.31. Applicando l'ipotesi induttiva ad L_Y per $r(Y) < r$, si ottiene che κ_i è un isomorfismo per $1 \leq i < r$. Segue allora dalla commutatività del diagramma che anche κ_r è un isomorfismo. Per cui $\kappa : (\pi) \rightarrow A(\mathcal{A})$ è un isomorfismo.

Per il viceversa supponiamo che κ sia un isomorfismo. Prima di tutto mostriamo che π è indipendente. Sia $S \in \mathcal{S}$. Allora $p_S \neq 0$ e $a_S = \kappa(p_S) \neq 0$. Questo mostra che S è indipendente. Ora mostriamo che se $X \neq V$, allora π_X contiene un blocco che è un singleton. Siccome

$$(\pi) = \bigoplus_{Y \in L} (\pi)_Y, \quad A(\mathcal{A}) = \bigoplus_{Y \in L} A_Y(\mathcal{A})$$

κ induce gli isomorfismi $(\pi)_Y \rightarrow A_Y(\mathcal{A})$. Per il Lemma 4.86 e la Proposizione 4.31, otteniamo

$$\begin{aligned} (\pi_X) &= \bigoplus_{Y \in L_X} (\pi_X)_Y \simeq \bigoplus_{Y \in L_X} (\pi)_Y \\ &\simeq \bigoplus_{Y \in L_X} A_Y(\mathcal{A}) \simeq \bigoplus_{Y \in L_X} A_Y(\mathcal{A}_X) = A(\mathcal{A}_X) \end{aligned}$$

Sia $X \neq V$. Allora

$$0 = \sum_{Y \in L_X} \mu(Y) = \text{Poin}(A(\mathcal{A}_X), -1) = \text{Poin}((\pi_X), -1) = \prod_i (1 - |\pi_i \cap \mathcal{A}_X|)$$

Questo implica che π_X contiene almeno un blocco che è un singleton. □

Corollario 4.89. *Se \mathcal{A} possiede una partizione buona $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_s)$, allora $s = r$ e*

$$\text{Poin}(A(\mathcal{A}), t) = \prod_{i=1}^r (1 + |\pi_i|t)$$

Corollario 4.90. *Se \mathcal{A} possiede una partizione buona $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_s)$, allora il multi-insieme $\{|\pi_1|, \dots, |\pi_s|\}$ dipende solamente da \mathcal{A} .*

Corollario 4.91. *Se \mathcal{A} possiede una partizione buona $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_s)$, allora per ogni $X \in L$*

$$r(X) = |\{i \mid \pi_i \cap \mathcal{A}_X \neq \emptyset\}|$$

Dimostrazione. Abbiamo mostrato nella dimostrazione del Teorema 4.88 che l'isomorfismo κ induce gli isomorfismi $\kappa_X : (\pi_X) \rightarrow A(\mathcal{A}_X)$ per ogni $X \in L$. Perciò π_X è una partizione buona di \mathcal{A}_X . Per il Corollario 4.89 si ha allora

$$r(X) = r(\mathcal{A}_X) = |\pi_X| = |\{i \mid \pi_i \cap \mathcal{A}_X \neq \emptyset\}|$$

Questo completa la dimostrazione. \square

Partizioni Buone per Arrangiamenti Affini

Si assuma ora che \mathcal{A} sia un arrangiamento affine. Cerchiamo di generalizzare il Teorema 4.88 affinché si possa applicare anche in questo caso. Si richiami il fatto che \mathcal{A}_X è centrale per ogni $X \in L$.

Definizione 4.92. *Sia $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_s)$ una partizione dell'arrangiamento affine \mathcal{A} . Essa è detta **buona** se:*

- (1) *per ogni scelta di iperpiani $H_i \in \pi_i$ per $1 \leq i \leq s$, l'intersezione $H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_s$ è non vuota;*
- (2) *se $X \in L \setminus \{V\}$, allora la partizione indotta π_X dell'arrangiamento centrale \mathcal{A}_X è una partizione buona nel senso della Definizione 3.62.*

Per ogni partizione di \mathcal{A} , possiamo definire il \mathcal{K} -modulo graduato libero $(\pi) = \bigoplus_k (\pi_k)$, il sottomodulo $(\pi)_X$ per $X \in L$, e la mappa $\kappa : (\pi) \rightarrow A(\mathcal{A})$ come in precedenza. Se la prima condizione della Definizione 4.92 è soddisfatta, allora

$$(\pi) = \bigoplus_{X \in L} (\pi)_X$$

Esattamente come nel Lemma 4.86 per il caso centrale, la mappa naturale $(\pi_X)_Y \rightarrow (\pi)_Y$ è un isomorfismo per $X, Y \in L$ con $Y \leq X$.

Teorema 4.93. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento affine e sia π una partizione di \mathcal{A} . Allora κ è un isomorfismo se e solo se la partizione π è buona.*

Dimostrazione. Si supponga che π sia buona. Il Teorema 4.88 e la Proposizione 4.72 danno

$$(\pi) \simeq \bigoplus_{X \in L} (\pi)_X \simeq \bigoplus_{X \in L} (\pi_X)_X \simeq \bigoplus_{X \in L} A_X(\mathcal{A}_X) \simeq \bigoplus_{X \in L} A_X(\mathcal{A}) \simeq A(\mathcal{A})$$

Viceversa, si assuma che la mappa κ sia un isomorfismo. Se prendiamo $S = (H_1, \dots, H_s)$ con $H_i \in \pi_i$ per $1 \leq i \leq s$, allora e_S non è nullo in $A(\mathcal{A})$, in quanto κ è iniettiva. Segue che $\cap S \neq \emptyset$. Questa è la prima condizione. L'isomorfismo κ induce inoltre gli isomorfismi $(\pi)_Y \simeq A_Y(\mathcal{A})$ per ogni $Y \in L$. Sia $X \in L$. La Proposizione 4.72 fornisce

$$(\pi)_X \simeq \bigoplus_{Y \in L_X} (\pi)_Y \simeq \bigoplus_{Y \in L_X} A_Y(\mathcal{A}) \simeq A(\mathcal{A}_X)$$

Il Teorema 4.88 implica che ogni partizione π_X è buona. \square

4.4 Forme Differenziali

Il Complesso di de Rham

Sia (\mathcal{A}, V) un arrangiamento affine. Sia S l'algebra simmetrica di V^* e sia F il campo dei quozienti di S . A volte potrebbe essere conveniente indicare la dipendenza di S e F da V . In questo caso scriveremo $S = \mathbb{K}[V]$ e $F = \mathbb{K}(V)$. Si ricordi che, avendo scelto una base x_1, \dots, x_l per V^* , possiamo identificare l'algebra simmetrica di V^* con l'algebra polinomiale $S = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_l]$ e il suo campo quoziente con il campo delle funzioni razionali $F = \mathbb{K}(x_1, \dots, x_l)$.

