

**Alma Mater Studiorum - Università di Bologna**

---

**Scuola di Scienze**

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Corso di Laurea in Fisica

**Fenomeni emergenti di sincronizzazione in  
network dinamici di oscillatori**

Tesi di laurea

Presentata da:

**Matteo Falcioni**

Relatore:

**Prof.**

**Armando Bazzani**

---

Anno Accademico 2021-2022

*Ai miei genitori per avermi supportato,  
e a me stesso per aver creduto nelle mie  
capacità.*

*“The most incomprehensible thing about the world is that it is comprehensible.”*

*-Albert Einstein*

## **Abstract**

In questa tesi viene modellizzato un peculiare comportamento emergente di auto-organizzazione in natura: la sincronizzazione dei flash luminosi degli sciame di lucciole. Al fine di studiare tale fenomeno vengono inizialmente analizzati dei modelli proposti in letteratura per simulare il fenomeno del flocking: in particolare, ci si sofferma sull'analisi delle differenti conseguenze tra le assunzioni di interazione metrica o topologica tra gli individui negli stormi. Queste due modalità di interazione tra gli elementi del gruppo vengono poi traslate nell'ambito della sincronizzazione. Infatti prendendo spunto dal modello di Kuramoto, il quale descrive la transizione ad uno stato sincrono di insiemi di oscillatori debolmente accoppiati, sono state prodotte delle simulazioni al computer mettendo a confronto le proprietà dinamiche dei due tipi di interazione relativamente alla sincronizzazione dei flash degli sciame di lucciole. Il risultato è che i modelli risultano adeguati ad una descrizione semplificata del fenomeno, con alcune caratteristiche in comune con l'ambito del flocking, ed altre che risultano invece peculiari per questa specifica applicazione.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
1.1	La sincronizzazione delle lucciole . . . . .	2
1.2	Il flocking e la sincronizzazione . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Dinamica collettiva degli stormi</b>	<b>6</b>
2.1	Il modello di Vicsek . . . . .	6
2.2	Il modello di Cucker e Smale . . . . .	7
2.3	Evidenze sperimentali di interazioni topologiche . . . . .	10
2.3.1	Due tipi di interazione . . . . .	10
2.3.2	Risultati empirici . . . . .	11
2.3.3	Perché proprio 7? . . . . .	12
2.4	Confronto dei vari tipi di interazione . . . . .	13
2.4.1	Modelli numerici . . . . .	13
2.4.2	Risultati . . . . .	14
2.4.3	Instabilità geometriche . . . . .	15
<b>3</b>	<b>La sincronizzazione nei sistemi dinamici</b>	<b>18</b>
3.1	Il modello di Kuramoto . . . . .	18
3.2	Esistenza del valore di Accoppiamento Critico . . . . .	19
3.2.1	Parametri di Campo Medio . . . . .	19
3.2.2	Soluzioni stazionarie . . . . .	20
3.2.3	Risoluzione per il parametro d'ordine e $K_c$ . . . . .	21
3.2.4	La crescita del parametro d'ordine . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Simulazioni numeriche di un modello di sincronizzazione</b>	<b>24</b>
4.1	Generalità . . . . .	24
4.2	Discussione dei risultati . . . . .	26
4.3	Conclusioni . . . . .	31

# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 La sincronizzazione delle lucciole

I fenomeni di sincronizzazione costituiscono un esempio affascinante e molto diffuso in natura di fenomeni collettivi emergenti di auto-organizzazione; un meraviglioso esempio è fornito da alcune specie di lucciole, le quali hanno catturato nel corso dei secoli l'attenzione dei viaggiatori occidentali nell'Asia sud-orientale. Questi tornavano dai loro viaggi narrando di enormi sciami di lucciole che emettevano flash luminosi all'unisono, causando lunghi lampi di luce nell'oscurità.

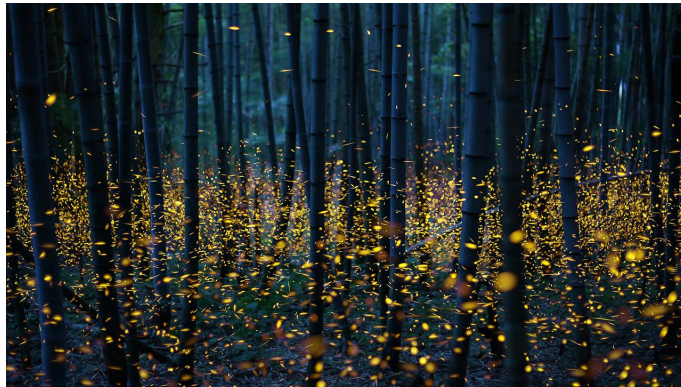
La produzione di luce da parte di organismi viventi è detta *bioluminescenza*. Le lucciole esemplificano perfettamente tale fenomeno, ma non sono l'unico caso nel regno animale: ad esempio i fenomeni di bioluminescenza si possono osservare in alcune specie di funghi, pesci, gamberi, meduse, plankton, coleotteri e moscerini. La bioluminescenza è causata da reazioni chimiche molto efficienti, le quali risultano nel rilascio di luce accompagnata da piccolissime emissioni di calore. Le lucciole combinano Luciferina ed Ossigeno con l'enzima Luciferase presente nelle loro lanterne (parte del loro addome) per produrre luce "fredda", chiamata così a causa del fatto che circa il 100% dell'energia è convertita in radiazione luminosa. In contrasto, l'energia prodotta da una lampadina ad incandescenza si divide approssimativamente in un 10% di luce e un 90% di calore emesso.

Ciascuna specie di lucciole possiede un pattern luminoso caratteristico, il quale aiuta maschi e femmine della stessa specie a riconoscersi e trovarsi. La maggior parte delle specie produce una luce verde-gialla, ma esistono altre che emettono luce bianca o blu. I maschi solitamente flashano durante il volo, mentre le femmine, che sono solitamente stazionarie, flashano in riposta.

Il comportamento particolare di questi insetti è stato studiato da vari scienziati nel corso degli anni; in particolare venne analizzato dettagliatamente dal biologo J.B. Buck [1] che nel 1935 stabilì dopo numerose osservazioni che i flash sincroni delle lucciole erano finalizzati a facilitare l'accoppiamento, in quanto le femmine della specie riuscivano ad individuare più facilmente i maschi grazie ad un'emissione di luce sincrona da parte di questi. Buck affermò nella sua ricerca che i flash continuavano per ogni lucciola finché l'accoppiamento non fosse avvenuto, oppure finché non vi erano più femmine non fecondate che potessero rispondere al richiamo dei maschi sincronizzati.

Non tutte le lucciole sincronizzano i loro flash: solamente alcune specie adottano

questo comportamento, come ad esempio le *Photinus Carolinus* (Fig. 1.1), molto diffuse in Tennessee negli USA, o le *Pteroptyx Malaccae* il cui habitat naturale è costituito dalla foresta delle Mangrovie in Thailandia e Malesia.



**Figura 1.1:** Flash sincroni di uno sciame di *Photinus Carolinus* presso il Great Smoky Mountains National Park, Tennessee (da [www.ecowatch.com](http://www.ecowatch.com)).

Recenti studi hanno dimostrato inoltre che le lucciole lampeggiano anche per scoraggiare i pipistrelli predatori [2]. Infatti i pipistrelli non sono in realtà ciechi come suggerisce il luogo comune su di loro, ma possono vedere, spesso anche in maniera efficiente al fine di cacciare. Al contempo, per loro le lucciole non hanno assolutamente un buon sapore: dopo averle ingerite, spesso soffrono di conati di vomito e scuotono il capo in segno di disgusto. Dunque le lucciole segnalano tramite i loro flash il loro cattivo gusto, in modo da garantire la propria sopravvivenza risparmiando ai predatori un pasto sgradevole.

Al di là dello scopo della sincronizzazione dei flash, non fu fino alla fine degli anni '60 del 1900 che si cominciò a capire che il ritmo degli sciami non era deciso da una singola lucciola "conduttrice" quanto piuttosto emergesse da alcune semplici interazioni tra tutte loro. In qualche modo, l'oscillatore in ogni lucciola (presumibilmente una determinata area neuronale del loro cervello adibita all'emissione dei flash) si corregge in modo da emettere luce all'unisono con tutti gli altri.

Essendo un esempio lampante di sincronizzazione in natura, i flash sincroni degli sciami di lucciole sono stati spesso citati come ispirazione per lo studio teorico di sistemi di oscillatori accoppiati; allo stesso tempo però tali modelli risultano inefficaci nello spiegare una vasta gamma di caratteristiche naturali del fenomeno.

Uno studio recente che ha tentato di fornire una solida base empirica per i modelli teorici è stato quello condotto da Sarfati et al.[3]: il gruppo di studiosi è riuscito tramite delle telecamere a mappare in tre dimensioni i pattern luminosi di sciami di *Photinus Carolinus* all'interno del Great Smoky Mountains National Park (USA).

Ciò che hanno scoperto è che i flash delle lucciole nello sciame si propagano a cascata, generando delle "onde di flash" piuttosto che un unico flash all'unisono. Tale dato suggerisce che l'interazione che genera la sincronizzazione debba essere necessariamente locale, ossia ogni lucciola flasha in risposta alle sue vicine.

Nonostante questo interessante lavoro offra nuove informazioni sul particolare comportamento di questi meravigliosi animali, molti fattori rimangono sconosciuti: uno fra tutti, la dipendenza dei flash di ciascuna lucciola dalla distanza dalle sue vicine e dalla molteplicità di segnali provenienti da diversi individui del gruppo.

Per questo motivo, l'obiettivo principale di questa tesi è stato lo studio delle modalità di interazione tramite le quali questa specie di insetti riesce a raggiungere la sincronizzazione, ispirandosi al noto modello di Kuramoto, riguardante l'organizzazione complessiva di insiemi di oscillatori accoppiati [4].

La particolarità di questo lavoro sta nel fatto che i modelli di interazione studiati sono gli stessi che sono risultati efficaci nello studio dell'organizzazione di un altro sistema di individui interagenti: quello degli uccelli nei loro stormi.

## 1.2 Il flocking e la sincronizzazione

L'analisi della dinamica collettiva di vasti insiemi di animali, come potrebbero essere stormi di uccelli (Fig. 1.2), sciame di insetti o banchi di pesci, è un problema tutt'ora aperto in diversi ambiti di ricerca. Si tratta infatti di fenomeni collettivi di auto-organizzazione molto ricorrenti in natura, che offrono vari spunti per diverse applicazioni negli ambiti più diversi. Spesso per indicare questi comportamenti si utilizza il termine *flocking*, dall'inglese *flock* (stormo).



**Figura 1.2:** stormo di Storni al crepuscolo (da [www.champ-magazine.com](http://www.champ-magazine.com)).

L'elemento affascinante di tali processi biologici è che, nonostante l'intelligenza dei singoli individui dell'insieme sia limitata, essi riescano comunque ad ottenere una dinamica collettiva molto complessa tramite alcune semplici regole di interazione. Le strutture dinamiche spettacolari realizzate da questi gruppi di animali possono avere finalità diverse: spesso sorgono al fine di proteggere il gruppo dai predatori, oppure a volte per favorire l'accoppiamento, oppure per una combinazione di entrambi gli effetti.

Ma qual è il collegamento tra l'organizzazione degli stormi nei cieli al crepuscolo e la sincronizzazione degli sciame di lucciole nella foresta delle Mangrovie? Ciò che assimila tali eventi è il fatto che ricadono entrambi nella categoria di fenomeni di auto-organizzazione di ensemble di molti individui, uno degli argomenti di studio della Fisica dei Sistemi Complessi: come tali, possono essere accomunati in alcune caratteristiche, e nonostante il risultato finale e lo scopo delle strutture organizzate sia sicuramente differente, le modalità di coordinamento ed interazione tra gli agenti del gruppo possiedono un'applicabilità trasversale.



