

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE

DICAM

Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e dei Materiali

TESI DI LAUREA

IN GEOTECNICA APPLICATA LS

**EFFETTI DEL *CREEP* DEI TERRENI
COESIVI SULLA STABILITÀ DELLE TORRI**

Candidato:

IRENE FABBI

Relatore:

Chiar.mo Prof. **GUIDO
GOTTARDI**

Correlatore:

Dott. Ing. **MICHELA MARCHI**

Anno Accademico 2010/2011

Sessione II

INDICE

INTRODUZIONE

Inquadramento generale	6
Obiettivi	8
Struttura della tesi	8

Parte I – INQUADRAMENTO TEORICO

CAPITOLO 1 – COMPORTAMENTO SPERIMENTALE DI *CREEP* NEI TERRENI COESIVI

1.1 INTRODUZIONE	11
1.2 PROVE SPERIMENTALI E CARATTERISTICHE GENERALI	15
1.2.1 Prove triassiali di <i>creep</i>	19
1.2.2 Prove a incrementi di carico costanti	26
1.2.3 Prove a velocità di deformazione costante	28
1.3 COMPORTAMENTO DI <i>CREEP</i> MONODIMENSIONALE	29
1.3.1 Problema del tempo di riferimento	31
1.3.2 Dipendenza di C_α dallo stato tensionale	34
1.3.3 Comportamento deformazione-tempo	35
1.3.4 Preconsolidazione dovuta ad <i>aging</i>	38
1.3.5 Influenza della velocità di deformazione	43
1.4 COMPORTAMENTO DI <i>CREEP</i> TRIASSIALE	45
1.4.1 Argille normalconsolidate	45
1.4.2 Argille sovraconsolidate	52
1.5 BIBLIOGRAFIA	56

CAPITOLO 2 – MODELLAZIONE MATEMATICA DEL *CREEP* NEI TERRENI COESIVI

2.1 CLASSIFICAZIONE DEI MODELLI	58
2.2 MODELLI EMPIRICI	59
2.2.1 Relazioni empiriche “primarie”	60
2.2.2 Osservazioni sulle relazioni empiriche “primarie”	72
2.2.3 Relazioni semiempiriche “secondarie”	73
2.2.4 Osservazioni sulle relazioni semiempiriche “secondarie”	84
2.2.5 Rottura per <i>creep</i>	85
2.3 MODELLI REOLOGICI	89
2.3.1 Approccio differenziale	90
2.3.2 Osservazioni sull’approccio differenziale	98
2.3.3 Teorie ingegneristiche del <i>creep</i>	99
2.3.4 Osservazioni sulle teorie ingegneristiche del <i>creep</i>	102
2.3.5 Approccio ereditario	103
2.4 MODELLI GENERALI TENSIONE-DEFORMAZIONE-TEMPO	104
2.4.1 Teoria di <i>overstress</i>	105
2.4.2 Osservazioni sulla teoria di <i>overstress</i>	107
2.4.3 Teoria della superficie di flusso non stazionaria	108
2.4.4 Osservazioni sulla teoria della superficie di flusso non stazionaria	110
2.5 MICROREOLOGIA	111
2.6 BIBLIOGRAFIA	115

CAPITOLO 3 – ANALISI DI STABILITÀ DELLE TORRI

3.1 INTRODUZIONE	118
3.2 COLLASSO PER CAPACITÀ PORTANTE DELLE FONDAZIONI SUPERFICIALI	120
3.2.1 Teorie tradizionali per il calcolo della capacità portante	120
3.2.2 Diagrammi di interazione	122
3.2.3 Modelli elasto-plastici inelastici per le fondazioni superficiali	126
3.3 COLLASSO PER INSTABILITÀ	128

3.3.1	Teorie elastiche e anelastiche	128
3.3.2	Instabilità di torri su terreni compressibili	130
3.3.3	Applicazione del modello del macroelemento alla deduzione della curva M_r	136
3.4	COMBINAZIONE DEI MODI DI COLLASSO	137
3.5	BIBLIOGRAFIA	139

Parte II – CONTRIBUTI, SVILUPPI TEORICI
E APPLICAZIONE A CASI REALI

CAPITOLO 4 – EFFETTI DEL *CREEP* SULLE PREVISIONI DI STABILITÀ DELLE TORRI

4.1	INTRODUZIONE	141
4.2	IL <i>CREEP</i> NEI MODELLI ELASTO-PLASTICI INCRUDENTI PER LE FONDAZIONI SUPERFICIALI	142
4.2.1	Incrudimento per <i>creep</i> in analogia con il modello di Bjerrum	144
4.2.2	Incrudimento per <i>creep</i> in analogia con il modello di Tavenas	149
4.3	INFLUENZA DEL <i>CREEP</i> SULL'ANALISI DI STABILITÀ DELLE TORRI	151
4.4	PREVISIONE DELL'EVOLUZIONE DELLE ROTAZIONI NEL TEMPO	153
4.4.1	Integrazione del modello di Tavenas per il macroelemento	157
4.4.2	Discussione sui parametri del modello	162
4.5	BIBLIOGRAFIA	168

CAPITOLO 5 – UTILIZZO DI *MATHEMATICA* NELLA CALIBRAZIONE DEL MODELLO

5.1	INTRODUZIONE	170
5.2	IL <i>NOTEBOOK</i> DI <i>MATHEMATICA</i>	171

5.2.1	Informazioni generali	171
5.2.2	Vantaggi e critiche	172
5.3	LA TORRE DI PISA	173
5.3.1	Caratteristiche principali e cenni storici	173
5.3.2	Stratigrafia del sottosuolo e fondazioni	175
5.3.3	Evoluzione dell'inclinazione nel tempo	178
5.3.4	Interventi geotecnici	181
5.3.5	Applicazione del modello di <i>creep</i>	184
5.3.6	Bibliografia	192
5.4	IL CAMPANILE DI SANTO STEFANO A VENEZIA	194
5.4.1	Caratteristiche principali e cenni storici	194
5.4.2	Stratigrafia del sottosuolo e fondazioni	196
5.4.3	Evoluzione dell'inclinazione nel tempo	198
5.4.4	Interventi geotecnici	200
5.4.5	Applicazione del modello di <i>creep</i>	201
5.4.6	Bibliografia	207
5.5	LA TORRE GHIRLANDINA DI MODENA	208
5.5.1	Caratteristiche principali e cenni storici	208
5.5.2	Stratigrafia del sottosuolo e fondazioni	211
5.5.3	Evoluzione dell'inclinazione nel tempo	215
5.5.4	Attività di monitoraggio	216
5.5.5	Applicazione del modello di <i>creep</i>	218
5.5.6	Bibliografia	223
5.6	LA TORRE DEGLI ASINELLI DI BOLOGNA	225
5.6.1	Caratteristiche principali e cenni storici	225
5.6.2	Stratigrafia del sottosuolo e fondazioni	228
5.6.3	Evoluzione dell'inclinazione nel tempo	229
5.6.4	Attività di monitoraggio	231
5.6.5	Applicazione del modello di <i>creep</i>	232
5.6.6	Bibliografia	239
5.7	LA TORRE GARISENDA DI BOLOGNA	240
5.7.1	Caratteristiche principali e cenni storici	240

5.7.2 Stratigrafia del sottosuolo e fondazioni	242
5.7.3 Evoluzione dell'inclinazione nel tempo	243
5.7.4 Attività di monitoraggio	245
5.7.5 Applicazione del modello di <i>creep</i>	245
5.7.6 Bibliografia	251

CONCLUSIONI

Sintesi dei contributi	252
Sviluppi futuri	254

RINGRAZIAMENTI	256
----------------------	-----

APPENDICE A – IMPLEMENTAZIONE DEL MODELLO IN *MATHEMATICA*

A.1 INTRODUZIONE	257
A.2 <i>NOTEBOOK</i> DELLA TORRE DI PISA	257
A.3 <i>NOTEBOOK</i> DEL CAMPANILE DI SANTO STEFANO	273
A.4 <i>NOTEBOOK</i> DELLA TORRE GHIRLANDINA	282
A.5 <i>NOTEBOOK</i> DELLA TORRE DEGLI ASINELLI	290
A.6 <i>NOTEBOOK</i> DELLA TORRE GARISENDA	299

INTRODUZIONE

Inquadramento generale

Il panorama di molti centri storici italiani è dominato da innumerevoli torri e campanili antichi, che grazie al loro fascino sono diventati l'elemento identificativo della città che li ospita, come ad esempio nei casi emblematici di Pisa, Bologna, Modena e Venezia.

Tali strutture sono spesso afflitte da complessi problemi legati all'interazione con il terreno, che ne regolano i movimenti ed evolvono nel tempo in modo significativo.

In particolare, i principali meccanismi di rottura che possono interessare il sistema terreno-fondazione sono legati a due tipi di problemi: la capacità portante, condizionata dalla resistenza del terreno di fondazione, e la stabilità dell'equilibrio, influenzata invece dalla rigidità del terreno.

Inoltre possono verificarsi altri problemi di natura strutturale, che possono mettere in crisi l'apparato murario, come testimoniano le rovinose vicende del Campanile di San Marco a Venezia e della Torre Civica di Pavia, ma esulano dalla modellazione geotecnica.

Molte torri storiche, giunte a noi attraverso i secoli, hanno superato, durante le fasi della loro costruzione, momenti di criticità ogni volta che il carico unitario trasmesso al terreno di fondazione risultava prossimo alla capacità portante del sistema fondazione-terreno.

Comunque, a causa della maggiore lentezza con cui si usava costruire in passato e delle interruzioni, anche non programmate, del processo di edificazione, il terreno poteva consolidarsi sotto i carichi applicati, incrementando le sue caratteristiche meccaniche e quindi la possibilità di resistere agli ulteriori incrementi di sollecitazione prodotti dalle successive fasi di costruzione della struttura. Queste fortunate circostanze hanno così permesso a diverse torri di sopravvivere attraverso i secoli.

Tuttavia, pur avendo inizialmente superato il problema della capacità portante, l'incremento progressivo dell'inclinazione della torre, dovuto alla presenza di cedimenti differenziali in fondazione, genera stati di sollecitazione sempre più gravosi, che, associati alla bassa rigidità del sistema terreno-fondazione, possono comunque mettere in crisi la fondazione nel lungo periodo.

Infatti il terreno, se sottoposto ad un carico costante, sviluppa deformazioni differite nel tempo, volumetriche e/o deviatoriche, che possono diventare di notevole entità. Questo fenomeno, noto con il nome di *creep*, è attribuibile ai processi viscosi che avvengono a livello dello scheletro solido del terreno.

Il *creep* assume quindi una notevole importanza pratica, perché, se associato alle inevitabili imperfezioni della struttura in elevazione o irregolarità del terreno di fondazione, può dar luogo ad una progressiva perdita di verticalità della struttura.

La valutazione della sicurezza e la previsione del comportamento delle torri rappresenta da sempre una sfida avvincente, ma anche piena di incertezze per tutti gli addetti ai lavori, che recentemente si sono dedicati allo sviluppo e all'implementazione di specifici modelli avanzati, basati sull'applicazione del concetto di macroelemento al sistema complessivo terreno-struttura. Tali modelli consentono di tenere conto della risposta fortemente non lineare e di natura tipicamente elasto-plastica inelastica dei terreni di fondazione.

Tuttavia, per contribuire in modo significativo alla conservazione delle numerose torri storiche che popolano il patrimonio artistico italiano e che mostrano segni di dissesto, è necessario elaborare modelli più affidabili e completi.

In particolare, al fine di interpretare in modo corretto e realistico il comportamento delle strutture reali, è di fondamentale importanza tenere conto dell'influenza del *creep* sui meccanismi di collasso delle torri storiche, e in particolare sulla stabilità dell'equilibrio.

Pertanto, in questa tesi viene proposta una metodologia innovativa che permette di implementare il *creep* dei terreni, e quindi di introdurre la variabile tempo, direttamente nelle formulazioni dei modelli esistenti. Il modello di previsione dell'evoluzione dell'inclinazione nel tempo si basa su una funzione di *creep* rotazionale, ricavata con un approccio di tipo semiempirico, a partire dall'analogia tra elemento di volume e macroelemento.

Obiettivi

La tesi si concentra sugli effetti che i fenomeni di *creep* hanno sulla stabilità delle torri storiche. In particolare, dopo aver approfondito lo studio e la comprensione delle indagini sperimentali e della modellazione dei fenomeni di *creep* relativi all'elemento di volume, il lavoro è indirizzato all'implementazione del *creep* nei modelli elasto-plastici incrudenti per le fondazioni superficiali, cioè consiste nella definizione di una funzione di *creep* che preveda l'evoluzione delle rotazioni delle torri nel tempo. Tale formulazione, necessaria per completare l'analisi di stabilità delle torri, può essere ricavata per analogia a partire da un modello semiempirico di *creep* elaborato per l'elemento di volume.

Struttura della tesi

La struttura di questa tesi è organizzata in due parti principali: nella **PARTE I** sono riassunti i contributi bibliografici necessari all'inquadramento teorico dell'intero problema, dal *creep* dei terreni all'analisi di stabilità delle torri, mentre nella **PARTE II** sono riportati i contributi personali, gli sviluppi teorici e infine l'applicazione a casi reali di un modello che tenga conto degli effetti del *creep* sulla stabilità delle torri.

Parte I – INQUADRAMENTO TEORICO:

Nel **Capitolo 1** viene introdotto il problema del *creep* per i terreni, attribuibile ai processi viscosi che avvengono a livello dello scheletro solido. Inoltre, vengono riportati gli studi e le osservazioni sperimentali più interessanti sui fenomeni di *creep* dei terreni coesivi, al fine di inquadrare gli sviluppi realizzati, con non poche difficoltà, dalla ricerca negli ultimi decenni. In particolare, i processi di *creep* sono importanti non solo per la diretta e immediata applicazione all'analisi di problemi pratici, ma anche perché le osservazioni sperimentali possono essere utilizzate per ottenere informazioni fondamentali sulla struttura del terreno, sui legami interparticellari e sui meccanismi che regolano il comportamento tensionale e deformativo.

Nel **Capitolo 2** vengono catalogate e descritte le caratteristiche di base, i vantaggi e i limiti dei modelli matematici attualmente presenti in letteratura, nel tentativo di confrontare le diverse tipologie di modello e di chiarire il disordine presente in

letteratura. Tale trattazione è incentrata sui modelli che riguardano le proprietà macromeccaniche, con particolare attenzione ai modelli empirici e alla rottura per *creep*. Non mancano comunque cenni alla micromeccanica, che, modellando la reale struttura del materiale dal punto di vista chimico-fisico, fornisce un elemento fondamentale per la comprensione della risposta macroscopica.

Il **Capitolo 3** affronta i problemi legati ai diversi meccanismi di rottura che possono interessare il sistema terreno-fondazione: (1) collasso per capacità portante, dovuto alla mancanza di resistenza del terreno di fondazione, (2) collasso per instabilità dell'equilibrio, dovuto all'insufficiente rigidità del terreno. Tali problemi vengono dapprima trattati separatamente, poi descritti all'interno di un unico *framework* concettuale, basato sull'utilizzo dei modelli elasto-plastici incrudenti sviluppati per le fondazioni superficiali e applicato al caso specifico delle torri. La trattazione prescinde dal collasso degli elementi strutturali, dovuto alla rottura della muratura, dato che non fa parte degli scopi della modellazione geotecnica.

Parte II – CONTRIBUTI, SVILUPPI TEORICI E APPLICAZIONE A CASI REALI:

Il **Capitolo 4** contiene i contributi analitici sviluppati nel caso specifico delle torri al fine di integrare il *creep* dei terreni di fondazione direttamente all'interno della formulazione classica del macroelemento con un approccio di tipo semiempirico. Infatti, per interpretare realisticamente il comportamento delle strutture reali, è fondamentale tenere conto del *creep* che, associato alle inevitabili imperfezioni della struttura in elevazione o irregolarità del terreno di fondazione, può dar luogo ad una progressiva perdita di verticalità della struttura, con tutti i problemi che ne conseguono. In particolare, a partire dall'analogia tra elemento di volume e macroelemento, e dall'integrazione del modello di Tavenas *et al.*, si introduce una formulazione innovativa del *creep* rotazionale, per la previsione dell'evoluzione dell'inclinazione delle torri fino al collasso.

Nel **Capitolo 5** si procede alla fase più delicata di questa tesi, cioè la calibrazione del modello di *creep* rotazionale, che deve essere sviluppata sui dati di casi reali significativi, al fine di studiare la variabilità dei parametri e di valutare aspetti positivi e negativi della formulazione proposta. In particolare vengono esaminati i casi della Torre

di Pisa, del Campanile di Santo Stefano a Venezia, della Torre Ghirlandina di Modena, della Torre degli Asinelli e della Torre Garisenda di Bologna. Relativamente a tali *case histories*, vengono riportati alcuni cenni delle loro vicende storiche, mettendo in evidenza le informazioni relative al movimento di rotazione, agli interventi di consolidamento eseguiti in passato e alle possibili prospettive future di messa in sicurezza. Inoltre vengono descritte le principali caratteristiche riguardanti la geometria della struttura, la stratigrafia del sottosuolo e le peculiarità del sistema di fondazione.

Il modello di previsione dell'evoluzione delle rotazioni nel tempo delle torri viene implementato all'interno dell'ambiente di calcolo simbolico e numerico di *Mathematica* e, per completezza, nell'**Appendice A** sono riportati i *notebook* di elaborazione relativi ai *case histories*.

CAPITOLO 1

COMPORAMENTO SPERIMENTALE DI *CREEP* NEI TERRENI COESIVI

1.1 INTRODUZIONE

La “**Reologia**” è quella parte della fisica che si occupa dei fenomeni di scorrimento nei materiali (viscosità e comportamento newtoniano e non newtoniano dei fluidi), studiando l’andamento delle deformazioni nella materia sotto l’effetto dell’applicazione di un sistema di sollecitazioni esterne.

Tutti i materiali solidi che “scorrono” però hanno anche deformazioni di tipo elastico, per cui nel nostro caso è più corretto affermare che la reologia si occupa dei fenomeni di visco-elasticità nei materiali solidi (Rinaldi, 2002). Infatti, come noto, ogni forza esterna applicata provoca in un materiale una deformazione, che può avere due componenti:

- **Deformazione elastica:** istantaneamente il materiale raggiunge una condizione di equilibrio (forza esterna bilanciata dalle forze interne); venuta meno la forza esterna, esso ritorna immediatamente nella configurazione iniziale;
- **Deformazione di scorrimento:** sotto l’azione della forza esterna, la deformazione aumenta nel tempo ed è irreversibile (permanente), cioè non viene recuperata anche se la forza che l’ha prodotta viene eliminata.

Nel campo delle deformazioni irreversibili, esistono però due possibili “risposte” dei materiali:

- a) **Scorrimento viscoso**, che si verifica qualunque sia l’entità della forza esterna;
- b) **Scorrimento plastico**, che si manifesta solo se la forza esterna supera un certo valore (limite di snervamento).

L'entità delle deformazioni differite nel tempo dipendono dalle proprietà dei materiali. Nel caso di un fluido newtoniano, ad esempio, la velocità di deformazione $\dot{\epsilon}$ è direttamente proporzionale al livello tensionale σ :

Eq. 1.1
$$\sigma = \mu \dot{\epsilon}$$

dove μ è il coefficiente di viscosità. L'equazione precedente costituisce il più semplice modello reologico che descrive il comportamento tensione-deformazione di un fluido ideale newtoniano.

Per quel che riguarda i terreni, il loro comportamento meccanico è notevolmente più complesso di quello di altri materiali studiati ad esempio nella Tecnica delle Costruzioni, come il calcestruzzo e l'acciaio, che entro determinati campi di sollecitazione manifestano un comportamento elastico-lineare.

I terreni, al contrario, sono caratterizzati da un **comportamento anelastico non lineare** anche per piccoli valori degli sforzi applicati, da cui deriva che le deformazioni sono prevalentemente irreversibili e dipendono dal percorso tensionale, dalla velocità di applicazione del carico e dal tempo.

In particolare, il terreno, se sottoposto ad un carico costante, sviluppa deformazioni differite nel tempo, volumetriche e/o deviatoriche, che possono diventare di notevole entità. Questo fenomeno, noto con il nome di **CREEP**, è attribuibile ai processi viscosi che avvengono a livello dello scheletro solido del terreno (costituito dalle particelle e dall'acqua adsorbita).

Il fenomeno “inverso”, di solito chiamato **RILASSAMENTO**, consiste nella diminuzione della tensione nel tempo, conseguente all'applicazione di un livello di deformazione costante.

L'entità e la velocità del *creep* e del rilassamento sono quindi conseguenze di uno stesso fenomeno, cioè dei cambiamenti della struttura del terreno nel tempo (**VISCOSITÀ**).

In generale, questo tipo di comportamento è essenzialmente lo stesso per tutti i terreni, cioè sia per i terreni granulari che per i terreni coesivi. Tuttavia, la dipendenza del comportamento meccanico dal tempo è più marcata per le argille rispetto alle sabbie (Mitchell e Soga, 2005).

Infatti, i terreni argillosi sono materiali naturali estremamente complessi contenenti una notevole quantità di particelle fini disperse di diametro inferiore a 0,002 mm, che

hanno un'enorme influenza sui difficili processi fisici, meccanici e fisico-meccanici che si verificano all'interno di questi stessi materiali.

Nei terreni a grana fine la proprietà reologica più tipica, pronunciata e facilmente osservabile è il *creep*, che spesso si manifesta durante le condizioni di esercizio delle strutture sotto forma di cedimenti differiti, rotazioni e spostamenti orizzontali (Havel, 2004).

In Italia sono numerosi gli esempi di fenomeni di *creep* che hanno causato problemi alle strutture coinvolte.

Un esempio emblematico è dato dalla **Torre di Pisa**. La costruzione della Torre, che ha avuto inizio nel 1173, è stata realizzata in 3 fasi successive ed è stata completata nel 1370. Probabilmente, la maggiore lentezza con cui in passato si usava costruire e le interruzioni, anche non programmate, che spesso avvenivano prima che le strutture fossero ultimate, costituivano fortunate circostanze che hanno garantito la sopravvivenza di numerose torri. Infatti, il terreno poteva così consolidarsi sotto i carichi applicati, con il conseguente miglioramento delle sue caratteristiche meccaniche e la possibilità di resistere agli ulteriori incrementi di sollecitazione prodotti dalle successive fasi di costruzione della struttura. Ma se il problema della capacità portante è stato inizialmente superato per tutte le torri arrivate fino ad oggi, ciò non toglie che l'incremento progressivo di pendenza di molte di esse generi stati di sollecitazione sempre più gravosi, che possono comunque mettere in crisi la fondazione nel lungo periodo. Infatti, a causa delle deformazioni di *creep* delle argille depositate sotto forma di lenti nella fondazione sabbiosa, la Torre di Pisa ha subito un cedimento medio di 1,5 m e un'inclinazione verso sud di circa $5,5^\circ$, che continuano ad aumentare nel tempo (si veda Sezione 5.3).

In questo caso, il *creep*, associato ad imperfezioni strutturali e irregolarità del terreno di fondazione, ha quindi dato luogo ad una progressiva perdita di verticalità della struttura, con tutti i problemi che sono seguiti.

In Figura 1.1 è riportata un'immagine schematica della sezione della Torre di Pisa e della situazione geologica del sottosuolo; inoltre, l'andamento del cedimento del terreno nel tempo viene rappresentato in parallelo a quello della dimensione della struttura.

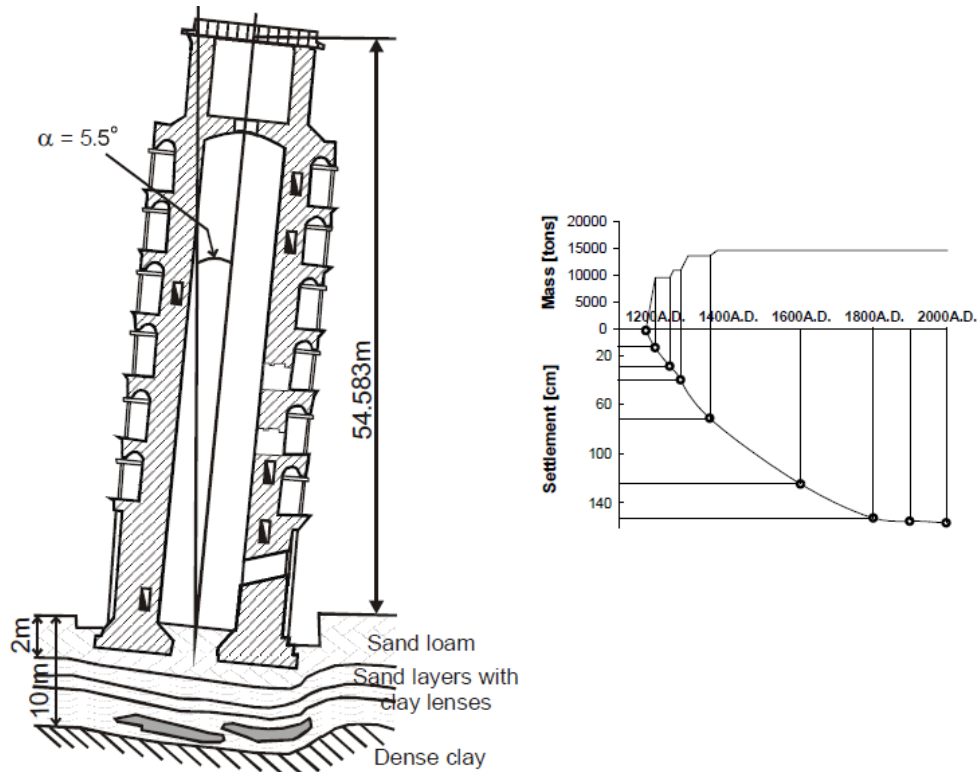


Figura 1.1. Sezione della Torre di Pisa, storia ed evoluzione dei cedimenti (Havel, 2004).

Il comportamento di *creep* assume quindi notevole importanza pratica nei problemi geotecnici in cui, al fine di evitare problemi di funzionalità in esercizio o di stabilità, interessano le deformazioni a lungo termine, quali cedimenti differiti delle strutture fondate su terreni comprimibili, deformazioni delle strutture in terra, movimenti di scavo e di pendii naturali, e variazioni delle proprietà del terreno dipendenti dal tempo e dalla tensione.

Inoltre, i fenomeni di *creep* dei terreni sono importanti non solo per la diretta e immediata applicazione all'analisi di problemi pratici, ma anche perché le osservazioni sperimentali possono essere utilizzate per ottenere informazioni fondamentali sulla struttura del terreno, sui legami interparticellari e sui meccanismi che regolano il comportamento tensionale e deformativo (Mitchell e Soga, 2005).

La prima citazione del fenomeno del *creep* si può trovare in “*Bases and Foundation*” di V. Karlovich del 1869.

Dopo che la reologia dei terreni è stata riconosciuta come un ramo indipendente della Meccanica delle Terre nel 1953, durante la III Conferenza Internazionale sulla Meccanica delle Terre e sull'Ingegneria Geotecnica (*International Conference on*

Soil Mechanics and Foundation Engineering), molti ricercatori e professionisti si sono dedicati all'indagine sperimentale e numerica di questo fenomeno affascinante ed allo stesso tempo pieno di incertezze (Havel, 2004).

La ricerca, tuttora in corso, si sviluppa su due fronti principali: il primo che si occupa degli **studi sperimentali**, il secondo che riguarda la **modellazione**. Infatti, al fine di caratterizzare il comportamento meccanico differito nel tempo osservato per sabbie e argille, è necessario sviluppare, sulla base dei risultati sperimentali, modelli matematici che stabiliscano dei legami tra tensioni, deformazioni e tempo, cioè i cosiddetti modelli costitutivi.

Tuttavia, nonostante il comportamento viscoso tensione-deformazione-tempo dei terreni sia stato diffusamente studiato negli ultimi decenni, sono ancora presenti numerosi aspetti irrisolti e non esiste un *framework* unitario, probabilmente anche a causa della difficoltà di eseguire prove a lungo termine e della conseguente mancanza di dati sperimentali per diversi tipi di terreni.

Lo scopo di questo Capitolo è quindi quello di raccogliere le osservazioni sperimentali più interessanti sul *creep* dei terreni a grana fine.

1.2 PROVE SPERIMENTALI E CARATTERISTICHE GENERALI

Dall'osservazione di deformazioni differite inaccettabili che si verificano normalmente durante le condizioni di esercizio delle strutture, risulta evidente che i terreni manifestino un **comportamento reologico viscoso**, cioè caratterizzato da deformazioni permanenti (irreversibili) variabili nel tempo. Si parla infatti di *time-dependent behaviour*.

In particolare, il fenomeno del *creep*, attribuibile proprio ai processi viscosi a livello dello scheletro solido del terreno, costituisce la proprietà reologica più tipica, pronunciata e facilmente osservabile, ed assume notevole importanza nei problemi

geotecnici in cui, al fine di evitare problemi di funzionalità in esercizio o di stabilità, interessano le deformazioni a lungo termine (Mitchell e Soga, 2005).

In generale, questo tipo di comportamento è essenzialmente lo stesso per tutti i terreni, cioè **sia per i terreni granulari che per i terreni coesivi**. Tuttavia, l'entità delle deformazioni viscosi dipende caso per caso da fattori ambientali (le variazioni di temperatura e di pressione, la storia tensionale, le condizioni di drenaggio), mentre la tendenza più o meno marcata a manifestare un comportamento viscoso dipende dalla composizione del materiale. A causa della difficile natura dei terreni, ci sono quindi diversi aspetti che influenzano il loro comportamento di *creep*.

In particolare, la dipendenza dal tempo del comportamento meccanico è più marcata per le argille rispetto alle sabbie (Augustesen *et al.*, 2004).

I terreni argillosi sono materiali naturali estremamente complessi contenenti una notevole quantità di particelle fini disperse di diametro inferiore a 0,002 mm, che hanno un'enorme influenza sui difficili processi fisici, meccanici e fisico-meccanici che si verificano al loro interno. L'entità delle deformazioni di *creep* aumenta all'aumentare della plasticità, del contenuto organico, dell'attività e del contenuto d'acqua del terreno.

Le argille più attive (cioè illite, smectite e caolinite) presentano un comportamento viscoso più evidente, perché più piccola è la dimensione delle particelle, maggiore è la superficie specifica, e quindi l'assorbimento di acqua.

L'acqua può "lubrificare" le particelle e incrementare la velocità di *creep*, quindi le deformazioni di *creep* sono più rilevanti se il contenuto d'acqua è elevato; il comportamento viscoso nei terreni normalconsolidati è più marcato rispetto ai terreni sovra consolidati (Mitchell e Soga, 2005).

La sabbia, che è generalmente considerato come un materiale non viscoso, mostra invece un comportamento *time-dependent*. I risultati sperimentali mostrano che le deformazioni di *creep* non sono trascurabili e possono raggiungere il 10% della deformazione per carico monotono (solitamente intesa come deformazione elastoplastica). Inoltre, durante il caricamento, dopo aver subito processi di *creep* e/o di rilassamento, la risposta è molto più rigida rispetto ai casi in cui non si siano verificati fenomeni viscosi.

Per questo motivo, la maggior parte delle osservazioni sperimentali riportate in letteratura si concentra quasi esclusivamente sulla caratterizzazione del comportamento

viscoso dei terreni a grana fine, mentre il numero delle prove di laboratorio sulle sabbie è molto più ridotto, anche se negli ultimi anni è stata dedicata sempre maggiore attenzione anche alla ricerca sperimentale sul *creep* dei materiali granulari (Augustesen *et al.*, 2004).

La risposta viscosa dei terreni dipende quindi da numerosi fattori, come la natura e la struttura del terreno, la storia tensionale, le condizioni di drenaggio e la tipologia di caricamento. In Figura 1.2, ad esempio, è riportata un'ampia gamma di curve $[\varepsilon - t]$ di *creep* ricavate per diversi tipi di terreni in diverse condizioni (Mitchell e Soga, 2005).

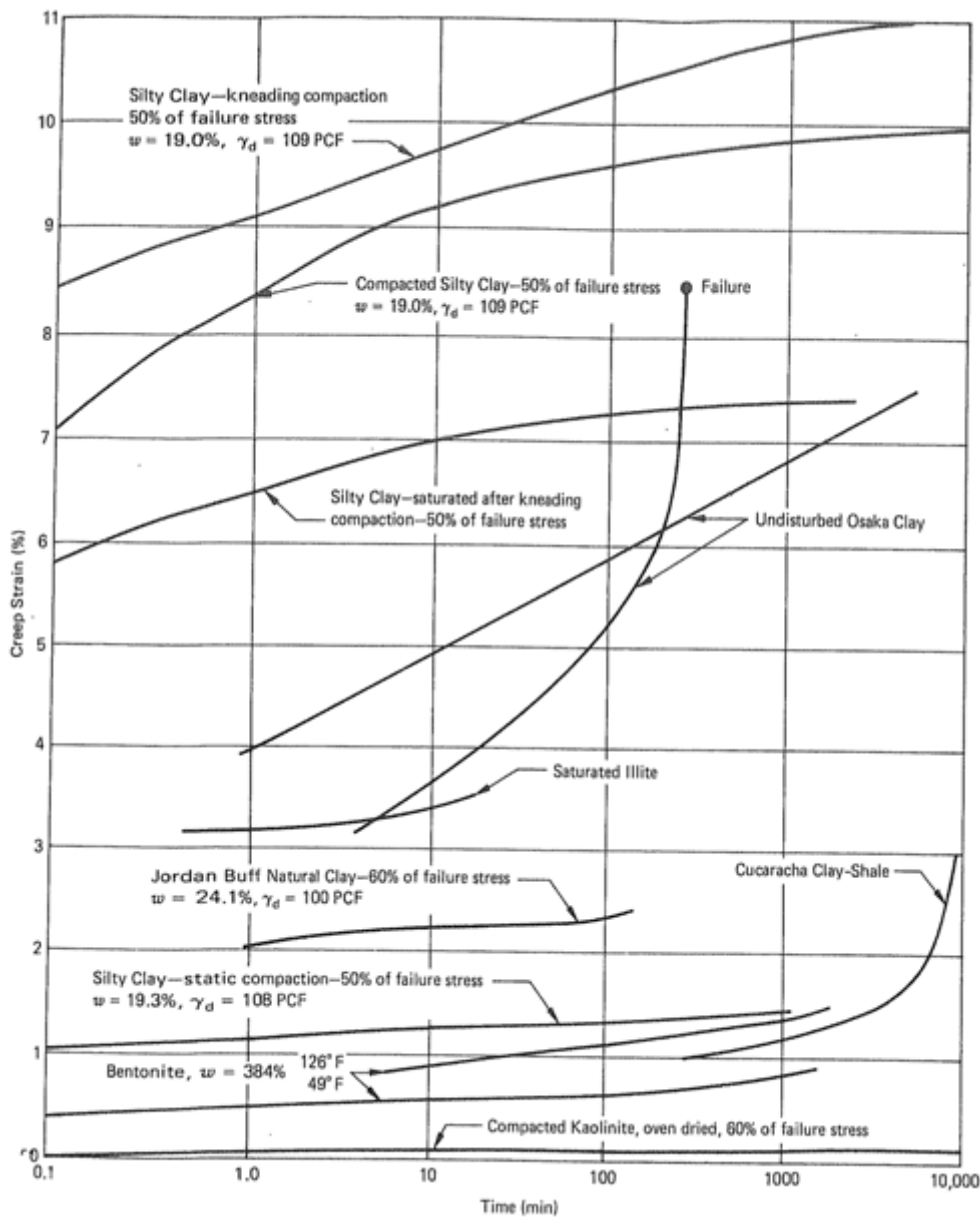


Figura 1.2. Curve di *creep* per diversi tipi di terreni e diverse condizioni di carico (Mitchell e Soga, 2005).

È interessante osservare che il termine “**tempo**” può essere inteso in diversi modi (Augustesen *et al.*, 2004).

In questa sede, il tempo non ha nulla a che fare con gli effetti dinamici in cui sono coinvolte le forze inerziali.

Prescindendo quindi dalle sollecitazioni dinamiche, l'applicazione delle sollecitazioni si considera statica, nel senso classico della Scienza delle Costruzioni. Il tempo, in prima istanza, interviene come elemento che scandisce la variazione dello stato tensionale e scansiona gli eventi e il percorso di carico. Emerge subito che, contrariamente a quanto avviene nei solidi, il tempo necessario a che si verifichi tale variazione è, in generale, lungo per i terreni, a causa dell'interazione fra le fasi. Con riferimento al processo di consolidazione e al meccanismo di deformazione ad esso associato, il tempo regola quindi il moto transitorio di dissipazione delle sovrappressioni neutrali (Cestelli Guidi, 1987).

D'altra parte, come già sottolineato, nei terreni si verificano in modo particolarmente accentuato anche deformazioni conseguenti alla loro viscosità strutturale, perciò il tempo interviene pure in assenza di variazioni dello stato tensionale. Pertanto, nel caso d'interesse, si assume che il tempo, inteso come variabile indipendente, intervenga nell'evoluzione dello stato tensione-deformazione esclusivamente in relazione ai fenomeni viscosi dello scheletro solido del terreno, e in particolare al *creep*, cioè in assenza di variazioni dello stato tensionale. In questi termini, il processo di consolidazione non può essere considerato come un vero e proprio effetto del tempo.

L'obiettivo principale di questa sezione è descrivere gli effetti del *creep* e della velocità di deformazione osservati sperimentalmente nei terreni, ed eliminare la confusione riguardante le definizioni che si trovano in letteratura.

Per mantenere la trattazione entro limiti accettabili, sono state fatte le seguenti ipotesi:

- La descrizione si concentra principalmente a fattori che riguardano la **proprietà macromeccaniche**, come tensione, deformazione e tempo, senza però trascurare i processi a livello microscopico, la cui comprensione fornisce un punto di partenza fondamentale per la previsione della risposta macroscopica.

- Non viene considerata la dipendenza dalla temperatura.

Vengono considerate esclusivamente osservazioni ottenute da **analisi di laboratorio** relative a prove edometriche monodimensionali e triassiali. Le prove in situ non vengono quindi prese in considerazione.

In particolare, per identificare la risposta nel tempo del terreno, si considerano tre principali tipi di prove:

- **prove di *creep*, in cella triassiale;**
- **prove ad incrementi di carico costanti, in cella edometrica;**
- **prove a velocità di deformazione costante, in cella edometrica (prove CRS - *Constant Rate of Strain*).**

1.2.1 PROVE TRIASSIALI DI *CREEP*

Nelle prove triassiali standard, un provino cilindrico di terreno, contenuto fra due basi indeformabili e circondato lateralmente da una membrana impermeabile, viene inizialmente compresso in condizioni di simmetria assiale tramite un fluido in pressione (**fase di consolidazione**). La velocità di consolidazione deve essere tale da minimizzare le deformazioni secondarie in fase di consolidazione, ma non troppo veloce da provocare accumulo di pressione interstiziale.

Al termine della prima fase, segue la **fase di taglio**, in cui il campione è soggetto a compressione assiale mediante l'avanzamento di un pistone. In virtù della differenza tra la pressione assiale e la pressione di confinamento laterale si genera una pressione deviatorica che sollecita il terreno a taglio. Dopo aver fatto avanzare il pistone a velocità costante fino allo stato tensione-deformazione (σ , ε) prefissato (rappresentato dal punto A in Figura 1.3), si mantengono costanti le tensioni per un certo periodo di tempo, come mostrato sul piano $[\sigma-t]$ in Figura 1.3b, sottoponendo così il provino ad un processo di *creep*. Infatti, con l'avanzare del tempo (giorni, mesi o anni), nel materiale si manifestano deformazioni assiali e radiali permanenti e gradualmente crescenti: durante questo processo lo stato di deformazione si muove verso il punto B, come mostrato sul piano $[\varepsilon-t]$ in Figura 1.3c.

La prova di *creep* in cella triassiale può essere quindi rappresentata, sul piano $[\sigma-\epsilon]$ in Figura 1.3a, dal percorso di deformazione $A \rightarrow B$, che si manifesta progressivamente nel tempo sotto tensione costante.

Risulta evidente che si tratta di prove molto lunghe, e quindi molto costose, che richiedono una certezza assoluta delle variabili in gioco.

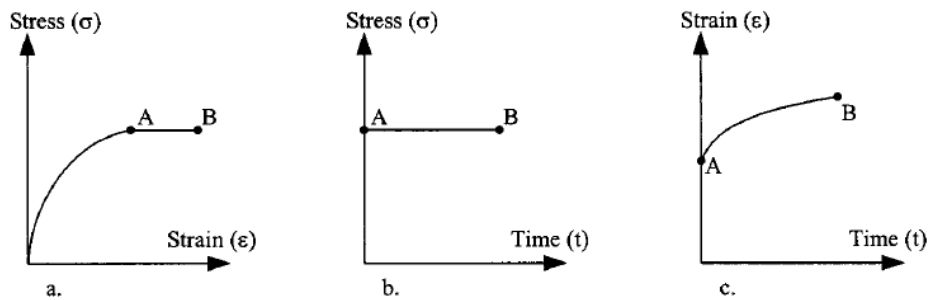


Figura 1.3. Prove di *creep* a bassi livelli tensionali: (a) relazione tensione-deformazione, (b) relazione tensione-tempo e (c) relazione deformazione-tempo (Augustesen *et al.*, 2004).

In relazione ad un processo di *creep* realizzato in un apparecchio triassiale, la pressione interstiziale può aumentare, diminuire o rimanere costante, a seconda della variazione di volume della struttura del terreno e del verificarsi o meno del drenaggio durante il processo di deformazione a taglio. Per tenere conto di questo fattore, in letteratura si distinguono due condizioni di *creep* (Augustesen *et al.*, 2004):

- **CREEP DRENATO:** la fase di taglio viene condotta a drenaggio aperto e a velocità lenta in modo da non generare variazioni di pressione interstiziale nei provini ($\Delta u = 0$). In questo modo tensioni totali ed efficaci coincidono, quindi la tensione media ($p' = p - u$) e la tensione deviatorica ($q = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma'_1 - \sigma'_3$) vengono mantenute costanti, cioè il processo di *creep* corrisponde ad un singolo punto sul piano triassiale: $p', q = \text{cost}$.
- **CREEP NON DRENATO:** la fase di taglio avviene a drenaggi chiusi (a deformazioni volumetriche impedito), quindi si ha un aumento della pressione interstiziale. Di conseguenza la tensione media efficace p' diminuisce, mentre la tensione deviatorica q , essendo indipendente dalla pressione dei pori, rimane costante: $\Delta u \uparrow \Rightarrow p' \downarrow, q = \text{cost}$.

Sulla base della definizione di *creep* (sviluppo di deformazioni viscoso a tensioni efficaci costanti), si può concludere che, diversamente dal *creep* drenato, il *creep* non

drenato non rappresenta un processo di *creep* puro, poiché le deformazioni sono costituite da una componente plastica (dovuta alla variazione della tensione efficace) e una anelastica (di *creep*). Comunque, in letteratura, entrambi i processi sono descritti come *creep*.

D'altra parte, il requisito di tensioni efficaci costanti non è, in generale, soddisfatto durante le prove di *creep*. Infatti, ci sono diverse occasioni in letteratura in cui gli autori si riferiscono a prove di *creep* triassiali senza spiegare chiaramente se sono stati mantenuti costanti il carico o le tensioni efficaci. La differenza tra *creep* a carico costante e *creep* a tensioni efficaci costanti (Augustesen *et al.*, 2004) è illustrato in Figura 1.4, dove t è il tempo di *creep*.

- Il **CREEP A TENSIONI EFFICACI COSTANTI** corrisponde ad un punto del piano triassiale $p' - q$.
- Il **CREEP A CARICO COSTANTE** avviene a tensioni decrescenti nel tempo. La continua diminuzione della tensione di *creep* è dovuta al fatto che l'area del campione aumenta.

In realtà, è evidente che solo il *creep* a tensione costante può essere considerato come *creep* puro, perché lo stato tensionale efficace viene mantenuto costante. Comunque, in generale, in letteratura entrambi i processi vengono descritti come fenomeni di *creep*.

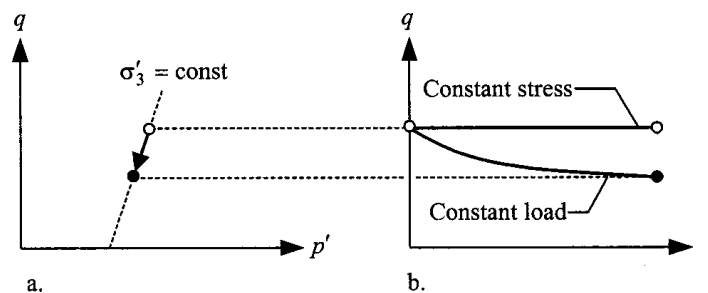


Figura 1.4. Differenza tra *creep* a tensioni efficaci costanti e *creep* a carico costante: (a) relazione tensione deviatorica-p pressione media (piano triassiale) e (b) relazione tensione deviatorica-tempo (Augustesen *et al.*, 2004).

I risultati delle prove di *creep* possono essere rappresentati in un **diagramma deformazione-tempo** [$\varepsilon-t$], come mostrato in Figura 1.5a (Augustesen *et al.*, 2004). In relazione ad esso, il processo di *creep* può essere diviso in tre fasi:

- 1) **CREEP PRIMARIO O TRANSITORIO** (*primary, transient or fading creep*), caratterizzato da una velocità di deformazione $\dot{\epsilon} = d\epsilon/dt$ decrescente nel tempo;
- 2) **CREEP SECONDARIO O STAZIONARIO** (*secondary, stationary or non fading creep*), caratterizzato da una velocità di deformazione $\dot{\epsilon} = d\epsilon/dt$ costante nel tempo;
- 3) **CREEP TERZIARIO O ACCELERATO** (*tertiary or accelerated creep*), caratterizzato da una velocità di deformazione $\dot{\epsilon} = d\epsilon/dt$ crescente nel tempo.

L'entità della velocità di deformazione aumenta all'aumentare della plasticità del terreno, del contenuto d'acqua e del livello tensionale (Clarke, 2009).

L'andamento della velocità di deformazione è chiaramente rappresentato in Figura 1.5b, dove il logaritmo della velocità di deformazione è funzione del logaritmo del tempo [$\text{Log}(\dot{\epsilon}) - \text{Log}(t)$].

Tale classificazione è valida solo per prove di *creep* effettuate mediante apparecchi triassiali.

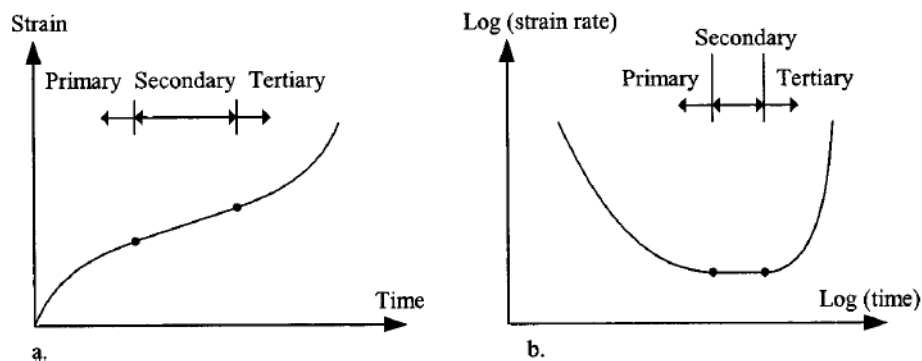


Figura 1.5. Definizione delle fasi di *creep* durante prove triassiali di *creep* a tensioni efficaci costanti: (a) relazione deformazione-tempo e (b) relazione deformazione-tempo in scala logaritmica (Augustesen *et al.*, 2004).

Aumentando il livello di tensione deviatorica $q = \sigma_1 - \sigma_3$ e ripetendo la prova, la curva deformazione-tempo si modifica, riducendo le durate dei vari stadi di *creep* e incrementando la velocità di deformazione di *creep*, come mostrato in Figura 1.6.

A bassi livelli di tensione deviatorica, la fase di *creep* terziario non si verifica e dopo un certo periodo di tempo lo stato tensionale e deformativo del terreno si stabilizzano.

Al contrario, dall'andamento della curva superiore in Figura 1.6 si può notare che, ad elevati livelli di tensione deviatorica, in seguito alla fase di *creep* secondario, il *creep* può divenire di tipo terziario e la velocità di deformazione può aumentare rapidamente nel tempo, portando infine alla **perdita di resistenza** del terreno. In questo caso si parla di **rottura o collasso per creep**.

Alcuni terreni possono quindi collassare per *creep* sotto un livello di tensione deviatorica significativamente inferiore (appena il 50%) rispetto al picco tensionale misurato in una prova triassiale standard, in cui un campione viene caricato a rottura in pochi minuti o ore (Mitchell e Soga, 2005).

La perdita di resistenza per *creep* è particolarmente importante nelle argille tenere in condizioni triassili non drenate e nelle argille fortemente sovraconsolidate in condizioni drenate.

Il problema della rottura per *creep* viene approfondito dal punto di vista analitico nella Sezione 2.2, relativa ai modelli empirici.

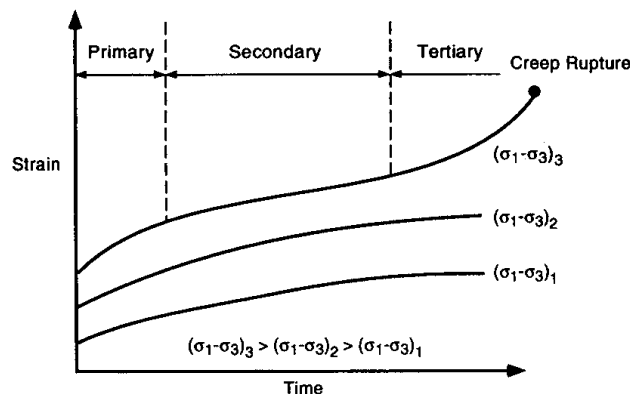


Figura 1.6. Comportamento di *creep* a diversi valori di tensione deviatorica costante (Mitchell e Soga, 2005).

La relazione tra tensioni e deformazioni svolge un ruolo molto importante nella valutazione del comportamento di *creep* dei terreni a grana fine. In particolare, in relazione allo stato tensionale agente nel terreno, è possibile distinguere il comportamento di *creep* in:

- ✓ **CREEP VOLUMETRICO** (*volumetric creep*), costituito solo da deformazioni viscoso volumetriche relative alla fase di **creep primario**, cioè tende a stabilizzarsi; non si verificano le fasi di *creep* secondario e terziario.

Da questo punto di vista, la **consolidazione secondaria** costituisce un caso particolare di *creep* volumetrico, che può essere studiato mediante prove edometriche, cioè in condizioni monodimensionali, ad incrementi di carico costanti e/o a velocità di deformazione costante.

- ✓ **CREEP DEVIATORICO** (*deviatoric or shear creep*), costituito da deformazioni viscoso deviatoriche, associate non a variazioni di volume, ma solo a variazioni di forma (deformazioni distorcenti).

A seconda della mobilitazione della resistenza a taglio, le deformazioni di taglio possono avere velocità decrescente, costante o crescente nel tempo: cioè, se la tensione deviatorica è bassa, si verifica solo la fase di ***creep* primario**, mentre, se essa supera un certo livello, il *creep* primario viene seguito dal ***creep* secondario**, che può portare al ***creep* terziario** e alla rottura per *creep*.

Il *creep* deviatorico, in combinazione al *creep* volumetrico, può essere studiato mediante prove triassiali, in condizioni drenate e non drenate, e per diversi valori della tensione deviatorica.

Infatti, in natura le deformazioni volumetriche di *creep* si verificano contemporaneamente a quelle deviatoriche (Mitchell e Soga, 2005): a causa della combinazione degli effetti tra le deformazioni plastiche volumetriche e quelle deviatoriche nei terreni, un aumento della pressione media o della pressione deviatorica può dare luogo a entrambi i tipi di deformazione.

La principale differenza tra il comportamento di *creep* volumetrico e quello deviatorico è la presenza delle fasi di *creep* secondario e terziario, che dipendono dal valore della tensione deviatorica, dalla natura del terreno e dalle condizioni al contorno. Ciò può essere spiegato sottolineando che mentre il *creep* volumetrico conduce ad una condizione più stabile della struttura del terreno, a cui è generalmente associato anche un aumento della resistenza, il *creep* deviatorico può essere fisicamente interpretato come un aumento o una diminuzione del numero dei legami strutturali, legati alla contemporanea presenza di deformazioni volumetriche e deviatoriche. In altri termini, il *creep* primario si verifica quando prevale l'incrudimento viscoso (***creep hardening***), il *creep* terziario quando prevale l'indebolimento della struttura (***creep softening***); il *creep* secondario si verifica quando i precedenti effetti si compensano (Carrubba e Del

Fabbro, 2006). Pertanto, contrariamente al *creep* volumetrico, sotto determinate condizioni, il *creep* deviatorico può portare il terreno al collasso.