Vediamo $F \otimes_{\mathbb{K}} V^*$ come uno spazio vettoriale su F definendo $f(g \otimes \alpha) = fg \otimes \alpha$ dove $f, g \in F$ e $\alpha \in V^*$. Esiste un'unica mappa \mathcal{K} -lineare $d : F \rightarrow F \otimes V^*$ tale che $d(fg) = f(dg) + g(df)$ per $f, g \in F$ e $d\alpha \in \mathbb{K}$ per $\alpha \in V^*$.

In termini della base x_1, \dots, x_l , il differenziale df è dato dalla formula usuale

$$df = \sum_{i=1}^l \frac{\partial f}{\partial x_i} \otimes x_i = \sum_{i=1}^l \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Si noti che $F \otimes V^* = Fdx_1 \oplus \dots \oplus Fdx_l$.

Definizione 4.94. Sia $\Omega(V)$ l'algebra esterna dell' F -spazio vettoriale $F \otimes V^*$, graduata in modo che $\Omega(V) = \bigoplus_{p=0}^l \Omega^p(V)$ dove

$$\Omega^p(V) = \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq l} Fdx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

Per semplicità di notazione, scriviamo $\omega\eta = \omega \wedge \eta$ per $\omega, \eta \in \Omega(V)$. In particolare, scriviamo $dx_1 \dots dx_p = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p$. Identifichiamo Ω^0 con F . Gli elementi di $\Omega^p(V)$ sono chiamati p -forme differenziali razionali su V . Enunciamo alcune note proprietà di d .

Proposizione 4.95. La mappa $d : F \rightarrow F \otimes V^*$ può essere estesa in modo unico ad una mappa \mathcal{K} -lineare $d : \Omega(V) \rightarrow \Omega(V)$ in modo da soddisfare le seguenti proprietà:

- (1) $d^2 = 0$;
- (2) se $\omega \in \Omega^p(V)$ e $\eta \in \Omega(V)$, allora $d(\omega\eta) = (d\omega)\eta + (-1)^p\omega(d\eta)$;
- (3) se $\omega = \sum f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$ dove $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq l$ e $f_{i_1 \dots i_p} \in F$, allora

$$d\omega = \sum_{j=1}^l \sum (\partial f_{i_1 \dots i_p} / \partial x_j) dx_j dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$$

L'Algebra $R(\mathcal{A})$

Sia \mathcal{K} un sottoanello commutativo del campo \mathbb{K} .

Definizione 4.96. Sia \mathcal{A} un arrangiamento affine. Per $H \in \mathcal{A}$ sia $\alpha_H \in S$ un polinomio di grado 1 con $H = \ker(\alpha_H)$ e sia $\omega_H = d\alpha_H / \alpha_H \in \Omega^1(V)$. Sia $R = R(\mathcal{A})$ la \mathcal{K} -sottoalgebra di $\Omega(V)$ generata da 1 e da ω_H per $H \in \mathcal{A}$.

Sia $R_p = R \cap \Omega^p(V)$. Siccome R è generata da 1 e dalle 1-forme ω_H , essa è graduata in maniera naturale: $R = \bigoplus_{p=0}^l R_p$.

Vedremo in seguito che quest'algebra è isomorfa ad $A(\mathcal{A})$; prima di dimostrarlo in generale vediamo nel caso dell'Esempio 4.9.

Esempio 4.97. Sia $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\}$ un 2-arrangiamento centrale. Si scriva $\omega_i = \omega_{H_i}$. Allora

$$R(\mathcal{A}) = \mathcal{K} \oplus \bigoplus_{p=1}^n \mathcal{K}\omega_p \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-1} \mathcal{K}\omega_k\omega_n$$

Sappiamo già che $R_0 = \mathcal{K}$ e che $R_p = 0$ per $p > 2$. Per definizione $\omega_1, \dots, \omega_n$ generano R_1 su \mathcal{K} . Queste 1-forme sono linearmente indipendenti su \mathcal{K} perchè le funzioni razionali $1/\alpha_1, \dots, 1/\alpha_n$ sono linearmente indipendenti su \mathcal{K} . Siccome $\omega_i^2 = 0$ e $\omega_i\omega_j = -\omega_j\omega_i$, lo spazio R_2 è generato su \mathcal{K} dalle $\omega_i\omega_j$ con $i < j$. Al fine di scoprire le altre eventuali relazioni fra questi generatori, prendiamo una base x, y per V^* e scriviamo $\alpha_i = a_i x + b_i y$ con $a_i, b_i \in \mathbb{K}$. Allora $\omega_i = (a_i/\alpha_i)dx + (b_i/\alpha_i)dy$ e si ha

$$d\alpha_i d\alpha_j = (a_i b_j - b_i a_j) dx dy$$

Perciò per ogni i, j, k si ha

$$\begin{aligned} \alpha_k d\alpha_i d\alpha_j + \alpha_i d\alpha_j d\alpha_k + \alpha_j d\alpha_k d\alpha_i &= \\ &= \det \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ \alpha_i & \alpha_j & \alpha_k \end{bmatrix} dx dy = 0 \end{aligned}$$

perchè la terza riga della matrice è una combinazione lineare delle prime due. Se moltiplichiamo questa equazione per $1/\alpha_i \alpha_j \alpha_k$ otteniamo:

$$\omega_i \omega_j + \omega_j \omega_k + \omega_k \omega_i = 0$$

In particolare si ha $\omega_i \omega_j = \omega_i \omega_n - \omega_j \omega_n$ se $1 \leq i < j \leq n$, cosicchè R_2 è generato dagli elementi $\omega_k \omega_n$ per $1 \leq k < n$. Rimane da mostrare che questi elementi sono linearmente indipendenti su \mathcal{K} . Si definisca una mappa F -lineare $\partial : \Omega^2(V) \rightarrow \Omega^1(V)$ tale che $\partial(f dx dy) = f x dy - f y dx$. Allora $\partial(\omega_i \omega_j) = \omega_j - \omega_i$. Se $\sum_{k=1}^{n-1} c_k \omega_k \omega_n = 0$ con $c_k \in \mathcal{K}$, allora applicando ∂ si ottiene $\sum_{k=1}^{n-1} c_k (\omega_n - \omega_k) = 0$. Siccome $\omega_1, \dots, \omega_n$ sono linearmente indipendenti su \mathcal{K} , otteniamo $c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$. Questo prova l'asserto.