Per tale motivo vengono di seguito presentati alcuni modelli dinamici finalizzati alla descrizione del moto degli stormi e all'analisi delle regole che guidano l'interazione microscopica tra gli individui del gruppo; dopodiché, i modelli di interazione che si sono rivelati efficaci nella spiegazione di tali comportamenti vengono applicati, tramite alcune simulazioni numeriche, alla sincronizzazione degli sciame di lucciole.

# Capitolo 2

## Dinamica collettiva degli stormi

Per investigare la dinamica collettiva di insiemi biologici come stormi e sciami sono stati proposti in tempi recenti svariati modelli, alcuni dei quali sono risultati più efficaci di altri.

La maggior parte di essi si fondava sull'assunzione che le interazioni tra gli elementi dell'insieme dovessero essere dipendenti dalla distanza tra di essi; tale ipotesi, che potrebbe sembrare molto naturale, in realtà si è rivelata errata (almeno in parte) per alcuni sistemi biologici. Infatti alcuni studi riportano l'evidenza di un'interazione topologica tra gli individui del gruppo, ossia indipendente dalla distanza spaziale effettiva [5].

Ad ogni modo, non è complesso modificare i modelli esistenti al fine di rispettare tale presupposto, ed eventualmente testare quale tra i due tipi di interazione sia la più biologicamente accurata.

Uno dei primi modelli riguardanti il fenomeno di organizzazione collettiva in un insieme di Self Propelled Particles (spesso indicate con la sigla *SPP*) è il modello di Vicsek[6]; esso è uno dei più citati nella letteratura scientifica riguardante il flocking, ed è il punto di partenza per svariati modelli più complessi.

### 2.1 Il modello di Vicsek

Tamás Vicsek propose un modello di flocking relativamente semplice, con il fine ultimo di investigare fenomeni di clustering, trasporto e transizioni di fase in sistemi non all'equilibrio. Il suo modello si basa su un'unica, semplice assunzione:

*Ad ogni step temporale, una data particella in moto con velocità costante in modulo assume la direzione di movimento media delle particelle in un suo intorno di raggio  $r$ , ed è perturbata nel suo moto da fluttuazioni casuali.*

Nelle simulazioni eseguite da Vicsek,  $N$  particelle venivano distribuite su un piano in una scatola di lato  $L$  (con condizioni al contorno periodiche) con velocità identiche in modulo,  $v$ , e direzioni  $\phi$  distribuite in maniera casuale. La posizione della particella  $i$ -esima veniva aggiornata ad ogni step temporale secondo la legge

$$\vec{x}_i(t + \Delta t) = \vec{x}_i(t) + \vec{v}_i(t)\Delta t, \quad (2.1.1)$$

mentre le direzioni venivano aggiornate secondo l'equazione

$$\phi_i(t + \Delta t) = \langle \phi(t) \rangle_r + \Delta \phi, \quad (2.1.2)$$

dove  $\langle \phi(t) \rangle_r$  indica la direzione media delle particelle (inclusa la particella  $i$ -esima) all'interno del raggio di interazione  $r$  attorno alla particella data;  $\Delta \phi$  rappresenta invece una variabile aleatoria distribuita uniformemente nel range  $[-\tau/2, \tau/2]$ . I parametri che possono influire sul comportamento delle  $N$  particelle sono dunque  $\tau, v$  e la densità  $\rho = N/L^2$ .

Il risultato più interessante delle simulazioni consisteva nel fatto che per grandi densità e rumore debole il moto dell'insieme tendeva a divenire ordinato macroscopicamente, cioè tutte le particelle tendevano a muoversi nella stessa direzione.

In seguito, tale modello è stato ampliato da Vicsek et al[7] al caso tridimensionale; le equazioni del modello possono essere riscritte in tre dimensioni nella forma

$$\begin{cases} \vec{v}_i(t + \Delta t) = v_0 \Theta \left[ \Theta \left( \frac{1}{N_i} \sum_{j \in \mathcal{D}(i)} \vec{v}_j(t) \right) + \tau \vec{\epsilon}_i(t) \right] \\ \vec{x}_i(t + \Delta t) = \vec{x}_i(t) + \vec{v}_i(t) \Delta t. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

In questo caso  $\Theta$  è la funzione di normalizzazione  $\Theta(\vec{x}) = \vec{x}/x$ ,  $v_0$  è la velocità (costante) delle particelle e  $\vec{\epsilon}_i$  è un versore casuale  $\delta$ -correlato rispetto all'indice delle particelle e rispetto al tempo, e uniformemente distribuito su una sfera unitaria. Il parametro  $\tau$  regola la quantità di rumore a cui sono soggette le particelle (determina il raggio effettivo della sfera). Infine,  $\mathcal{D}(i)$  indica l'insieme degli  $N_i$  vicini con cui la particella  $i$ -esima interagisce, vale a dire tutte le particelle all'interno dell'area circolare di raggio  $r$  fissato.

## 2.2 Il modello di Cucker e Smale

Uno dei modelli che prende spunto dal modello di Vicsek è il modello di Cucker e Smale[8]. Esso è stato proposto dai matematici Felipe Cucker e Steve Smale per studiare il raggiungimento di un consenso in un vasto insieme di elementi interagenti, privo di un controllo centralizzato. I due ricercatori hanno sviluppato una trattazione analitica considerando un insieme di  $N$  Self-Propelled Particles sia nel caso in cui il parametro temporale venga considerato come continuo, sia in quello in cui esso sia discretizzato.

Il modello di C-S postula il seguente comportamento: in uno stormo di  $N$  uccelli, ogni animale modifica la propria velocità sommando ad essa una media pesata delle differenze tra la sua velocità e quelle degli altri uccelli. Dunque, al tempo  $t \in \mathbb{N}$ , per l'uccello  $i$ -esimo vale

$$\vec{v}_i(t + \Delta t) - \vec{v}_i(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij} (\vec{v}_j(t) - \vec{v}_i(t)). \quad (2.2.1)$$

I pesi  $\{a_{ij}\}$  sono gli elementi della matrice di adiacenza  $A$ ; essi quantificano il modo in cui gli uccelli interagiscono tra loro. Si assume che questa interazione sia dipendente

dalla distanza tra gli uccelli; ciò viene esplicitato tramite una funzione *non crescente* della distanza,  $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , tale che le entrate di  $A$  possano essere espresse come

$$a_{ij} = \eta(\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|^2). \quad (2.2.2)$$

Useremo dunque la notazione  $A_x$  per indicare la matrice di adiacenza, esplicitando con il pedice  $x$  il fatto che i suoi elementi sono funzioni delle distanze tra gli uccelli, variabili in  $t$ .

Per dei parametri fissati  $\chi, \sigma > 0$  e  $\beta \geq 0$  si considera nel modello

$$\eta(y) = \frac{\chi}{(\sigma^2 + y)^\beta}. \quad (2.2.3)$$

L'equazione (2.2.1) può essere riscritta in una forma più concisa: definiamo la matrice diagonale  $D_x$  il cui elemento  $i$ -esimo sulla diagonale è  $d_i = \sum_{j \leq N} a_{ij}$  e consideriamo la matrice laplaciana  $L_x = D_x - A_x$ . Allora avremo:

$$\begin{aligned} \vec{v}_i(t+1) - \vec{v}_i(t) &= - \sum_{j=1}^N a_{ij}(\vec{v}_i(t) - \vec{v}_j(t)) \\ &= - \left( \sum_{j=1}^N a_{ij} \right) \vec{v}_i(t) + \sum_{j=1}^N a_{ij} \vec{v}_j(t) \\ &= -[D_x \vec{v}(t)]_i + [A_x \vec{v}(t)]_i \\ &= -[L_x \vec{v}(t)]_i \end{aligned}$$

Notare che la scrittura  $A_x \vec{v}(t)$  non ha il significato di matrice  $N \times N$  che agisce su  $\mathbb{R}^N$ ; piuttosto,  $A_x$  è un operatore lineare che agisce su  $(\mathbb{R}^3)^N$  mappando il vettore  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N)$  in  $(a_{i1}\vec{v}_1 + \dots + a_{iN}\vec{v}_N)_{i \leq N}$ . Lo stesso vale per  $L_x$ .

Aggiungendo in maniera naturale un'equazione per la variazione delle posizioni otteniamo:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t + \Delta t) &= \vec{x}(t) + \Delta t \vec{v}(t) \\ \vec{v}(t + \Delta t) &= (\mathbf{1} - \Delta t L_x) \vec{v}(t). \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Se invece consideriamo il modello in tempo continuo, ossia nel limite per cui  $\Delta t \rightarrow 0$ , le equazioni assumeranno la forma

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= \vec{v} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= -L_x \vec{v}. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Il risultato più importante di questo modello consiste in un teorema che attesta le condizioni affinché le velocità degli uccelli convergano ad un valore comune e la distanza tra gli uccelli rimanga limitata, sia per il caso a tempo discreto sia per quello a tempo continuo.

In particolare, tale convergenza non è ovvia a causa del fatto che la matrice laplaciana del modello,  $L_x$ , è dipendente dal tempo e dunque non è costante. Se lo fosse

stata, allora la convergenza delle velocità ad un valore comune sarebbe stata automaticamente garantita dalle proprietà dello spettro delle matrici Laplaciane; infatti l'evoluzione temporale di  $\vec{v}$  sarebbe stata descritta dalla semplice equazione

$$\vec{v}(t) = \exp(-tL) \vec{v}(0), \quad (2.2.6)$$

che possiede una soluzione stazionaria  $\vec{v}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \vec{v}^*$ .

Ci focalizzeremo in quel che segue nell'analisi del teorema di C-S per il modello a tempo continuo, essendo questo più consono alla descrizione di un sistema fisico come uno stormo di uccelli.

Il risultato di C-S, come già preannunciato, è quello di definire le condizioni per la convergenza dell'insieme ad una soluzione stazionaria.

Per comodità, si definiscono gli osservabili:

$$\begin{aligned} \Gamma_x &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|)^2 \\ \Lambda_v &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (\|\vec{v}_i - \vec{v}_j\|)^2, \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

i quali esprimono il grado di differenza delle posizioni degli uccelli e delle loro velocità.

Nella seguente discussione viene fissata una soluzione  $(\vec{x}, \vec{v}) \in (\mathbb{E}^3)^N$  per il sistema di equazioni (2.2.5) al tempo  $t \in \mathbb{R}_+$ . Per indicare che gli osservabili (2.2.7) verranno seguiti lungo le soluzioni, si usa la notazione  $\Gamma(\vec{x}(t)) = \Gamma(t)$ ,  $\Lambda(\vec{v}(t)) = \Lambda(t)$ ; inoltre si denotano con  $\Gamma(\vec{x}(0)) = \Gamma_0$ ,  $\Lambda(\vec{v}(0)) = \Lambda_0$  gli osservabili calcolati in corrispondenza delle condizioni iniziali. Infine, il parametro  $\nu$  è una grandezza che limita inferiormente le norme che compaiono negli osservabili  $\Gamma$  e  $\Lambda$ .

**Teorema:** Si assumano  $\chi, \sigma > 0$ ,  $\beta \geq 0$  e

$$a_{ij} = \frac{\chi}{(\sigma^2 + (\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|)^2)^\beta}$$

e si assuma la validità di una delle seguenti ipotesi:

1.  $\beta < \frac{1}{2}$
2.  $\beta = \frac{1}{2}$  e  $\Lambda_0 < \frac{(\nu\chi)^2}{8}$
3.  $\beta > \frac{1}{2}$  e  $\left[ \left(\frac{1}{2\beta}\right)^{\frac{1}{2\beta-1}} - \left(\frac{1}{2\beta}\right)^{\frac{2\beta}{2\beta-1}} \right] \left(\frac{(\nu\chi)^2}{8\Lambda_0}\right)^{\frac{1}{2\beta-1}} > 2\Gamma_0 + \sigma^2$

Allora, esiste una costante  $B_0$  (indipendente da  $t$ ) tale che  $\Gamma(t) \leq B_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$ . Inoltre, si ha  $\Lambda(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \infty$ . Infine, esiste per ogni coppia di individui  $i, j$  un vettore  $\vec{x}_{ij}^*$  tale che  $\vec{x}_i - \vec{x}_j \rightarrow \vec{x}_{ij}^*$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Il teorema detta dunque le condizioni affinché sia garantita la convergenza dello stormo ad un'unica velocità comune; è necessario rimarcare che tali restrizioni dipendono soltanto dallo stato iniziale dello stormo, esplicitato dagli osservabili  $\Gamma$  e  $\Lambda$ , e da nessun altro parametro.