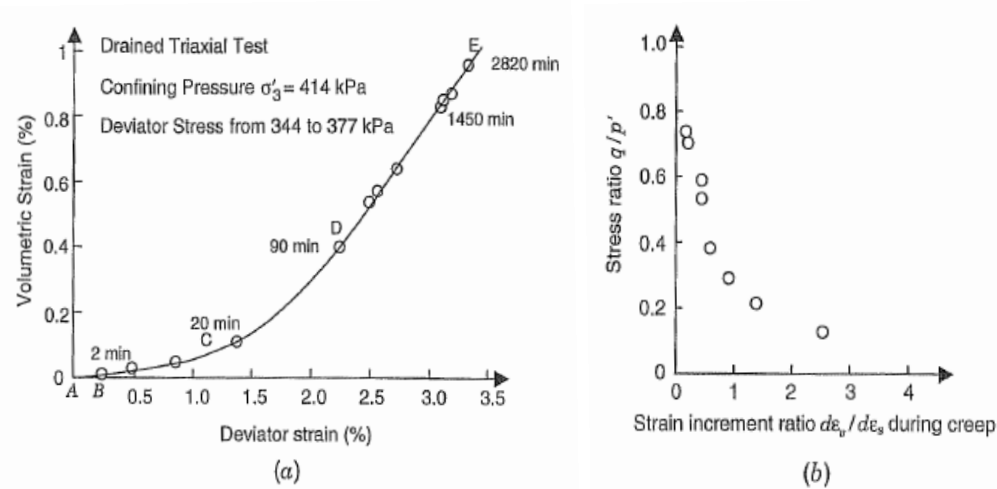


Figura 1.7. Comportamento di una caolinite ottenuto mediante prove triassiali drenate: (a) sviluppo di deformazioni volumetriche e deviatoriche nel tempo, (b) effetti dello stato tensionale sulle deformazioni (Mitchell e Soga, 2005).

Il rapporto tra *creep* volumetrico e *creep* deviatorico segue una legge di dilatanza plastica (*plastic dilatancy rule*) dipendente dal tempo (Mitchell e Soga, 2005). Walker (1969) ha studiato le variazioni nel tempo di queste due componenti mediante prove di *creep* triassiali drenate su caolinite normalmente consolidata. L'andamento delle deformazioni deviatoriche rispetto a quelle volumetriche a differenti istanti di tempo è mostrato in Figura 1.7a. All'inizio della prova triassiale, la tensione deviatorica è stata istantaneamente incrementata da 344 a 377 kPa e mantenuta costante. Dopo un aumento immediato delle deformazioni deviatoriche a volume costante (tratto AB), si ha che il tratto BD corrisponde alla consolidazione primaria, controllata dalla dissipazione della sovrappressione neutrale. Dopo il punto D, si verifica il *creep* e il rapporto tra deformazioni volumetriche e deviatoriche è indipendente dal tempo. Come mostrato in Figura 1.7b questo rapporto $d\varepsilon_v/d\varepsilon_q$ diminuisce all'aumentare del rapporto tensionale q/p' .

1.2.2 PROVE AD INCREMENTI DI CARICO COSTANTI

Per studiare in laboratorio la consolidazione monodimensionale del terreno, vengono impiegate **prove di compressione edometrica**, che consistono nell'applicare una sequenza di carichi a un provino confinato lateralmente, in modo che le deformazioni e il flusso dell'acqua avvengano solo in direzione verticale (*multiple stage loading test*).

L'apparecchio edometrico consiste essenzialmente in un anello rigido, praticamente indeformabile, che contiene il provino, confinato inferiormente e superiormente tra due piastre porose, che consentono alla pressione dell'acqua di dissiparsi liberamente.

La sequenza degli incrementi di carico assiale, nella prova tradizionale, viene effettuata per successiva applicazione di pesi ogni volta al termine della dissipazione delle sovrappressioni (prova a carico controllato).

Ogni incremento di carico quindi è mantenuto costante per un certo intervallo di tempo, di solito pari a 24 ore, durante il quale viene rilevato l'andamento degli assestamenti nel tempo.

In relazione alle **prove edometriche**, rappresentando le deformazioni in funzione del logaritmo del tempo [ε - $\text{Log}(t)$], come in Figura 1.8a, possono essere definite tre fasi di compressione:

- I. La **COMPRESSIONE PRIMARIA** coincide con la **consolidazione primaria**, cioè è la fase in cui avvengono le deformazioni di volume associate alla filtrazione dell'acqua interstiziale in regime transitorio verso gli strati drenanti, con conseguente dissipazione della pressione neutrale in eccesso ($\Delta u > 0$) e incremento dello stato tensionale efficace $\sigma' = \sigma - u$.
- II. La **COMPRESSIONE SECONDARIA** è anche indicata come **consolidazione secondaria**: al termine del processo di consolidazione primaria, cioè quando $\Delta u \rightarrow 0$, si hanno ancora deformazioni volumetriche molto lente imputabili alle proprietà viscosive del terreno. Questa fase corrisponde quindi ad un processo di *creep* puro, cioè le deformazioni si verificano a causa del riaggiustamento dello scheletro solido a tensioni efficaci costanti, $\sigma' = \text{cost}$; non c'è quindi alcuna distinzione tra “consolidazione

secondaria” e “compressione secondaria”. In questa fase la relazione tra la deformazione e il logaritmo del tempo è lineare.

III. La **COMPRESSIONE TERZIARIA**, seguente alla fase di compressione secondaria, corrisponde ad un processo di *creep* puro, ma è caratterizzata da un rapporto non lineare tra la deformazione e il logaritmo del tempo.

È evidente che è preferibile tenere conto dei cedimenti dovuti alla deformazione viscosa dello scheletro solido separatamente della consolidazione primaria.

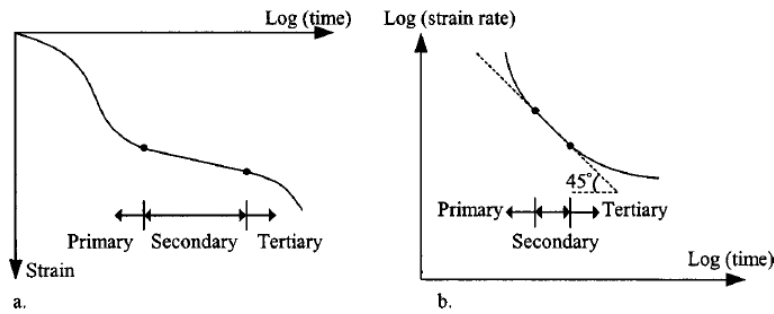


Figura 1.8. Definizione delle fasi di compressione primaria, secondaria e terziaria: (a) relazione deformazione-logaritmo del tempo e (b) relazione velocità di deformazione-tempo in scala logaritmica (Augustesen *et al.*, 2004).

In letteratura, esiste una certa confusione tra le fasi di compressione primaria, secondaria e terziaria definite in relazione alle prove ad incrementi di carico eseguite in un apparecchio edometrico, da un lato, e le fasi di *creep* primario, secondario e terziario, definite in relazione alle prove di *creep* eseguite in un apparecchio triassiale, dall’altro (Augustesen *et al.*, 2004).

Confrontando Figura 1.5a e Figura 1.8a, si può concludere che c’è una chiara differenza tra *creep* primario, secondario e terziario e compressione primaria, secondaria e terziaria.

Esaminando la Figura 1.8, non è possibile ricavare alcuna informazione sulle variazioni della velocità di deformazione nel tempo ($\ddot{\varepsilon} = d^2\varepsilon/dt^2$), perché la deformazione ε e la velocità di deformazione $\dot{\varepsilon}$ sono rappresentate in funzione del logaritmo del tempo. Per individuare l’andamento della velocità di deformazione si considera la seguente espressione:

$$\text{Eq. 1.2} \quad \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \frac{1}{t^2} \left(\frac{d^2\varepsilon}{d(\ln t)^2} - \frac{d\varepsilon}{d(\ln t)} \right)$$

dove t = tempo e ε = deformazione. Dall'Eq. 1.2, si può concludere che:

- la velocità di deformazione aumenta se $\frac{d^2\varepsilon}{d(\ln t)^2} > \frac{d\varepsilon}{d(\ln t)}$;
- la velocità di deformazione rimane costante se $\frac{d^2\varepsilon}{d(\ln t)^2} = \frac{d\varepsilon}{d(\ln t)}$;
- la velocità di deformazione diminuisce se $\frac{d^2\varepsilon}{d(\ln t)^2} < \frac{d\varepsilon}{d(\ln t)}$.

Nella Figura 1.8b, è raffigurato l'andamento del logaritmo della velocità di deformazione rispetto al logaritmo del tempo [$\text{Log}(d\varepsilon/dt) - \text{Log}(t)$] per un singolo incremento di carico in una prova edometrica. Si può notare che la velocità di deformazione diminuisce nel tempo, quindi è evidente che nelle prove edometriche si verifica solo un processo di **creep primario**, mentre non vengono osservati né *creep* secondario né *creep* terziario.

Pertanto, si può concludere che, mentre *creep* primario, secondario e terziario sono rispettivamente associati a una velocità di deformazione $d\varepsilon/dt$ rispettivamente decrescente, costante e crescente nel tempo, le fasi di compressione primaria, secondaria e terziaria sono sempre associate a una velocità di deformazione decrescente nel tempo.

1.2.3 PROVE A VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE COSTANTE

Attualmente le prove edometriche a velocità di deformazione costante (CRS *Constant Rate of Strain*) su terreni argillosi sono ampiamente utilizzate in alternativa alle classiche prove edometriche ad incrementi di carico, in quanto permettono di ridurre il tempo necessario per la consolidazione e di ottenere curve tensione-deformazione continue. Pertanto, negli ultimi 30-40 anni è stata ampiamente studiata l'**influenza della velocità di deformazione** sul comportamento viscoso e, in particolare, sulla curva di compressione delle argille e sulla pressione di preconsolidazione. Si parla di "**strain-rate dependency**" (Augustesen *et al.*, 2004).

Nelle prove CRS viene applicata una velocità di deformazione totale $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$, mantenuta costante durante tutto l'esperimento, e si misura la risposta tensionale del terreno in modo da ottenere una relazione tensione-deformazione [σ - ε].

In Figura 1.9, sono mostrati i risultati tipici di prove CRS svolte a diverse velocità di deformazione $c_3 > c_2 > c_1$ (c_1, c_2, c_3 sono costanti). Si può notare che maggiore è la velocità di deformazione, più è rigida la risposta del terreno.

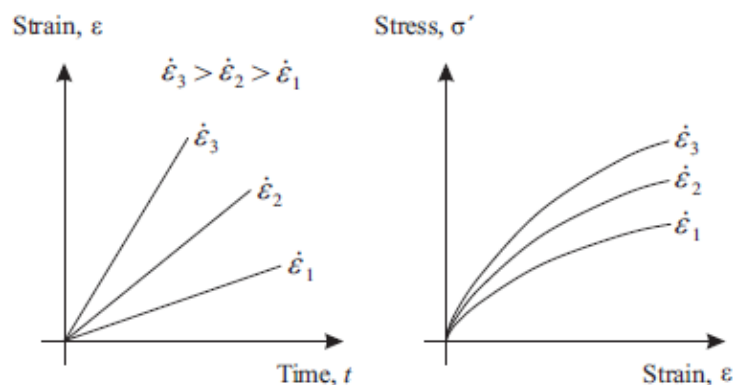


Figura 1.9. Prove a velocità di deformazione costante (CRS): (a) relazione deformazione-tempo e (b) relazione tensioni-deformazioni (Clarke, 2009).

1.3 COMPORTAMENTO DI CREEP MONODIMENSIONALE

Il fenomeno del *creep drenato* delle argille è stato largamente studiato in condizioni monodimensionali, riferendosi alla **consolidazione secondaria**, cioè alle **deformazioni volumetriche di creep** che seguono la consolidazione primaria.

Come già anticipato, la velocità della compressione secondaria è controllata dai processi viscosi della struttura del terreno, mentre la velocità della consolidazione primaria è controllata dalla dissipazione della pressione interstiziale, cioè da quanto velocemente l'acqua può fuoriuscire dal terreno.

La consolidazione secondaria è spesso rappresentata da una relazione lineare tra la deformazione verticale ε_z (o l'indice dei vuoti e) e il logaritmo del tempo t [$\varepsilon_z - \log(t)$ oppure $e - \log(t)$], regolata dal **coefficiente di consolidazione secondaria**, come si vede in Figura 1.10. Nella Sezione 2.2 riguardante la modellazione matematica del

comportamento sperimentale, si parla, tra le relazioni empiriche “primarie”, di LEGGE DI CREEP SEMILOGARITMICA (Augustesen *et al.*, 2004).

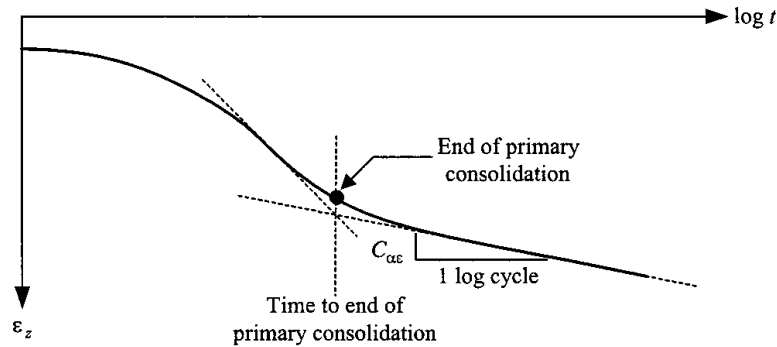


Figura 1.10. Relazione tra indice dei vuoti e logaritmo del tempo in condizioni edometriche (Augustesen *et al.*, 2004).

Questo coefficiente, che dipende dal tipo di terreno ed è tanto più forte quanto più plastica è l'argilla, può essere definito dalla seguente espressione:

$$\text{Eq. 1.3} \quad C_{ae} = \frac{\Delta e}{\Delta \log(t)} \quad [e - \log(t)]$$

$$C_{\alpha\epsilon} = \frac{\epsilon_z}{\Delta \log(t)} = \frac{\Delta e / (1 + e_i)}{\Delta \log(t)} = \frac{C_{ae}}{(1 + e_i)} \quad [\epsilon_z - \log(t)]$$

in cui ϵ_z = deformazione verticale; e = indice dei vuoti; e_i = indice dei vuoti iniziale; C_{ae} = coefficiente di compressione secondaria in termini di e ; $C_{\alpha\epsilon}$ = coefficiente di compressione secondaria in termini di ϵ_z ; t = tempo. In letteratura, secondo un'altra notazione, con il simbolo C_α si possono indicare indifferentemente C_{ae} e $C_{\alpha\epsilon}$.

Il coefficiente di consolidazione secondaria è definito come la deformazione di *creep* in un ciclo di $\log(t)$ al termine della consolidazione primaria.

Se l'Eq. 1.3 viene riscritta rispetto alla ϵ_z , la relazione logaritmica che viene utilizzata per modellare la compressione secondaria diventa:

$$\text{Eq. 1.4} \quad \epsilon_z = C_{\alpha\epsilon} \log\left(1 + \frac{t}{t_i}\right)$$

dove t_i = tempo di riferimento.

Il parametro $C_{\alpha\varepsilon}$ viene utilizzato come parametro di riferimento per descrivere le caratteristiche del *creep* monodimensionale delle argille, poiché costituisce un concetto ben noto ed ampiamente adoperato nella pratica geotecnica.

1.3.1 PROBLEMA DEL TEMPO DI RIFERIMENTO

Una delle maggiori difficoltà quando si utilizza la relazione logaritmica dell'Eq. 1.4 è determinare il tempo di riferimento t_i , cioè **decidere quando inizia la deformazione di creep** (Augustesen *et al.*, 2004).

Questo controverso problema svolge un ruolo importante in relazione alla determinazione dell'entità, e non della velocità o dell'evoluzione, delle deformazioni di *creep* nei terreni argillosi. In letteratura è stata quindi dedicata molta attenzione alla valutazione del tempo di riferimento, essendo fondamentale per la stima dei cedimenti di *creep* in terreni a bassa permeabilità, come l'argilla.

Nel valutare il tempo di riferimento si possono considerare due aspetti:

- 1) Il tempo di riferimento coincide con il tempo di fine della consolidazione primaria (EOP), cioè con il tempo in cui la sovrappressione neutrale si annulla. Ciò implica che il valore di t_i dovrebbe variare con la lunghezza di drenaggio o lo spessore del suolo.
- 2) Il tempo di riferimento è un parametro intrinseco del terreno. Ciò significa che t_i è indipendente dalle condizioni di drenaggio e dallo spessore del suolo.

Tali aspetti esprimono i due principali approcci adottati nella stima della compressione secondaria (Ladd *et al.* 1977):

- L'**IPOTESI A** assume che l'altezza del campione, e quindi il tempo di dissipazione della sovrappressione neutrale, non abbiano alcun effetto sulla posizione della curva di EOP e sul valore della pressione di preconsolidazione σ'_p . Questa ipotesi fornisce un unico valore di deformazione al termine della consolidazione primaria: ciò significa che il terreno non mostra alcun comportamento di *creep* durante la dissipazione della pressione interstiziale che influenzi le deformazioni fino alla fine della consolidazione primaria.

Pertanto, l'assunzione principale di questa ipotesi è che la compressione secondaria si verifichi solo dopo la fine della consolidazione primaria, cioè dopo la completa dissipazione della sovrappressione neutrale.

La curva di compressione ricavata da prove edometriche è unica e può essere direttamente utilizzata per l'analisi dei cedimenti in sito.

Per campioni di altezza diversa le curve di compressione $\varepsilon_z - \log t$ per un certo incremento di carico sono traslate proporzionalmente ad H_d^2 , dove H_d è l'altezza di drenaggio (Figura 1.11).

Questo metodo, comunemente utilizzato nella pratica, è stato suggerito da Mesri e Choi nel 1985, e approfondito da Ladd e Leonards (si veda Augustesen *et al.*, 2004).

- **L'IPOTESI B** presuppone che, poiché i terreni a grana fine sono materiali viscosi, il *creep* si verifichi durante l'intero processo di consolidazione, cioè anche durante la consolidazione primaria; di conseguenza la deformazione al termine della consolidazione primaria non ha un unico valore.

Per effetto della consolidazione secondaria che si sviluppa contemporaneamente alla consolidazione primaria di un deposito, i cedimenti potrebbero risultare più grandi di quelli stimati nelle prove edometriche convenzionali su un campione sottile.

Questa ipotesi è stata suggerita da Suklje e approfondita da Wahls, Barden, Bjerrum, Leroueil, Crawford, Kabbaj e Yin (si veda Augustesen *et al.*, 2004).

Le curve deformazione-tempo previste in relazione alle ipotesi A e B sono illustrate in Figura 1.11.

Secondo Leroueil (si veda Augustesen *et al.*, 2004), i risultati sperimentali non permettono di validare in modo inequivocabile l'una o l'altra ipotesi: infatti i risultati delle prove eseguite da Berre e Iversen nel 1972 su campioni di diverse altezze, che sono spesso utilizzati per validare il metodo B, sono stati utilizzati anche da Leonards nel 1977 per giustificare l'ipotesi A.

Pertanto si può concludere che il reale comportamento del terreno è intermedio, in quanto le due ipotesi corrispondono a casi estremi.

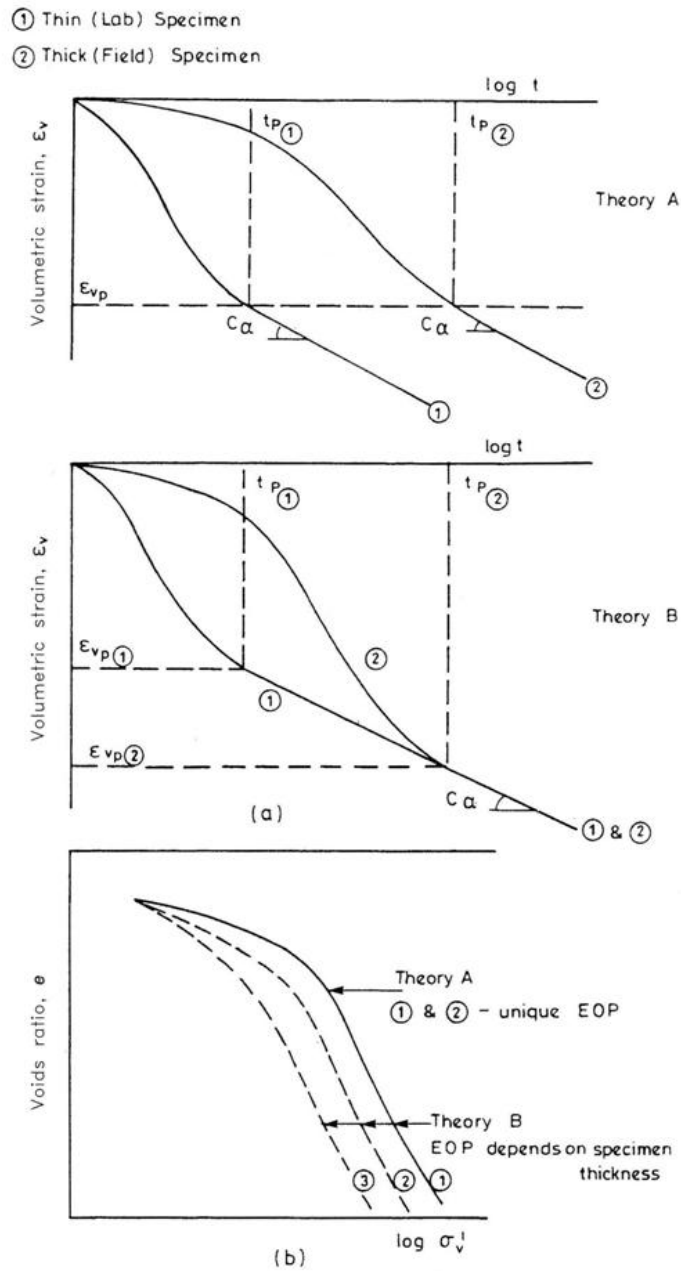


Figura 1.11. Diverse curve deformazione-tempo per le Ipotesi A e B (Clarke, 2009).

Nei diversi approcci degli scrittori riportati in precedenza, per interpolare i dati delle prove edometriche della deformazione verticale (o dell'indice dei vuoti) in funzione del tempo, dopo la compressione primaria se viene adottata l'ipotesi A oppure dopo la compressione istantanea nell'ipotesi B, si usa sempre una funzione logaritmica (Liingaard *et al.*, 2004).

Inoltre, si può notare che non vi è alcuna distinzione tra i metodi A e B nel caso di terreni permeabili, come le sabbie.

1.3.2 DIPENDENZA DI $C_{\alpha\varepsilon}$ DALLO STATO TENSIONALE

Numerose indagini presentate in letteratura si concentrano sugli effetti che le variazioni della tensione verticale efficace hanno su $C_{\alpha\varepsilon}$ (si veda Augustesen *et al.*, 2004).

- Nel 1968 Walker e Raymond hanno ottenuto, da prove di laboratorio su argille sensibili (*Leda Clay*), che la velocità di compressione secondaria sembra essere correlata linearmente al rapporto di compressione $C_{c\varepsilon} = CR = \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta \log(\sigma'_z)}$ per l'intero *range* di tensioni applicate, con un rapporto medio $C_{\alpha\varepsilon}/C_{c\varepsilon} \cong 0,025$.
- Secondo gli studi di Mesri del 1973, i terreni che sono altamente comprimibili nella compressione primaria dovrebbero mostrare un'elevata compressibilità anche nella fase secondaria. Ciò ha portato a studi approfonditi del rapporto tra $C_{\alpha\varepsilon}$ e $C_{c\varepsilon}$.

Nel 1977 Mesri e Godlewski hanno poi valutato il rapporto $C_{\alpha\varepsilon}/CR$ per 22 depositi naturali di terreno, trovando un intervallo di valori abbastanza ampio: $C_{\alpha\varepsilon}/C_{c\varepsilon} = 0,025 \div 0,10$, dove i valori più elevati corrispondono a terreni altamente organici. Infatti, in generale, i valori di $C_{\alpha\varepsilon}/CR$ erano alti nel caso di torbe, un po' meno alti per argille organiche, medi per argille e limi organici, e piccoli per alcuni tipi di argille e limi.

Nel 1987 Mesri e Castro hanno trovato che $C_{\alpha\varepsilon}/C_{c\varepsilon} = 0,04 \div 0,01$ per la maggioranza delle argille tenere inorganiche, e $C_{\alpha\varepsilon}/C_{c\varepsilon} = 0,05 \div 0,01$ per argille plastiche altamente organiche.

Sulla base di queste osservazioni si è concluso che $C_{\alpha\varepsilon}$ dipende dalla tensione verticale efficace applicata σ'_z e dalla sua relazione con la pressione di preconsolidazione $\sigma'_{z,pc}$: sia $C_{\alpha\varepsilon}$ che CR aumentano appena la tensione efficace σ'_z si avvicina alla pressione di preconsolidazione $\sigma'_{z,pc}$, raggiungendo un massimo in corrispondenza o appena al di là di $\sigma'_{z,pc}$, poi diminuiscono e infine rimangono

praticamente costanti. Nel corso di queste variazioni, anche il rapporto $C_{\alpha\varepsilon}/C_{c\varepsilon}$ rimane ragionevolmente costante.

Tuttavia, diversi autori hanno messo in discussione l'unicità del rapporto $C_{\alpha\varepsilon}/C_{c\varepsilon}$, per il quale si considera che $C_{\alpha\varepsilon}$ e $C_{c\varepsilon}$ siano indipendenti dal tempo. In realtà, non solo $C_{\alpha\varepsilon}$, ma anche $C_{c\varepsilon}$, cambiano nel tempo. Inoltre, la variazione di $C_{\alpha\varepsilon}$ nel tempo può riflettere quella di $C_{c\varepsilon}$, quindi il rapporto tra $C_{\alpha\varepsilon}$ e $C_{c\varepsilon}$ vale per qualsiasi istante, tensione efficace e deformazione. Nel 1992 Fedà ha comunque suggerito di utilizzare questo tipo di generalizzazione con la massima attenzione (si veda Augustesen *et al.*, 2004).

1.3.3 COMPORTAMENTO DEFORMAZIONE-TEMPO

La relazione deformazione-tempo durante il *creep* dei terreni argillosi in condizioni monodimensionali viene normalmente rappresentata dalla curva sul piano $[\varepsilon_z - \log(t)]$, in Figura 1.10, in cui la compressione secondaria (di *creep* primario) segue una relazione lineare. Questa osservazione può essere valida per diversi cicli di $\log(t)$, ma non in generale (Augustesen *et al.*, 2004).

In particolare, da prove edometriche a lungo termine (durata di 140 giorni), Leroueil ha osservato un generale comportamento non lineare, rappresentato sul piano $[\varepsilon_z - \log(t)]$ in Figura 1.12:

- per i campioni di argilla sovraconsolidata OC ($\sigma'_z < \sigma'_{z,pc}$), di tipo I, la pendenza della curva aumenta in modo continuo con il logaritmo del tempo dopo la fine della consolidazione primaria (*end of primary consolidation* EOP);
- per i campioni di argilla normalconsolidata NC ($\sigma'_z > \sigma'_{z,pc}$), di tipo III, la pendenza della curva diminuisce in modo continuo con il logaritmo del tempo dopo la fine della consolidazione primaria;
- per i campioni in cui la tensione è vicina alla pressione di preconsolidazione ($\sigma'_z \cong \sigma'_{z,pc}$), di tipo II, inizialmente il comportamento è analogo a quello di un

terreno sovraconsolidato OC, ma dopo un certo tempo la velocità di deformazione rimane momentaneamente costante. Infine, il campione reagisce come un terreno normalconsolidato NC. Ciò indica una sorta di “ritardo del *creep*” quando il campione passa dallo stato sovraconsolidato a quello normalconsolidato.

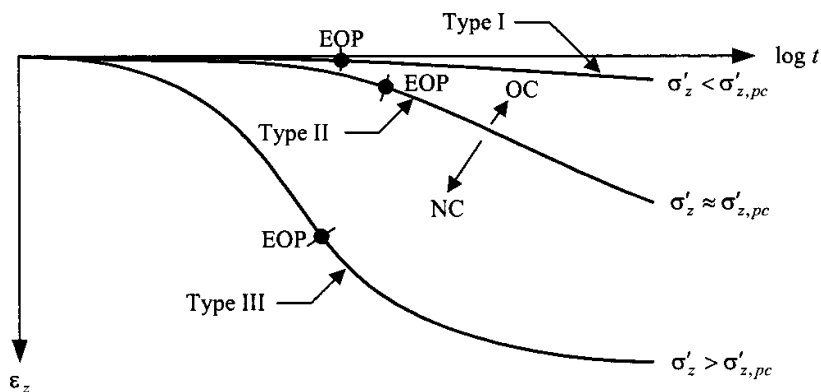


Figura 1.12. Curve di tipo I, II e III nel diagramma deformazione-logaritmo del tempo - Leroueil, 1985 (Augustesen *et al.*, 2004).

Si può quindi affermare che la relazione logaritmica non è valida in generale.

Inoltre, nel caso delle argille, è importante ricordare che la sovrappressione neutrale durante la consolidazione può nascondere i reali effetti viscosi nel terreno. Per visualizzare meglio questo comportamento tipico del terreno di tipo II, si considera la **relazione caratteristica tra la velocità di deformazione e il tempo**. Pertanto, i risultati delle prove di *creep* vengono riportati in un diagramma $[\log(\dot{\varepsilon}_z) - \log(t)]$, come mostrato in Figura 1.13, in cui la pendenza della curva è caratterizzata dal **parametro *m* di Singh e Mitchell (1968)**, definito come:

$$\text{Eq. 1.5} \quad m = - \frac{\Delta \log(\dot{\varepsilon})}{\Delta \log(t)}$$

Nelle prove monodimensionali, $\dot{\varepsilon}$ coincide con la velocità di deformazione verticale $\dot{\varepsilon}_z$. Nelle prove triassiali, come si vedrà, $\dot{\varepsilon}$ coincide con la velocità di deformazione assiale $\dot{\varepsilon}_1$.

In Figura 1.13a, vengono rappresentati i valori caratteristici di *m*:

- $m = 0,5$ corrisponde alla soluzione di Terzaghi per la consolidazione primaria;

- $m > 1$ corrisponde al comportamento di *creep* di un terreno normalconsolidato NC;
- $m < 1$ corrisponde al comportamento di *creep* di un terreno sovraconsolidato OC.

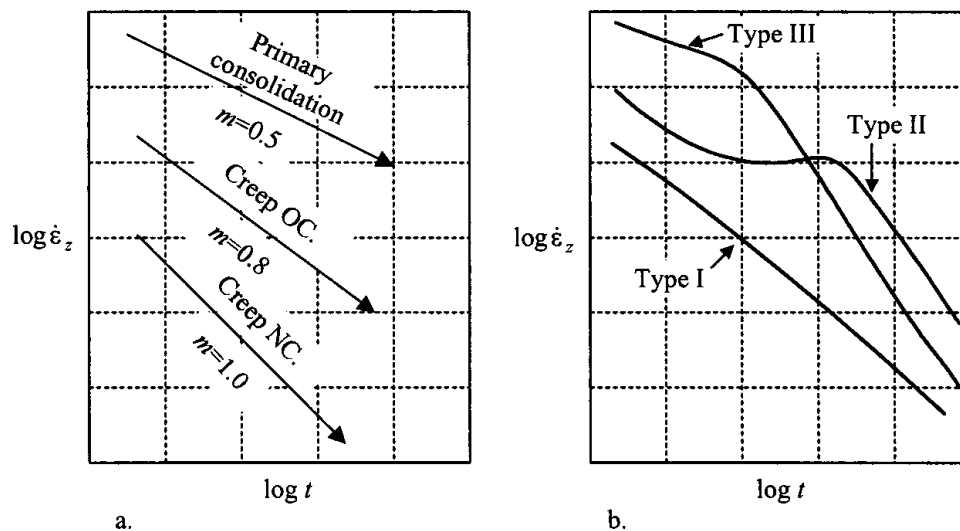


Figura 1.13. (a) Illustrazione dei valori caratteristici di m e (b) curve di tipo I, II e III nel diagramma velocità di deformazione-tempo in scala logaritmica (Augustesen *et al.*, 2004).

Nel diagramma $[\log(\dot{\epsilon}_z) - \log(t)]$ di Figura 1.13b, sono riportate le curve relative ai terreni di tipo I, II, III:

- Per un terreno di tipo I, che è sovraconsolidato durante tutta la prova, la pendenza della curva è praticamente costante con $m < 1$.
- La curva di tipo III, che corrisponde a un terreno normalconsolidato, è caratterizzata da una pendenza iniziale $m = 0,5$, mentre nella seconda parte $m > 1$.
- Per un terreno di tipo II, inizialmente il valore di m corrisponde a quello di un terreno sovraconsolidato (di tipo I), cioè $m < 1$, poi la velocità di deformazione smette di diminuire per un certo periodo. Infine, il comportamento è analogo a quello di un terreno normalconsolidato, cioè $m > 1$. Nel diagramma $[\log(\dot{\epsilon}_z) - \log(t)]$ di Figura 1.13b, risulta evidente che la forma a S della curva corrisponde al “ritardo di *creep*”, cioè alla transizione da uno stato di *creep* sovraconsolidato a uno normalconsolidato.

Finora la trattazione si è concentrata solo sull'evoluzione delle deformazioni del terreno durante la compressione secondaria. Tuttavia, come indicato nella Sezione 1.2.2, durante una prova edometrica, dopo la compressione secondaria si verifica una terza fase, detta compressione terziaria.

Questo fenomeno è stato osservato da Fodil *et al.* (1997) per argille naturali tenere mediante prove edometriche di *creep*. Sul piano $[e - \log(t)]$ la relazione deformazione-tempo relativamente al *creep* di campioni normalconsolidati è dapprima lineare, poi, dopo alcuni cicli di $\log(t)$, si ha una chiara propensione alla compressione terziaria. Osservazioni simili sono state riportate da den Haan e Edil (1994) in relazione a prove edometriche su torbe di Portage (Wisconsin).

Si può concludere che la fase di compressione terziaria, attualmente riconosciuta in particolare per le torbe, non è ben documentata in letteratura.

1.3.4 PRECONSOLIDAZIONE DOVUTA AD AGING

Consideriamo un provino indisturbato di un terreno coesivo soggetto ad una prova edometrica (ad espansione laterale impedita). Se, in seguito alla completa dissipazione della sovrappressione neutrale, il terreno viene mantenuto a una tensione verticale efficace costante σ'_{v0} per un lungo periodo di tempo, esso continua a deformarsi per *creep* in condizioni drenate a causa delle sue proprietà viscoso (**consolidazione secondaria o differita**). Come si può vedere in Figura 1.14, l'indice dei vuoti diminuisce dal punto B a B', cioè si verifica un cedimento secondario che comporta il raggiungimento di una configurazione strutturale dei grani più rigida e più stabile di quella originaria.

Questo fenomeno di **invecchiamento** o "**aging**" riflette gli effetti del tempo sulla compressibilità del terreno e, in particolare, il riaggiustamento strutturale nel tempo, che produce un **aumento della rigidità**, e quindi una maggiore resistenza e minore compressibilità (Augustesen *et al.*, 2004).

Se successivamente si applica un incremento della tensione di compressione (B'C), il terreno non segue il precedente tratto di compressione ma si comporta come un

materiale sovraconsolidato, fino a che non viene superata una soglia critica p'_c , detta **pressione critica o pressione di quasi-sovracosolidazione**. In seguito il terreno segue la curva di compressione vergine.

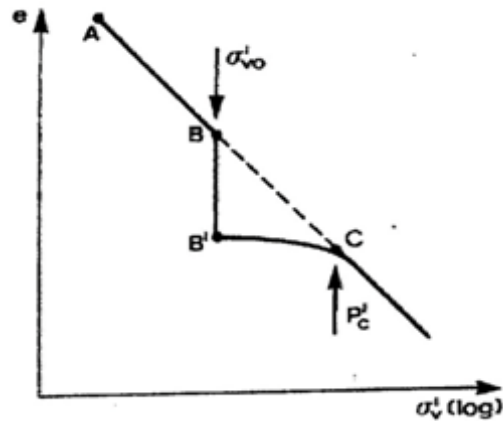


Figura 1.14. Sviluppo della pressione critica o di quasi-sovracosolidazione per *aging* (Colombo e Colleselli, 2004).

Secondo Bjerrum (1968), le caratteristiche di compressibilità dei terreni a grana fine soggetti a consolidazione secondaria non possono essere descritte da una sola retta $e - \log \sigma'_z$, ma è necessario un sistema di curve, come mostrato in Figura 1.15.

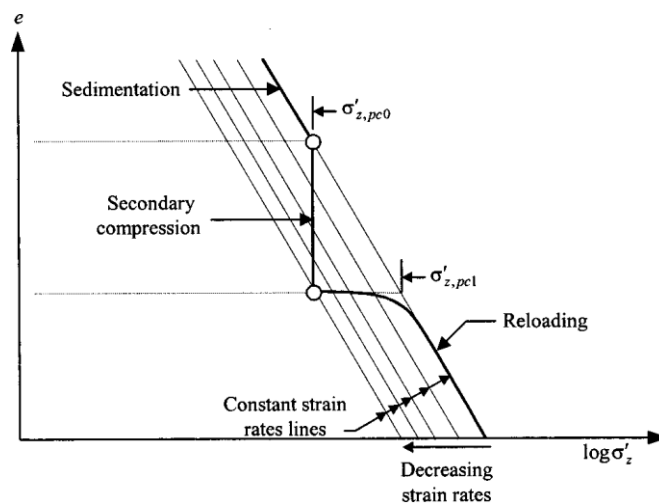


Figura 1.15. Sviluppo della pressione di quasi-sovracosolidazione secondo Bjerrum (Augustesen *et al.*, 2004).

Queste curve rappresentano la relazione tra indice dei vuoti e tensione verticale efficace dopo un certo tempo di carico. Le linee a tempo costante sono praticamente parallele tra loro e coincidenti con le curve a velocità di deformazione costante.

Pertanto, si può comprendere l'andamento della velocità di deformazione durante tale processo. Nel tratto BB', a tensione efficace costante, la velocità di deformazione diminuisce progressivamente. Quando il terreno viene ricaricato, si ha un aumento della velocità di deformazione e la curva di compressione si sposta verso la curva a velocità di deformazione costante corrispondente alla nuova velocità di deformazione. La curva di compressione mostra quindi un **aumento della pressione di preconsolidazione** da $\sigma_{z,pcl0}$ a $\sigma_{z,pcl1}$. Inoltre, la resistenza a taglio del terreno aumenta proporzionalmente alla pressione di preconsolidazione.

Il modello di Bjerrum è descritto in dettaglio nella Sezione 2.2.3.

Tuttavia, le prove edometriche effettuate da Leonards e Altshaeffl nel 1964 hanno mostrato un comportamento diverso in fase di ricarica, dopo 90 giorni di compressione secondaria a tensione verticale efficace costante: cioè l'argilla ha raggiunto una pressione di snervamento molto superiore a quella dovuta alla sola diminuzione dell'indice dei vuoti (Lancellotta, 2008).

È evidente che l'aumento della pressione di quasi-preconsolidazione non può essere spiegata in termini di indice dei vuoti. Tale comportamento è associato allo sviluppo di legami tra le particelle e gli aggregati, che alterano la configurazione strutturale del terreno, e si parla di "**strutturazione**".

Questo fenomeno è stato studiato nel 1996 da Leroueil (si veda Mitchell e Soga, 2005) mediante prove edometriche su argille artificialmente sedimentate del Quebec (*Jonquiere clay*). Il terreno è stato consolidato per 120 giorni ad un livello di tensione verticale efficace costante di 10 kPa (tratto C-D di *creep*). Secondo il concetto di Bjerrum, mostrato in Figura 1.15, la pressione di preconsolidazione doveva aumentare da 10 kPa a 11,5 kPa. Tuttavia, a causa degli effetti della strutturazione, la pressione di preconsolidazione è aumentata fino a 18,5 kPa durante la fase di ricarica, come mostrato dalla curva di compressione $[\sigma'_z - e]$ in Figura 1.16.

Inoltre, in Figura 1.16b è riportato l'andamento del modulo di taglio (mediante *bender element test*) in funzione dell'indice dei vuoti $[G_0 - e]$; in particolare, si può notare l'aumento di rigidità che avviene durante la fase di *creep* C-D.

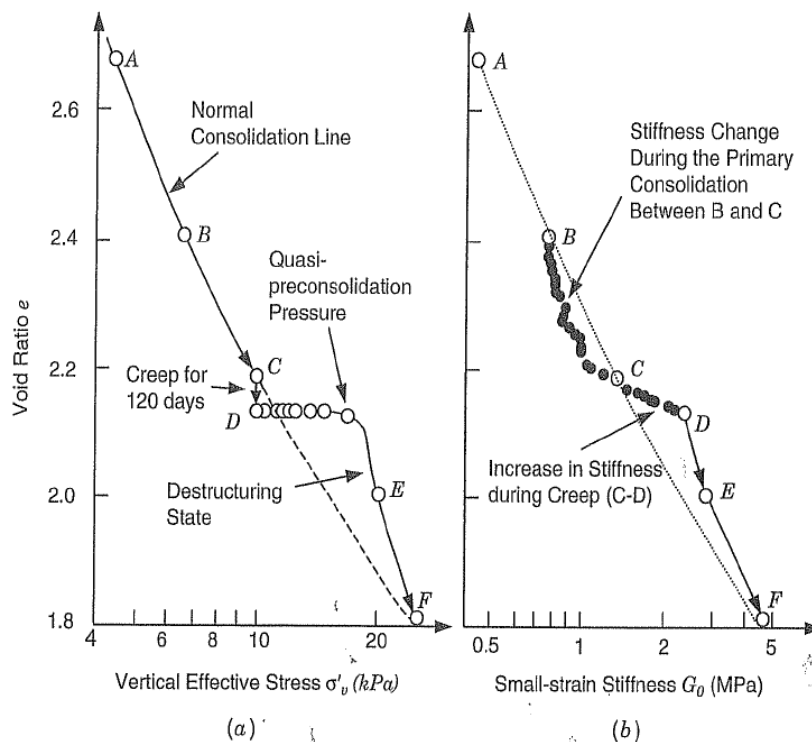


Figura 1.16. Prove edometriche su *Jonquiere clay*: (a) Curva di compressione con strutturazione e (b) variazione del modulo di taglio con l'indice dei vuoti – Leroueil, 1996 (Mitchell e Soga, 2005).

Ulteriori indagini sugli effetti della strutturazione sono state eseguite da Leroueil (si veda Augustesen *et al.*, 2004), confrontando i risultati dei seguenti tre tipi di prova (Figura 1.17):

- 1) prove edometriche convenzionali (il carico applicato viene incrementato ogni 24 ore);
- 2) prove edometriche CRS a velocità di deformazione costante pari a $1,27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ (prova CRS “veloce”);
- 3) prove edometriche CRS a velocità di deformazione costante pari a $1,00 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ (prova CRS “lenta”).

Dalle prove è stata ricavata la relazione tra tensioni efficaci, deformazioni e velocità di deformazione ($\sigma'_z - \varepsilon_z - \dot{\varepsilon}_z$).

La curva di compressione costruita a partire dai risultati della prova edometrica standard corrisponde ad una velocità di deformazione di circa $1,00 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$, cioè due ordini di grandezza più lenta della prova CRS veloce, eseguita a $1,27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$: tale curva dovrebbe quindi coincidere con la curva di compressione relativa alla prova CRS lenta. In realtà, le due curve sono diverse e, in aggiunta, la curva di compressione ottenuta

dalla prova CRS lenta è situata al di sopra di quella relativa alla prova CRS veloce, mentre quella della prova edometrica si trova al di sotto, come mostrato in Figura 1.17. Questo comportamento può essere dovuto proprio allo sviluppo della strutturazione nel tempo.

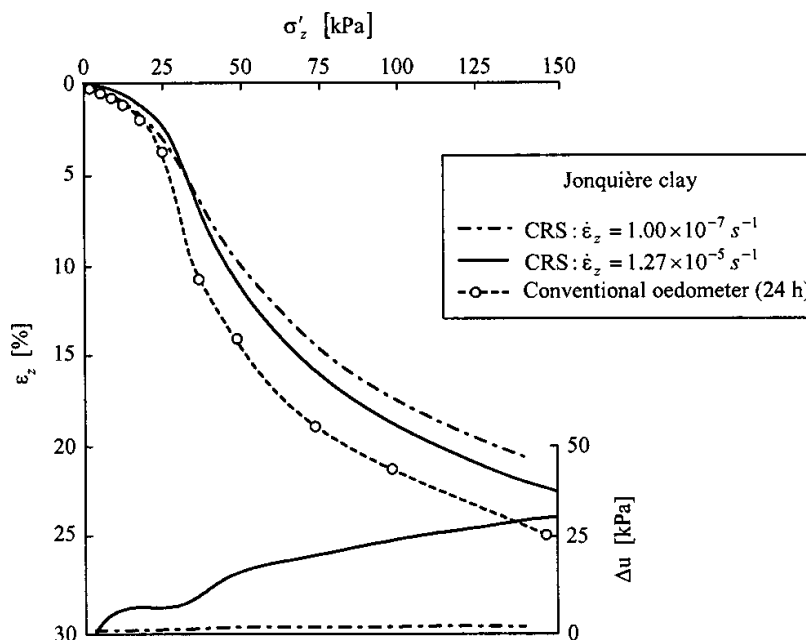


Figura 1.17. Risultati di prove a velocità di deformazione costante e prove edometriche standard su *Jonquiere clay* – Leroueil, 1996 (Augustesen *et al.*, 2004).

Si osserva che i risultati della prova edometrica standard sono conformi a quelli della prova CRS veloce, perché non si verifica la strutturazione. Infatti, nella prova CRS veloce, la velocità di deformazione è talmente alta che la strutturazione non ha tempo per svilupparsi; nella prova edometrica convenzionale, la struttura che potrebbe essersi sviluppata durante la fase di carico viene distrutta quando viene applicato il nuovo carico. La differenza tra le due curve di compressione può quindi essere spiegato dalla sola dipendenza dalla velocità di deformazione.

D'altra parte, la prova CRS lenta permette lo sviluppo della strutturazione con conseguente irrigidimento del terreno nel corso del tempo; per questo motivo, infatti, la curva di compressione per la prova CRS lenta è più rigida della curva per la prova CRS veloce.

Si può quindi concludere che il fenomeno della strutturazione può essere collegato sia al tempo (alla durata della compressione secondaria) che alla velocità di

deformazione. In particolare, la strutturazione si sviluppa a basse velocità, cioè per valori inferiori a circa 10^{-7} s^{-1} (Augustesen *et al.*, 2004).

1.3.5 INFLUENZA DELLA VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE

Come anticipato in precedenza, nelle prove CRS viene applicata una velocità di deformazione totale $\dot{\epsilon} = d\epsilon/dt$, mantenuta costante durante tutto l'esperimento, e si misura la risposta tensionale del terreno in modo da ottenere una relazione **tensione-deformazione** $[\sigma-\epsilon]$.

In Figura 1.18 è illustrato un esempio tipico di diagramma $[\sigma'_z - \epsilon_z]$, che mostra l'influenza della velocità di deformazione sul comportamento viscoso delle argille naturali e, in particolare, sulla posizione delle curve di compressione e della pressione di preconsolidazione (Augustesen *et al.*, 2004).

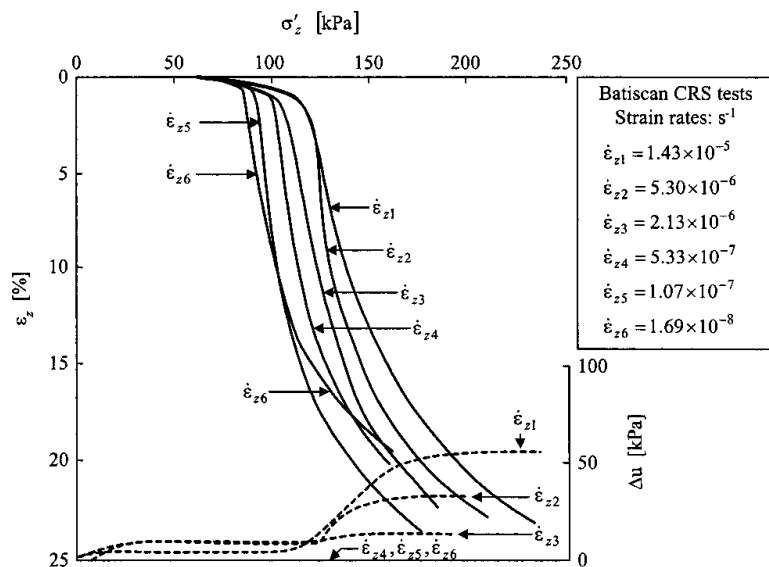


Figura 1.18. Risultati di prove a velocità di deformazione costante su Batiscan clay – Leroueil, 1985 (Augustesen *et al.*, 2004).

Si può notare che le curve di compressione traslano verso destra per velocità di deformazione crescenti, quindi maggiore è la velocità di deformazione, più alta è la tensione efficace corrispondente a una certa deformazione.

Tuttavia, la curva di compressione relativa alla velocità più bassa $\dot{\varepsilon}_{z6}$ si discosta dalle altre curve. Questa discordanza può essere dovuta agli effetti della **strutturazione**, di cui si è discusso nei paragrafi precedenti.

Dopo aver analizzato i risultati di una serie di prove CRS su diverse argille naturali (*Batiscan clay*), Leroueil ha stabilito che il comportamento è controllato da un'unica relazione tra la tensione verticale efficace, la deformazione e la velocità di deformazione ($\sigma'_z - \varepsilon_z - \dot{\varepsilon}_z$), che può essere descritta da due curve, una che fornisce la relazione tra la tensione efficace normalizzata e la deformazione [$\sigma'_z / \sigma'_{z,pc}(\dot{\varepsilon}_z) - \varepsilon_z$] e una che descrive la variazione della pressione di preconsolidazione con la velocità di deformazione [$\sigma'_{z,pc} - \dot{\varepsilon}_z$], mostrate rispettivamente in Figura 1.19a e in Figura 1.19b. Si parla di “*isotach behavior*” (per approfondimenti si veda Augustesen *et al.*, 2004).

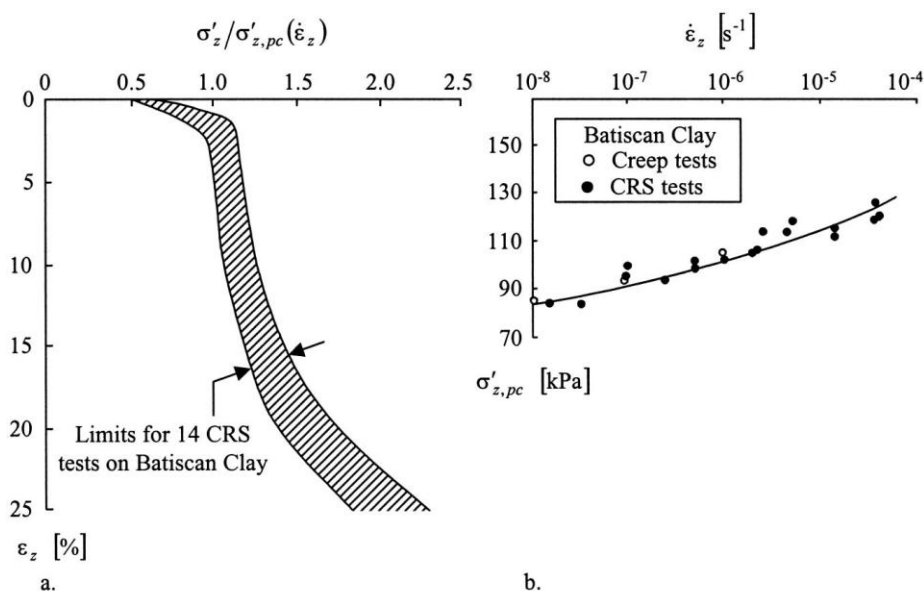


Figura 1.19. Prove a velocità di deformazione costante su *Batiscan clay*: (a) relazione tensioni efficaci-deformazioni e (b) variazione della pressione di preconsolidazione con la velocità di deformazione – Leroueil, 1985 (Augustesen *et al.*, 2004).