Lemma 4.98. *Esiste un omomorfismo suriettivo di \mathcal{K} -algebre graduate $\gamma : A(\mathcal{A}) \rightarrow R(\mathcal{A})$ tale che $\gamma(e_H) = \omega_H$ per ogni $H \in \mathcal{A}$.*

Dimostrazione. Si definisca un omomorfismo di \mathcal{K} -algebre $\nu : E \rightarrow R$ mediante $\nu(e_H) = \omega_H$. Per provare che ν induce un omomorfismo $\gamma : A \rightarrow R$, dobbiamo mostrare che se $\cap S = \emptyset$, allora $\nu(e_S) = 0$ e che se $S = (H_1, \dots, H_p)$ è dipendente, allora $\nu(\partial e_S) = 0$. Nel primo caso è facile vedere che esistono $c_i \in \mathcal{K}$, non tutti nulli, con $\sum_{i=1}^p c_i \alpha_i = 1$. Perciò $\sum_{i=1}^p c_i (d\alpha_i) = 0$ e quindi $d\alpha_1, \dots, d\alpha_p$ sono linearmente dipendenti. Da questo segue

$$\nu(e_S) = \omega_1 \cdots \omega_p = (d\alpha_1 \cdots d\alpha_p) / (\alpha_1 \cdots \alpha_p) = 0$$

Nel secondo caso, siccome $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ è un insieme linearmente dipendente, esistono $c_i \in \mathcal{K}$, non tutti nulli, con $\sum_{i=1}^p c_i \alpha_i = 0$. Possiamo assumere che $c_p = -1$, cosicchè abbiamo $\alpha_p = \sum_{k=1}^{p-1} c_k \alpha_k$ e $d\alpha_p = \sum_{k=1}^{p-1} c_k d\alpha_k$. Perciò

$$\omega_p = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{c_k \alpha_k}{\alpha_p} \omega_k \quad (2)$$

Otteniamo così

$$\nu(\partial e_S) = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \omega_1 \dots \widehat{\omega}_k \dots \omega_p = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k-1} \omega_1 \dots \widehat{\omega}_k \dots \omega_p + (-1)^{p-1} \omega_1 \dots \omega_{p-1}$$

Sostituiamo ora (2) e otteniamo

$$\begin{aligned} \nu(\partial e_S) &= \left(\sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k-1} (-1)^{p-(k-1)} \frac{c_k \alpha_k}{\alpha_p} \right) \omega_1 \dots \omega_{p-1} + (-1)^{p-1} \omega_1 \dots \omega_{p-1} = \\ &= \left((-1)^p \frac{\sum_{k=1}^{p-1} c_k \alpha_k}{\alpha_p} + (-1)^{p-1} \right) \omega_1 \dots \omega_{p-1} = \left((-1)^p + (-1)^{p-1} \right) \omega_1 \dots \omega_{p-1} = 0 \end{aligned}$$

Segue che $\nu(I) = 0$ e ν induce quindi una suriezione $\gamma : A \rightarrow R$ tale che $\gamma(a_H) = \omega_H$. \square

Deletion e Restriction

Sia \mathcal{A} un arrangiamento non vuoto, sia $H_0 \in \mathcal{A}$, e sia $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ la terna induttiva con iperpiano distinto H_0 . Si noti che $R(\mathcal{A}')$ e $R(\mathcal{A})$ sono entrambe sottoalgebre di $\Omega(V)$ e che $R(\mathcal{A}') \subseteq R(\mathcal{A})$. Proveremo che esiste una sequenza esatta corta di \mathcal{K} -moduli

$$0 \rightarrow R(\mathcal{A}') \xrightarrow{i} R(\mathcal{A}) \xrightarrow{j} R(\mathcal{A}'') \rightarrow 0$$

Sia $\alpha_0 = \alpha_{H_0}$ e sia S_0 la localizzazione di S in α_0 . Questo significa, per definizione, che S_0 è il sottoanello di F contenente tutti gli elementi della forma f/g tali che $f, g \in S$ e g sia primo con α_0 . Sia $\rho : V^* \rightarrow H_0^*$ la mappa di restrizione e siano $y_i = \rho(x_i)$. Possiamo estendere ρ in modo unico ad un omomorfismo di \mathbb{K} -algebre $\rho : S_0 \rightarrow \mathbb{K}(H_0)$. Sia l'esistenza che l'unicità seguono dalla formula

$$\rho(f/g) = f(y_1, \dots, y_l) / g(y_1, \dots, y_l)$$

Si noti che $g(y_1, \dots, y_l) \neq 0$ perchè g è primo con α_0 . Si definisca una \mathbb{K} -sottoalgebra Ω_0 di $\Omega(V)$ mediante

$$\Omega_0 = \bigoplus_{p=0}^l \left(\bigoplus_{i_1 < \dots < i_p} S_0 dx_{i_1} \dots dx_{i_p} \right)$$

Questa sottoalgebra non dipende dalla base di V^* .

Lemma 4.99. *La mappa $\rho : S_0 \rightarrow \mathbb{K}(H_0)$ può essere estesa in modo unico ad una mappa \mathbb{K} -lineare $\rho : \Omega_0 \rightarrow \Omega(H_0)$ in modo che per $\omega \eta \in \Omega_0$, $f \in S_0$ e $\beta \in V^*$ si abbia*

(1) $\rho(\omega \eta) = \rho(\omega) \rho(\eta)$;

(2) $\rho(f \omega) = \rho(f) \rho(\omega)$;

(3) $\rho(d\beta) = d\rho(\beta)$;

(4) se $\omega = \sum f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$, allora

$$\rho(\omega) = \sum f_{i_1 \dots i_p}(y_1, \dots, y_l) dy_{i_1} \dots dy_{i_p}$$

Dimostrazione. Se $\omega = \sum f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$ e ρ gode delle proprietà (1)-(3), allora

$$\rho(\omega) = \sum \rho(f_{i_1 \dots i_p}) \rho(dx_{i_1}) \dots \rho(dx_{i_p}) = \sum \rho(f_{i_1 \dots i_p}) dy_{i_1} \dots dy_{i_p}$$

Questo mostra che $\rho(\omega)$ è dato da (4) e prova l'unicità. Per provare l'esistenza, si definisca $\rho(\omega)$ mediante (4): in questo modo (1)-(3) risultano chiare. \square

Lemma 4.100. *Si supponga $\beta \in V^*$ e $\beta \neq 0$. Se $\omega \in \Omega_0$ e $(d\beta)\omega = 0$, allora esiste $\psi \in \Omega_0$ tale che $\omega = (d\beta)\psi$.*

Dimostrazione. Si scelga una base x_1, \dots, x_l per V^* in modo che $\beta = x_1$. Possiamo assumere che ω sia una p -forma. Si scriva $\omega = \sum f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$ dove $f_{i_1 \dots i_p} \in S_0$ e la somma è su $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq l$. Allora

$$0 = (dx_1)\omega = \sum f_{i_1 \dots i_p} dx_1 dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$$

dove la somma è su $2 \leq i_1 < \dots < i_p \leq l$. Perciò $f_{i_1 \dots i_p} = 0$ se $i_1 \geq 2$. \square

Definizione 4.101. *Si dice che $\phi \in \Omega(V)$ ha al massimo un **polo semplice** lungo H_0 se $\alpha_0 \phi \in \Omega_0$.*

Lemma 4.102. *Si supponga che $\phi \in \Omega(V)$ abbia al massimo un polo semplice lungo H_0 e che $d\phi = 0$. Allora esistono $\psi, \theta \in \Omega_0$ tali che*

$$\phi = (d\alpha_0/\alpha_0)\psi + \theta$$

La forma $\rho(\psi) \in \Omega(H_0)$ è unicamente determinata da ψ .

