ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

**Analisi dei Coefficienti
della Serie di Fourier:
Alcuni Risultati Fini**

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Bonfiglioli

Presentata da:
Alessio Rondelli

Sessione I
Anno Accademico 2021/2022

*A mia madre Elena,
A mio padre Francesco,
Alla mia Emma.*

Introduzione

Lo scopo di questa Tesi di Laurea è di analizzare il profondo rapporto che intercorre tra una funzione 2π -periodica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sommabile sul proprio periodo (questa classe di funzioni sarà denotata con $L^1_{2\pi}$), e i suoi coefficienti di Fourier reali $a_n = a_n(f)$, $b_n = b_n(f)$, definiti come di consueto come

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt.$$

Questo problema è di entità smisurata (si basti pensare ai tomi di Zygmund [13] e di Bary [2]), e quindi in questa Tesi abbiamo fatto una scelta oculata di alcuni risultati speciali, e che tuttavia ci sembrano significativi.

È ben noto che non tutte le successioni numeriche $(a_n), (b_n)$ possono essere successioni di coefficienti di Fourier $(a_n(f)), (b_n(f))$, nemmeno nel caso sia verificata la famosa condizione di Riemann-Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Ad esempio la serie ottenuta con la scelta $a_n = 0$, $b_n = 1/\ln n$, ossia

$$\sum_n \frac{1}{\ln n} \sin nt,$$

non può essere la serie di Fourier di nessuna funzione $f \in L^1_{2\pi}$, poiché in tal caso (in forza di alcuni risultati sulla integrabilità termine a termine delle serie di Fourier) dovrebbe convergere la seguente serie numerica (il che non è)

$$\sum_n \frac{b_n}{n} = \sum_n \frac{1}{n \ln n}.$$

Ne segue che le successioni reali che nascono come $(a_n(f)), (b_n(f))$ per qualche $f \in L^1_{2\pi}$ devono essere speciali. Il loro essere speciale non può tuttavia quantificarsi con un preciso ordine di decadimento, in via del seguente argomento (che tornerà ancora, declinato in varie maniere, nella Tesi): data una qualunque successione ϵ_n che tende a 0 molto lentamente, se ne estraiamo una sottosuccessione ϵ_{n_k} tale che

$$\sum_k |\epsilon_{n_k}| < \infty,$$

allora la serie trigonometrica

$$f(t) := \sum_k \epsilon_{n_k} \cos(n_k t)$$

definisce (per convergenza totale) una funzione continua la cui serie di Fourier è proprio la suddetta (per via della convergenza uniforme della serie che garantisce scambio di serie e integrale), e i coefficienti di questa serie di Fourier sono estratti da una successione che tende a zero molto lentamente.

Un contesto in cui invece conta molto la velocità del decadimento dei coefficienti è il seguente. Uno dei primi argomenti che affrontiamo nella Tesi è infatti lo studio del legame tra *la regolarità di f e la velocità di decadimento dei suoi coefficienti*. Semplificata all'osso, la relazione è riassumibile nel modo seguente (qui $p \geq 0$ è un intero e $\epsilon > 0$):

$$(\spadesuit) \quad \begin{array}{ll} f \in C^p & \implies a_n, b_n = o\left(\frac{1}{n^p}\right) \\ f \in C^p & \iff a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^{p+1+\epsilon}}\right). \end{array}$$

La implicazione ' $\iff$ ' è da intendersi nel senso che f coincide q.o. con una funzione C^p .

Già nel caso della regolarità più bassa, ossia $p = 1$, che recita

$$(\diamond) \quad \begin{array}{ll} f \in C^1 & \implies a_n, b_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \\ f \in C^1 & \iff a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^{2+\epsilon}}\right), \end{array}$$

si hanno delle tipicità e delle tecniche dimostrative interessanti, e quindi entriamo un po' nel dettaglio. Salta agli occhi che:

- ($\diamond$) non stabilisce una condizione necessaria e sufficiente (la presenza di caratterizzazioni è cosa piuttosto rara nella teoria di Fourier);
- tuttavia, le stime precedenti sono abbastanza "sharp."

Spieghiamoci. Restando nel caso tipico $p = 1$ (il caso di p generico essendo una generalizzazione abbastanza diretta), che la seconda freccia di ($\diamond$) non si possa invertire si vede con l'esempio seguente: la serie trigonometrica

$$(\star) \quad \sum_{k \geq 1} \frac{\sin(k^{20}t)}{k^{22}}$$

definisce una funzione $f(t)$ che è C^1 (come si verifica dalla convergenza totale di ($\star$) e della serie delle derivate prime), la cui serie di Fourier è ($\star$) stessa. Tale f ha i coefficienti $b_n(f)$ dati da molti 0 e, quando n è del tipo $1^{20}, 2^{20}, 3^{20}, 4^{20}, \dots$, da una sottosuccessione di

$$\frac{1}{n^{1+0.1}},$$

che è appena migliore di $o(1/n)$ e quindi non è certo un $O(1/n^{2+\epsilon})$. Si noti la somiglianza di questo esempio con l'argomento precedente relativo a Riemann-Lebesgue.

Questo esempio non è casuale e l'idea che vi sta dietro mostra la "sharpness" anche della prima freccia. Infatti, data una qualunque successione $\epsilon_n = o(1/n)$, ad esempio

$$\epsilon_n = \frac{1}{n^{1+\alpha}} \quad \text{con } \alpha \text{ piccolissimo,}$$

esiste una funzione C^1 che ha come successione (ad esempio) dei b_n una sottosuccessione degli ϵ_n . Basta infatti scegliere una sottosuccessione n_k tale che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} n_k |\epsilon_{n_k}|$ converga, e considerare (con ragionamenti come sopra) la funzione C^1 definita da

$$f(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_{n_k} \sin(n_k t).$$

Questo mostra che la stima $o(1/n)$ è in un certo senso la migliore che ci possiamo aspettare per funzioni C^1 .

La dimostrazione della prima implicazione " $f \in C^1 \implies a_n, b_n = o(\frac{1}{n})$ " è molto semplice (e molto tipica); basta infatti integrare per parti (facciamo il caso dei b_n ad esempio):

$$a_n(f') = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \underbrace{\left[f(t) \cos nt \right]_0^{2\pi}}_{=0} + \frac{n}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt = n b_n(f),$$

da cui $n b_n(f)$ deve tendere a zero per il Lemma di Riemann-Lebesgue, che garantisce che $a_n(f')$ tende a 0 poiché f' è sommabile.

Questo stesso argomento si generalizza ampiamente ogni volta che si può integrare per parti, ad esempio quando f è C^1 a tratti (questo mostra anche che la prima implicazione di $(\diamond)$ non si inverte poiché la stima $a_n, b_n = o(1/n)$ non può distinguere tra C^1 e C^1 a tratti, visto che la dimostrazione è la stessa), o molto più in generale quando f è *assolutamente continua*, altro caso che supporta la integrazione per parti.

Abbiamo quindi appena descritto come provare che

$$\text{per ogni } f \text{ assolutamente continua si ha } a_n, b_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Questo risultato (ancora una volta) non si può invertire, come mostra l'esempio

$$g(t) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nt}{n \log n}.$$

Infatti, visto che (rispetto al sistema trigonometrico standard di $L^2(-\pi, \pi)$) i coefficienti di questa serie sono in ℓ^2 , ossia la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n \log n}\right)^2 \quad \text{converge,}$$

g definisce una funzione di $L^2(-\pi, \pi)$ (e quindi a maggior ragione di $L^1_{2\pi}$) che ha come serie di Fourier la serie che definisce g ; tuttavia la funzione g non può essere assolutamente continua, altrimenti (dal noto Criterio di Jordan per le funzioni a variazione limitata, cosa che tutte le funzioni assolutamente continue sono) la serie di Fourier di g dovrebbe convergere puntualmente ovunque, mentre per $t = 0$ si ha

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \infty.$$

La comparsa della classe delle funzioni assolutamente continue nella nostra dissertazione, nonché la menzione delle funzioni a variazione limitata nel precedente argomento (che assieme alle funzioni assolutamente continue costituiscono il nocciolo dell'Analisi delle funzioni di una variabile reale) suggerisce un'indagine dedicata alle funzioni a variazioni limitata e ai loro coefficienti di Fourier.

Il risultato che dimostriamo nella Tesi è il seguente, che fa eco a quello sulle funzioni assolutamente continue:

$$(\heartsuit) \quad \text{per ogni } f \text{ a variazione limitata si ha } a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

La sharpness della stima è banale: la funzione 2π -periodica che estende la funzione definita da

$$h(t) = \frac{\pi - t}{2}, \quad t \in [0, 2\pi)$$

è a variazione limitata, ed ha come serie di Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nt.$$

Ne segue che i coefficienti $b_n = 1/n$ sono $O\left(\frac{1}{n}\right)$, senza essere O di nessun'altra potenza di $1/n$. Questo esempio coinvolge una funzione discontinua. Ci si può chiedere se aggiungendo l'ipotesi di continuità la stima dei coefficienti migliori: questo non avviene poiché una opportuna modificazione della scala di Vitali (resa continua e 2π -periodica) fornisce un esempio di funzione a variazione limitata, continua e con dei coefficienti di Fourier che posseggono una sottosuccessione in comune con $1/n$, e quindi la stima non è migliore della precedente $O(1/n)$.

La non reversibilità della condizione in $(\heartsuit)$ non è banale. Per quanto è semplice trovare la funzione che verifica $b_n = 1/n$ (e $a_n = 0$), non è altrettanto banale trovare la funzione che verifica $a_n = 1/n$ (e $b_n = 0$). Si può dimostrare che

$$-\log(\sin(t/2)) = \log 2 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \cos nt, \quad \forall t \neq 2k\pi.$$

Evidentemente questa funzione è illimitata vicino a $0 + 2k\pi$ e quindi, nonostante abbia i coefficienti $O(1/n)$, non può essere a variazione limitata.

Si è detto di quanto sia raro, nella teoria di Fourier, imbattersi in teoremi caratterizzanti certe classi di funzioni; ebbene in questa Tesi ne vedremo essenzialmente tre. Il primo ci viene fornito gratis da (♠). È chiaro che (♠) implica immediatamente che

$$f \in C^\infty \text{ se e solo se } a_n(f), b_n(f) = o\left(\frac{1}{n^p}\right), \text{ per ogni } p \in \mathbb{N}.$$

(Al solito, la implicazione ‘ $\Leftarrow$ ’ è da intendersi nel senso che f coincide q.o. con una funzione C^∞ .)

Altamente non banale (ed estremamente tecnica) è invece la dimostrazione di un teorema “companion” del precedente, nel regime delle funzioni reali analitiche (C^ω , per brevità), che recita quanto segue:

$$f \in C^\omega \text{ se e solo se } a_n(f), b_n(f) = O(\theta^n), \text{ per un qualche } \theta \in (0, 1).$$

Alla luce di questi due risultati, per trovare una funzione C^∞ ma non C^ω è sufficiente trovare dei coefficienti di Fourier “strettamente intermedi” tra ogni $o(1/n^p)$ (al variare di $p \in \mathbb{N}$) e $O(\theta^n)$ (al variare di $\theta \in (0, 1)$). Un esempio di serie di Fourier siffatta è

$$\sum_n \frac{\sin(nt)}{e^{\sqrt{n}}}.$$

Assai non banale è fornire un esempio di una funzione C^∞ che non è reale-analitica *in nessun punto* (forniremo la prova nella Sezione 3.2): essa è fornita da una variante con addendi rubati dalla precedente:

$$\sum_n \frac{\sin(n!t)}{e^{\sqrt{n!}}}.$$

La capacità della Teoria di Fourier di fornire esempi notevoli di funzioni patologiche è esibita da un altro famoso risultato: esistono funzioni (somma di serie trigonometriche) continue ma non derivabili in alcun punto; un esempio è la funzione di Weierstrass (Sezione 3.3)

$$\sum_n \frac{1}{2^n} \cos(13^n x).$$

Per concludere la descrizione dei principali risultati della Tesi, introduciamo una condizione di crescita piuttosto lenta per le successioni di numeri reali $(a_n), (b_n)$; per un motivo che apparirà chiaro tra breve, diciamo che $(a_n), (b_n)$ verificano la condizione (W) se vale quanto segue:

$$(W) \quad \sum_{k=1}^n k(|a_k| + |b_k|) = o(n) \quad \text{se } n \rightarrow \infty.$$

Ad esempio, è semplice provare che una condizione sufficiente a (W) è $a_n, b_n = o(1/n)$ (segue banalmente ad esempio dal Teorema di Cesàro). Ebbene proveremo che se $f \in L^1_{2\pi}$ ha i coefficienti di Fourier che verificano (W), allora la serie di Fourier di f converge a f puntualmente quasi

dappertutto. La dimostrazione fa ricorso alla teoria di Fejér: infatti, dalla seguente stima tra n -esimo polinomio di Fourier $S_n(f)$ ed n -esimo polinomio di Fejér $\sigma_n(f)$

$$|S_n(f)(x) - \sigma_n(f)(x)| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k(|a_k| + |b_k|),$$

segue che (W) garantisce che il limite di $S_n(f)(x)$ coincide col limite di $\sigma_n(f)(x)$ quando quest'ultimo esiste. Ma visto che dal Teorema di Lebesgue-Fejér per quasi ogni punto x quest'ultimo limite è $f(x)$, si ha il risultato di convergenza puntuale q.o. di cui sopra.

La condizione (W) è d'interesse per via di un risultato dovuto a Wiener che caratterizza, tra le funzioni a variazione limitata, quelle continue: infatti dimostreremo nella Sezione 2.1.3 che se f è a variazione limitata su $[0, 2\pi]$, allora la condizione (W) per i suoi coefficienti di Fourier caratterizza la continuità di f . Questo è il terzo teorema di caratterizzazione di cui parlavamo tra una classe funzionale e una condizione di decrescita dei coefficienti di Fourier. In particolare, se una funzione a variazione limitata ha i coefficienti di Fourier che sono $o(1/n)$, allora f è continua. Il viceversa non sussiste, in forza del controesempio già menzionato della funzione tipo scala di Vitali, continua e a variazione limitata i cui coefficienti non sono $o(1/n)$.

Chiudono la tesi altri due controesempi notevoli: l'esistenza di una funzione continua la cui serie di Fourier non converge in un pre-assegnato punto e l'esistenza di una funzione $L^1_{2\pi}$ la cui serie di Fourier non converge *in nessun punto* (controesempio di Kolmogorov). Di quest'ultimo diamo solo una traccia di dimostrazione, essendo essa spaventosamente tecnica.

Indice

Introduzione	i
1 Nozioni Preliminari	1
1.1 Notazioni e fatti noti	1
1.1.1 Funzioni AC e funzioni BV	5
1.2 Alcuni semplici esempi di serie di Fourier	7
2 Analisi dei Coefficienti di Fourier	11
2.1 Comportamento Asintotico dei Coefficienti	11
2.1.1 Ordine di annullamento dei coefficienti e regolarità	13
2.1.2 Coefficienti di Fourier di funzioni BV	18
2.1.3 Il Teorema di Wiener	20
2.1.4 Coefficienti di Fourier di funzioni analitiche	24
2.2 Alcuni risultati sulle serie trigonometriche	27
3 Controesempi notevoli	35
3.1 Una funzione continua la cui serie di Fourier non converge in un punto assegnato . .	35
3.2 Una funzione di classe C^∞ ma non C^ω in nessun punto	39
3.3 La funzione di Weierstrass	41
3.4 Il Controesempio di Kolmogorov	43
Bibliografia	45

Capitolo 1

Nozioni Preliminari

Nel corso di questa tesi useremo alcuni risultati preliminari (presentati in questo capitolo) che, sebbene siano di interesse indipendente, esulano dal fine della tesi stessa, e vengono quindi riportati senza dimostrazione.

1.1 Notazioni e fatti noti

Notazione 1. Ogniqualevolta tale limite è ben posto ed esiste, useremo la notazione

$$f(x+0) := \lim_{t \rightarrow x^+} f(t);$$

analogamente per $f(x-0)$.

Notazione 2. Denotiamo con $L_{2\pi}^1$ l'insieme delle funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che sono 2π -periodiche e tali che $f|_{(-\pi, \pi)}$ è sommabile su $(-\pi, \pi)$.

Definizione 1.1 (Coefficienti di Fourier in $L_{2\pi}^1$). Se $f \in L_{2\pi}^1$, definiamo

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \, dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

dove, come ben noto, a_n, b_n sono i coefficienti di Fourier di f in forma reale, e i c_k sono i coefficienti di Fourier in forma complessa di f . In tal caso scriveremo, formalmente,

$$f \sim (a_n, b_n) \quad e \quad f \sim (c_k).$$

Saltuariamente scriveremo anche $a_n(f), b_n(f), c_k(f)$ in luogo dei suddetti coefficienti. Come ci è ben noto, anche nel contesto dello spazio di Hilbert $L^2(a, b)$ si può dare la analoga definizione seguente:

Definizione 1.2 (Coefficienti di Fourier in $L^2_{(a,b)}$). Sia $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema ortogonale in $L^2(a, b)$, ovvero

$$\int_a^b \Phi_n(x) \overline{\Phi_m(x)} dx = \delta_{m,n} \|\Phi_n\|_{L^2},$$

dove $\delta_{m,n}$ è la delta di Kronecker. Se $f \in L^2(a, b)$ e $n \in \mathbb{N}$ è possibile definire

$$c_n = \frac{1}{\|\Phi_n\|_{L^2}} \int_a^b f(x) \overline{\Phi_n(x)} dx.$$

Si scriverà in tal caso $f \sim (c_n)$.