Se analizziamo i vari casi singolarmente, possiamo affermare che la convergenza ad uno stato stazionario dipende fortemente dal valore del parametro  $\beta$ , ossia da quanto rapidamente l'interazione tra gli elementi dell'insieme (ossia le entrate di  $A$ ) tendono a 0. Per  $\beta$  sufficientemente piccolo, ossia al di sotto del valore limite di  $1/2$ , la convergenza è addirittura garantita a prescindere dalle condizioni iniziali, visto che i termini  $a_{ij}$  descrivono un'influenza molto intensa tra gli individui. Quando invece si ha  $\beta \geq 1/2$ , l'interazione decade troppo velocemente con la distanza relativa; risultano dunque necessarie ulteriori restrizioni per garantire la convergenza.

## 2.3 Evidenze sperimentali di interazioni topologiche

Come già preannunciato, l'assunzione di interazione metrica tra gli individui di uno stormo è stata recentemente messa in dubbio, poiché alcune analisi empiriche del comportamento dinamico dei gruppi di animali hanno mostrato che essa non è la più biologicamente accurata. Di seguito viene presentato uno studio empirico che dimostra come un altro tipo di interazione, l'interazione topologica, sia quella che meglio descrive l'influenza che i membri dell'insieme hanno l'uno sull'altro.

### 2.3.1 Due tipi di interazione

Lo studio in questione è quello di Ballerini et al.[5]. Il gruppo di scienziati ha tentato di sopperire alla scarsità di dati riguardanti la natura delle interazioni microscopiche tra gli individui di uno stormo, in modo da fornire una base empirica per le assunzioni dei modelli analitici proposti per lo studio della dinamica di tali insiemi.

Infatti, le ipotesi teoriche erano spesso generiche e di natura intuitiva, il che lasciava un'enorme libertà di scelta per l'implementazione dei modelli; senza una precisa evidenza sperimentale risultava dunque difficile riuscire a determinare il modello "giusto", vale a dire il più accurato possibile.

Per garantire la coesione osservata in natura negli stormi i vari modelli analitici precedenti allo studio di Ballerini, come ad esempio quello di Cucker e Smale, partivano dall'assunzione che i membri dell'insieme si attraessero tra loro e si allineassero, e che questa interazione decadesse con l'aumentare della **distanza metrica** tra gli individui. Gli animali riescono a valutare le distanze metriche in vari modi, pertanto l'ipotesi di un'interazione metrica sembrava ragionevole.

Ad ogni modo, questa assunzione potrebbe non essere adatta a riprodurre i cambiamenti di densità tipici degli stormi, poiché ci si aspetterebbe che la coesione vada persa quando le distanze mutuali diventano troppo grandi rispetto al range di interazione.

Un'alternativa è fornita dall' **interazione topologica**; la quantità rilevante in questo caso è quanti individui intermedi separano due uccelli interagenti, non quanto lontani essi siano. In questo caso, ogni individuo interagisce con un numero fissato di vicini, a prescindere dalla loro distanza fisica.

La differenza cruciale tra interazione metrica e topologica diventa evidente quando la densità varia: nel caso topologico, se consideriamo ad esempio due uccelli in uno stormo ad una distanza di  $1 m$ , essi si attraggono con la stessa intensità di due individui distanti  $10 m$ , a patto che il numero di membri che separano i due uccelli sia lo stesso. Nel caso metrico invece, due uccelli separati da  $1 m$  di distanza interagiscono maggiormente rispetto a due distanti  $10 m$ . Dunque, nell'ipotesi topologica l'intensità dell'interazione rimane la stessa al variare della densità.

### 2.3.2 Risultati empirici

L'osservazione di partenza dello studio di Ballerini è stata che la distribuzione dei vicini di ogni dato uccello risultasse fortemente anisotropa, ossia essi non erano distribuiti omogeneamente nello spazio, ma per lo più localizzati ai lati dell'uccello di riferimento piuttosto che lungo la direzione del moto.

Notando poi che la distribuzione degli uccelli risultava isotropa lontano dall'individuo di riferimento, è stato dedotto che l'interazione decadde indubbiamente con la distanza. Da qui, l'idea che fosse possibile utilizzare il grado dell'anisotropia nella distribuzione dei vicini come mezzo per studiare la natura dell'interazione.

Per quantificare tale grandezza, è stata definita una funzione  $\gamma(n) = (\vec{W}^{(n)} \cdot \vec{V})^2$ , dove  $\vec{W}^{(n)}$  è un vettore unitario che punta nella direzione di minor addensamento dell' $n$ -esimo primo vicino e  $\vec{V}$  è un altro vettore unitario che punta nella direzione del moto dello stormo. Tramite  $\gamma$  si può misurare fino a che punto la distribuzione spaziale dell' $n$ -esimo vicino più prossimo all'uccello di riferimento è anisotropa: infatti il valore di  $\gamma$  per un'aggregazione isotropa non interagente è pari a  $\gamma^* = 1/3$ , ed è stato osservato nello studio che  $\gamma(n)$  decadeva gradualmente fino al valore  $\gamma^*$  con l'aumentare di  $n$ . Pertanto, per ogni stormo osservato, è stato definito un range di interazione  $n_c$ , dato dal valore di  $n$  per cui  $\gamma(n) = \gamma^*$ .

Ovviamente l' $n_c$ -esimo vicino è caratterizzato anche dalla sua effettiva distanza in metri  $r_c$  dal riferimento: è possibile dunque definire, oltre al range topologico di interazione  $n_c$ , anche il range metrico  $r_c$ .

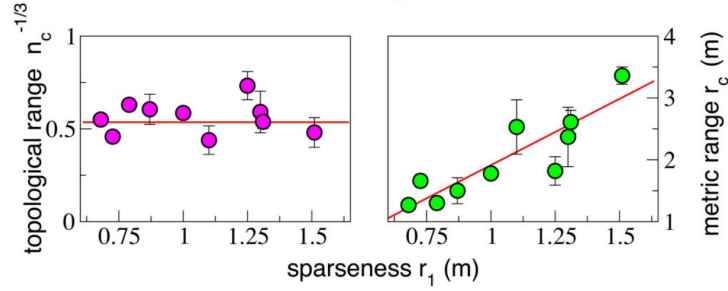
Nell'articolo di Ballerini è stato dunque mostrato, analizzando la dipendenza di  $n_c$  ed  $r_c$  dalla densità dei gruppi, che la struttura degli stormi, e dunque le interazioni che la generano, dipende dalla *distanza* topologica piuttosto che dalla distanza metrica. Ciò è stato possibile analizzando la relazione tra  $n_c$ ,  $r_c$  e la distanza media dal vicino più prossimo  $r_1$ , che spesso in letteratura viene definita come *sparseness* (radezza).

Infatti la relazione tra  $r_1$ ,  $r_c$  e  $n_c$  è  $r_c \sim r_1 n_c^{1/3}$ ; quest'equazione sta semplicemente ad indicare che il numero  $n_c$  di individui all'interno di una sfera di raggio  $r_c$  è proporzionale ad  $r_c^3$ . In uno scenario metrico,  $r_c$  è una costante, e dunque  $n_c^{-1/3} \sim r_1$ ; invece, nello scenario topologico  $n_c$  è una costante, e dunque  $r_c \sim r_1$ .

I risultati sono riportati in Fig. 2.1, e mostrano un'evidente correlazione lineare tra  $r_1$  ed  $r_c$ , dimostrando dunque che l'interazione deve essere topologica.

Dunque, gli uccelli in uno stormo interagiscono sempre con un numero fissato di vicini, indipendentemente dalla loro distanza.

In particolare, un risultato peculiare è che ogni uccello sembra interagire con i suoi primi 6 o 7 vicini, in quanto risulta in media  $n_c = 6.5 \pm 0.9$ .



**Figura 2.1:** Natura topologica dell’interazione. Il range topologico di interazione (sinistra) e il range di interazione metrico (destra) a confronto con la radezza per diversi eventi di flocking [5].

### 2.3.3 Perché proprio 7?

Perché proprio tra i 6 e i 7 vicini? Tale range è significativamente più piccolo del numero di vicini attorno ad ogni uccello; dunque tale valore specifico di  $n_c$  deve dipendere dall’elaborazione corticale dell’input visivo piuttosto che da una limitazione sull’input stesso.

Affinché si possa mantenere un numero fissato di vicini sotto controllo è necessaria un’abilità di ”object tracking” da parte dei membri del gruppo. Tale capacità decade dopo un certo numero di elementi, e potrebbe dunque essere questa caratteristica quella che definisce il range di interazione. Ad esempio, alcuni esperimenti hanno mostrato che i piccioni addestrati possono discriminare set di varie numerosità, a patto che questi insiemi siano composti da meno di 7 oggetti. L’esistenza di un limite percettivo è stato trovato anche in esperimenti in 2D su banchi di pesci, ed è stimato ad un valore tra i 3 ed i 5 individui.

Un’altra interpretazione del risultato è che tale valore specifico di  $n_c$  potrebbe essere funzionale per ottimizzare la risposta anti-predatoria: se ogni individuo interagisse con troppi pochi vicini l’interazione sarebbe poco rumorosa ma troppo a corto raggio; al contrario, se l’interazione coinvolgesse troppi vicini, l’informazione sarebbe mediata su molti individui e sarebbe probabilmente troppo complicata per essere processata in breve tempo. Pertanto le reazioni dello stormo ad una perturbazione esterna (ad esempio un predatore) risulterebbero rallentate, rendendo meno efficienti le strategie di difesa.

Inoltre, perché un’interazione topologica e non metrica?

L’obiettivo principale delle interazioni tra gli individui di uno stormo è mantenere la coesione del gruppo. Questa coesione è un requisito biologico molto importante, modellato dalla spinta evolutiva per la sopravvivenza: gli individui solitari o i piccoli gruppi sono significativamente più inclini all’attacco dei predatori rispetto agli animali appartenenti a gruppi vasti e coesi.

Se prendiamo ad esempio un gruppo di storni soggetto all’attacco di un falco predatore, esso si contrae, espande, ed eventualmente si separa in sotto-gruppi, modificando continuamente la sua densità e la sua struttura in risposta all’attacco. Ciò nonostante, nessun membro rimane isolato, e subito lo stormo si ricompatta.

I meccanismi di interazione sono modellati dall’evoluzione al fine di mantenere questa robusta coesione nel gruppo in contrasto alle perturbazioni esterne. Un’interazione metrica è inadeguata a rispondere a tale esigenza: nel caso in cui la distanza



inter-individuale diviene maggiore del range metrico, l'interazione può scomparire, causando la perdita di aggregazione. Un'interazione topologica, al contrario, è molto robusta, poiché la sua intensità è la stessa per differenti densità.

## 2.4 Confronto dei vari tipi di interazione

Un importante confronto tra l'accuratezza delle assunzioni di interazione topologica o di interazione metrica è stato fornito dallo studio del gruppo di Parisi[9]. Il punto di partenza di tale analisi erano proprio i risultati dello studio portato avanti dal gruppo di Ballerini. Nell'articolo veniva confrontato il comportamento tridimensionale delle SPP con differenti tipi di interazioni, sia metriche sia topologiche.

### 2.4.1 Modelli numerici

Per quanto riguarda la modellizzazione del comportamento degli stormi, anche per lo studio di Parisi il punto di partenza è il modello di Vicsek, con qualche leggera modifica.

Infatti, come già visto nei capitoli precedenti, nel modello originale di Vicsek l'insieme dei vicini interagenti  $\mathcal{D}(i)$  è scelto secondo una regola metrica: la particella  $i$  interagisce con tutte quelle ad una distanza minore di un certo raggio di interazione fissato.