Dimostrazione. Per semplicità, si scriva $\alpha = \alpha_0$. Sia $\beta \in V^*$ la parte omogenea di grado 1 di α . Allora $d\alpha = d\beta$. Siccome $d\phi = 0$, segue dal Lemma 4.95.2 che $d(\alpha\phi) = (d\alpha)\phi - \alpha(d\phi) = (d\alpha)\phi = (d\beta)\phi$. Siccome $\alpha\phi \in \Omega_0$ per ipotesi e $d\Omega_0 \subseteq \Omega_0$, segue dal Lemma 4.100 che esiste $\theta \in \Omega_0$ tale che $d(\alpha\phi) = (d\beta)\theta$. Perciò $(d\beta)\phi = (d\beta)\theta$, il che implica $(d\beta)\alpha(\psi - \theta) = 0$. Siccome $\alpha(\phi - \theta) \in \Omega_0$, segue ancora dal Lemma 4.100 che esiste $\psi \in \Omega_0$ tale che $\alpha(\phi - \theta) = (d\beta)\psi = (d\alpha)\psi$. Questo prova l'esistenza di θ e ψ .

Si osservi che, fissato ϕ, ψ e θ non sono necessariamente unici. Mostriamo ora che invece $\rho(\psi)$ lo è. Per fare questo, è sufficiente mostrare che se $\psi, \theta \in \Omega_0$ e $\phi = (d\alpha/\alpha)\psi + \theta = 0$, allora $\rho(\psi) = 0$, in modo che l'associazione $\{\rho(\psi)\} \rightarrow \{\phi\}$ sia iniettiva. Per prima cosa si noti che $(d\beta)\theta = (d\alpha)\theta = 0$. Segue dal Lemma 4.100 che esiste $\theta' \in \Omega_0$ tale che $\theta = (d\beta)\theta'$. Ora $(d\beta)(\psi + \alpha\theta') = (d\beta)\psi + \alpha\theta = (d\alpha)\psi + \alpha\theta = 0$. Siccome $\psi + \alpha\theta' \in \Omega_0$, possiamo applicare nuovamente il Lemma 4.100 per concludere che esiste $\theta'' \in \Omega_0$ con $\psi + \alpha\theta' = (d\beta)\theta'' = (d\alpha)\theta''$. Siccome $\rho(\alpha) = 0$, segue dal Lemma 4.99 che $\rho(\alpha\theta') = 0$ e che $\rho((d\alpha)\theta'') = 0$. Perciò $\rho(\psi) = 0$. \square

Definizione 4.103. *La forma $\rho(\psi)$ univocamente determinata nel lemma precedente è detta **residuo** di ϕ lungo H_0 . La denoteremo con $\text{res}(\phi)$.*

Se $H \in \mathcal{A}$, allora $d\omega_H = 0$, cosicchè $d(\omega_{H_1} \dots \omega_{H_p}) = 0$ per tutti gli $H_1, \dots, H_p \in \mathcal{A}$. Perciò $d\phi = 0$ per ogni $\phi \in R(\mathcal{A})$. È inoltre chiaro dalla definizione che ogni $\phi \in R(\mathcal{A})$ ha al massimo un polo semplice lungo H_0 . Perciò $\text{res}(\phi)$ è definito per ogni $\phi \in R(\mathcal{A})$.

Lemma 4.104. *Si supponga che $H_1, \dots, H_p \in \mathcal{A}'$. Allora*

- (1) $\text{res}(\omega_{H_1} \cdots \omega_{H_p}) = 0$;
- (2) $\text{res}(\omega_{H_0} \omega_{H_1} \cdots \omega_{H_p}) = \omega_{H_0 \cap H_1} \cdots \omega_{H_0 \cap H_p}$;
- (3) $\text{res}R(\mathcal{A}) \subseteq R(\mathcal{A}'')$.

Dimostrazione. Nel caso in cui $p = 0$, le formule (1) e (2) vengono interpretate come $\text{res}(1) = 0$ e $\text{res}(\omega_{H_0}) = 1$. Sia $\phi = \omega_{H_1} \cdots \omega_{H_p}$. Possiamo scegliere $\psi = 0$ e $\theta = \phi$ nel Lemma 4.102. Questo mostra che $\text{res}(\phi) = 0$ e prova (1).

Ora sia $\phi = \omega_{H_0} \omega_{H_1} \cdots \omega_{H_p}$. Possiamo scegliere $\psi = \omega_{H_1} \cdots \omega_{H_p}$ e $\theta = 0$ nel Lemma 4.102. Questo mostra che $\text{res}(\phi) = \rho(\omega_{H_1} \cdots \omega_{H_p})$. Per il Lemma 4.99.1, si ha $\rho(\omega_{H_1} \cdots \omega_{H_p}) = \rho(\omega_{H_1}) \cdots \rho(\omega_{H_p})$. Rimane da mostrare che $\rho(\omega_{H_i}) = \omega_{H_0 \cap H_i}$. Se $H \in \mathcal{A}'$, allora segue dal Lemma 4.99 che $\rho(\omega_H) = \rho(d\alpha_H/\alpha_H) = d\rho(\alpha_H)/\rho(\alpha_H)$. Siccome $\rho(\alpha_H)$ è una funzione polinomiale su H_0 che definisce l'iperpiano $H_0 \cap H \in \mathcal{A}''$, si ha $\rho(\omega_H) = \omega_{H_0 \cap H}$. Questo prova (2). Per provare (3), si noti che siccome $\omega_{H_0}^2 = 0$, segue dalla definizione di $R(\mathcal{A})$ e di $R(\mathcal{A}')$ che $R(\mathcal{A}) = R(\mathcal{A}') + \omega_{H_0}R(\mathcal{A}')$. Perciò (3) segue da (1) e (2). \square

L'Isomorfismo di R ed A

Enunciamo due teoremi che dimostreremo simultaneamente.

Teorema 4.105. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento e sia $R(\mathcal{A})$ la sottoalgebra di $\Omega(V)$ generata da 1 e $\omega_H = d\alpha_H/\alpha_H$. La mappa $\gamma : A(\mathcal{A}) \rightarrow R(\mathcal{A})$ induce un isomorfismo di \mathcal{K} -algebre graduate tale che $\gamma(a_H) = \omega_H$.*

Teorema 4.106. *Sia $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ una terna di arrangiamenti con iperpiano distinto $H_0 \in \mathcal{A}$. Sia $i : R(\mathcal{A}') \rightarrow R(\mathcal{A})$ la mappa di inclusione e si definisca $j : R(\mathcal{A}) \rightarrow R(\mathcal{A}'')$ tramite $j(\phi) = \text{res}(\phi)$. per $\phi \in R(\mathcal{A})$, dove $\text{res}(\phi)$ è il residuo di ϕ lungo H_0 . Allora esiste una sequenza esatta:*

$$0 \rightarrow R(\mathcal{A}') \xrightarrow{i} R(\mathcal{A}) \xrightarrow{j} R(\mathcal{A}'') \rightarrow 0$$

Dimostrazione. Dimostriamo questi teoremi per induzione su $|\mathcal{A}|$.