Osservazione 1.3. In particolare il sistema trigonometrico $\{1, \cos kt, \sin kt \mid k \in \mathbb{N}\}$ è ortogonale in $L^2(-\pi, \pi)$, per cui se $f \in L^2_{2\pi}$ si scriverà $f \sim (a_n, b_n)$. Dato che $L^2(-\pi, \pi)$ è contenuto in $L^1(-\pi, \pi)$, ci potrebbe essere ambiguità con le precedenti notazioni; così non è, poiché la Definizione 1.2 è compatibile con il caso $f \in L^1_{2\pi}$ definito nella Definizione 1.1 (si noti infatti che le funzioni del sistema trigonometrico sono limitate).

Dato il polinomio trigonometrico

$$S = \sum_{k=1}^m (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

il numero naturale $n = \max \{k : a_k \neq 0 \vee b_k \neq 0\}$ viene definito l'ordine (o grado) del polinomio trigonometrico S .

Definizione 1.4 (Serie e polinomi di Fourier). Data $f \in L^1_{2\pi}$, definiamo

$$S_n(f)(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k(f) \cos kt + b_k(f) \sin kt)$$

l' n -esimo polinomio di Fourier di f . La serie trigonometrica

$$S(f)(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f) \cos nt + b_n(f) \sin nt)$$

è la serie di Fourier di f .

Non è difficile dimostrare il seguente fatto:

Teorema 1.5. Il sistema trigonometrico $\{1, \cos kt, \sin kt : k \in \mathbb{N}\}$ ha la seguente proprietà: se $f \in L^1_{2\pi}$ ha tutti i coefficienti di Fourier $a_n(f), b_n(f)$ nulli, allora f è nulla quasi ovunque.

Per la dimostrazione si veda [5, Theorem 19]. Da qui segue banalmente il seguente risultato:

Corollario 1.6. Se $f, g \in L^1_{2\pi}$ hanno gli stessi coefficienti di Fourier, allora coincidono in $L^1_{2\pi}$, ovvero sono uguali quasi ovunque.

Questo ha una importante conseguenza che ora descriviamo:

Corollario 1.7. *Sia $f \in L^1_{2\pi}$ tale che le successioni $(a_n(f))$ e $(b_n(f))$ stanno in ℓ^2 , ossia*

$$\sum_n |a_n(f)|^2 < \infty \quad e \quad \sum_n |b_n(f)|^2 < \infty. \quad (1.1)$$

Allora $f \in L^2(-\pi, \pi)$ e $f(t) = S(f)(t)$ per quasi ogni t .

Dimostrazione. Usiamo la notazione complessa. L'ipotesi (1.1) implica che

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 < \infty,$$

e dunque, posto $S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikt}$, la successione $(S_n(f))$ è di Cauchy in $L^2 = L^2(-\pi, \pi)$. Quindi esiste $g \in L^2$ tale che $S_n(f) \rightarrow g$ in L^2 per $n \rightarrow \infty$. Da questo segue banalmente (per continuità del prodotto scalare rispetto alla convergenza in L^2) che

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ikt} dt, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Visto che $L^2(-\pi, \pi) \subset L^1(-\pi, \pi)$, segue che f e g sono due funzioni in $L^1_{2\pi}$ con gli stessi coefficienti di Fourier. Dal Corollario 1.6 deduciamo che $f = g$ quasi dappertutto; essendo $g \in L^2$, ne segue che f sta non solo in L^1 ma anche in L^2 .

Sempre da $f = g$ q.o., segue che $S_n(f) \rightarrow f$ in L^2 per $n \rightarrow \infty$. Dalla teoria degli spazi L^p questo dovrebbe implicare solo che esiste una sottosuccessione $S_{k_n}(f)$ tale che $S_{k_n}(f)(t) \rightarrow f(t)$ (per $n \rightarrow \infty$) per quasi ogni t . Tuttavia, per un profondo risultato di Carleson [3] sulle serie di Fourier in L^2 non occorre estrarre una sottosuccessione:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(t) = f(t), \quad \text{per quasi ogni } t,$$

che equivale esattamente a $f(t) = S(f)(t)$ per quasi ogni t . □

Definizione 1.8 (Nuclei di Dirichlet e di Fejér). *Definiamo, per ogni $k \geq 0$ intero,*

$$D_k(t) = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^k \cos jt,$$

il nucleo di Dirichlet di grado k . Possiamo ora anche definire

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t),$$

il nucleo di Fejér di grado n .

Osservazione 1.9. Siccome è un risultato noto che

$$D_k(t) = \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} = \frac{\cos kt - \cos(k+1)t}{4 \sin^2 \frac{t}{2}}, \quad (1.2)$$

allora (si noti la somma telescopica)

$$\begin{aligned} K_n(t) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{\cos kt - \cos(k+1)t}{4 \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - \cos(n+1)t}{(n+1)4 \sin^2 \frac{t}{2}} \\ &= \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2. \end{aligned}$$

Per cui evidentemente $K_n(t) \geq 0$ per ogni t e per ogni n .

Definizione 1.10 (Polinomi di Fejér). Data $f \in L^1_{2\pi}$ e $n \geq 0$ intero, definiamo

$$\sigma_n(f)(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f)(t),$$

l' n -esimo polinomio di Fejér di f .

Un risultato molto utile della teoria di base delle serie di Fourier è il seguente:

Teorema 1.11 (Teorema di Fejér). Sia $f \in L^1_{2\pi}$. Se t è un punto di continuità per f o un punto di discontinuità del primo tipo (ossia un salto), allora $\sigma_n(f)(t)$ converge per $n \rightarrow \infty$ rispettivamente a $f(t)$ e $(f(t+0) - f(t-0))/2$.

Se f è continua in $[\alpha, \beta] \subseteq (-\pi, \pi)$, allora σ_n converge uniformemente a f in $[\alpha, \beta]$.

Per la prova si veda [2, Theorem 1.47]. Questo risultato fu generalizzato da Lebesgue che provò il seguente teorema.

Teorema 1.12 (Teorema di Lebesgue-Fejér). Sia $f \in L^1_{2\pi}$. Allora $\sigma_n(f)$ converge puntualmente quasi ovunque ad f su $[-\pi, \pi]$.

Per la prova si veda [2, Theorem 1.49]. Nel seguito faremo ampio uso delle seguenti notazioni:

Definizione 1.13 (Moduli di continuità). Sia f una funzione definita sull'intervallo (a, b) . Sia $\delta > 0$. Il modulo di continuità di f di ampiezza δ è il numero (in $[0, +\infty]$)

$$\omega(\delta, f) = \sup \left\{ |f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in (a, b), |x_1 - x_2| < \delta \right\}.$$

Ovviamente, se $0 < \delta_1 < \delta_2$ si ha $\omega(\delta_1, f) \leq \omega(\delta_2, f)$ ossia $\omega(\cdot, f)$ è una funzione crescente su $(0, +\infty)$. Esiste dunque (finito o $+\infty$) il limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(\delta, f) = \inf_{\delta > 0} \omega(\delta, f).$$

Ovviamente questo limite è 0 se e solo se f è uniformemente continua su (a, b) .

Definizione 1.14 (Moduli di integrabilità). Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (con $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$) una funzione sommabile. Sia $\delta > 0$. Il modulo di integrabilità di f di ampiezza δ è

$$\omega^{(1)}(\delta, f) = \sup_{0 \leq |h| \leq \delta} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx.$$

Nel suddetto integrale si intende di avere esteso f a 0 su $\mathbb{R} \setminus (a, b)$.

Osservazione 1.15. Da noti risultati degli spazi L^p (si veda ad esempio [5, Th. 3 pag. 10]), se $f \in L^1$ allora (continuità in media dell'integrale)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0;$$

ne segue che, per f sommabile, vale $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega^{(1)}(\delta, f) = 0$.

1.1.1 Funzioni AC e funzioni BV

Nel seguito faremo ampio uso di funzioni assolutamente continue e funzioni a variazione limitata; le definizioni sono note dai corsi di Analisi Reale di base.

Osservazione 1.16. È fatto noto di Analisi Reale ([4, Theorem 3.35]) che se f è una funzione assolutamente continua (AC, per brevità) su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, allora esiste f' quasi ovunque su I . Se $I = [a, b]$ allora è ben noto anche che $f' \in L^1(a, b)$ e vale la formula (di tipo Torricelli-Barrow)

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

La derivabilità q.o. delle funzioni AC segue dal fatto che una funzione AC su un intervallo $[a, b]$ è ivi a variazione limitata, e le funzioni a variazione limitata sono banalmente differenza di due funzioni monotone; sappiamo poi che le funzioni monotone sono derivabili quasi dappertutto.

Teorema 1.17 (Integrazione per parti per AC). Siano u, v funzioni assolutamente continue nell'intervallo $[a, b]$. Allora vale

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

È possibile trovare la dimostrazione in [9, Chapter IX, Section 6, Theorem 4].

Definizione 1.18 (Variazione totale). Sia f una funzione definita nell'intervallo $[a, b]$; ricordiamo che la variazione totale di f su $[a, b]$ è

$$\bigvee_a^b f := \sup_{\sigma} \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|,$$

dove $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ è una partizione di $[a, b]$.

Come ben noto dai corsi di Analisi, se $\bigvee_a^b f$ è finito, si dice che f è a variazione limitata (BV, per brevità).

Osservazione 1.19. Nel seguito daremo per scontato il seguente risultato della teoria elementare della convergenza puntuale delle serie di Fourier:

(*Teorema di Jordan.*) Sia f a variazione limitata su $[0, 2\pi]$, prolungata per periodicità su $\mathbb{R}$. Allora, per ogni $t \in \mathbb{R}$, la serie di Fourier $S(f)(t)$ di f converge puntualmente a

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}.$$

Visto che le funzioni AC sono anche BV, questo teorema implica che la serie di Fourier $S(f)(t)$ di una f assolutamente continua converge puntualmente a $f(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Nella teoria delle serie di Fourier si fa ampio uso dell'integrale di Riemann-Stieltjes; ci limitiamo a ricordarne la definizione.

Definizione 1.20 (Integrale di Riemann-Stieltjes). Sia $\sigma = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ una partizione di $[a, b]$. Per ogni $k = 1, \dots, n$, sia t_k un punto nel sottointervallo $[x_{k-1}, x_k]$ e poniamo $T = t_1, \dots, t_n$ (detta tag di σ). Siano f, g due funzioni limitate su $[a, b]$. Una somma del tipo

$$S(\sigma, T, f, g) = \sum_{k=1}^n f(t_k)(g(x_k) - g(x_{k-1}))$$

viene detta una somma di Riemann-Stieltjes di f rispetto a g .

Si dice che f è Riemann-Stieltjes integrabile su $[a, b]$ rispetto a g se esiste $A \in \mathbb{R}$ tale per cui, per ogni $\epsilon > 0$, esiste una partizione σ_ϵ di $[a, b]$ tale che, per ogni partizione σ più fine di σ_ϵ e per ogni tag T di σ , si ha $|S(\sigma, T, f, g) - A| < \epsilon$. Se tale numero esiste è univocamente determinato.

Viene denotato con

$$\int_a^b f(x) dg(x),$$

e viene chiamato integrale di Riemann-Stieltjes di f rispetto a g su $[a, b]$.

Osservazione 1.21. Si può dimostrare che se f è continua in $[a, b]$ e g è ivi a variazione limitata, l'integrale di Riemann-Stieltjes di f rispetto a g esiste. Inoltre se g è anche assolutamente continua si ha la notevole formula¹

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx. \quad (1.3)$$

Anche le funzioni a variazione limitata hanno una formula di integrazione per parti:

Teorema 1.22 (Integrazione per parti per BV). Siano $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se v è Riemann-Stieltjes integrabile su $[a, b]$ rispetto a u , allora u è Riemann-Stieltjes integrabile su $[a, b]$ rispetto a v , e vale

$$\int_a^b u(x) dv(x) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) du(x).$$

¹Per la dimostrazione si veda [9, Chapter IX, Section 6, Theorem 3]

Ad esempio, se v è continua e u è a variazione limitata, allora v è Riemann-Stieltjes integrabile rispetto a u , e la formula di cui sopra è valida.

Per la prova, si veda [1, Theorems 7.6, 7.27].

1.2 Alcuni semplici esempi di serie di Fourier

In vista dei teoremi presenti nella tesi è utile stilare una breve lista di funzioni elementari prese da [8] dotate di serie di Fourier facilmente calcolabili. L'obiettivo è rendere più cristallini i risultati che saranno presentati nei prossimi capitoli, fornendo una galleria pronta di coefficienti di Fourier.

Esempio 1.23. Consideriamo la funzione estesa per 2π -periodicità

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t \leq 0 \\ 1 & 0 < t \leq \pi. \end{cases}$$

Visibilmente la funzione è discontinua e a variazione limitata. È facile verificare che il suo sviluppo in serie di Fourier è²

$$S(f)(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)t.$$

Osserviamo che i suoi coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier sono $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Esempio 1.24. Consideriamo la funzione (dispari) 2π -periodica che su $[0, 2\pi)$ coincide con

$$f(t) = \frac{\pi - t}{2}.$$

Visibilmente la funzione è discontinua (solo in $t = 0$) ed è a variazione limitata. È facile verificare che il suo sviluppo in serie di Fourier è

$$S(f)(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nt.$$

Osserviamo che $b_n = 1/n$; dunque questi coefficienti di Fourier sono $O\left(\frac{1}{n}\right)$ (senza essere O di nessun'altra potenza di $1/n$).

Esempio 1.25. Consideriamo la funzione (pari) estesa per 2π -periodicità

$$f(t) = t \sin t \quad -\pi < t \leq \pi.$$

Visibilmente la funzione è assolutamente continua ma non di classe C^1 (nei punti $\pm\pi$ ha dei punti angolosi). È facile verificare che il suo sviluppo in serie di Fourier è

$$S(f)(t) = 1 - \frac{1}{2} \cos t + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - 1} \cos nt.$$

²Si noti che sottraendo $1/2$ da f si ottiene una funzione dispari; non ci stupisce che, a parte $a_0/2 = 1/2$, si ottenga una serie di soli seni.

Osserviamo che i suoi coefficienti di Fourier sono $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ e quindi sono anche $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Esempio 1.26. Consideriamo la funzione (dispari) estesa per 2π -periodicità

$$f(t) = t^2 \sin t \quad -\pi < t \leq \pi.$$

Visibilmente la funzione è di classe C^1 (nei punti $\pm\pi$ la derivata prima è $-\pi^2$) e la sua derivata è assolutamente continua,³ però f non è di classe C^2 . È facile verificare che il suo sviluppo in serie di Fourier è

$$S(f)(t) = \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}\right) \sin t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 8n}{(n^2 - 1)^2} \sin nt.$$

Osserviamo che i suoi coefficienti di Fourier sono $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ e quindi $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Esempio 1.27. Consideriamo infine la funzione 2π -periodica

$$f(t) = \frac{1}{5 - 3 \cos t}.$$

Visibilmente la funzione è analitica. È facile verificare che il suo sviluppo di Fourier è

$$S(f)(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cos nt.$$

Osserviamo che i suoi coefficienti di Fourier sono $O\left(\frac{1}{3^n}\right)$.

Ecco un ultimo esempio tutt'altro che banale.

Esempio 1.28. Consideriamo la funzione 2π -periodica che coincide con

$$f(t) = -\log(\sin(t/2)), \quad t \in (0, 2\pi).$$

La possiamo definire come vogliamo in $t = 0 + 2k\pi$; una volta resa 2π -periodica, essa è pari (per le proprietà di simmetria di $\sin(t/2)$ rispetto all'asse $t = \pi$), e verifica

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = +\infty.$$

³Si vede facilmente che f' è continua e ha dei punti angolosi in $\pm\pi$; è dunque una funzione continua e C^1 a tratti, dunque assolutamente continua.

Calcoliamone i coefficienti di Fourier. Visto che f è pari, si ha $b_n = 0$ per ogni $n \geq 1$. Calcoliamo poi a_0 (per questioni di simmetria):

$$\begin{aligned}
 a_0 &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \log(\sin(t/2)) dt = -\frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \log(\sin(x)) dx \\
 &\text{(per duplicazione } \sin(x) = 2 \sin(x/2) \cos(x/2), \text{ e tutti i fattori sono } > 0) \\
 &= -\frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\log 2 + \log \sin(x/2) + \log \cos(x/2)) dx \\
 &= -2 \log 2 - \frac{8}{\pi} \int_0^{\pi/4} \log \sin y dy - \frac{8}{\pi} \int_0^{\pi/4} \log \cos y dy \\
 &\text{(nel secondo integrale facciamo la sostituzione } y = \pi/2 - t) \\
 &= -2 \log 2 - \frac{8}{\pi} \int_0^{\pi/4} \log \sin y dy - \frac{8}{\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \log \sin t dt \\
 &= -2 \log 2 - \frac{8}{\pi} \int_0^{\pi/2} \log \sin y dy = -2 \log 2 - \frac{4}{\pi} \int_0^\pi \log \sin(x/2) dx \\
 &= -2 \log 2 + 2a_0.
 \end{aligned}$$

Risolvendo rispetto ad a_0 si trova $a_0 = 2 \log 2$ e quindi $a_0/2 = \log 2$.