In Figura 1.19a si osserva che le curve normalizzate tensione-deformazione coincidono per diverse velocità di deformazione. In Figura 1.19b è evidente la variazione della pressione di preconsolidazione con la velocità di deformazione. I dati sperimentali ottenuti da Leroueil per diversi altri tipi di argille naturali presentati sono concordi con le curve di Figura 1.19.

È necessario sottolineare che la maggior parte delle indagini sulla dipendenza dalla velocità si basa su dati sperimentali ottenuti nel *range* normalconsolidato, mentre il comportamento nel campo sovraconsolidato non è così chiaro. Questo comportamento non si osserva invece per le sabbie.

1.4 COMPORTAMENTO DI CREEP TRIASSIALE

Nel caso monodimensionale la descrizione del comportamento di *creep* si è concentrata sull'influenza della tensione verticale σ'_z e sull'evoluzione della deformazione ε_z nel tempo.

In condizioni triassiali, invece, si considera la dipendenza dal livello tensionale, e in particolare la vicinanza al collasso.

1.4.1 ARGILLE NORMALCONSOLIDATE

Per visualizzare il comportamento di *creep* osservato in condizioni triassiali, i risultati delle prove di *creep* vengono rappresentati sul piano $[\log \dot{\varepsilon} - \log t]$, dove la pendenza della curva di *creep* corrisponde al **parametro m di Singh e Mitchell** (1968) definito dall'Eq. 1.5.

In condizioni triassiali, $\dot{\varepsilon}$ coincide con la velocità di deformazione assiale $\dot{\varepsilon}_1$. La variazione di m influisce sulle curve $[\log \dot{\varepsilon} - \log t]$ e $[\varepsilon_1 - \log t]$, come illustrato in Figura 1.20.

In uno dei primi studi di *creep* in condizioni triassiali drenate e non drenate su varie argille normalmente consolidate, Singh e Mitchell (1968) hanno constatato che il parametro m **varia tra 0,75 e un valore leggermente superiore a 1,0**, con la maggior parte dei valori inferiori a 1,0.

Inoltre, il valore di m è indipendente dal livello di tensione deviatorica per un determinato terreno, cioè le curve di *creep* hanno la stessa pendenza nel piano [$\log \dot{\epsilon}_1 - \log t$] al variare del livello tensionale.

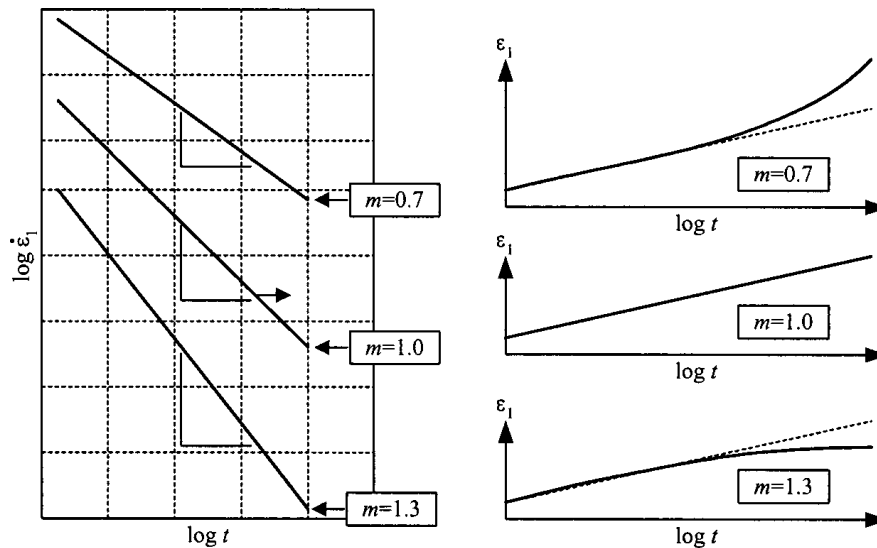


Figura 1.20. Caratteristiche di *creep* per tre diversi valori di m (Augustesen *et al.*, 2004).

Ad esempio, in Figura 1.21 sono riportate le curve di *creep* [$\log(\dot{\epsilon}_1) - \log(t)$] ricavate nel 1958 da Murayama e Shibata per *Osaka alluvial clay*, mediante prove triassiali condotte in condizioni drenate a diversi livelli di tensione deviatorica.

Si può notare che il logaritmo della velocità di deformazione diminuisce linearmente all'aumentare del logaritmo del tempo, e la pendenza della curva è indipendente dalla tensione deviatorica. L'aumento del livello tensionale ha solo l'effetto di traslare la retta verso l'alto, cioè di aumentare la velocità di deformazione di *creep*.

Inoltre, sotto tensioni deviatoriche elevate, si ha l'insorgenza del *creep* terziario e della **rottura per *creep***, segnalati da un'inversione della pendenza della curva superiore in Figura 1.21.

Analogamente nel 1965 Campanella ha ottenuto le curve [$\log(\dot{\epsilon}_1) - \log(t)$] mediante prove triassiali non drenate su *Remolded Illite* (Figura 1.22).

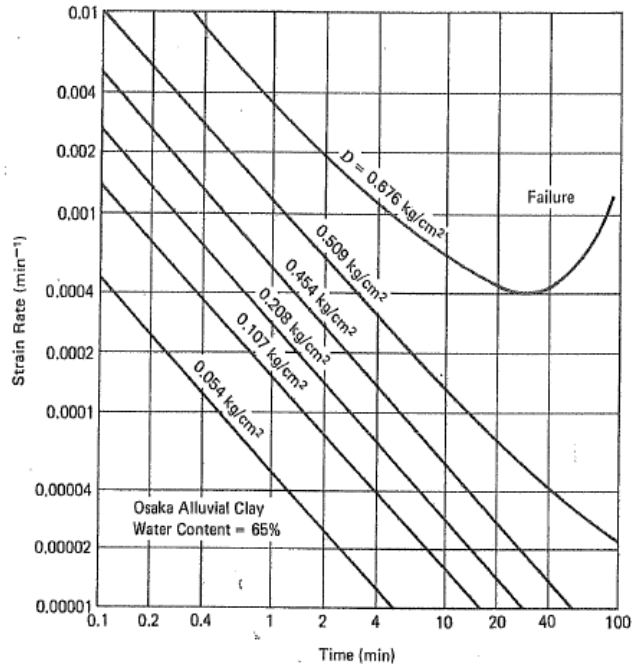


Figura 1.21. Prove di *creep* non drenate su *Osaka alluvial clay*: relazione tra velocità di deformazione e tempo – Murayama e Shibata, 1958 (Singh e Mitchell, 1968).

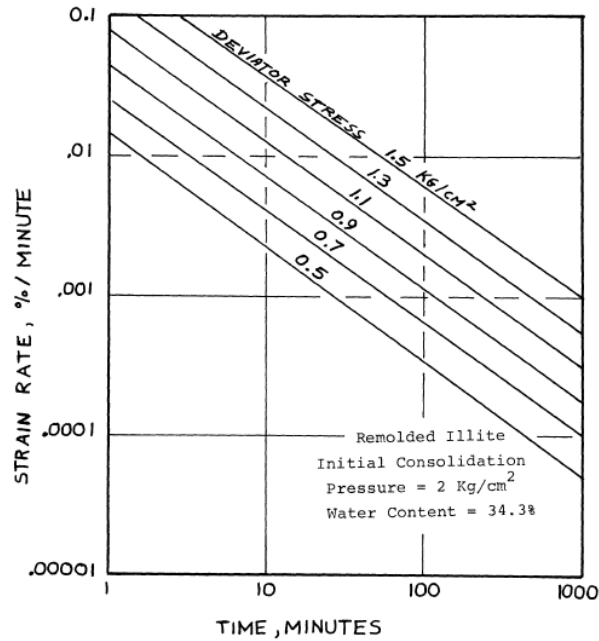


Figura 1.22 Prove di *creep* non drenate su *Remolded Illite*: relazione tra velocità di deformazione e tempo – Campanella, 1965 (Singh e Mitchell, 1968).

Tuttavia, diversi autori dimostrano che m non è sempre indipendente dal livello di tensione deviatorica come ipotizzato da Singh e Mitchell (1968).

Ad esempio, in Figura 1.23, è riportata la relazione tra la velocità di deformazione assiale e il tempo $[\log(\dot{\epsilon}_1) - \log(t)]$ ricavata da Bishop e Lowenbury nel 1969 su argille normalmente consolidate *Pancone clay* mediante prove triassiali in condizioni drenate e prove edometriche (si veda Augustesen *et al.*, 2004). Si consideri la parte del grafico compresa tra 1 e 20 giorni. Come si è visto, $m \approx 1$ per le prove edometriche, quindi la relazione tra deformazione e tempo è circa logaritmica. Nelle prove triassiali, invece, **m aumenta con il livello di tensione deviatorica $S = q/q_{failure}$** (espresso come percentuale della tensione deviatorica a rottura), da $m = 0,8$ per $S = 50\%$ a $m > 1,2$ per $S = 85\%$; in altri termini, la velocità di deformazione aumenta con il livello tensionale. Il grafico in Figura 1.23 dimostra quindi che m non è sempre costante nel tempo nè indipendente dal livello di tensione deviatorica come affermato in precedenza.

Nella parte di Figura 1.23 compresa tra 20 e 100 giorni, la brusca variazione della velocità di deformazione può essere intesa come un'instabilità limitata che riflette un cambiamento strutturale del terreno. Come indicato nella Sezione 1.2.2, secondo Kabbaj *et al.* (1986), la forma ad S della curva corrisponde ad un ritardo del *creep*, che si verifica nel passaggio dallo stato sovraconsolidato a quello normalconsolidato.

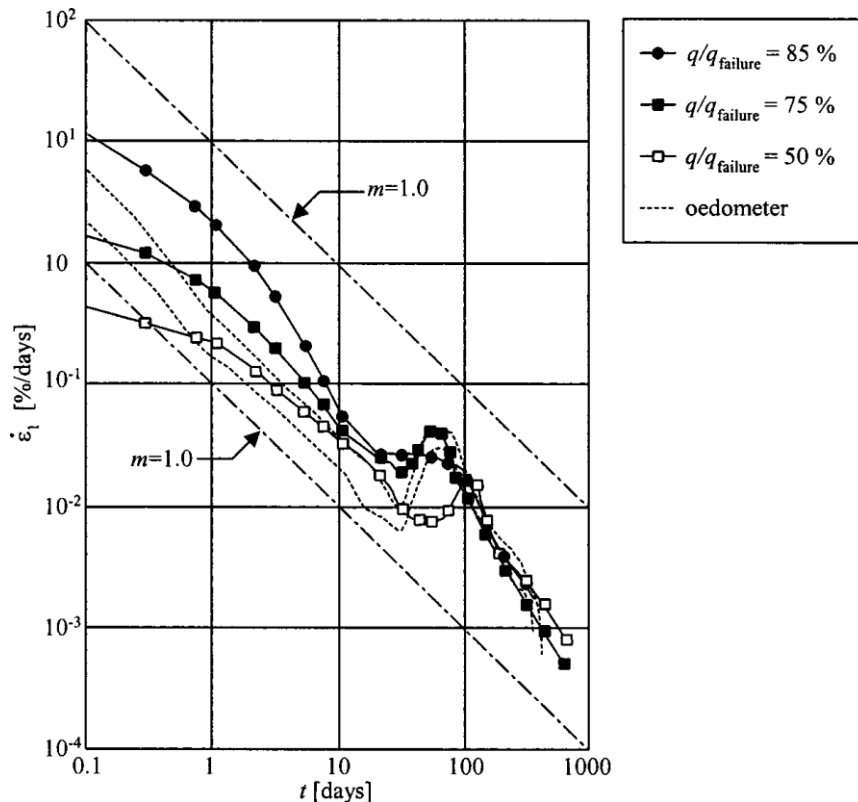


Figura 1.23. Prove di *creep* drenate e prove edometriche: relazione tra velocità di deformazione assiale e tempo per vari livelli tensionali - Bishop e Lowenbury, 1969 (Augustesen *et al.*, 2004).

In relazione alle prove non drenate eseguite su *Remolded Illite* e *Osaka alluvial clay*, sono riportati, rispettivamente in Figura 1.25 e Figura 1.24, gli andamenti della velocità di deformazione in funzione della tensione deviatorica $[\log(\dot{\epsilon}_1) - q]$ relativi a diversi tempi di *creep*. A basse tensioni deviatoriche, le velocità di *creep* sono molto piccole e di scarsa importanza pratica. Avvicinando la tensione deviatorica alla resistenza del materiale, la velocità di deformazione diventa molto elevata e segnala l'insorgenza del collasso. Per valori intermedi della tensione deviatorica, la relazione tra $\log(\dot{\epsilon}_1)$ e q è praticamente lineare.

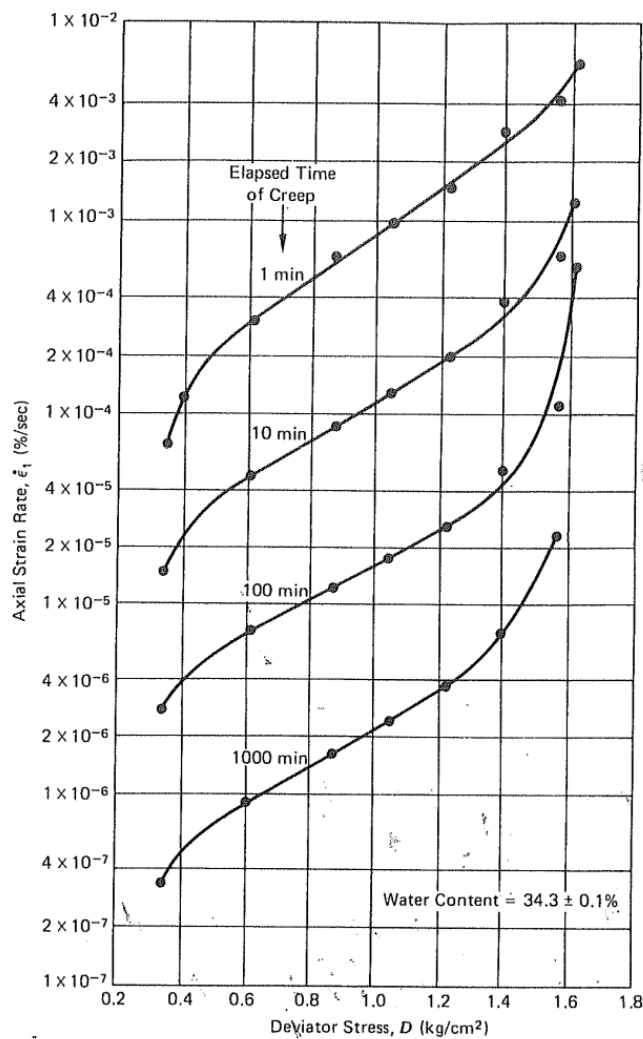


Figura 1.24. Prove di *creep* non drenate su *Remolded Illite*: relazione tra velocità di deformazione assiale e tensione deviatorica – Campanella, 1965 (Singh e Mitchell, 1968).

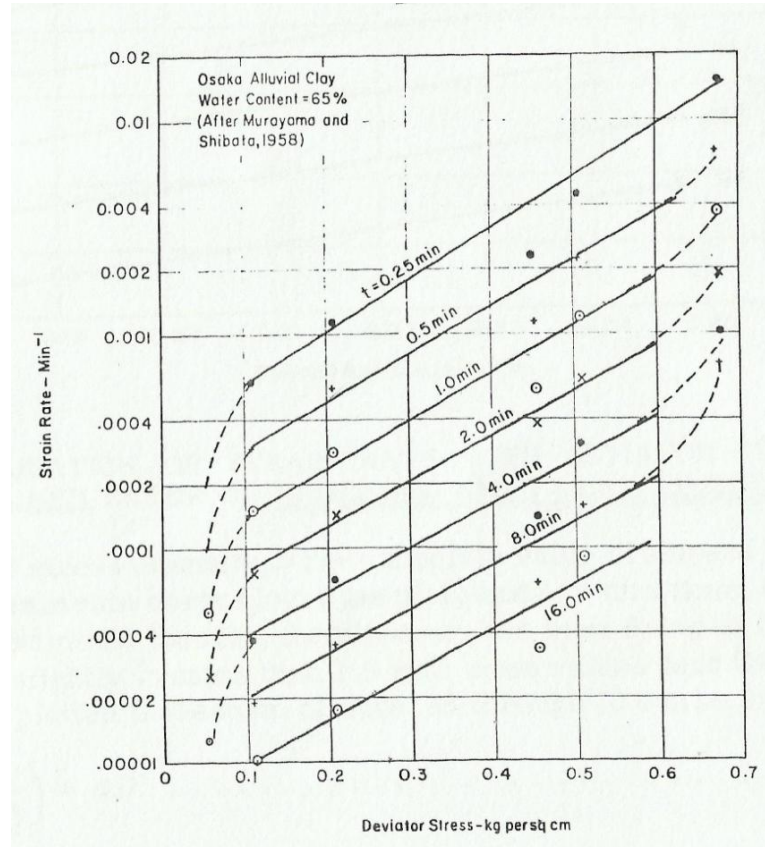


Figura 1.25. Prove di *creep* non drenate su *Osaka alluvial clay*: relazione tra velocità di deformazione assiale e tensione deviatorica – Murayama e Shibata, 1958 (Singh e Mitchell, 1968).

In Figura 1.26 sul piano triassiale $[p' - q]$ sono riportati i percorsi tensionali seguiti durante prove di *creep* in condizioni non drenate su *San Francisco Bay mud*: si può notare che lo stato tensionale efficace si muove verso l'involuppo di rottura. Ad alti livelli tensionali, i campioni possono quindi collassare per *creep*.

Tuttavia la resistenza dei terreni in termini di tensioni efficaci non cambia a meno che non si verifichino cambiamenti chimici, biologici o mineralogici durante il processo di *creep*. Ciò è illustrato schematicamente dai percorsi tensionali in Figura 1.27 per argilla normalmente consolidata, in cui si considera lo stesso involucro di rottura in assenza o in presenza di *creep*.

Come spiegato finora, la maggior parte delle indagini sperimentali sul *creep* dei terreni è stata condotta su campioni consolidati isotropicamente e poi sollecitati a compressione triassiale oppure consolidati in condizioni edometriche.

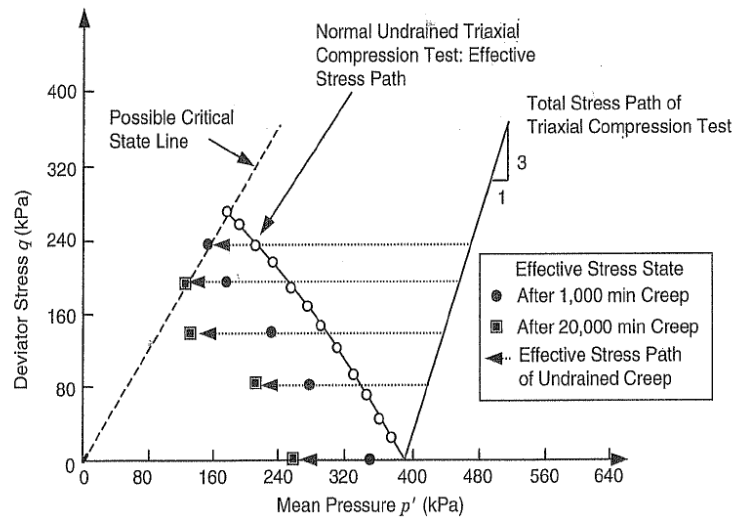


Figura 1.26. Percorsi tensionali misurati durante prove di *creep* non drenate su *San Francisco Bay mud* (pressione media iniziale pari a 392 kPa) – Arulanandan, 1971 (Mitchell e Soga, 2005).

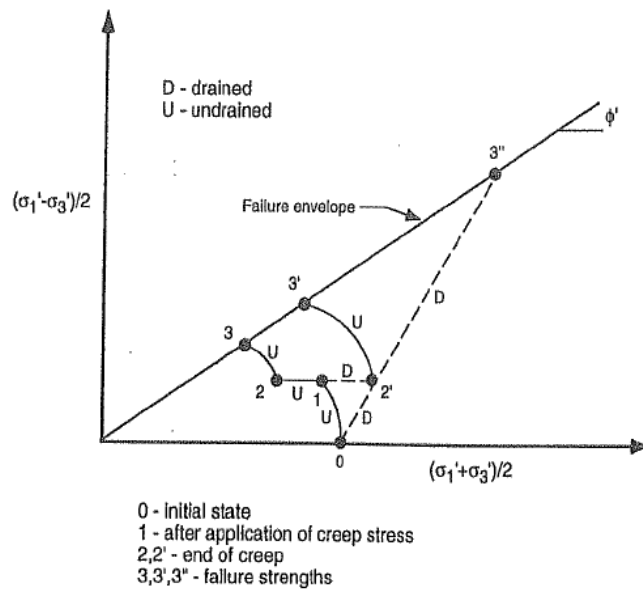


Figura 1.27. Effetti del *creep* non drenato sulla resistenza di argille normalconsolidate (Mitchell e Soga, 2005).

Tuttavia, in natura molti terreni sono stati soggetti a una storia tensionale anisotropa, perciò lo stato deformativo è più spesso conforme a condizioni di deformazione piana piuttosto che di compressione triassiale. Per questo motivo sono state realizzate anche indagini che tenessero conto di questo aspetto.

Ad esempio, in Figura 1.28 sono riportati i risultati di prove di compressione triassiale e di deformazione piana su argille indisturbate *Haney clay* consolidate isotropicamente e in condizioni di tipo K_0 . Nonostante le relazioni generali tensione-

deformazione-tempo e deformazione-velocità di deformazione-tempo siano simili, i valori possono essere notevolmente diversi. Ciò è dovuto al fatto che le deformazioni dipendono dalla storia tensionale precedente alla fase di *creep*.

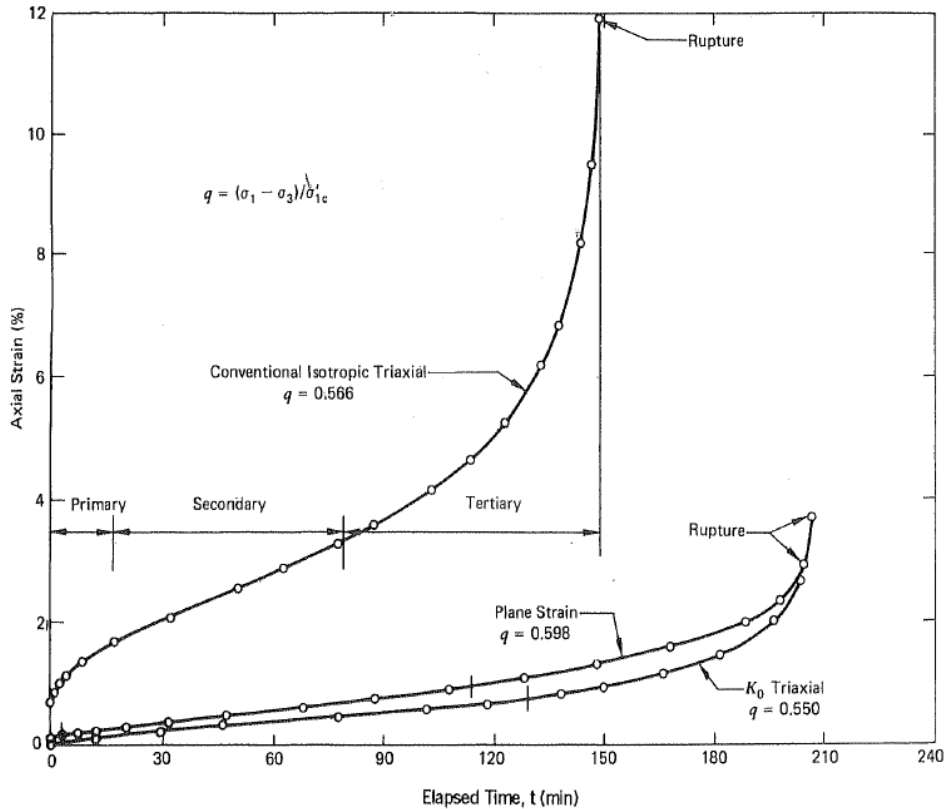


Figura 1.28. Prove di compressione triassiale e di deformazione piana su argille indisturbate *Haney clay* consolidate isotropicamente e in condizioni di tipo K_0 (Campanella e Vaid, 1974).

1.4.2 ARGILLE SOVRACONSOLIDATE

Nel 1978 **Tavenas** ha condotto uno studio dettagliato del comportamento di *creep* **volumetrico e deviatorico** di argille naturali leggermente sovraconsolidate, concludendo che lo sviluppo nel tempo delle deformazioni volumetriche e di taglio può essere rappresentato mediante il parametro m definito dall'Eq. 1.5.

È interessante individuare gli stati tensionali, a cui sono soggetti i campioni durante le prove di *creep*, sul **piano triassiale** [$q - p'$], come mostrato in Figura 1.29, dove possono essere messi in relazione alla superficie limite di stato e la linea dello stato critico. La “**superficie limite di stato**” è equivalente alla pressione di preconsolidazione

definita in condizioni monodimensionali, cioè corrisponde alla superficie di snervamento in condizioni bi- e tri-dimensionali. All'interno della superficie di stato limite, il terreno è sovraconsolidato, all'esterno è normalconsolidato.

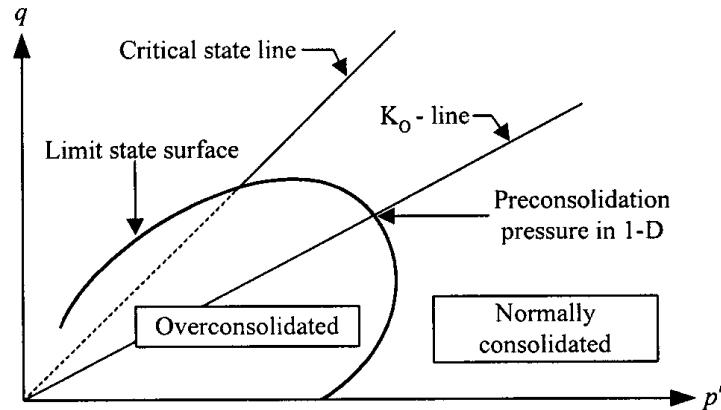


Figura 1.29. Superficie limite di stato sul piano triassiale (Augustesen *et al.*, 2004).

Le prove triassiali di *creep* in condizioni drenate sono state effettuate da Tavenas *et al.* (1978) su argille indisturbate sovraconsolidate (*Saint-Alban clay*) per diverse condizioni tensionali all'interno dello superficie limite di stato (mostrate in Figura 1.30a). Parallelamente alle prove triassiali, è stata anche realizzata una serie di prove edometriche a lungo termine.

I risultati sono riportati in Figura 1.30b sul piano $[\log \dot{\epsilon}_1 - \log t]$.

La velocità di deformazione assiale $\dot{\epsilon}_1$ diminuisce linearmente in funzione del tempo. Il parametro **m relativo alle deformazioni assiali** varia tra 0,6 e 0,95 per tutte le prove triassiali di *creep*, aumentando leggermente all'aumentare della tensione deviatorica.

Il parametro **m relativo alle deformazioni volumetriche** varia tra 0,52 e 0,93 per le prove triassiali di *creep*, ed è circa pari a 0,8 per le prove edometriche. Valori di m dell'ordine di **0,7-0,8** possono quindi essere considerati rappresentativi del comportamento sia assiale che volumetrico delle argille sovraconsolidate.

Si noti che due campioni arrivano a **rottura per creep** nelle prove triassiali, in particolare in una prova corrispondente allo stato di tensione ($p' = 9,7$ kPa; $q = 23,2$ kPa) e in una prova corrispondente a ($p' = 13,4$ kPa; $q = 30,8$ kPa). I campioni collassano dopo circa 300 and 8000 min, rispettivamente. La rottura per *creep* è probabilmente dovuta al fatto che gli stati tensionali sono vicini alla superficie di stato

limite del terreno sovraconsolidato. A deformazioni molto elevate, il materiale si deforma in condizioni critiche, a volume praticamente costante (*creep deviatorico*).

La maggior parte degli studi di *creep* in condizioni triassiali prevede la determinazione di m soltanto per deformazioni assiali, poiché la determinazione di m per la deformazione volumetrica è associata a qualche incertezza in più.

Secondo Tavenas *et al.* (1978), si può considerare un valore di m costante, unico per lo sviluppo delle deformazioni sia volumetriche sia assiali.

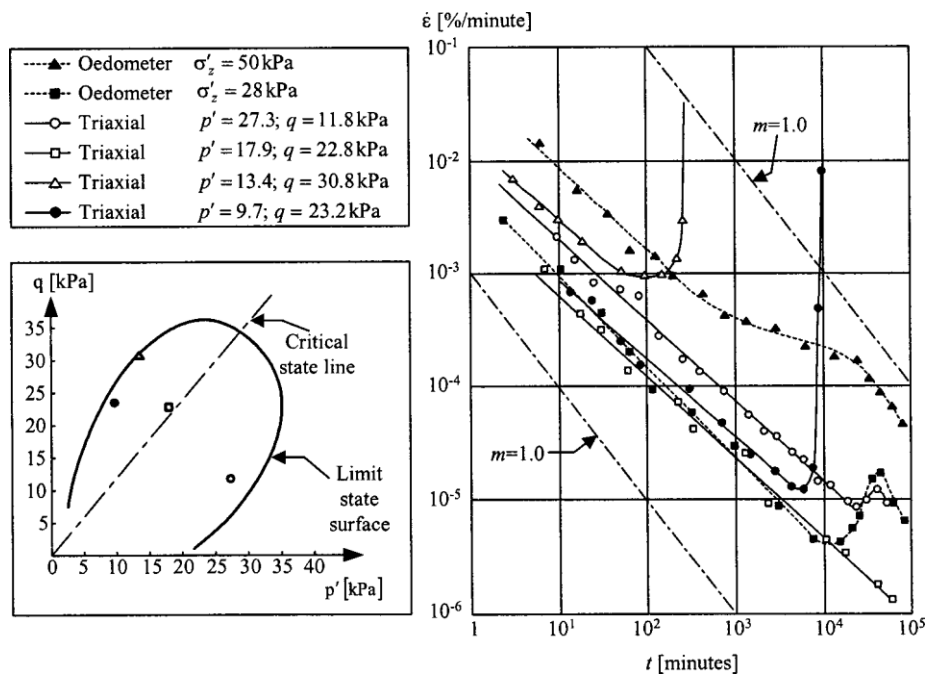


Figura 1.30. Prove edometriche e di *creep* drenate su *undisturbed Saint-Alban clay*: (a) livelli tensionali ai quali vengono eseguite le prove e (b) relazione tra velocità di deformazione assiale e tempo per varie condizioni tensionali – Tavenas, 1978 (Augustesen *et al.*, 2004).

Ad esempio, in Figura 1.31 sono riportate le curve di *creep* [$\log(\dot{\epsilon}_1) - \log(t)$] ricavate nel 1966 da Bishop per *London clay* (argille fortemente sovraconsolidate), mediante prove triassiali condotte in condizioni drenate a diversi livelli di tensione deviatorica (espressi come percentuali della resistenza del terreno in assenza di *creep*).

Si può notare che il logaritmo della velocità di deformazione diminuisce linearmente all'aumentare del logaritmo del tempo, e la pendenza della curva è indipendente dalla tensione deviatorica. L'aumento del livello tensionale ha solo l'effetto di traslare la retta verso l'alto, cioè di aumentare la velocità di deformazione di *creep*.

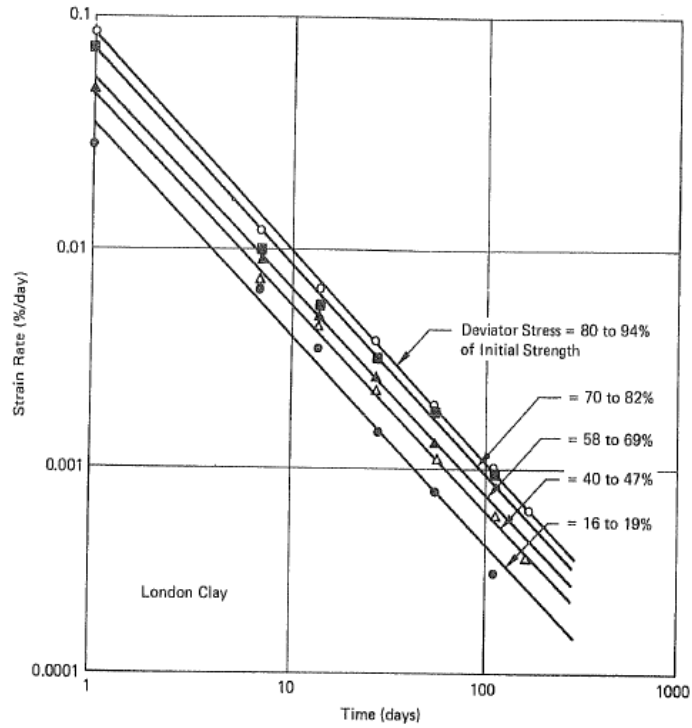


Figura 1.31. Prove di *creep* drenate su *London clay*: relazione tra velocità di deformazione e tempo – Bishop, 1966 (Singh e Mitchell, 1968).

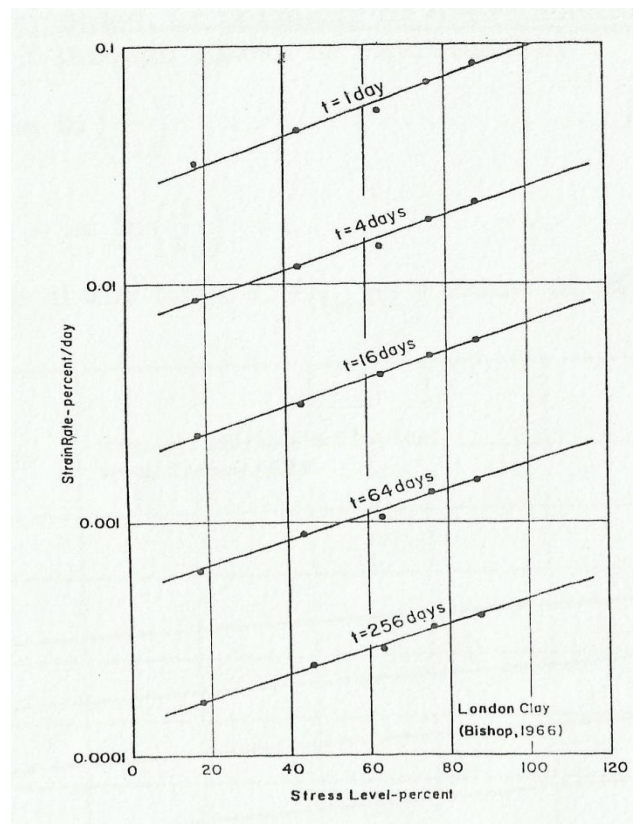


Figura 1.32. Prove di *creep* drenate su *London clay*: relazione tra velocità di deformazione assiale e tensione deviatorica – Bishop, 1966 (Singh e Mitchell, 1968)

Il relativo andamento della velocità di deformazione in funzione della tensione deviatorica $[\log(\dot{\epsilon}_1) - q]$ relativo a diversi tempi di *creep* è rappresentato in Figura 1.32.

Osservando i valori di m relativi alle prove triassiali di *creep*, si può quindi concludere che, in generale, la relazione deformazione-tempo si differenzia dalla classica relazione logaritmica descritta nella Sezione 1.3. In particolare, si ha:

- **range NC:** $m = 0,7 \div 1,3$, con la maggior parte dei valori minori di 1.0;
- **range OC:** $m < 1,0$.

1.5 BIBLIOGRAFIA

1. Augustesen A., Liingaard M., e Lade P. V. (2004). *Evaluation of Time-Dependent Behavior of Soils*, International Journal of Geomechanics, ASCE, Vol. 4(3), p. 137-156.
2. Bjerrum L. (1967). *Engineering geology of Norwegian normally consolidated marine clays as related to the settlements of buildings*. Geotechnique, Vol. 17(2), p. 83–119.
3. Campanella R. G., e Vaid Y. P. (1972). *Creep rupture of a natural saturated clay*. Proceedings of the Sixth International Conference on Rheology, Soil Mechanics Series No. 16, University of British Columbia, Vancouver, Canada.
4. Carrubba P., e Del Fabbro M. (2006). *Resistenza residua alla riattivazione del flysch di Cormons*. Rivista Italiana di Geotecnica, Vol. 1, p. 28–52.
5. Cestelli Guidi C. (1987). *Geotecnica e tecnica delle fondazioni*. Vol. 1, Hoepli Italia.
6. Clarke S. D. (2009). *Enhancement of the BRICK constitutive model to incorporate viscous soil behavior*. Thesis PhD submitted to The University of Sheffield, Department of Civil and Structural Engineering, England.
7. Colombo P., e Colleselli F. (2004). *Elementi di geotecnica*. 3° ed. Bologna: Zanichelli.
8. Havel F. (2004). *Creep in soft soils*. Doctoral thesis for the degree of doktor ingenior, Norwegian University of Science and Technology, Department of Civil and Transport Engineering, Trondheim, Norway.

9. Kuhn M. R., e Mitchell J. K. (1993). *New perspectives on soil creep*. Journal of Geotechnical Engineering, Vol. 119(3), p. 507-524.
10. Lade P. V., Yamamurob J. A., e Bopp P. A. (1997). *Influence of Time Effects on Instability of Granular Materials*, Computers and Geotechnics, Vol. 20(3), p. 179-193.
11. Liingaard M., Augustesen A., e Lade P. V. (2004). *Characterization of Models for Time-Dependent Behavior of Soils*. International journal of geomechanics, ASCE, Vol. 4(3), p. 157–177.
12. Mitchell J. K., e Soga K. (2005). *Fundamentals of soil behavior*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken.
13. Nova R. (2002). *Fondamenti di meccanica delle terre*. McGraw-Hill Italia.
14. Rinaldi G. (2002). *Materiali per l'Ingegneria*. Roma: Ed. Siderea. p. 214-220.
15. Singh A., e Mitchell J. K. (1968). *General stress-strain-time function for soils*. J. Soil Mech. Found. Div., Vol. 94(1), p. 21–46.
16. Singh A., e Mitchell J. K. (1969). *Creep potential and creep rupture of soils*. Proceedingd of the Seventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Mexico City, Vol. 1, p. 379–384.
17. Tavenas F., Leroueil S., La Rochelle P., e Roy M. (1978). *Creep behavior of an undisturbed lightly overconsolidated clay*. Canadian Geotechnical Journal, Vol. 15(3), p. 402–423.

CAPITOLO 2

MODELLAZIONE MATEMATICA DEL *CREEP* NEI TERRENI COESIVI

2.1 CLASSIFICAZIONE DEI MODELLI

A causa della sua importanza pratica, il *creep* è diventato uno dei problemi più importanti della Meccanica delle Terre e fin dal 1950 è iniziata una vera e propria indagine di questo fenomeno. In particolare, al fine di caratterizzare e prevedere in modo realistico il comportamento meccanico viscoso osservato nelle argille, è indispensabile sviluppare, sulla base dei risultati sperimentali, modelli matematici più o meno semplificati che stabiliscano dei legami tra tensioni, deformazioni e tempo (detti **modelli costitutivi**).

Infatti, a causa della complessità del fenomeno di *creep*, del gran numero di fattori che lo influenzano e della difficoltà di considerare contemporaneamente le deformazioni volumetriche e deviatoriche, sono state sviluppate numerose teorie capaci di descrivere il comportamento di *creep* dei terreni. Queste teorie si differenziano, da un lato, in base alla tipologia di equazioni di stato (che correlano tensione, deformazione e tempo) da cui sono caratterizzate:

Eq. 2.1
$$\varepsilon = f(\sigma, t) \text{ oppure } \sigma = f(\varepsilon, t)$$

e, dall'altro, per il modo in cui viene descritto il fenomeno di *creep*. Da questo punto di vista è possibile classificare i modelli di previsione del *creep* in diverse categorie:

- ✓ **modelli empirici,**
- ✓ **modelli reologici,**
- ✓ **modelli numerici tensione-deformazione-tempo.**

I modelli esistenti possono essere utilizzati, in linea di principio, per modellare il comportamento viscoso dei terreni a grana fine, ma non quello delle sabbie.

Nonostante il comportamento viscoso tensione-deformazione-tempo dei terreni sia stato ampiamente studiato negli ultimi decenni, sono presenti ancora numerosi aspetti irrisolti e nessuno dei modelli sviluppati finora è in grado di gestire tutti gli effetti viscosi osservati nei terreni (Augustesen *et al.*, 2004).

Tutti i modelli fanno uso del **principio di corrispondenza**, secondo il quale la stessa relazione costitutiva può essere utilizzata per prevedere il comportamento di *creep*, di rilassamento o a velocità di deformazione costante, imponendo adeguate condizioni al contorno per l'elemento di volume (Liingaard *et al.*, 2004).

L'obiettivo principale di questo capitolo è catalogare nel modo più chiaro ed esauriente possibile e descrivere le caratteristiche di base, i vantaggi e i limiti dei modelli attualmente presenti in letteratura, nel tentativo di confrontare le diverse tipologie di modello e di chiarire il disordine presente in letteratura.

Tale trattazione è incentrata sui modelli che riguardano le **proprietà macromeccaniche**, cioè basati sui concetti di tensione, deformazione e tempo, con particolare attenzione ai modelli empirici e alla rottura per *creep*.

Come anticipato nella Sezione 1.1, si assume che il “tempo” intervenga nell'evoluzione dello stato tensione-deformazione esclusivamente in relazione ai fenomeni viscosi dello scheletro solido del terreno.

Inoltre vengono descritti brevemente i modelli basati sulla **micromeccanica**, che modellano la reale struttura del materiale dal punto di vista chimico-fisico e forniscono un elemento fondamentale per la comprensione della risposta macroscopica.

2.2 MODELLI EMPIRICI

I modelli empirici sono basati sul comportamento fenomenologico tensione-deformazione-tempo mostrato dai terreni durante **prove di *creep*** e **prove a velocità di deformazione costante (CRS)**, cioè sono ottenuti principalmente dall'interpolazione

dei risultati sperimentali (regressione delle curve tensione-deformazione o deformazione-tempo).

Le relazioni costitutive empiriche sono generalmente date da soluzioni in forma chiusa o equazioni differenziali. Inoltre, si applicano solo a problemi con specifiche condizioni al contorno e di carico, quindi non si tratta di relazioni generali (Liingaard *et al.*, 2004).

Tali modelli spesso riflettono il reale comportamento dei terreni e, nonostante la loro limitata applicabilità e talvolta incoerenza teorica, forniscono una base per lo sviluppo di modelli costitutivi tensione-deformazione-tempo più sofisticati.

I modelli empirici sono classificati come segue:

- **relazioni empiriche “primarie”,**
- **modelli semiempirici “secondari”.**

2.2.1 RELAZIONI EMPIRICHE “PRIMARIE”

Le relazioni empiriche “primarie” sono ottenute direttamente interpolando i dati osservati durante le prove di laboratorio con semplici funzioni matematiche. Esse riflettono l’effettivo comportamento mostrato dal terreno e sono spesso limitate a fenomeni viscosi specifici, come il *creep* e il rilassamento (Yin 1999).

I modelli empirici descritti di seguito sono:

- (1) **la legge di *creep* semilogaritmica,**
- (2) **il modello di *creep* di Singh e Mitchell,**
- (3) **l’approccio basato sulla velocità di deformazione.**

(1) **LEGGE DI CREEP SEMILOGARITMICA**

Il fenomeno del ***creep drenato*** dei terreni argillosi osservato nelle prove edometriche (in condizioni monodimensionali) è stato largamente studiato riferendosi alla **consolidazione secondaria**, cioè alle deformazioni volumetriche dovute ai processi viscosi dello scheletro solido del terreno che seguono la consolidazione primaria (***creep volumetrico***).

Numerose indagini hanno dimostrato che è conveniente rappresentare la fase di compressione secondaria mediante una relazione lineare tra la deformazione verticale ε_z (o l'indice dei vuoti e) e il logaritmo del tempo t , regolata dal **coefficiente di consolidazione secondaria**, come rappresentato in Figura 2.1 (Mitchell e Soga, 2005). Tale coefficiente può essere definito come la deformazione di *creep* in un ciclo di $\log(t)$ al termine della consolidazione primaria, secondo le seguenti espressioni:

$$\text{Eq. 2.2} \quad C_{ae} = \frac{\Delta e}{\Delta \log(t)} \quad [e - \log(t)]$$

$$C_{\alpha\varepsilon} = \frac{\varepsilon_z}{\Delta \log(t)} = \frac{\Delta e / (1 + e_i)}{\Delta \log(t)} = \frac{C_{ae}}{(1 + e_i)} \quad [\varepsilon_z - \log(t)]$$

in cui ε_z = deformazione verticale; e = indice dei vuoti; e_i = indice dei vuoti iniziale; C_{ae} = coefficiente di compressione secondaria in termini di e ; $C_{\alpha\varepsilon}$ = coefficiente di compressione secondaria in termini di ε_z ; t = tempo. In letteratura, secondo un'altra notazione, con C_α si possono indicare indifferentemente C_{ae} e $C_{\alpha\varepsilon}$.

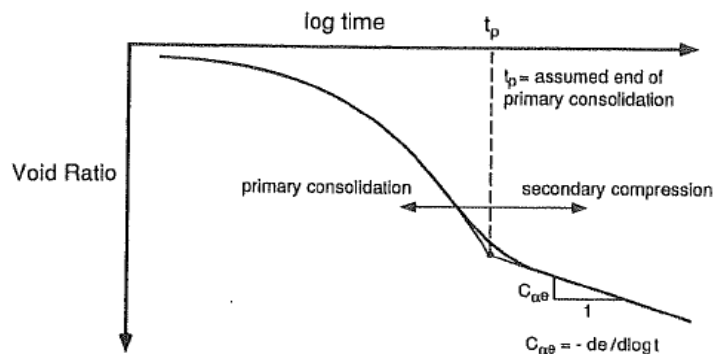


Figura 2.1. Rappresentazione della consolidazione primaria e secondaria: relazione tra indice dei vuoti e logaritmo del tempo (Mitchell e Soga, 2005).

Nei casi più semplici, si assume che il coefficiente di consolidazione secondaria per uno specifico terreno sia costante (Liingaard *et al.*, 2004). Si tratta evidentemente di una semplificazione eccessiva del fenomeno di *creep* volumetrico. Infatti, diversi studi su C_{ae} hanno dimostrato che la compressione secondaria è influenzata da diversi fattori, e, in particolare, dalla tensione verticale efficace σ'_z (si veda Sezione 1.3).

Nel quadro della legge logaritmica si possono distinguere tre possibilità:

- 1') **il concetto di C_α costante;**
- 1'') **il concetto di C_α/C_c costante;**

1^{'''}) **il concetto di Yin.**

Uno dei *limiti* fondamentali della legge logaritmica è che vale solo per condizioni analoghe a quelle delle prove da cui è stata ricavata, cioè per le condizioni monodimensionali.

Nelle equazioni riportate successivamente, le deformazioni verticali variano con il logaritmo del tempo, cioè il terreno si consolida nel tempo, si irrigidisce. Per applicare tali espressioni è quindi richiesta la definizione di un'origine per la scala del tempo. Per superare la difficoltà di definire l'origine del tempo, nel 1957 Suklje ha introdotto l'approccio (3) basato sulla velocità di deformazione.

1') **Concetto di C_{α} costante**

Nel quadro della legge logaritmica, l'approccio più semplice è basato sull'ipotesi che $C_{\alpha\varepsilon}$ sia costante per un dato terreno. Se $C_{\alpha\varepsilon}$ viene valutato in termini di deformazioni verticali di *creep* ε_z (si veda Eq. 2.2), la compressione secondaria può essere modellata mediante la seguente relazione semilogaritmica:

Eq. 2.3
$$\varepsilon_z = C_{\alpha\varepsilon} \log\left(1 + \frac{t}{t_i}\right)$$

dove t_i = tempo di riferimento.

Una delle maggiori difficoltà quando si utilizza la relazione logaritmica nell'Eq. 2.3 è **determinare il tempo di riferimento t_i** , cioè decidere quando inizia la deformazione di *creep* (Liingaard *et al.*, 2004). Il problema del tempo di riferimento è discusso nel dettaglio nella Sezione 1.3.

Il modello dell'Eq. 2.3 è in grado di descrivere il solo comportamento di ***creep primario***, perché la funzione logaritmica prevede una continua riduzione della velocità di compressione.

In generale, l'assunzione di $C_{\alpha\varepsilon}$ costante per uno specifico terreno è un'eccessiva semplificazione, ma può essere accettabile nel caso si considerino solo argille normalconsolidate. Infatti la variazione di $C_{\alpha\varepsilon}$ con le tensioni efficaci si riduce notevolmente quando lo stato tensionale efficace è superiore alla pressione di preconsolidazione.

Una relazione generale tra indice dei vuoti, tensione verticale efficace e tempo è riportata in Figura 2.2.

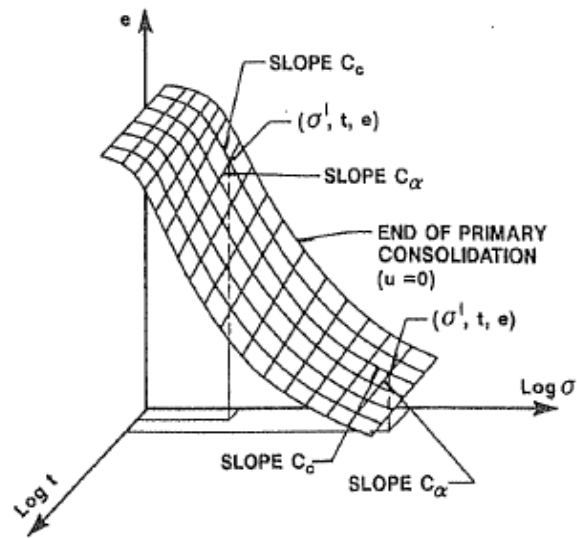


Figura 2.2. Relazione generale tra indice dei vuoti, tensione efficace e tempo (Mitchell e Soga, 2005).

1") Concetto di C_α/C_c costante

Nel 1968 Walker e Raymond (si veda Liingard *et al.*, 2004) hanno ottenuto, da prove di laboratorio su argille sensibili *Leda Clay*, che la velocità di compressione secondaria sembra essere linearmente dipendente dal rapporto di compressione $C_{c\varepsilon}$ per l'intero *range* di tensioni applicate, con un rapporto medio $C_{\alpha\varepsilon}/C_{c\varepsilon} \cong 0,025$.

Il rapporto di compressione è definito come

$$\text{Eq. 2.4} \quad C_{c\varepsilon} = CR = \frac{\Delta\varepsilon_z}{\Delta\log(\sigma'_z)} = \frac{\Delta e}{(1+e_i) \cdot \Delta\log(\sigma'_z)} \quad [\varepsilon_z - \log(t)]$$

in cui e = indice dei vuoti; e_i = indice dei vuoti iniziale; ε_z = deformazione verticale; e σ'_z = tensione verticale efficace.

Analogamente si definisce l'indice di compressione, in termini di e :

$$\text{Eq. 2.5} \quad C_{ce} = c_c = \frac{\Delta e}{\Delta\log(\sigma'_z)} \quad [e - \log(t)]$$

Secondo Mesri, i terreni che sono altamente comprimibili nella compressione primaria dovrebbero mostrare un'elevata compressibilità anche nella fase secondaria.

Ciò ha portato a studi approfonditi del rapporto tra C_α e C_c .

Nel 1977 Mesri e Godlewski hanno concluso che C_α dipende dalla tensione verticale efficace applicata σ'_z e dalla sua relazione con la pressione di preconsolidazione $\sigma'_{z,pc}$: sia C_α che C_c aumentano appena la tensione efficace σ'_z si avvicina alla pressione di preconsolidazione $\sigma'_{z,pc}$, raggiungendo un massimo in corrispondenza o appena al di là di $\sigma'_{z,pc}$, poi diminuiscono e infine rimangono praticamente costanti (Liingaard *et al.*, 2004). Nel corso di queste variazioni, anche il rapporto C_α/C_c rimane approssimativamente costante. Valori tipici del rapporto C_α/C_c sono riportati in Tabella 2.1 per diversi tipi di terreni (Mitchell e Soga, 2005).