Se \mathcal{A} è vuoto, allora $A(\mathcal{A}) = \mathcal{K} = R(\mathcal{A})$ e vale quindi il primo risultato. Il secondo teorema richiede che \mathcal{A} sia non vuoto. Quindi, se $|\mathcal{A}| = 1$, allora \mathcal{A}' e \mathcal{A}'' sono arrangiamenti vuoti. Sia $\mathcal{A} = \{H\}$. Allora $R(\mathcal{A}) = \mathcal{K} + \mathcal{K}\omega_H$ e $R(\mathcal{A}') = \mathcal{K} = R(\mathcal{A}'')$, cosicchè entrambi gli asserti sono validi.

Supponiamo ora che $|\mathcal{A}| > 1$. Allora, il Lemma 4.104.3 mostra che $jR(\mathcal{A}) \subseteq R(\mathcal{A}'')$. Inoltre, j è suriettiva per il Lemma 4.104.2. Segue dal Lemma 4.104.1 che $ji = 0$, cosicchè $\text{im}(i) \subseteq \ker(j)$. Per provare che $\ker(j) \subseteq \text{im}(i)$ si consideri il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A(\mathcal{A}') & \xrightarrow{i_{\mathcal{A}}} & A(\mathcal{A}) & \xrightarrow{j_{\mathcal{A}}} & A(\mathcal{A}'') \rightarrow 0 \\ & & \gamma' \downarrow & & \gamma \downarrow & & \gamma'' \downarrow \\ 0 & \rightarrow & R(\mathcal{A}') & \xrightarrow{i} & R(\mathcal{A}) & \xrightarrow{j} & R(\mathcal{A}'') \rightarrow 0 \end{array}$$

Il diagramma è commutativo. Questo è chiaro per il quadrato a sinistra grazie alle definizioni di $i_{\mathcal{A}}$ e i . Per il quadrato a destra ciò segue dal Lemma 4.104. Inoltre, la riga in alto è una sequenza esatta per il Teorema 4.66. Per l'ipotesi induttiva del Teorema 4.105 si ha che γ' e γ'' sono isomorfismi. Segue dal diagramma che $\ker(j) \subseteq \text{im}(i)$. Questo prova che anche la seconda

riga è esatta. Quindi il Teorema 4.106 è valido per \mathcal{A} . Segue infine dal Lemma dei Cinque che γ è un isomorfismo, dimostrando quindi anche il Teorema 4.105 per \mathcal{A} . \square

I prossimi risultati seguono dal Corollario 4.75 e dal Teorema 4.69.

Corollario 4.107. *L'algebra $R(\mathcal{A})$ è un \mathcal{K} -modulo graduato libero. Il \mathcal{K} -modulo $R_p(\mathcal{A})$ è anch'esso libero per $p \geq 0$.*

Corollario 4.108. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento e sia $R(\mathcal{A})$ l'algebra delle forme differenziali generata da 1 e $\omega_H = d\alpha_H/\alpha_H$ per $H \in \mathcal{A}$. Il polinomio di Poincaré di $R(\mathcal{A})$ è*

$$\text{Poin}(R(\mathcal{A}), t) = \pi(\mathcal{A}, t)$$

Definizione 4.109. *Per $X \in L$ sia $R_X = R_X(\mathcal{A}) = \sum \mathcal{K}\omega_{H_1} \cdots \omega_{H_p}$ dove la somma è su tutte le p -uple $(H_1, \dots, H_p) \in \mathbf{S}_X$.*

Proposizione 4.110. *Si ha*

$$R_p = \bigoplus_{X \in L_p} R_X$$

Dimostrazione. La somma è diretta perchè $R_X = \gamma(A_X)$, γ è un isomorfismo e $A_p = \bigoplus_{X \in L} A_X$ per il Corollario 4.74. \square

5 La Coomologia di $M(\mathcal{A})$

In quest'ultima parte dell'elaborato utilizzeremo i risultati ottenuti nei capitoli precedenti per determinare i gruppi di coomologia $H^k(M; \mathbb{Z})$ e la struttura di anello di $H^*(M; \mathbb{Z})$. Si ricordino le Definizioni 2.17 e 2.18 di varietà $N(\mathcal{A})$ e di complemento $M(\mathcal{A})$ di un arrangiamento \mathcal{A} . In questo capitolo, salvo indicazioni contrarie, si considereranno **arrangiamenti complessi**, ossia arrangiamenti $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, V)$ il cui spazio vettoriale V è \mathbb{C}^l per un certo $l > 0$. Due arrangiamenti complessi \mathcal{A} e \mathcal{B} si dicono **diffeomorfi**, **omeomorfi**, etc. se i loro complementi $M(\mathcal{A})$ e $M(\mathcal{B})$ sono diffeomorfi, omeomorfi etc.

Cominciamo con una interpretazione topologica del metodo di deletion-restriction che sfrutta l'isomorfismo di Thom.

5.1 L'Isomorfismo di Thom

Definizione 5.1. *Sia $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ una terna di arrangiamenti con iperpiano distinto $H_0 \in \mathcal{A}$. Siano $M = M(\mathcal{A})$, $M' = M(\mathcal{A}')$ e $M'' = M(\mathcal{A}'')$.*

Siccome M ed M' sono sottoinsiemi aperti di V , essi sono varietà complesse di dimensione complessa pari a l .

Lemma 5.2. *Valgono le seguenti affermazioni:*

- (1) $M = M' \setminus M''$;
- (2) $M'' = M' \cap H_0$;
- (3) M'' è una sottovarietà di M' di codimensione complessa 1.

Dimostrazione. Le asserzioni (1) e (2) sono chiare. Per (3) si noti che H_0 ha codimensione 1 in V . La conclusione segue dal fatto che M'' è aperto in H_0 e M' è aperto in V . \square

Lemma 5.3. *La sottovarietà $M'' \subset M'$ possiede un intorno tubolare $E \subseteq M'$ che ha la struttura di un \mathbb{C} -fibrato banale sopra M'' .*

Dimostrazione. M' è una varietà complessa di dimensione l , ed M'' è una sottovarietà non-singolare di codimensione complessa 1. L'esistenza di un intorno tubolare è un fatto generale di topologia differenziale. Inoltre il fibrato normale è banale perchè è la restrizione ad M'' del fibrato normale all'iperpiano H . Essendo H contraibile, il fibrato in questione è banale. \square

L'intorno tubolare E è un sottoinsieme di M' , e indicheremo con $q : E \rightarrow M''$ la mappa di inclusione. Inoltre si denoti la fibrazione costruita nel lemma precedente con $\xi = (E, M'', p)$. Sia E_0 il complemento in E della sezione nulla. Possiamo identificare la sezione nulla con M'' e porre $E_0 = E \setminus M''$. Allora, per il Lemma 5.78.1, $M = M' \setminus M''$, cosicchè si ottiene

$$E \cap M = E \cap (M' \setminus M'') = E \cap M' \setminus E \cap M'' = E \setminus M'' = E_0$$

Si ha quindi in particolare che $E_0 \subseteq M$.

Nel prossimo lemma verranno sfruttati l'**isomorfismo di Thom** sul fibrato ξ sopra definito e, nel corollario seguente, la **coomologia relativa** per la coppia (M', M) , con mappa di inclusione $i : M \rightarrow M'$.