Ora dimostriamo che $a_n = 1/n$ per ogni $n \geq 1$. Si ha

$$\begin{aligned}
 a_n &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nt) \log(\sin(t/2)) dt = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(2nt) \log \sin t dt \\
 &\text{(integriamo per parti, dando per sottinteso l'integrale improprio)} \\
 &= -\frac{2}{\pi} \left(\underbrace{\left[\log \sin t \cdot \frac{\sin(2nt)}{2n} \right]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi \frac{\sin(2nt)}{2n} \cdot \frac{\cos t}{\sin t} dt \right) \\
 &= \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \sin(2nt) \frac{\cos t}{\sin t} dt =: \frac{1}{n\pi} u_n.
 \end{aligned}$$

La dimostrazione sarà completa se proviamo che la successione (u_n) è costante, ed uguale a π ; prima proviamo la costanza di (u_n) e poi restringiamoci a provare che $u_1 = \pi$. Si ha

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \int_0^\pi (\sin(2nt + 2t) - \sin(2nt)) \frac{\cos t}{\sin t} dt \quad \text{(prostaferesi)} \\
 &= 2 \int_0^\pi \cos((2n+1)t) \sin(2t) \frac{\cos t}{\sin t} dt \quad \text{(duplicazione)} \\
 &= 4 \int_0^\pi \cos((2n+1)t) \cos^2 t dt \quad \text{(bisezione)} \\
 &= 2 \underbrace{\int_0^\pi \cos((2n+1)t) dt}_{=0} + 2 \int_0^\pi \cos((2n+1)t) \cos(2t) dt \quad \text{(Werner)} \\
 &= \int_0^\pi \cos((2n+3)t) dt + \int_0^\pi \cos((2n-1)t) dt = 0 + 0 = 0.
 \end{aligned}$$

Resta solo da calcolare u_1 ; usando la duplicazione, si ha

$$u_1 = \int_0^\pi \sin(2t) \frac{\cos t}{\sin t} dt = 2 \int_0^\pi \cos^2 t dt = \pi.$$

Trovati i coefficienti di Fourier di f , ci basta osservare che f è di classe C^∞ in ogni $t \neq 2k\pi$ e quindi ivi coincide con la somma della sua serie di Fourier:

$$-\log(\sin(t/2)) = \log 2 + \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nt)}{n}, \quad \forall t \notin 2\pi\mathbb{Z}.$$

Capitolo 2

Analisi dei Coefficienti di Fourier

Risulta evidente lo stretto legame presente tra una funzione sommabile e i suoi coefficienti di Fourier che diventano quindi oggetto di grande interesse. Questo capitolo contiene teoremi e osservazioni interessanti che permettono di desumere dal comportamento di una funzione il comportamento dei suoi coefficienti di Fourier ma, e questa risulta la parte più interessante, si forniranno anche teoremi che garantiscono il passaggio inverso: dati dei coefficienti di Fourier, vogliamo ricavare le proprietà della loro funzione associata (nella ipotesi che ne esista una).

2.1 Comportamento Asintotico dei Coefficienti

Teorema 2.1. *Sia $f \in L^1_{2\pi}$. Allora, per ogni $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e ogni $n \in \mathbb{N}$ valgono le disuguaglianze seguenti, in termini di moduli di integrabilità (Definizione 1.14):*

$$|c_k| \leq \frac{1}{4\pi} \omega^{(1)}\left(\frac{\pi}{|k|}, f\right), \quad |a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \omega^{(1)}\left(\frac{\pi}{n}, f\right), \quad |b_n| \leq \frac{1}{2\pi} \omega^{(1)}\left(\frac{\pi}{n}, f\right).$$

Si noti che, grazie alla assoluta continuità dell'integrale richiamata nella Osservazione 1.15, questo teorema implica in particolare che gli a_n, b_n, c_k tendono a zero per $n, |k| \rightarrow \infty$, ossia il Teorema 2.1 contiene il Lemma di Riemann-Lebesgue.

Dimostrazione. Siano c_k i coefficienti di Fourier complessi di f , ovvero:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (2.1)$$

Applicando la traslazione $x = t + \frac{\pi}{|k|}$, osserviamo che non occorre mutare gli estremi di integrazione, in forza della periodicità dell'integranda. Ne segue

$$c_k = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(x + \frac{\pi}{|k|}\right) e^{-ikx} dx. \quad (2.2)$$

Sommiamo tra loro le due identità (2.1) e (2.2) per poi dividere per due:

$$c_k = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{|k|}\right) \right) e^{-ikx} dx.$$

Stimiamo ora c_k utilizzando la disuguaglianza triangolare e i moduli di integrabilità:

$$|c_k| \leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(x + \frac{\pi}{|k|}\right) - f(x) \right| dx \leq \frac{1}{4\pi} \omega^{(1)}\left(\frac{\pi}{|k|}, f\right). \quad (2.3)$$

Analogamente è possibile ricavare la tesi per a_n e b_n . $\square$

Osservazione 2.2. Se f è una funzione assolutamente continua su $\mathbb{R}$ e 2π -periodica, si ha che esiste f' quasi ovunque ed essa è sommabile in ogni periodo. Inoltre

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt, \quad \forall t \in [-\pi, \pi].$$

Siccome f' appartiene a $L^1_{2\pi}$ ha senso considerare i suoi coefficienti di Fourier oltre che quelli di f (quest'ultima essendo addirittura continua). Il seguente teorema è dunque ben posto (oltre che molto utile):

Teorema 2.3 (Serie di Fourier della derivata). *Sia f una funzione 2π -periodica e assolutamente continua. Se $f \sim (c_k)$, allora $f' \sim (ikc_k)$. In termini reali, se $f \sim (a_n, b_n)$, allora $f' \sim (nb_n, -na_n)$.*

Si noti che questo teorema (basato in modo rigoroso sulla integrazione per parti per funzioni AC) dà sostanza alla formula

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_n (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \implies f' \sim \sum_n (-na_n \sin nt + nb_n \cos nt),$$

ottenuta derivando formalmente.

Dimostrazione. Sia $k \in \mathbb{Z}$. Integrando per parti nella definizione¹ di c'_k e applicando il Teorema 1.17, si ottiene (in forza della periodicità di $f(t)$ e e^{-ikt})

$$c'_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-ikt} dt = \underbrace{\left[f(t) e^{-ikt} \right]_0^{2\pi}}_{=0} + \frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt = ikc_k.$$

Sia $n \in \mathbb{N}$. Date le relazioni $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ e $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$, è triviale ottenere tramite elementari passaggi algebrici

$$\begin{aligned} a'_n &= c'_n + c'_{-n} = inc_n - inc_{-n} = in(c_n - c_{-n}) = nb_n, \\ b'_n &= i(c'_n - c'_{-n}) = i(inc_n + inc_{-n}) = -na_n. \end{aligned}$$

Questo conclude la prova. $\square$

Vi è ovviamente un risultato duale al Teorema 2.3, che descriviamo nella seguente osservazione (fatto generalmente noto da ogni corso di base di serie di Fourier):

¹Conveniamo di denotare con c'_k il coefficiente di Fourier complesso di f' .

Osservazione 2.4 (Serie di Fourier della funzione integrale). Sia f una funzione di $L^1_{2\pi}$. Rendiamola a integrale nullo considerando in sua vece

$$\tilde{f}(t) := f(t) - \frac{a_0}{2}, \quad \text{ove, al solito,} \quad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f.$$

È facile mostrare allora che la funzione integrale (nulla in $-\pi$) di $\tilde{f}$ è 2π -periodica

$$F(x) := \int_{-\pi}^x \tilde{f}(t) dt = \int_{-\pi}^x f(t) dt - \frac{a_0}{2} (x + \pi).$$

Giacché $f \in L^1_{2\pi}$, la funzione F è assolutamente continua. La sua serie di Fourier $S(F)(t)$ converge quindi in ogni punto a $F(t)$ (vedasi Osservazione 1.19).

Grazie al Teorema 2.3 applicato a F (la cui derivata è $\tilde{f} = f - \frac{a_0}{2}$), se denotiamo con (A_n, B_n) i coefficienti reali di Fourier di F si ha (per ogni $n \geq 1$)

$$A_n = -\frac{b_n(f)}{n}, \quad B_n = \frac{a_n(f)}{n}.$$

Abbiamo dunque che la serie

$$\frac{A_0}{2} + \sum_n (A_n \cos nt + B_n \sin nt) = \frac{A_0}{2} + \sum_n \left(-\frac{b_n(f)}{n} \cos nt + \frac{a_n(f)}{n} \sin nt \right)$$

converge a $F(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Nel caso $t = 0$, deve dunque convergere la serie

$$\sum_n \frac{b_n(f)}{n};$$

nel caso $t = \pi$, deve risultare convergente anche la serie

$$\sum_n (-1)^n \frac{b_n(f)}{n}.$$

Ad esempio, la serie trigonometrica

$$\sum_n \frac{1}{\ln n} \sin nt$$

non può essere la serie di Fourier di nessuna funzione $f \in L^1_{2\pi}$, poiché in tal caso dovrebbe valere che $b_n(f) = \frac{1}{\ln n}$ ma la serie $\sum_n \frac{1}{n \ln n}$ diverge.

2.1.1 Ordine di annullamento dei coefficienti e regolarità

Teorema 2.5. *Sia $f \in L^1_{2\pi}$. Se f è assolutamente continua, allora $a_n, b_n, c_n = o(\frac{1}{n})$.*

Questo asserto non si può invertire, ossia esistono funzioni in $L^1_{2\pi}$ che hanno i coefficienti di Fourier $o(\frac{1}{n})$ ma che non sono assolutamente continue, ad esempio

$$g(t) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nt}{n \log n} \tag{2.4}$$

che è anche continua su $(0, 2\pi)$.

Ad esempio questo teorema è applicabile ad f di classe C^1 , oppure, più in generale, continua e C^1 a tratti: con questo si intende che esistono un numero finito di punti $\{t_0, t_1, \dots, t_p\}$ di $[0, 2\pi]$ tali che f è C^1 su $[0, 2\pi] \setminus \{t_0, \dots, t_p\}$ e f' ha limiti unilateri finiti (eventualmente diversi) in ognuno dei punti $t_0, t_1, \dots, t_p$.

Dimostrazione. Poiché f è assolutamente continua, esiste una funzione sommabile g tale che $f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)dt$. Perciò per il Teorema 2.3 i coefficienti c'_k , coefficienti di Fourier di g , verificano $c'_k = ikc_k$, ove c_k sono i coefficienti di Fourier di f , e quindi

$$c_k(f) = \frac{c_k(g)}{ik}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Grazie al Lemma di Riemann-Lebesgue, applicabile giacché $g \in L^1(-\pi, \pi)$, vale $c_k(g) = o(1)$ (se $|k| \rightarrow \infty$), ma allora $|c_k(f)| = \frac{1}{|k|} o(1) = o(\frac{1}{|k|})$. Analoghi i casi con a_n e b_n .

Passiamo ora al controesempio: sia g in (2.4). Si noti che la serie converge² per ogni $t \neq 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$) e diverge per $t = 2k\pi$ giacché $\sum_n \frac{1}{n \log n}$ diverge (criterio integrale). Il fatto che g stia in $L^1_{2\pi}$ non è ovvio: notiamo che i coefficienti con cui è costruita g (attraverso il sistema trigonometrico) verificano

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{1}{n \log n} \right|^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log^2 n} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Dunque, per il Teorema di Fischer-Riesz (della teoria degli spazi di Hilbert) la serie di funzioni che definisce g converge in $L^2(-\pi, \pi)$ ad una qualche funzione $h \in L^2(-\pi, \pi)$. Visto che tale serie di funzioni converge puntualmente (q.o.) a g , deduciamo che $g = h$ e quindi $g \in L^2(-\pi, \pi)$. Visto che $L^2(-\pi, \pi) \subset L^1(-\pi, \pi)$, segue che $g \in L^1_{2\pi}$.

Sempre dalla teoria L^2 segue che i coefficienti di Fourier di g rispetto al sistema trigonometrico sono esattamente quelli che compaiono in (2.4), i quali sono visibilmente $o(\frac{1}{n})$. Resta da provare che g non è AC. Se lo fosse, la sua serie di Fourier (che è esattamente la serie in (2.4)) dovrebbe convergere dappertutto. Ma ciò non accade, come detto, ad esempio per $t = 0$.

Rimane da verificare la continuità di $g(t)$ su $(0, 2\pi)$. Siccome la successione $(\frac{1}{n \log n})_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona decrescente, la serie che esprime g converge uniformemente in $(\delta, 2\pi - \delta)$ per ogni³ $\delta > 0$. Questo evidentemente comporta la continuità di $g(t)$ in $(0, 2\pi)$. $\square$

²La convergenza per $t \neq 2k\pi$ segue dal Criterio di Abel-Dirichlet per le serie reali, in quanto $\frac{1}{n \log n}$ tende decrescendo a 0, mentre (per ogni fissato $t \neq 2k\pi$) la successione $(\cos nt)_n$ ha le somme parziali limitate poiché per tali t vale

$$\sum_{k=0}^n \cos kt = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n (e^{it})^k \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} \right),$$

e si veda la forma esplicita (1.2) del nucleo di Dirichlet.

³Si veda [2, Theorem 1.30.1]

Osservazione 2.6. È facile osservare che nell'Esempio 1.25 si verifica quanto richiesto dal Teorema 2.5: infatti in tale esempio si fornisce una funzione assolutamente continua (non C^1) i cui coefficienti sono $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Osservazione 2.7. Prendendo spunto da quest'ultimo esempio (in cui i coefficienti sono molto migliori che $o(1/n)$), ci si potrebbe chiedere se la stima del Teorema 2.5 non si possa migliorare, magari chiedendosi se tutte le funzioni assolutamente continue abbiano i coefficienti che sono degli $o(\epsilon_n)$, con $\epsilon_n = o(1/n)$.

Sfortunatamente è possibile dimostrare che per ogni successione $\epsilon_n = o(1/n)$ esiste una funzione⁴ C^1 i cui coefficienti non siano $o(\epsilon_n)$. Infatti data ϵ_n come sopra, si ha $n\epsilon_n \rightarrow 0$, e dunque esiste una sottosuccessione n_k tale che la somma della serie $\sum_{k=0}^{\infty} n_k \cdot |\epsilon_{n_k}|$ sia finita. Consideriamo quindi la funzione definita dalla serie

$$f(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_{n_k} \cos(n_k t); \quad (2.5)$$

tale serie converge totalmente⁵ (e quindi uniformemente), così come la serie ottenuta derivando (2.5) termine a termine. Questo comporta, grazie a un teorema noto di Analisi, che la serie (2.5) definisce una funzione di classe C^1 . Dalla convergenza uniforme segue in modo molto semplice che i coefficienti di Fourier di f sono esattamente gli ϵ_{n_k} e non possono quindi essere contemporaneamente anche degli $o(\epsilon_n)$.

Si noti che la Osservazione 2.7 è costruttiva; ad esempio, fissato $\alpha > 0$, se consideriamo la successione $\epsilon_n := \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ (che soddisfa $\epsilon_n = o(1/n)$ per...il rotto della cuffia), possiamo costruire una funzione C^1 i cui coefficienti di Fourier sono una sottosuccessione di ϵ_n . Rimpicciolendo α , questo vuol dire che le funzioni AC non possono verificare

$$a_n, b_n, c_n = o\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right),$$

per nessun $\alpha > 0$ fissato, e quindi il Teorema 2.5 fornisce la potenza di $1/n$ sharp.

Il seguente teorema generalizza il Teorema 2.5 (quest'ultimo ne è il caso $p = 1$).

Teorema 2.8. *Supponiamo che $f \in L^1_{2\pi}$ sia derivabile $p - 1$ volte su $\mathbb{R}$ e che $f^{(p-1)}$ sia assolutamente continua. Allora $a_n, b_n, c_n = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$.*

Osservazione 2.9. Si noti che una condizione sufficiente affinché f verifichi le ipotesi di cui sopra è $f \in C^p(\mathbb{R})$ e 2π -periodica; infatti in tal caso $f^{(p-1)} \in C^1(\mathbb{R})$ e ogni funzione C^1 è lipschitziana e quindi assolutamente continua. Un'altra condizione sufficiente, un po' più generale di quest'ultima, è $f \in C^{(p-1)}$ e tale che $f^{(p-1)}$ sia C^1 a tratti.

⁴Si osservi che ogni funzione C^1 è lipschitziana e quindi assolutamente continua.