Grouping	Soil Type	C_α/C_c
Inorganic clays and silts	Whangamarino clay	0.03–0.04
	Leda clay	0.025–0.06
	Soft blue clay	0.026
	Portland sensitive clay	0.025–0.055
	San Francisco Bay mud	0.04–0.06
	New Liskeard varved clay	0.03–0.06
	Silty clay C	0.032
	Near-shore clays and silts	0.055–0.075
	Mexico City clay	0.03–0.035
	Hudson River silt	0.03–0.06
Organic clays and silts	Norfolk organic silt	0.05
	Calcareous organic silt	0.035–0.06
	Postglacial organic clay	0.05–0.07
	Organic clays and silts	0.04–0.06
	New Haven organic clay silt	0.04–0.075
Peats	Amorphous and fibrous peat	0.035–0.083
	Canadian muskeg	0.09–0.10
	Peat	0.075–0.085
	Peat	0.05–0.08
	Fibrous peat	0.06–0.085

From Mesri and Godlewski (1977).

Tabella 2.1. Valori del rapporto tra coefficiente di consolidazione secondaria e indice di compressione per diversi terreni (Mitchell e Soga, 2005).

Combinando la legge semilogaritmica con il concetto di C_α/C_c costante, l'Eq. 2.3 può essere riscritta come:

$$\text{Eq. 2.6} \quad \varepsilon_z = \frac{1}{m'} \cdot C_{c\varepsilon} \cdot \log\left(1 + \frac{t}{t_i}\right) \quad \text{dove } m' = \frac{C_{c\varepsilon}}{C_{\alpha\varepsilon}}$$

dove $C_{c\varepsilon}$ = rapporto di compressione relativo alla ε_z corrispondente allo stato tensionale per cui è stato determinato il valore di $C_{\alpha\varepsilon}$, e m' = parametro di velocità che definisce l'unicità della relazione tra la compressione primaria e quella secondaria. Il vantaggio principale dell'Eq. 2.6 rispetto all'Eq. 2.3 è che l'utilizzo di $C_{c\varepsilon}$ permette di prendere in considerazione l'influenza della tensione verticale efficace σ'_z .

1^{ma}) Concetto di Yin

Tuttavia, diversi autori, tra cui Mesri e Godlewski, hanno messo in discussione il concetto “ $C_\alpha / C_c = \text{costante}$ ”, per il quale si assume che C_α e C_c siano indipendenti dal tempo.

In generale, C_α non rimane costante nel tempo (Liingaard *et al.*, 2004). Inoltre, **la legge logaritmica ha una limitazione** che può causare una sovrastima del cedimento di *creep* a lungo termine: quando il tempo tende all'infinito, le deformazioni tendono a loro volta verso l'infinito.

Pertanto, Yin (1999) ha sviluppato un approccio in cui si tiene conto della variazione nel tempo del parametro di *creep*, introducendo una **nuova funzione di creep** che è in grado di descrivere il comportamento non lineare di *creep* in funzione del tempo, nel quadro della legge logaritmica:

$$\text{Eq. 2.7} \quad \varepsilon_z = \frac{\Psi}{\nu} \cdot \ln\left(\frac{t+t_0}{t_0}\right)$$

dove Ψ/ν non è più una costante, ma diminuisce con il tempo, e può essere definito dalla seguente espressione:

$$\text{Eq. 2.8} \quad \frac{\Psi}{\nu} = \frac{\Psi'_0}{1 + (\Psi'_0 / \varepsilon_\infty) \ln[(t+t_0)/t_0]}$$

dove $\nu = 1 + e$ = volume specifico. Quando il tempo t va all'infinito, la deformazione di *creep* diventa $\varepsilon_z = \varepsilon_\infty$. Pertanto, la deformazione limite ε_∞ è un parametro del modello, come t_0 e ψ_0 .

Se il rapporto Ψ/ν è costante, l'Eq. 2.7 si riduce alla tradizionale legge logaritmica e $\Psi/\nu = C_{\alpha\varepsilon} / \ln(10)$.

(2) MODELLO DI CREEP DI SINGH E MITCHELL

Sulla base dell'analisi di prove triassiali di creep drenate e non drenate su varie argille, Singh e Mitchell (1968) hanno proposto di utilizzare una **semplice equazione fenomenologica a tre parametri**, per descrivere la relazione **tensione-deformazione-tempo** dei terreni a grana fine soggetti a tensione deviatorica costante.

Il modello descrive il comportamento di *creep* triassiale in un *range* di interesse ingegneristico, cioè in un campo di tensioni variabili dal 30% al 90% circa della resistenza iniziale (a seconda della tendenza del terreno alla rottura per *creep*), mediante una **relazione generale tra il logaritmo della velocità di deformazione assiale $\dot{\epsilon}_1$ e il logaritmo del tempo**:

Eq. 2.9
$$\dot{\epsilon}_1 = A \exp(\bar{\alpha} \bar{q}) \left(\frac{t_i}{t} \right)^m = A \exp(\alpha q) \left(\frac{t_i}{t} \right)^m$$

dove
$$\bar{\alpha} = \alpha \cdot q_{\max} \quad \text{e} \quad \bar{q} = \frac{q}{q_{\max}}$$

Il livello di tensione adimensionale \bar{q} viene definito dal rapporto tra la tensione deviatorica di *creep* applicata q e la resistenza q_{\max} ricavata da prove triassiali standard.

Il tempo di riferimento t_i viene generalmente assunto pari all'unità (Mitchell e Soga, 2005); t è il tempo trascorso in seguito all'applicazione della tensione di *creep*.

I tre parametri A , α e m possono essere determinati da alcune ordinarie prove di *creep* per un determinato terreno (Singh e Mitchell, 1968).

Il **parametro A** , mostrato sul piano $[\text{Log}(\dot{\epsilon}_1) - q]$ in Figura 2.3, individua l'ordine di grandezza della velocità di deformazione di *creep* ad un tempo di riferimento t_i , quindi è una proprietà del terreno, che ne riflette la composizione, la struttura e la storia tensionale. I valori di A trovati sperimentalmente per molti terreni sono compresi circa tra $2 \cdot 10^{-8} \div 4 \cdot 10^{-3} \% / \text{min}$ (Kuhn e Mitchell, 1993).

Il **parametro α** indica l'effetto della tensione deviatorica sulla velocità di *creep* e rappresenta la pendenza del tratto lineare della curva $[\text{Log}(\dot{\epsilon}_1) - q]$ in Figura 2.3. Come ordine di grandezza di $\bar{\alpha}$, si considera un intervallo di valori $1 \div 7$.

Il **parametro m di Singh e Mitchell** controlla l'andamento con cui la velocità di deformazione assiale diminuisce nel tempo e si ricava come pendenza delle curve $[$

$Log\dot{\varepsilon}_1 - Log(t)$] (si veda Sezione 1.2.2 e 1.2.3). Si ricorda che per le argille normalconsolidate i valori di m rientrano generalmente in un range $0,75 \div 1,3$, mentre per le argille sovraconsolidate $m < 1,0$. In particolare, la perdita di resistenza del terreno e la rottura per *creep* sono associate a valori di m minori di 1.

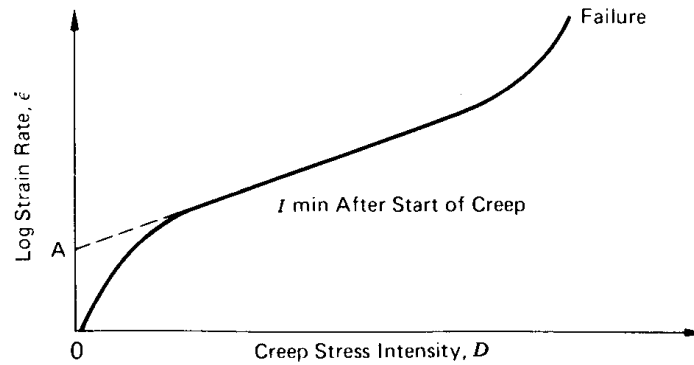


Figura 2.3. Influenza del livello tensionale di *creep* sulla velocità di deformazione dopo un certo tempo di applicazione (Singh e Mitchell, 1968).

L'integrazione della funzione della velocità di *creep* dell'Eq. 2.9 fornisce una relazione generale che esprime la deformazione assiale di *creep* ε_1 nel tempo. In particolare, si ottengono due soluzioni:

- per $m=1$, la deformazione assiale varia linearmente con il logaritmo del tempo:

$$\text{Eq. 2.10} \quad \varepsilon_1 = A \exp(\overline{\alpha q}) t_i \ln(t) + \text{costante}$$

- per $m \neq 1$, la relazione tra deformazione assiale e tempo può essere descritta da una funzione di potenza:

$$\text{Eq. 2.11} \quad \varepsilon_1 = \frac{A \cdot t_i}{1-m} \exp(\overline{\alpha q}) \left(\frac{t}{t_i} \right)^{1-m} + \text{costante}$$

Le costanti di integrazione delle precedenti equazioni possono essere determinate a partire da un valore noto della deformazione ad un certo istante di tempo.

Le curve di *creep* per $m=1$ e $m \neq 1$ sono riportate in Figura 2.4. Come si può notare, il modello di Singh e Mitchell è quindi in grado di descrivere, variando il valore del parametro m , sia il ***creep primario*** (“*fading creep*”), per il quale le deformazioni

hanno un valore asintotico, sia il **creep secondario** (“*non fading creep*”), dove le deformazioni aumentano monotonamente per $t \rightarrow \infty$ (Liingaard et al., 2004).

Le deformazioni plastiche e di *creep* del terreno dipendono dal movimento di dislocazione o di rottura delle particelle, quindi anche dal punto di vista fisico si ritiene che sia più corretto prevedere il comportamento deformativo con una sola equazione, semplice e generale, come quella di Singh e Mitchell.

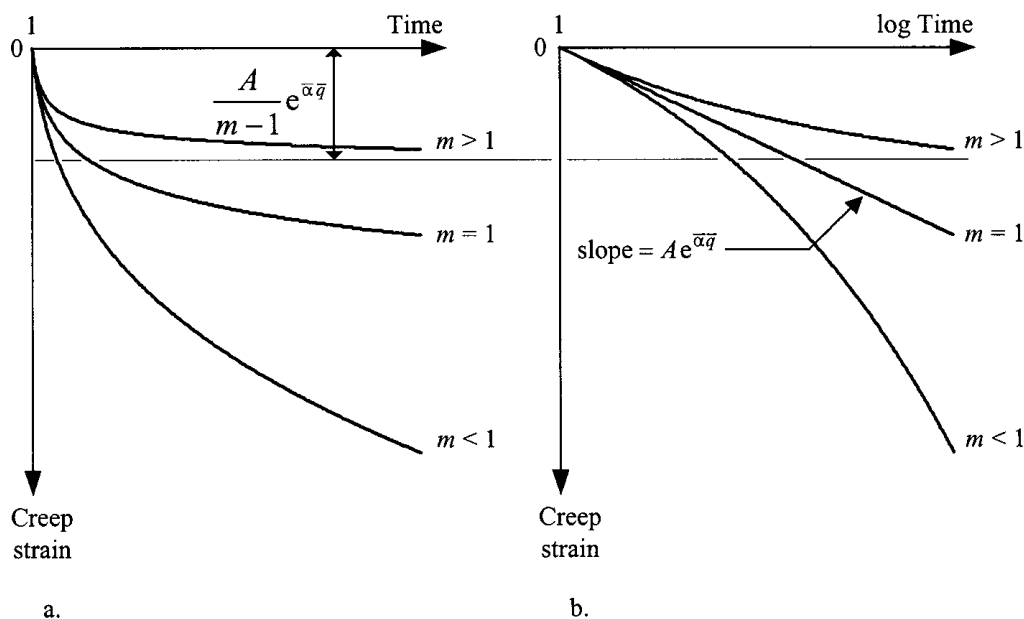


Figura 2.4. Curve di *creep* previste dal modello di Singh e Mitchell per $m=1$, $m<1$ e $m>1$, con $t_i=1$: (a) deformazione di *creep* in funzione del tempo, e (b) deformazione in funzione del logaritmo del tempo (Liingaard et al., 2004).

Un confronto tra le curve di *creep* sperimentali e previste dall’Eq. 2.9 è visibile sul piano $\varepsilon - \log t$ (Singh e Mitchell, 1968) in Figura 2.5 e Figura 2.6 rispettivamente per *remolded illite* e *London clay* (per approfondire i risultati delle indagini si rimanda alla Sezione 1.4). Si può notare che durante la consolidazione secondaria esiste una relazione lineare tra la deformazione assiale e il logaritmo del tempo.

I provini sollecitati fino al 90% della resistenza a taglio in condizioni drenate manifestano un comportamento di *creep* terziario, che li porta a rottura dopo appena 2 giorni e 4 ore (Clarke, 2009).

Il modello ha le seguenti **limitazioni**:

1. Il modello descrive il comportamento di *creep* ad un livello di tensione costante in condizioni monodimensionali; inoltre, è valido solo per il primo carico applicato.

2. Il modello non descrive il comportamento a rottura. Per descrivere la fase di *creep* terziario fino al collasso del terreno è necessario aggiungere un modello della rottura per *creep*, di cui si tratterà in seguito.
3. Per un dato terreno, si assume che m sia costante. In realtà, curve di *creep* a diversi livelli di tensione possono comportare diversi valori di m per lo stesso terreno.

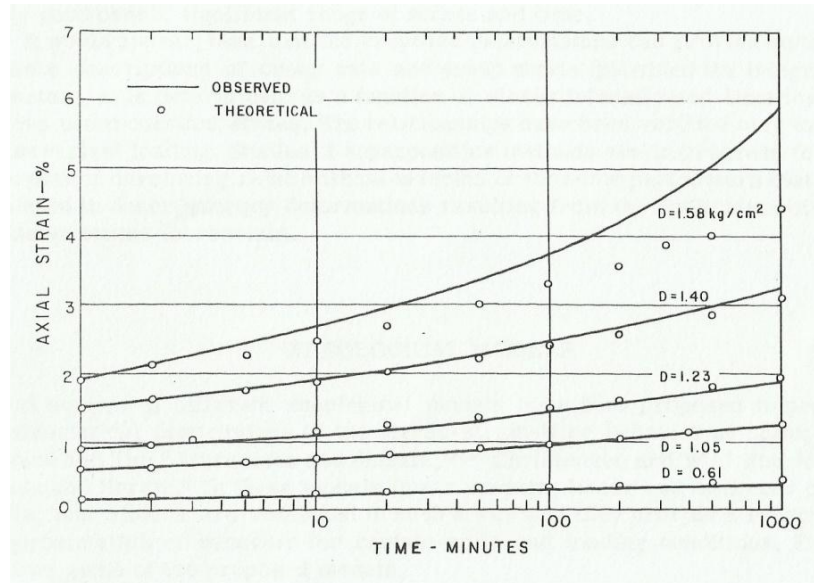


Figura 2.5. Relazione tra deformazione e tempo per *Remolded Illite*, e confronto con il modello di Singh e Mitchell – Campanella, 1965 (Singh e Mitchell, 1968).

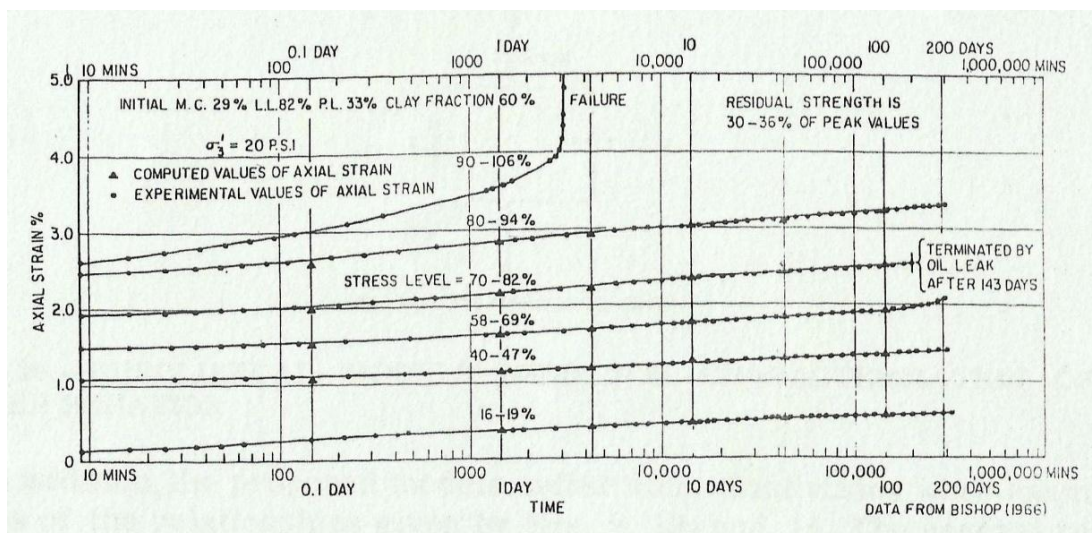


Figura 2.6. Relazione tra deformazione e tempo per *London clay*, e confronto con il modello di Singh e Mitchell – Bishop, 1966 (Singh e Mitchell, 1968).

(3) APPROCCIO BASATO SULLA VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE

Questo approccio (“*strain rate approach*”) è basato sull'esistenza di un'unica relazione tra lo stato di tensione attuale σ'_z e la deformazione (ε_z o e) per una data velocità di deformazione costante ($\dot{\varepsilon}_z$ o \dot{e}), indipendentemente dalla precedente storia tensione-deformazione-tempo (si veda Sezione 1.3).

Il modello originale proposto da Suklje nel 1957 è stato studiato in dettaglio e corroborato da Leroueil nel 1985, mediante prove edometriche a più stadi, prove CRS e prove di creep a lungo termine su vari tipi di argille (Liingaard *et al.*, 2004). Sulla base di tale ricerca sperimentale, si è rilevato che l'andamento della tensione efficace σ'_z non ha un'influenza significativa sul comportamento reologico delle argille, quindi può essere trascurato. Inoltre, la relazione **tensione-deformazione-velocità di deformazione** $\sigma'_z - \varepsilon_z - \dot{\varepsilon}_z$ per un determinato terreno può essere descritta completamente da due equazioni:

- una che rappresenta la variazione della **pressione di preconsolidazione** con la **velocità di deformazione**:

$$\text{Eq. 2.12} \quad \sigma'_{z,pc} = f(\dot{\varepsilon}_z)$$

- e l'altra che esprime la relazione normalizzata tra **tensione efficace e deformazione**:

$$\text{Eq. 2.13} \quad \frac{\sigma'_z}{\sigma'_{z,pc}} = g(\varepsilon_z)$$

Le relazioni indicate dalle precedenti equazioni sono rappresentate in Figura 2.7. Leroueil non suggerisce alcuna espressione in forma chiusa per le funzioni f e g , ma combinandole si ottiene la forma generale di una generica soluzione, espressa come:

$$\text{Eq. 2.14} \quad \dot{\varepsilon}_z = f^{-1}\left(\frac{\sigma'_z}{g(\varepsilon_z)}\right)$$

Una delle caratteristiche del modello è che le proprietà viscosi dell'argilla sono connesse direttamente alle proprietà di consolidazione primaria. Quando l'Eq. 2.12 viene approssimata da una relazione lineare, rappresentata in Figura 2.7a, si ha:

$$\text{Eq. 2.15} \quad \log \frac{\sigma'_{z,pc}}{\sigma'_{z,pc0}} = A + \frac{1}{m'} \log \frac{\dot{\varepsilon}_z}{\dot{\varepsilon}_{z0}}$$

dove A e m' sono costanti; $\sigma'_{z,pc0}$ e $\dot{\epsilon}_{z0}$ sono i valori di riferimento. La curva tensione-deformazione normalizzata in Figura 2.7a rappresenta la tendenza al *creep* dell'argilla, cioè la reazione della scheletro solido del terreno, che di solito varia da un'argilla all'altra.

Nel 1996 Leroueil e Marques hanno mostrato che l'Eq. 2.15 vale per numerose argille inorganiche e che il corrispondente valore di m' è collegato al rapporto C_α/C_c secondo la seguente relazione:

$$\text{Eq. 2.16} \quad \frac{1}{m'} = \frac{C_c}{C_\alpha}$$

Ciò implica che la legge semilogaritmica con $C_\alpha/C_c = \text{costante}$ e l'approccio basato sulla velocità di deformazione sono equivalenti nel descrivere il comportamento viscoso durante la consolidazione secondaria.

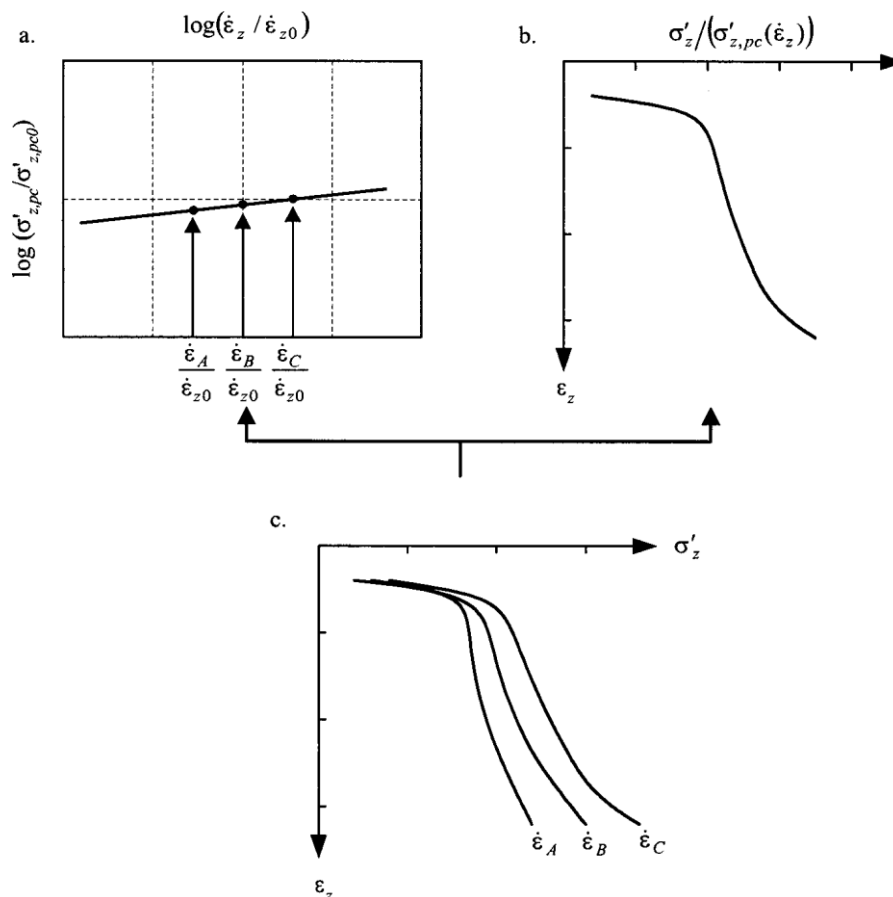


Figura 2.7. Relazione tensione-deformazione-velocità di deformazione: (a) Variazione normalizzata della pressione di preconsolidazione con la velocità di deformazione, e (b) Relazione normalizzata tensione efficace-deformazione, e (c) curve sperimentali ottenute a diverse velocità di deformazione (Liingard *et al.*, 2004).

Il modello costituito dalle Eq. 2.12 e Eq. 2.13 ha le seguenti **limitazioni**:

1. Il modello è stato proposto da Leroueil sulla base di prove in cui le deformazioni erano sempre in aumento, e si è dimostrato valido solo in tali condizioni. Il modello non deve quindi essere utilizzato quando l'argilla si stabilizza durante le fasi di scarico o si rilassa sotto deformazione costante (Liingaard *et al.*, 2004).
2. Il modello è stato sviluppato soprattutto da osservazioni su argille normalconsolidate, quindi fornisce scarse previsioni nel caso di argille fortemente sovraconsolidate, per le quali le deformazioni elastiche sono relativamente importanti.

2.2.2 OSSERVAZIONI SULLE RELAZIONI EMPIRICHE “PRIMARIE”

Le relazioni empiriche per i terreni sono fortemente influenzate dalla concezione classica della reologia dei materiali, cioè si considera che il *creep*, il rilassamento e la dipendenza dalla velocità di deformazione siano causati dallo stesso meccanismo di base. Questo concetto viene indicato come “**principio di corrispondenza**”, il quale afferma che uno dei fenomeni viscosi, il rilassamento, per esempio, può essere derivato dal comportamento osservato per il *creep* e viceversa (Liingaard *et al.*, 2004). I seguenti aspetti confermano la validità del principio di corrispondenza:

- Non esistono modelli indipendenti per il rilassamento.
- Il parametro m' ottenuto da prove a velocità di deformazione costante è stato assunto pari al rapporto C_α / C_c , dove C_α viene ottenuto da prove di *creep*.

La distinzione fondamentale tra i modelli primari è che si tratti di modelli *time-hardening* o *strain-hardening*, come spiegato di seguito.

- **Modelli *time-hardening***: sono caratterizzati da relazioni in cui il tempo partecipa come parametro di incrudimento. Le relazioni *time-hardening* possono essere scritte come:

Eq. 2.17 $\varepsilon^c = f(\sigma)g(t)$ oppure $\dot{\varepsilon}^c = f(\sigma)g(t)$

dove ε^c = deformazione di *creep*, $\dot{\varepsilon}^c$ = velocità di deformazione di *creep*, f e g = funzioni della tensione e del tempo, rispettivamente. Entrambe le precedenti equazioni includono il tempo come parametro di incrudimento, ma solitamente ci si riferisce all'equazione a destra come “*time-hardening model*” e all'equazione a sinistra come “modello di deformazione totale” (“*total strain model*”), di cui si tratta in modo approfondito nella Sezione 2.3.

Secondo l'Eq. 2.17, la legge semilogaritmica (Eq. 2.3, Eq. 2.6, Eq. 2.7) e il modello di Singh e Mitchell (Eq. 2.9) possono essere classificati come modelli *time-hardening*.

- **Modelli *strain-hardening***: includono la deformazione come parametro di incrudimento. La relazione funzionale può essere scritta come:

$$\text{Eq. 2.18} \quad \dot{\varepsilon}^c = f(\sigma)g(\varepsilon^c)$$

dove ε^c = deformazione di *creep*, $\dot{\varepsilon}^c$ = velocità di deformazione di *creep*, f e g = funzioni della tensione e della deformazione di *creep*, rispettivamente.

È evidente che la forma generale dell'approccio basato sulla velocità di deformazione (“*strain rate approach*”), data da un'unica relazione tra tensione, deformazione e velocità di deformazione (Eq. 2.14), è equivalente all'espressione funzionale dei modelli *strain-hardening*.

2.2.3 RELAZIONI SEMIEMPIRICHE “SECONDARIE”

Le relazioni semiempiriche “secondarie” sono ottenute dalla combinazione di uno o più modelli primari.

In qualche misura questi modelli possono essere utilizzati come modelli di tensione-deformazione-tempo o tensione-deformazione-velocità di deformazione, che forniscono le soluzioni sia per il *creep* che per il rilassamento all'interno di un particolare modello.

Inoltre, le relazioni semiempiriche sono caratterizzate da soluzioni in forma chiusa, contrariamente ai modelli elastici/viscoplastici, che sono costituiti da formulazioni in forma incrementale

I principali modelli semiempirici sono i seguenti:

- (1) **l'approccio di Mitchell e Kavazanjian,**

- (2) l'approccio di Tavenas,
- (3) il modello di Bjerrum,
- (4) il modello Yin e Graham.

(1) APPROCCIO DI MITCHELL E KAVAZANJIAN

Uno dei primi tentativi di sviluppare una relazione costitutiva pluriassiale tensione-deformazione-tempo è stato proposto da Kavazanjian e Mitchell (1977). Si tratta di un modello del comportamento generale tensione-deformazione-tempo dei terreni a grana fine, formulato sulla base delle **distinte componenti di deformazione deviatorica e volumetrica**, assumendo che ciascuna di esse abbia una componente di deformazione **istantanea** e una **differita** (Liingaard *et al.*, 2004).

- La deformazione volumetrica di *creep* si ottiene dalla legge logaritmica della consolidazione secondaria, con l'ipotesi che il coefficiente di consolidazione secondaria $C_{\alpha\varepsilon}$ sia approssimativamente una costante in condizioni di normalconsolidazione (si veda “Relazioni empiriche primarie”). Pertanto, la **velocità di deformazione volumetrica differita** può essere scritta come:

Eq. 2.19
$$\dot{\varepsilon}_v = \frac{C_{\alpha\varepsilon}}{\ln(10)} \frac{1}{t}$$

- La componente deviatorica si basa sul modello di Singh e Mitchell, descritto nella Sezione 2.2. Se si considera la velocità di deformazione assiale dell'Eq. 2.12 come la velocità di deformazione lungo il primo asse principale, si ha:

Eq. 2.20
$$\dot{\varepsilon}_1 = A \exp(\overline{\alpha q}) \left(\frac{t_i}{t} \right)^m$$

La **velocità di deformazione deviatorica differita** può essere calcolata indirettamente a partire dalla componente volumetrica e dalla deformazione assiale in condizioni triassiali riportata da Tavenas *et al.* (1978), secondo la seguente espressione:

Eq. 2.21
$$\dot{\varepsilon}_q = \dot{\varepsilon}_1 - \frac{\dot{\varepsilon}_v}{3}$$

dove $\dot{\varepsilon}_v$ e $\dot{\varepsilon}_1$ sono date dalle Eq. 2.19 e Eq. 2.20, rispettivamente.

È interessante notare che il lavoro di Kavazanjian e Mitchell (1977) è stato poi sviluppato in un modello generale viscoplastico (Sezione 2.4).

(2) APPROCCIO DI TAVENAS

Analogamente all'approccio di Mitchell e Kavazanjian, l'approccio di Tavenas *et al.* (1978) distingue le **componenti volumetrica e deviatorica delle deformazioni di creep**.

Sulla base dei risultati di prove di *creep* drenate e non drenate su argille leggermente sovraconsolidate (Sezione 1.2), si è dedotto che lo sviluppo nel tempo delle deformazioni sia volumetriche $\dot{\epsilon}_v$, che deviatoriche $\dot{\epsilon}_q$ può essere rappresentato dall'equazione fenomenologica del modello di Singh e Mitchell, cioè si ha:

$$\text{Eq. 2.22} \quad \dot{\epsilon}_v = B \exp(\alpha p') \left(\frac{t_i}{t} \right)^m$$

$$\text{Eq. 2.23} \quad \dot{\epsilon}_q = A \exp(\alpha q) \left(\frac{t_i}{t} \right)^m$$

dove il parametro B è una proprietà del suolo che riflette la composizione, la struttura e la storia tensionale, definito sul piano $[\text{Log}(\dot{\epsilon}_v) - p']$ in modo equivalente al parametro A di Singh e Mitchell.

È logico che, mentre le deformazioni deviatoriche dipendono dalla tensione di taglio q , quelle volumetriche derivano piuttosto dalla pressione media p' .

Si può notare la somiglianza tra l'espressione delle deformazioni di *creep* volumetrico di Kavazanjian e Mitchell (Eq. 2.19), che sfrutta la legge logaritmica, e quella di Tavenas *et al.* (Eq. 2.22), che utilizza il modello di Singh e Mitchell.

La forma più generale delle precedenti equazioni, valida per qualsiasi stato tensionale, può essere riscritta come segue:

$$\text{Eq. 2.24} \quad \dot{\epsilon}_v = Bf(\sigma'_{ij}) \left(\frac{t_i}{t} \right)^m$$

$$\text{Eq. 2.25} \quad \dot{\epsilon}_q = Ag(\sigma'_{ij}) \left(\frac{t_i}{t} \right)^m$$

dove $f(\sigma'_{ij})$ e $g(\sigma'_{ij})$ = funzioni dello stato tensionale efficace attuale σ'_{ij} .

Sulla base delle forme delle curve di livello a velocità di deformazione costanti in un periodo $t = 100$ min (Tavenas *et al.*, 1978), si ottiene che le funzioni $f(\sigma'_{ij})$ e $g(\sigma'_{ij})$ devono essere espresse in relazione alla **superficie limite di stato**. In questa prospettiva, il rapporto tra le velocità di *creep* volumetrico e deviatorico può essere espresso come una funzione del solo stato tensionale attuale σ'_{ij} . In relazione alle precedenti equazioni, questo concetto può essere scritto come:

$$\text{Eq. 2.26} \quad \frac{\dot{\epsilon}_v}{\dot{\epsilon}_q} = \frac{f(\sigma'_{ij})}{g(\sigma'_{ij})} = h(\sigma'_{ij})$$

in cui $h(\sigma'_{ij})$ è una funzione del materiale. In realtà, l'Eq. 2.26 è una legge di flusso per la deformazione di *creep*, secondo la quale, durante una prova di *creep*, l'andamento delle deformazioni volumetriche in funzione delle deformazioni deviatoriche dovrebbe dare luogo ad una linea retta, indipendentemente dal tempo trascorso. Tuttavia, l'Eq. 2.26 è valida solo se il valore di m per il *creep* deviatorico coincide con il valore di m per il *creep* volumetrico, che non è vero in generale. Comunque la legge di flusso dell'Eq. 2.27 è stata recentemente studiata da diversi ricercatori e ampiamente utilizzata nei modelli costitutivi viscoplastici (si veda Liingaard *et al.*, 2004).

(3) IL MODELLO DI BJERRUM

Per la prima volta, nel 1936, **Buisman** studiò gli effetti del tempo sulla compressibilità delle argille in termini di **consolidazione secondaria monodimensionale** mediante prove ad incrementi di carico in condizioni di espansione laterale impedita.

Più tardi, nel 1942 **Taylor** osservò che, a causa della consolidazione secondaria, la compressione monodimensionale di un'argilla non può essere rappresentata da un'unica curva tensione-deformazione, ma da una famiglia di curve, chiamate "**linee del tempo**", ognuna delle quali corrisponde ad una diversa durata del carico applicato in una prova edometrica standard. Una delle caratteristiche delle linee del tempo è che, a parità di indice dei vuoti, l'entità della pressione di preconsolidazione $\sigma'_{z,pc}$ è diversa per ogni linea.

Successivamente **Bjerrum** (1967) confermò le osservazioni di Taylor, proponendo di descrivere la consolidazione secondaria, in un diagramma $e - \log(\sigma'_z)$, mediante una famiglia di rette parallele che rappresentano appunto relazioni di equilibrio dopo diversi *step* di applicazione del carico (linee isocrone).

Inoltre, secondo Bjerrum (1967), la deformazione volumetrica che si verifica nelle argille può essere suddivisa in due componenti:

- **deformazione istantanea** (“*instant compression*”), che si verifica contemporaneamente all’incremento della tensione efficace e causa una riduzione dell’indice dei vuoti;
- **deformazione differita** (“*delayed compression*”), che rappresenta la riduzione di volume a tensioni efficaci costanti.

I termini “*instant*” e “*delayed*” relativi alla compressione edometrica descrivono la reazione dell’argilla nei confronti di un incremento della tensione efficace e si differenziano dalle fasi di compressione primaria e secondaria, che si verificano rispettivamente prima e dopo la dissipazione della sovrappressione neutrale. Per chiarire queste definizioni, in Figura 2.8 si può vedere in che modo la compressione si sviluppa nel tempo in seguito all’applicazione improvvisa di una tensione uniformemente distribuita.

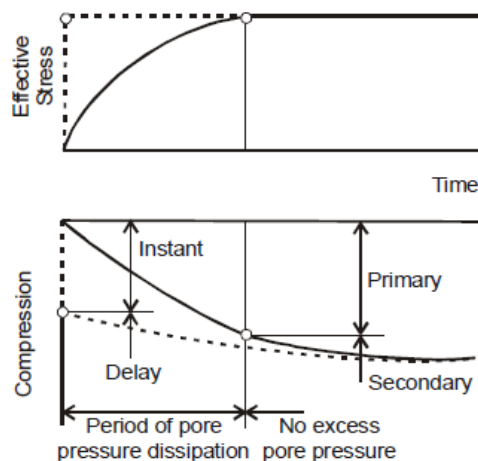


Figura 2.8. Definizione di compressione istantanea e differita (Bjerrum, 1967).

Il modello di Bjerrum (“*theory of time dependent compression*”) è illustrato in Figura 2.9 per argille normalconsolidate (NC) “giovani” e “invecchiate”. Le argille NC “giovani” si sono depositate recentemente e in equilibrio sotto il proprio peso, ma non

hanno dato luogo ad una compressione differita, mentre le argille NC “invecchiate” hanno subito una notevole compressione differita nel tempo a tensioni efficaci costanti.

Le due curve in grassetto sul piano $[e - \log \sigma'_z]$ in Figura 2.9 rappresentano la compressione dei campioni indisturbati di argille NC “giovani” e “invecchiate” sottoposte a consolidazione monoassiale (Liingaard *et al.*, 2004).

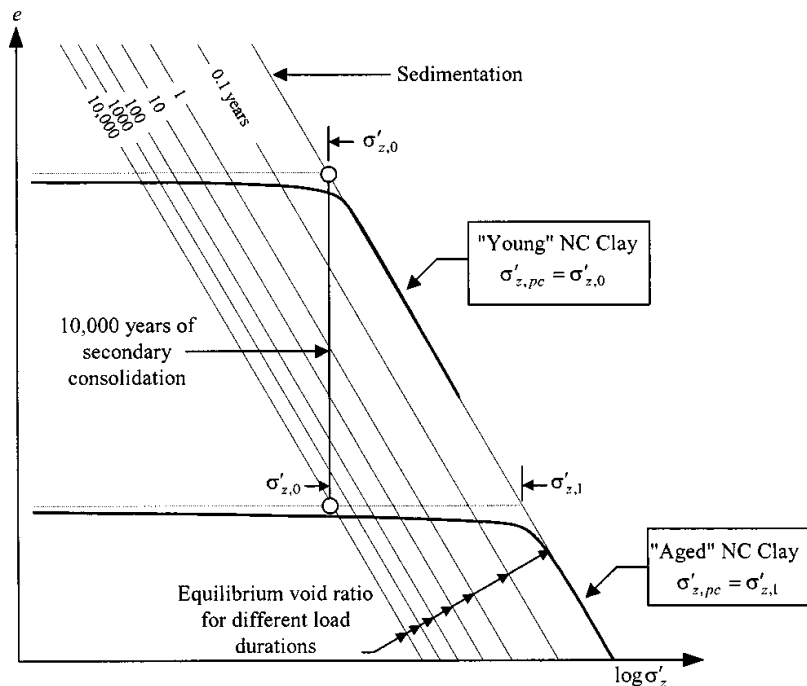


Figura 2.9. Storia geologica e compressibilità di un'argilla normalmente consolidata “giovane” e “invecchiata” (Liingaard *et al.*, 2004).

L'argilla NC “giovane” segue la curva superiore e la pressione di preconsolidazione è pari alla tensione verticale efficace attuale $\sigma'_{z,pc} = \sigma'_{z,0}$. Se, in seguito alla completa dissipazione della sovrappressione neutrale, l'argilla NC “giovane” rimane intatta per, ad esempio, diverse migliaia di anni, essa continua ad essere compressa nel tempo sotto tensione verticale efficace costante, cioè subisce una compressione differita nel tempo.

Quando il terreno viene ricaricato dopo un periodo di compressione differita a tensioni efficaci costanti, l'argilla NC “invecchiata” segue la curva inferiore ed è caratterizzata da una pressione di preconsolidazione maggiore, $\sigma'_{z,pc} = \sigma'_{z,1} > \sigma'_{z,0}$.

Ciò significa che la riduzione dell'indice dei vuoti che si verifica durante la compressione differita porta l'argilla ad avere una struttura più stabile e quindi una pressione di preconsolidazione maggiore, che si riflette in un **aumento della rigidità**

e della resistenza. Il fenomeno di **invecchiamento** o “*aging*” (si veda anche Sezione 1.3.4) spiega la piccola quantità di sovraconsolidazione trovata nelle argille naturali che non hanno mai sperimentato le ordinarie cause di sovraconsolidazione (erosione degli strati sovrastanti, scioglimento del ghiaccio nei ghiacciai, variazioni del livello delle acque sotterranee, agenti atmosferici e cementazione).

Il modello di Bjerrum (1967) è utile per l'analisi dei cedimenti differiti monodimensionali delle argille normalconsolidate e leggermente sovraconsolidate, e utilizza la legge di creep semilogaritmica (creep volumetrico).

Nel 1972 **Garlanger** ha poi modellato le caratteristiche del concetto di Bjerrum in termini degli indici di rigonfiamento C_{se} , di compressione C_{ce} , e di compressione secondaria o rigonfiamento C_{ae} . Il modello è stato formulato in termini di **funzioni logaritmiche**:

$$e = e_0 - e^e - e^{ep} - e^c$$

Eq. 2.28

$$\Rightarrow e = e_0 - C_{se} \cdot \log \frac{\sigma'_{z,pc}}{\sigma'_{z,0}} - C_{ce} \cdot \log \frac{\sigma'_z}{\sigma'_{z,pc}} - C_{ae} \cdot \log \frac{t_i + t}{t_i}$$

dove e = indice dei vuoti; e_0 = indice dei vuoti iniziale; $\sigma'_{z,pc}$ = tensione verticale di preconsolidazione; $\sigma'_{z,0}$ = tensione verticale efficace iniziale in situ; σ'_z = tensione verticale efficace attuale; t_i = tempo di riferimento; t = tempo trascorso.

Gli apici e , ep e c significano rispettivamente **elastico**, **elasto-plastico** e **creep**.

L'Eq. 2.28 si basa sul presupposto che la variazione dell'indice dei vuoti $\Delta e = e - e_0$ in un elemento di terreno sia data da tre componenti:

- la prima e^e dovuta alla deformazione elastica,
- la seconda e^{ep} dovuta alla reazione elasto-plastica dello scheletro del terreno (indipendente dal tempo) alle variazioni di tensione efficace,
- la terza e^c dovuta alla reazione viscosa differita nel tempo a tensione efficace costante.

Considerando il concetto illustrato in Figura 2.10, è possibile ricavare dall'Eq. 2.28 una relazione capace di esprimere l'entità della sovraconsolidazione dovuta all'invecchiamento delle argille naturali normalconsolidate.

Inizialmente si considera un'argilla NC “giovane”, definita da un indice dei vuoti iniziale e_0 , un'età t_0 e uno stato tensionale $\sigma'_{z,0}$ (coincidente con la pressione di

preconsolidazione). Al termine dell'*aging* si ha un'argilla NC "invecchiata" definita da e_t e $\sigma'_{z,t}$, per un dato tempo t di invecchiamento.

Si vuole determinare l'entità della $\sigma'_{z,t}$ in funzione del tempo di invecchiamento. Uguagliando le seguenti espressioni, relative ai percorsi AA' (fase di *creep* puro a tensione efficace costante $\sigma'_{z,0}$) e ABA' (fase plastica di carico da A a B, seguita da una fase di scarico da B ad A') illustrati in Figura 2.10:

Eq. 2.29

$$(e_t - e_0)_{AA'} = -C_{ae} \cdot \log\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

$$(e_t - e_0)_{ABA'} = -C_{ce} \cdot \log\left(\frac{\sigma'_{z,t}}{\sigma'_{z,0}}\right) - C_{re} \cdot \log\left(\frac{\sigma'_{z,0}}{\sigma'_{z,t}}\right)$$

e risolvendo in funzione del rapporto tensionale tra A e B, si ottiene la relazione di dipendenza dall'invecchiamento:

Eq. 2.30

$$\frac{\sigma'_{z,t}}{\sigma'_{z,0}} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{C_{ae}/(C_{ce}-C_{re})}$$

Il rapporto $C_{ae}/(C_{ce} - C_{re})$ è simile al parametro m' . L'unica eccezione è che m' è definito come C_{ae}/C_{ce} , senza tenere in considerazione C_{re} (si veda "Concetto di C_d/C_c costante"). È interessante notare che l'Eq. 2.30 fornisce una relazione simile all'Eq. 2.15, ad eccezione del fatto che l'Eq. 2.15 è basata sui risultati delle prove a velocità di deformazione costante, in cui è coinvolta la velocità di deformazione $\dot{\epsilon}_z$, invece del tempo t .

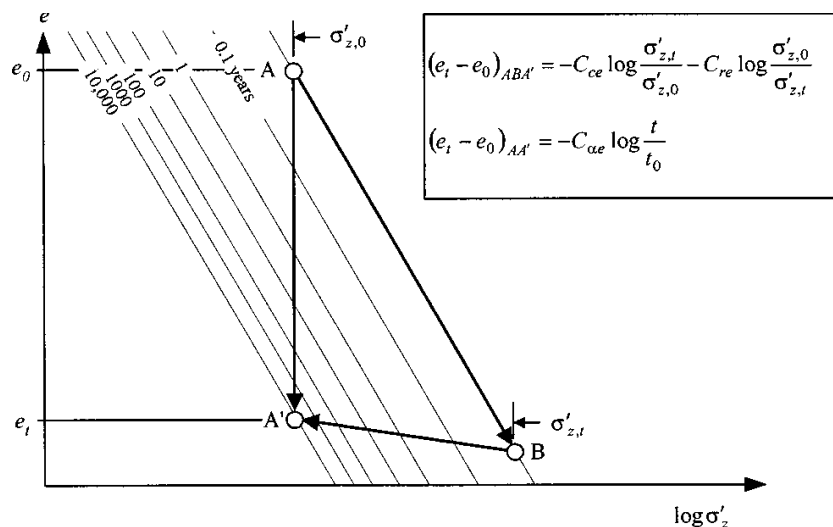


Figura 2.10. Visualizzazione della soluzione per *aging* (Liingaard *et al.*, 2004).

(4) IL MODELLO DI YIN E GRAHAM

Tra il 1989 e il 1994 Yin e Graham (si veda Liingaard *et al.*, 2004) hanno sviluppato una serie di modelli che descrivono il comportamento monodimensionale nel tempo delle argille, e sviluppano ulteriormente:

- 1) il modello di Bjerrum, appena descritto, e
- 2) l'approccio basato sulla velocità di deformazione, descritto tra le “Relazioni empiriche primarie”.

Si introduce il nuovo importante concetto di “**tempo equivalente**”, che viene utilizzato per modellare il comportamento di *creep* delle **argille normalconsolidate e sovraconsolidate** in funzione di σ'_z , ε_z e $\dot{\varepsilon}_z$.

Il modello permette di prevedere il comportamento dell'argilla in una maggiore varietà di condizioni di prova, ad esempio prove di rilassamento e prove a velocità di deformazione costante.

Si sottolinea inoltre che la possibilità di modellare la differenza tra argille NC e argille OC (caratterizzate da un certo rapporto di sovraconsolidazione OCR) e il rilassamento sono importanti miglioramenti rispetto al modello di Bjerrum e all'approccio basato sulla velocità di deformazione.

I concetti più importanti del modello di Yin e Graham, illustrati nel diagramma [$\varepsilon_z - \sigma'_z$] di Figura 2.11, sono i seguenti:

- **tempo equivalente**: secondo Yin e Graham, le linee del tempo di Bjerrum per durata costante del carico non sono uniche in tutti i casi, quindi è preferibile considerare come linee del tempo quelle che hanno lo stesso valore del **tempo equivalente** t_e . Il tempo equivalente t_e è definito come il tempo necessario a deformarsi per *creep* a tensione verticale efficace σ'_z costante, a partire dal valore corrente di deformazione verticale ε_z dalla linea del tempo di riferimento (per cui $t_e = 0$).

Nel *range* normalconsolidato di una prova edometrica tradizionale a gradini di carico, con rapporto dell'incremento di carico e durate di carico costanti, il tempo equivalente t_e è pari alla durata degli incrementi di carico. Tuttavia, nel *range* sovraconsolidato, il tempo equivalente t_e e la durata del carico t sono molto diverse, a seconda del OCR.

Il tempo equivalente è connesso ad un'unica velocità di deformazione di *creep*, con tempi equivalenti più elevati associati a minori velocità di deformazione di *creep*.

- **linea del tempo di riferimento:** è definita come la linea in cui il **tempo equivalente** t_e è uguale a zero ($t_e = 0$) e costituisce lo stato di riferimento per il calcolo del tempo equivalente: i tempi equivalenti sotto la curva sono positivi nell'intervallo $0 < t_e < \infty$, mentre sono negativi nel range $-t_0 < t_e < 0$, dove t_0 è un parametro del materiale.
- **linea del tempo istantanea:** è utilizzata per definire le deformazioni istantanee. Queste linee vengono considerate puramente elastiche, contrariamente alla linea del tempo istantanea elasto-plastica di Bjerrum (1967). La linea del tempo istantanea è definita come una linea che descrive la risposta elastica immediata dello scheletro del terreno dovuta al cambiamento della tensione efficace. Va notato che la linea del tempo istantanea è definita da Yin e Graham nello stesso modo di Bjerrum (1967), cioè la linea del tempo istantanea corrisponde alle deformazioni elasto-plastiche.
- **linea del tempo limite:** secondo Yin e Graham, nello spazio $[\varepsilon_z - \sigma'_z]$ esiste un'unica linea limite, oltre la quale il comportamento è indipendente dal tempo. La linea del tempo limite è definita come una linea del tempo che ha tempo equivalente $t_e = \infty$ e una corrispondente velocità di *creep* pari a zero.

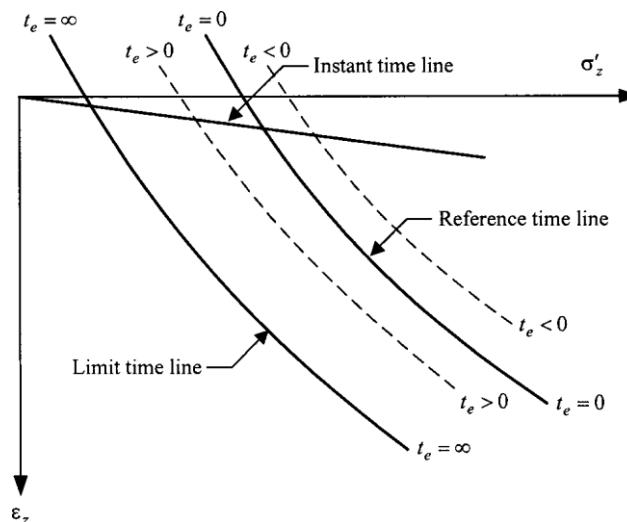


Figura 2.11. Illustrazione dei concetti fondamentali del modello di Yin e Graham per tempi equivalenti positivi e negativi (Liingaard *et al.*, 2004).

Yin e Graham hanno proposto **due tipi di modello generale visco-elasto-plastico**, uno formulato per mezzo di funzioni logaritmiche ed uno per mezzo di funzioni di potenza (si veda Liingaard *et al.*, 2004).

L'equazione generale dell'**approccio logaritmico** per ogni carico monodimensionale viene stabilita in due fasi:

- 1) Il primo passo è derivare un'espressione del tempo equivalente in funzione di qualsiasi punto di stato $(\varepsilon_z, \sigma'_z)$;
- 2) Il secondo passo è quello di determinare una relazione generale basata sulle componenti di deformazione incrementali.

La relazione generale tensione-deformazione-velocità di deformazione per ogni carico monodimensionale è espressa dalla seguente formula:

$$\text{Eq. 2.31} \quad \dot{\varepsilon}_z = \frac{\kappa}{v} \frac{1}{\sigma'_z} \dot{\sigma}'_z + \frac{\psi}{v \cdot t_0} \exp \left[-(\varepsilon_z - \varepsilon_{z0}) \frac{v}{\psi} \right] \left(\frac{\sigma'_{z0}}{\sigma'_z} \right)^{\lambda/\psi}$$

dove ε_{z0} = deformazione iniziale corrispondente alla tensione efficace iniziale σ'_{z0} ; v = volume specifico; κ = parametro del materiale che descrive la rigidità elastica del terreno; λ = parametro elastico-plastico del materiale; ψ = parametro di *creep*, costante per un dato terreno; t_0 = parametro intrinseco del tempo.

Le deformazioni e le tensioni per diverse condizioni di carico possono essere ottenute risolvendo l'equazione differenziale generale nell'Eq. 2.31. Ciò implica che è possibile ottenere soluzioni per processi di *creep*, rilassamento e velocità di deformazione costante. Le soluzioni e le deduzioni delle soluzioni sono piuttosto complicate e qui non sono mostrate.