Questi argomenti (intorno tubolare, isomorfismo di Thom, coomologia relativa) possono essere consultati nel testo [3] indicato nella bibliografia.

Lemma 5.4. *Sia $\xi = (E, M'', p)$ un intorno tubulare di M'' in M . Allora esistono isomorfismi per $k \geq 1$*

$$\tau : H^{k+1}(M', M) \rightarrow H^{k-1}(M'')$$

Dimostrazione. Siccome $E_0 = E \cap M$, l'embedding $q : E \rightarrow M'$ può essere esteso ad una inclusione di coppie $q : (E, E_0) \rightarrow (M', M)$. Questa inclusione si ottiene togliendo il sottoinsieme chiuso $(M' \setminus E) \subseteq M$, per cui q^* è un isomorfismo. Sia $z : M'' \rightarrow E$ la sezione nulla. Siccome $(E, E_0) \simeq M'' \times (\mathbb{C}, \mathbb{C}^*)$, abbiamo gli isomorfismi

$$H^{k-1}(M'') \xleftarrow{z^*} H^{k-1}(E) \xrightarrow{r} H^{k+1}(E, E_0)$$

dove r è l'isomorfismo di Thom per il fibrato banale ξ . L'asserto segue ponendo $\tau = z^* r^{-1} q^*$. \square

Corollario 5.5. *Per $k \geq 0$ esiste una sequenza esatta lunga in coomologia:*

$$\dots \rightarrow H^k(M') \xrightarrow{i^*} H^k(M) \xrightarrow{\phi} H^{k-1}(M'') \xrightarrow{\psi} H^{k+1}(M') \rightarrow \dots$$

dove $\phi = \tau \delta$ e $\psi = j^* \tau^{-1}$.

Dimostrazione. Si consideri la sequenza esatta lunga della coppia (M', M) in coomologia:

$$\dots \rightarrow H^k(M') \xrightarrow{i^*} H^k(M) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(M', M) \xrightarrow{j^*} H^{k+1}(M') \rightarrow \dots$$

dove i^* è il pullback dell'inclusione $i : M \rightarrow M'$,

$\delta : H^k(M) \rightarrow H^{k+1}(M', M) := H^{k+1}(M') \oplus H^k(M)$ è la mappa tale che $\delta(\theta) = (0, \theta)$ e

$j^* : H^{k+1}(M', M) \rightarrow H^{k+1}(M')$ è tale che $j^*(\omega, \theta) = \omega$.

Possiamo a questo punto utilizzare l'isomorfismo del Lemma 5.4 per rimpiazzare $H^{k+1}(M', M)$ con $H^{k-1}(M'')$. Questo fornisce la sequenza esatta lunga cercata. \square

Definizione 5.6. *Sia $H = \ker \alpha_H$ e sia $M_H = V \setminus H$. La mappa $\alpha_H : V \rightarrow \mathbb{C}$ può essere ristretta ad una mappa $\alpha_H : M_H \rightarrow \mathbb{C}^*$. Si scelga il generatore canonico $(1/2\pi i)(dz/z)$ di $H^1(\mathbb{C}^*)$. Si definisce la 1-forma razionale su V*

$$\eta_H = \frac{1}{2\pi i} \frac{d\alpha_H}{\alpha_H}$$

Sia $\langle \eta_H \rangle$ la classe di coomologia di η_H in $H^1(M_H)$. Allora

$$\langle \eta_H \rangle = \alpha_H^* \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{dz}{z} \right)$$

Si denoti la classe di coomologia di η_H in $H^1(M)$ con $[\eta_H]$. Sia infine $i_H : M \rightarrow M_H$ la mappa di inclusione. Allora si ha $[\eta_H] = i_H^* \langle \eta_H \rangle$.

Lemma 5.7. *L'orientazione naturale del \mathbb{C} -fibrato $\xi = (E, M''; p)$ ha classe di Thom $u \in H^2(E, E_0)$ data da $u = q^* \delta[\eta_{H_0}]$.*

Dimostrazione. Poniamo $M_0 = M_{H_0}$, $\alpha_0 = \alpha_{H_0}$, $i_0 = i_{H_0}$ e $\eta_0 = \eta_{H_0}$. Scriviamo la prima parte della sequenza coomologica esatta della coppia (V, M_0) :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 0 & & & & 0 & & \\
 & & & & \parallel & & & & \parallel & & \\
 0 & \rightarrow & H^0(M_0) & \rightarrow & H^1(V, M_0) & \rightarrow & H^1(V) & \xrightarrow{i^*} & H^1(M_0) & \xrightarrow{\delta} & H^2(V, M_0) & \rightarrow & H^2(V) & \rightarrow & \dots \\
 & & \theta & \mapsto & (0, \theta) & & & & & & & & & & \\
 & & & & (\omega, \theta) & \mapsto & \omega & & & & & & & &
 \end{array}$$

Siccome $H^1(V) = H^2(V) = 0$, si ha che $\delta : H^1(M_0) \rightarrow H^2(V, M_0)$ è un isomorfismo. Inoltre, poichè $\langle \eta_0 \rangle$ genera $H^1(M_0)$, $\delta \langle \eta_0 \rangle$ genera $H^2(V, M_0)$. Sia $x \in M''$ un qualsiasi punto e sia $F = p^{-1}(x) \simeq (x, \mathbb{C})$. Sia $F_0 = F \cap E_0 \simeq (x, \mathbb{C}^*)$. Sia $k : (F, F_0) \rightarrow (V, M_0)$ l'inclusione della fibra. Siccome $\alpha_0 : (F, F_0) \rightarrow (\mathbb{C}, \mathbb{C}^*)$ è un'equivalenza omotopica di coppie, $k^* : H^*(V, M_0) \rightarrow H^*(F, F_0)$ è un isomorfismo. Se dotiamo il fibrato ξ dell'orientazione naturale, allora k^* manda generatori positivi in generatori positivi. Abbiamo così la seguente inclusione di coppie con $k = jqi$:

$$(F, F_0) \xrightarrow{i} (E, E_0) \xrightarrow{q} (M', M) \xrightarrow{j} (V, M_0)$$

In coomologia si ottiene il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^2(V, M_0) & \xrightarrow{j^*} & H^2(M', M) & \xrightarrow{q^*} & H^2(E, E_0) & \xrightarrow{i^*} & H^2(F, F_0) \\
 \uparrow \delta & & \uparrow \delta & & & & \\
 H^1(M_0) & \xrightarrow{i_0^*} & H^1(M) & & & &
 \end{array}$$

Siccome $i^*q^*j^* = k^*$ è un isomorfismo e, come abbiamo visto sopra, $\delta \langle \eta_0 \rangle$ genera $H^2(V, M_0)$, segue che $i^*q^*j^*\delta \langle \eta_0 \rangle = i^*q^*\delta[\eta_0]$ genera $H^2(F, F_0)$. Per cui la restrizione di $q^*\delta[\eta_0]$ è un generatore di $H^2(F, F_0)$ per ogni fibra. Questo caratterizza la classe di Thom u del fibrato ξ , per cui l'asserto è provato. \square