⁵Infatti a maggior ragione si ha $\sum_k |\epsilon_{n_k}| \leq \sum_k n_k |\epsilon_{n_k}| < \infty$.

Dimostrazione. Applicando ripetutamente il Teorema 2.3, se f è derivabile k volte e $f^{(k)}$ è assolutamente continua si ha

$$\begin{aligned}c_n' &= inc_n \\c_n'' &= inc_n' = (in)^2 c_n \\&\vdots \\c_n^{(k)} &= (in)^k c_n.\end{aligned}$$

Preso $k = p - 1$ si ha allora (grazie anche al Teorema 2.5)

$$c_n(f) = \frac{1}{(in)^{p-1}} c_n^{(p-1)} = \frac{1}{(in)^{p-1}} c_n(f^{(p-1)}) = \frac{1}{(in)^{(p-1)}} o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n^p}\right).$$

Questo conclude la prova. □

Osservazione 2.10. È facile osservare che l'Esempio 1.26 riporta un caso particolare ($p = 2$) del Teorema 2.8; infatti in tale esempio compare una funzione di classe C^1 (non C^2) tale che f' è C^1 a tratti (dunque AC). In tal caso i coefficienti sono $O(1/n^3)$ e quindi sono $o(1/n^2)$, quest'ultima essendo la stima prevista dal Teorema 2.8.

La stima $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ potrebbe fare sperare in un risultato migliore del Teorema 2.8, ma (analogamente all'Osservazione 2.7) è possibile trovare funzioni di classe C^p i cui coefficienti sono 'quantunque poco' migliori di $o\left(\frac{1}{n^p}\right)$.

Facciamo un esempio nel caso $p = 2$. Per la costruzione vista nella Osservazione 2.7, esiste $f \in C^1(\mathbb{R})$ e 2π -periodica i cui coefficienti di Fourier sono una sottosuccessione di

$$\frac{1}{n^{1+0.1}}.$$

Grazie al procedimento descritto nella Osservazione 2.4, se consideriamo la funzione integrale F di $f - \frac{a_0(f)}{2}$, si ha (per ogni $n \geq 1$)

$$a_n(F) = -\frac{b_n(f)}{n}, \quad b_n(F) = \frac{a_n(f)}{n}.$$

Visto che $f \in C^1$, si ha $F \in C^2$. Per quanto detto sopra, i coefficienti di Fourier di F sono allora una sottosuccessione di

$$\frac{1}{n^{2+0.1}},$$

e dunque sono sì migliori di $\frac{1}{n^2}$, ma di pochissimo!

Come già osservato, il Teorema 2.8 contiene la implicazione

$$f \in C^p \implies a_n, b_n = o(1/n^p).$$

Scritta in modo così ruvido, questa implicazione non si può invertire. Infatti, ad esempio nel caso $p = 2$, l'Esempio 1.26 riporta una f che non è C^2 ma i cui coefficienti sono $o(1/n^2)$. Possiamo chiederci se l'enunciato del Teorema 2.8 (scritto così com'è) ammetta un inverso per qualche p :

Osservazione 2.11. Come visto nel Teorema 2.5, l'enunciato del Teorema 2.8 non si inverte. Facciamo un esempio nel caso $p = 2$ (gli altri casi si ottengono passando a primitive di ordine successivo), e mostriamo che esiste una funzione $f \in L^1_{2\pi}$ i cui coefficienti di Fourier sono $o(\frac{1}{n^2})$, f è derivabile q.o., ma f' non è AC. A tal fine basta prendere la funzione g nel Teorema 2.5 (che ha i coefficienti che sono $o(1/n)$ ma non è AC), ed applicarvi il procedimento di passaggio alla funzione integrale G descritto nella Osservazione 2.4. Tale G ha i coefficienti che si ottengono da quelli di g dividendo per n ; tali coefficienti sono dunque $o(1/n^2)$, inoltre G è derivabile q.o. con derivata $g - c$ (con c costante) ma G' non è AC, poiché non lo è g .

Osservazione 2.12. È interessante notare come il Teorema 2.8 ammetta una sorta di viceversa, a patto di rinforzare un pochino le ipotesi. Infatti sia $f \in L^1_{2\pi}$ tale che, per qualche $p \geq 0$ intero, i suoi coefficienti reali verificano

$$a_n(f), b_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{p+1+\epsilon}}\right) \quad \text{per un qualche } \epsilon > 0.$$

Allora (a meno di modificare f su un insieme di misura nulla) si ha $f \in C^p$.

Infatti, si ha $a_n, b_n \in \ell^2$, in forza della seguente stima (analogamente per b_n):

$$\sum_n |a_n|^2 \leq M \sum_n \frac{1}{n^{2p+2+2\epsilon}} \leq M \sum_n \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Dal Corollario 1.7 segue che $f \in L^2$ e f coincide q.o. con la sua serie di Fourier:

$$f(t) \stackrel{\text{q.o.}}{=} \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f) \cos nt + b_n(f) \sin nt).$$

Dalla ipotesi sugli $a_n(f), b_n(f)$ è facile provare che è lecito derivare p volte la serie di cui sopra e la serie della derivata p -esima ha i coefficienti che sono

$$n^p \cdot O\left(\frac{1}{n^{p+1+\epsilon}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{1+\epsilon}}\right),$$

e quindi converge totalmente (come le serie per le precedenti derivate). Dunque f coincide q.o. con una funzione C^p (la somma della serie di Fourier).

Da qui deduciamo un'altra sorprendente caratterizzazione:

Teorema 2.13. *Sia $f \in L^1_{2\pi}$ e siano a_n, b_n i suoi coefficienti di Fourier. Allora f coincide quasi dappertutto con una funzione di classe C^∞ se e solo se, per ogni $p \in \mathbb{N}$,*

$$a_n, b_n = o\left(\frac{1}{n^p}\right), \quad \text{per } n \rightarrow +\infty. \quad (2.6)$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$: Se f coincide q.d. con una funzione g che è 2π -periodica e C^∞ , allora, i coefficienti di Fourier di f e g coincidono. Essendo $g \in C^\infty$, il Teorema 2.8 (applicato a g) vale per ogni $p \in \mathbb{N}$, da cui (2.6) per $a_n(g), b_n(g)$ che coincidono con $a_n(f), b_n(f)$.

$\Leftarrow$: Sia f tale che vale (2.6) per ogni $p \in \mathbb{N}$. Se ad esempio $p = 1$, segue che $a_n, b_n \in \ell^2$; dal Corollario 1.7, f coincide quasi dappertutto con la somma della sua serie di Fourier $S(f)$. Prendendo $p = 2$ in (2.6) si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} |a_n \cos nt + b_n \sin nt| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2} < \infty,$$

e dunque la serie $S(f)$ converge totalmente e quindi uniformemente su $\mathbb{R}$. Dunque la funzione $t \mapsto S(f)(t)$ è continua su $\mathbb{R}$, e quindi f coincide q.d. con una funzione continua.

Fissiamo $k \in \mathbb{N}$. Prendiamo $p = k + 2$ in (2.6); allora a_n, b_n sono $o(1/n^{k+2})$ e quindi sono anche $O(1/n^{k+2})$. Dalla Osservazione 2.12, la funzione somma della serie $S(f)$ è una funzione C^k . Essendo k arbitrario, f coincide q.d. con una funzione C^∞ . $\square$

È un semplice esercizio mostrare che (2.6) coincide con la condizione per cui le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p |a_n| \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^p |b_n|$$

convergono per ogni $p \in \mathbb{N}$; quando questa condizione è verificata si usa dire che (a_n) e (b_n) sono serie a decadimento rapido. Tale condizione è dunque equivalente alla regolarità C^∞ di f (nel senso del Teorema 2.13).

Osservazione 2.14. Se nella dimostrazione precedente non si vuole usare il Corollario 1.7 (che si basa sul notevole risultato di Carleson [3]), si può in alternativa usare il Teorema 2.28 che dimostreremo più avanti. Preso infatti $p = 3$ in (2.6), segue che

$$c_n := \sum_{k=1}^n k(|a_k| + |b_k|) \leq \sum_{k=1}^n k \frac{M}{k^3} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{k^2} < \infty;$$

dunque (c_n) è una successione (non negativa) limitata e quindi è $o(n)$. In tal caso il Teorema 2.28 afferma che la serie di Fourier di f converge a f quasi dappertutto.

2.1.2 Coefficienti di Fourier di funzioni BV

Teorema 2.15. *Sia $f \in L^1_{2\pi}$. Se f è a variazione limitata, allora $a_n, b_n, c_n = O(\frac{1}{n})$.*

Dimostrazione. Avevamo visto nel punto (2.3) del Teorema 2.1 che

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - f(x) \right| dx.$$

Nell'integrale di cui sopra, applichiamo la traslazione $x = t + (k-1)\frac{\pi}{n}$ (con $k \in \mathbb{N}$ fissato). Osserviamo che non occorre mutare gli estremi di integrazione, in forza della periodicità dell'integranda. Ne segue

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(x + k\frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1)\frac{\pi}{n}\right) \right| dx. \quad (2.7)$$

Poiché f è a variazione limitata vale

$$\sum_{k=1}^{2n} \left| f\left(x + k\frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1)\frac{\pi}{n}\right) \right| \leq \bigvee_0^{2\pi} f =: V. \quad (2.8)$$

Sommiamo per k da 1 a $2n$ e dividiamo per $2n$ la disuguaglianza in (2.7):

$$|a_n| \leq \frac{1}{4\pi n} \sum_{k=1}^{2n} \int_0^{2\pi} \left| f\left(x + k\frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1)\frac{\pi}{n}\right) \right| dx \stackrel{(2.8)}{\leq} \frac{V}{2n}.$$

Si può concludere quindi che $a_n = O(\frac{1}{n})$. Analogamente è possibile trattare b_n e c_n . □

Osservazione 2.16. L'Esempio 1.23 mostra un caso di applicazione del Teorema 2.15, e infatti i coefficienti sono $O(n^{-1})$. Anche l'Esempio 1.23 è analogo, poiché in tale esempio si ha precisamente

$$a_n = 0, \quad b_n = 1/n;$$

dunque questi coefficienti di Fourier sono $O\left(\frac{1}{n}\right)$ (senza essere O di nessun'altra potenza di $1/n$). La stima nel Teorema 2.15 è dunque sharp.

Osservazione 2.17. È naturale domandarsi se non si possa invertire la precedente implicazione. L'esempio 1.28 ne rende chiara l'impossibilità in quanto presenta una funzione illimitata intorno a 0 (e quindi a variazione non limitata) i cui coefficienti sono però $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Gli esempi precedenti coinvolgono funzioni discontinue. Ci si potrebbe chiedere se il Teorema 2.15 non possa essere migliorato rendendo l' O -grande un o -piccolo, rinforzando le ipotesi prendendo una funzione continua. La risposta è sfortunatamente negativa.

Teorema 2.18. *Esiste una funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che è 2π -periodica e a variazione limitata f , e tale che $c_n(f) \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$.*

Precisamente, per questa funzione esiste una sottosuccessione $c_{n_k}(f)$ di coefficienti della forma $\frac{c}{n_k}$ con c costante.

Dimostrazione. Come prima cosa costruiamo una piccola variazione della scala di Vitali. Prendiamo l'intervallo $[0, 2\pi]$ e ivi consideriamo la funzione $f_0(x) = \frac{x}{2\pi}$. Dopodichè dividiamo l'intervallo in tre parti uguali e costruiamo la funzione f_1 fissandola uguale a $\frac{1}{2}$ nel segmento centrale e imponendola lineare negli altri due segmenti e continua su tutto l'intervallo. Iterativamente è possibile costruire una successione di funzioni uniformemente convergente. Il limite di tale successione sia $\Phi(x) : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 1]$, e usiamolo per costruire $f(x) = \Phi(x) - \frac{x}{2\pi}$. Siccome $f(0) = f(2\pi)$ è possibile estendere f per periodicità su tutto l'asse reale (preservandone anche la continuità). Osserviamo che f è a variazione limitata (in quanto è la differenza di due funzioni monotone). I coefficienti di Fourier complessi di f sono

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\Phi(x) - \frac{x}{2\pi} \right) e^{-inx} dx \stackrel{(1.3)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\Phi(x) - \frac{x}{2\pi} \right) \frac{de^{-inx}}{-in}.$$

Integrando per parti nel senso dell'integrale di Riemann-Stieltjes (Teorema 1.22)

$$c_n = \frac{1}{2\pi ni} \int_0^{2\pi} e^{-inx} d\Phi =: \frac{\Phi_n}{2\pi ni}. \quad (2.9)$$

Spezziamo l'integrale in $[0, \frac{2\pi}{3}]$, $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$, $[\frac{4\pi}{3}, 2\pi]$; il secondo contributo è nullo poiché ivi $d\Phi = 0$, mentre gli altri due contributi sono uguali giacché $\Phi(x + \frac{4\pi}{3}) = \Phi(x) + \frac{1}{2}$ per ogni $x \in [0, \frac{2\pi}{3}]$. Ne segue (scelto $n = 3^m$)

$$\begin{aligned} \Phi_{3^m} &= 2 \int_0^{\frac{2\pi}{3}} e^{-i3^m x} d\Phi(x) && \left(\text{sostituzione } x = \frac{t}{3} \right) \\ &= 2 \int_0^{2\pi} e^{-i3^{m-1} t} d\Phi\left(\frac{t}{3}\right) && \left(\text{si ha } \Phi\left(\frac{t}{3}\right) = \frac{1}{2}\Phi(t) \right) \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-i3^{m-1} t} d\Phi(t) = \Phi_{3^{m-1}}. \end{aligned}$$

Ma allora $\Phi_{3^m} = \Phi_{3^{m-1}} = \dots = \Phi_3 = \Phi_1 = \int_0^{2\pi} e^{-ix} d\Phi$.

Dimostrando che $\Phi_1 \neq 0$ avremo concluso: in tal caso infatti Φ_{3^n} è una sottosuccessione di Φ_n non convergente a 0 e quindi da (2.9) segue $c_n \neq o(\frac{1}{n})$. Concentriamoci sulla parte reale di Φ_1 :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos x d\Phi &= 2 \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \cos x d\Phi = 2 \left(\int_0^{\frac{2\pi}{9}} \cos x d\Phi + \int_{\frac{4\pi}{9}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos x d\Phi \right) \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{9}} \left(\cos x + \cos \left(x + \frac{4\pi}{9} \right) \right) d\Phi =: (\star). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Grazie alle formule di prostaferesi ($\star$) diventa

$$4 \int_0^{\frac{2\pi}{9}} \cos \left(x + \frac{2\pi}{9} \right) \cos \frac{2\pi}{9} d\Phi \geq 4 \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} \int_0^{\frac{2\pi}{9}} d\Phi = \cos \frac{4\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} > 0.$$

Questo conclude la prova. □

2.1.3 Il Teorema di Wiener

Continuiamo con l'analisi dei coefficienti di Fourier per funzioni BV.

Teorema 2.19 (Teorema di Wiener). *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e a variazione limitata su $[0, 2\pi]$. Allora f è continua se e solo se (denotati al solito con a_n, b_n i suoi coefficienti di Fourier reali) vale*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k \sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{n} = 0. \quad (2.11)$$

Dato che, qualunque siano i numeri reali A, B vale

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|A| + |B|) \leq \sqrt{A^2 + B^2} \leq |A| + |B|,$$

la condizione (2.11) è equivalente a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k(|a_k| + |b_k|)}{n} = 0, \quad \text{ossia} \quad \sum_{k=1}^n k(|a_k| + |b_k|) = o(n), \quad (2.12)$$

che ritornerà nel Teorema 2.28 come condizione sufficiente al convergere di $S(f)$ puntualmente quasi dappertutto a f stessa (e se f è continua la convergenza è uniforme).