Nel quadro delle funzioni di potenza la relazione generale tensione-deformazione per ogni carico monodimensionale è

$$\text{Eq. 2.32} \quad \dot{\varepsilon}_z = a_2 n_1 \left(\frac{\sigma'_z}{\sigma'_u} - \frac{\sigma'_{z0e}}{\sigma'_u} \right)^{n_1-1} \dot{\sigma}'_z + (f_\infty^{ep} - f_0^{ep}) \frac{n_3}{t_0} \left(1 - \frac{\varepsilon_z - f_0^{ep}}{f_\infty^{ep} - f_0^{ep}} \right)^{(n_3+1)/n_3}$$

dove il primo termine = componente elastica o immediata della velocità di deformazione totale $\dot{\varepsilon}_z$, e il secondo termine = componente di scorrimento viscoso della velocità di deformazione totale; f_0^{ep} indica la funzione della linea del tempo di

riferimento; f_{∞}^{ep} indica la funzione della linea del tempo limite, σ'_u = tensione unitaria; $a_2, n_1, n_3, \sigma'_{z0e}$ = parametri del modello; t_0 = parametro intrinseco del tempo.

L'equazione differenziale generale Eq. 2.32 è equivalente all'Eq. 2.31, cioè l'equazione può essere risolta in modo da ottenere soluzioni per *creep*, rilassamento e velocità costante di deformazione.

Le previsioni del comportamento viscoso monodimensionale, cioè del *creep* e degli effetti della velocità di deformazione, sono generalmente in buon accordo con i risultati sperimentali dei terreni teneri (Liingaard *et al.*, 2004). La migliore concordanza si ottiene con il criterio della funzione di potenza, grazie al miglioramento degli strumenti di calibrazione del modello rispetto al modello logaritmico. A tal fine, si può notare che l'approccio della funzione di potenza comporta la determinazione di 11 parametri, mentre il modello logaritmico coinvolge solo 5 parametri.

2.2.4 OSSERVAZIONI SULLE RELAZIONI SEMIEMPIRICHE “SECONDARIE”

Per i modelli semiempirici vale il principio di corrispondenza. Questo concetto può essere spiegato considerando i modelli di Bjerrum e di Yin e Graham: se una legge di *creep* viene aggiunta a un modello di base indipendente dal tempo, significa che il tempo entra nel modello. Pertanto, il modello contiene una componente dipendente dal tempo, e le soluzioni, ad esempio, per il rilassamento e la risposta a velocità di deformazione costante, possono essere ottenute risolvendo le espressioni per le appropriate condizioni al contorno (Liingaard *et al.*, 2004).

Come discusso nelle “Osservazioni sulle relazioni empiriche primarie”, si deve poi considerare la distinzione fondamentale tra:

- **Modelli *time-hardening***, caratterizzati da relazioni in cui il tempo partecipa come parametro di incrudimento. Secondo l'Eq. 2.17, l'approccio di Kavazanjian e Mitchell (Eq. 2.19, Eq. 2.20), l'approccio di Tavenas (Eq. 2.22,

Eq. 2.23,) e l'approccio di Bjerrum (Eq. 2.28) possono essere classificati come modelli *time-hardening*.

- **Modelli *strain-hardening***, che includono la deformazione come parametro di incrudimento. Secondo l'Eq. 2.18, l'approccio di Yin e Graham (Eq. 2.31, Eq. 2.32) può essere classificato come *strain-hardening*.

2.2.5 ROTTURA PER CREEP

Come discusso in precedenza, il fenomeno del *creep* influenza la resistenza al taglio dei terreni coesivi.

In alcuni casi la resistenza può essere incrementata. Ad esempio, i processi d'invecchiamento (*aging*) comportano complessivamente il raggiungimento di una configurazione più stabile per lo scheletro solido e, conseguentemente, concorrono anche all'aumento della resistenza del terreno. Tali processi influiscono sui contatti strutturali dello scheletro solido (si veda Sezione 2.5) e dipendono, oltre che dalla mineralogia, anche dalle condizioni dell'ambiente fisico.

In altri casi, invece, ad elevati livelli di mobilitazione della resistenza al taglio, il *creep* può portare nel tempo ad una **perdita di resistenza del materiale**, fino a rottura (*creep rupture*), che dipende dalla composizione chimica e mineralogica, e può essere causata da variazioni dello stato tensionale efficace, dovute alla variazione della pressione neutrale, in condizioni non drenate, oppure da variazioni dell'indice dei vuoti e del contenuto d'acqua, in condizioni drenate.

Pertanto la perdita di resistenza per *creep* è particolarmente rilevante **nelle argille tenere deformate in condizioni non drenate e nelle argille fortemente sovraconsolidate in condizioni drenate** (Mitchell e Soga, 2005). Entrambe queste condizioni si ritrovano in determinati tipi di problemi tecnici: la prima può essere considerata in relazione alla stabilità delle argille tenere subito dopo la costruzione, e la seconda in relazione ai problemi di stabilità a lungo termine.

Il fenomeno della rottura per *creep* dei terreni coesivi può essere studiato e modellato a partire dai risultati di prove triassiali, come ampiamente discusso nella Sezione 1.2. In particolare, è interessante analizzare l'andamento della velocità di

deformazione assiale nel tempo in scala logaritmica $[\log(\dot{\epsilon}_1) - \log(t)]$ a diversi livelli tensionali, come riportato ad esempio in Figura 2.12 per *Haney clay* (Campanella e Vaid, 1972). L'intensità della tensione di *creep* è espressa come differenza tra le tensioni principali normalizzata rispetto alla tensione verticale efficace di preconsolidazione, cioè $q = (\sigma_1 - \sigma_3) / \sigma'_{1c}$. Le due modalità di carico, con incremento della tensione assiale e con incremento della tensione radiale, manifestano gli stessi risultati.

Si può notare che l'inizio dell'accelerazione della velocità di *creep* rappresenta un'imminente rottura del terreno, quindi, appena la velocità inizia ad aumentare, il collasso diventa inevitabile. Si definisce quindi il tempo di rottura (*time to failure*) come il tempo trascorso dall'applicazione dell'incremento finale di carico al punto di inflessione delle curve velocità di deformazione assiale nel tempo.

Inoltre all'aumentare del livello tensionale, la velocità di deformazione minima aumenta e il tempo a rottura diminuisce.

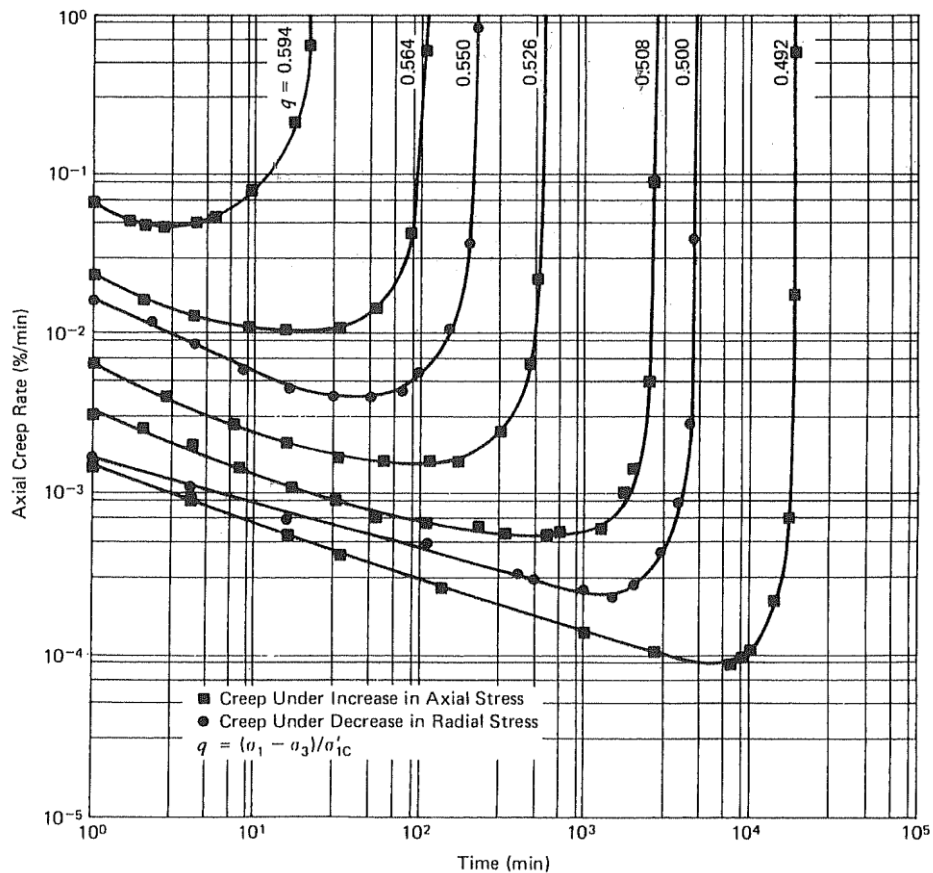


Figura 2.12. Prove di *creep* di tipo K_0 su *Haney clay*: relazione tra velocità di deformazione assiale e tempo (Campanella e Vaid, 1972).

In Figura 2.13 è poi riportato l'andamento del tempo di rottura in funzione della corrispondente velocità di deformazione minima, per ogni livello tensionale, in scala logaritmica [$\log(t_f) - \log(\dot{\epsilon}_{\min})$]. È interessante sottolineare che tale relazione è pressoché lineare, cioè il tempo di rottura è inversamente proporzionale alla velocità di deformazione minima:

$$\text{Eq. 2.33} \quad t_f = \frac{C}{\dot{\epsilon}_{\min}}$$

dove C = costante valutata sperimentalmente.

Altri autori, tra cui Saito (1965) e Singh e Mitchell (1969), hanno proposto relazioni empiriche simili all'equazione precedente per descrivere la fase di *creep* terziario.

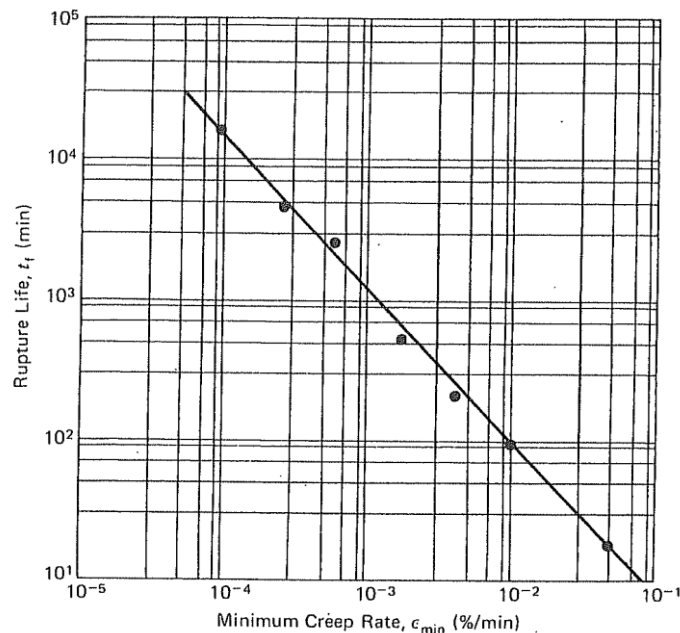


Figura 2.13. Relazione tra il tempo di rottura e la minima velocità di deformazione di *creep* (Campanella e Vaid, 1972).

Come trattato in precedenza, la relazione generale tensione-velocità di deformazione-tempo di Singh e Mitchell, espressa dall'Eq. 1.4, descrive il comportamento di *creep* dei terreni coesivi fino al raggiungimento della velocità di deformazione minima $\dot{\epsilon}_{\min}$. Assumendo $t_i = 1$ e $\epsilon = 0$ quando $t = 0$ (deformazioni immediate nulle), si ottiene la seguente relazione tra deformazione e tempo:

$$\text{Eq. 2.34} \quad \epsilon = \frac{A}{1-m} \exp(\alpha q) t^{1-m}$$

Sostituendo $A \exp(\alpha q) = \dot{\varepsilon}^m$ si ottiene:

$$\text{Eq. 2.35} \quad \varepsilon = \frac{1}{1-m} \dot{\varepsilon}^m t^{1-m} = \frac{1}{1-m} \dot{\varepsilon} t$$

Infine, nel punto di velocità di deformazioni minima si ha:

$$\text{Eq. 2.36} \quad \varepsilon_f = \frac{1}{1-m} \dot{\varepsilon}_{\min} t_f = \frac{C}{1-m}$$

In questo modo è possibile calcolare indirettamente la costante C :

$$\text{Eq. 2.37} \quad C = (1-m)\varepsilon_f$$

Ad esempio in Tabella 2.2 sono riportati i valori di ε_f , m e C ricavati per *Haney clay* mediante tre tipi di prove di *creep*. Si può notare una ragionevole concordanza tra i valori di C calcolati con la precedente equazione e quelli misurati sperimentalmente.

Soil	Test Type ^a	Creep Rate Parameter, m	$C = (\dot{\varepsilon}_{\min} t_f)$ ($\pm 0.2 \log$ cycles)
Undisturbed Haney clay, N.C. ^b	ICU	0.7	1.2
Undisturbed Haney clay, N.C. ^b	ACU	0.4 \pm	0.2
Undisturbed Haney clay, N.C. ^b	ACU-PS	0.5	0.3
Undisturbed Seattle clay, O.C. ^c	ICU	0.5	0.6
Undisturbed Tonesgawa loam ^c	U	0.8	1.6
Undisturbed Redwood City clay, N.C. ^c	ICU	0.75	2.8
Undisturbed Bangkok mud ^c	ICU	0.70	1.4
Undisturbed Osaka clay ^c		1.0	0.07

^aICU, isotropic consolidated, undrained triaxial; ACU, K_0 consolidated, undrained triaxial; ACU-PS, K_0 consolidated, plane strain; and U, compression test.

^bData from Campanella and Vaid (1974).

^cData from Singh and Mitchell (1969).

Tabella 2.2. Valori dei parametri di *creep* m e C per diversi terreni (Mitchell e Soga, 2005).

La deformazione a rottura ε_f può essere determinata da una prova di *creep* a rottura oppure da una prova standard di compressione o a taglio. Se viene utilizzata una prova di resistenza standard, la velocità di tensione deve essere abbastanza lenta da permettere la dissipazione della pressione neutrale o il drenaggio, a seconda delle condizioni di interesse, e la storia tensionale deve simulare quella in sito.

Analogamente, il parametro m può essere ricavato da una prova di *creep*, e C può essere calcolata mediante l'Eq. 2.37. I valori dei parametri A e α possono essere determinati da prove di *creep* a diversi livelli tensionali.

Combinando le precedenti equazioni, si ottiene che:

$$\text{Eq. 2.38} \quad C = \dot{\varepsilon}_{\min} t_f = A \exp(\alpha q) t_f^{1-m}$$

A questo punto è possibile riscrivere il tempo di rottura in funzione dei parametri di *creep* di Singh e Mitchell:

$$\text{Eq. 2.39} \quad \ln(t_f) = \frac{1}{1-m} \left[\ln\left(\frac{C}{A}\right) - \alpha q \right]$$

Come visto, la rottura per *creep* influenza in modo significativo la stabilità complessiva del terreno, perciò è fondamentale tenerne conto nell'analisi del comportamento a lungo termine.

2.3 MODELLI REOLOGICI

La “**Reologia**” si occupa dei fenomeni di scorrimento nel campo della meccanica dei solidi (viscosità e comportamento newtoniano e non newtoniano dei fluidi), studiando l'andamento delle deformazioni nella materia sotto l'effetto dell'applicazione di un sistema di sollecitazioni esterne (si veda Sezione 1.1).

I modelli reologici sono stati generalmente sviluppati per descrivere i fenomeni di visco-elasticità dei metalli, dell'acciaio e dei fluidi, ma vengono utilizzati anche per caratterizzare gli effetti viscosi dei terreni, considerandone anche il comportamento plastico (Liingaard *et al.*, 2004). Infatti si può ricorrere ai concetti essenziali e ai fondamenti della reologia per inquadrare il comportamento meccanico dei terreni mediante l'impiego di schemi più o meno semplificati. È importante sottolineare che la scelta del modello non è legata solo al tipo di materiale, ma anche e soprattutto al fenomeno fisico che lo interessa.

L'utilizzo in reologia di una **simbologia intuitiva e sintetica** permette di ottenere una migliore comprensione concettuale degli effetti viscosi del terreno **in condizioni monoassiali** (Rinaldi, 2002).

Le relazioni costitutive reologiche sono generalmente date da soluzioni in forma chiusa o in forma differenziale.

I modelli reologici vengono solitamente divisi in tre categorie:

- **approccio differenziale;**
- **teorie ingegneristiche del creep;**
- **approccio ereditario.**

2.3.1 APPROCCIO DIFFERENZIALE

Secondo l'approccio differenziale, detto anche **metodo dei modelli reologici meccanici**, le relazioni costitutive di qualunque materiale viscoelastico vengono formulate combinando opportunamente i modelli elementari principali, come la **molla elastica di Hooke**, il **blocco ad attrito plastico di Saint-Venant**, e lo **smorzatore viscoso di Newton** (Figura 2.14). Tali modelli sono caratterizzati da **parametri meccanici** propri, che descrivono in termini quantitativi la relazione tra tensioni, deformazioni e tempo, e che devono essere determinati sperimentalmente.

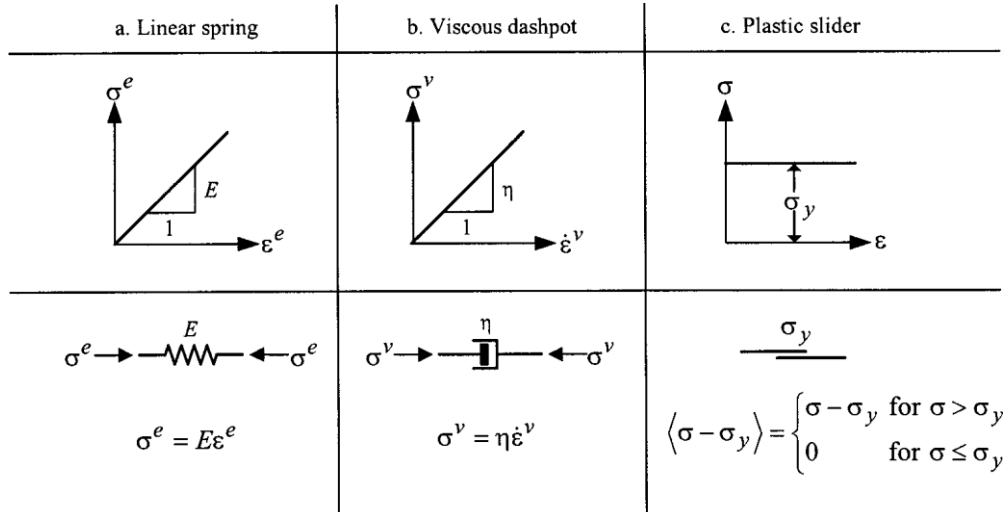


Figura 2.14. Rappresentazione schematica dei modelli reologici elementari : (a) molla elastica di Hooke, (b) smorzatore viscoso di Newton e (c) morsetto ad attrito di Saint Venant (Liingaard *et al.*, 2004).

Si richiamano quindi le caratteristiche dei tre modelli più semplici, che possono essere assunti singolarmente o in combinazione tra loro, per schematizzare il comportamento meccanico del terreno:

- **MEZZO ELASTICO IDEALE:** l'applicazione di una sollecitazione dà luogo ad una deformazione istantanea che si annulla nel momento in cui viene rimossa la sollecitazione.

Il simbolo usato per rappresentare un mezzo elastico è la **molla o spring** (Figura 2.14a).

La relazione tensioni-deformazioni assume una forma del tipo:

$$\text{Eq. 2.40} \quad \sigma^e = f(\varepsilon^e)$$

dove l'apice *e* significa elastico. Essa è biunivoca e indipendente dal tempo e dalla storia tensionale: una stessa sollecitazione, anche se applicata ripetutamente, produce sempre la stessa deformazione (Cestelli Guidi, 1987).

La più semplice relazione costitutiva elastica è la **legge di Hooke**, secondo la quale l'allungamento subito da una molla è direttamente proporzionale alla forza applicata e alla **costante di proporzionalità E**, detta costante elastica della molla, cioè:

$$\text{Eq. 2.41} \quad \sigma^e = E \cdot \varepsilon^e$$

In questo caso si parla di **comportamento elastico lineare**.

Se invece la relazione dipende dal livello di tensione raggiunto, si parla di **comportamento elastico non lineare**.

- **MEZZO VISCOSO:** è caratterizzato da deformazioni permanenti che si sviluppano con una velocità dipendente dalla sollecitazione applicata. La velocità di deformazione si annulla all'annullarsi della sollecitazione.

Lo schema monodimensionale semplificato del modello viscoso è rappresentato da uno **smorzatore viscoso** o **ammortizzatore idraulico** o **dashpot**, costituito da un pistone attraversato da un certo numero di fori di piccolo diametro che scorre in un cilindro pieno di liquido (Figura 2.14b). Quando si applica una tensione, una certa quantità di liquido fluisce attraverso i fori e rende possibile lo spostamento del pistone (Cestelli Guidi, 1987).

La legge costitutiva del mezzo viscoso è data da una relazione tra la tensione applicata e la velocità di deformazione corrispondente:

$$\text{Eq. 2.42} \quad \sigma^v = f(\dot{\varepsilon}^v) = f\left(\frac{d\varepsilon^v}{dt}\right)$$

dove l'apice v significa viscoso.

Se tale relazione è a *viscosità lineare*, si parla di **mezzo viscoso ideale o di Newton**:

$$\text{Eq. 2.43} \quad \sigma^v = \eta \cdot \dot{\varepsilon}^v$$

dove η = costante di viscosità del mezzo.

- **MEZZO PLASTICO IDEALE**: raggiunta una determinata soglia di sollecitazione (limite di snervamento), si manifestano deformazioni permanenti (che si conservano anche una volta rimosse le sollecitazioni) e indipendenti dalla durata delle sollecitazioni applicate.

Un mezzo plastico ideale può essere rappresentato mediante un **pattino o blocco ad attrito o elemento di Saint Venant** o *slider* (Figura 2.14c). Prima di raggiungere un valore della tensione, detto **limite di snervamento** σ_y , il blocco ad attrito è fermo, cioè le deformazioni sono nulle; se la tensione σ supera σ_y , il blocco scorre, dando luogo alle deformazioni plastiche. Il termine $\sigma - \sigma_y$ è definito come **sovrappressione o overstress**.

Pertanto, la relazione tensioni-deformazioni è indipendente dal tempo e non biunivoca, cioè ad uno stesso valore della deformazione possono corrispondere valori diversi della sollecitazione:

$$\text{Eq. 2.44} \quad \langle \sigma - \sigma_y \rangle = \begin{cases} \sigma - \sigma_y & \text{per } \sigma > \sigma_y \\ 0 & \text{per } \sigma \leq \sigma_y \end{cases}$$

In questo caso, il **comportamento** si dice **rigido plastico** (Figura 2.15).

Se il materiale presenta deformazioni finite e reversibili fino al limite di snervamento (tratto elastico), oltre il quale la deformazione prosegue a tensione costante, in modo irreversibile e indefinito, fino a rottura, il **comportamento** si dice **elastico - perfettamente plastico**. È evidente che il limite di snervamento costituisce un limite per il comportamento elastico del materiale (Cestelli Guidi, 1987).

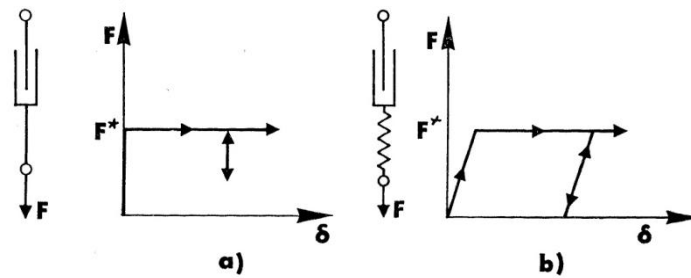


Figura 2.15. Modello e relazione tensione-deformazione del mezzo plastico: (a) rigido plastico, e (b) elasto-plastico (Cestelli Guidi, 1987).

Se, invece, la deformazione plastica progredisce aumentando o diminuendo la tensione applicata (Figura 2.16), si parla, rispettivamente, di *comportamento plastico ad incrudimento positivo (strain hardening)* o *negativo (strain softening)*.

Annullando la tensione non si ha alcun recupero della deformazione accumulata; incrementando nuovamente la tensione, il pattino rimarrà fermo nella posizione assunta sotto il carico precedente, fino a che l'intensità della tensione applicata non raggiunge il nuovo valore limite σ_y , che sarà uguale al precedente per mezzo rigido plastico, maggiore per incrudimento positivo, minore per incrudimento negativo.

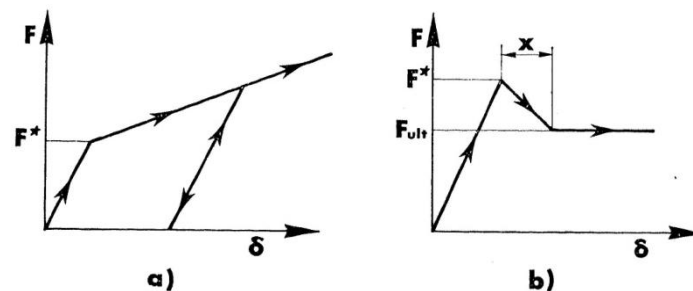


Figura 2.16. Modello elasto-plastico: (a) ad incrudimento crescente, e (b) ad incrudimento decrescente (Cestelli Guidi, 1987).

Comportamenti reologici anche molto complessi possono essere rappresentati con tali elementi accoppiati in serie oppure in parallelo:

- **in serie:** la tensione applicata è uguale per tutti gli elementi e le deformazioni sono additive;

- **in parallelo:** la velocità di deformazione è unica per il sistema, mentre la tensione applicata si distribuisce in funzione delle caratteristiche dei diversi elementi.

I più noti modelli utilizzati nella meccanica dei terreni sono:

- 1) **il modello di Maxwell;**
- 2) **il modello di Kelvin-Voigt;**
- 3) **il modello di Bingham.**

1) MODELLO DI MAXWELL

Il modello di Maxwell (1868) ipotizza che il comportamento **monodimensionale** di un solido viscoelastico possa essere descritto disponendo una **molla lineare** (elasticità) e uno **smorzatore lineare** (viscosità) **in serie** (Figura 2.17). I due elementi sono soggetti alla stessa tensione, mentre le deformazioni sono additive (Havel, 2004).

Dopo l'applicazione di una certa tensione costante, la molla elastica produce una deformazione immediata mentre per l'elemento viscoso essa è nulla. Ad un certo punto si verificherà uno scorrimento viscoso dovuto al movimento del pistone, che dà luogo a deformazioni differite nel tempo. La deformazione totale è quindi data dalla somma di due componenti, una elastica proporzionale alla tensione efficace e una viscosa:

$$\text{Eq. 2.45} \quad \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v$$

$$\text{Eq. 2.46} \quad \sigma = \sigma^e = \sigma^v$$

La relazione mostrata nell'Eq. 2.45 può essere applicata anche alle velocità di deformazione; considerando le Eq. 2.41 e Eq. 2.43 si ottiene:

$$\text{Eq. 2.47} \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^v = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

Per quanto riguarda il comportamento di *creep*, la deformazione del modello in condizioni di tensione efficace costante σ'_0 può essere determinata integrando la relazione di Eq. 2.47:

$$\text{Eq. 2.48} \quad \varepsilon(t) = \frac{\dot{\sigma}_0}{E} \cdot t + \frac{\sigma_0}{\eta} \cdot t = \varepsilon_0 + \dot{\varepsilon}^v \cdot t$$

dove ε_0 = deformazione immediata al tempo $t = 0$.

Il comportamento di *creep* secondo il modello di Maxwell, con viscosità lineare, è mostrato in Figura 2.17.

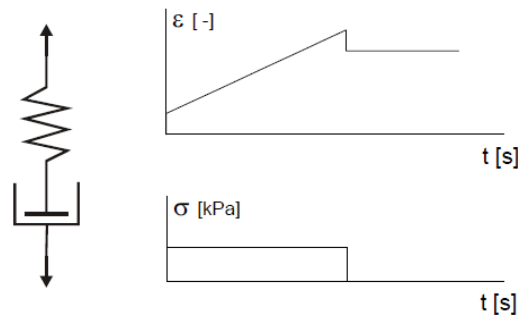


Figura 2.17. Modello reologico di Maxwell (Havel, 2004).

2) MODELLO DI KELVIN-VOIGT

In alternativa al modello viscoelastico di Maxwell, si può pensare di disporre una **molla lineare** (elasticità) e uno **smorzatore lineare** (viscosità) **in parallelo** (Figura 2.18). La deformazione è unica, mentre la tensione applicata si distribuisce tra i due elementi.

Dopo l'applicazione di un certa tensione costante, il modello si allunga quanto si allungherebbe la molla da sola, ma in un tempo estremamente lungo (la molla da sola si allungherebbe in modo istantaneo). Se ad un certo istante si toglie il carico applicato che causa la deformazione, il sistema riassume la configurazione iniziale lentamente, per effetto dello smorzatore, senza deformazioni di tipo permanente (Havel, 2004).

$$\text{Eq. 2.49} \quad \varepsilon = \varepsilon^e = \varepsilon^v$$

$$\text{Eq. 2.50} \quad \sigma = \sigma^e + \sigma^v$$

Combinando le Eq. 2.41, Eq. 2.43, Eq. 2.49 e Eq. 2.50, si ottiene la seguente equazione differenziale rappresentativa del modello:

$$\text{Eq. 2.51} \quad \sigma = E \cdot \varepsilon + \eta \cdot \dot{\varepsilon}$$

Integrando l'equazione precedente nell'ipotesi che venga applicata istantaneamente una tensione costante e che la deformazione istantanea sia nulla, si ottiene la seguente funzione di *creep*:

$$\text{Eq. 2.52} \quad \varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) \right]$$

Il comportamento di *creep* secondo il modello di Kelvin-Voigt, con viscosità lineare, è mostrato in Figura 2.18.

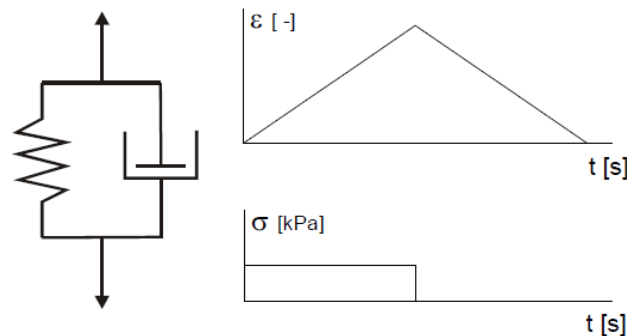


Figura 2.18. Modello reologico di Kelvin-Voigt (Havel, 2004).

3) MODELLO DI BINGHAM

Il modello viscoplastico a tre parametri di Bingham è costituito da uno **smorzatore lineare** con coefficiente di viscosità η e da un **morsetto ad attrito** con limite di tensione σ_y **in parallelo, collegati in serie ad una molla lineare** con costante di elasticità E , come mostrato in Figura 2.19.

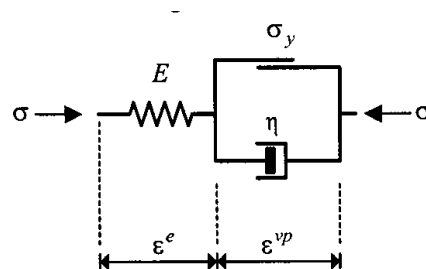


Figura 2.19. Modello reologico di Bingham (Liingaard *et al.*, 2004).

L'unità costituita dallo smorzatore e dal blocco ad attrito combinati in parallelo rappresenta l'elemento viscoplastico, dipendente dal tempo, mentre la molla lineare rappresenta l'elemento indipendente dal tempo.

Il modello manifesta una risposta puramente elastica al di sotto del limite di snervamento σ_y perchè il blocco ad attrito, e con esso l'elemento viscoplastico, sono inattivi finché $\sigma < \sigma_y$. Dopo aver superato σ_y , il modello mostra un flusso viscoso di Maxwell. Pertanto, è solo la differenza $\sigma - \sigma_y$ che dà luogo alle deformazioni viscoplastiche ϵ^{vp} (Liingaard *et al.*, 2004).

Poiché l'elemento elastico e viscoplastico sono collegati in serie, la velocità di deformazione totale $\dot{\varepsilon}$ può quindi essere scomposta in modo additivo rispetto ai due gruppi di componenti.

Il modello di Bingham può essere considerato sotto una delle seguenti ipotesi:

- (1) La tensione di snervamento σ_y è nulla e il materiale non è incrudente: in questo caso, il modello di Bingham è identico al noto modello di Maxwell, che descrive un materiale che si deforma a velocità costante, cioè per *creep* secondario.
- (2) La differenza $\sigma - \sigma_y$ è costante e il materiale non è incrudente: l'equazione costitutiva del modello di Maxwell può essere usata per descrivere un materiale che segue la legge di Bingham se la tensione imposta viene sostituita da $\sigma - \sigma_y$. In questo caso, anche la velocità di deformazione è costante.

Utilizzando la decomposizione additiva delle deformazioni e le Eq. 2.41, Eq. 2.43 e Eq. 2.44, l'equazione costitutiva per un materiale di Bingham non incrudente può essere descritto da:

$$\text{Eq. 2.53} \quad \dot{\varepsilon} = \begin{cases} \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma - \sigma_y}{\eta} & \text{per } \sigma > \sigma_y \\ \dot{\varepsilon}^e = \frac{\dot{\sigma}}{E} & \text{per } \sigma \leq \sigma_y \end{cases}$$

dove $\dot{\varepsilon}$ = velocità di deformazione totale; $\dot{\varepsilon}^e$ e $\dot{\varepsilon}^{vp}$ = velocità di deformazione negli elementi elastici e viscoplastici rispettivamente.

La parte superiore dell'Eq. 2.53 è analoga all'equazione costitutiva del modello di Maxwell, con l'unica differenza che la tensione nel modello di Maxwell viene sostituita dalla differenza $\sigma - \sigma_y$.

Come indicato nella parte inferiore dell'Eq. 2.53, l'equazione del modello di Bingham è uguale all'equazione costitutiva della molla elastica se $\sigma \leq \sigma_y$.

La modellazione del *creep*, del rilassamento e della risposta a velocità di deformazione costante è rappresentata in Figura 2.20.

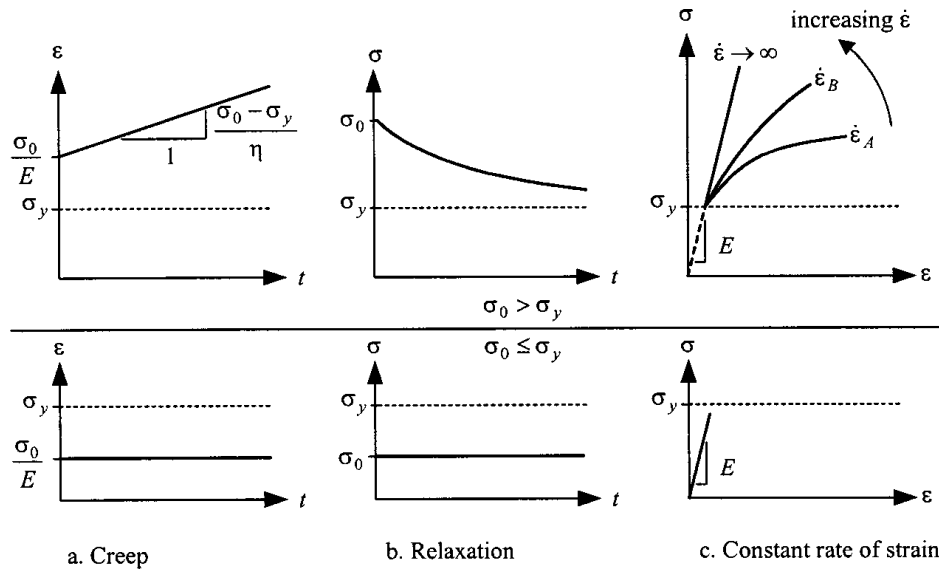


Figura 2.20. Risposta del modello di Bingham: (a) risposta al *creep*, (b) risposta al rilassamento, (c) risposta a velocità di deformazione costante. Le curve superiori corrispondono alla condizione viscoplastica in cui $\sigma > \sigma_y$, mentre le curve inferiori mostrano la risposta in campo elastico per $\sigma \leq \sigma_y$, (Liingaard *et al.*, 2004).

2.3.2 OSSERVAZIONI SULL'APPROCCIO DIFFERENZIALE

I modelli reologici sono utili dal punto di vista concettuale per distinguere le componenti elastica e plastica della deformazione, e per visualizzare il flusso viscoso che accompagna le variazioni nel tempo della struttura fino ad uno stato più stabile. Le relazioni matematiche possono essere sviluppate in modo semplice per la descrizione del *creep*, del rilassamento tensionale e della risposta a velocità di deformazione costante, in termini delle costanti del modello (Mitchell e Soga, 2005).

Pertanto, i modelli reologici non rappresentano i cambiamenti strutturali a cui è sottoposto il materiale nel processo di deformazione, ma forniscono soltanto una descrizione formale del suo comportamento fenomenologico.

Tuttavia, i modelli reologici permettono di rappresentare la relazione costitutiva in una forma grafica e flessibile, e possono essere trasformati semplicemente cambiando la posizione dei vari elementi nello schema complessivo.

Gli approcci differenziali hanno alcune limitazioni (Liingaard *et al.*, 2004).

Il modello di Maxwell rappresenta correttamente il comportamento del rilassamento, mentre è insufficiente per la previsione del *creep*; viceversa il modello di

Kelvin-Voigt raffigura ragionevolmente bene il *creep*, ma non il rilassamento. Ciò significa che i due modelli sono “complementari”. Questa considerazione è particolarmente rilevante solo quando il comportamento del materiale è viscoelastico. Nel caso in cui sia presente anche il comportamento plastico, non possono essere utilizzati né i modelli di Maxwell e di Kelvin-Voigt, né il modello di Bingham, per diverse ragioni:

- (1) Le relazioni costitutive del materiale sono troppo semplici. Si assume che la molla, lo smorzatore e il blocco ad attrito descrivano relazioni costitutive lineari. Questa ipotesi non è corretta per i terreni, che mostrano un comportamento fortemente elastico non lineare e plastico; anche l'ipotesi di viscosità lineare è inadeguata. Inoltre, i modelli reologici considerati descrivono solo o il *creep* primario o il *creep* secondario, ma i terreni possono presentare entrambe le fasi durante un processo di *creep*.
- (2) Le relazioni costitutive dei modelli reologici sono formulate per condizioni di sollecitazione e deformazione monoassiali. La generalizzazione dei modelli reologici da una a tre dimensioni è possibile, ma la calibrazione e l'applicazione pratica sembrano piuttosto difficili (Singh e Mitchell, 1968).

Nell'approccio differenziale, i modelli fanno affidamento sull'esistenza del principio di corrispondenza.

Per la caratterizzazione del comportamento tensione-deformazione-tempo del terreno sono stati proposti diversi modelli reologici che combinano o utilizzano le idee di base dei modelli di Maxwell, di Kelvin-Voigt e di Bingham. In particolare, si citano il modello di Murayama e Shibata del 1961, il modello di Christensen e Wu del 1964, e il modello di Barden del 1965 (si veda Mitchell e Soga, 2005).

2.3.3 TEORIE INGEGNERISTICHE DEL *CREEP*

Le teorie generali per la determinazione della risposta anelastica di *creep* dei solidi vengono ampiamente applicate nella meccanica del calcestruzzo, dei metalli e del ghiaccio, dove la sollecitazione è inferiore alla tensione di snervamento iniziale.

Per una rassegna completa delle teorie ingegneristiche del *creep* applicate all'acciaio e ad altri metalli, si può fare riferimento alle teorie di Rabotnov del 1969 e di

Skrzypek del 1993; mentre per quanto riguarda il terreno ghiacciato e il ghiaccio, si possono approfondire le teorie di Meschyan del 1995, di Ladanyi e Melouki del 1993, di Ladanyi e Benyamina del 1995, e di Zaretskiy e Yu del 1993 (si veda Liingaard *et al.*, 2004).

Le teorie ingegneristiche del *creep* si basano su **leggi fenomenologiche** ricavate da osservazioni sperimentali e la loro struttura matematica è per molti aspetti analoga a quella dei modelli empirici (Sezione 2.2). Tuttavia, le teorie ingegneristiche del *creep* sono concettualmente diverse dal modo tradizionale di trattare il *creep* nei terreni, perché sono valide **quando lo stato tensionale si trova al di sotto del limite di snervamento**.

Secondo Skrzypek, le teorie ingegneristiche del *creep* sono:

- (1) **il modello di deformazione totale (*total strain model*)**,
- (2) **il modello di incrudimento nel tempo (*time-hardening model*)**,
- (3) **il modello di incrudimento di deformazione (*model of strain-hardening*)**.

Le successive descrizioni si riferiscono alle **condizioni monodimensionali**.

(1) MODELLO DI DEFORMAZIONE TOTALE

Si assume che la deformazione totale monoassiale ε sia costituita da una componente immediata elastica ε^e e da una di scorrimento viscoso ε^c :

Eq. 2.54
$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^c$$

Se si considera una prova di *creep* standard in cui la tensione efficace σ' viene applicata istantaneamente, si ha che la componente di deformazione di *creep* è una funzione della tensione applicata σ' e della storia di carico. Nella relazione funzionale del modello, ci si riferisce alla storia di carico attraverso il tempo t trascorso dall'inizio del *creep* (Liingaard *et al.*, 2004).

Si ottiene così una relazione diretta tra la deformazione di *creep*, la tensione efficace e il tempo:

Eq. 2.55
$$\varepsilon^c = f(\sigma')g(t)$$

dove f e g sono funzioni. La relazione tra le deformazioni di *creep* e la tensione è spesso modellata da una funzione di potenza; pertanto le deformazioni di *creep* dipendono dalla tensione in modo non lineare, diversamente dall'approccio

differenziale. Spesso si modella anche l'influenza del tempo di carico con una legge di potenza. Comunque sono disponibili anche altri tipi di funzioni, come quelle iperboliche o esponenziali.

Si può notare che, a tensione costante, la deformazione viscosa dipende direttamente dal tempo t , perciò questo modello può essere facilmente utilizzato nella previsione del *creep*.

(2) MODELLO DI INCRUDIMENTO NEL TEMPO

Per prendere in considerazione le variazioni arbitrarie di tensione, la relazione costitutiva deve essere di natura incrementale, cioè formulata in termini di velocità di deformazione di *creep*:

$$\text{Eq. 2.56} \quad \dot{\varepsilon}^c = f(\sigma')g(t)$$

dove f e g sono funzioni non lineari. Nell'Eq. 2.56 si può individuare il tempo t come parametro di incrudimento, da cui il termine “*time-hardening*”.

Uno dei limiti di questo modello e del modello di deformazione totale è che le equazioni funzionali dipendono dall'origine del tempo, poichè t è presente in forma esplicita.

(3) MODELLO DI INCRUDIMENTO DI DEFORMAZIONE

In questo caso, il processo di incrudimento è governato dalla deformazione di *creep* (*strain-hardening*). Il modello è basato sull'accumulo di deformazioni plastiche o di lavoro.

La relazione costitutiva di incrudimento di deformazione si instaura tra la velocità di deformazione di *creep*, la deformazione di *creep* e la tensione efficace applicata:

$$\text{Eq. 2.57} \quad \dot{\varepsilon}^c = f(\sigma')g(\varepsilon^c)$$

dove f e g sono funzioni non lineari. La deformazione di *creep* caratterizza lo stato del materiale e può quindi essere vista come una variabile interna.

2.3.4 OSSERVAZIONI SULLE TEORIE INGEGNERISTICHE DEL CREEP

I modelli empirici in cui si considera il comportamento differito nel tempo dei terreni (Sezione 2.2) sono corrispondenti, dal punto di vista funzionale, ai modelli *time-hardening* e *strain-hardening* appena descritti (Liingard *et al.*, 2004); tali analogie sono riportate in Tabella 2.3.

Teoria di <i>creep</i>	Relazione costitutiva	Corrispondente modello empirico
<i>Total strain model</i>	$\varepsilon^c = f(\sigma')g(t)$	Legge logaritmica. La funzione della tensione f è costante (approccio C_a), oppure variabile con la tensione di confinamento (approccio C_s/C_a). La funzione del tempo g è una funzione logaritmica.
<i>Time-hardening model</i>	$\dot{\varepsilon}^c = f(\sigma')g(t)$	Modello di Singh e Mitchell. La funzione della tensione f è una funzione esponenziale. La funzione del tempo g è una funzione di potenza con esponente m .
<i>Model of strain-hardening</i>	$\dot{\varepsilon}^c = f(\sigma')g(\varepsilon^c)$	Approccio basato sulla velocità di deformazione. La forma generale è costituita da un'unica relazione tra tensione, deformazione e velocità di deformazione.

Tabella 2.3. Corrispondenza tra teorie ingegneristiche e modelli empirici (Liingard *et al.*, 2004).

Inoltre le teorie ingegneristiche di *creep* possono essere messe in relazione ai modelli reologici (Sezione 2.3). Per esempio, i modelli *time-hardening* e *strain-hardening* sono analoghi a modelli di Maxwell con l'elemento viscoso non lineare, caratterizzato dall'Eq. 2.56 o dall'Eq. 2.57. La relazione costitutiva del modello non lineare di Maxwell può essere formalmente scritta come:

Eq. 2.58

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^c = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\dot{\sigma}}{\eta(\sigma, t)} \quad \text{time-hardening}$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^c = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\dot{\sigma}}{\eta(\sigma, \varepsilon^c)} \quad \text{strain-hardening}$$

Si osserva che il parametro di viscosità η non è più costante, ma incrudisce con la tensione e il tempo oppure con la tensione e la deformazione.

Inoltre si può notare che le teorie ingegneristiche di *creep* si basano sull'esistenza del principio di corrispondenza e si concentrano prevalentemente sulla previsione del *creep*, tralasciando la capacità di prevedere il rilassamento o la risposta a velocità di deformazione costante. Le soluzioni dei modelli *time-hardening* sono relativamente semplici rispetto a quelle dei modelli *strain-hardening*.

2.3.5 APPROCCIO EREDITARIO

In questo approccio, noto anche come **metodo di rappresentazione integrale**, le deformazioni di *creep* variabili nel tempo sono definite da una funzione di *creep*, cioè da una funzione ereditaria (memoria) che descrive la dipendenza storica delle deformazioni.

La deformazione attuale $\varepsilon(t)$ si ricava per integrazione sull'intera storia di carico, cioè su tutte le variazioni infinitesimali di tensione fino al tempo attuale t , da cui il nome di “approccio ereditario”.

Tale teoria è stata sviluppata per due casi: un caso più semplice basato sulla viscoelasticità lineare, che è una generalizzazione dell'approccio differenziale, e un caso relativo al comportamento non lineare del materiale, che corrisponde ad una generalizzazione delle teorie ingegneristiche di *creep*.

In generale si ritiene che l'approccio ereditario è troppo complesso per trattare la meccanica dei terreni, poiché, nonostante la sua generalità, necessita di un gran numero di esperimenti per la calibrazione. Secondo Fedà (si veda Liingaard *et al.*, 2004), con la teoria ereditaria non lineare, sono necessarie 28 prove per descrivere un esperimento in condizioni di tensione monoassiale, e circa 170 prove in condizioni triassiali. Comunque può essere possibile ridurre il numero di prove per semplici condizioni al contorno.

Per approfondire lo studio dell'approccio ereditario per i terreni, si può fare riferimento ai modelli di Fedà del 1992, di Mechyan del 1995, di Rabotnov del 1969, di Skrzypek del 1993, e di Ter-Martirosyan del 1992 (si veda Liingaard *et al.*, 2004).

2.4 MODELLI GENERALI TENSIONE- DEFORMAZIONE-TEMPO

In generale si tratta di modelli **tridimensionali**, espressi spesso in forma incrementale e facilmente adattabili all'implementazione numerica all'interno di una procedura agli elementi finiti. Tali modelli sono caratterizzati da **leggi costitutive generali**, che descrivono non solo gli effetti viscosi dei terreni, ma, in linea di principio, il comportamento in qualsiasi condizione di carico possibile (*rate-independent behaviour*). Pertanto, i modelli non sono limitati alle condizioni al contorno in cui vengono calibrati (Liingaard *et al.*, 2004).

A causa della complessità degli stati tensionali, dei numerosi fattori che influenzano le proprietà di *creep* e di rilassamento di un terreno, e della difficoltà di tenere conto delle contemporanee deformazioni volumetriche e deviatoriche, risulta difficile sviluppare modelli generali che possano essere implementati nella pratica ingegneristica (Mitchell e Soga, 2005).

Particolare attenzione viene attualmente rivolta ai **modelli elasto-visco-plastici**, che combinano un comportamento elastico non viscoso e un comportamento plastico variabile nel tempo, e possono essere grossolanamente suddivisi in due categorie principali:

- (1) i modelli elastoviscoplastici basati sul **concetto di sovrappressione (teoria di overstress)**;
- (2) i modelli elastoviscoplastici basati sulla **teoria della superficie di flusso non stazionaria (nonstationary flow surface NSFS)**.

In questa Sezione vengono descritti sinteticamente i concetti fondamentali su cui generalmente si basano i numerosi modelli trattati in letteratura. Nella maggior parte dei casi, le relazioni costitutive sono complesse e richiedono la valutazione di diversi parametri che possono non essere validi per diversi stati tensionali o diversi stati del terreno (Mitchell e Soga, 2005).

Per una rassegna completa e dettagliata dei modelli elastoviscoplastici più recenti, si rimanda a Liingaard *et al.* (2004) e Mitchell e Soga (2005).

2.4.1 TEORIA DI OVERSTRESS

La versione tridimensionale di base del concetto di *overstress* è stata sviluppata nel 1966 da Perzyna (si veda Liingard *et al.*, 2004).

Una caratteristica fondamentale di questa teoria è che gli effetti viscosi sono trascurabili nella regione elastica, cioè non si verificano deformazioni viscosi all'interno della **superficie di snervamento statico** f_s (associata alla plasticità indipendente dal tempo); in altre parole, le deformazioni elastiche sono indipendenti dal tempo, mentre le deformazioni non elastiche dipendono dal tempo.

Pertanto la velocità di deformazione totale è costituita da due componenti:

$$\text{Eq. 2.59} \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}$$

dove $\dot{\varepsilon}_{ij}$ denota la componente (i, j) del tensore della velocità di deformazione totale e gli apici e e vp rappresentano le componenti elastica e anelastica, rispettivamente. Nella teoria di elasto-visco-plasticità, la velocità di deformazione anelastica rappresenta gli effetti viscosi e plastici.

Si assume che la velocità di deformazione elastica $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ dell'Eq. 2.59 obbedisca alla legge generalizzata di Hooke, mentre la velocità di deformazione viscoplastica $\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}$ obbedisce alla seguente **legge di flusso non associata**:

$$\text{Eq. 2.60} \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \gamma \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{ij}}$$

dove γ = parametro di fluidità; $\langle \rangle$ = parentesi di MacCauley; ϕ = nucleo viscoso; F = funzione di *overstress*; g = potenziale plastico e σ'_{ij} = stato tensionale efficace.

La funzione di *overstress* F può essere espressa come:

$$\text{Eq. 2.61} \quad F(\sigma'_{ij}, W^{vp}) = \frac{f_d(\sigma'_{ij}, W^{vp})}{\kappa_s(W^{vp})} - 1 \quad \text{dove} \quad \kappa_s = \kappa_s \left(\int_0^{\varepsilon_{ij}^{vp}} \sigma'_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} \right)$$

Nell'equazione precedente la funzione f_d , che dipende dallo stato tensionale e dal lavoro viscoplastico W^{vp} , descrive la **superficie di snervamento dinamico** sulla quale si trova lo stato di sforzo attuale P , come mostrato in Figura 2.21. κ_s è il parametro di incrudimento del materiale.

In particolare si ha che $F = 0$ quando $f_d(\sigma'_{ij}, W^{vp}) = \kappa_s(W^{vp})$, quindi si può dedurre che κ_s deve essere un'espressione della superficie di snervamento statica f_s .

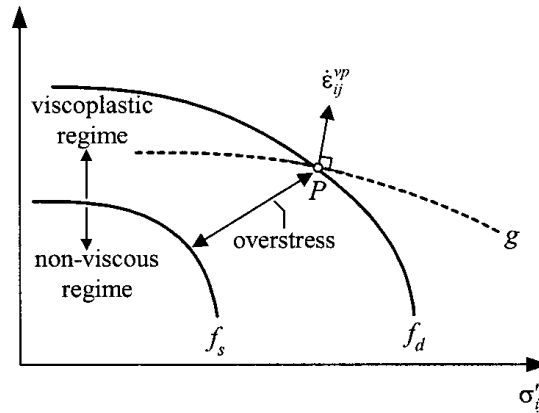


Figura 2.21. Rappresentazione del concetto di *overstress* di Perzyna (Liingaard *et al.*, 2004).