Un problema di tale modello è che non riesce a riprodurre l'organizzazione coesiva e polarizzata delle particelle per valori piccoli della densità dello stormo.

Per superare questo limite, il gruppo di Parisi ha deciso di attingere dalle modifiche al modello di Vicsek proposte da Grégoire et al.[10], i quali hanno introdotto un termine attrattivo-repulsivo per migliorare il modello. Le equazioni per le velocità (2.1.3) vengono modificate in

$$\vec{v}_i(t + \Delta t) = v_0 \Theta \left( \alpha \sum_{j \in \mathcal{D}(i)} \vec{v}_j(t) + \lambda \sum_{j \in \mathcal{D}(i)} \vec{f}_{ij}(t) + N_i \tau \vec{\epsilon}_i(t) \right), \quad (2.4.1)$$

dove i parametri  $\alpha$ ,  $\lambda$  regolano il peso rispettivamente dell'allineamento delle velocità e della repulsione/attrazione,  $N_i$  rappresenta il numero di vicini interagenti, e la forza attrattivo-repulsiva è definita come

$$\vec{f}_{ij} = \hat{r}_{ij} \begin{cases} -\infty & \text{se } r_{ij} < r_{hc} \\ \frac{1}{4} \frac{r_{ij} - r_{eq}}{r_a - r_{hc}} & \text{se } r_{hc} < r_{ij} < r_a \\ 1 & \text{se } r_a < r_{ij} < r_c \end{cases} \quad (2.4.2)$$

dove  $r_{hc}$  corrisponde alla hard-core distance,  $r_{eq}$  alla distanza ideale di equilibrio tra le particelle,  $r_c$  è il massimo range di interazione ed  $r_a$  definisce la distanza oltre la quale  $\vec{f}_{ij}$  diventa costante.  $\hat{r}_{ij}$  è semplicemente il versore di  $\vec{f}_{ij}$ . L'insieme dei

vicini interagenti  $\mathcal{D}(i)$  è ora definito come l'insieme dei cosiddetti vicini di Voronoi<sup>†</sup> dell'uccello  $i$  che si trovano all'interno di un range  $r_c$  da esso.

Il gruppo di Parisi ha deciso di adottare gli stessi valori dei parametri scelti da Grégoire et al., ossia:  $v_0 = 0.05$ ,  $r_{hc} = 0.2$ ,  $r_e = 0.5$  ed  $r_a = 0.8$ . Contrariamente al modello di Vicsek, questo modello produce per appropriati valori dei parametri  $\alpha$ ,  $\lambda$  e  $\tau$  gruppi coesi anche in spazio aperto (ossia nel caso limite di densità nulla).

Notare che, in accordo con la definizione data, il modello (2.4.1) ha caratteristiche miste metrico-topologiche; infatti, quando il raggio massimo dell'interazione  $r_c$  è grande rispetto alla distanza media tra le particelle, l'insieme di vicini interagenti coincide con la prima shell di Voronoi, ossia con l'insieme dei primi vicini topologici, la quale è indipendente dalle distanze metriche; ma se  $r_c$  diminuisce, allora le effettive distanze cominciano ad essere rilevanti e le interazioni diventano metriche. Inoltre, anche per  $r_c$  grande si ha che il numero di vicini con cui ogni individuo interagisce è determinato unicamente dalla tassellazione di Voronoi (che risulta in approssimativamente 15 vicini interagenti in tre dimensioni) e non può essere ulteriormente modificato.

Per tali motivi, il modello (2.4.1) è stato considerato ancora incompleto dal gruppo di Parisi, ed è dunque stato generalizzato con l'introduzione di tre varianti, in ognuna delle quali l'insieme dei vicini interagenti  $\mathcal{D}(i)$  è scelto con un set di regole diverse:

1. **interazioni metriche:** in questo caso, come nel modello originale di Vicsek, l'insieme  $\mathcal{D}(i)$  consiste in tutti i vicini dell'uccello  $i$  che si trovano entro un dato range metrico  $r_c$  attorno ad  $i$ ;
2. **interazioni topologiche semplici:** qui il set  $\mathcal{D}(i)$  consiste dei primi  $n_c$  vicini più prossimi all'uccello  $i$ , indipendentemente dalla loro distanza. La forza attrattivo-repulsiva è definita come in (2.4.2), con l'unica differenza che  $r_c = \infty$  affinché la forza sia applicata a tutti i vicini topologicamente selezionati di  $i$ ;
3. **interazioni topologiche con risoluzione angolare:** qui i vicini interagenti vengono scelti indipendentemente dalla loro distanza metrica, ma si richiede che esista una risoluzione angolare minima  $\mu$  tra vicini distinti in  $\mathcal{D}(i)$ . Dato l'uccello  $i$ , quando due (o più) dei suoi vicini cadono nello stesso angolo solido di ampiezza  $\mu$ , solo uno di loro viene incluso in  $\mathcal{D}(i)$ . Fissare  $\mu$  corrisponde a fissare  $n_c$ , dato che per piccoli valori di  $n_c$  si avranno grandi valori di  $\mu$  e viceversa.

## 2.4.2 Risultati

Lo scopo principale dello studio era quello di studiare la stabilità dell'insieme rispetto a  $i$ ) rumore e  $ii$ ) perturbazioni esterne.

Gli approcci per testare l'efficacia delle varie casistiche sono stati principalmente due: inizialmente è stato portato avanti un *approccio ad uguali parametri*, ovvero

---

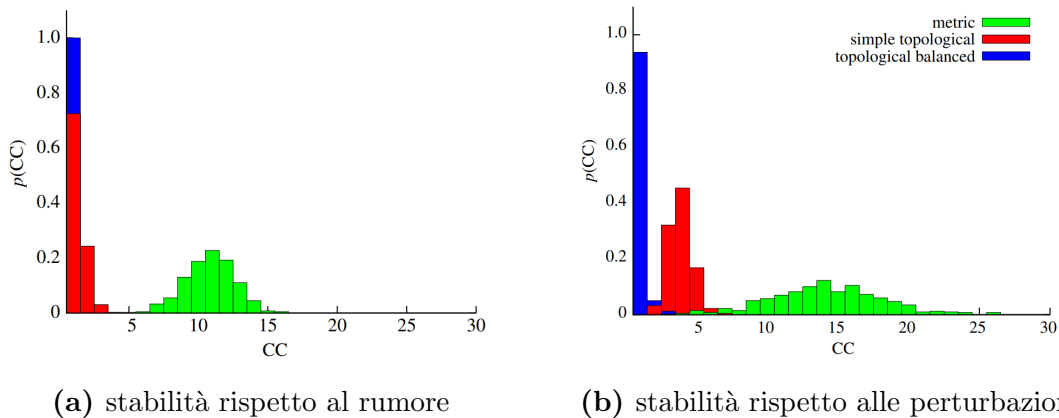
<sup>†</sup>La tassellazione di Voronoi è un tipo di partizione del piano; nel caso più semplice consiste nel ripartire un set finito di punti  $\{p_1, \dots, p_k\}$  nel piano euclideo in  $R_k$  celle di Voronoi, definite come l'insieme dei punti la cui distanza dal riferimento  $p_k$  è minore o uguale alla sua distanza da ogni altro punto  $p_{k'}$ .

i valori dei parametri sono stati fissati in modo che il numero di vicini interagenti  $n_c$  risultasse lo stesso in tutti e tre i modelli. Tale approccio non è però ottimale al fine di misurare la stabilità rispetto alle perturbazioni, in quanto i tre modelli sono differenti, e fissare gli stessi parametri potrebbe implicare differenti osservabili biologici. Pertanto per il punto *ii*) è stato seguito un *approccio a parametri ottimali*, nel senso che è stato selezionato per ogni modello un set di parametri che garantisca un valore realistico di polarizzazione e coesione e una distribuzione degli elementi del gruppo quanto più biologicamente accurata possibile.

Per l'analisi del punto *i*) sono state effettuate delle simulazioni facendo evolvere il sistema secondo l'eq. (2.4.1), misurando dopo un tempo  $\bar{t}$  (identico per tutti e tre i casi) il grado di coesione dell'insieme. Ciò è stato possibile contando il numero di *CC* (Connected Components) in cui lo stormo inizialmente coeso si splitta dopo il tempo  $\bar{t}$ . Un *CC* è definito come un gruppo di particelle coerenti che si trovano entro una certa soglia di distanza le une dalle altre.

Il risultato di questa prima analisi è stato che i modelli topologici risultavano più stabili di quello metrico, generando meno sotto-gruppi. Inoltre, è stato osservato che il modello topologico semplice esibiva una stabilità limitata in termini di coesione; infatti, la semplice presenza del rumore era sufficiente a separare un gruppo inizialmente coeso in componenti indipendenti. Al contrario, il modello topologico bilanciato appariva più robusto.

Successivamente si è testata dunque la resistenza dello stormo alle perturbazioni, posizionando un ostacolo lungo la sua direzione di moto. Il risultato è stato che la stabilità del modello topologico bilanciato era molto più significativa rispetto agli altri due, e che il modello metrico risultasse in una stabilità decisamente minore rispetto ad entrambi i modelli topologici. I risultati riguardanti i punti *i*) e *ii*) sono riportati in Fig. 2.2.



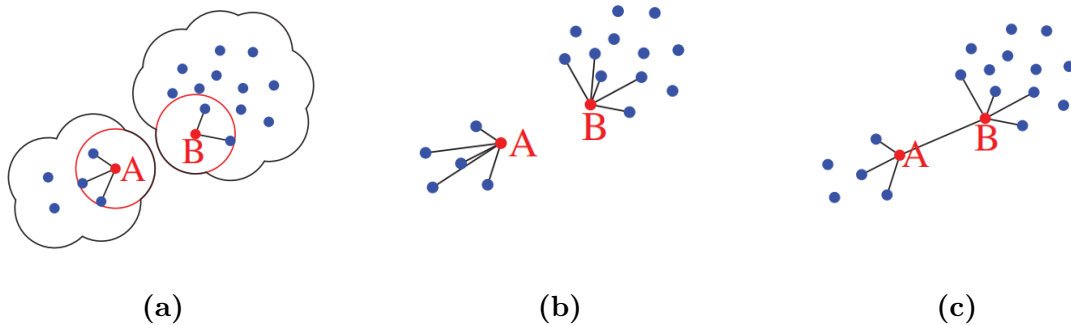
**Figura 2.2:** Risultati dello studio di Parisi et al.[9]. Grafici della probabilità che lo stormo si splitti in  $M$  componenti connesse dopo 5000 interazioni nei tre casi: metrico (verde), topologico semplice (rosso) e topologico bilanciato (blu).

### 2.4.3 Instabilità geometriche

La maggiore instabilità del modello metrico e topologico semplice è dovuta alla presenza di instabilità geometriche; queste ultime sono differenti nella loro natu-

ra per i due modelli, ma entrambe portano lo stormo ad essere suscettibile alla frammentazione.

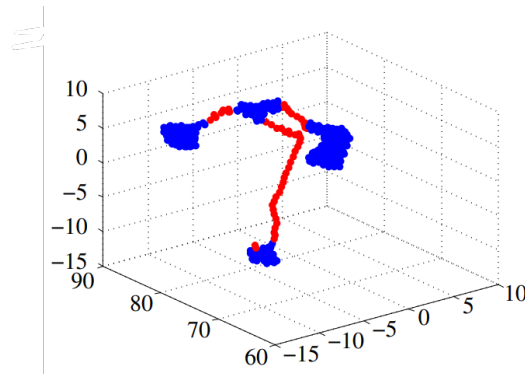
Si può capire intuitivamente l'origine di tali instabilità osservando la Figura 2.3; nel caso metrico (Fig. 2.3a) le fluttuazioni relative al termine di rumore o le perturbazioni esterne possono spingere una particella (o un gruppo) oltre il range metrico  $r_c$  dai suoi vicini, facendole perdere interazione con il resto dello stormo; dunque possiamo avere anche l' "evaporazione" di particelle dal confine del gruppo. Nel caso topologico semplice, l'evaporazione di una singola particella non può avvenire, ma potrebbe accadere che (Fig. 2.3b) una fluttuazione separi istantaneamente un sotto-gruppo di almeno  $n_c + 1$  particelle dal resto dello stormo; esse interagiranno tra di loro ma non con le restanti, e così può avvenire di nuovo la frammentazione. Tale fenomeno è però risultato dalle simulazioni più raro dell'evaporazione di una singola particella nel caso metrico; ecco perché nel modello topologico semplice abbiamo una stabilità maggiore.