Sia $H \in \mathcal{A}'$. Allora η_H dà una classe di coomologia $[\eta_H]'$ in $H^1(M')$. Questo implica che, considerando la mappa $i : M \rightarrow M'$, si ha $i^*[\eta_H]' = [\eta_H]$. Sia $\alpha_{H_0 \cap H}$ la restrizione di $\alpha_H : M_H \rightarrow \mathbb{C}^*$ ad H_0 : $\alpha_{H_0 \cap H} = \alpha_H|_{H_0}$. Sia infine $[\eta_{H_0 \cap H}] \in H^1(M'')$ la classe di coomologia della 1-forma razionale

$$\eta_{H_0 \cap H} = \frac{1}{2\pi i} \frac{d\alpha_{H_0 \cap H}}{\alpha_{H_0 \cap H}}$$

Lemma 5.8. *Sia $H \in \mathcal{A}'$. Allora $z^*q^*[\eta_H]' = [\eta_{H_0 \cap H}]$. Qui $q : E \rightarrow M'$ è l'inclusione dell'intorno tubulare di M'' e $z : M'' \rightarrow E$ è la sua sezione nulla.*

Dimostrazione. Si noti che $qz : M'' \rightarrow M'$ è la mappa di inclusione. Perciò il pull-back di $[\eta_H]'$ mediante qz è uguale proprio a $\eta_{H_0 \cap H}$. \square

Lemma 5.9. *Sia $H \in \mathcal{A}'$ e sia δ la mappa coomologica usata nella dimostrazione del Corollario 5.5. Allora per ogni $[a] \in H^k(M)$ si ha*

$$\delta([a] \cup [\eta_H]) = \delta[a] \cup [\eta_H]'$$

Dimostrazione. Dalla commutatività del diagramma

$$\begin{array}{ccccc}
H^k(M) \times H^1(M') & \xrightarrow{id \otimes i^*} & H^k(M) \times H^1(M) & \xrightarrow{\cup} & H^{k+1}(M) \\
\downarrow \delta \times id & & & & \downarrow \delta \\
H^{k+1}(M', M) \times H^1(M') & \rightarrow & \xrightarrow{\cup} & \rightarrow & H^{k+2}(M', M)
\end{array}$$

si ottiene $\delta([a] \cup i^*[\eta_H]') = \delta[a] \cup [\eta_H]'$. Inoltre abbiamo già notato che $i^*[\eta_H]' = [\eta_H]$, da cui segue l'asserto. \square

Il nostro prossimo obiettivo è quello di determinare la struttura di $H^*(M)$. Si ricordino i moduli $R_k(\mathcal{A})$ della Definizione 4.96, la mappa dei residui dal Lemma 4.104 e la sequenza esatta del Teorema 4.106. Sia ora $\mathcal{K} = \mathbb{Z}$.

Lemma 5.10. *Esiste un diagramma commutativo di sequenze esatte le cui mappe verticali $\eta : R_k(\mathcal{A}) \rightarrow H^k(M)$ sono date da $\eta(\omega_H) = [\eta_H]$:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \rightarrow & R_{k+1}(\mathcal{A}') & \xrightarrow{i} & R_{k+1}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{j} & R_k(\mathcal{A}'') & \rightarrow & 0 \\
& & \downarrow \eta' & & \downarrow \eta & & \downarrow \eta'' & & \\
\dots & \rightarrow & H^{k+1}(M') & \xrightarrow{i^*} & H^{k+1}(M) & \xrightarrow{\phi} & H^k(M'') & \rightarrow & \dots
\end{array}$$

Dimostrazione. La commutatività del quadrato di sinistra è immediata. Per provare la commutatività del quadrato di destra, sia $\gamma = \omega_{H_0} \omega_{H_1} \dots \omega_{H_k}$. Vogliamo $\phi\eta(\gamma) = \eta''j(\gamma)$. Si richiami dal Lemma 5.4 che $\phi = z^*r^{-1}q^*\delta$. Perciò si ha

$$\begin{aligned}
\phi\eta(\gamma) &= \phi([\eta_{H_0}] \cup [\eta_{H_1} \dots \eta_{H_k}]) \\
&= z^*r^{-1}q^*(\delta[\eta_0] \cup [\eta_{H_1} \dots \eta_{H_k}]') \\
&= z^*r^{-1}(q^*\delta[\eta_0] \cup q^*[\eta_{H_1} \dots \eta_{H_k}]') \\
&= z^*r^{-1}(u \cup q^*[\eta_{H_1} \dots \eta_{H_k}]') \\
&= z^*q^*[\eta_{H_1} \dots \eta_{H_k}]' \\
&= [\eta_{H_0 \cap H_1} \dots \eta_{H_0 \cap H_k}]
\end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato alcuni dei lemmi precedenti e il fatto che $u \cup \omega = r\omega$. \square

Teorema 5.11. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento complesso non vuoto. Allora:*

- (1) la mappa $\eta : R_k(\mathcal{A}) \rightarrow H^k(M)$ è un isomorfismo per $k \geq 0$;
- (2) gli $H^k(M)$ sono gruppi abeliani liberi;
- (3) per $k \geq 0$ esistono sequenze esatte corte

$$0 \rightarrow H^{k+1}(M') \xrightarrow{i^*} H^{k+1}M \xrightarrow{\phi} H^k(M'') \rightarrow 0$$

Dimostrazione. Proviamo (1) tramite una doppia induzione su l e $n = |\mathcal{A}|$. L'asserto è valido per tutti gli 1-arrangiamenti e per tutti gli l -arrangiamenti con $|\mathcal{A}| = 1$. L'ipotesi induttiva assume che l'asserto sia valido per tutti gli m -arrangiamenti con $m < l$ e per tutti gli l -arrangiamenti con $|\mathcal{A}| < n$. Perciò η' ed η'' sono isomorfismi. Segue dal Lemma 5.10 che anche η è un isomorfismo. Questo completa la dimostrazione di (1). A questo punto il Corollario 4.107 implica (2) e il Lemma 5.10 dimostra (3). \square

Corollario 5.12. *L'anello di coomologia intera $H^*(M)$ è generato da 1 e dalle classi $[\eta_H]$ per $H \in \mathcal{A}$.*

Teorema 5.13. *La mappa suriettiva $\omega_H \rightarrow [\eta_H] = [(1/2\pi i)\omega_H]$ induce un isomorfismo di algebre graduate $R(\mathcal{A}) \simeq H^*(M(\mathcal{A}))$.*

Questo risultato mostra che le uniche relazioni in coomologia fra le classi $[\eta_H]$ sono quelle di carattere algebrico che provengono dall'immersione in $\Omega(V)$. Abbiamo mostrato nel Teorema 4.105 che esiste un isomorfismo di algebre $A(\mathcal{A}) \simeq R(\mathcal{A})$ che manda a_H in ω_H . Possiamo applicare questo risultato nel caso in cui $\mathcal{K} = \mathbb{Z}$ per ottenere un teorema di struttura per $H^*(M; \mathbb{Z})$ in termini di generatori e ideale delle relazioni.