Dimostrazione. Sia f a variazione limitata. La dimostrazione è divisa in tre parti: dimostreremo prima che la continuità di f è equivalente a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k^2 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2n} \right) = 0. \quad (2.13)$$

Supponiamo che f sia continua; per questioni di algebra dei coefficienti di Fourier valgono (per ogni $t \in \mathbb{R}$ fissato):

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx), \\ f(x+t) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} (A_m(t) \cos mx + B_m(t) \sin mx), \end{aligned} \quad (2.14)$$

con

$$A_m(t) = a_m \cos mt + b_m \sin mt, \quad B_m(t) = b_m \cos mt - a_m \sin mt.$$

Sottraendo tra loro le due formule (2.14) e dalla trigonometria elementare si ottiene:

$$f(x+t) - f(x) \sim \sum_{m=1}^{+\infty} \left(2 \sin \left(\frac{mt}{2} \right) B_m \left(\frac{t}{2} \right) \cos mx - 2 \sin \left(\frac{mt}{2} \right) A_m \left(\frac{t}{2} \right) \sin mx \right).$$

Sia ora $n \in \mathbb{N}$ fissato e arbitrario. Valutiamo la formula precedente con $t = \frac{\pi}{n}$ e raccogliamo $2 \sin \left(\frac{m\pi}{2n} \right)$:

$$f \left(x + \frac{\pi}{n} \right) - f(x) \sim 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \left(B_m \left(\frac{\pi}{2n} \right) \cos mx - A_m \left(\frac{\pi}{2n} \right) \sin mx \right) \sin \left(\frac{m\pi}{2n} \right).$$

Ora, poiché f è continua sull'intervallo $[0, 2\pi]$, essa è ivi anche L^2 , per cui $f \left(x + \frac{\pi}{n} \right) - f(x)$ risulta anch'essa L^2 ; questo rende applicabile l'uguaglianza di Parseval:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(f \left(x + \frac{\pi}{n} \right) - f(x) \right)^2 dx &= 4 \sum_{m=1}^{+\infty} \left(A_m^2 \left(\frac{\pi}{2n} \right) + B_m^2 \left(\frac{\pi}{2n} \right) \right) \sin^2 \left(\frac{m\pi}{2n} \right) \\ &= 4 \sum_{m=1}^{+\infty} (a_m^2 + b_m^2) \sin^2 \left(\frac{m\pi}{2n} \right) = 4 \sum_{m=1}^{+\infty} \rho_m^2 \sin^2 \left(\frac{m\pi}{2n} \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Nell'integrale di cui sopra, applichiamo la traslazione $x = t + (k-1)\frac{\pi}{n}$ (con $k \in \mathbb{N}$). Osserviamo che non occorre mutare gli estremi di integrazione, in forza della periodicità dell'integranda. Ne segue

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(f\left(x + k\frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1)\frac{\pi}{n}\right) \right)^2 dx = 4 \sum_{m=1}^{+\infty} \rho_m^2 \sin^2\left(\frac{m\pi}{2n}\right).$$

Sommiamo ora per k sugli interi da 1 a $2n$:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{2n} \left(f\left(x + k\frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1)\frac{\pi}{n}\right) \right)^2 dx = 8n \sum_{m=1}^{+\infty} \rho_m^2 \sin^2\left(\frac{m\pi}{2n}\right).$$

L'integranda nel primo membro si può stimare usando i moduli di continuità e ricordando che f è una funzione a variazione limitata:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{2n} \left| f\left(x + k\frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1)\frac{\pi}{n}\right) \right|^2 \leq \\ & \omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right) \sum_{k=1}^{2n} \left| f\left(x + k\frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1)\frac{\pi}{n}\right) \right| \leq \omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right) \cdot \bigvee_0^{2\pi} f. \end{aligned}$$

Ne segue

$$n \sum_{m=1}^{+\infty} \rho_m^2 \sin^2\left(\frac{m\pi}{2n}\right) \leq \frac{1}{4} \omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right) \cdot \bigvee_0^{2\pi} f.$$

Ma, se f è continua, $\omega(\frac{\pi}{n}, f)$ tende a 0 per $n \rightarrow +\infty$ per cui è verificata (2.13).

Per dimostrare che (2.13) implica la continuità di f , supponiamo vera (2.13) e per assurdo supponiamo che f abbia una discontinuità in η . Perciò $d := |f(\eta+0) - f(\eta-0)| \neq 0$. Poiché il valore dei coefficienti di Fourier non cambia se f cambia in un insieme di misura nulla, senza perdita di generalità supponiamo⁶ $f(\eta) = \frac{f(\eta+0) - f(\eta-0)}{2}$.

Dalla permanenza del segno esiste un δ sufficientemente piccolo tale che

$$|f(\beta) - f(\alpha)| \geq \frac{d}{3}, \quad \forall \alpha \in (\eta - \delta, \eta), \quad \forall \beta \in (\eta, \eta + \delta).$$

Preso n grande, vale $\frac{\pi}{n} \leq \delta$. Osserviamo che, posto $U = (\eta - \frac{\pi}{2n}, \eta)$, vale

$$\left(f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - f(x) \right)^2 \geq \frac{d^2}{9}, \quad \forall x \in U.$$

Applicando la precedente disequazione all'integranda in (2.15), si ha

$$\begin{aligned} 4n \sum_{m=1}^{+\infty} \rho_m^2 \sin^2\left(\frac{m\pi}{2n}\right) &= \frac{n}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - f(x) \right)^2 dx \\ &\geq \frac{n}{\pi} \int_U \left(f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - f(x) \right)^2 dx \geq \frac{n d^2 \pi}{\pi 9 2n} = \frac{d^2}{18} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

⁶I limiti unilateri risultano ben posti poiché la funzione f è a variazione limitata.

Questo contraddice visibilmente l'ipotesi (2.13), ed allora f deve essere continua.

Ora nella seconda parte della dimostrazione proviamo che (2.13) è equivalente a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 \rho_k^2 = 0. \quad (2.16)$$

Sia $r \in \mathbb{N}$ e sia $P_n = n \sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k^2 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$. Spezziamo la sommatoria nei due addendi:

$$P_n = n \sum_{k=1}^{nr} \rho_k^2 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) + n \sum_{k=nr+1}^{+\infty} \rho_k^2 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$

Grazie alle note disuguaglianze $|\sin x| \leq |x|$ e $\sin^2 \leq 1$ si ottiene

$$P_n \leq n \sum_{k=1}^{nr} \rho_k^2 \left(\frac{k\pi}{2n}\right)^2 + n \sum_{k=nr+1}^{+\infty} \rho_k^2. \quad (2.17)$$

Sia $Q_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 \rho_k^2$ e $V = \sqrt{2\pi} f$. Grazie al Teorema 2.15 valgono $|a_k| \leq \frac{V}{2k} \leq \frac{V}{k}$ e $|b_k| \leq \frac{V}{k}$ grazie alle quali $\rho_k^2 \leq 2\frac{V^2}{k^2}$. Inoltre vale $\sum_{k=nr+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_{nr}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{nr}$. Per cui applicando queste disuguaglianze in (2.17) si otterrà

$$P_n \leq \frac{\pi^2}{4} r Q_{nr} + 2V^2 n \sum_{k=nr+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{4} r Q_{nr} + 2\frac{V^2}{r}. \quad (2.18)$$

Prendendo r sufficientemente grande, il secondo addendo è arbitrariamente piccolo. Inoltre ipotizzando (2.16) vale $Q_{nr} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, ma allora (2.16) implica (2.13).

Se invece supponiamo (2.13), in particolare vale $n \sum_{k=1}^n \rho_k^2 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$. Siccome $\sin u \geq \frac{2}{\pi}u$ se $u \in [0, 2\pi]$, vale che

$$n \sum_{k=1}^n \rho_k^2 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \geq n \sum_{k=1}^n \rho_k^2 \left(\frac{k\pi}{2n}\right)^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 \rho_k^2.$$

Applicando il teorema del confronto questo implica evidentemente (2.16).

Abbiamo quindi concluso la seconda parte della dimostrazione. Finiamo la prova mostrando che, posto $T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \rho_k$, (2.16) è equivalente a $T_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$. Grazie alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz vale

$$T_n^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \rho_k\right)^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (k \rho_k)^2 = Q_n.$$

Questo garantisce che se è verificata (2.16), allora $T_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$. Infine, poiché $\rho_k^2 \leq 2\frac{V^2}{k^2}$ vale anche $\rho_k \leq \sqrt{2}\frac{V}{k}$, e quindi

$$Q_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (k \rho_k)^2 \leq \sqrt{2}V \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \rho_k = \sqrt{2}V T_n.$$

Allora $T_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ implica (2.16), il che conclude la dimostrazione. $\square$

Osservazione 2.20. Si può osservare che l'Esempio 1.24 presenta una funzione BV discontinua, che infatti non verifica la condizione del Teorema 2.19 di Wiener. Infatti in tal caso vale $a_k = 0$ e $b_k = 1/k$, e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k \sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{k}{k}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = 1 \neq 0.$$

2.1.4 Coefficienti di Fourier di funzioni analitiche

Mirabilmente, esiste una caratterizzazione della analiticità in termini dei coefficienti di Fourier. Dei teoremi visti finora questo è uno dei pochi che contiene una condizione necessaria e sufficiente.

Teorema 2.21. *Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è 2π -periodica e reale-analitica, vale $c_n = O(\theta^{-n})$ con $0 < \theta < 1$. E viceversa; precisamente: se $f \in L^1_{2\pi}$ e verifica $c_n(f) = O(\theta^{-n})$ con $0 < \theta < 1$, a meno di ridefinire f su un insieme di misura nulla, f è reale-analitica.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia analitica di periodo 2π ; questo comporta che $f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi)$. Grazie al Teorema 2.8 è possibile scrivere

$$|c_n| = \frac{|c_n^{(k)}|}{|n|^k}, \quad \text{ove} \quad c_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^{(k)}(x) e^{-inx} dx. \quad (2.19)$$

Poiché f è analitica si può applicare il Teorema di Weierstrass e porre $M_k = \max_{[-\pi, \pi]} |f^{(k)}|$. Applicando ora la disuguaglianza triangolare integrale a (2.19) otteniamo

$$|c_n^{(k)}| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M_k dx \leq M_k.$$

Il che ci fa concludere che $|c_n| \leq \frac{M_k}{|n|^k}$. Si può ora dimostrare che esiste $B \in \mathbb{R}$ tale che $M_k < B^k k!$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Infatti, poiché f è analitica in $[-\pi, \pi]$, essa ammette un prolungamento analitico ad un insieme aperto connesso contenente $[-\pi, \pi]$. Sia C il contorno di tale regione; senza perdita di generalità avrà lunghezza finita. Questo comporta, grazie alla formula integrale di Cauchy,

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-x)^{k+1}} dz. \quad (2.20)$$

Osserviamo che, essendo C un compatto, per il teorema di Weierstrass esiste finito $M = \max_C |f|$. Denotiamo con $L(C)$ la lunghezza del cammino C . Infine osserviamo che, siccome C è il contorno di un aperto contenente $[-\pi, \pi]$, esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\delta = \inf \left\{ d(x, z) : x \in [-\pi, \pi], z \in C \right\}.$$

Applicando la disuguaglianza triangolare e le osservazioni precedenti si ricava

$$|f^{(k)}(x)| \leq \frac{k!}{2\pi} \max_C |f| \cdot L(C) \frac{1}{\delta^{k+1}}.$$

Grazie al fatto che la disuguaglianza di cui sopra è uniforme in $x \in [-\pi, \pi]$, è possibile sostituire M_k al posto di $|f^{(k)}(x)|$. Sia ora $B = \max \left\{ \frac{1}{\delta}, \frac{ML(C)}{2\pi\delta^2} \right\}$. Si conclude facilmente che $M_k < B^k \cdot k!$. In forza di questa disuguaglianza e di (2.19) vale

$$|c_n| \leq \frac{B^k k!}{|n|^k} \leq \left(\frac{Bk}{|n|} \right)^k, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.21)$$

Fissiamo $p \in \mathbb{R}$ tale che valga $\frac{B}{p} < 1$ e definiamo $\theta_1 = \frac{B}{p}$. Siccome la disequazione (2.21) è valida per ogni $k \in \mathbb{N}$, per ogni $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ è possibile scegliere $k = \lfloor \frac{|n|}{p} \rfloor$. In questo modo $|n| \geq pk$. Applicando queste disuguaglianze a (2.21) è ora triviale che

$$|c_n| \leq \left(\frac{B}{p} \right)^k = \theta_1^k = \frac{\theta_1^{k+1}}{\theta_1} < \frac{\theta_1^{\lfloor \frac{|n|}{p} \rfloor + 1}}{\theta_1}.$$

Sia ora θ tale che $\theta_1^{\frac{1}{p}} < \theta < 1$ e $A = \theta_1^{-1}$. Si conclude che $|c_n| \leq A\theta^{|n|}$.

Supponiamo ora che esistano $A \in \mathbb{R}$ e $0 < \theta < 1$ tali che $|c_n| \leq A\theta^{|n|}$; dimostreremo che f è analitica a meno di ridefinirla in un insieme di misura nulla. Si può osservare che $\sum |c_n| \leq \sum A\theta^{|n|}$. Poiché le serie geometriche con ragione minore di 1 convergono assolutamente, si osserva che $\sum |c_n|$ è convergente, e così la serie

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

è uniformemente convergente. Questo però grazie al Teorema 1.6 comporta⁷

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$

Per cui derivando la formula precedente⁸ si ottiene

$$f^{(k)}(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n i^k n^k e^{inx}.$$

La funzione f è quindi evidentemente di classe C^∞ . Inoltre

$$M_k := \max_{[-\pi, \pi]} |f^{(k)}(x)| \leq \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n| |n|^k \leq \sum_{-\infty}^{+\infty} A\theta^{|n|} |n|^k \leq 2A \sum_{n=1}^{\infty} \theta^n n^k. \quad (2.22)$$

Si può dimostrare che

$$\int_0^{+\infty} \theta^x x^k dx = -\frac{k}{\ln \theta} \int_0^{+\infty} \theta^x x^{k-1} dx = \dots = (-1)^k \frac{k!}{\ln^k \theta}. \quad (2.23)$$

Si può provare che questa stima garantisce che esiste $B > 1$ tale che

$$|M_k| \leq B^k k! \quad \text{per } k \text{ sufficientemente grande.} \quad (2.24)$$

⁷A meno di ridefinire f su un insieme di misura nulla.

⁸Legittimo in quanto sia la serie stessa che le serie ottenute derivando formalmente convergono uniformemente.

Dobbiamo cioè provare che esiste $B > 1$ tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta^n n^k \leq B^k k! \quad \text{per } k \text{ sufficientemente grande.} \quad (2.25)$$

Infatti siccome la funzione $h(x) = x^k \theta^x$ ha un unico punto di massimo in $-k \ln \theta$ ed è prima crescente e poi decrescente valgono

$$\begin{aligned} \int_0^{\lfloor -k \ln \theta \rfloor} x^k \theta^x dx &\geq \sum_{n=1}^{\lfloor -k \ln \theta \rfloor - 1} n^k \theta^n, \\ \int_{\lfloor -k \ln \theta \rfloor + 1}^{\infty} x^k \theta^x dx &\geq \sum_{\lfloor -k \ln \theta \rfloor + 2}^{\infty} n^k \theta^n. \end{aligned}$$

È inoltre facile osservare che $\int_{\lfloor -k \ln \theta \rfloor}^{\lfloor -k \ln \theta \rfloor + 1} x^k \theta^x dx \geq$ di almeno uno degli addendi rimasti nella serie $\sum_{n=1}^{\infty} \theta^n n^k$. Per cui grazie alle precedenti disuguaglianze e siccome h ha un massimo in $-k \ln \theta$ vale

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^k \theta^n &\leq \int_0^{+\infty} x^k \theta^x + (-k \ln \theta)^k \theta^{-k \ln \theta} \\ &\stackrel{(2.23)}{=} \frac{k!}{(-\ln \theta)^k} + (-k \ln \theta)^k \theta^{-k \ln \theta} \\ &= k! \left(\left(\frac{1}{-\ln \theta} \right)^k + \frac{(-k \ln \theta)^k \theta^{-k \ln \theta}}{k!} \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Osserviamo ora grazie alla formula di Stirling che vale

$$\frac{(-k \ln \theta)^k \theta^{-k \ln \theta}}{k!} \sim \frac{(-k \ln \theta)^k \theta^{-k \ln \theta}}{\sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k} = \frac{(-e \ln \theta \cdot \theta^{-\ln \theta})^k}{\sqrt{2\pi k}} \leq (-e \ln \theta \cdot \theta^{-\ln \theta})^k =: B_1^k.$$

Per cui grazie alla definizione di asintotica equivalenza esiste $C \geq 0$ tale che

$$\frac{(-k \ln \theta)^k \theta^{-k \ln \theta}}{k!} \leq C B_1^k.$$

Tornando a (2.26), se k è sufficientemente grande vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k \theta^n \leq k! \left(\frac{1}{(-\ln \theta)^k} + C B_1^k \right) \leq B_2^k k!.$$

Una volta provato (2.24), è facile mostrare che f è analitica. Infatti, sia $x_0 \in [-\pi, \pi]$ e sia x tale che $|x - x_0| < \frac{1}{B}$. Scriviamo f utilizzando la formula di Taylor con il resto di Lagrange: esiste $\theta' \in (0, 1)$ tale che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta'(x - x_0))}{n!} (x - x_0)^n.$$

Si può osservare che, siccome $|f^{(n)}(x)| \leq |M_n| \leq B^n n!$ per n sufficientemente grande, per ogni $x \in [-\pi, \pi]$ vale

$$\left| \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta'(x - x_0))}{n!} (x - x_0)^n \right| \leq \left| \frac{B^n n!}{n!} (x - x_0)^n \right| = \left| \frac{x - x_0}{\frac{1}{B}} \right|^n.$$

Dato che l'ultimo termine della precedente catena di disuguaglianze è un esponenziale in n con base minore di 1, esso tende a zero per $n \rightarrow +\infty$. Questo ci garantisce che $f(x)$ si sviluppa come serie di Taylor attorno a $x_0 \in [-\pi, \pi]$. Siccome il ragionamento è legittimo per ogni $x_0 \in [-\pi, \pi]$, f è sviluppabile attorno ad ogni punto del suo dominio, ed è quindi analitica. $\square$

Osservazione 2.22. L'Esempio 1.27 verifica le ipotesi del Teorema precedente ed infatti i suoi coefficienti sono $O(\theta^n)$ con $\theta = \frac{1}{3}$.