**Figura 2.3:** Instabilità geometriche nei tre modelli: a) per il caso metrico, b) per il caso topologico semplice e c) per il caso topologico bilanciato.

Proprio per superare tale limite il gruppo di Parisi ha introdotto il terzo modello, che come si può osservare in Fig. 2.3c non è soggetto alla frammentazione in sottogruppi a causa del fatto che ogni particella deve necessariamente avere dei vicini interagenti nei due semipiani con risoluzione angolare  $-\pi$  e  $+\pi$ .

L'unico limite del terzo modello è che, per valori piccoli di  $n_c$ , c'è una certa tendenza alla formazione di filamenti, ossia strutture lineari di particelle interagenti (si veda Fig.2.4), che connettono sotto-gruppi dello stormo in moto in direzioni differenti.



**Figura 2.4:** snapshot di una simulazione del gruppo di Parisi in cui si possono osservare dei filamenti che connettono vari sottogruppi dello stormo.

Pertanto, la domanda finale a cui il gruppo di Parisi ha provato a dare una risposta è stata: *qual è (se esiste) il valore minimo di vicini interagenti affinché non si formino filamenti e ci sia un unico, coerente stormo in movimento?*

Per trovare un risultato soddisfacente, sono stati calcolate le frazioni di particelle appartenenti ai filamenti in funzione di  $n_c$ , per diverse valori dei parametri e differenti dimensioni dello stormo. La conclusione è stata che il numero minimo di vicini dovesse essere tra 5 e 10, non lontano dai valori sperimentali del gruppo di Ballerini.

# Capitolo 3

## La sincronizzazione nei sistemi dinamici

Come già preannunciato, all'interno di questa tesi i modelli di flocking che sono stati descritti nei precedenti capitoli sono stati estratti dal loro ambito di origine ed applicati al fenomeno della sincronizzazione dei flash delle lucciole. Tale traslazione non deve suscitare troppa sorpresa, in quanto entrambi costituiscono esempi di fenomeni emergenti di organizzazione collettiva, e pertanto può risultare utile collegare alcuni aspetti basilari dei due ambiti.

Viene dunque esposto di seguito il principale modello riguardante la sincronizzazione di un ampio insieme di oscillatori debolmente interagenti, il modello di Kuramoto; esso è stato il punto di partenza per le simulazioni numeriche, che verranno successivamente discusse.

### 3.1 Il modello di Kuramoto

Il modello di Kuramoto[4] descrive il comportamento di sincronizzazione di un sistema di rotatori interagenti.

Tale modello si è sviluppato a seguito dei progressi di Arthur Winfree: egli si focalizzò sullo studio di un vasto insieme di oscillatori accoppiati seguendo alcune assunzioni di base, ossia postulando che:

- 1) gli oscillatori potessero essere considerati quasi identici;
- 2) l'accoppiamento tra gli oscillatori fosse debole.

Yoshiki Kuramoto iniziò poco tempo dopo a lavorare ad un modello di sincronizzazione sulla scia di ciò che aveva fatto Winfree, in particolare usando le stesse assunzioni da egli proposte. A seguito di vari studi, riuscì a provare che la dinamica a lungo termine di un sistema di oscillatori debolmente accoppiati può essere descritta dalla seguente espressione:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.1.1)$$

dove la funzione di interazione  $\Gamma_{ij}$  determina la forma dell'accoppiamento tra l'oscillatore  $i$  e l'oscillatore  $j$ .

A questo punto, Kuramoto assume che ogni oscillatore dovesse influenzarne ogni altro, postulando dunque un *accoppiamento globale*. Assume inoltre che ogni interazione avesse lo stesso peso, e dipendesse sinusoidalmente dalla differenza di fase. Sotto tali ipotesi la funzione di interazione assume la forma semplificata:

$$\Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i) = \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.1.2)$$

generando le equazioni che governano quello che ad oggi è divenuto noto come il Modello di Kuramoto:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.1.3)$$

dove  $K$  è la costante di accoppiamento ed  $N$  il numero totale di oscillatori. Il modello è spesso utilizzato nel limite  $N \rightarrow \infty$ , per cui il fattore  $1/N$  è inserito per mantenere il modello stabile in tale limite.

Per semplificare i calcoli, le frequenze naturali  $\omega_i$  generalmente si considerano distribuite secondo una densità di probabilità  $g(\omega)$  simmetrica rispetto ad una certa frequenza  $\Omega$ , in modo che  $g(\Omega + \omega) = g(\Omega - \omega)$ . Per semplificare ulteriormente, la frequenza media  $\Omega$  può essere spostata in 0 operando la traslazione  $\theta_i \rightarrow \theta_i + \Omega t$ . Ciò equivale a lavorare nel sistema di riferimento in rotazione con frequenza  $\Omega$ .

A seguito di tali procedimenti le equazioni rimangono le stesse, e vi è l'ulteriore semplificazione di avere  $g(\omega) = g(-\omega)$ . Si assume infine che  $g(\omega)$  decresca monotonamente su ogni lato dal picco in  $\omega = 0$ .

Quel che rende tale modello così interessante è che, con alcuni ulteriori passaggi matematici, Kuramoto non solo è stato capace di provare che debba avvenire una transizione di fase verso la sincronizzazione nel suo modello, ma anche di trovare una semplice equazione che esprime l'intensità di accoppiamento critica  $K_c$  necessaria per l'inizio della transizione.

## 3.2 Esistenza del valore di Accoppiamento Critico

### 3.2.1 Parametri di Campo Medio

Il primo step da intraprendere per ricavare la soluzione esatta per l'accoppiamento critico è quello di riscrivere le equazioni (3.1.3) in termini del seguente parametro d'ordine:

$$r e^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \quad (3.2.1)$$

Il modulo del parametro d'ordine,  $r$ , è una misura del livello di sincronizzazione del sistema, e la fase  $\psi$  esprime la fase media di tutti gli oscillatori. Si può dunque affermare che il parametro d'ordine descrive il campo medio del sistema.

Un modo pratico di visualizzare questo concetto è quello di immaginare ogni oscillatore come un punto in movimento lungo la circonferenza unitaria; in tal caso il parametro d'ordine può essere interpretato come una freccia con coda coincidente





Da tale equazione, poiché  $\sin(\theta_i) \leq 1$ , si nota che gli oscillatori con frequenze naturali  $|\omega_i| \leq Kr$  possono avere una soluzione stazionaria  $\dot{\theta}_i = 0$ ; in tal caso si avrà

$$\omega_i = Kr \sin(\theta_i). \quad (3.2.6)$$

Gli oscillatori in questo stato hanno tutti frequenza fissata, poiché sono stazionari nel sistema di riferimento ruotante ( $\dot{\theta}_i = 0$ ). L'angolo  $\theta_i$  in cui si fissano può essere ricavato utilizzando l'eq. (3.2.6). Gli oscillatori con frequenze naturali  $|\omega_i| \geq Kr$  non riusciranno ad avere fase fissata ( $\dot{\theta}_i \neq 0$ ) perciò si muoveranno lungo la circonferenza unitaria in maniera non uniforme. In termini della Fig. 3.1, vi saranno alcuni oscillatori con posizione fissa, mentre altri saranno desincronizzati e in movimento lungo la circonferenza.

Nonostante la presenza di questi oscillatori non sincronizzati, si vuole comunque assumere che  $r$  e  $\psi$  siano costanti per riuscire a ricavare il valore di accoppiamento critico. A tale scopo, si forza la distribuzione degli oscillatori lungo la circonferenza,  $\zeta(\theta, \omega)$ , ad essere indipendente dal tempo; per fare ciò, imponiamo che  $\zeta$  sia inversamente proporzionale alla velocità degli oscillatori  $\dot{\theta}$ . In pratica, ciò equivale ad affermare che in una zona della circonferenza in cui ci sono meno oscillatori questi devono muoversi più velocemente, per mantenere il numero di oscillatori costante in quell'area. Pertanto definiamo la densità degli oscillatori come segue:

$$\zeta(\theta, \omega) = \frac{C}{|\dot{\theta}|} = \frac{C}{|\omega - Kr \sin(\theta)|}, \quad (3.2.7)$$

dove  $\zeta(\theta, \omega)d\theta$  indica la frazione di oscillatori con frequenza angolare  $\omega$  che si trovano nell'intervallo  $[\theta, \theta + d\theta]$ .  $C$  è una costante che può essere fissata tramite la normalizzazione:

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} \zeta(\theta, \omega) d\theta = C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{|\omega - Kr \sin(\theta)|} \quad (3.2.8)$$

che risolvendo restituisce:

$$C = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega^2 - (Kr)^2}. \quad (3.2.9)$$

### 3.2.3 Risoluzione per il parametro d'ordine e $K_c$

Sono stati dunque identificati due distinti gruppi di oscillatori: ciò suggerisce di dividere la sommatoria dell'eq.(3.2.1) in due parti:  $r$  dovrà cioè essere uguale alla somma del parametro d'ordine medio degli oscillatori a fase fissata e del parametro d'ordine medio di quelli vaganti.

Inoltre, visto che ci siamo posti nel sistema di riferimento ruotante,  $\psi = 0$  e dunque si avrà  $re^{i\psi} = r$ . Otterremo quindi:

$$r = \langle e^{i\theta} \rangle_{lock} + \langle e^{i\theta} \rangle_{drift}, \quad (3.2.10)$$

dove i pedici *lock* e *drift* stanno rispettivamente ad indicare gli oscillatori "locked" (bloccati) e "drifting" (vaganti).

La media  $\langle e^{i\theta} \rangle_{drift}$  sarà espressa dall'integrale della distribuzione  $\zeta(\theta, \omega)$  sull'intera

circonferenza, per tutti gli oscillatori che non hanno frequenza fissata ( $|\omega| > Kr$ ), moltiplicata per il contributo  $e^{i\theta}$  al parametro d'ordine:

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{drift} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{|\omega| > Kr} e^{i\theta} \zeta(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta \quad (3.2.11)$$

Notando che nell'equazione (3.2.7)  $\zeta(\theta + \pi, -\omega) = \zeta(\theta, \omega)$  e ricordando che  $g$  è definita in modo che  $g(-\omega) = g(\omega)$ , si evince che tali simmetrie portano i contributi positivi dell'integrale ad elidersi con quelli negativi in modo da ottenere

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{drift} = 0. \quad (3.2.12)$$

Dunque sono solo gli oscillatori bloccati a contribuire al parametro d'ordine, un risultato plausibile poiché non vi è un valore di  $\theta$  più probabile per gli oscillatori vaganti, né una direzione di rotazione preferenziale.

Ora ci rimane soltanto da esplicitare il contributo degli oscillatori con frequenza fissata; innanzitutto, sappiamo dall'equazione (3.2.6) che  $\sin(\theta_i) = \omega_i/Kr$ . Inoltre, visto che  $g(\omega)$  è centrata in 0 ed è pari, le fasi  $\theta_i$  degli oscillatori saranno altrettanto centrate simmetricamente in 0, per cui  $\langle \sin \theta \rangle_{lock} = 0$ . Pertanto rimane solo la parte cosinusoidale dell'esponenziale complesso, e si ha:

$$r = \langle e^{i\theta} \rangle_{lock} = \langle \cos \theta \rangle_{lock} = \int_{-Kr}^{Kr} \cos[\theta(\omega)] g(\omega) d\omega, \quad (3.2.13)$$

dove  $\theta(\omega)$  è definita dall'equazione (3.2.6). Quindi utilizziamo l'eq. (3.2.6) per cambiare variabile da  $\omega$  a  $\theta$ :

$$r = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta g(Kr \sin \theta) Kr \cos \theta d\theta = Kr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta \quad (3.2.14)$$

Questa equazione definisce soluzioni che soddisfano la nostra condizione iniziale di  $r$  costante.