Teorema 5.14. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento complesso e sia $A = A(\mathcal{A})$. La mappa $a_H \rightarrow [\eta_H] = [(1/2\pi i)\omega_H]$ induce un isomorfismo $A \rightarrow H^*(M)$ di \mathbb{Z} -algebre graduate.*

Questo isomorfismo rappresenta il collegamento fra la fattorizzazione di $A(\mathbf{c}\mathcal{A})$ del Teorema 4.79, $A(\mathbf{c}\mathcal{A}) \simeq (\mathcal{K} + \mathcal{K}a_0) \otimes A(\mathcal{A})$, e la fattorizzazione di tipo topologico della seguente proposizione.

Proposizione 5.15. *Sia $p : \mathbb{C}^{l+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^l(\mathbb{C})$ il fibrato di Hopf con fibra \mathbb{C}^* , che identifica $z \in \mathbb{C}^{l+1}$ con λz per $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Sia poi \mathcal{A} un l -arrangiamento affine e sia $\mathbf{c}\mathcal{A}$ il cono su \mathcal{A} . La restrizione del fibrato di Hopf $p : M(\mathbf{c}\mathcal{A}) \rightarrow M(\mathcal{A})$ è un fibrato banale, cosicchè*

$$M(\mathbf{c}\mathcal{A}) \approx M(\mathcal{A}) \times \mathbb{C}^*$$

Dimostrazione. L'identificazione $p(M(\mathbf{c}\mathcal{A})) = M(\mathcal{A})$ è immediata dalla Definizione 2.16. Sia $K_0 \in \mathbf{c}\mathcal{A}$. La restrizione di p ad $M_{K_0} = \mathbf{c}V \setminus \{K_0\} = \mathbb{C}^{l+1} \setminus \{K_0\}$ ha come spazio base $\mathbb{P}^l \setminus \mathbb{P}^{l-1} \approx \mathbb{C}^l$. Perciò $p : M_{K_0} \rightarrow \mathbb{C}^l$ è un fibrato banale e $p : M(\mathbf{c}\mathcal{A}) \rightarrow M(\mathcal{A})$ ne è semplicemente una restrizione. \square

5.2 Il Lemma di Brieskorn

Lemma 5.16. (Brieskorn) *Sia \mathcal{A} un arrangiamento complesso non vuoto. Per $X \in L(\mathcal{A})$, sia $M_X = M(\mathcal{A}_X)$. Per $k \geq 0$ esistono isomorfismi*

$$\theta_k : \bigoplus_{X \in L_k} H^k(M_X) \rightarrow H^k(M)$$

indotti dalle mappe di inclusione $i_X : M \rightarrow M_X$

Dimostrazione. Per il Teorema 5.14, esiste un isomorfismo $A(\mathcal{A}) \rightarrow H^*(M(\mathcal{A}))$ di \mathbb{Z} -algebre graduate. Per il Corollario 4.27 si hanno isomorfismi naturali per $k \geq 0$

$$\bigoplus_{X \in L_k} A_k(\mathcal{A}_X) \rightarrow A_k(\mathcal{A})$$

Perciò si hanno isomorfismi naturali per $k \geq 0$

$$\bigoplus_{X \in L_k} H^k(M(\mathcal{A}_X)) \rightarrow H^k(M(\mathcal{A}))$$

come richiesto. \square

Definizione 5.17. Siano $b_p(M) = \text{rank}H^p(M)$ i numeri di Betti di M . Il polinomio di Poincaré del complemento è

$$\text{Poin}(M(\mathcal{A}), t) = \sum_{p \geq 0} b_p(M) t^p$$

Teorema 5.18. Sia \mathcal{A} un arrangiamento complesso. Allora

$$\text{Poin}(M(\mathcal{A}), t) = \pi(\mathcal{A}, t)$$

Dimostrazione. Se \mathcal{A} è vuoto, allora $M(\mathcal{A}) = V$ e $\text{Poin}(M(\mathcal{A}), t) = 1$. Segue dal Teorema 5.11 che $\text{Poin}(M(\mathcal{A}), t)$ soddisfa la stessa formula di ricorsione di $\pi(\mathcal{A}, t)$ secondo deletion-restriction. Da questo segue che sono uguali. \square

Proposizione 5.19. Sia \mathcal{A} un l -arrangiamento reale definito da $Q(\mathcal{A})$. Allora il complemento $M(\mathcal{A})$ è una varietà algebrica.

Dimostrazione. Si consideri \mathbb{R}^{l+1} con coordinate x_0, x_1, \dots, x_l . Si ha che $M(\mathcal{A})$ è composto dagli $x = (x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{R}^l$ tali che $Q(\mathcal{A})(x) \neq 0$. Per cui, per ogni $x \in M(\mathcal{A})$ esiste (ed è unico) un $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $x_0 = 1/Q(\mathcal{A})(x)$. Allora

$$M(\mathcal{A}) \approx \{x \in \mathbb{R}^{l+1} \mid x_0 Q(\mathcal{A}) = 1\}$$

In questo modo il complemento risulta omeomorfo ad una ipersuperficie. \square

Corollario 5.20. (M-property) Sia $(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}})$ un arrangiamento reale e sia $(\mathcal{A}_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}})$ la sua complessificazione. Siano $M_{\mathbb{R}} = M(\mathcal{A}_{\mathbb{R}})$ e $M_{\mathbb{C}} = M(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})$ i complementi reale e complesso. Siano $b_i(M_{\mathbb{R}})$ e $b_i(M_{\mathbb{C}})$ i loro rispettivi numeri di Betti con coefficienti in $\mathbb{Z}/2$. Allora $M_{\mathbb{R}}$ gode della proprietà M :

$$\sum_{i \geq 0} b_i(M_{\mathbb{R}}) = \sum_{i \geq 0} b_i(M_{\mathbb{C}})$$

Dimostrazione. Siccome $M_{\mathbb{R}}$ è un'unione disgiunta di camere ciascuna delle quali è contrattile, $b_i(M_{\mathbb{R}}) = 0$ per $i > 0$ e $b_0(M_{\mathbb{R}})$ corrisponde al numero delle camere. Per il Teorema 3.64 si ha $b_0(M_{\mathbb{R}}) = \pi(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}, 1)$. Per il Teorema 5.18 troviamo

$$\sum_{i \geq 0} b_i(M_{\mathbb{C}}) = \text{Poin}(M(\mathcal{A}_{\mathbb{C}}), 1) = \pi(\mathcal{A}_{\mathbb{C}}, 1)$$

Il risultato segue dal fatto che $L(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}) = L(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})$. \square

Riferimenti bibliografici

- [1] Richard P. Stanley: An Introduction to Hyperplane Arrangements, American Mathematical Society
- [2] Peter Orlik, Hiroaki Terao: Arrangements of Hyperplanes, Springer
- [3] Raoul Bott, Loring W. Tu: Differential Forms in Algebraic Topology, Springer