Osservazione 2.23. Mettendo assieme i Teoremi 2.13 e 2.21, hanno un chiaro interesse le successioni che vanno a zero più in fretta di ogni n^{-p} (per ogni $p \in \mathbb{N}$) ma meno in fretta di ogni θ^n (per ogni $0 < \theta < 1$); un esempio di tale successione è

$$\frac{1}{e^{\sqrt{n}}}.$$

Dunque, la serie trigonometrica

$$\sum_n \frac{\sin nt}{e^{\sqrt{n}}}$$

è la serie di Fourier di una funzione $f \in C^\infty$ (grazie al Teorema 2.13), ma tale f non può essere ovunque reale-analitica (altrimenti sarebbe dovuta valere la condizione nel Teorema 2.21). Troveremo un esempio di serie di Fourier di una funzione C^∞ che non è reale-analitica in nessun punto (Sezione 3.2): vedremo che un tale esempio è

$$\sum_n \frac{\sin n!t}{e^{\sqrt{n!}}}.$$

2.2 Alcuni risultati sulle serie trigonometriche

Forniamo un interessante risultato sulle serie trigonometriche convergenti assolutamente su un insieme non triviale. Nella sua prova ci servirà il seguente risultato di Teoria della Misura:

Teorema 2.24 (Teorema di Egorov). *Sia (X, μ) uno spazio di misura con $\mu(X) < \infty$. Sia $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ una successione di funzioni misurabili su X tale che (f_n) converge quasi ovunque su X ad una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. Allora, per ogni $\epsilon > 0$, esiste $P \subseteq X$ con $\mu(X \setminus P) < \epsilon$ tale che (f_n) converge uniformemente su P .*

Per la dimostrazione si veda [9, Chapter IV, Section 3, Theorem 5].

Teorema 2.25 (Teorema di Lusin-Denjoy). *Una serie trigonometrica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

converge assolutamente in tutti i punti di un insieme $E \subseteq [-\pi, \pi]$ di misura non nulla se e solo se la serie $\sum_n (|a_n| + |b_n|)$ converge.

Se vale quest'ultima condizione allora necessariamente $E = [-\pi, \pi]$.

Dimostrazione. È triviale che $\sum_1^\infty (|a_n| + |b_n|) < \infty$ implica la convergenza assoluta su $\mathbb{R}$ (in particolare in ogni insieme E di misura > 0) della serie trigonometrica. Il viceversa è più interessante. Siano $(\alpha_n)_n$ scelti in modo che

$$\rho_0 = \frac{a_0}{2}, \quad \alpha_0 = 0, \quad (a_n, b_n) = \rho_n (\cos \alpha_n, \sin \alpha_n), \quad \text{ove } \rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Tramite queste notazioni e la formula di sottrazione del coseno, è legittimo scrivere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \cos(nx - \alpha_n). \quad (2.27)$$

È evidente allora che la convergenza assoluta di (2.27) su E equivale a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n |\cos(nx - \alpha_n)| < \infty, \quad \forall x \in E. \quad (2.28)$$

Grazie al Teorema 2.24 di Egorov è possibile osservare che esiste $P \subseteq E$ di misura non nulla ove la precedente serie di funzioni converge uniformemente. Sia allora $S(x)$ la somma della serie (2.28), definita su P . Grazie alla convergenza uniforme di $S(x)$ su P è possibile integrare per serie termine a termine, per cui

$$\int_P S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \int_P |\cos(nx - \alpha_n)| dx. \quad (2.29)$$

Si noti che l'integrale è finito poiché S è una funzione continua (somma di una serie uniformemente convergente di funzioni continue).

Siccome $|\cos x| \geq \cos^2 x$, grazie alla formula di bisezione si ha

$$\begin{aligned} \int_P |\cos(nx - \alpha_n)| dx &\geq \int_P \cos^2(nx - \alpha_n) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_P (1 + \cos(2(nx - \alpha_n))) dx = \frac{1}{2} \text{mis}(P) + \frac{1}{2} \int_P \cos(2(nx - \alpha_n)) dx. \end{aligned}$$

Posta $f(x)$ la funzione caratteristica di P è possibile scrivere

$$\begin{aligned} \int_P \cos(2(nx - \alpha_n)) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(2(nx - \alpha_n)) dx \\ &= \cos 2\alpha_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(2nx) dx + \sin 2\alpha_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(2nx) dx. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Si può osservare che $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(2nx) dx = \pi A_{2n}$ è uno dei coefficienti di Fourier di f . Siccome f è sommabile, per il teorema di Riemann-Lebesgue vale $A_{2n} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$. Analogamente $B_{2n} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$. Perciò per n sufficientemente grande da (2.30) segue che

$$\left| \int_P \cos(2(nx - \alpha_n)) dx \right| \leq \pi |A_{2n}| + \pi |B_{2n}| \leq \frac{1}{2} \text{mis}(P).$$

Ma allora la convergenza di (2.29) implica la convergenza di $\sum \rho_n$. Infatti

$$\begin{aligned} \infty &> \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \int_P |\cos(2(nx - \alpha_n))| dx \geq \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \cdot \left(\frac{1}{2} \text{mis}(P) - \frac{1}{4} \text{mis}(P) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \cdot \frac{1}{4} \text{mis}(P). \end{aligned}$$

Siccome $\rho_n \geq |a_n|$ e $\rho_n \geq |b_n|$ e $\sum \rho_n < \infty$ valgono $\sum |a_n| < \infty$ e $\sum |b_n| < \infty$. Si può quindi concludere che $\sum (|a_n| + |b_n|) < \infty$. $\square$

Il Teorema 2.25 di Lusin-Denjoy può ovviamente essere applicato alle serie di Fourier. Data $f \in L^1_{2\pi}$, ci è ben noto dal Lemma di Riemann-Lebesgue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(f) = 0.$$

Quanto velocemente tali coefficienti tendano a 0, non ci è noto a priori. Si può anzi dimostrare che si possono trovare esempi di funzioni $f \in L^1_{2\pi}$ i cui coefficienti $a_n(f), b_n(f)$ tendono a 0 “lentamente” quanto si vuole. Ovvero che per ogni successione $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a zero, esiste una $f \in L^1_{2\pi}$ i cui coefficienti di Fourier non sono $o(\lambda_n)$. Basta considerare una sottosuccessione $(\lambda_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{n_k} < \infty$. Presi $a_{n_k} = b_{n_k} = \lambda_{n_k}$ e $a_n = b_n = 0$ se $n \neq n_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) la serie trigonometrica

$$\sum_n (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \sum_k \lambda_{n_k} (\cos kt + \sin kt)$$

convergerà totalmente e quindi uniformemente a una funzione continua di cui la serie trigonometrica sarà serie di Fourier. Siccome

$$\frac{a_{n_k}}{\lambda_{n_k}} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{b_{n_k}}{\lambda_{n_k}} = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

i coefficienti di Fourier non sono $o(\lambda_n)$, garantendo la tesi. Per cui è falso affermare che anche solo per le funzioni continue è possibile migliorare la stima ottenuta dal Teorema di Riemann-Lebesgue.

Come vedremo nella Sezione 3.4, la serie di Fourier $S(f)(t)$ di una $f \in L^1_{2\pi}$ potrebbe non convergere in alcun punto t . D'altra parte, per funzioni meno patologiche, se l'insieme di convergenza assoluta di $S(f)$ non è troppo banale ed ha misura positiva, il Teorema 2.25 di Lusin-Denjoy impone alla serie trigonometrica $S(f)(t)$ di avere i coefficienti che tendono a zero abbastanza in fretta da fare convergere le serie

$$\sum_n |a_n(f)| \quad \text{e} \quad \sum_n |b_n(f)|. \quad (2.31)$$

Nella galleria di esempi nella Sezione 1.2, si noti che la funzione nell'Esempio 1.24 verifica $a_n = 0$ e $b_n = 1/n$. Dunque una delle (2.31) non è verificata ed allora la serie di Fourier

$$S(f)(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}$$

non converge *assolutamente* su nessun insieme di misura positiva, come si può anche dimostrare direttamente usando le stime dal basso (valide per $t \notin \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin nt}{n} \right| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nt}{n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nt)}{n},$$

in cui la prima serie nell'ultimo membro diverge e la seconda converge (per il Teorema di Abel-Dirichlet).

Nel caso particolare di serie di Fourier, il seguente teorema non aggiunge nulla a quello che sappiamo già dal Lemma di Riemann-Lebesgue; tuttavia esso completa il Teorema 2.25 di Lusin-Denjoy.

Teorema 2.26 (Teorema di Cantor-Lebesgue). *Se una serie trigonometrica converge puntualmente in un insieme $E \subseteq [-\pi, \pi]$ di misura non nulla, allora i suoi coefficienti tendono necessariamente a 0.*

Dimostrazione. Analogamente al Teorema 2.25 è possibile scrivere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho_n \cos(nx - \alpha_n). \quad (2.32)$$

Siccome su E la serie trigonometrica converge, allora per (2.32) $\sum \rho_n \cos(nx - \alpha_n)$ converge puntualmente in E , e perciò i suoi termini tendono a 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n \cos(nx - \alpha_n) = 0, \quad \forall x \in E. \quad (2.33)$$

Supponiamo per assurdo che $\rho_n \not\rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$. Allora esiste $\delta > 0$ ed esiste una sottosuccessione ρ_{n_k} tale che $\rho_{n_k} \geq \delta > 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. D'altra parte, come caso particolare di (2.33) segue

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \rho_{n_k} \cos(n_k x - \alpha_{n_k}) = 0, \quad \forall x \in E.$$

Grazie a $\rho_{n_k} \geq \delta > 0$ segue

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \cos(n_k x - \alpha_{n_k}) = 0, \quad \forall x \in E.$$

Per cui deduciamo che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \cos^2(n_k x - \alpha_{n_k}) = 0, \quad \forall x \in E. \quad (2.34)$$

Risulta allora

$$\begin{aligned} & 0 \stackrel{(2.34)}{=} \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} \cos^2(n_k x - \alpha_{n_k}) \, dx \\ & \quad (\text{per convergenza dominata usando } |\cos t| \leq 1) \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \cos^2(n_k x - \alpha_{n_k}) \, dx. \end{aligned}$$

Ma analogamente a quanto provato nel Teorema 2.25 vale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \cos^2(n_k x - \alpha_{n_k}) \, dx = \frac{1}{2} \text{mis}(E) > 0.$$

Si è quindi raggiunta una evidente contraddizione. Siccome $|a_n| \leq \rho_n$ e $|b_n| \leq \rho_n$ è evidente che i coefficienti della serie trigonometrica tendono a zero per $n \rightarrow \infty$. Ciò conclude il teorema. $\square$

Osservazione 2.27. In vista del Teorema 2.26, potremmo chiederci se possa esistere una serie trigonometrica i cui coefficienti tendano a 0 sebbene essa non converga in alcun punto. La risposta è affermativa. Infatti, consideriamo la serie trigonometrica

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\cos(k(x - \ln \ln k))}{\ln k} = \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{\cos(k \ln \ln k)}{\ln k} \cos kx + \frac{\sin(k \ln \ln k)}{\ln k} \sin kx \right).$$

Essa ha evidentemente i coefficienti che tendono a 0, ma si può provare che non converge in alcun punto; si veda [10].

Un altro esempio che verifica le stesse condizioni è quello fornito nella Sezione 3.9 (che però non è esplicito come quello di cui sopra): infatti in tale sezione costruiremo (seguendo Kolmogorov[6]) una serie di Fourier (che dunque ha i coefficienti infinitesimi per il Lemma di Riemann-Lebesgue) che non converge in alcun punto.

Teorema 2.28. *Se $f \in L^1_{2\pi}$, e i suoi coefficienti di Fourier a_k, b_k sono tali che*

$$\sum_{k=1}^n k(|a_k| + |b_k|) = o(n), \tag{2.35}$$

allora la sua serie di Fourier $S(f)$ converge a f puntualmente quasi ovunque. Inoltre se f è una funzione continua, allora $S(f)$ converge uniformemente a f .

Dimostrazione. Osserviamo che è semplice⁹ rappresentare la differenza tra n -esimo polinomio di Fourier di f e n -esimo polinomio di Fejér di f in questo modo:

$$\begin{aligned} |S_n(f)(x) - \sigma_n(f)(x)| &= \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=1}^n k(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \\ &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k(|a_k| + |b_k|) = o(1). \end{aligned}$$

⁹In generale se $s_n = r_0 + \dots + r_n$ e $\sigma_n = \frac{s_0 + \dots + s_n}{n+1}$ si ha $\sigma_n = \frac{1}{n+1} ((n+1)r_0 + nr_1 + \dots + r_n)$.

Questo significa che $S_n(f)(x) - \sigma_n(f)(x) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ uniformemente. Ma grazie al Teorema 1.12 di Lebesgue-Fejér vale $\sigma_n(x) \rightarrow f(x)$ per $n \rightarrow \infty$ quasi ovunque. Questi due fatti implicano che $S_n(f)(x)$ tende a $f(x)$ quasi ovunque. Si può osservare che se f è una funzione continua allora, grazie al Teorema 1.11 di Fejér, $\sigma_n(x)$ converge a $f(x)$ uniformemente. Per cui anche $S_n(f)$ converge uniformemente a $f(x)$. $\square$

Osservazione 2.29. Sfortunatamente il Teorema 2.28 è spesso non applicabile poiché richiede un certo decadimento sui coefficienti di Fourier di f . Tuttavia, una condizione sufficiente al verificarsi di (2.35) è che f sia AC, come è possibile vedere nel prossimo teorema, ricordando che i coefficienti di Fourier di una funzione assolutamente continua sono $o(1/n)$ (Teorema 2.4).

Il seguente teorema fornisce una condizione sufficiente affinché una serie trigonometrica sia una serie di Fourier:

Teorema 2.30. *Se i coefficienti di una serie trigonometrica a_n e b_n sono $o(\frac{1}{n})$, allora vale (2.35) e tale serie trigonometrica è la serie di Fourier di una $f \in L^1_{2\pi}$ (che è anche di quadrato sommabile); inoltre la serie di Fourier $S(f)$ converge puntualmente quasi ovunque a f . Infine se è la serie di Fourier di una funzione continua f , allora la convergenza verso f è uniforme.*

Dimostrazione. Siano a_n e b_n degli $o(\frac{1}{n})$. Allora è vero che $\sum(a_n^2 + b_n^2) < \infty$. Grazie alla completezza del sistema trigonometrico in $L^2[-\pi, \pi]$, esiste $f \in L^2[-\pi, \pi]$ la cui serie di Fourier ha a_n e b_n come coefficienti; inoltre $f \in L^1[-\pi, \pi]$ poiché $L^2[-\pi, \pi] \subseteq L^1[-\pi, \pi]$. Siccome $a_n = o(\frac{1}{n})$ e $b_n = o(\frac{1}{n})$ vale

$$a_n = \frac{1}{n}\omega_n, \quad \omega_n \rightarrow 0 \quad b_n = \frac{1}{n}\omega'_n, \quad \omega'_n \rightarrow 0.$$

Per cui

$$\sum_{k=1}^n k(|a_k| + |b_k|) = \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{k}|\omega_k| + \frac{1}{k}|\omega'_k| \right) =: \sum_{k=1}^n \omega''_k, \quad \text{ove } \omega''_k \rightarrow 0.$$

Per dimostrare che questo è $o(n)$ basta dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \omega''_k}{n} = 0.$$

Questo segue (come è noto dal primo corso di Analisi) da $\omega''_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$.

Riassumendo: la serie trigonometrica $\sum(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ è la serie di Fourier di $f \in L^1_{2\pi}$ e i suoi coefficienti verificano $\sum_{k=1}^n k(|a_k| + |b_k|) = o(n)$. Siccome le ipotesi del Teorema 2.28 sono verificate, si può concludere che $S_n(f)(x)$ converge a $f(x)$ quasi ovunque. È possibile osservare che, se f è continua, allora sempre per il Teorema 2.28 la convergenza è persino uniforme. $\square$

Osservazione 2.31. È interessante osservare un legame tra quest'ultimo Teorema 2.30 e il Teorema 2.19 di Wiener.

Supponiamo infatti di avere una funzione f a variazione limitata su $[-\pi, \pi]$ i cui coefficienti di Fourier sono $o(1/n)$. Allora, ripetendo la prova del Teorema 2.30, si ha

$$\frac{\sum_{k=1}^n k \sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{n} \leq \frac{\sum_{k=1}^n k(|a_k| + |b_k|)}{n} = \frac{o(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Sono dunque verificate le ipotesi del Teorema 2.19 di Wiener, e dunque f è continua. Si può quindi applicare il Teorema 2.30 che garantisce che la serie di Fourier $S_n(f)$ converge uniformemente a f .

Capitolo 3

Controesempi notevoli

È assai noto che alcuni tra i controesempi più notevoli di funzioni “patologiche” dell’Analisi Reale sono costruibili usando le serie di Fourier, grazie alla grande varietà di risultati che queste offrono. In questo capitolo costruiremo quattro di queste funzioni notevoli e svilupperemo anche dei controesempi ad alcune proposizioni riguardanti le serie di Fourier che potrebbero sembrare vere, ma che in realtà non potrebbero essere più false.