Diversamente dall'elastoplasticità generale, nella teoria di *overstress* **non vale la condizione di consistenza**; infatti le deformazioni anelastiche non dipendono dalla storia tensionale, ma solo dallo stato di tensione attuale.

La sovrappressione F viene definita come la distanza tra lo stato tensionale P e la superficie di snervamento statico f_s , come mostrato in Figura 2.21. Pertanto, lo stato tensionale può essere al di sopra ($F = 0$), all'interno ($F < 0$) o all'esterno ($F > 0$) della superficie di snervamento statico f_s .

Inoltre, le parentesi di MacCauley nell'Eq. 2.60 assicurano che le deformazioni viscoplastiche si verifichino durante il caricamento da uno stato plastico e che, in tutti gli altri casi, le deformazioni viscoplastiche siano nulle (Liingaard *et al.*, 2004). Pertanto, il nucleo viscoso è una funzione scalare (Havel, 2004), definita come di seguito:

$$\text{Eq. 2.62} \quad \langle \phi(F) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{per } F \leq 0 \\ \phi(F) & \text{per } F > 0 \end{cases}$$

e rappresenta il criterio di carico per le deformazioni anelastiche (per ulteriori dettagli si veda Liingaard *et al.*, 2004).

Inoltre, la direzione di $\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$ nell'Eq. 2.60 è normale alla superficie del potenziale g nel punto P , come mostrato in Figura 2.21, mentre l'intensità di $\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$ dipende da γ e dal nucleo viscoso $\langle \phi(F) \rangle$.

2.4.2 OSSERVAZIONI SULLA TEORIA DI *OVERSTRESS*

Si considera un processo di *creep* avviato da uno stato tensionale che si colloca al di fuori della superficie di snervamento statico:

- Imponendo uno stato di tensione costante tale che $F > 0$, si verifica un flusso viscoplastico, che continua a velocità costante nel caso in cui f_s sia una superficie di snervamento perfettamente plastica non incrudente, cioè se la distanza tra f_s e f_d è costante nel tempo (Figura 2.22a).
- Se invece f_s è una funzione di snervamento incrudente, il flusso viscoplastico si verifica ad una velocità decrescente, perché, mentre la deformazione viscoplastica e il conseguente lavoro viscoplastico W^{vp} si accumulano, la superficie di snervamento statico f_s cambia in modo tale che $F \rightarrow 0$, perciò si ha $\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \rightarrow 0$; infatti la distanza tra f_s e f_d si riduce nel tempo e al diminuire della velocità (Figura 2.22b). In altri termini, la superficie di snervamento statico si muove nel tempo, e infine al tempo $t = \infty$ coincide con la superficie di snervamento dinamico f_d . Una volta che la nuova superficie di snervamento statico si è stabilizzata, $\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = 0$.

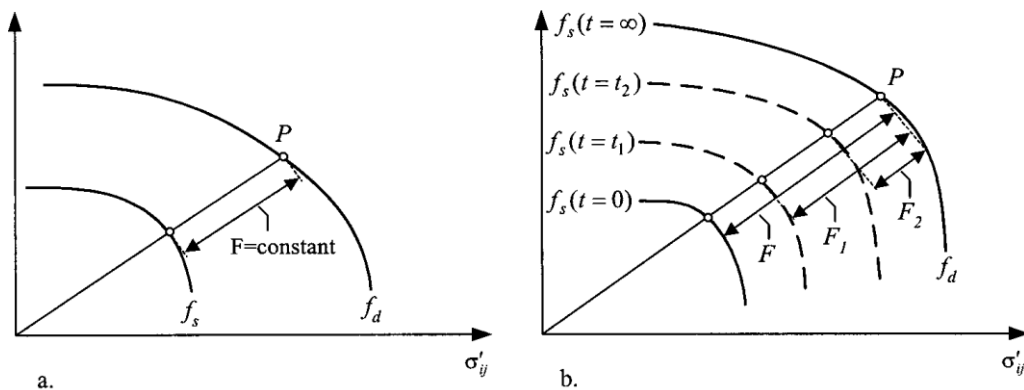


Figura 2.22. Applicazione del concetto di *overstress*: (a) processo di *creep* per materiale non incrudente, e (b) processo di *creep* per materiale incrudente (Liingaard *et al.*, 2004).

Si considera ora un processo di *creep* avviato da uno stato di tensione, che si trova all'interno di f_s ($F < 0$). In questo caso, secondo le Eq. 2.60 e Eq. 2.62, non si

verificano deformazioni viscoplastiche, ma dal punto di vista fisico questo comportamento non è corretto perchè la natura delle deformazioni di *creep* è simile a quella delle deformazioni plastiche.

Un limite evidente della teoria di *overstress* è che non è possibile descrivere il processo di accelerazione del *creep* (*creep* terziario).

È interessante osservare che la teoria di *overstress* di Perzyna è una generalizzazione tridimensionale del modello reologico di Bingham, trattato nella Sezione 2.3. Per semplicità, si analizza il caso di plasticità non incrudente (Liingaard *et al.*, 2004). Le relazioni costitutive per un materiale di Bingham sono date dall'Eq. 2.62, mentre per un materiale che si basa sulla teoria di *overstress* dalla combinazione delle Eq. 2.59, Eq. 2.60, Eq. 2.62 e della legge generalizzata di Hooke:

$$\text{Eq. 2.63} \quad \dot{\varepsilon} = \begin{cases} \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^{vp} = C_{ijkl} \dot{\sigma}'_{ij} + \gamma \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{ij}} & \text{per } \sigma'_{ij} > f(\sigma'_{ij}) \\ \dot{\varepsilon}^e = C_{ijkl} \dot{\sigma}'_{ij} & \text{per } \sigma'_{ij} \leq f(\sigma'_{ij}) \end{cases}$$

Mettendo a confronto le Eq. 2.53 e Eq. 2.63, si può notare la corrispondenza tra la matrice elastica C_{ijkl} e il modulo elastico E . Nell'Eq. 2.53 viene omissso il termine legato alla direzione della velocità di deformazione viscoplastica $\partial g / \partial \sigma'_{ij}$ perché il modello di Bingham è valido solo nel caso 1D. La funzione di *overstress* F rappresenta la tensione in eccesso rispetto a quella di snervamento, cioè equivale a $\sigma' - \sigma'_y$.

2.4.3 TEORIA DELLA SUPERFICIE DI FLUSSO NON STAZIONARIA

La teoria NSFS (*nonstationary flow surface theory*) è stata introdotta nel 1963 da Naghdi e Murch e successivamente sviluppata da Olszak e Perzyna, Sekiguchi e Satake, partendo dai concetti di base dell'elastoplasticità classica (non viscosa). Pertanto risulta particolarmente interessante evidenziare le differenze tra queste due teorie (Liingaard *et al.*, 2004).

La principale differenza consiste nella definizione della **condizione di snervamento** (Figura 2.23):

- Secondo l'elastoplasticità classica, la condizione di snervamento per un materiale isotropo incrudente è data da:

Eq. 2.64
$$f(\sigma'_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = 0$$

dove σ'_{ij} = stato tensionale efficace e ε_{ij}^p = deformazioni plastiche, e non cambia nel tempo quando le deformazioni plastiche vengono mantenute costanti. In questo senso, si parla di superficie di plasticizzazione “stazionaria”. In altre parole, per un materiale elastoplastico, per un dato percorso di carico, la superficie di snervamento corrispondente ad una data deformazione viscoplastica viene raggiunta nello stesso punto (ad esempio A in Figura 2.23) indipendentemente dal tempo.

- Secondo la teoria NSFS, invece, la condizione di snervamento cambia ad ogni istante, anche se le deformazioni viscoplastiche sono mantenute costanti:

Eq. 2.65
$$f(\sigma'_{ij}, \varepsilon_{ij}^{vp}, \beta) = 0$$

dove ε_{ij}^{vp} = deformazioni viscoplastiche e β = funzione dipendente dal tempo. In questo senso, si parla di superficie di flusso “non stazionaria”. Per un materiale elastoviscoplastico, la superficie di snervamento corrispondente ad una data deformazione viscoplastica viene raggiunta in punti diversi nel tempo (A, A₁ o A₂ in Figura 2.23).

Tutti gli stati tensionali possibili si trovano all'interno ($f < 0$) o al di sopra ($f = 0$) della superficie di flusso definita dall'Eq. 2.65 nello spazio delle tensioni. Se $f < 0$, si verificano solo deformazioni elastiche. Se $f = 0$ e si considera una condizione di carico, si verificano deformazioni sia elastiche che viscoplastiche.

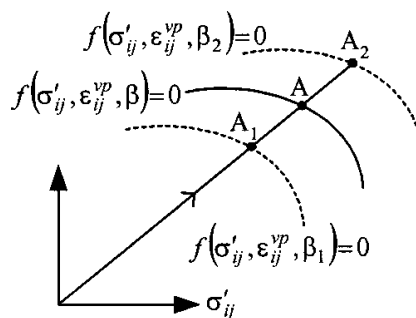


Figura 2.23. Rappresentazione della condizione di snervamento definita nell'elastoplasticità classica e nella teoria NSFS (Liingaard *et al.*, 2004).

Come nella teoria di *overstress*, la velocità di deformazione totale $\dot{\varepsilon}$ può essere scomposta in una parte elastica $\dot{\varepsilon}^e$, definita dalla legge generalizzata di Hooke, e una viscoplastica $\dot{\varepsilon}^{vp}$, definita dalla legge di flusso:

$$\text{Eq. 2.66} \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \langle \Lambda \rangle \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{ij}}$$

dove Λ = moltiplicatore non negativo e g = potenziale viscoplastico. Il moltiplicatore Λ può essere espresso come la somma di due contributi Λ_1 e Λ_2 :

$$\text{Eq. 2.67} \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} \dot{\sigma}'_{ij}}{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{kl}^{vp}} \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{ij}}} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \beta} \dot{\beta}}{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{kl}^{vp}} \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{ij}}}$$

Il parametro Λ_1 coincide con il moltiplicatore plastico λ definito nell'elastoplasticità classica. Pertanto, si può osservare che l'unica differenza tra il moltiplicatore plastico λ e il moltiplicatore viscoplastico Λ è data dalla presenza del termine $\dot{\beta}(\partial f / \partial \beta)$, grazie al quale si verificano deformazioni elastoviscoplastiche anche se le tensioni sono mantenute costanti (processo di *creep*).

Per approfondire la teoria della superficie di flusso non stazionaria si può fare riferimento a Liingaard *et al.*, 2004.

2.4.4 OSSERVAZIONI SULLA TEORIA DELLA SUPERFICIE DI FLUSSO NON STAZIONARIA

Si considera un processo di *creep* avviato da uno stato di tensione che si trova all'interno della superficie di snervamento. In questo caso, con la teoria NSF, non è possibile prevedere eventuali deformazioni anelastiche, e quindi neanche descrivere in modo soddisfacente un processo di *creep*.

Si considera un processo di *creep* avviato da uno stato tensionale Q che, in un dato istante t , si colloca sulla superficie di snervamento f , come illustrato in Figura 2.24. In questo caso la teoria è in grado di prevedere le deformazioni viscoplastiche di *creep*, che si verificano a tensione costante, facendo espandere la superficie di snervamento nel tempo come indicato dall'Eq. 2.65. Ciò significa che ad un tempo successivo t_1 lo stato

tensionale costante imposto Q si trova all'interno della nuova superficie di snervamento f_1 , come illustrato in Figura 2.24. Le deformazioni viscoplastiche $\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}$ si verificano secondo le Eq. 2.66 e Eq. 2.67, dove scompare il termine che include la velocità di variazione dello stato tensionale $\dot{\sigma}'_{ij}$.

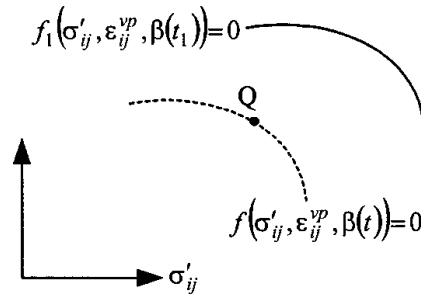


Figura 2.24. Processo di *creep* avviato da uno stato tensionale Q che al tempo t si trova sulla superficie di snervamento f (Liingaard *et al.*, 2004).

2.5 MICROREOLOGIA

In generale, come trattato finora, i terreni vengono studiati da un punto di vista macroscopico, cioè vengono considerati come un'unica massa omogenea, il cui comportamento viene descritto in termini di variabili macroscopiche come tensione, deformazione e tempo. Tuttavia, per comprendere meglio la risposta macroscopica è necessario approfondire anche i fenomeni che riguardano la reale struttura del materiale dal punto di vista chimico-fisico, cioè a livello microscopico. In questo caso si parla di modelli basati sulla **micromeccanica**.

Per descrivere correttamente il comportamento di *creep* dei terreni coesivi, i modelli costitutivi presenti in letteratura, come ad esempio quello di Vyalov del 1986 e quello di Mitchell *et al.* del 1968, cercano di tenere conto del possibile danneggiamento della struttura del terreno durante la deformazione.

In Figura 2.25 sono riportate due possibili curve di *creep* deformazione-tempo, sulle quali è possibile individuare le ben note fasi di *creep* (*creep* primario, *creep* secondario e *creep* terziario); inoltre, sono schematicamente rappresentate le variazioni che avvengono nella microstruttura del terreno a vari stadi di deformazione di *creep*,

secondo la legge di danno di Vyalov formulata per i terreni coesivi (si veda Kim, 2004).

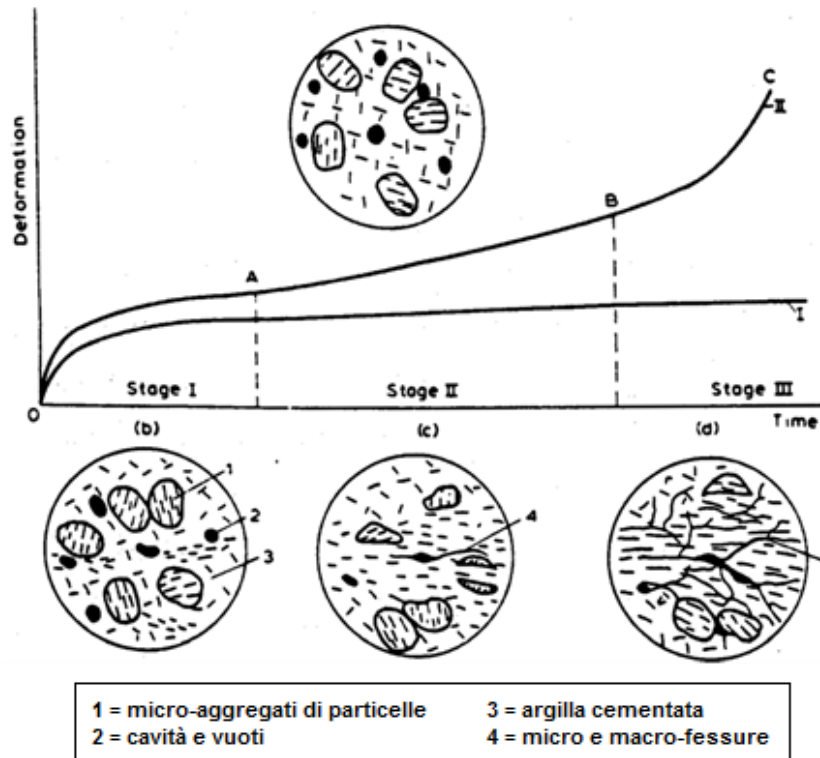


Figura 2.25. Curve di *creep* deformazione-tempo e variazioni microscopiche della struttura del terreno (Kim, 2004).

In generale, i terreni sono costituiti da particelle solide assemblate in modo casuale e da vuoti riempiti con acqua e aria.

Ogni particella è legata a quelle adiacenti da almeno due legami; quando c'è un solo legame, si parla di “discontinuità o disturbo” dello scheletro del terreno. Tale perturbazione avviene quando la distanza tra le particelle è maggiore delle forze di Van der Waals. Qualsiasi punto di disturbo o discontinuità dei legami nello scheletro del terreno viene definito “difetto”. Sulla base di questa definizione, i vuoti contenenti acqua libera non vengono considerati come difetti (Kim, 2004).

Nei terreni argillosi, i difetti strutturali si manifestano sotto forma di microcavità, vuoti, microfessure o fratture, e vengono considerati come i fattori principali che causano la rottura per *creep*. Comunque, tra questi fattori, le microfessure hanno l'effetto più rilevante.

L'indagine sperimentale di Vyalov ha rivelato che, durante la fase di *creep* primario, le microfessure tendono a chiudersi, mentre le cavità e i vuoti si contraggono ed espandono nella direzione di taglio, portando alla compattazione del terreno e alla formazione di nuovi legami interparticellari. Di conseguenza, durante il *creep* primario la deformazione si attenua nel tempo.

Durante la fase di *creep* secondario, le microfessure si propagano e aumentano di numero, e le particelle tendono a orientarsi nella direzione di taglio. Pertanto, vi è un continua “**rigenerazione**” dei difetti, ma per effetto delle microfessure si forma un nuovo disturbo strutturale.

In seguito, mentre la deformazione progredisce, all'inizio della fase di *creep* terziario si verifica un'intensa propagazione delle microfessure, che vanno infine a formare grandi fessure, provocando la rottura del campione.

Sulla base di osservazione al microscopio, si può concludere che ci sono due fenomeni responsabili della risposta di *creep* del terreno, cioè l'incrudimento (*hardening*) e il rammollimento (*softening*) del terreno:

- **Se prevale l'incrudimento**, la deformazione si attenua nel tempo e la curva di risposta del terreno possiede solo le fasi di *creep* primario e di *creep* secondario. Il processo di incrudimento è associato al ***creep* volumetrico**, che conduce ad una condizione più stabile della struttura del terreno.
- **Se invece prevale il rammollimento**, ad un certo punto la velocità di deformazione accelera rapidamente, dando luogo alla fase di *creep* terziario, che termina nella rottura. Tale processo è associato al ***creep* deviatorico**.

Il diverso comportamento del terreno sotto carico costante dipende dai cambiamenti strutturali, che a loro volta sono influenzati dall'intensità del carico applicato. Infatti, quando il terreno viene caricato, la concentrazione della tensione rompe alcuni dei legami interparticellari nei punti più deboli della struttura, portando le particelle a muoversi in posizioni più stabili. Si formano quindi nuovi legami, e il numero e le dimensioni dei difetti strutturali si riducono. Questo processo porta a una riduzione complessiva del volume del terreno, che di conseguenza incrudisce. Tuttavia, la “rigenerazione” dei difetti strutturali è associata a nuovi disturbi nel terreno che indeboliscono i legami strutturali.

La risposta finale e complessiva dipende dal livello di carico applicato (Kim, 2004):

- Se il carico è basso, il numero dei nuovi legami e dei difetti “rigenerati” è maggiore del numero di legami rotti e dei successivi difetti, quindi prevale il processo di incrudimento, e la deformazione di *creep* si attenua (***creep primario***).
- Per carichi moderatamente elevati, il fenomeno di incrudimento del terreno si verifica solo nella fase di *creep* primario dove l'indebolimento dei legami è compensato da un rafforzamento della struttura. Col progredire del *creep*, il numero di legami rotti continua ad aumentare e la resistenza del terreno al carico applicato si deteriora rapidamente. Così il terreno rammollisce. Tuttavia, dopo un certo periodo di tempo, il rammollimento è compensato da un incrudimento, e il *creep* raggiunge una fase stazionaria in cui la velocità è approssimativamente costante (***creep secondario***).
- Infine, quando il carico applicato è elevato, il danno strutturale accumulato durante il corso della deformazione è talmente grande che porta a un indebolimento della struttura (*softening*). Di conseguenza, la velocità di deformazione aumenta bruscamente, segnando l'inizio del ***creep terziario***.

È evidente che l'accelerazione delle deformazioni durante la fase terziaria è una manifestazione macroscopica di un **degrado microscopico** del materiale.

Si può quindi concludere che, dal punto di vista microscopico, la riorganizzazione della struttura del terreno si verifica in modo irregolare nel tempo e, secondo Ter-Stepanian (si veda Mitchell e Soga, 2005), è possibile individuare quattro principali livelli di deformazione:

- 1) **deformazioni a livello molecolare**, costituite dagli spostamenti delle “unità di flusso” (cioè atomi, molecole e/o particelle che partecipano al processo viscoso);
- 2) spostamenti reciproci delle particelle dovuti alla **rottura dei legami**, ma senza riarrangiamento delle particelle;
- 3) deformazioni a livello strutturale del terreno, che comportano una **riorganizzazione delle particelle in configurazioni più stabili** (riarrangiamento delle particelle, che si muovono le une rispetto alle altre);
- 4) deformazioni a livello dell'aggregato nel caso di terreni granulari, dovute alla **rottura delle particelle**.

I modelli che tentano di descrivere i meccanismi microscopici di scorrimento delle particelle (e in particolare i livelli di deformazione 1 e 2) si basano sulla cosiddetta “*rate process theory*” formulata da Mitchell *et al.* (1968) e successivamente studiata da diversi autori; per approfondire la trattazione dal punto di vista fisico-chimico si può fare riferimento a Mitchell e Soga (2005).

2.6 BIBLIOGRAFIA

1. Augustesen A., Liingaard M., Lade P. V. (2004). *Evaluation of Time-Dependent Behavior of Soils*, International Journal of Geomechanics, ASCE, Vol. 4(3), p. 137-156.
2. Bjerrum L. (1967). *Engineering geology of Norwegian normally consolidated marine clays as related to the settlements of buildings*. Geotechnique, Vol. 17(2), p. 83–119.
3. Campanella R. G., e Vaid Y. P. (1972). *Creep rupture of a natural saturated clay*. Proceedings of the Sixth International Conference on Rheology, Soil Mechanics Series No. 16, University of British Columbia, Vancouver, Canada.
4. Campanella R. G., e Vaid Y. P. (1974). *Triaxial and plane strain creep rupture of an undisturbed clay*. Canadian Geotechnical Journal, 11(1), p. 1-10.
5. Carrubba P., e Del Fabbro M. (2006). *Resistenza residua alla riattivazione del flysch di Cormons*. Rivista Italiana di Geotecnica, Vol. 1, p. 28–52.
6. Clarke S. D. (2009). *Enhancement of the BRICK constitutive model to incorporate viscous soil behavior*. Thesis PhD submitted to The University of Sheffield, Department of Civil and Structural Engineering, England.
7. Havel F. (2004). *Creep in soft soils*. Doctoral thesis for the degree of doktor ingeniør, Norwegian University of Science and Technology, Department of Civil and Transport Engineering, Trondheim, Norway.
8. Hunter G. J., e Khalili N. (2000). *A simple criterion for creep induced failure of over-consolidated clays*. Pro. GeoEng 2000 Conference.

9. Karstunen M., Yin Z.Y., Koskinen M., Leoni M., e Vermeer P.A. (2008). *Some Recent Developments in Constitutive Modelling of Soft Clays*. The 12th international conference of international association for computer methods and advances in geomechanics (IACMAG), Goa, India.
10. Kavazanjian E., e Mitchell J. K. (1977). *A general stress–strain–time formulation for soils*. Proceedings of 9th ICSMFE, p. 113–120.
11. Kim D. K. (2004). *A constitutive model with damage for cohesive soils*. KSCE Journal of Civil Engineering, Vol. 8(5), p. 513-519.
12. Kuhn M. R., e Mitchell J. K. (1993). *New perspectives on soil creep*. Journal of Geotechnical Engineering, Vol. 119(3), p. 507-524.
13. Leoni M., Karstunen M., e Vermeer P. A. (2008). *Anisotropic creep model for soft soils*. Geotechnique, Vol. 58(3), p. 215–226.
14. Liingaard M., Augustesen A., e Lade P. V. (2004). *Characterization of Models for Time-Dependent Behavior of Soils*. International journal of geomechanics, ASCE, Vol. 4(3), p. 157–177.
15. Mitchell J. K., e Soga K. (2005). *Fundamentals of soil behavior*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken.
16. Mitchell J.K., Campanella R. G., e Singh A. (1968). *Soil creep as a rate process*. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 94 (1), p. 231-253.
17. Nova R. (2002). *Fondamenti di meccanica delle terre*. McGraw-Hill Italia.
18. Rinaldi G. (2002). *Materiali per l'Ingegneria*. Roma: Ed. Siderea. p. 214-220.
19. Saito M. (1965). *Forecasting the time of occurrence of a slope failure*. Proceedings of the Sixth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Montreal, Canada, Vol. 2, p. 537-541.
20. Singh A., e Mitchell J. K. (1968). *General stress-strain-time function for soils*. J. Soil Mech. Found. Div., Vol. 94(1), p. 21–46.
21. Singh A., e Mitchell J. K. (1969). *Creep potential and creep rupture of soils*. Proceedingd of the Seventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Mexico City, Vol. 1, p. 379–384.
22. Stolle D. F. E., Vermeer P. A., e Bonnier P. G. (1999). *A consolidation model for a creeping clay*. Canadian Geotechnical Journal, Vol. 36(4), p. 754-759.

23. Tavenas F., Leroueil S., La Rochelle P., e Roy M. (1978). *Creep behavior of an undisturbed lightly overconsolidated clay*. Canadian Geotechnical Journal, Vol. 15(3), p. 402–423.
24. Vermeer P. A., e Neher H. P. (1999), *A soft soil model that accounts for creep*. Beyond 2000 in Computational Geotechnics - 10 years of PLAXIS, Balkema, Rotterdam, p. 1-13.
25. Wheeler S. J., Naatanen A., Karstunen M., e Lojander M. (2003). *An anisotropic elastoplastic model for soft clays*. Canadian Geotechnical Journal, Vol. 40(2), p.403-418.
26. Wheeler S. J., Cudny M., Neher H. P., e Wiltafsky C. (2003). *Some developments in constitutive modelling of soft clays*. International workshop on geotechnics of soft soils-theory and practice, Vermeer, Schweiger, Karstunen & Cudny (eds.).
27. Yin J.-H., e Graham J. (1999). *Elastic viscoplastic modelling of the time dependent stress-strain behaviour of soils*. Canadian Geotechnical Journal, Vol. 36(4), p. 736-745.

CAPITOLO 3

ANALISI DI STABILITÀ DELLE TORRI

3.1 INTRODUZIONE

Il panorama di molti centri storici italiani è dominato da innumerevoli torri e campanili antichi, che con il loro fascino sono diventati l'elemento identificativo della città che li ospita, come ad esempio nei casi di Pisa, Bologna, Modena e Venezia.

In Figura 3.1 è riportata una classificazione delle caratteristiche geometriche di alcune tra le torri più affascinanti in Italia, realizzata da Willis nel 1835.

Si può notare che tali caratteristiche sono comuni a quasi tutte le torri considerate. Infatti, fatta eccezione per la Torre di Pisa, che è straordinariamente tozza (rapporto altezza/base = 3), e per la Torre degli Asinelli, che è molto snella (rapporto = 12), per la maggior parte delle altre torri il rapporto tra le dimensioni della struttura è compreso tra 6 e 8, come se esistesse una regola architettonica spesso rispettata.

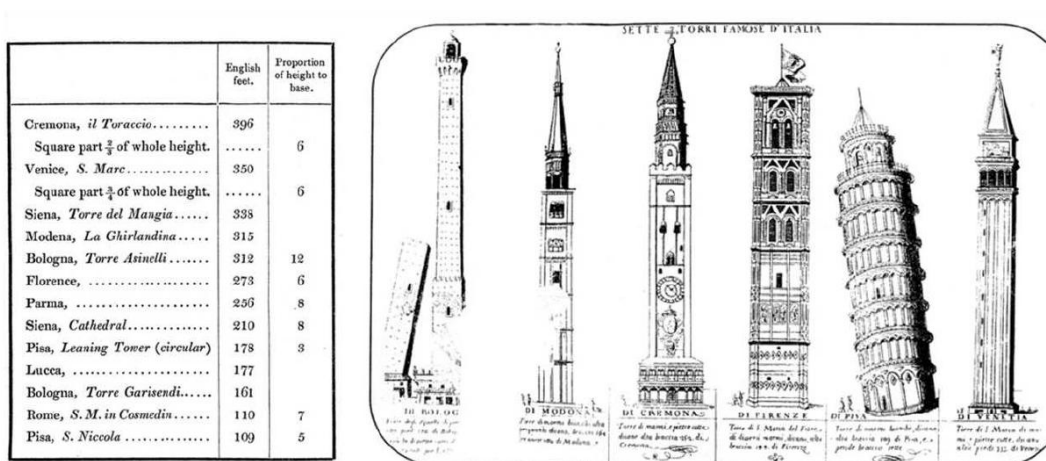


Figura 3.1. Dimensioni di alcune importanti torri italiane, e confronto grafico tra sette di esse (Marchi *et al.*, 2011).

Pertanto il tema della conservazione di queste strutture nel patrimonio artistico del nostro paese assume un'enorme importanza. Molte torri storiche sono infatti afflitte da

complessi problemi legati all'interazione con il terreno, talora non immediatamente decifrabili, che ne regolano i movimenti ed evolvono nel tempo in modo significativo. In particolare, i principali meccanismi di rottura che possono interessare il sistema terreno-fondazione (Marchi *et al*, 2011) sono legati a due tipi di problemi:

- la **capacità portante**, condizionata dalla **resistenza** del terreno di fondazione,
- e la **stabilità dell'equilibrio**, influenzata invece dalla **rigidezza** del terreno.

Chiaramente, altri problemi di natura strutturale, che esulano dalle finalità di questi capitoli, possono mettere in crisi l'apparato murario, come testimoniano le rovinose vicende del Campanile di San Marco a Venezia e della Torre Civica di Pavia.

Durante le fasi di edificazione, molte torri hanno superato momenti di criticità ogni volta che il carico unitario trasmesso al terreno di fondazione risultava prossimo alla capacità portante del sistema fondazione-terreno. Comunque, a causa della maggiore lentezza con cui si usava costruire in passato e delle interruzioni, anche non programmate, che spesso avvenivano prima che le strutture venissero ultimate, il terreno poteva consolidarsi sotto i carichi applicati, incrementando le sue caratteristiche meccaniche e la possibilità quindi di resistere agli ulteriori incrementi di sollecitazione prodotti dalle successive fasi di costruzione della struttura. Queste circostanze fortunate hanno così garantito la sopravvivenza di diverse torri attraverso i secoli.

Tuttavia, pur avendo inizialmente superato il problema della capacità portante, l'incremento progressivo della pendenza della torre, dovuto alla presenza di cedimenti differenziali in fondazione, genera stati di sollecitazione sempre più gravosi, che, associati alla bassa rigidezza del sistema terreno-fondazione, possono comunque mettere in crisi la fondazione nel lungo periodo.

Infatti il terreno, se sottoposto ad un carico costante, è interessato da deformazioni differite nel tempo che possono essere anche di notevole entità. Questo fenomeno, noto con il nome di *creep*, associato ad imperfezioni strutturali o irregolarità del terreno di fondazione o della struttura in elevazione, può dar luogo ad una **progressiva perdita di verticalità della struttura**, con tutti i problemi che ne conseguono.

Indubbiamente, la valutazione della sicurezza e la previsione del comportamento delle strutture a torre, in relazione alla principali problematiche geotecniche che le riguardano, rappresenta da sempre una sfida affascinante ed allo stesso tempo piena di incertezze per tutti gli addetti ai lavori.

Di recente la ricerca si è concentrata sullo sviluppo e sull'implementazione di specifici modelli avanzati, basati sull'applicazione del concetto di **macroelemento** al sistema complessivo terreno-struttura (Marchi *et al.*, 2008). Tali modelli consentono di tenere conto della risposta altamente non lineare e di natura tipicamente elasto-plastica incoerente dei terreni di fondazione.

Nei seguenti paragrafi, i meccanismi di collasso tipici delle fondazioni delle torri vengono prima trattati separatamente, poi descritti all'interno di un unico *framework* concettuale, basato sull'utilizzo dei modelli elasto-plastici incoerenti sviluppati per le fondazioni superficiali.

3.2 COLLASSO PER CAPACITÀ PORTANTE DELLE FONDAZIONI SUPERFICIALI

3.2.1 TEORIE TRADIZIONALI PER IL CALCOLO DELLA CAPACITÀ PORTANTE

La formulazione più utilizzata per stimare la capacità portante q_{ult} (o carico di rottura) di una fondazione superficiale è stata originariamente sviluppata da **Terzaghi** nel 1943, utilizzando il metodo dell'equilibrio limite:

Eq. 3.1
$$q_{ult} = cN_c + qN_q + \frac{1}{2}B\gamma N_\gamma$$

dove c = coesione operativa del terreno, γ = peso del terreno, d = profondità del piano di fondazione, $q = \gamma d$ = eventuale pressione di sovraccarico, B = larghezza della fondazione, N_c, N_q, N_γ = fattori di capacità portante.

La soluzione riguarda il caso ideale di fondazione superficiale soggetta a carico verticale centrato, su suolo omogeneo, con piano di fondazione e piano campagna orizzontali (Figura 3.2). Inoltre, si suppone che al di sopra del livello di fondazione il

terreno abbia resistenza al taglio trascurabile e che la superficie di contatto tra terreno e fondazione sia ruvida (Colombo e Colleselli, 2004).

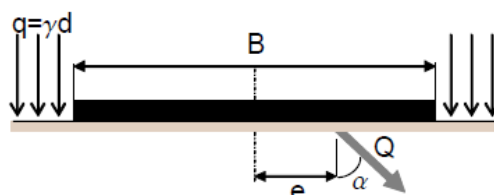


Figura 3.2. Schema di una fondazione superficiale soggetta a carico eccentrico e inclinato (Marchi, 2008).

In generale nella pratica non si verificano casi così semplici, quindi si utilizza l'espressione più generale di **Brinch-Hansen**, che adopera fattori correttivi relativi a casi particolari (inclinazione del carico, forma della fondazione, inclinazione del piano di fondazione e del piano campagna). Tale formulazione, ottenuta dalla sovrapposizione lineare degli effetti, descrive le condizioni più generali del sistema:

$$\text{Eq. 3.2} \quad q_{ult} = cN_c s_c d_c i_c b_c g_c + qN_q s_q d_q i_q b_q g_q + \frac{1}{2} B \gamma N_\gamma s_\gamma i_\gamma b_\gamma g_\gamma$$

dove s_c, s_q, s_γ = fattori di forma della fondazione; d_c, d_q = fattori dipendenti dalla profondità del piano di posa; i_c, i_q, i_γ = fattori correttivi che tengono conto dell'inclinazione del carico; b_c, b_q, b_γ = fattori correttivi per l'inclinazione della base della fondazione; g_c, g_q, g_γ = fattori correttivi per l'inclinazione del piano campagna.

Per le fondazioni con carico eccentrico, **Meyerhof** ha proposto di attribuire alla fondazione una larghezza fittizia, centrata sul carico e pari a $B' = B - 2e$, dove e è l'eccentricità del carico (Figura 3.2). In questo modo la capacità portante viene ridotta in modo tale che il baricentro della "zona efficace" della fondazione coincida con il carico verticale applicato. L'espressione generale diventa quindi:

$$\text{Eq. 3.3} \quad q_{ult} = cN_c s_c d_c i_c b_c g_c + qN_q s_q d_q i_q b_q g_q + \frac{1}{2} B' \gamma N_\gamma s_\gamma i_\gamma b_\gamma g_\gamma$$

Queste formulazioni vengono generalmente utilizzate come procedure progettuali, in quanto forniscono, nella maggior parte dei casi, stime soddisfacenti della capacità portante. Tuttavia, nel caso di fondazioni superficiali su materiale granulare, la formulazione dipende da molti coefficienti empirici che non danno alcuna indicazione

al progettista sulla validità della previsione. Inoltre, queste espressioni, basate sulla sovrapposizione lineare, trattano in realtà un problema fortemente non lineare (Butterfield e Gottardi, 1993).

Partendo da queste considerazioni, le ricerche degli ultimi decenni, nate con l'introduzione dei diagrammi di interazione, hanno portato a sviluppare un approccio alternativo più affidabile, come descritto nei paragrafi seguenti.

3.2.2 DIAGRAMMI DI INTERAZIONE

Nel caso piano, la risultante di un carico Q applicato ad una fondazione superficiale, caratterizzata da un angolo di inclinazione α rispetto alla verticale e da un'eccentricità e rispetto al baricentro della fondazione stessa, può essere scomposta nelle sue componenti staticamente equivalenti (Figura 3.3), cioè dalla componente verticale V , dalla componente orizzontale H e dal momento M :

$$\text{Eq. 3.4} \quad V = Q \cos \alpha \quad H = Q \sin \alpha \quad M = Q e \cos \alpha$$

Nel 1978 una serie di studi sperimentali condotti da Butterfield ha portato allo sviluppo di un metodo alternativo che introduce i **diagrammi di interazione** nella previsione della capacità portante, per le fondazioni soggette a condizioni di carico generali, e permette così di superare l'approccio tradizionale, basato sui fattori di capacità portante (Gottardi, 2006).

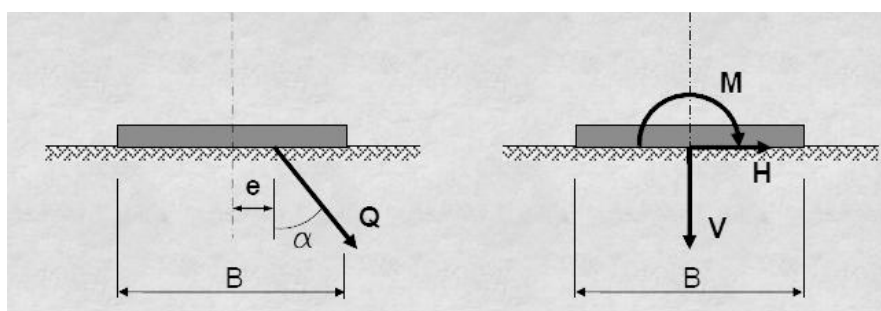


Figura 3.3. Fondazione superficiale soggetta a carichi applicati di risultante Q , di componenti V , H e M (Gottardi, 2006).

I diagrammi di interazione definiscono un involucro di rottura alternativo nel piano $V-M/B-H$, cioè una regione all'interno della quale sono comprese tutte le combinazioni delle componenti di carico ammissibili.

La componente del momento M viene divisa rispetto alla lunghezza caratteristica del problema (la larghezza B di una fondazione nastriforme oppure il diametro $2R$ di una fondazione circolare), in modo da renderla dimensionalmente omogenea a V e H .

Sulla base dell'interpretazione di numerose prove di carico controllate, nel 1979 Butterfield e Ticof hanno definito, per fondazioni superficiali su sabbia, una superficie di interazione 3D, caratterizzata da una curva parabolica lungo l'asse V ed ellittica in direzione perpendicolare a V (Figura 3.4). In questo caso, le dimensioni della superficie di plasticizzazione sono determinate da fissati carichi di picco adimensionali:

$$\frac{M}{BV_{\max}} \approx 0,1 \quad \text{e} \quad \frac{H}{V_{\max}} \approx 0,12$$

dove V_{\max} è il massimo carico verticale centrato, stimato con un qualunque metodo convenzionale. I valori di picco di H e M si verificano quando:

$$\frac{V}{V_{\max}} = 0,5$$

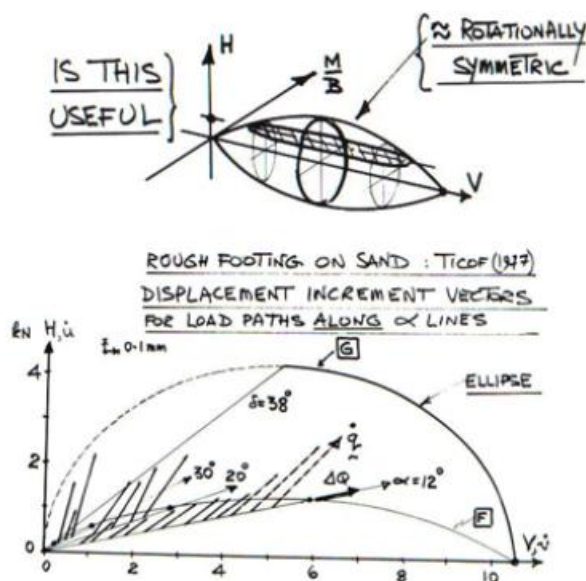


Figura 3.4. Superficie di interazione 3D (Marchi, 2008).

Recentemente lo studio della forma dei diagrammi di interazione è stato approfondito attraverso numerose prove (si veda Marchi, 2008).

In particolare, dagli studi di Gottardi *et al.* (1999), si può osservare che per fondazioni di diverse geometrie su diversi tipi di terreni possono essere utilizzati involucri di forma simile. In Figura 3.5 è riportato l'involuppo di rottura nel piano V -

$M/2R-H$, costituito da un ellissoide parabolico con sezione ellittica centrata nell'origine; gli assi principali sono leggermente ruotati in senso antiorario.

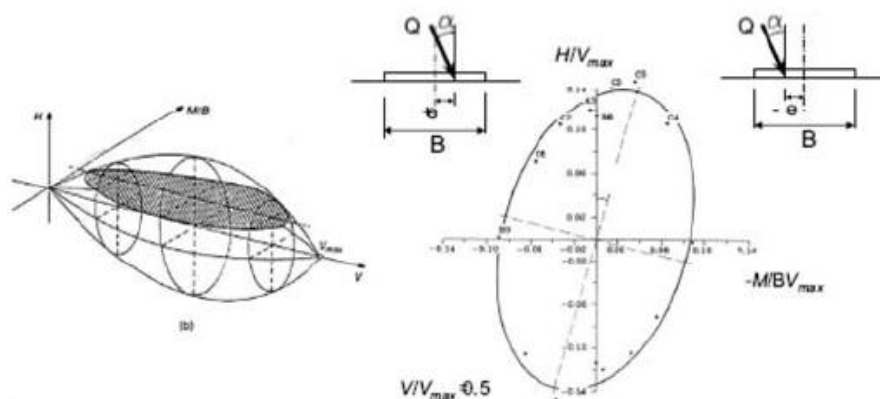


Figura 3.5. Superficie di interazione 3D e sezione nel piano $V/V_{\max} = 0,5$ (Marchi, 2008).

Inoltre, è interessante osservare come anche i tradizionali fattori correttivi possano essere combinati sul piano $V-M-H$ fornendo un luogo di rottura equivalente, ma con un evidente vantaggio intuitivo sulle reali condizioni limite della fondazione (Gottardi, 2006).

In definitiva, la valutazione della capacità portante di una fondazione superficiale soggetta a condizioni generali di carico mediante l'impiego dei diagrammi di interazione presenta numerosi vantaggi rispetto ai metodi tradizionali:

- si tratta di un metodo intuitivo, che valuta direttamente le combinazioni di carico limite;
- garantisce la continuità con l'approccio tradizionale basato sui fattori correttivi;
- tiene conto dell'effettiva interazione non lineare tra le componenti di carico;
- permette di considerare allo stesso modo il contributo di un momento (risultante verticale eccentrica) e di un carico orizzontale (risultante inclinata centrata);
- fornisce una base teorica per lo sviluppo di modelli completi per l'analisi di fondazioni superficiali.

Nel caso di interesse delle torri storiche, le fondazioni sono generalmente massicce e profonde solo alcuni metri, perciò possono essere considerate come fondazioni superficiali (Marchi *et al.*, 2011), soggette a carichi prevalentemente

verticali di peso proprio e momenti flettenti derivanti dall'inclinazione della torre e da azioni orizzontali accidentali (vento ed eventi sismici).

Per valutare la capacità portante e definire le condizioni di carico a rottura, per una fondazione di raggio R , soggetta ad un sistema di forza risultanti $(V, M/2R, H)$, è sufficiente conoscere la superficie di plasticizzazione.

Nella nostra analisi le componenti di carico significative sono il carico verticale V e il momento M , quindi la forma più semplice della sezione dell'involuppo di rottura tridimensionale sul piano M - V è una parabola (Gottardi *et al.*, 1999) di equazione:

$$\text{Eq. 3.5} \quad f = \frac{M}{2Rm_0} - 4V \left(1 - \frac{V}{V_{\max}} \right) = 0$$

dove V_{\max} , che definisce la dimensione della superficie di rottura, è la capacità portante per carico verticale centrato, stimata con un qualsiasi metodo tradizionale, mentre il parametro m_0 dipende dal tipo di terreno e solitamente vale circa 0,09 (Gottardi *et al.*, 1999).

Mediante l'impiego dei diagrammi di interazione, è quindi possibile valutare la capacità portante della fondazione seguendo il percorso di carico tipico di una torre soggetta ad un progressivo aumento dell'inclinazione. Durante la costruzione della torre, la fondazione è soggetta all'incremento del carico verticale, fino al peso finale W , con momento costante nullo $M = 0$; poi, con $V = W$ costante, il momento aumenta fino al collasso per capacità portante (Figura 3.6). Il valore limite del momento applicato M_{ult} viene individuato dall'intersezione tra la superficie di rottura e il percorso di carico nel piano $[V-M/2R]$.

Per definire V_{\max} si deve considerare una modalità di rottura fragile della fondazione (rottura generale), cioè caratterizzata da un picco nella curva carico verticale-cedimento $[V-w]$. Se non è possibile identificare uno specifico carico di rottura di picco (rottura per punzonamento), V_{\max} può essere comunque definito dal valore del carico oltre il quale lo spostamento verticale diventa troppo grande, e quindi inammissibile, all'aumentare di V . In questo senso, il momento limite calcolato M_{ult} corrisponde a uno stato limite di esercizio.

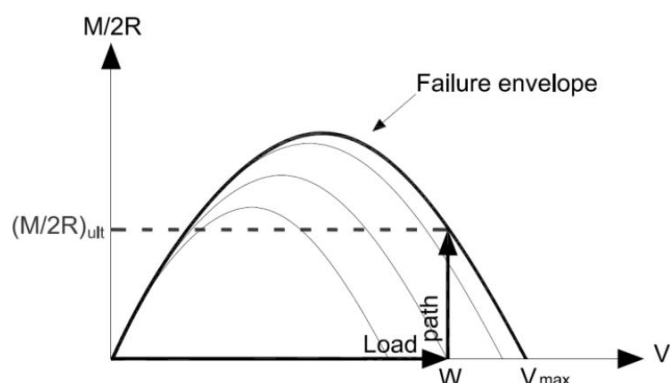


Figura 3.6. Tipico percorso di carico per una torre pendente sul piano momento-carico verticale (Marchi et al., 2011).

3.2.3 MODELLI ELASTO-PLASTICI INCRUDENTI PER LE FONDAZIONI SUPERFICIALI

L'approccio di previsione della capacità portante per le fondazioni superficiali soggette a carichi combinati basato sui diagrammi di interazione ha portato allo sviluppo di una serie di **modelli elasto-plastici incrudenti** (“*strain-hardening plasticity model*”, ad esempio Gottardi *et al.*, 1999, e Houslyby e Cassidy, 2002), che permettono di assimilare il sistema complessivo terreno-fondazione a un unico “**macroelemento**”.

Tali macro-modelli, formulati in termini di forze risultanti (V , M/B e H) e dei corrispondenti spostamenti della fondazione (w , $B\theta$, u), permettono di prevedere la risposta del sistema per ogni combinazione di carico o di spostamento (Figura 3.7).

Si può allora pensare che, nello spazio $[V-M/B-H]$, esista un'intera famiglia di superfici di plasticizzazione del sistema terreno-fondazione, che possono variare di forma e dimensione per effetto dell'incrudimento, e vengono individuate dal carico di snervamento V_0 , rappresentativo della storia di carico (Figura 3.8). Inoltre, analogamente ai modelli dell'elemento di volume, si possono individuare i vettori incremento di spostamento plastico (Gottardi, 2006).

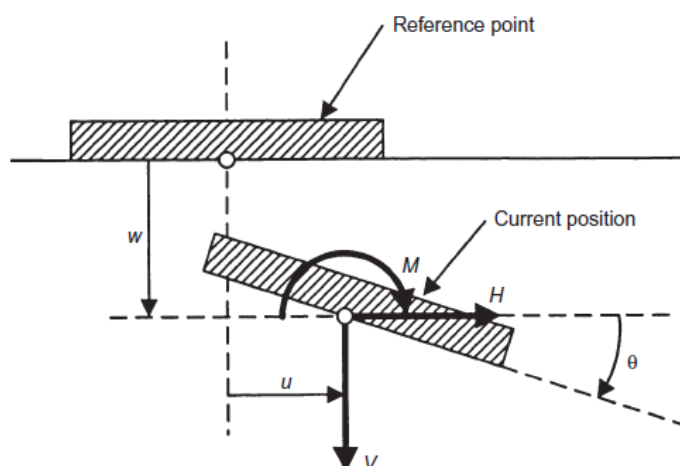


Figura 3.7. Variabili generalizzate di sforzo e deformazione, e convenzioni di segno (Houlsby e Cassidy, 2002).

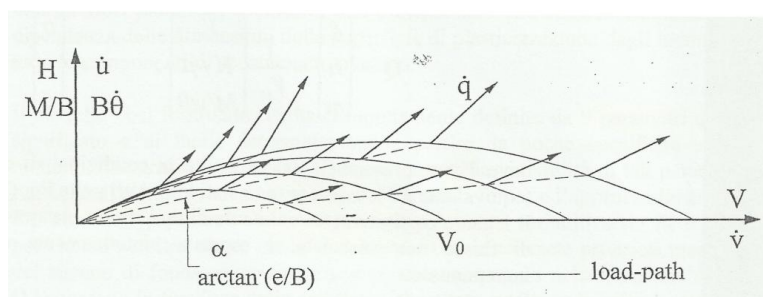


Figura 3.8. Superfici di plasticizzazione e vettori incremento di spostamento plastico (Gottardi, 2006).

Le componenti fondamentali del modello elasto-plastico incrudente riferito al macroelemento terreno-fondazione sono le seguenti:

- una funzione di snervamento (*yield function*), che rappresenta la **superficie di plasticizzazione** nello spazio $[V-M/B-H]$;
- un criterio di flusso (*flow rule*), cioè una **funzione potenziale plastico** che fornisce la direzione del vettore incremento di spostamento plastico;
- una **legge di incrudimento plastico** (*plastic hardening law*), che fornisce l'entità di tale vettore e definisce l'evoluzione della superficie di plasticizzazione al crescere delle deformazioni plastiche;
- una **legge elastica** (*elastic behaviour*) della fondazione, per incrementi di carico interni alla superficie di plasticizzazione.

Assegnato uno specifico percorso di carico alla fondazione superficiale, l'applicazione di questi modelli consente di ottenere una previsione del campo di spostamenti della fondazione stessa.

Nel caso di interesse delle torri storiche, l'analisi è limitata alla componente di carico verticale e al momento flettente, e agli spostamenti associati, mentre i carichi e gli spostamenti orizzontali non vengono considerati. Il percorso di carico della fondazione superficiale di una torre è caratterizzato inizialmente dall'applicazione di un incremento del carico verticale, fino al peso proprio finale W , a momento costante nullo $M = 0$. Al termine della costruzione della torre, il carico verticale rimane costante, $V = W$, mentre il momento flettente M aumenta fino al raggiungimento della capacità portante.

3.3 COLLASSO PER INSTABILITÀ

3.3.1 TEORIE ELASTICHE E ANELASTICHE

In generale, uno degli aspetti principali da tenere presente nello studio di strutture snelle flessibili di materiali rigidi, come l'acciaio o il cemento armato, è legato ai problemi di stabilità dell'equilibrio.

Il più semplice esempio di instabilità strutturale, oltre che il primo ad essere stato risolto (da Timoshenko nel 1953), prende in considerazione una colonna a sezione costante, soggetta a compressione assiale: se essa è sufficientemente snella, il collasso avverrà a causa dello sbandamento laterale, piuttosto che per rottura del materiale.

Abitualmente la classica analisi strutturale lineare considera che il comportamento meccanico del materiale sia linearmente ed infinitamente elastico, e che gli spostamenti in gioco siano di piccola entità (**teoria lineare dell'elasticità**). In questo caso vale il principio di sovrapposizione degli effetti e la soluzione del problema elastico esiste ed è unica (secondo il teorema di Kirchhoff); inoltre, le equazioni di equilibrio possono essere scritte nella configurazione indeformata della struttura.