In particolare,  $r = 0$  è sempre una soluzione. Questo è lo stato di completa incoerenza, in cui non vi è alcuna sincronizzazione. Risolvendo per la distribuzione utilizzando l'eq. (3.2.7) otteniamo  $\zeta(\theta, \omega) = \frac{1}{2\pi}$ , una costante, che sta ad indicare che c'è la stessa probabilità di trovare un oscillatore in qualsiasi punto della circonferenza.

Le soluzioni corrispondenti a valori non nulli di  $r$  sono stati in cui vi è un insieme non nullo di oscillatori che hanno fase fissata: per  $r < 1$  comunque ci sarà ancora una frazione di oscillatori vaganti. Dividendo l'eq. (3.2.14) per  $r$ , questi stati sono soluzione a:

$$1 = K \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta. \quad (3.2.15)$$

Se poniamo  $r \rightarrow 0^+$ , troviamo il punto critico  $K_c$  per cui il parametro d'ordine di sposta dallo zero. Facendo ciò, l'eq. (3.2.15) diventa:

$$1 = K_c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta g(0) d\theta = K_c g(0) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta = K_c g(0) \frac{\pi}{2}. \quad (3.2.16)$$

Finalmente, risolvendo per  $K_c$  otteniamo

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)}. \quad (3.2.17)$$

Abbiamo ottenuto ciò che cercavamo:  $K_c$  è il valore di accoppiamento critico necessario a produrre una parziale sincronizzazione delle fasi del sistema.

### 3.2.4 La crescita del parametro d'ordine

Ora che conosciamo il valore di  $K_c$ , ci si può interessare della crescita di  $r$  con l'aumento del valore dell'accoppiamento, ossia per  $K > K_c$ .

Per farlo, si può espandere nell'eq. (3.2.15)  $g(Kr \sin \theta)$  in un intorno di  $r \sim 0$ , e poi risolvere per  $r$ . Tramite questo procedimento si può ottenere, con alcuni passaggi matematici,

$$r = \sqrt{\frac{-16}{\pi g''(0) K_c^4} (K - K_c)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.2.18)$$

Questo è quanto di più accurato si può ricavare a meno che non si conosca l'esatta forma di  $g(\omega)$ ; anche in tale situazione comunque, nella maggior parte dei casi, è impossibile risolvere esplicitamente per  $r(K)$ .

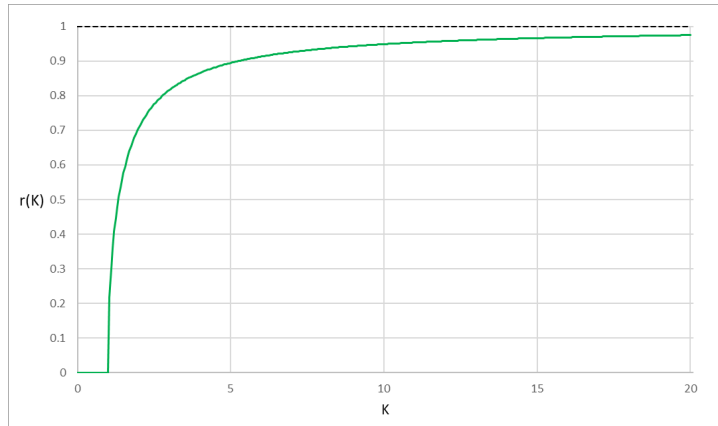
Kuramoto, comunque, riuscì a trovare un caso particolare per il quale una soluzione esplicita è possibile; infatti, sostituendo nell'eq. (3.2.15) una densità lorentziana definita da

$$\tilde{g}(\omega) = \frac{\delta}{\pi(\delta^2 + \omega^2)}, \quad (3.2.19)$$

dove  $\delta$  è una costante che definisce l'ampiezza della distribuzione, si ottiene un integrale risolvibile analiticamente, ottenendo come risultato finale:

$$\tilde{r} = \sqrt{1 - \frac{K_c}{K}}. \quad (3.2.20)$$

Il grafico di  $\tilde{r}(K)$  è plottato in fig. 3.2.



**Figura 3.2:** grafico di  $\tilde{r}$  per  $K_c = 1$ . Per grandi valori di  $K$ , ossia all'aumentare dell'intensità dell'accoppiamento,  $\tilde{r}$  tende asintoticamente ad 1 (sistema totalmente sincronizzato).

# Capitolo 4

## Simulazioni numeriche di un modello di sincronizzazione

### 4.1 Generalità

Per confrontare l'efficacia dei vari modelli di interazione relativi al flocking nella modellizzazione della sincronizzazione dei flash degli sciami di lucciole sono state prodotte delle simulazioni con un modello implementato in C++, considerando  $N$  lucciole in una scatola di lato  $L_b$  con condizioni al contorno periodiche.

L'idea di base di queste simulazioni è stata che ogni lucciola potesse essere modellizzata da un oscillatore tramite una variabile  $\Phi$  periodica in  $t$ , che esplicitasse se la lucciola in questione stesse emettendo un segnale luminoso o meno. Essa è stata definita nella maniera seguente:

$$\Phi_i = \begin{cases} 0, & \text{se la lucciola } i\text{-esima è spenta} \\ 1, & \text{se è accesa.} \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Il concetto che si voleva esprimere in questo modo era che tutte le lucciole dello sciame dovessero avere la stessa frequenza naturale, emettendo dei flash con un ritmo dato dal periodo comune  $T$ , dopo il quale avrebbero cambiato il proprio stato da acceso a spento o viceversa. Dunque, come si evince dalla Fig. 4.1 il segnale di ogni lucciola può essere considerato come un'onda quadra di periodo  $T$ .

Fissato uno step temporale pari a  $\Delta t = 0.1$ , il periodo è stato scelto come  $T = 5\Delta t$ , ma in generale sarebbe potuto essere un qualsiasi multiplo di  $\Delta t$ .

La fase  $\theta$  di oscillazione dello stato acceso/spento  $\Phi$  è stata definita come una variabile reale oscillante nel range  $[0, 2)$  con periodo  $T$ . Ad ogni step si aveva cioè

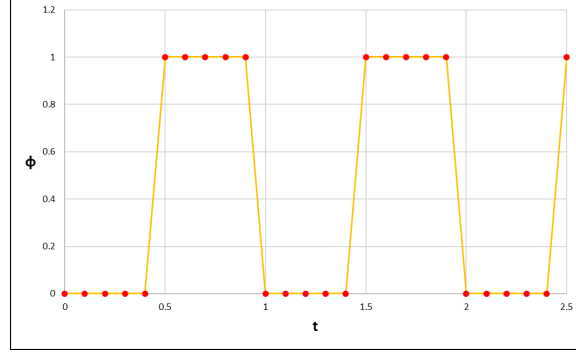
$$\theta_i(t + \Delta t) = \theta_i + \frac{\Delta t}{T}. \quad (4.1.2)$$

La relazione tra  $\theta_i$  e  $\Phi_i$  per ogni individuo è stata poi per comodità definita come  $\Phi_i = [\theta_i]$ , ossia  $\forall i$   $\Phi$  era calcolato ad ogni step temporale come la parte intera di  $\theta$ ;

ad esempio fissato  $t = t_1$ ,

$$\begin{aligned}\theta_1(t_1) = 0.2 &\rightarrow \Phi_1(t_1) = 0, \\ \theta_2(t_1) = 1.6 &\rightarrow \Phi_2(t_1) = 1, \\ \theta_3(t_1) = 0.8 &\rightarrow \Phi_3(t_1) = 0, \\ &\dots\end{aligned}$$

Il sistema veniva fatto evolvere per 500 step temporali.



**Figura 4.1:** stato di una generica lucciola  $i$  in funzione del tempo (stato iniziale  $\Phi(0) = 0$ ), con periodo  $T = 5\Delta t$ .

Al fine di permettere la sincronizzazione di ogni lucciola con le sue vicine, è stata data la possibilità ad ognuno degli individui dello sciame di decidere di rimanere nel proprio stato per uno o due ulteriori step temporali piuttosto che modificarlo dopo  $T$ . Tale decisione veniva presa da ogni lucciola nell'istante temporale precedente al cambio di stato valutando il segno del termine di interazione

$$\xi_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_{ij} \tanh(\theta_j - \theta_i), \quad (4.1.3)$$

seguendo la semplice regola:

$$\Phi_i(t + \Delta t) = \begin{cases} \Phi_i(t), & \text{se } \xi_i < 0 \\ \Phi'_i(t + \Delta t), & \text{se } \xi_i \geq 0 \end{cases} \quad (4.1.4)$$

dove  $\Phi'_i$  indica il nuovo stato della lucciola  $i$ -esima.

Dunque la logica del modello risulta relativamente semplice: nel caso in cui una lucciola rilevi, nello step temporale immediatamente precedente al cambio di stato, che le sue vicine siano mediamente in opposizione di fase, lascerà il proprio stato invariato per un ulteriore  $\Delta t$  in modo che le altre componenti dello sciame possano recuperare il ritardo. Altrimenti, se lei e le sue vicine possiedono stati coerenti, continuerà normalmente a cambiare stato periodicamente ogni  $5\Delta t$ .

Allo stesso modo, il termine di interazione verrà calcolato anche allo step temporale successivo e il processo verrà ripetuto, eventualmente aspettando ancora un altro  $\Delta t$  piuttosto che cambiare stato.

La scelta della funzione di interazione è ricaduta sulla tangente iperbolica della differenza di fase  $\theta_j - \theta_i$  per vari motivi. Innanzitutto, sulla scia del modello di Kuramoto, si voleva utilizzare una funzione dipendente dalla differenza di fase. Inoltre, vi era la necessità che questa funzione desse una risposta simile ad una interazione di soglia, in modo da fornire un contributo positivo al termine di interazione se la differenza di fase fosse stata positiva, e viceversa negativo se fosse risultato  $\theta_j - \theta_i < 0$ . Ciò esplicita il fatto che, fissata una lucciola di riferimento  $i$ , se una fase  $\theta_j$  risulta in ritardo rispetto alla fase  $\theta_i$  ( $\theta_i < \theta_j$ ), la lucciola  $i$  non dovrà aspettare e continuerà a flashare normalmente; al contrario se  $\theta_j$  risulta in anticipo rispetto a  $\theta_i$  ( $\theta_i > \theta_j$ ) allora sarà necessario per  $i$  aspettare  $j$ .

Era necessaria poi la condizione aggiuntiva di restituire un valore nullo nel caso in cui la differenza di fase fosse stata nulla. La tangente iperbolica è risultata la scelta ottimale poiché soddisfa tutti questi requisiti.

Un'altra caratteristica della simulazione è stata che, ad ogni step temporale, le lucciole avevano la possibilità di spostarsi orizzontalmente di un  $\Delta x$  e verticalmente di un  $\Delta y$ , fissati entrambi al valore di 0.1. Tale spostamento era determinato su base probabilistica: ad esempio considerando il movimento lungo l'orizzontale, ad ogni istante ogni lucciola poteva spostarsi lungo  $x$  o rimanere ferma con una probabilità  $1/2$ ; dopodiché la direzione di movimento (destra o sinistra in questo caso) veniva di nuovo scelta con una probabilità  $1/2$  per ogni lato. La stessa cosa avveniva per lo spostamento verticale.