3.1 Una funzione continua la cui serie di Fourier non converge in un punto assegnato

Definizione 3.1. Sia (Φ_n) un sistema ortonormale reale su $L^2(a, b)$. Per ogni fissato $x \in (a, b)$ e ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo

$$\rho_n(x) := \int_a^b \left| \sum_{m=1}^n \Phi_m(y) \Phi_m(x) \right| dy,$$

detta n -esima funzione di Lebesgue del sistema (Φ_n) .

Osservazione 3.2. Siano (Φ_n) un sistema ortonormale reale su (a, b) , $f \in L^2(a, b)$, e $f \sim (c_n)$ per tale sistema. Scrivendo l’ n -esima somma parziale si ottiene

$$S_n(f)(x) = \sum_{m=1}^n \underbrace{\left(\int_a^b f(y) \Phi_m(y) dy \right)}_{=c_m(f)} \Phi_m(x) = \int_a^b f(y) \left(\sum_{m=1}^n \Phi_m(y) \Phi_m(x) \right) dy.$$

Evidentemente se $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in (a, b)$ vale

$$|S_n(f)(x)| \leq \int_a^b |f(y)| \left| \sum_{m=1}^n \Phi_m(y) \Phi_m(x) \right| dy \leq M \rho_n(x).$$

Per cui se f è limitata e $(\rho_n(x))_n$ è una successione limitata, allora $(S_n(f)(x))_n$ è anch’essa una successione limitata e non può quindi divergere per $n \rightarrow \infty$.

Teorema 3.3. *Sia (Φ_n) un sistema ortonormale in $L^2(a, b)$ e sia $x \in (a, b)$ fissato.*

Se $\limsup_n \rho_n(x) = +\infty$, allora esiste una funzione continua su (a, b) tale che la sua serie di Fourier in $L^2(a, b)$ non converge in x .

Dimostrazione. Fissato $x \in (a, b)$, poniamo per brevità

$$\Psi_n(x, y) = \sum_{m=1}^n \Phi_m(y)\Phi_m(x).$$

Sia ora $f(y) = \operatorname{sgn}(\Psi_n(x, y))$; ovviamente $S_n(f)(x) = \rho_n(x)$. Tale f non è continua. Però è sommabile, e dalla la densità delle funzioni C_0 in $L^1([a, b])$, è possibile trovare, per ogni $\epsilon > 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, f_n approssimazione C_0 di f tale che

$$|f_n| \leq 1, \quad S_n(f_n)(x) \geq \frac{1}{2}\rho_n(x), \quad f = f_n + \tau_n, \quad \text{con } \|\tau_n\|_{L^1} < \epsilon. \quad (3.1)$$

Infatti osserviamo che per la densità delle funzioni a supporto compatto in $L^1[a, b]$, fissato $\epsilon > 0$ esiste una funzione $f_n \in C_0(a, b)$ con $|f_n| \leq 1$ e tale che $\|f - f_n\|_{L^1} < \epsilon$. Ma allora detta $\tau_n = f - f_n$ vale

$$S_n(f_n)(x) = \int_a^b (f(y) - \tau_n(y))\Psi_n(x, y) dy = \rho_n(x) - \int_a^b \tau_n(y)\Psi_n(x, y) dy. \quad (3.2)$$

Fissato $E = \{y \in (a, b) : |\tau_n(y)| > \sqrt{\epsilon}\}$, notiamo che $\operatorname{mis}(E) \leq \sqrt{\epsilon}$ poiché

$$\epsilon > \int_a^b |\tau_n(y)| dy = \int_E |\tau_n(y)| dy + \int_{E^c} |\tau_n(y)| dy \geq \int_E |\tau_n(y)| dy \geq \operatorname{mis}(E)\sqrt{\epsilon}.$$

Siccome $|\tau_n(y)| = |f(y) - f_n(y)| \leq |f(y)| + |f_n(y)| \leq 2$, vale

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \tau_n(y)\Psi_n(x, y) dy \right| &\leq \left| \int_E \tau_n(y)\Psi_n(x, y) dy \right| + \left| \int_{E^c} \tau_n(y)\Psi_n(x, y) dy \right| \\ &\leq 2 \operatorname{mis}(E)\rho_n(x) + \sqrt{\epsilon}\rho_n(x) \leq 3\sqrt{\epsilon}\rho_n(x). \end{aligned}$$

Ma allora fissato $\epsilon < \frac{1}{36}$ risulta $|\int \tau_n \Psi_n| \leq \frac{1}{2}\rho_n$, e quindi $\int \tau_n(y)\Psi_n(x, y) \leq \frac{1}{2}\rho_n(x)$ che implica, ricordandosi di (3.2),

$$S_n(f_n)(x) \geq \rho_n(x) - \frac{1}{2}\rho_n(x) = \frac{1}{2}\rho_n(x).$$

Le altre condizioni sono triviali.

Osserviamo che ci sono solo due possibilità: o esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che la serie di Fourier di f_n non converge in x , oppure non esiste un n siffatto. Se esistesse avremmo già concluso, quindi analizziamo il secondo caso. Osserviamo che allora la serie di Fourier di ogni f_n converge a un certo γ_n in x . Consideriamo ora una successione α_k tale che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k < +\infty, \quad \alpha_k > 0, \quad \sum_{p=k+1}^{+\infty} \alpha_p \leq \frac{1}{6}\alpha_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

3.1 Una funzione continua la cui serie di Fourier non converge in un punto assegnato 37

Ad esempio $\alpha_k = 7^{-k}$. Consideriamo ora $F(y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k f_{n_k}(y)$ con n_k successione da scegliere. Osserviamo che siccome $|f_n| \leq 1$ per (3.1) e grazie a (3.3) vale

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|\alpha_k f_{n_k}(y)\|_{\infty} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k < +\infty. \quad (3.4)$$

Questo garantisce la convergenza totale della serie che definisce $F(y)$; ma allora, siccome le f_{n_k} sono funzioni continue, anche $F(y)$ è una funzione continua. Inoltre sempre per convergenza uniforme, la serie di Fourier di F si ottiene sommando le serie di Fourier delle f_{n_k} . La scelta di n_k è svolta induttivamente in questo modo: dati $n_1, \dots, n_{k-1}$, scegliamo n_k in modo che

$$\alpha_k \rho_{n_k}(x) \rightarrow \infty, \quad \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_p |\gamma_{n_p}| \leq \frac{1}{12} \alpha_k \rho_{n_k}. \quad (3.5)$$

Ad esempio scegliamo $n_k > n_{k-1}$ e tale che $\alpha_k \rho_{n_k}(x) \geq \max \left\{ k, 12 \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_p |\gamma_{n_p}| \right\}$. È possibile fare questa scelta in quanto per ipotesi $\limsup_n \rho_n(x) = +\infty$. Ma allora per linearità vale

$$S_m \left(\sum_{p=1}^{k-1} \alpha_p f_{n_p} \right) (x) \rightarrow \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_p \gamma_{n_p}, \quad \text{per } m \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

Ma allora prendendo n_k sufficientemente grande, grazie alla convergenza in (3.6) si ha

$$\left| S_{n_k} \left(\sum_{p=1}^{k-1} \alpha_p f_{n_p} \right) (x) \right| \leq 2 \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_p |\gamma_{n_p}| \stackrel{(3.5)}{\leq} \frac{1}{6} \alpha_k \rho_{n_k}(x).$$

Grazie allo scambio di limite e integrale per serie a termini non negativi, si ha

$$\begin{aligned} \left| S_{n_k} \left(\sum_{p=k+1}^{+\infty} \alpha_p f_{n_p} \right) (x) \right| &= \left| \int_a^b \left(\sum_{p=k+1}^{+\infty} \alpha_p f_{n_p}(y) \right) \Psi_{n_k}(x, y) dy \right| \\ &\leq \sum_{p=k+1}^{+\infty} \alpha_p \int_a^b |f_{n_p}(y)| \cdot |\Psi_{n_k}(x, y)| dy \stackrel{|f_n| \leq 1}{\leq} \sum_{p=k+1}^{+\infty} \alpha_p \rho_{n_k}(x) \\ &\leq \rho_{n_k}(x) \sum_{p=k+1}^{+\infty} \alpha_p \stackrel{(3.3)}{\leq} \frac{1}{6} \alpha_p \rho_{n_k}(x). \end{aligned}$$

Ma $S_{n_k}(f_{n_k})(x) \geq \frac{1}{2} \rho_{n_k}(x)$ per (3.1), per cui

$$\begin{aligned} S_{n_k}(F)(x) &= S_{n_k} \left(\sum_{p=1}^{k-1} \alpha_p f_{n_p} \right) (x) + S_{n_k}(f_{n_k})(x) + S_{n_k} \left(\sum_{p=k+1}^{+\infty} \alpha_p f_{n_p} \right) (x) \\ &\geq -\frac{1}{6} \alpha_p \rho_{n_k}(x) + \frac{1}{2} \alpha_k \rho_{n_k}(x) - \frac{1}{6} \alpha_p \rho_{n_k}(x) \geq \frac{1}{6} \alpha_p \rho_{n_k}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

Abbiamo così trovato F una funzione continua dotata di una sottosuccessione delle somme parziali di Fourier divergente in x , per cui la serie di Fourier in x non può essere convergente. $\square$

Teorema 3.4. *Il sistema trigonometrico*

$$T = \left\{ \frac{1}{2\pi}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

ha le sue funzioni di Lebesgue che verificano $\rho_{2n+1}(x) = \rho_{2n+1}(0) \sim \frac{4}{\pi^2} \log n$ uniformemente in $x \in [-\pi, \pi]$.

Dimostrazione. Ricordando la definizione di ρ_n , usando alcune identità trigonometriche e il nucleo di Dirichlet vale

$$\begin{aligned} \rho_{2n+1}(x) &= \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n (\sin kx \sin kt + \cos kx \cos kt) \right| dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-t) \right| dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(x-t)| dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin \left((n + \frac{1}{2})(t-x) \right)}{\sin \left(\frac{1}{2}(t-x) \right)} \right| dt. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Evidentemente grazie alla 2π -periodicità della funzione $\sin$ è possibile applicare la traslazione $y = t - x$ senza cambiare estremi di integrazione:

$$\rho_{2n+1}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin \left((n + \frac{1}{2})(t-x) \right)}{\sin \left(\frac{1}{2}(t-x) \right)} \right| dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin \left((n + \frac{1}{2})y \right)}{\sin \frac{1}{2}y} \right| dy = \rho_{2n+1}(0). \quad (3.8)$$

Grazie ad elementari identità trigonometriche e la forma esplicita del nucleo di Dirichlet si ha

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} = \frac{1}{2} \sin t \cot \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cos t = \frac{\sin nt}{t} + g(t) \sin nt + \frac{1}{2} \cos t, \\ \text{dove} \quad g(t) &= \frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \quad (t \in [0, 2\pi]). \end{aligned}$$

È possibile dimostrare trivialmente con lo sviluppo di Taylor di g in un intorno di 0 che la funzione g è definita in $[0, 2\pi]$ e ivi limitata. Ma allora vale $D_n(t) = \frac{\sin nt}{t} + O(1)$. Per cui tornando a (3.8) e considerando la parità dell'integranda che è 2π -periodica, con una traslazione portiamo gli estremi di integrazione in $[-\pi, \pi]$ e non modifichiamo il valore dell'integrale per periodicità. Vale ossia

$$\rho_{2n+1}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{\sin \frac{1}{2}t} \right| dt \stackrel{\text{parità}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{\sin \frac{1}{2}t} \right| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |D_n(t)| dt.$$

Siccome $D_n(t) = \frac{\sin nt}{t} + O(1)$ è possibile scrivere

$$\rho_{2n+1}(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin nt|}{t} dt + O(1) = \frac{2}{\pi} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt + O(1).$$

Posto $\sigma_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt$, allora

$$\sigma_{n+1} - \sigma_n = \frac{2}{\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \nu}{\nu + n\pi} d\nu.$$

Siccome per $0 \leq \nu \leq \pi$ abbiamo $\frac{1}{(n+1)\pi} \leq \frac{1}{\nu+n\pi} \leq \frac{1}{n\pi}$ e $\int_0^\pi \sin \nu d\nu = 2$, si osserva che

$$\frac{4}{\pi^2(n+1)} \leq \sigma_{n+1} - \sigma_n \leq \frac{4}{\pi^2 n}.$$

Facciamo scorrere n da 1 a $m-1$ e sommiamo le disuguaglianze ottenute. Avremo

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n+1} &\leq \sum_{n=1}^{m-1} (\sigma_{n+1} - \sigma_n) \leq \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n}, & \text{ovvero} \\ \sigma_1 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=2}^m \frac{1}{n} &\leq \sigma_m \leq \sigma_1 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione. Infatti

$$\frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \sim \frac{4}{\pi^2} \log m.$$

Per cui $\rho_{2n+1}(0) \sim \sigma_n \sim \frac{4}{\pi^2} \log n$. □

Osservazione 3.5. Mettendo assieme i Teoremi 3.3 e 3.4, per ogni punto fissato $x \in \mathbb{R}$, esiste una funzione 2π -periodica e continua la cui serie di Fourier non converge in tale punto x . Infatti

$$\rho_{2n+1}(x) = \rho_{2n+1}(0) \sim \frac{4}{\pi^2} \log n \rightarrow \infty,$$

e quindi $\limsup_n \rho_n(x) = +\infty$.

3.2 Una funzione di classe C^∞ ma non C^ω in nessun punto

Teorema 3.6. *Esiste una funzione su $\mathbb{R}$ di classe C^∞ ma non analitica in alcun punto.*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-\sqrt{n!}} \sin(n!x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Essa è visibilmente ben posta grazie al fatto che la serie di funzioni che la definisce converge totalmente, per cui tale serie converge anche puntualmente. Infatti

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| e^{-\sqrt{n!}} \sin(n!x) \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-\sqrt{n!}} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-\sqrt{n}} < +\infty.$$

Analogamente si dimostra che la serie di funzioni ottenuta derivando k volte termine a termine $F(x)$ converge totalmente. Infatti

$$\sum_n \frac{d^k}{dx^k} \left(e^{-\sqrt{n!}} \sin(n!x) \right) = \begin{cases} (-1)^p \sum_n \frac{(n!)^{2p}}{e^{\sqrt{n!}}} \sin(n!x) & k = 2p, \\ (-1)^p \sum_n \frac{(n!)^{2p+1}}{e^{\sqrt{n!}}} \cos(n!x) & k = 2p + 1. \end{cases} \quad (3.9)$$

È semplice mostrare che le due serie convergono totalmente. Quindi F è di classe C^∞ .