Nello studio dei problemi di instabilità dell'equilibrio, al fine di stabilire le condizioni di equilibrio in una configurazione deformata del sistema, è necessario rimuovere l'ipotesi di piccoli spostamenti (**teoria del secondo ordine o della stabilità dell'equilibrio elastico**).

Tale teoria si basa sull'ipotesi di comportamento elastico lineare del materiale, quindi può essere utilizzata se la struttura diventa instabile prima che venga violato il criterio di resistenza del materiale.

In realtà tutti i materiali hanno un limite di resistenza e il collasso della struttura può avvenire a causa del raggiungimento di tale limite (come avviene nel caso di strutture tozze). Normalmente la rottura del materiale è preceduta da fenomeni anelastici, che generalmente hanno un'influenza destabilizzante sulle strutture. Il comportamento anelastico comprende non solo la plasticità (o elastoplasticità), ma anche il *creep* (viscoelasticità e viscoplasticità). Per tenere conto di questo comportamento, sono state introdotte **teorie di stabilità dell'equilibrio anelastico**.

Il problema della stabilità dell'equilibrio elastico è stato trattato per la prima volta da Leonhard Euler [1707-1783], che ha introdotto il metodo statico per studiare le condizioni di stabilità e determinare il carico di punta di una colonna elastica semplicemente compressa.

Joseph-Louis Lagrange [1736-1813] ha poi sviluppato l'approccio energetico, che ha portato naturalmente alla formulazione del teorema fondamentale di minimo dell'energia potenziale totale.

Jules Henry Poincar'e [1854-1912] è noto per essere il fondatore della teoria delle biforcazioni e per la classificazione delle singolarità.

D'altra parte, Aleksandr Mikhailovich Liapunov [1857-1918] ha introdotto le definizioni di base sulla natura dell'equilibrio.

Inoltre, Lev Semenovich Pontryagin [1908-1988] ha introdotto, con A. A. Andronov, l'importante concetto topologico di stabilità strutturale.

Per quanto riguarda le teorie di stabilità dell'equilibrio anelastico, i primi studi sono da attribuire a Theodore von K'arm'an [1881-1963], che ha formulato un modello che tiene conto dei cicli di isteresi e approfondito la ricerca sulla deformazione plastica delle travi.

Warner Tjardus Koiter [1914-1997] ha poi sviluppato la teoria classica della biforcazione non lineare. Inoltre, nel 1973 Hutchinson ha fornito un importante contributo alla teoria della ramificazione non lineare per strutture caricate in campo plastico. Altri contributi significativi nella ricerca sui problemi anelastici di instabilità dell'equilibrio sono quelli di A. Considere, F. Engesser e F. R. Shanley.

Per ulteriori approfondimenti si rimanda a Bazant e Cedolin (1991), e Ferretti *et al.* (2002).

3.3.2 INSTABILITÀ DI TORRI SU TERRENI COMPRESSIBILI

Molti autori hanno dimostrato che l'instabilità strutturale si può verificare anche nella meccanica delle terre e nell'ingegneria geotecnica, quando la rigidità del terreno è scarsa e, di conseguenza, le deformazioni sono elevate.

Ad esempio, nel 1985 Hambly ha trattato il problema dell'instabilità dell'equilibrio nell'interazione terreno-struttura, considerando strutture alte su terreni compressibili, la rottura per punzonamento nel caso di piattaforme off-shore, e il collasso precoce di campioni di terreno in differenti macchine di prova. Questa instabilità non è dovuta alla mancanza di resistenza, ma all'**insufficiente rigidità del terreno di fondazione**, cioè al verificarsi di **cedimenti eccessivi** sotto carico (Marchi, 2008).

In particolare, le strutture alte e snelle possono essere soggette ad un collasso per instabilità dell'equilibrio quando sono fondate su terreni deformabili (Desideri *et al.*, 1997).

L'analisi di stabilità dell'equilibrio è incentrata sul tema specifico delle torri, analizzate come corpi rigidi, fondate su terreni compressibili.

Per comprendere questo concetto di base dell'instabilità dell'equilibrio, nel 1997 Butterfield ha proposto un esperimento, che può essere facilmente riprodotto. Si considera di costruire una torre di mattoncini più verticale possibile su uno strato deformabile (Figura 3.9).

In Figura 3.9a, la colonna è bassa e **stabile**, cioè si inclina solo se si applica una forza orizzontale; rimuovendo tale forza, la colonna ritornerà rapidamente nella

posizione verticale. Aumentando l'altezza della torre e applicando nuovamente una piccola inclinazione, essa ritornerà sulla verticale, ma più lentamente.

Il processo di costruzione può continuare fino al raggiungimento di un'altezza **critica** (Figura 3.9b), che corrisponde ad uno stato di **equilibrio neutrale o indifferente**: cioè, dopo aver applicato una piccola rotazione, la torre non ritornerà nella configurazione verticale.

Poi ogni ulteriore aumento di peso provocherà il ribaltamento della torre (**equilibrio instabile**), come mostrato in Figura 3.9c, e per fermarne la caduta sarebbe necessario applicare una forza concentrata opposta.

Si può quindi concludere che, se anche la torre è il più verticale possibile, essa diventerà instabile e inizierà a inclinarsi appena la sua altezza supera il valore critico. Inoltre, aumentare teoricamente la deformabilità della fondazione provoca una drastica riduzione dell'altezza massima raggiungibile.

Questo problema di interazione terreno-struttura è stato analizzato in diversi modi da Hambly (1985), Cheney *et al.* (1991), Lancellotta (1993), e Desideri e Viggiani (1994). Queste analisi differiscono sostanzialmente nel modo in cui viene modellato il collegamento tra il terreno e la struttura: in particolare, i primi modelli elastico-lineari sono stati ampliati per includere il comportamento irreversibile e fortemente non lineare del terreno (vincolo elasto-plastico).

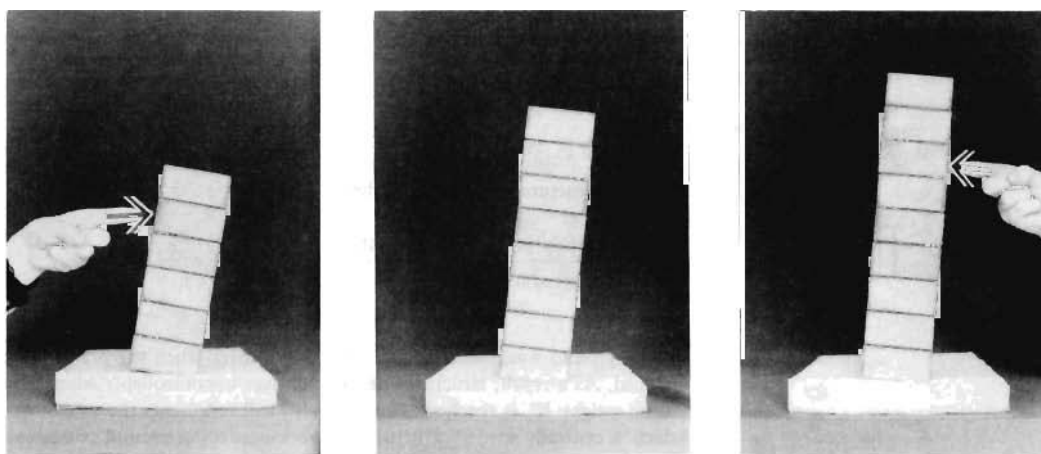


Figura 3.9. Colonna di mattoncini su uno strato compressibile, in condizioni di equilibrio: (a) stabile, (b) neutrale; (c) instabile (Hambly, 1985).

In queste analisi di stabilità dell'equilibrio, la torre viene solitamente rappresentata da un'asta rigida uniforme (di peso W), collegata alla base da un vincolo in cui è concentrata la deformabilità del sistema (Figura 3.10).

La **condizione di equilibrio** impone l'uguaglianza tra il **momento esterno ribaltante**, $M_e = Wh\text{sen}\theta$, e il **momento resistente**, M_r , cioè:

Eq. 3.6
$$Wh\text{sen}\theta = M_r$$

dove h è l'altezza del baricentro della torre rispetto al piano di fondazione e θ è la rotazione totale rispetto alla posizione verticale.

Il momento resistente M_r è dato dalla reazione del vincolo di base, quindi rappresenta la rigidezza rotazionale della fondazione della torre, funzione della deformabilità (e non della resistenza) del sottosuolo e della geometria della fondazione.

Nel caso delle torri è lecito assumere l'**ipotesi di piccole rotazioni**, cioè $\text{sen}\theta \approx \theta$, dal momento che inclinazioni di 10° sono già valori molto elevati.

La condizione di equilibrio diventa quindi:

Eq. 3.7
$$Wh\theta = M_r$$

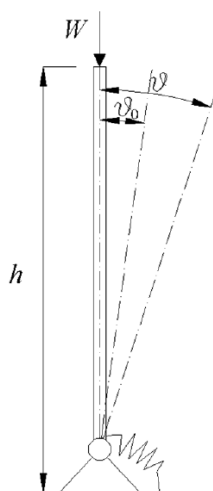


Figura 3.10. Asta rigida con vincolo deformabile: θ è la rotazione totale e θ_0 è l'imperfezione iniziale (Marchi *et al.*, 2011).

In tutte le torri, ci sarà inevitabilmente una piccola inclinazione iniziale θ_0 incognita, dovuta all'eccentricità del baricentro della torre e all'inclinazione sviluppata durante la costruzione. Si assume che tale **imperfezione iniziale** non generi un momento resistente. Il momento resistente M_r è quindi una funzione della rotazione

della torre rispetto all'inclinazione iniziale, cioè di $\Delta\theta = \theta - \theta_0$. Teoricamente, questo concetto è equivalente a installare istantaneamente la torre, già inclinata, sulla fondazione.

In generale, l'analisi di stabilità delle strutture nel caso di sistemi elastici, cioè indipendenti dal percorso di carico (ad esempio una colonna compressa in direzione assiale), viene convenzionalmente sviluppata nel piano $[V-\theta]$, dove V è il carico verticale. Questa rappresentazione è utile quando si vuole mostrare l'influenza dell'imperfezione iniziale sul carico critico: in particolare, in Figura 3.11 si può notare che V_{cr} diminuisce all'aumentare di θ_0 .

Tuttavia, nel caso delle torri, mentre il momento esterno M_e aumenta all'aumentare dell'inclinazione θ , il peso $V = W$ è costante, quindi nell'analisi di stabilità dell'equilibrio il diagramma $[V-\theta]$ non fornisce ulteriori informazioni per una data torre.

Nell'analisi di stabilità della torre di Pisa sviluppata da Lancellotta (1993), la rigidità della molla rotazionale elastica non-lineare alla base della torre non dipende dal carico verticale applicato e quindi la condizione critica può essere definita dalla curva di picco $[V-\theta]$ in Figura 3.11.

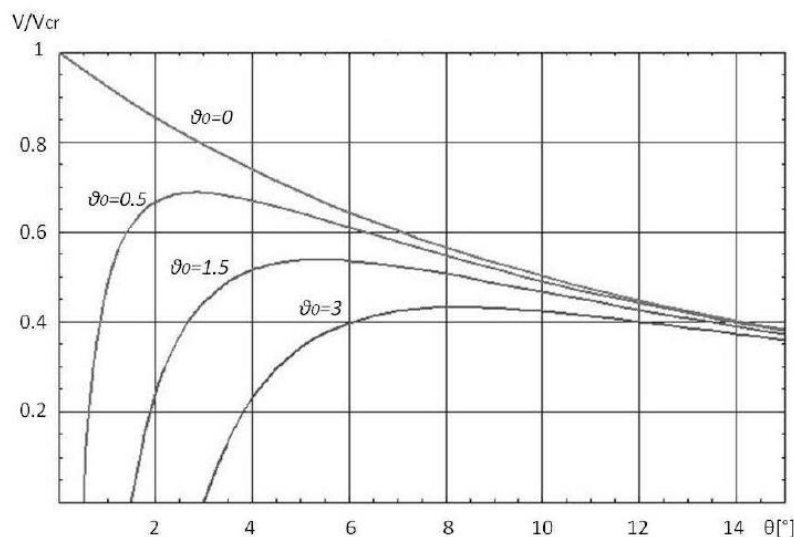


Figura 3.11. Esempio di analisi di stabilità dell'equilibrio per la Torre di Pisa per asta perfetta (Lancellotta, 1993).

In realtà, assumendo un modello del terreno elasto-plastico, e quindi dipendente dal percorso di carico, si ha che la rigidezza rotazionale è funzione di W : di conseguenza i piani $[V-\theta]$ ed $[M-\theta]$ non sono intercambiabili, e ogni soluzione è applicabile non solo ad uno specifico terreno di fondazione, ma anche ad una particolare torre, definita dal valore di Wh .

Pertanto, in generale, come inizialmente suggerito da Cheney *et al.* (1991) e successivamente sviluppato da Desideri e Viggiani (1994), l'analisi dell'equilibrio di una torre può essere rappresentata nel piano $[M-\theta]$, in cui possono essere riportati contemporaneamente gli andamenti di M_e e M_r .

In particolare, la relazione tra M_e e θ è data da una retta di pendenza Wh , mentre la curva di M_r dipende dalla rigidezza rotazionale della fondazione (Figura 3.12).

Se la pendenza iniziale k della curva M_r è uguale o inferiore alla pendenza Wh del momento esterno M_e , le due curve non si intersecano mai, perciò l'equilibrio non è possibile. Al contrario, se $k > Wh$ (Figura 3.12c), fissato un piccolo valore di θ_0 , l'equilibrio può avvenire in due punti sulla curva M_r (Figura 3.12a), che dipendono dalla storia di carico. Di conseguenza si ha:

- **equilibrio stabile:** per un piccolo aumento di θ , M_r aumenta più velocemente di M_e , cioè $\frac{dM_r}{d\theta} > \frac{dM_e}{d\theta}$;
- **equilibrio instabile:** per un piccolo aumento di θ , M_r aumenta più lentamente di M_e , cioè $\frac{dM_r}{d\theta} < \frac{dM_e}{d\theta}$;
- **equilibrio critico:** il valore massimo di M_e a cui il sistema può resistere si verifica quando la retta M_e è tangente alla curva M_r , quindi la condizione di equilibrio limite è definita dalle coordinate del punto di tangenza (punto E in Figura 3.12b), cioè $\frac{dM_r}{d\theta} = \frac{dM_e}{d\theta}$.

Qualsiasi situazione in cui M_e non interseca M_r è uno stato temporaneo di non-equilibrio (Marchi *et al.*, 2011).

Le curve in Figura 3.12a valgono in uno specifico istante statico, ma, in realtà, si deve tenere conto della lenta rotazione aggiuntiva che si sviluppa nel tempo a causa del **comportamento viscoso del terreno**; infatti, il *creep* influisce sulla rigidezza del terreno. Per introdurla all'interno del modello, tale inclinazione progressiva dovuta al *creep* del terreno può essere trattata in modo analogo all'imperfezione iniziale θ_0 (Cheney *et al.*, 1991, Lancellotta, 1993, Desideri & Viggiani, 1994). In questo modo la rotazione iniziale θ'_0 (Figura 3.12d) comprende non solo l'imperfezione iniziale del sistema θ_0 , ma anche qualsiasi rotazione aggiuntiva dovuta al *creep* θ_{0creep} :

$$\text{Eq. 3.8} \quad \theta'_0 = \theta_0 + \theta_{0creep}$$

È importante sottolineare che, in questa **interpretazione semplificata**, il *creep* non influenza la forma della curva di M_r , che trasla semplicemente lungo l'asse θ , da θ_0 a $\theta'_0 = \theta_0 + \theta_{0creep}$. Pertanto, aumentando teoricamente la rotazione iniziale θ'_0 , il *creep* riduce il fattore di sicurezza della torre (Marchi, 2008).

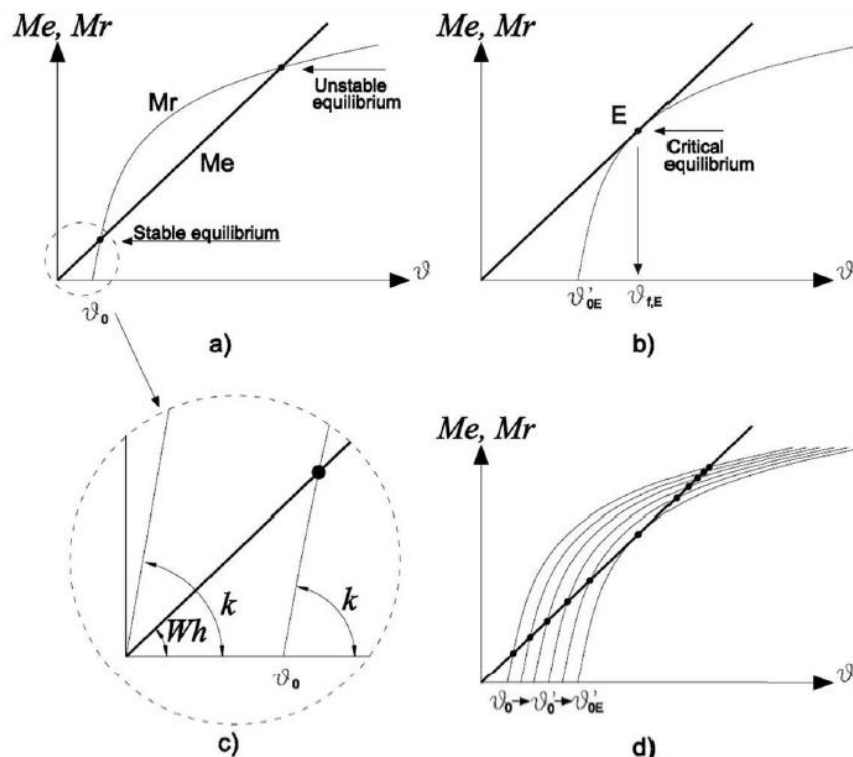


Figura 3.12. Analisi di stabilità dell'equilibrio nel piano $M-\theta$: (a) condizioni di equilibrio stabile ed instabile; (b) condizione di equilibrio critico; (c) dettaglio della relazione tra la pendenza della curva del momento esterno, Wh , e la rigidezza rotazionale iniziale della fondazione, k ; (d) traslazione della curva $M-\theta$ dovuta al *creep* (Marchi *et al.*, 2011).

3.3.3 APPLICAZIONE DEL MODELLO DEL MACROELEMENTO ALLA DEDUZIONE DELLA CURVA M_r

Le analisi di stabilità per la valutazione delle condizioni di sicurezza della fondazione di una struttura a torre possono essere condotte efficacemente nel piano momento-rotazione $[M-\theta]$ facendo ricorso ai **modelli elasto-plastici incrudenti sviluppati per le fondazioni superficiali**, basati sul concetto di **macroelemento** (Sezione 3.2.3).

Un elemento chiave, ma non scontato, di queste analisi è determinare la **rigidezza rotazionale** del sistema terreno-fondazione, cioè la curva momento-rotazione M_r .

Quando si trascurano le forze orizzontali, e quindi l'analisi è limitata al piano $(V, M/2R)$ e agli **spostamenti plastici associati** $(w_p, 2R\theta_p)$, le equazioni standard del modello possono essere scritte come:

$$\text{Eq. 3.9} \quad \begin{pmatrix} dw_p \\ d\theta_p \end{pmatrix} = -\frac{1}{H} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dV \\ dM \end{pmatrix}$$

In quest'analisi gli spostamenti sono plastici, quindi qualsiasi contributo elastico va aggiunto ad essi.

Nel caso delle torri, si ha sempre $dV = 0$, essendo $V = W$ costante, quindi la curva M_r può essere ottenuta integrando la seguente espressione:

$$\text{Eq. 3.10} \quad d\theta_p = -\frac{1}{H} m_{22} dM$$

Allo stesso modo, lo spostamento verticale generato dalla variazione del momento esterno deriva dall'integrazione della seguente espressione:

$$\text{Eq. 3.11} \quad dw_p = -\frac{1}{H} m_{12} dM$$

dove, per definizione, si ha:

$$\text{Eq. 3.12} \quad m_{22} = \left(\frac{\partial f}{\partial M} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial M} \right); \quad m_{12} = \left(\frac{\partial f}{\partial M} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial V} \right)$$

dove f = funzione di plasticizzazione, e g = funzione potenziale plastico.

Il parametro di *hardening* H è dato da:

$$\text{Eq. 3.13} \quad H = \left(\frac{\partial f}{\partial V_0} \right) \left(\frac{\partial V_0}{\partial w_p} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial V} \right)$$

In genere si assume che la funzione di plasticizzazione f abbia la stessa forma del diagramma di interazione $[M-V/2R]$, che, definito dall'Eq. 3.5, rappresenta la superficie di rottura, limite di una famiglia di curve che si espandono all'aumentare del cedimento verticale (Figura 3.6)

Chiaramente la forma della curva di M_r e la relazione forza verticale-cedimento generati da qualsiasi modello dipendono da f , da g e dalla legge di *hardening* $V_0 = V_0(w_p)$, in cui si assume che il carico verticale centrato di plasticizzazione V_0 (Sezione 3.2.3) dipenda da un singolo parametro, cioè il cedimento plastico w_p .

Pertanto, a seconda della specifica formulazione del modello, cambia il risultato dell'analisi di stabilità.

3.4 COMBINAZIONE DEI MODI DI COLLASSO

Una volta individuato il modello elasto-plastico incrudito idoneo ad interpretare il comportamento del terreno di fondazione, è possibile eseguire l'analisi di stabilità delle torri valutando **in modo unitario** le condizioni di sicurezza della struttura (Marchi *et al.*, 2011) nei confronti delle rotture per:

- capacità portante, dovuta all'insufficiente resistenza del terreno di fondazione;
- instabilità dell'equilibrio, dovuta all'insufficiente rigidità del terreno di fondazione.

Lo studio combinato della due problematiche viene eseguito come segue:

- per la **capacità portante**, noto l'involuppo di rottura, si ricava il valore massimo del momento esterno M_{ult} che il terreno può sopportare in funzione del peso della torre. Nel piano $[M - \theta]$ M_{ult} costituisce un valore limite, che individua la rottura per capacità portante della fondazione (**punto B** in Figura 3.13). Il corrispondente valore critico della rotazione è $\theta_{f,B}$.
- lo studio di **stabilità dell'equilibrio** si effettua confrontando la curva momento-rotazione M_r con la retta del momento esterno M_e della struttura.

La rottura per instabilità dell'equilibrio viene individuata dalla condizione di tangenza (**punto E** in Figura 3.13) nel caso in cui le rotazioni dovute ai fenomeni di *creep* del terreno vengano interpretate come incremento dell'imperfezione iniziale della struttura (Cheney *et al.*, 1991). Il corrispondente valore critico della rotazione è $\theta_{f,E}$.

Combinando queste considerazioni sullo stesso piano $[M - \theta]$, è possibile valutare il meccanismo di rottura più probabile. In particolare, si possono verificare due diverse condizioni:

- $\theta_{f,B} > \theta_{f,E}$, per cui si svilupperà prima la **rottura per instabilità dell'equilibrio** (Figura 3.13); la torre crollerà nel punto E, e la rotazione non sarà sufficiente per sviluppare il momento $Wh\theta_{f,B}$ corrispondente alla rottura per capacità portante.

- $\theta_{f,B} < \theta_{f,E}$, per cui si verificherà prima la **rottura per capacità portante**. Tale condizione è possibile solo se la curva carico verticale-cedimento presenta un valore di picco, cioè se è prevista una rottura fragile del terreno: in questo caso avverrà un collasso catastrofico della torre.

Se invece è prevista una rottura per punzonamento (senza picco), il crollo della torre non avverrà fino al raggiungimento del punto E di rottura per instabilità dell'equilibrio. In effetti, questo è l'evento più probabile nel caso di torri antiche.

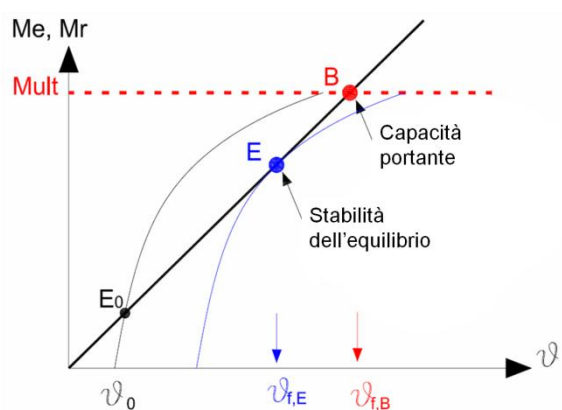


Figura 3.13. Combinazione del collasso per capacità portante e del collasso per instabilità dell'equilibrio sul piano $M-\theta$ (Marchi *et al.*, 2011).

Se allo stato attuale la torre si trova in un punto di equilibrio stabile (E_0 in Figura 3.13), la sua stabilità si deteriorerà progressivamente per effetto dell'incremento della rotazione plastica per *creep*, $\Delta\theta_{creep}$, che genera un incremento del momento ribaltante esterno, $\Delta M_e = Wh\Delta\theta_{creep}$, che a sua volta causa un aumento della rotazione nel tempo.

Si può quindi concludere che questo procedimento permette di affrontare in modo organico le problematiche di interazione terreno-struttura coinvolte nelle analisi di stabilità delle strutture a torre, ricavando informazioni sia sulla rigidità che sulla resistenza del sistema terreno-fondazione.

Tuttavia, poichè i fenomeni di *creep* sono molto rilevanti per le strutture reali, e in particolare per quelle storiche, è necessario sviluppare ulteriormente tale formulazione al fine di introdurre la variabile tempo, fondamentale per un'interpretazione più corretta e realistica del comportamento delle strutture reali.

3.5 BIBLIOGRAFIA

1. Bazant Z.P., e Cedolin L. (1991). *Stability of structures*. Oxford University Press.
2. Cheney J., Abghari A., e Kutter B. L. (1991). *Stability of leaning towers*. Journal ASCE-GED, Vol. CXVII(2), p. 297-318.
3. Colombo P. e Colleselli F. (2004). *Elementi di geotecnica*. 3° ed. Bologna: Zanichelli.
4. Desideri A., Russo G., e Viggiani C. (1997). *La stabilità di torri su terreno deformabile*. Rivista Italiana di Geotecnica, Vol. 1, p. 5-21.
5. Desideri A., e Viggiani C. (1994). *Some remarks on the stability of towers*. Symp. on development in geotechnical engineering, Bangkok.
6. Federico F., Ferlisi S., e Jappelli R. (2001). *Safety evolution of masonry leaning towers on deformable soils*. XV Conference on soil mechanics and geotechnical engineering, Istanbul, Turchia. Balkema, Vol. 1, p. 679-682.
7. Gottardi G. (2006). *Recenti sviluppi nella modellazione del comportamento di fondazioni superficiali*. Relazione Generale. V Convegno Nazionale dei

- Ricercatori di Ingegneria Geotecnica, Politecnico di Bari: Fondazioni Superficiali e Profonde. 15-16 Settembre 2006. Hevelius Edizioni, 2007, pp. 85 – 119.
8. Gottardi G., Houlsby G.T., e Butterfield R. (1999). *Plastic response of circular footings on sand under general planar loading*. Géotechnique, Vol. 47, No. 5, p.1051-1054.
 9. Hambly E. C. (1990). *Overtuning Instability*. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 116, No. 4, p. 704-709.
 10. Hambly E. C. (1985). *Soil buckling and the leaning instability of tall structures*. The Structural Engineer, Vol. 63A(3), p. 77-85.
 11. Heyman J. (1992). *Leaning Towers*. Meccanica, Vol. 27(3), p. 153-159.
 12. Houlsby G. T., e Cassidy M. J. (2002). *A plasticity model for the behaviour of footings on sand under combined loading*. Géotechnique, Vol. 52(2), p. 117–129.
 13. Lancellotta R. (1993). *Stability of a rigid column with non linear restraint*. Géotechnique, Vol. 41(2), p. 331-332.
 14. Marchi M. (2008). *Stability and strength analysis of leaning towers*. Dottorato di ricerca in Ingegneria Geotecnica, Università degli studi di Parma, Dipartimento di Ingegneria Civile ed Architettura, Italia.
 15. Marchi M., Gottardi G., Lancellotta R. e Butterfield R. (2011). *Effetti del creep sulla stabilità delle torri*. Incontro Annuale dei Ricercatori di Geotecnica 2011 - IARG 2011, Torino, 4-6 Luglio 2011.
 16. Marchi M., Butterfield R., Gottardi G., e Lancellotta R. (2011). *Stability and strength analysis of leaning towers*. Geotechnique, Vol. 61(7).
 17. Maugeri M., e Nova R. (eds.) (2003). *Geotechnical analysis of seismic vulnerability of monuments and historical sites*. Pàtron, Bologna.
 18. Nova R., e Montrasio L. (1995). *Un'analisi di stabilità del campanile di Pisa*. Rivista Italiana di Geotecnica, Vol. 2, p. 83–93.
 19. Ricceri G., Mazzucato A., e Soranzo M. (1992). *Interazione terreno-struttura per alcuni antichi monumenti*. Istituto di costruzioni marittime e di geotecnica, Università di Padova.

CAPITOLO 4

EFFETTI DEL *CREEP* SULLE PREVISIONI DI STABILITÀ DELLE TORRI

4.1 INTRODUZIONE

Come visto nel precedente Capitolo, le analisi di stabilità delle torri, in relazione alle principali problematiche geotecniche che le riguardano, devono essere affrontate valutando le condizioni di sicurezza della struttura nei confronti dei meccanismi di collasso tipici delle loro fondazioni:

- collasso per capacità portante, dovuto all'insufficiente resistenza del terreno di fondazione;
- collasso per instabilità dell'equilibrio, dovuto all'insufficiente rigidità del terreno di fondazione.

Tali problematiche vengono trattate in modo semplice e unitario utilizzando i modelli elasto-plastici incrudenti per le fondazioni superficiali, basati sull'applicazione del concetto di macroelemento al sistema complessivo terreno-struttura (Marchi *et al*, 2008). Tali modelli consentono infatti di generare una curva $M - \theta$ affidabile, sulla base della quale possono essere fatte le opportune considerazioni sia in relazione alla capacità portante che alla stabilità dell'equilibrio.

La valutazione della sicurezza e la previsione del comportamento delle torri rappresentano una sfida problematica, ma molto avvincente, per tutti gli addetti ai lavori, che finora si sono concentrati sullo sviluppo e sull'implementazione di specifici modelli.

Indubbiamente le condizioni di sicurezza di tutte le strutture reali snelle, come le torri, variano in modo evidente passando dal breve al lungo periodo, a causa del progressivo aumento di pendenza: l'incremento dei cedimenti differenziali in

fondazione, infatti, genera stati di sollecitazione sempre più gravosi che, associati alla bassa rigidità del sistema terreno-fondazione, possono comunque portare alla crisi nel lungo periodo.

Lo scopo fondamentale della ricerca che viene tuttora condotta è la stima degli spostamenti consentiti prima che la struttura vada in crisi.

Le rotazioni e i cedimenti differiti nel tempo dipendono dai fenomeni di *creep* dei terreni, in particolare di quelli coesivi, e possono essere anche di notevole entità. Il *creep*, associato alle inevitabili imperfezioni della struttura in elevazione o irregolarità del terreno di fondazione, può dar luogo ad una **progressiva perdita di verticalità della struttura**, con tutti i problemi che ne conseguono (Marchi *et al.*, 2011).

Pertanto, tenere conto dell'influenza del *creep* sui meccanismi di collasso delle torri storiche è di fondamentale importanza per interpretare in modo corretto e realistico il comportamento delle strutture reali. Recentemente, infatti, gli sforzi della ricerca sono indirizzati al tentativo di integrare il comportamento viscoso dei terreni, introducendo quindi la variabile tempo, nelle formulazioni dei modelli esistenti.

In questo capitolo viene quindi proposta una metodologia per implementare il *creep* direttamente nella formulazione classica del macroelemento con un approccio di tipo semiempirico. Inoltre viene descritto come questa nuova interpretazione si ripercuota sulla previsione di stabilità delle torri.

4.2 IL CREEP NEI MODELLI ELASTO-PLASTICI INCRUDENTI PER LE FONDAZIONI SUPERFICIALI

Ricordando che l'approccio descritto nel Capitolo 3 consente di presentare in modo semplice e unitario i problemi del collasso delle torri per mancanza di resistenza e per mancanza di rigidità della fondazione (precedentemente considerati in modo indipendente), è necessario evidenziare che la progressiva deformazione di ***creep* rotazionale** ha un effetto instabilizzante, ribaltante, e influisce quindi sulle condizioni di sicurezza a lungo termine delle torri (Marchi *et al.*, 2011).

Infatti, la stabilità delle torri si deteriora progressivamente ad ogni incremento di rotazione plastica per *creep* $\Delta\theta_{creep}$, che genera un incremento del momento ribaltante esterno $\Delta M_e = Wh\Delta\theta_{creep}$, che a sua volta va ad aumentare ulteriormente la rotazione nel tempo. In altri termini, all'aumentare dell'inclinazione della torre, aumentano le sollecitazioni, e quindi le deformazioni, del terreno di fondazione: cioè si può affermare che il *creep* del terreno "si autoalimenta".

Secondo l'**interpretazione convenzionale del *creep* introdotta da Cheney et al. (1991)**, la lenta rotazione aggiuntiva che si sviluppa nel tempo a causa del comportamento viscoso del terreno può essere trattata in modo analogo all'imperfezione iniziale del sistema. Pertanto il verificarsi di un meccanismo di collasso rispetto all'altro è regolato dalla semplice traslazione della curva M_r lungo l'asse θ , dovuta all'incremento nel tempo della rotazione per *creep*. È evidente che si tratta di un'interpretazione semplificata, in cui il *creep* non influenza la forma della curva M_r : per questo si parla di **modello non incrudente per *creep* (*non-hardening model*)**.

In realtà, anche se le deformazioni differite nel tempo possono portare ad una condizione critica per la stabilità della struttura, a lungo termine il *creep* agisce sulla rigidità del terreno provocandone un rafforzamento, che può compensare la riduzione del fattore di sicurezza della torre.

Per tenere conto del cosiddetto **incrudimento per *creep*** e ottenere una rappresentazione utile e realistica della risposta delle torri nel tempo, è quindi necessario sviluppare un modello **incrudente per *creep* (*creep-hardening model*)**, che integri, per analogia, un modello semiempirico elaborato per l'elemento di volume (si veda il Capitolo 2) nella formulazione dei modelli elasto-plastici incrudenti per le fondazioni superficiali.

Gli elementi principali di questo procedimento sono:

1. la scelta di un modello semiempirico di *creep* per l'elemento di volume;
2. l'analogia con il macroelemento per carico verticale costante;
3. l'estensione del modello per momento flettente variabile.

4.2.1 INCRUDIMENTO PER CREEP IN ANALOGIA CON IL MODELLO DI BJERRUM

Come trattato nella Sezione 2.2.3, il comportamento viscoso dei terreni a grana fine in condizioni di espansione laterale impedita (consolidazione secondaria) può essere rappresentato da una famiglia di curve tensione-deformazione sul piano $e - \log(\sigma'_v)$, chiamate “linee del tempo“, ognuna delle quali corrisponde ad una diversa durata di applicazione del carico.

Bjerrum (1967) ha così introdotto e motivato l'interessante ipotesi che la diminuzione dell'**indice dei vuoti** da e_0 a e'_0 , che si sviluppa a tensione verticale efficace σ'_{v0} costante per effetto del *creep* in condizioni di compressione confinata (**monodimensionale**), sia del tutto equivalente ad un processo di carico sulla curva di compressione vergine e successivo scarico (Figura 4.1a). In particolare, caricando ulteriormente il terreno dopo la fase di *creep*, la variazione dell'indice dei vuoti è regolata dall'**indice di rigonfiamento** C_s (*reloading compression index*).

La riduzione dell'indice dei vuoti che si verifica durante la compressione differita porta il terreno ad avere una struttura più stabile, che provoca un aumento della rigidità e della resistenza della fondazione (*aging*).

È importante ricordare che il modello di Bjerrum può essere inquadrato tra le **relazioni semiempiriche “secondarie”**, di tipo *time-hardening*, caratterizzate da soluzioni in forma chiusa e da relazioni in cui il tempo partecipa come parametro di incrudimento.

In particolare, la legge di creep semilogaritmica, utilizzata in seguito nel modello *creep-hardening*, descrive le deformazioni volumetriche dovute ai processi viscosi dello scheletro solido del terreno (**creep volumetrico**), relative alla sola fase di **creep primario** (velocità di deformazione decrescente nel tempo).

Il comportamento osservato per l'elemento di volume può essere esteso per **analogia** alla trattazione del macroelemento, quindi, sulla base delle precedenti considerazioni, si può assumere che il comportamento osservato da Bjerrum per l'indice dei vuoti sul piano $e - \log(\sigma'_v)$ valga anche per il **cedimento verticale di creep** w del

terreno al di sotto della fondazione superficiale di una torre, che può essere rappresentato sul piano $V - w$ (Marchi *et al.*, 2011).

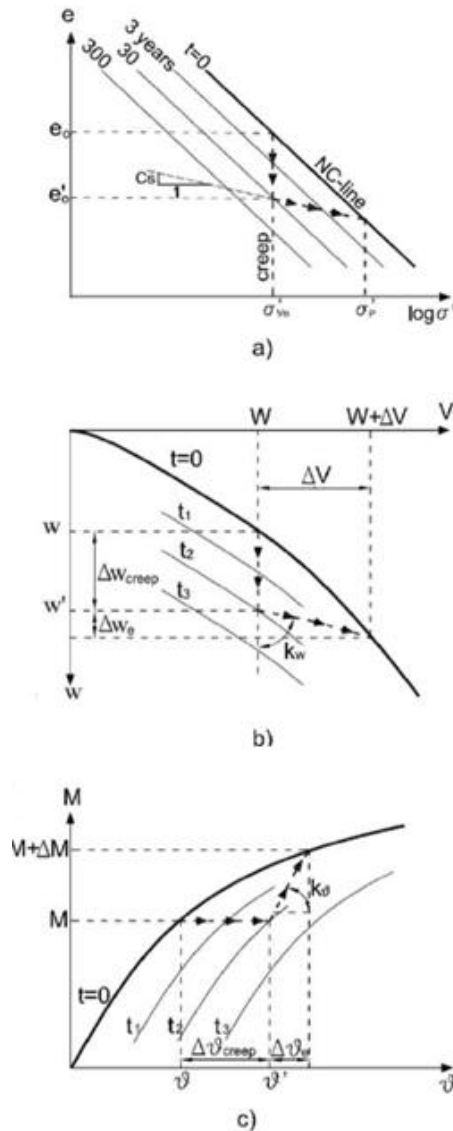


Figura 4.1. (a) *Creep hardening* secondo il modello di Bjerrum; (b) *incrudimento verticale per creep* per una fondazione superficiale; (c) *incrudimento rotazionale per creep* per una fondazione superficiale (Marchi *et al.*, 2011).

In generale il tempo necessario per applicare i carichi (cioè per applicare W in fase di costruzione nel caso di una torre) sarà molto breve rispetto alla scala temporale di interesse pratico per il *creep*, quindi si può considerare che i carichi vengano applicati istantaneamente, producendo un cedimento istantaneo.

Pertanto, sotto carico verticale costante $V = W$, il cedimento verticale w aumenta di una quantità pari a Δw_{creep} , fino a w' (Figura 4.1b); successivamente qualsiasi incremento del carico verticale ΔV genera un incremento elastico del cedimento verticale $\Delta w_e = \Delta V / k_w$, dove k_w è la rigidezza di scarico-ricarico verticale della fondazione.

In particolare, la curva $V - w$ (con $w = w_e + w_p$) in Figura 4.1b non è identica alla curva di *hardening* $V_0 = V_0(w_p)$, anche se è probabile che il contributo w_e sia trascurabile.

Un'assunzione simile può essere applicata anche alla **rotazione di creep della fondazione**, che aumenta da θ a θ' con momento flettente M costante, di una quantità pari a $\Delta \theta_{creep}$ (sul piano $M - \theta$ in Figura 4.1c); come per il *creep* verticale, un successivo incremento del momento ΔM provoca un incremento elastico della rotazione $\Delta \theta_e = \Delta M / k_\theta$, dove k_θ è la rigidezza rotazionale di scarico-ricarico del sistema terreno-fondazione.

Nel caso di una torre, si può notare che, mentre $\Delta V = 0$, ogni incremento elementare di rotazione di *creep* $\Delta \theta_{creep}$ genera un aumento del momento esterno applicato $\Delta M_e = Wh \Delta \theta_{creep}$ (Marchi *et al.*, 2011). Questo fatto gioca un ruolo importante in un'analisi realistica della stabilità dell'equilibrio di una torre in presenza di *creep* rotazionale (si veda Sezione 4.3).

Si può notare che c'è un'evidente analogia non solo tra i tre processi di scarico-ricarico rappresentati in Figura 4.1, ma anche tra la linea di compressione vergine, o di normalconsolidazione, e le curve $V - w$ ed $M - \theta$.

Questo meccanismo di incrudimento per *creep* coinvolge anche i processi elastici di "ricarico", cioè ogni incremento di carico tale da rimanere interno alla superficie di snervamento darà luogo solo a cedimenti di tipo elastico. Inoltre, si differenzia anche concettualmente dall'interpretazione degli effetti del *creep* rotazionale di Cheney *et al.* (1991), che si basa interamente sulla manipolazione della curva vergine $M - \theta$.

Considerando i processi di Figura 4.1b e Figura 4.1c, è evidente che il *creep* del terreno si manifesta secondo **due processi distinti di incrudimento**, uno relativo al

cedimento verticale e l'altro alla rotazione della fondazione. Infatti, ogni incremento di rotazione $\Delta\theta_{creep}$ e/o di cedimento Δw_{creep} dovuto a *creep*, di tipo plastico, genera incrudimento nel modello e quindi un'espansione della superficie di snervamento.

In realtà, nel modello elasto-plastico incrudente per fondazioni superficiali presentato in questa sede, l'incrudimento per *creep* è espresso in termini di un **unico parametro di incrudimento**, cioè il cedimento verticale plastico w_p , mediante la legge di *hardening* $V_0 = V_0(w_p)$.

Sulla base di queste considerazioni può quindi essere stabilita un'analogia tra il grado di sovraconsolidazione *OCR* e il cosiddetto grado di sovraconsolidazione "apparente" *OCR'* definito per la legge di *hardening* $V_0 - w_p$ tenendo conto del *creep* (Marchi *et al.*, 2011). Al fine di quantificare l'effetto del *creep* in termini di *OCR*, in condizioni edometriche si assume abitualmente, sulla base di evidenze sperimentali, una variazione lineare dell'indice dei vuoti (o della deformazione verticale) con il logaritmo del tempo (legge di *creep* semilogaritmica):

$$\text{Eq. 4.1} \quad \Delta e = C_{ae} \log\left(\frac{t_0 + t}{t_0}\right) \quad \text{oppure} \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta e}{1 + e_0} = \frac{C_{ae}}{1 + e_0} \log\left(1 + \frac{t}{t_0}\right)$$

dove C_{ae} = coefficiente di consolidazione secondaria, assunto costante; e_0 = indice dei vuoti iniziale; t_0 = tempo di fine della consolidazione primaria.

La compressione dovuta al *creep* è rappresentata in Figura 4.2 con il percorso A-C a tensioni efficaci costanti, mentre il punto B rappresenta la tensione di snervamento prodotta dal *creep*; allora si può scrivere la seguente relazione:

$$\text{Eq. 4.2} \quad e_A - e_C = (e_A - e_B) - (e_C - e_B)$$

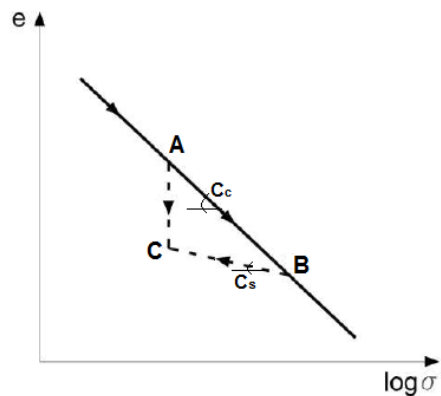


Figura 4.2. Valutazione di OCR (Marchi *et al.*, 2011).

Ipotizzando che le curve di compressione e di scarico siano rappresentate sul piano $[e - \log \sigma'_v]$ come linee rette, definite rispettivamente dalle pendenze C_c e C_s , la relazione precedente può anche essere espressa nella seguente forma:

$$\text{Eq. 4.3} \quad C_{\alpha e} \log \frac{t_C}{t_A} = C_c \log \frac{\sigma'_{vB}}{\sigma'_{vA}} - C_s \log \frac{\sigma'_{vB}}{\sigma'_{vC}}$$

Il grado di sovraconsolidazione OCR (*Over Consolidation Ratio*) è definito come il rapporto tra la massima tensione a cui il terreno è stato sottoposto e la sua tensione attuale.

Dall'equazione precedente si ottiene quindi che:

$$\text{Eq. 4.4} \quad OCR = \frac{\sigma'_{vB}}{\sigma'_{vA}} = \left(\frac{t_C}{t_A} \right)^{\frac{C_{\alpha e}}{C_c - C_s}}$$

Analogamente, per il sistema terreno-fondazione, il grado di sovraconsolidazione “apparente” OCR' può essere definito per la legge di *hardening* $V_0 - w_p$ dalla seguente espressione:

$$\text{Eq. 4.5} \quad OCR' = \frac{V_{0P}}{V_0}$$

Assumendo che $OCR = OCR'$ (esprimibile in funzione dei parametri del terreno mediante l'Eq. 4.4), si può dedurre che l'espansione della superficie di snervamento per effetto del *creep* avviene all'aumentare del parametro di incrudimento V_0 , fino a $V_{0P} = OCR' \cdot V_0$ (Marchi *et al.*, 2011).

Lo spostamento verticale plastico al tempo t , cioè $w_p = w_p(t)$, può essere quindi valutato in funzione di V_{0P} sulla curva di *hardening* $V_0 - w_p$.

Sulla base delle considerazioni fatte finora, si può affermare che l'analogia tra il comportamento $e - \log \sigma'_v$ del terreno e quello $V - w$ del sistema terreno-fondazione è stata ampiamente dimostrata.

4.2.2 INCRUDIMENTO PER CREEP IN ANALOGIA CON IL MODELLO DI TAVENAS

In realtà, per giustificare veramente l'estensione del comportamento per analogia da $V - w$ a $M - \theta$, è necessario superare il modello di Bjerrum, che si limita a descrivere il *creep* volumetrico monodimensionale in termini di consolidazione secondaria, e introdurre un approccio che tenga conto anche del *creep deviatorico*, cioè delle deformazioni viscoso deviatoriche, associate a variazioni di forma del terreno.

In particolare, sulla base della trattazione svolta nella Sezione 2.2.3, si considera l'**approccio di Tavenas et al. (1978)**, che, come il modello di Bjerrum, può essere inquadrato tra le **relazioni semiempiriche "secondarie"**, di tipo *time-hardening*.

Il modello descrive lo sviluppo nel tempo delle deformazioni di *creep*, sia volumetriche che deviatoriche, sfruttando l'equazione fenomenologica tensione-deformazione-tempo del modello di Singh e Mitchell (1968). In particolare, si ricorda che le componenti delle velocità di deformazione di *creep* volumetriche e deviatoriche possono essere espresse per l'elemento di volume da funzioni di potenza di questo tipo:

$$\text{Eq. 4.6} \quad \dot{\varepsilon}_v = B \exp(\alpha p') \left(\frac{t_i}{t} \right)^m$$

$$\text{Eq. 4.7} \quad \dot{\varepsilon}_q = A \exp(\alpha q) \left(\frac{t_i}{t} \right)^m$$

dove i parametri A e B sono proprietà del suolo che riflettono la composizione, la struttura e la storia tensionale; t_i è un parametro di riferimento del tempo con la stessa unità di misura di t , generalmente assunto pari all'unità; e il parametro m controlla la velocità con cui $\dot{\varepsilon}$ varia nel tempo.

Sulla base di risultati sperimentali, Tavenas et al. (1978) hanno verificato che l'Eq. 4.6 è analoga all'espressione della velocità di deformazione volumetrica di *creep* ottenuta derivando rispetto al tempo la legge semilogaritmica della consolidazione secondaria (Eq. 4.1) utilizzata da Bjerrum:

$$\text{Eq. 4.8} \quad \dot{\varepsilon}_v = \frac{C_{ae}}{1 + e_0} \frac{1}{\ln(10)} \frac{1}{t}$$

Per chiarire le precedenti osservazioni, nella Tabella 4.1 vengono messe a confronto le formulazioni dei modelli di Bjerrum (1967) e di Tavenas et al. (1978).

MODELLO DI BJERRUM (1967)		MODELLO DI TAVENAS (1978)	
Variabili	Formulazione	Formulazione	Variabili
$\varepsilon_z - \sigma'_v - t$	$\dot{\varepsilon}_v = \frac{C_{\alpha e}}{1 + e_0} \frac{1}{\ln(10)} \frac{1}{t}$	$\dot{\varepsilon}_v = B \exp(\alpha p') \left(\frac{t_i}{t}\right)^m$	$\varepsilon_v - p' - t$
-	-	$\dot{\varepsilon}_q = A \exp(\alpha q) \left(\frac{t_i}{t}\right)^m$	$\varepsilon_q - q - t$

Tabella 4.1. Passaggio dal modello di Bjerrum al modello di Tavenas.

Utilizzando l'approccio di Tavenas è possibile superare un altro limite del modello di Bjerrum, cioè la capacità di descrivere il solo comportamento di *creep* primario; infatti, la funzione logaritmica prevede una continua riduzione della velocità di deformazione.

In realtà, come ampiamente trattato per l'elemento di volume nel Capitolo 1, a seconda della mobilitazione a taglio del terreno, le deformazioni possono avere velocità decrescente, costante o crescente nel tempo: cioè, se la tensione deviatorica è bassa, si verifica solo la fase di **creep primario**, mentre, se essa supera un certo livello, il *creep* primario viene seguito dal **creep secondario**, che può portare infine al **creep terziario** e alla rottura per *creep*. In altri termini, mentre durante il *creep* primario il terreno raggiunge una condizione più stabile, a cui è generalmente associato un aumento della resistenza (incrudimento), durante il *creep* secondario e terziario prevale l'indebolimento della struttura del terreno.

In particolar modo nel caso delle torri, è indispensabile tenere conto delle fasi di *creep* secondario e terziario per ottenere una corretta e realistica analisi di stabilità.

Per analogia tra l'elemento di volume e il macroelemento, le tensioni deviatoriche q svolgono lo stesso ruolo del momento flettente M (Houlsby e Cassidy, 2002) e le deformazioni deviatoriche ε_q possono essere considerate equivalenti alle rotazioni θ .

L'analogia tra il comportamento $q - \varepsilon_q$ per l'elemento di volume e il comportamento $M - \theta$ per il macroelemento può essere ulteriormente avvalorata confrontando le curve di Figura 4.1c con quelle di Figura 1.24 relative a prove di *creep*.

4.3 INFLUENZA DEL CREEP SULL'ANALISI DI STABILITÀ DELLE TORRI

Il *creep* rotazionale, a differenza del *creep* verticale sotto carico verticale costante, influisce sullo stato di sollecitazione della fondazione di una torre.

Infatti, per ogni incremento finito della rotazione per *creep* $\Delta\theta_{creep}$, il corrispondente **incremento del momento esterno** vale:

$$\text{Eq. 4.9} \quad \Delta M_e = Wh\Delta\theta = Wh(\Delta\theta_e + \Delta\theta_{creep})$$

dove $\Delta\theta$ è l'incremento della rotazione al tempo t , dato dalla somma della rotazione per *creep* ($\Delta\theta_{creep}$) e della rotazione elastica dovuta all'aumento del momento esterno ($\Delta\theta_e$), come mostrato in Figura 4.3a. Dato che l'incrudimento verticale avviene ampliando la superficie di snervamento fino a V_{0P} , tutte le rotazioni aggiuntive $\Delta\theta_e$, che si sviluppano per ottenere un nuovo stato di equilibrio sulla curva del momento esterno M_e , sono elastiche (cioè all'interno della superficie di snervamento).

La Figura 4.3b mostra l'**evoluzione incrementale del processo di *creep hardening* rotazionale**, che, a partire dallo stato iniziale di equilibrio stabile inferiore E_0 della torre, prosegue fino al punto E_1 in cui si verifica il collasso per instabilità della torre (Marchi *et al.*, 2011). In altri termini, la configurazione di equilibrio della torre tende ad evolversi nel tempo fino a quando, al di là del punto E_1 , la fondazione non è più in grado di equilibrare il momento esterno generato dalla sovrastruttura.