Come rimarcato dalla continuità di notazione rispetto ai capitoli precedenti, nell'eq. (4.1.2) i fattori  $a_{ij}$  rappresentano gli elementi della matrice di adiacenza  $A$ , i quali vengono scelti in accordo con il modello di interazione selezionato. Le entrate di  $A$  sono state dunque selezionate nei seguenti modi rispetto ai vari casi:

1. **interazione metrica** : tramite il modello di Cucker e Smale, ossia tramite la formula

$$a_{ij} = \frac{\chi}{(\sigma^2 + (\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|)^2)^\beta} \quad \forall j \in \mathcal{M}(i),$$

$a_{ij} = 0$  altrimenti, dove  $\mathcal{M}(i)$  è l'insieme dei vicini metrici di  $i$ , definito come  $\mathcal{M}(i) = \{j \in \mathbb{N} : \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|^2 \leq R\}$ , con  $R = 5$ . I parametri  $\chi$  e  $\sigma$  sono stati entrambi fissati per semplicità ad 1, mentre  $\beta$  è stato variato nelle diverse simulazioni;

2. **interazione topologica** : per questo modello si è semplicemente seguita la regola

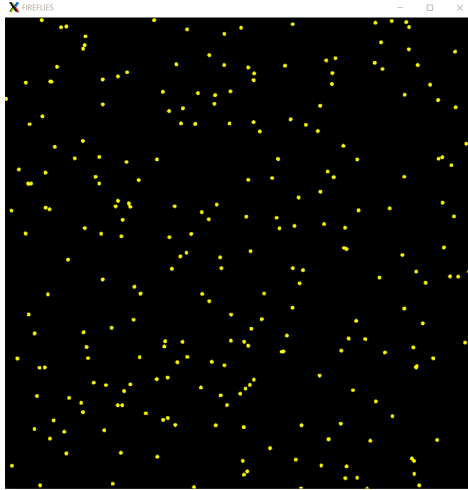
$$a_{ij} = 1 \quad \forall j \in \mathcal{T}(i),$$

$a_{ij} = 0$  altrimenti, dove  $\mathcal{T}(i)$  rappresenta l'insieme degli indici dei primi  $n_c$  vicini topologici della lucciola  $i$ -esima.

Infine, è stata implementata anche la possibilità di visualizzare graficamente le lucciole grazie alla libreria grafica SFML [11], come si può osservare in figura 4.2.

## 4.2 Discussione dei risultati

Al fine di confrontare i vari modelli di interazione, inizialmente è stata posta una densità  $\rho_0 = 1.134$ , ponendo il lato della scatola  $L_b = 21$ , con condizioni al contorno



**Figura 4.2:** Snapshot della simulazione.

periodiche e con  $N = 500$  lucciole fissate. Gli stati iniziali  $\Phi_i(t = 0)$  sono stati fissati a 0 o ad 1 per ogni lucciola con probabilità  $1/2$ . Le posizioni sono state distribuite casualmente in maniera uniforme.

Al fine di determinare lo stato del sistema, sono stati definiti alcuni parametri:  $m$  = numero di lucciole accese,  $l$  = numero di lucciole spente. In tal modo è stato possibile andare a misurare il valore  $S = \frac{m-l}{N}$ , il quale rappresenta il grado di sincronizzazione dell'insieme.

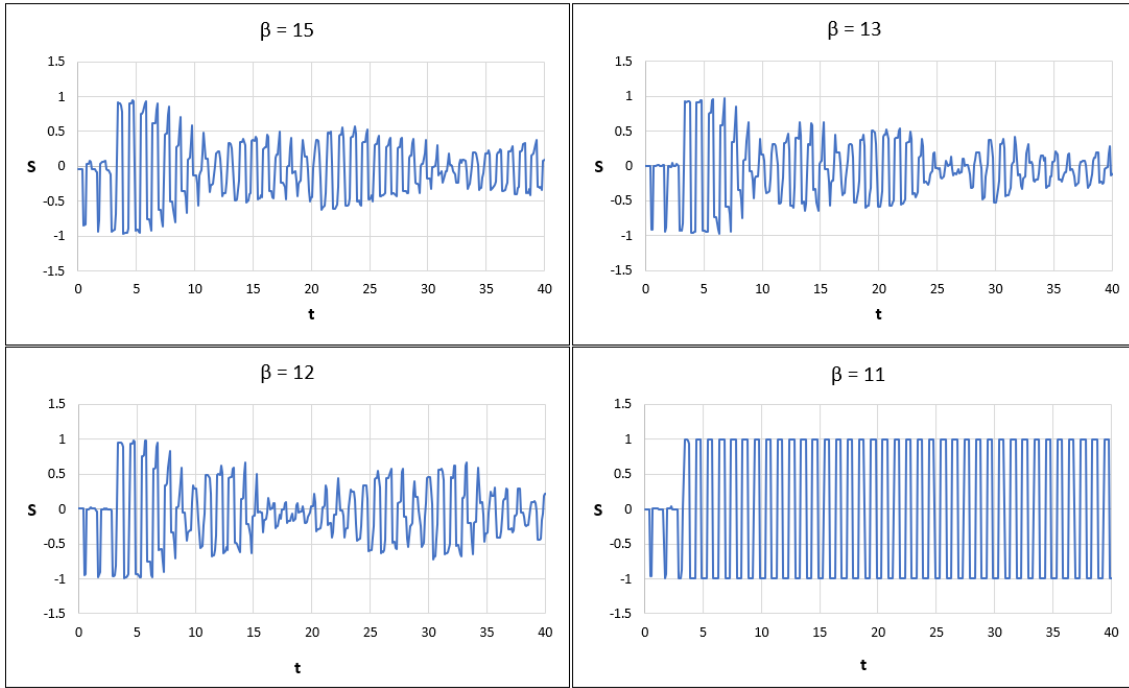
Lo sciame possiede dunque degli stati "sincroni" quando ad un dato istante si ha  $m = N, l = 0$  e dunque  $S = 1$  (tutte le lucciole accese) oppure  $m = 0, l = N$  ed  $S = -1$  (tutte le lucciole spente). Il ruolo di  $S$  è dunque quello di "parametro d'ordine" del sistema, analogamente a  $re^{i\psi}$  per il modello di Kuramoto.

Alcuni risultati di questa prima fase della simulazione sono riportati nelle figure 4.3a e 4.3b, scelti a campione per alcuni valori dei parametri a titolo esemplificativo. In Fig. 4.3a si può osservare il comportamento del sistema in un regime di interazione metrico al variare di  $\beta$ , mentre in 4.3b è riportato l'andamento di  $S$  in regime topologico al variare del numero di vicini topologici  $n_c$ . Per come è stato definito  $S$ , si intuisce come il sistema risulti totalmente sincronizzato nel caso in cui si comporti come un'onda quadra di periodo  $T = 5\Delta t$ .

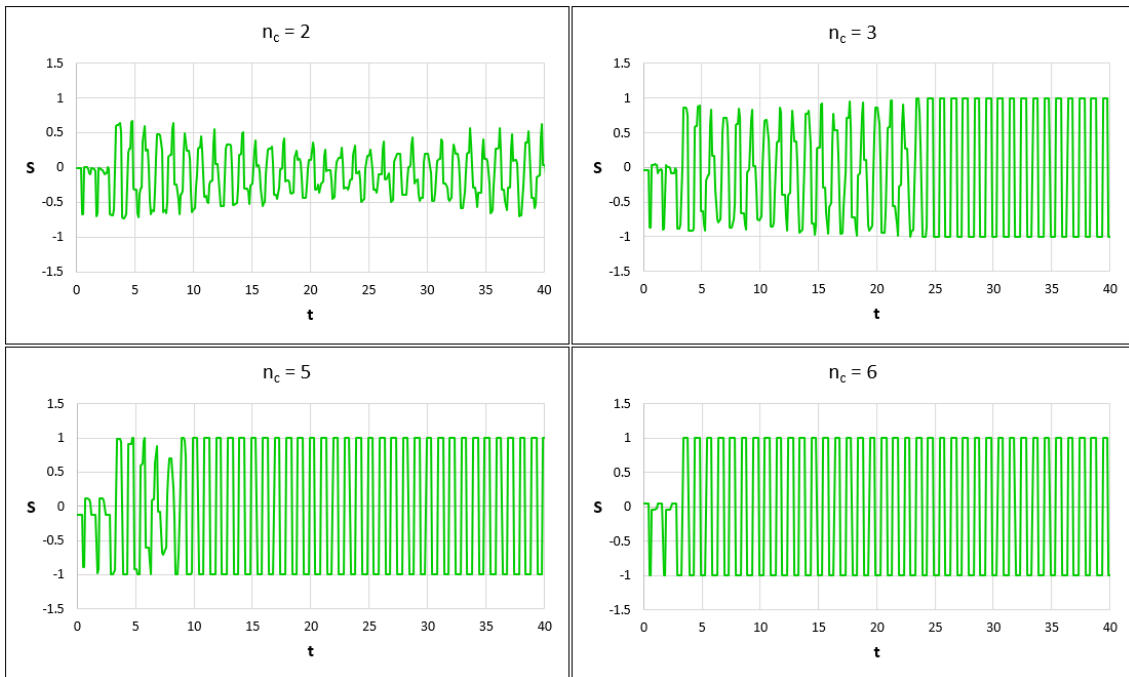
Come si può evincere dai grafici, il sistema in regime metrico riesce a sincronizzarsi più facilmente man mano che  $\beta$  diminuisce: infatti ad una diminuzione di  $\beta$  corrisponde un aumento dell'intensità dell'interazione metrica, il quale porta ogni lucciola a sentire l'effetto di un numero maggiore di vicine e dunque ad una sincronizzazione agevolata.

Per quanto riguarda l'interazione topologica, come atteso l'aumento del numero di vicini topologici  $n_c$  corrisponde ad una maggiore velocità di sincronizzazione del sistema.

Dopo questa prima analisi, è stata testata la risposta dei due modelli a cambiamenti di densità. Fissato un valore di  $\rho$  (tramite la scelta di un valore di  $L_b$ , in quanto  $N = 500$  non è stato mai variato) sono state effettuate per ogni valore dei parametri 500 simulazioni, in cui è stato misurato il numero di volte in cui il sistema riusciva effettivamente a sincronizzarsi  $\tilde{n}$ , ottenendo una probabilità di sincronizzazione



(a)



(b)

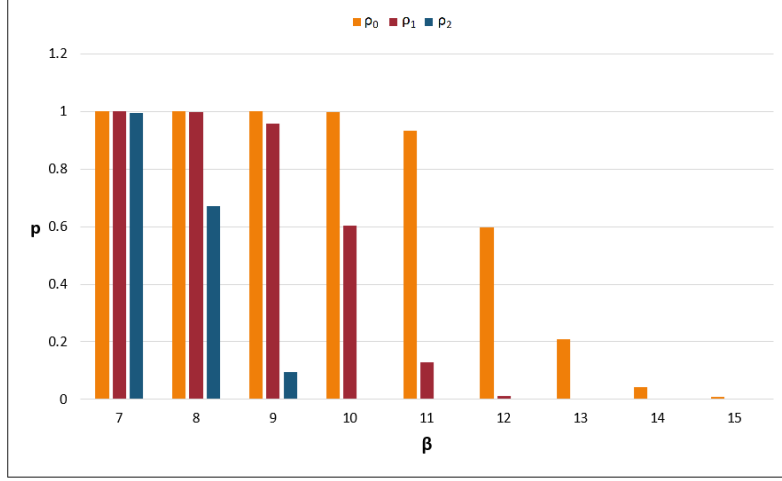
**Figura 4.3:** Andamento di  $S(t)$  in funzione del tempo per *a*) interazione metrica al variare di  $\beta$ , *b*) interazione topologica al variare di  $n_c$ , con  $N = 500$  lucciole in una scatola di lato  $L_b = 21$ : densità  $\rho_0 = 1.134$ .

$p = \frac{\bar{n}}{500}$ . I valori di densità utilizzati sono stati  $\rho_0 = 1.134$ ,  $\rho_1 = 0.833$ ,  $\rho_2 = 0.556$ , corrispondenti rispettivamente ad  $L_b = 21$ , 24.5, 30.