Dimostriamo ora che F non può essere analitica in alcun punto di $\mathbb{R}$. Per provare ciò consideriamo $l, m \in \mathbb{N}$ fissati tali che $0 \leq l \leq m$. Utilizzando le formule per le derivate di F ottenute in (3.9) a meno del segno vale

$$\begin{aligned} \pm F^{(2p+1)} \left(\frac{2l\pi}{m} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n!}} (n!)^{2p+1} \cos \frac{2ln!\pi}{m} = \\ &= \sum_{n=1}^{m-1} e^{-\sqrt{n!}} (n!)^{2p+1} \cos \frac{2ln!\pi}{m} + \sum_{n=m}^{\infty} e^{-\sqrt{n!}} (n!)^{2p+1} \cos \frac{2ln!\pi}{m}. \end{aligned}$$

Siccome $\frac{2ln!}{m}$ è un numero pari se $n \geq m$, segue che $\cos \frac{2ln!\pi}{m} = 1$ se $n \geq m$. Quindi

$$\pm F^{(2p+1)} \left(\frac{2l\pi}{m} \right) = \sum_{n=1}^{m-1} e^{-\sqrt{n!}} (n!)^{2p+1} \cos \frac{2ln!\pi}{m} + \sum_{n=m}^{\infty} e^{-\sqrt{n!}} (n!)^{2p+1}.$$

Per brevità poniamo il primo e il secondo addendo rispettivamente uguali a $A(l, m, p)$ e $B(m, p)$. Siccome $(n!)^{2p+1} < ((m-1)!)^{2p+1}$ e $e^{-\sqrt{n!}} \leq 1$, si ha

$$|A(l, m, p)| < (m!)^{2p+1}. \quad (3.10)$$

Si può notare facilmente, applicando la disuguaglianza triangolare, che

$$\begin{aligned} \left(\frac{|F^{(2p+1)} \left(\frac{2l\pi}{m} \right)|}{(2p+1)!} \right)^{\frac{1}{2p+1}} &\geq \frac{|F^{(2p+1)} \left(\frac{2l\pi}{m} \right)|^{\frac{1}{2p+1}}}{2p+1} \geq \frac{|B(m, p) - |A(l, m, p)||^{\frac{1}{2p+1}}}{2p+1} \\ &\geq \frac{(B(m, p) - |A(l, m, p)|)^{\frac{1}{2p+1}}}{2p+1} \stackrel{(3.10)}{>} \frac{(B(m, p) - (m!)^{2p+1})^{\frac{1}{2p+1}}}{2p+1} \\ &= \frac{m!}{2p+1} \left(\frac{B}{(m!)^{2p+1}} - 1 \right)^{\frac{1}{2p+1}}. \end{aligned}$$

Possiamo ora osservare che se prendiamo $q \in \mathbb{N}$ tale che $q > m$, $B(m, p)$ sarà maggiore del suo termine di indice q in quanto è una serie a termini non negativi. Per cui

$$\left(\frac{|F^{(2p+1)} \left(\frac{2l\pi}{m} \right)|}{(2p+1)!} \right)^{\frac{1}{2p+1}} > \frac{m!}{2p+1} \left(\frac{e^{-\sqrt{q!}} (q!)^{2p+1}}{(m!)^{2p+1}} - 1 \right)^{\frac{1}{2p+1}}.$$

Siccome abbiamo precedentemente fissato l, m possiamo scegliere p, q in maniera tale che $2p = (q - 1)!$ e $q > m$ arbitrario. Questo ci permette di osservare che

$$\left(\frac{e^{-\sqrt{q}!} (q!)^{2p+1}}{(m!)^{2p+1}} \right)^{\frac{1}{2p+1}} = \frac{e^{-\frac{\sqrt{q}!}{(q-1)!+1}} q!}{m!} =: A_q.$$

È facile osservare che $A_q \rightarrow \infty$ per $q \rightarrow \infty$. Per cui mandando $q \rightarrow \infty$ vale

$$\begin{aligned} \left(\frac{|F^{(2p+1)}(\frac{2l\pi}{m})|}{(2p+1)!} \right)^{\frac{1}{2p+1}} &> \frac{m!}{2p+1} \left(\frac{e^{-\sqrt{q}!} (q!)^{2p+1}}{(m!)^{2p+1}} - 1 \right)^{\frac{1}{2p+1}} \sim \frac{m! A_q}{2p+1} \\ &= e^{-\frac{\sqrt{q}!}{(q-1)!+1}} \frac{q!}{2p+1} = e^{-\frac{\sqrt{q}!}{(q-1)!+1}} \frac{q!}{(q-1)!+1} \sim q \cdot e^{-\frac{\sqrt{q}!}{(q-1)!+1}} \xrightarrow{q \rightarrow \infty} +\infty. \end{aligned}$$

Questo significa che

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \left(\frac{|F^{(\nu)}(\frac{2l\pi}{m})|}{\nu!} \right)^{\frac{1}{\nu}} = +\infty.$$

Grazie alla formula di Cauchy-Hadamard questo implica che il raggio di convergenza della serie attorno a $x = \frac{2l\pi}{m}$ è nullo. Siccome i punti di quel tipo sono densi in $[0, 2\pi]$ la funzione F non può essere analitica in alcun punto di $\mathbb{R}$. □

Osservazione 3.7. Con riferimento al Teorema 2.21, osserviamo che F , non essendo analitica, non può avere i coefficienti del tipo $O(\theta^n)$; questo è confermato dall'andamento $O(e^{-\sqrt{n}})$ dei coefficienti di F , che è una decrescita più lenta di ogni θ^n .

Ci si potrebbe chiedere se il Teorema 2.21 non fosse sufficiente a garantire la non analiticità della funzione, in quanto i coefficienti non sono $O(\theta^n)$. Sfortunatamente tale teorema garantisce solo la non analiticità *in un punto*.

3.3 La funzione di Weierstrass

Teorema 3.8. *Esistono funzioni continue su $\mathbb{R}$ ma non derivabili in alcun punto.*

Dimostrazione. Siano dati $0 < a < 1$ e $b \in 2\mathbb{Z} + 1$ tali che $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Consideriamo la funzione definita dalla serie di funzioni

$$f(x) = \sum_n a^n \cos(b^n \pi x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mostriamo che f è continua ma non derivabile in alcun punto; tale sarà allora anche $f(x/\pi)$ che è una serie trigonometrica: ad esempio nel caso $a = 1/2$ e $b = 13$, $f(x/\pi)$ è la serie trigonometrica

$$\sum_n \frac{1}{2^n} \cos(13^n x).$$

Evidentemente essa è ben posta in quanto la serie converge totalmente:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in \mathbb{R}} |a^n \cos(b^n \pi x)| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |a^n| = \frac{1}{1-a} < \infty.$$

Siccome f è serie di funzioni continue che convergono uniformemente, anch'essa è continua. Consideriamo $x_0 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$. Evidentemente è possibile trovare $\alpha_m \in \mathbb{Z}$ che verifichi $b^m x_0 - \alpha_m \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Poniamo $b^m x_0 - \alpha_m =: x_{m+1}$. Possiamo fissare

$$x' = \frac{\alpha_m - 1}{b^m}, \quad x'' = \frac{\alpha_m + 1}{b^m}.$$

Si ha evidentemente

$$x' - x_0 = -\frac{1 + x_{m+1}}{b^m}, \quad x'' - x_0 = \frac{1 - x_{m+1}}{b^m}. \quad (3.11)$$

Inoltre $x' < x_0 < x''$. Notiamo che, siccome la scelta di m è arbitraria, è possibile sceglierlo così che x', x'' siano arbitrariamente vicini a x_0 . Adesso trivialmente

$$\begin{aligned} \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{\cos(b^n \pi x') - \cos(b^n \pi x_0)}{x' - x_0} = \sum_{n=0}^{\infty} (ab)^n \frac{\cos(b^n \pi x') - \cos(b^n \pi x_0)}{b^n (x' - x_0)} = \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n \frac{\cos(b^n \pi x') - \cos(b^n \pi x_0)}{b^n (x' - x_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} (a)^{n+m} \frac{\cos(b^{n+m} \pi x') - \cos(b^{n+m} \pi x_0)}{(x' - x_0)}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Grazie alle formule di prostaferesi

$$\frac{\cos(b^n \pi x') - \cos(b^n \pi x_0)}{b^n (x' - x_0)} = -\pi \sin \left(b^n \frac{x' + x_0}{2} \pi \right) \frac{\sin \left(b^n \frac{x' - x_0}{2} \pi \right)}{b^n \frac{x' - x_0}{2} \pi}. \quad (3.13)$$

Consideriamo il primo addendo di (3.12):

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n \frac{\cos(b^n \pi x') - \cos(b^n \pi x_0)}{b^n (x' - x_0)} \\ &\stackrel{(3.13)}{=} \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n \left(-\pi \sin \left(b^n \frac{x' + x_0}{2} \pi \right) \frac{\sin \left(b^n \frac{x' - x_0}{2} \pi \right)}{b^n \frac{x' - x_0}{2} \pi} \right) = (\star). \end{aligned}$$

Siccome $|\sin x| \leq 1$ e $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq 1$, vale

$$(\star) \geq -\pi \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n \frac{\sin \left(b^n \frac{x' - x_0}{2} \pi \right)}{b^n \frac{x' - x_0}{2} \pi} \geq -\pi \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n \geq \frac{\pi}{ab-1} (ab)^m. \quad (3.14)$$

Inoltre siccome b è dispari vale, data (3.11)

$$\begin{aligned} \cos(b^{m+n} x' \pi) &= \cos(b^{m+n} (\alpha_m - 1) b^{-m} \pi) = -(-1)^{\alpha_m} \\ \cos(b^{m+n} x_0 \pi) &= \cos(b^n \alpha_m \pi + b^n x_{m+1} \pi) = (-1)^{\alpha_m} \cos(b^n x_{m+1} \pi). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Osserviamo che

$$\cos x_{m+1}\pi \geq 0, \quad 1 + x_{m+1} \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]. \quad (3.16)$$

Concentriamoci sul secondo addendo di (3.12):

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} a^{m+n} \left(\frac{\cos(b^{m+n}x'\pi) - \cos(b^{m+n}x_0\pi)}{x' - x_0} \right) \\ \stackrel{(3.11)}{=} & \sum_{n=0}^{\infty} -a^{m+n} b^m \frac{\cos(b^{m+n}x'\pi) - \cos(b^{m+n}x_0\pi)}{1 + x_{m+1}} \\ \stackrel{(3.15)}{=} & (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{1 + \cos(b^n x_{m+1}\pi)}{1 + x_{m+1}} = (\diamond). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Siccome $|\cos x| \leq 1$, la serie è a termini non negativi, per cui controllerà il termine di indice $n = 0$.

Ossia

$$(\diamond) \geq (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \frac{1 + \cos(x_{m+1}\pi)}{1 + x_{m+1}} \stackrel{(3.16)}{\geq} (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \frac{2}{3}.$$

Per cui applicando (3.14) e (3.17) esistono¹ $\eta > 1$ e $\epsilon \in (-1, 1)$ tali che

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \eta \left(\frac{2}{3} + \epsilon \frac{\pi}{ab - 1} \right).$$

Analogamente esistono $\eta_1 > 1$ e $\epsilon_1 \in (-1, 1)$ tali che

$$\frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0} = -(-1)^{\alpha_m} (ab)^m \eta_1 \left(\frac{2}{3} + \epsilon_1 \frac{\pi}{ab - 1} \right).$$

Siccome per ipotesi a, b sono tali che $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, vale $\frac{2}{3} > \frac{\pi}{ab-1}$. Per cui $\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}$ e $\frac{f(x'')-f(x_0)}{x''-x_0}$ hanno segno opposto e diventano arbitrariamente grandi in modulo per $m \rightarrow \infty$. Questo ci fa concludere che non esiste il limite del rapporto incrementale in alcun punto, per cui f non è derivabile da nessuna parte. $\square$

3.4 Il Controesempio di Kolmogorov

Teorema 3.9. *Esiste una funzione sommabile il cui sviluppo in serie di Fourier non converge in alcun punto.*

Dimostrazione. Seguiamo la dimostrazione ideata da Kolmogorov[6]. Cominciamo supponendo che esista una successione di polinomi trigonometrici non negativi $F_1, \dots, F_n, \dots$ di ordini crescenti ν_i , tali che abbiano termine costante 1 per ogni n . Inoltre per ogni n esistano $M_n > 0$, $E_n \subseteq [0, 2\pi)$, $\lambda_n \in \mathbb{Z}$ tali che

- 1) $M_n \rightarrow \infty$
- 2) $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_n \subseteq \dots$, $\bigcup_n E_n = [0, 2\pi)$
- 3) $\lambda_n \rightarrow \infty$
- 4) $\forall x \in E_n \exists k_x \in \mathbb{N}$ ove $\lambda_n \leq k_x \leq \nu_n$ e $S_k(F_n)(x) > M_n$.

¹Grazie alla continuità di f .

Lasciamo questa costruzione estremamente tecnica senza dimostrazione².

Costruiamo la successione n_i induttivamente in questo modo: $n_1 = 1$; posti n_j con $j = 1, \dots, i-1$, sia n_i tale che:

$$a) \quad \lambda_{n_i} > \nu_{n_{i-1}} \quad b) \quad M_{n_i} > 4M_{n_{i-1}} \quad c) \quad M_{n_i}^{-\frac{1}{2}} > \nu_{n_{i-1}}.$$

La costruzione è legittima grazie ai punti (1), (3) di cui sopra. Sia ora

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} M_{n_k}^{-\frac{1}{2}} F_{n_k}(x).$$

Per ogni x la serie è a termini non negativi, per cui grazie al teorema di Beppo Levi vale, ricordandoci che il termine noto di F_{n_k} è 1,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f = \sum_{k=1}^{\infty} M_{n_k}^{-\frac{1}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} F_{n_k}(x) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} M_{n_k}^{-\frac{1}{2}} \stackrel{(b)}{<} +\infty.$$

Siccome f è non negativa questo significa che $f \in L^1$. Sia $x \in E_{n_i}$ e spezziamo $f = u + v + w$, ove

$$u = \sum_{k=1}^{i-1} M_{n_k}^{-\frac{1}{2}} F_{n_k}, \quad v = M_{n_i}^{-\frac{1}{2}} F_{n_i}, \quad w = \sum_{k=i+1}^{\infty} M_{n_k}^{-\frac{1}{2}} F_{n_k}.$$

Grazie alla linearità del p -esimo polinomio di Fourier si ottiene

$$S_p(f)(x) = S_p(u)(x) + S_p(v)(x) + S_p(w)(x).$$

Per (4) esiste $k = k(x, i)$ tale che $\lambda_{n_i} \leq k \leq \nu_{n_i}$, con $S_k(F_{n_i})(x) > M_{n_i}$. Questo comporta

$$S_k(v)(x) = S_k\left(M_{n_i}^{-\frac{1}{2}} F_{n_i}\right)(x) \geq M_{n_i}^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.18)$$

Siccome il polinomio di Fourier di grado m di $p(x)$ (un polinomio trigonometrico di grado n con $m \geq n$) è $p(x)$ stesso; grazie al punto (a), in quanto $k \geq \lambda_{n_i} > \nu_{n_{i-1}}$, si osserva

$$S_k(u)(x) = u(x) \geq 0. \quad (3.19)$$

In generale i coefficienti di Fourier di una funzione $g \in L^1$ non sono maggiori in modulo di $\pi^{-1}\|g\|_{L^1}$, il che significa che $|S_k(g)| \leq (2k+1)\pi^{-1}\|g\|_{L^1}$. Questa osservazione applicata a $g = w$ ci fa ottenere

$$\begin{aligned} |S_k(w)(x)| &\leq 2\pi \frac{2k+1}{\pi} \sum_{j=i+1}^{\infty} M_{n_j}^{-\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{(b)}{\leq} 2(2k+1)M_{n_{i+1}}^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) \leq 12kM_{n_{i+1}}^{-\frac{1}{2}} \stackrel{(4)}{\leq} 12\nu_{n_i}M_{n_{i+1}}^{-\frac{1}{2}} \stackrel{(c)}{<} 12. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Applicando (3.18), (3.19), (3.20) si ottiene

$$S_k(f)(x) = S_k(u)(x) + S_k(v)(x) + S_k(w)(x) \geq M_{n_i}^{-\frac{1}{2}} - 12 \xrightarrow{i \rightarrow \infty} +\infty.$$

Ma siccome per (2) $\bigcup_n E_n = [0, 2\pi)$, per ogni $x \in [0, 2\pi)$ esiste j tale che se $i \geq j$, $x \in E_{n_i}$. Questo significa che $S(f)$ non converge per nessun $x \in [0, 2\pi)$. Grazie alla 2π -periodicità di f , $S(f)$ non converge in alcun punto di $\mathbb{R}$. $\square$

²Si veda [13, Chapter VIII, Theorem 4.2].

Bibliografia

- [1] T.M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, **1973**, ISBN: 9780201002881
- [2] N. K. Bary, *A Treatise on Trigonometric Series, Volume I*, Pergamon Press, Oxford, **1964**, ISBN: 9781483224190
- [3] L. Carleson, *On convergence and growth of partial sums of Fourier Series*, Acta Mathematica 116 (135-157), **1966**
- [4] G. B. Folland, *Real Analysis*, John Wiley & Sons, Inc. , New York, **1999**, ISBN: 9781118626399
- [5] G. H. Hardy, W. W. Rogosinski, *Fourier Series*, University Press, Cambridge, **1956**, ISBN: 978048640681
- [6] A.N. Kolmogorov, *Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences à Paris, 183 (1327-1329), **1926**
- [7] S. Mandelbrojt, *Analytic Functions and Classes of Infinitely Differentiable Functions*, Rice Institute Pamphlet, V29, No. 1, **1942**
- [8] L. Mejlbro, *Examples of Fourier Series*, Ventus Publishing ApS, **2008**, ISBN: 9788776813802
- [9] Natanson, *Theory of Functions of Real Variable*, Volume 1, Frederick Ungar Publishing Co. , New York, **1964**
- [10] H. Steinhaus, *A Divergent Trigonometrical Series*, London Math. Soc.,4, (86-88), **1929**
- [11] P. L. Ul'yanov, *On the divergence of Fourier series*, Uspekhi Mat. Nauk, Volume 12, Issue 3, (75-132), **1957**
- [12] K. Weierstrass, *Mathematische Werke von Karl Weierstrass*, Mayer & Müller, Berlin, **1895**
- [13] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Cambridge University Press, Cambridge, **1959**

Ringraziamenti

Vorrei lasciare questo spazio a tutti coloro che mi hanno seguito ed aiutato in questo percorso di crescita personale.

In primis, un sentito grazie al Professor Bonfiglioli che, in quanto relatore di questa tesi, con la sua infinita pazienza e disponibilità mi ha guidato nella stesura di questo elaborato ed è riuscito a trasmettermi il suo amore per la precisione e la chiarezza. Senza il suo aiuto questa tesi non sarebbe così completa e scorrevole.

Voglio anche ringraziare i miei genitori. Grazie per essermi stati sempre vicini in questo percorso, senza di voi non sarei dove sono ora.

Ringrazio infine il mio collega Alessandro per tutti gli spunti di riflessione interessanti e le sessioni di Brain-storming alla ricerca di una dimostrazione più elegante e analitica di qualunque Teorema ci capitasse sotto mano.