La sincronizzazione veniva considerata raggiunta quando vi erano almeno due in-

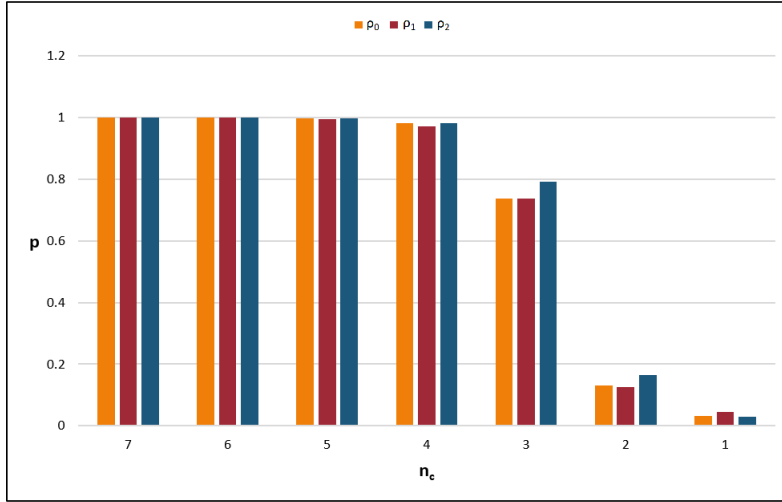


tervalli temporali consecutivi  $I_1 = [t, t + T)$  ed  $I_2 = [t + T, t + 2T)$  tali per cui  $S(t) = \pm 1 \forall t \in I_1$ ,  $S(t) = \mp 1 \forall t \in I_2$ , cioè il sistema in tali intervalli si comportava come un'onda quadra di periodo  $T$  oscillante tra i valori 1 e  $-1$ . I risultati sono riportati in Fig. 4.4 e 4.5.



$\beta$	$p(\rho_0)$	$p(\rho_1)$	$p(\rho_2)$
7	1	1	0.996
8	1	0.998	0.672
9	1	0.958	0.096
10	0.998	0.604	0
11	0.934	0.128	0
12	0.598	0.012	0
13	0.208	0	0
14	0.042	0	0
15	0.008	0	0

**Figura 4.4:** Probabilità di sincronizzazione al variare di  $\beta$  per diversi valori di densità, interazione metrica.



$n_c$	$p(\rho_0)$	$p(\rho_1)$	$p(\rho_2)$
7	1	1	1
6	1	1	1
5	0.998	0.996	0.998
4	0.982	0.971	0.982
3	0.738	0.738	0.792
2	0.132	0.125	0.166
1	0.032	0.044	0.030

**Figura 4.5:** Probabilità di sincronizzazione al variare di  $n_c$  per diversi valori di densità, interazione metrica.

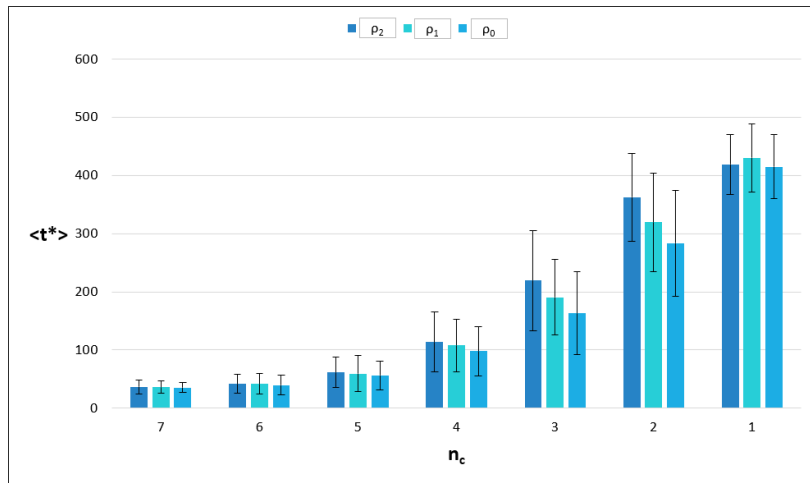
Si può osservare come la probabilità di sincronizzazione nel modello metrico dipenda fortemente dalla densità, e decresca rapidamente con l'aumentare di  $\beta$ , mentre per quanto riguarda il caso topologico è evidente come la sincronizzazione venga raggiunta con probabilità molto simili per lo stesso valore di  $n_c$  anche per valori differenti di  $\rho$ .

Dunque, come atteso, il modello topologico mostra una stabilità molto maggiore rispetto ai cambiamenti di densità.

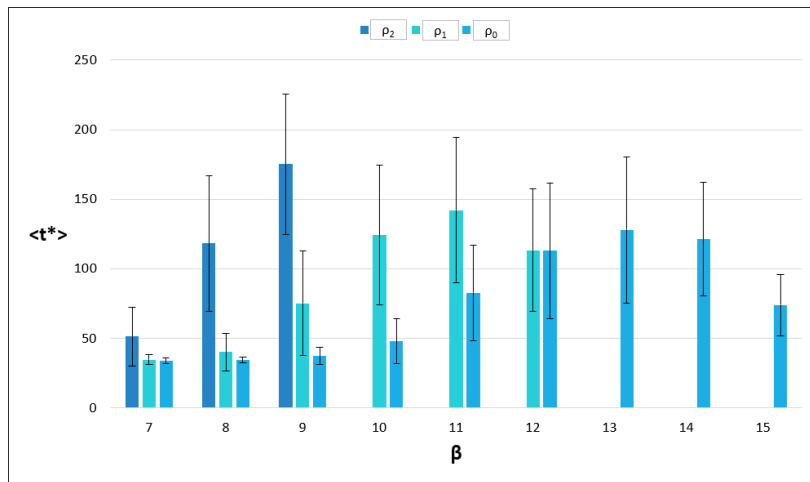
Successivamente è stato misurato il tempo medio di sincronizzazione del sistema  $\langle t^* \rangle$  per i diversi valori di  $\rho$ ; per ogni valore dei parametri, il sistema è stato osservato

per 500 differenti condizioni iniziali. Per la percentuale di tentativi in cui il sistema riusciva a sincronizzarsi è stato registrato il tempo di sincronizzazione  $t^*$ ; i valori ottenuti sono stati poi mediati sul numero di successi. I parametri analizzati sono stati ovviamente quelli per cui la probabilità di sincronizzazione risultava diversa da zero.

I risultati di quest'ultima parte della simulazione sono riportati in Fig. 4.6. Ciò che si evince dai grafici è che anche in questo caso, nel range di parametri osservato, la velocità con cui il sistema si sincronizza in regime di interazione metrica varia molto al variare della densità; al contrario per il caso topologico, a differenti densità corrispondono valori confrontabili di  $\langle t^* \rangle$ .



(a) tempo medio di sincronizzazione al variare di  $n_c$ , interazione topologica.



(b) tempo medio di sincronizzazione al variare di  $\beta$ , interazione metrica.

**Figura 4.6:**  $\langle t^* \rangle$  al variare dei parametri per entrambi i modelli, per  $\rho_0 > \rho_1 > \rho_2$ .

### 4.3 Conclusioni

Lo studio delle modalità di interazione condotto in questa tesi risulta sicuramente semplificato rispetto a ciò che effettivamente accade in natura. Ad esempio, non è stata considerata la presenza degli ostacoli naturali (come arbusti, cespugli e irregolarità del terreno) che sicuramente modellano l'auto-organizzazione degli sciami. Inoltre, le lucciole si muovono in tre dimensioni, mentre le simulazioni si riferivano ad un movimento bi-dimensionale su un piano di lato  $L_b$ .

Ad ogni modo, l'analisi effettuata offre comunque degli spunti interessanti per investigare meglio il fenomeno di sincronizzazione dei flash di questi particolari insetti. È interessante osservare che, analogamente a quello che accade nei fenomeni di flocking, il punto di forza dell'interazione topologica sia la sua indipendenza dalle variazioni di densità. Se le lucciole utilizzassero questa modalità di influenza l'una sull'altra potrebbero riuscire a mostrare un comportamento sincrono anche per densità degli sciami non molto elevate, e la sincronizzazione sarebbe più stabile relativamente a cambi improvvisi di densità dovuti a perturbazioni esterne (costituite ad esempio dagli attacchi dei predatori) rispetto ad un'interazione metrica.

È importante notare che il fatto che un'interazione intensa sia più efficiente rispetto ad un'interazione più debole al fine della sincronizzazione non implica necessariamente che la prima sia biologicamente favorita rispetto alla seconda.

Interagire con molti vicini ovviamente semplifica il raggiungimento di un comportamento sincrono a livello teorico, ma bisogna tenere conto anche dei meccanismi sensoriali interni con cui gli individui del gruppo elaborano i segnali ricevuti. Interagire con 50 vicini piuttosto che con 5 (sia in regime metrico sia topologico) risulterebbe sicuramente in un'informazione troppo complessa da elaborare e meno efficiente al fine della reazione a cambiamenti esterni. Difatti, questo è probabilmente uno dei motivi per cui gli uccelli negli stormi interagiscono con un numero di vicini tra i 6 e i 7 individui.

Infine, non è ovvio il fatto che le lucciole interagiscano *o* in maniera topologica *o* in maniera metrica: probabilmente non vi è una distinzione così netta tra i due tipi di interazione, e un'interazione metrica potrebbe dovere comunque entrare in gioco quando le distanze effettive tra gli individui risultino grandi rispetto al loro limite percettivo.

Ad ogni modo, per stabilire con precisione quale dei due modelli sia il più biologicamente accurato sarebbero necessari studi empirici analoghi a quello del gruppo di Ballerini nel campo del flocking, in modo da far luce sulla natura delle interazioni microscopiche alla base del fenomeno. A tal fine si evince dalle simulazioni che potrebbero essere investigati sia la risposta degli sciami ai cambiamenti di densità, sia il tempo che mediamente impiegano gli sciami a sincronizzarsi.

Purtroppo non sono ancora stati condotti studi accurati a riguardo, e dunque risulta impossibile determinare a priori se le lucciole interagiscano in maniera metrica o topologica.

# Bibliografia

- [1] John Bonner Buck. Synchronous rhythmic flashing of fireflies. *The Quarterly Review of Biology*, 13(3):301–314, 1938.
- [2] Brian C. Leavell, Juliette J. Rubin, Christopher J. W. McClure, Krystie A. Miner, Marc A. Branham, and Jesse R. Barber. Fireflies thwart bat attack with multisensory warnings. *Science Advances*, 4(8), 2018.
- [3] Raphaël Sarfati, Julie C. Hayes, and Orit Peleg. Self-organization in natural swarms of photinus carolinus synchronous fireflies. *Science Advances*, 7(28), 2021.
- [4] Juan Acebron, Luis Bonilla, Conrado Pérez-Vicente, Fèlix Farran, and Renato Spigler. The kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Reviews of Modern Physics*, 77, 04 2005.
- [5] M. Ballerini, N. Cabibbo, R. Candelier, A. Cavagna, E. Cisbani, I. Giardina, V. Lecomte, A. Orlandi, G. Parisi, A. Procaccini, M. Viale, and V. Zdravkovic. Interaction ruling animal collective behavior depends on topological rather than metric distance: Evidence from a field study. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 105(4):1232–1237, 2008.
- [6] Tamás Vicsek, András Czirók, Eshel Ben-Jacob, Inon Cohen, and Ofer Shochet. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. *Phys. Rev. Lett.*, 75:1226–1229, Aug 1995.
- [7] András Czirók, Mária Vicsek, and Tamás Vicsek. Collective motion of organisms in three dimensions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 264(1):299–304, 1999.
- [8] Felipe Cucker and Steve Smale. Emergent behavior in flocks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(5):852–862, 2007.
- [9] Marcelo Camperi, Andrea Cavagna, Irene Giardina, Giorgio Parisi, and Edmondo Silvestri. Spatially balanced topological interaction grants optimal cohesion in flocking models. *Interface focus*, 2:715–725, 12 2012.
- [10] Guillaume Grégoire, Hugues Chaté, and Yuhai Tu. Moving and staying together without a leader. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 181(3):157–170, 2003.
- [11] SfmL. simple and fast multimedia library. <https://www.sfmL-dev.org/>. Version 2.5.1.