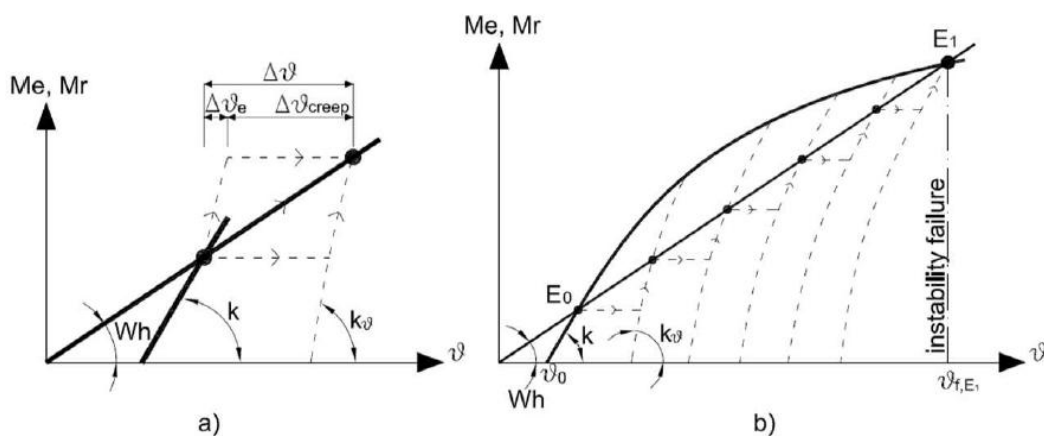


Figura 4.3. (a) Incremento delle rotazioni e del momento esterno dovuto al *creep*, e (b) *creep* rotazionale per una torre (Marchi *et al.*, 2011).

Il *creep* rotazionale in una torre è quindi un processo continuo, dinamico e progressivo, che può portare al collasso finale della struttura.

In Figura 4.4 sono rappresentate la nuova previsione del collasso che tiene conto del *creep* rotazionale, indicata dal punto E_1 corrispondente alla rotazione $\theta_{f,E1}$, e la previsione che si ottiene dalla convenzionale interpretazione non incrudente, descritta nella Sezione 3.3, indicata invece dal punto E_2 corrispondente alla rotazione $\theta_{f,E2}$, in cui si assume che la curva M_r trasli lungo l'asse θ per effetto delle rotazioni di *creep*.

La nuova interpretazione del collasso per instabilità (Marchi *et al.*, 2011) elimina il processo di traslazione della curva e incrementa sempre il valore della rotazione al quale è previsto il collasso ($\theta_{f,E1} > \theta_{f,E2}$), cioè l'inclinazione della torre corrispondente al punto E_1 di intersezione superiore tra la linea del momento esterno M_e e la curva M_r passante per il punto $(M = 0, \theta_0)$.

Questa configurazione geometrica ha validità generale, cioè il risultato viene ricavato indipendentemente dallo specifico modello di *creep* considerato e viene influenzato esclusivamente dal valore dell'imperfezione iniziale θ_0 , dalla forma della curva di M_r e dalle caratteristiche geometriche della torre (h e W , che determinano la retta del momento esterno).

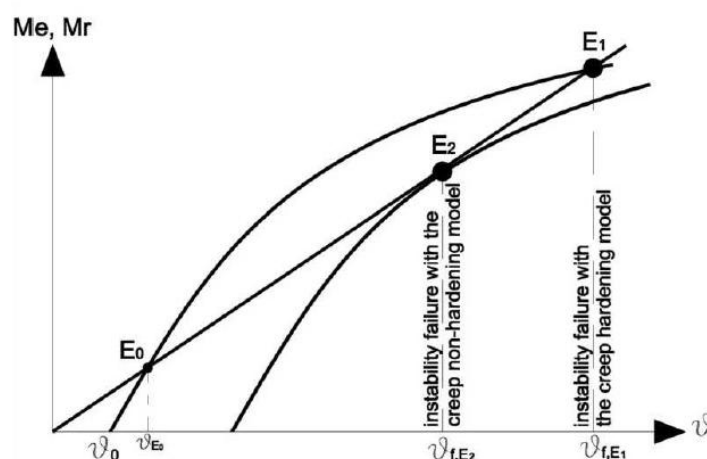


Figura 4.4. Previsione di stabilità dell'equilibrio delle torri: confronto tra i modelli di *creep* incrudente e non incrudente (Marchi *et al.*, 2011).

Nonostante il nuovo modello mostri un margine di sicurezza maggiore in termini di rotazione della struttura (Figura 4.4), è comunque importante tener conto del fatto che,

avvicinandosi al collasso (*creep* secondario e terziario), la velocità di rotazione per *creep* accelera rapidamente, riducendo l'incremento della vita utile della torre.

Tale fenomeno non può essere trascurato in un'accurata analisi di stabilità e richiede la definizione di una legge di evoluzione delle rotazioni nel tempo (Sezione 4.4), che consenta di prevedere il tempo di collasso del sistema.

Un altro risultato importante è che ora la curva M_r non gioca alcun ruolo nel processo di *creep*, se non quello di definire i due punti d'intersezione E_0 ed E_1 .

L'intero processo dovuto al *creep* oltre il punto E_0 rimane "sotto" la curva vergine M_r finché la retta del momento esterno M_e la interseca di nuovo nel punto di collasso E_1 .

Il nuovo modello fornisce quindi una possibile spiegazione di come le strutture possano presentare rotazioni inaspettatamente ampie senza andare a collasso o comunque rimanendo apparentemente in condizioni di equilibrio neutrale per periodi molto prolungati (ad esempio nei casi reali della torre di Pisa e della torre Garisenda a Bologna).

4.4 PREVISIONE DELL'EVOLUZIONE DELLE ROTAZIONI NEL TEMPO

La componente finale necessaria per completare l'analisi di stabilità è costituita dalla previsione della velocità con cui la rotazione dell'asse della torre, e idealmente anche il suo spostamento verticale, aumenteranno durante la sua vita fino al collasso nel punto E_1 per effetto del *creep* (Figura 4.4).

Per fare questo è necessario introdurre una **funzione di *creep* rotazionale**, che regoli l'andamento con cui la rotazione dell'asse (innescata da θ_0) aumenta in seguito alla costruzione della torre e che tenga conto anche del processo di *creep* terziario, che è legato alla componente deviatorica degli sforzi e può provocare un rapido aumento dell'inclinazione, e di conseguenza del momento flettente, fino al collasso (Marchi *et al.*, 2011).

Se $z(t)$ è la **funzione di creep**, allora la rotazione di *creep* della torre è definita da $\theta_{creep} = z(t)$, dove il tempo t varia da zero alla fine del processo di costruzione della torre, con $\theta = \theta_0$ quando $t = 0$.

Le funzioni di *creep* sono spesso **logaritmiche**, quindi si può assumere ad esempio:

$$\text{Eq. 4.10} \quad z(t) = \ln\left(1 + \frac{t}{t_0}\right)$$

dove t_0 è un parametro di scala del tempo con la stessa unità di misura di t .

Questa espressione fornisce la seguente velocità di deformazione di *creep*:

$$\text{Eq. 4.11} \quad \dot{\theta}_{creep} = \frac{d\theta_{creep}}{dt} = \frac{1}{(1+t/t_0)}$$

che, come spiegato nella Sezione 4.2, genera un incremento del momento esterno nel tempo pari a:

$$\text{Eq. 4.12} \quad \frac{dM}{dt} = Wh \frac{d\theta_{creep}}{dt}$$

e una velocità di variazione della rotazione totale pari a:

$$\text{Eq. 4.13} \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \left(1 + \frac{Wh}{k_\theta}\right) \frac{1}{(1+t/t_0)}$$

dove k_θ è la rigidità rotazionale della fondazione.

Integrando l'equazione precedente, con $\theta = \theta_0$ quando $t = 0$, si ottiene un'espressione della rotazione totale in un qualsiasi istante di tempo t dopo l'imperfezione iniziale del torre:

$$\text{Eq. 4.14} \quad \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t \frac{1 + Wh/k_\theta}{1 + t/t_0} dt$$

$$\text{Eq. 4.15} \quad \Rightarrow \theta(t) = \left(1 + \frac{Wh}{k_\theta}\right) \ln\left(1 + \frac{t}{t_0}\right) + \theta_0$$

Tale equazione permette di descrivere un processo di deformazione che aumenta nel tempo per effetto del *creep*, ma è evidente che rappresenta la sola fase di *creep* primario, caratterizzata da un andamento della velocità di rotazione decrescente nel tempo.

In Figura 4.5 è riportato l'andamento della rotazione nel tempo, secondo l'Eq. 4.15, assumendo dei valori generici delle proprietà del sistema:

$$W = 100 \text{ MN}, k = 100000 \text{ MNm}^\circ, h = 10 \text{ m}, t_0 = 1 \text{ anno}, \text{ e } \theta_0 = 1^\circ.$$

Inoltre tale modello non descrive la perdita di resistenza del terreno a lungo termine, perciò è necessario introdurre nella formulazione una **funzione di creep terziario** che permetta di generare spostamenti che aumentano esponenzialmente nel tempo e portano il terreno al collasso (Marchi *et al.*, 2011). Questo comportamento può essere ottenuto con una funzione di *creep* terziario del tipo:

Eq. 4.16
$$z_3(t) = -c \ln\left(1 - \frac{t}{t_f}\right)$$

che ha la proprietà di essere nulla per $t=0$ e infinito quando $t=t_f$ (*time to failure*).

Inoltre, questo processo sarà accompagnato da un ricarico elastico.

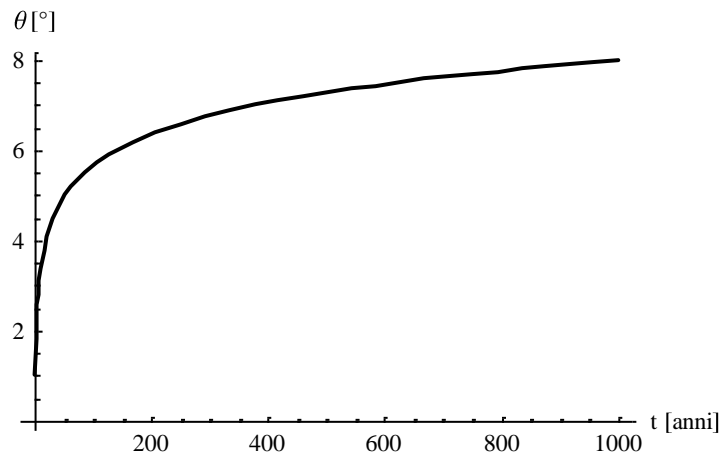


Figura 4.5. Rappresentazione dell'Eq. 4.15 per parametri generici.

Sommando i contributi di *creep* primario e terziario, si ottiene la seguente equazione che consente di modellare l'intera storia di *creep*:

Eq. 4.17
$$\theta(t) = \left(1 + \frac{Wh}{k_\theta}\right) \left[\ln\left(1 + \frac{t}{t_0}\right) - c \ln\left(1 - \frac{t}{t_f}\right) \right] + \theta_0$$

dove t_i e t_f sono “tempi arbitrari” e c è un parametro che può essere determinato dai dati sperimentali.

In Figura 4.6 è rappresentato l'andamento qualitativo della rotazione nel tempo, secondo l'Eq. 4.17, assumendo dei valori generici per le proprietà geometriche del sistema e per i parametri della funzione:

$$W = 100 \text{ MN}, k = 100000 \text{ MNm}^\circ, h = 10 \text{ m}, t_0 = 1 \text{ anno}, \theta_0 = 1^\circ,$$

$$t_f = 1000 \text{ anni}, c = 1.$$

La corrispondente velocità di rotazione nel tempo è data da:

Eq. 4.18
$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \left(1 + \frac{Wh}{k_\theta}\right) \left(\frac{1}{t_0 + t} - \frac{c}{t_f - t}\right)$$

L'andamento qualitativo dell'equazione precedente è riportato in Figura 4.7 per valori generici dei parametri.

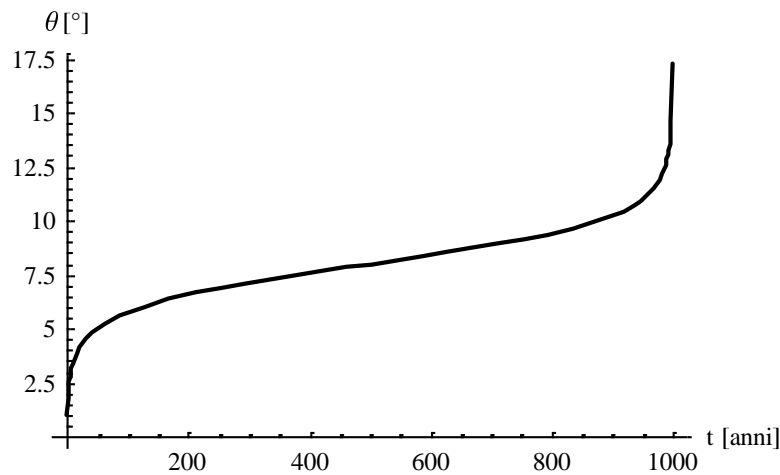


Figura 4.6. Rappresentazione dell'Eq. 4.17 per parametri generici (Marchi *et al.*, 2011).

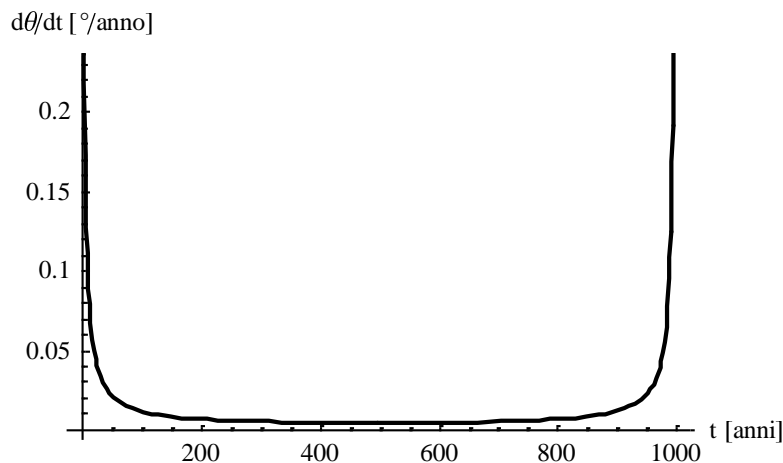


Figura 4.7. Rappresentazione dell'Eq. 4.18 per parametri generici.

Tuttavia, in queste equazioni il processo di *creep* terziario inizia al tempo $t = 0$, mentre nel caso di una torre pendente l'insorgenza del *creep* terziario deve essere giustificata da qualche cambiamento fisico nel sistema torre-fondazione. Ad esempio si può ragionevolmente ipotizzare che la fase terziaria inizi quando l'inclinazione della torre diventa abbastanza grande da far perdere il contatto tra la base della fondazione e il terreno sul lato scarico della fondazione stessa (**parzializzazione della base**). Dopo aver raggiunto questa condizione, l'area efficace della fondazione si ridurrà progressivamente all'aumentare della rotazione.

Se si assume che il *creep* terziario inizi quando $t = t_2$, si può quindi introdurre il concetto appena descritto modificando l'Eq. 4.17 in questo modo:

$$\text{Eq. 4.19} \quad \theta(t) = \left(1 + \frac{Wh}{k_\theta}\right) \left[\ln\left(1 + \frac{t}{t_0}\right) - c \ln\left(1 - \frac{t-t_2}{t_1}\right) U(t-t_2) \right] + \theta_0$$

dove il tempo t_1 fornisce il tempo $t_f = t_1 + t_2$ in cui crollerà la torre e $U(t-t_2)$ è una funzione a scalino unitario (*unit step function*), pari a 0 per $t < t_2$ e 1 per $t \geq t_2$.

Chiaramente, il processo di *creep* in termini di cedimento verticale, senza il termine Wh/k_θ , può essere modellato in modo analogo a quello rotazionale in termini di w e w_0 :

$$\text{Eq. 4.20} \quad \int_{w_0}^w dw = \int_0^t \frac{1}{1+t/t_0} dt$$

$$\text{Eq. 4.21} \quad \Rightarrow w(t) = \ln\left(1 + \frac{t}{t_0}\right) + w_0$$

4.4.1 INTEGRAZIONE DEL MODELLO DI TAVENAS PER IL MACROELEMENTO

In alternativa alla funzione logaritmica, si può pensare di ricavare la funzione di *creep* rotazionale per il macroelemento, sfruttando l'analogia con l'Eq. 4.7 (Sezione 4.2.2), relativa all'approccio di Tavenas *et al.* (1978):

$$\text{Eq. 4.22} \quad \dot{\theta}_{creep} = \frac{d\theta_{creep}}{dt} = A \exp(\alpha M) \left(\frac{t_i}{t}\right)^m$$

dove $A(>0)$, $\alpha(>0)$ e $m(>0)$ sono i parametri di *creep* del modello (per l'elemento di volume si veda Sezione 2.2.3). Il problema della definizione e determinazione dei parametri verrà approfondito nella Sezione 4.4.2.

In particolare, l'Eq. 4.7, formulata sulla base di risultati sperimentali per l'elemento di volume, è valida nel caso di tensione deviatorica costante, cioè le variabili dell'equazione sono solo la rotazione θ e il tempo t . In realtà, nel caso delle torri, è necessario tenere conto del fatto che, mentre il carico verticale è costante, pari a $V = W$, il momento esterno applicato aumenta nel tempo all'aumentare della rotazione dell'asse. Comunque, essendo $M = Wh\theta(t)$, è possibile esprimere la variazione di M in funzione della variabile $\theta(t)$.

Tenendo conto di queste considerazioni, la velocità della rotazione totale può essere espressa dalla seguente relazione:

$$\text{Eq. 4.23} \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \left(1 + \frac{Wh}{k_\theta}\right) A \exp(\alpha Wh \theta) \left(\frac{t_i}{t}\right)^m$$

Si integra quest'equazione, per $m \neq 1$, in un qualsiasi istante di tempo t successivo all'imperfezione iniziale della torre ($\theta = \theta_0$ quando $t = 0$):

$$\begin{aligned} \text{Eq. 4.24} \quad \int_{\theta_0}^{\theta} e^{-\alpha Wh \theta} d\theta &= \left(1 + \frac{Wh}{k_\theta}\right) A t_i^m \int_0^t t^{-m} dt \\ &\Rightarrow \left[\frac{e^{-\alpha Wh \theta}}{-\alpha Wh} \right]_{\theta_0}^{\theta} = \left(1 + \frac{Wh}{k_\theta}\right) A t_i^m \frac{t^{1-m}}{1-m} \\ &\Rightarrow e^{-\alpha Wh \theta} = \underbrace{-\alpha Wh \left(1 + \frac{Wh}{k_\theta}\right) \frac{A t_i^m}{1-m} t^{1-m}}_{>0} + e^{-\alpha Wh \theta_0} \\ &\Rightarrow -\alpha Wh \theta = \ln \left[e^{-\alpha Wh \theta_0} - \alpha Wh \left(1 + \frac{Wh}{k_\theta}\right) \frac{A t_i^m}{1-m} t^{1-m} \right] \end{aligned}$$

Si ottiene infine l'evoluzione nel tempo della rotazione totale della fondazione:

$$\text{Eq. 4.25} \quad \Rightarrow \theta(t) = -\frac{1}{\alpha Wh} \ln \left[\exp(-\alpha Wh \theta_0) - \left(1 + \frac{Wh}{k_\theta}\right) \alpha Wh A \frac{t_i^m}{1-m} t^{1-m} \right]$$

Tale equazione permette di descrivere un processo di deformazione che aumenta monotonamente per $t \rightarrow \infty$, come si può vedere in Figura 4.8. Per le proprietà

geometriche del sistema e per i parametri della funzione sono stati assunti dei valori significativi: $W = 100 \text{ MN}$, $k = 100000 \text{ MNm}^\circ$, $h = 10 \text{ m}$, $\theta_0 = 1^\circ$,

$$m = 0,8 \frac{^\circ/\text{anno}}{\text{anno}}, A = 0,1^\circ/\text{anno}, \text{ e } \alpha = 0,00035 \frac{^\circ/\text{anno}}{\text{MNm}}.$$

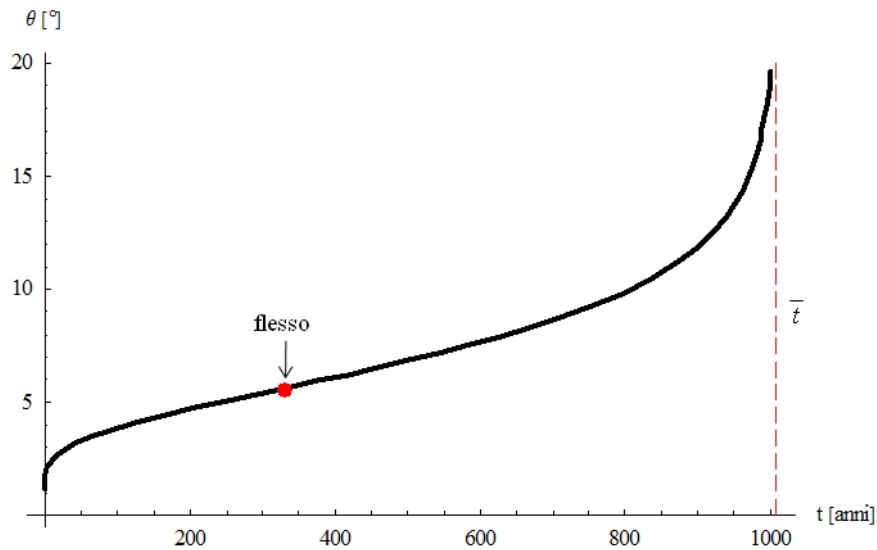


Figura 4.8. Rappresentazione dell'Eq. 4.25 per parametri generici.

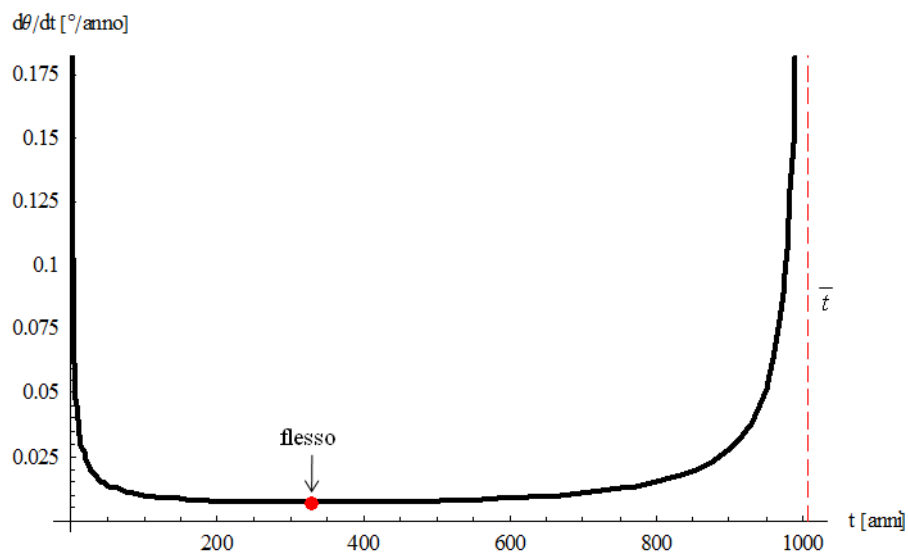


Figura 4.9. Rappresentazione dell'Eq. 4.23 per parametri generici.

Analogamente, in Figura 4.9 è mostrato l'andamento della corrispondente velocità di rotazione, dove si può osservare il comportamento tipico dei processi di *creep* e distinguere le fasi di *creep* primario (caratterizzato da una velocità di rotazione

decescente nel tempo), *creep* secondario (caratterizzato da una velocità di rotazione costante) e *creep* terziario (caratterizzato da un'accelerazione della rotazione).

In generale $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$, quindi, per ottenere valori positivi della rotazione dalla funzione dell'Eq. 4.25, i parametri devono essere calibrati in modo da rispettare la seguente condizione per $t \rightarrow \infty$:

$$\text{Eq. 4.26} \quad 0 < \left[\exp(-\alpha Wh \theta_0) - \left(1 + \frac{Wh}{k_\theta}\right) \alpha Wh A \frac{t_i^m}{1-m} t^{1-m} \right] < 1$$

Evidentemente esisterà sempre un particolare valore di t , indicato con \bar{t} , per il quale l'argomento del logaritmo naturale si annulla, cioè:

$$\text{Eq. 4.27} \quad \bar{t} = \left[\frac{(1-m) \exp(-\alpha Wh \theta_0)}{\left(1 + Wh/k_\theta\right) \alpha Wh A t_i^m} \right]^{\frac{1}{1-m}}$$

e la curva presenta un asintoto all'infinito, come si può vedere in Figura 4.8 (linea tratteggiata in rosso). In corrispondenza di \bar{t} la funzione dell'Eq. 4.26 tenderà quindi bruscamente all'infinito, essendo $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x) = \infty$, cioè la rotazione del sistema accelererà indefinitamente, in modo analogo a quanto accade durante il *creep* terziario, portando infine al collasso (Figura 4.8).

Tuttavia la possibilità di attribuire al valore assunto da \bar{t} un vero e proprio significato fisico, analogo al *time to failure* dei terreni coesivi (in corrispondenza della loro perdita di resistenza a lungo termine), non è facilmente dimostrabile né del tutto verosimile, dal momento che le rotazioni corrispondenti a \bar{t} possono risultare già abbastanza elevate rispetto a quelle relative al collasso per instabilità dell'equilibrio di una torre (non più di 10° circa).

Per questo motivo sembra interessante osservare piuttosto la posizione del punto di flesso dell'Eq. 4.25 (puntino rosso in Figura 4.8), indicato con \hat{t} , che può essere facilmente ricavata annullando la derivata seconda della funzione stessa:

$$\text{Eq. 4.28} \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0 \Rightarrow \hat{t}$$

Infatti, secondo tale modello, il punto di flesso può rappresentare l'innesco della fase di *creep* terziario, che, in seguito ad un qualche cambiamento fisico nel sistema torre-fondazione (ad esempio la parzializzazione della base come accennato in

precedenza), un aumento esponenziale nel tempo delle rotazioni che portano al collasso il sistema.

Pertanto, l'andamento della rotazione nel tempo secondo l'Eq. 4.25 ha il vantaggio di essere stato ricavato direttamente dall'analogia con un modello semiempirico di *creep* dei terreni coesivi e permette di rappresentare non solo il comportamento tipico della fase di *creep* primario, ma anche le fasi di *creep* secondario e terziario (Figura 4.8), diversamente dalla formulazione dell'Eq. 4.19, dove, per modellare l'intera storia di *creep*, è necessario introdurre una funzione di *creep* terziario (Figura 4.6).

Tuttavia rimane aperta la problematica di definire se e quando potrebbe avvenire l'innescio di una rottura per *creep* terziario, dal momento che tale fenomeno, pur essendo contemplato nella formulazione matematica definita per la legge rotazione-tempo, non ha ancora una plausibile giustificazione fisica.

Sfruttando poi l'analogia con l'espressione delle deformazioni volumetriche relativa all'approccio di Tavenas (Eq. 4.6), si può introdurre anche una funzione che esprima la variazione nel tempo del cedimento verticale di *creep* per il macroelemento:

$$\text{Eq. 4.29} \quad \dot{w}_{creep} = \frac{dw_{creep}}{dt} = B \exp(\alpha V) \left(\frac{t_i}{t} \right)^m$$

dove B , α e m sono i parametri del modello di *creep* (per l'elemento di volume si veda Sezione 2.2.3).

Integrando l'Eq. 4.29 per $m \neq 1$, si ottiene il cedimento verticale della fondazione in un qualsiasi istante di tempo t successivo all'imperfezione iniziale della torre ($w = w_0$ quando $t = 0$):

$$\text{Eq. 4.30} \quad \int_{w_0}^w dw = \int_0^t B \exp(\alpha V) \left(\frac{t_i}{t} \right)^m dt$$

$$\text{Eq. 4.31} \quad \Rightarrow w(t) = \frac{B \cdot t_i}{1-m} \exp(\alpha V) \left(\frac{t}{t_i} \right)^{1-m} + w_0$$

Nella Tabella 4.2 sono rappresentate e messe a confronto le formulazioni dei modelli di *creep* di Bjerrum e di Tavenas, sviluppati per l'elemento di volume sulla base di risultati sperimentali, e le formulazioni dei macro-modelli, ricavate per analogia sulla base delle considerazioni svolte finora in questo Capitolo.

ANALOGIA				
ELEMENTO DI VOLUME			MACROELEMENTO	
Modello	Variabili	Formulazione	Formulazione	Variabili
Bjerrum (1967)	$\varepsilon_z - \sigma'_v - t$	$\varepsilon_z = \frac{C_{\alpha e}}{1 + e_i} \log \frac{t_i + t}{t_i}$ $OCR = \frac{\sigma'_{vB}}{\sigma'_{vA}} = \left(\frac{t_c}{t_A} \right)^{\frac{C_{\alpha e}}{c_c - c_s}}$	$w(t) = \ln \left(1 + \frac{t}{t_0} \right) + w_0$ $OCR = OCR' = V_{0P} / V_0$	$w - V - t$
			$\theta(t) = \left(1 + \frac{Wh}{k_\theta} \right) \ln \left(1 + \frac{t}{t_0} \right) + \theta_0$	$\theta - M - t$
Tavenas <i>et al.</i> (1978)	$\varepsilon_v - p' - t$	$\varepsilon_v = \frac{B \cdot t_i}{1 - m} e^{\alpha p'} \left(\frac{t}{t_i} \right)^{1-m}$	$w(t) = \frac{B \cdot t_i}{1 - m} e^{\alpha v} \left(\frac{t}{t_i} \right)^{1-m} + w_0$	$w - V - t$
	$\varepsilon_q - q - t$	$\varepsilon_q = \frac{A \cdot t_i}{1 - m} e^{\alpha q} \left(\frac{t}{t_i} \right)^{1-m}$	$\theta(t) = -\frac{1}{\alpha Wh} \ln \left[e^{-\alpha Wh \theta_0} + \right.$ $\left. - \left(1 + \frac{Wh}{k_\theta} \right) \alpha Wh A \frac{t_i^m}{1 - m} t^{1-m} \right]$	$\theta - M - t$

Tabella 4.2. Analogia dei modelli di creep tra elemento di volume e macroelemento.

4.4.2 DISCUSSIONE SUI PARAMETRI DEL MODELLO

Una volta stabilito il modello di evoluzione nel tempo delle rotazioni dell'asse di una torre (Eq. 4.25), è necessario valutare l'applicabilità e l'affidabilità del modello mediante la calibrazione dei parametri sui dati pregressi di torri storiche.

La calibrazione dei parametri e la validazione del modello verranno poi sviluppate nel Capitolo 5 per diversi *case histories*, in particolare per la Torre di Pisa, il campanile di Santo Stefano a Venezia, la Torre Ghirlandina di Modena, la Torre degli Asinelli e la Torre Garisenda di Bologna.

Per ogni torre storica sono disponibili alcune valutazioni e/o misurazioni dell'inclinazione dell'asse documentate nei secoli, che permettono di ricostruire la storia del comportamento della torre stessa. Sfortunatamente, i dati esistenti non sono mai molto numerosi né completamente attendibili.

Comunque, in molti casi, nel corso dell'ultimo secolo, sono state avviate, e progressivamente ampliate, osservazioni strumentali sistematiche della recente evoluzione delle rotazioni nel tempo a cui è possibile certamente fare riferimento.

Evidentemente questi dati $[\theta - t]$ costituiscono la base di partenza dell'analisi del comportamento a lungo termine del sistema terreno-fondazione-torre.

Inoltre, a partire dai valori della rotazione di una torre, è possibile calcolare il corrispondente momento applicato in fondazione, essendo $M = Wh\theta$.

Il problema della modellazione dei processi di *creep* impone di considerare periodi di tempo molto lunghi, soprattutto nel caso di torri storiche, costruite centinaia di anni fa. Per questo motivo, nell'analisi dell'evoluzione del *creep* rotazionale proposta in questi capitoli, si è scelto di misurare il tempo in anni e di assumere l'origine della scala dei tempi ($t = 0$) sulla base della storia della costruzione delle torri.

Le rotazioni della torre θ , invece, vengono misurate in gradi sessagesimali oppure, alternativamente, in radianti, ricordando che $\theta[rad] = \theta[^\circ]\pi/180$.

Le principali proprietà geometriche delle torri necessarie ai fini dell'analisi di *creep* sono:

- il peso della torre W , in MN;
- l'altezza del baricentro al di sopra del piano di fondazione h , in m;
- la rigidezza rotazionale del sistema terreno-fondazione k_θ , in MNm/°.

➤ L'imperfezione iniziale $\theta_0 = \theta(t=0)$ è difficile da valutare in modo preciso poiché rappresenta la rotazione dovuta all'eccentricità del baricentro della torre e sviluppata durante la costruzione. Inoltre, θ_0 fa parte dell'argomento del logaritmo naturale nell'Eq. 4.25, diversamente dall'Eq. 4.19, quindi influisce direttamente sull'andamento della curva $[\theta - t]$ e non è possibile distinguerla dal termine che rappresenta l'incremento di rotazione dovuto al *creep*.

Nasce poi l'esigenza di chiarire la definizione, non così immediata, dei parametri del modello di *creep*, cioè t_i , m , α , A . Tali parametri sono stati introdotti da Singh e Mitchell (1968) nella relazione semiempirica generale tra la velocità di deformazione

assiale e il tempo, che descrive il comportamento triassiale di *creep* dei terreni coesivi (si veda Sezione 2.2.3).

I tre parametri del modello di *creep* m , α e A possono essere determinati sperimentalmente a partire dai risultati di alcune prove triassiali di *creep* su campioni di un determinato terreno.

In generale, nella quasi totalità dei casi reali non è possibile avere a disposizione i risultati di prove di *creep* sui terreni presenti in sito, a causa dei lunghi tempi di attesa e degli elevati costi. Per questo motivo, i parametri della nuova formulazione proposta sono stati definiti unicamente sulla base dell'analogia tra elemento di volume e macroelemento.

➤ Per analogia con l'elemento di volume, il tempo di riferimento t_i viene generalmente assunto pari a 1 anno.

➤ Il parametro m di Singh e Mitchell coincide con la pendenza delle curve di *creep* che interpolano i dati sperimentali a tensione deviatorica costante sul piano logaritmico [$\text{Log}(\dot{\epsilon}_1) - \text{Log}(t)$], quindi controlla l'andamento con cui la velocità di deformazione assiale diminuisce nel tempo. Secondo Tavenas *et al.* (1978), si può considerare un unico valore di m costante per un determinato terreno.

Si ricorda che per le argille normalconsolidate i valori di m rientrano generalmente in un range $0,75 \div 1,3$, mentre per le argille sovraconsolidate $m = 0,7 \div 0,8$. In particolare, l'eventuale perdita di resistenza del terreno, con rottura per *creep*, è associata a valori di m minori di 1.

Per analogia si può determinare m come la pendenza della retta che interpola i dati noti sul piano [$d\theta/dt - t$] in scala logaritmica, cioè:

$$\text{Eq. 4.32} \quad m = - \frac{\Delta \log(\dot{\theta})}{\Delta \log(t)} \quad \left[\frac{\text{°/anno}}{\text{anni}} \right]$$

Il parametro m controlla quindi l'andamento con cui la velocità di rotazione della torre diminuisce nel tempo.

Tuttavia, ciascun dato rotazione-tempo noto per la torre corrisponde ad un valore diverso del momento flettente, quindi in realtà la retta che interpola i dati delle velocità

di deformazione nel tempo non è a momento costante, diversamente dalla trattazione per l'elemento di volume (in cui la retta è a tensione deviatorica costante).

Per valutare il parametro m è quindi necessario conoscere l'andamento, o per lo meno una stima, della velocità di rotazione della Torre in funzione del tempo (in scala logaritmica).

Per questo motivo si propone di valutare la velocità di rotazione $[d\theta/dt - t]$ come la derivata di una funzione capace di interpolare i dati noti della torre $[\theta - t]$.

Si può utilizzare ad esempio una funzione logaritmica di equazione:

$$\text{Eq. 4.33} \quad \theta = \ln\left(1 + \frac{t}{t_0}\right) + \theta_0$$

dove t_0 è un parametro, che dipende dall'entità e dall'unità di misura della rotazione.

L'introduzione di tale funzione consente quindi di stimare l'andamento della velocità di rotazione nel tempo:

$$\text{Eq. 4.34} \quad \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \frac{1}{t_0(1+t/t_0)}$$

Comunque i valori di m , ricavati seguendo questa modalità per i *case histories* presentati nel Capitolo 5, presentano valori compresi tra 0,60 e 0,95 circa, analogamente ai valori tipici per le argille sovraconsolidate.

Inoltre, ripetendo l'analisi con le rotazioni in radianti, piuttosto che in gradi, si ritrova lo stesso valore di m , che può quindi essere considerato come un parametro costante.

➤ Nel modello di Tavenas *et al.* (1978), il parametro A rappresenta l'intercetta della curva relativa al tempo di riferimento t_i sul piano semilogaritmico $[Log(\dot{\epsilon}_1) - q]$, cioè individua l'ordine di grandezza della velocità di deformazione di *creep* per $q = 0$ al tempo t_i .

I valori di A dipendono dalla composizione, dalla struttura e dalla storia tensionale del terreno, quindi possono variare in un *range* molto ampio ($2 \cdot 10^{-8} \div 4 \cdot 10^{-3} \% / \text{min}$).

Per analogia si potrebbe determinare A come l'intercetta della retta relativa al tempo di riferimento t_i sul piano $[Log(d\theta/dt) - M]$ in scala semilogaritmica:

$$\text{Eq. 4.35} \quad A = \frac{d\theta}{dt}(t = t_i, M = 0) \quad [^\circ/\text{anno}]$$

Il parametro A rappresenta quindi un ordine di grandezza della velocità di rotazione.

➤ Il parametro α indica l'effetto della tensione deviatorica sulla velocità di *creep* e rappresenta la pendenza delle curve relative a diversi tempi di prova sul piano semilogaritmico [$\text{Log}(\dot{\epsilon}_1) - q$].

Come ordine di grandezza di α , si considera un intervallo di valori $1 \div 7q_{\max}$, dove q_{\max} è la resistenza a taglio del terreno ricavata da prove triassiali standard.

Per analogia si potrebbe determinare α come la pendenza delle rette relative ai diversi istanti in cui sono note le rotazioni della torre sul piano [$\text{Log}(d\theta/dt) - M$] in scala semilogaritmica, cioè:

$$\text{Eq. 4.36} \quad \alpha = \frac{\Delta \log(\dot{\theta})}{\Delta M} \quad \left[\frac{^\circ/\text{anno}}{\text{MNm}} \right]$$

Il parametro α controlla quindi l'influenza del momento flettente sulla velocità di rotazione della torre.

In realtà, sulla base dei soli dati pregressi, non è possibile ricavare i parametri A e α in modo diretto, perché ogni dato è costituito da un unico valore della rotazione, e quindi del momento, misurato in un certo istante di tempo. L'analogia con il modello per l'elemento di volume richiederebbe invece la conoscenza di almeno due valori della rotazione, e quindi del momento, per tracciare la retta [$\text{Log}(d\theta/dt) - M$] relativa ad un certo istante di tempo.

In questo senso, nel caso di torri soggette da alcuni anni a **monitoraggio in continuo**, sarebbe interessante provare a interpolare i valori dell'inclinazione registrati nell'arco temporale di un anno sul piano [$\dot{\theta} - M$] in scala semilogaritmica. In questo modo, ricordando che si è assunto di misurare il tempo in anni, sarebbe possibile determinare le rette [$\text{Log}(d\theta/dt) - M$] anno per anno, mediante l'interpolazione dei dati. Ciò permetterebbe, innanzitutto, di osservare se la pendenza di tali rette può essere effettivamente considerata una costante α , come nel caso dell'elemento di volume.

In alternativa, considerando che il monitoraggio di opere reali non è sempre compatibile con i tempi della ricerca, si potrebbe pensare di realizzare **prove di modellazione fisica in centrifuga** della stabilità delle torri, che permettono di riprodurre i complessi meccanismi di interazione terreno–struttura e di ottenere più rapidamente le informazioni relative al comportamento studiato. Ad esempio, le prove in centrifuga sono state realizzate per riprodurre la stabilità dell'equilibrio e le tecniche di intervento per la stabilizzazione della Torre di Pisa.

Attualmente, non avendo a disposizione tutte le registrazioni dei recenti monitoraggi né la possibilità di eseguire prove in centrifuga, i parametri A e α possono essere calibrati indirettamente in modo da rispettare l'Eq. 4.26 e da interpolare i dati pregressi di rotazione delle torri reali secondo l'Eq. 4.25.

Comunque, i valori di A e α , ricavati seguendo questa modalità per i *case histories* presentati nel Capitolo 5, presentano valori compresi in un range piuttosto ristretto, cioè rispettivamente tra $0,03 \div 0,25$ e $0,0001 \div 0,00005$.

Inoltre, ripetendo l'analisi con le rotazioni in radianti, piuttosto che in gradi, non si ritrovano gli stessi valori per A e α : tali parametri dipendono evidentemente dall'unità di misura.

Nella Tabella 4.3 viene messa ulteriormente in evidenza l'analogia tra i parametri di *creep* per l'elemento di volume e quelli per il macroelemento.

ANALOGIA						
ELEMENTO DI VOLUME				MACROELEMENTO		
Parametri	Espressione	Valori tipici	Unità di misura	Espressione	Valori tipici	Unità di misura
t_i	tempo di riferimento	1	anno	tempo di riferimento	1	anno
m	$-\frac{\Delta \log(\dot{\epsilon}_1)}{\Delta \log(t)}$	$0,75 \div 1,3$	-	$-\frac{\Delta \log(\dot{\theta})}{\Delta \log(t)}$	$0,6 \div 0,95$	$\frac{\circ}{\text{anno}}$ anni
α	$\frac{\Delta \log(\dot{\epsilon}_1)}{\Delta q}$	$1 \div 7 q_{\max}$	-	$\frac{\Delta \log(\dot{\theta})}{\Delta M}$	$0,0001 \div 0,00005$	$\frac{\circ}{\text{anno}}$ MNm
A	$\dot{\epsilon}_1(t = t_i, q = 0)$	$\frac{2 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 10^{-3}}$	% / min	$\dot{\theta}(t = t_i, M = 0)$	$0,03 \div 0,25$	$\frac{\circ}{\text{anno}}$

Tabella 4.3. Analogia dei parametri del modello di *creep* tra elemento di volume e macroelemento.

Nella Tabella 4.4 sono poi presentati schematicamente tutti i parametri del modello proposto di evoluzione delle rotazioni per *creep* nel tempo (Eq. 4.25).

PARAMETRI	SIGNIFICATO	VALORI TIPICI	UNITÀ DI MISURA
W	peso della torre	30÷150	MN
h	altezza del baricentro al di sopra del piano di fondazione	20÷50	m
k_{θ}	rigidezza rotazionale del sistema terreno-fondazione	200000÷500000	MNm/°
θ_0	imperfezione iniziale, $\theta(t=0)$	0÷1	°
t_i	tempo di riferimento	1	anno
m	parametro di <i>creep</i> : rappresenta la tendenza con cui la velocità di rotazione diminuisce nel tempo	0,6÷0,95	$\frac{\circ}{\text{anno}}$ anni
α	parametro di <i>creep</i> : rappresenta l'effetto del momento sulla velocità di rotazione	0,0001÷0,00005	$\frac{\circ}{\text{anno}}$ MNm
A	parametro di <i>creep</i> : rappresenta un ordine di grandezza della velocità di rotazione	0,03÷0,25	\circ/anno

Tabella 4.4. Parametri del modello proposto di evoluzione delle rotazioni nel tempo.

4.5 BIBLIOGRAFIA

1. Bjerrum L. (1967). *Engineering geology of Norwegian normally consolidated marine clays as related to the settlements of buildings*. Geotechnique, Vol. 17(2), p. 83–119.
2. Cheney J., Abghari A., e Kutter B. L. (1991). *Stability of leaning towers*. Journal ASCE-GED, Vol. CXVII(2), p. 297-318.
3. Havel F. (2004). *Creep in soft soils*. Doctoral thesis for the degree of doktor ingeniør, Norwegian University of Science and Technology, Department of Civil and Transport Engineering, Trondheim, Norway.

4. Liingaard M., Augustesen A., e Lade P. V. (2004). *Characterization of Models for Time-Dependent Behavior of Soils*. International journal of geomechanics, ASCE, Vol. 4(3), p. 157–177.
5. Marchi M. (2008). *Stability and strength analysis of leaning towers*. Dottorato di ricerca in Ingegneria Geotecnica, Università degli studi di Parma, Dipartimento di Ingegneria Civile ed Architettura, Italia.
6. Marchi M., Gottardi G., Lancellotta R., e Butterfield R. (2011). *Effetti del creep sulla stabilità delle torri*. Incontro Annuale dei Ricercatori di Geotecnica 2011 - IARG 2011, Torino, 4-6 Luglio 2011.
7. Marchi M., Butterfield R., Gottardi G., e Lancellotta R. (2011). *Stability and strength analysis of leaning towers*. Geotechnique, Vol. 61(7).
8. Mitchell J. K., e Soga K. (2005). *Fundamentals of soil behavior*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken.
9. Singh A., e Mitchell J. K. (1968). *General stress-strain-time function for soils*. J. Soil Mech. Found. Div., Vol. 94(1), p. 21–46.
10. Singh A., e Mitchell J. K. (1969). *Creep potential and creep rupture of soils*. Proceeding of the Seventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Mexico City, Vol. 1, p. 379–384.
11. Tavenas F., Leroueil S., La Rochelle P., e Roy M. (1978). *Creep behavior of an undisturbed lightly overconsolidated clay*. Canadian Geotechnical Journal, Vol. 15(3), p. 402–423.

CAPITOLO 5

UTILIZZO DI *MATHEMATICA* NELLA CALIBRAZIONE DEL MODELLO

5.1 INTRODUZIONE

La parte cruciale e più delicata dell'implementazione del *creep* nella formulazione del macroelemento è la **calibrazione del modello**, che deve essere sviluppata su *case histories* che ne assicurino la validità e ne verifichino l'affidabilità.

In questa sede sono stati approfonditi alcuni *case-histories* famosi in Italia per i quali si disponeva di dati sufficienti per le analisi, cioè: *la torre di Pisa* (Sezione 5.3), *il campanile di Santo Stefano a Venezia* (Sezione 5.4), *la torre Ghirlandina di Modena* (Sezione 5.5), *la torre degli Asinelli* (Sezione 5.6) e *la torre Garisenda* (Sezione 5.7) di *Bologna*.

In particolare, il modello di previsione dell'evoluzione delle rotazioni nel tempo delle torri pendenti viene implementato all'interno dell'ambiente di calcolo simbolico e numerico di *Mathematica*.

Nella prima sezione di questo capitolo, vengono riportate alcune informazioni generali e semplici istruzioni per l'utilizzo di un *notebook* in *Mathematica*.

Nelle sezioni successive, per ogni caso reale esaminato, viene riportato un breve riassunto delle vicende storiche documentate o ricostruite sulla base di fonti indirette, con particolare attenzione al movimento di rotazione, degli interventi di consolidamento eseguiti per salvaguardare la stabilità dell'opera e delle possibili prospettive future di messa in sicurezza.

Inoltre, vengono descritte le caratteristiche principali derivate da un accurato rilievo geometrico delle Torri, concentrandosi principalmente sulla stratigrafia del sottosuolo e sulle peculiarità del sistema di fondazione.

Infine vengono visualizzati e discussi i risultati ottenuti dall'applicazione del modello di *creep* descritto nel Capitolo 4. I *notebook* di elaborazione relativi ai *case histories* analizzati sono riportati nell'Appendice A.

Lo scopo di questo capitolo è quindi quello di visualizzare l'*output* della metodologia proposta, sottolineando il largo impiego che può essere fatto del codice Wolfram (*Mathematica*) nelle analisi di interazione terreno-struttura.

5.2 IL NOTEBOOK DI MATHEMATICA

5.2.1 INFORMAZIONI GENERALI

Mathematica è un'applicazione molto nota in campo scientifico per la sua grande potenza di calcolo e l'indubbia versatilità. Ideato da Stephen Wolfram nel 1986, è un ambiente di calcolo simbolico e numerico multiplatforma, oltre che un potente linguaggio di programmazione.

La versione attuale è la 8.0.1 rilasciata nel 2011.

“*Notebook*” è il nome associato ai documenti sviluppati utilizzando *Mathematica*: esso è in grado di visualizzare ed interpretare la notazione matematica, incorporando in un unico ambiente i risultati dell'elaborazione sotto forma di testo, formule, grafici e suoni. Ognuno di questi elementi è contenuta in celle, che sono indicati tra parentesi sul lato destro del documento. Il *notebook*, una volta salvato, assume l'estensione **.nb**.

Mathematica rappresenta un efficace strumento di didattica, ma costituisce soprattutto un valido supporto per la ricerca, non solo nelle università ma anche nelle aziende di tutto il mondo: i settori maggiormente interessati sono quelli dell'ingegneria, dell'economia e delle biotecnologie.

Wolfram Research rende gratuitamente disponibile un software gratuito, denominato **Mathematica Player**, che è in grado di visualizzare i *notebook* e di eseguire in tempo reale il codice creato da *Mathematica*. Si tratta di dimostrazioni

interattive nelle quali l'utente è in grado di modificare determinati parametri per mezzo di un'interfaccia grafica realizzata con appositi comandi del linguaggio *Mathematica*.

5.2.2 VANTAGGI E CRITICHE

Il *front-end* standard adottato da *Mathematica* semplifica drasticamente la stesura di calcoli e la loro documentazione. Una cella di input viene eseguita cliccandoci sopra e premendo SHIFT-ENTER. *Mathematica* valuta l'input e restituisce il risultato in una cella di output.

È anche possibile selezionare diverse celle contenenti il codice (anche in blocchi organizzati secondo una struttura gerarchica) evidenziando le rispettive barre laterali ed eseguire il codice in successione.

Il vantaggio di questo approccio è che gli utilizzatori possono modificare alcuni parametri del calcolo e rieseguire il codice in pochi secondi. Gli eventuali errori possono essere corretti direttamente all'interno del *notebook* ed i calcoli rieseguiti senza dover ridigitare, ricopiare o ricompilare le linee di codice successive. Altri ambienti di calcolo richiedono invece, quando usati in modalità interattiva, di andare a ricercare i calcoli effettuati, ricopiarli, modificarli e poi eseguirli.

Tuttavia, l'esatta struttura delle liste annidate in cui vengono implementati i dati può essere di difficile discernimento quando il numero di celle cresce.

Un altro vantaggio di *Mathematica* risiede nella sua abilità nel trattare i numeri con una precisione arbitraria. Risulta così possibile effettuare calcoli esatti o con una precisione limitata solo dalla disponibilità di risorse della macchina *hardware*.

Mathematica offre inoltre funzioni altamente generalizzate per ambito di applicabilità e numero di dimensioni dei dati, delegando ad algoritmi interni la scelta delle procedure ottimizzate per il particolare tipo di dato.

A differenza di altri ambienti di calcolo simbolico, che sono *open source* e possono venire liberamente utilizzati, copiati e, all'occorrenza, modificati, *Mathematica* è un *software* proprietario che prevede limitazioni riguardo all'uso, la copia e la modifica.

5.3 LA TORRE DI PISA

5.3.1 CARATTERISTICHE PRINCIPALI E CENNI STORICI

La Torre di Pisa (Figura 5.1) è un monumento che da quasi un millennio rappresenta la grandiosità dell'arte italica. Conosciuta anche come la "Torre Pendente", si erge isolata sul lato orientale della Piazza, poco distante dall'abside del Duomo, di cui è il Campanile.

L'edificio attuale, risultato di una lunga vicenda costruttiva ed oggetto nel corso dei secoli di numerosi interventi di riparazione e manutenzione, volti in primo luogo a contenere i pericoli di crollo sollevati dall'evidente pendenza, è costituito da un corpo cilindrico di muratura, circondato da loggiati con archi e colonne che poggiano sul tronco di base e sono sormontati da una cella campanaria. I sei loggiati e la cella campanaria suddividono la Torre in otto segmenti, che vengono detti "ordini".



Figura 5.1. La Torre di Pisa e la Cattedrale (Piazza dei Miracoli).

Il corpo centrale è un cilindro cavo costituito da due paramenti concentrici di blocchi di marmo, tra i quali è presente una zona di riempimento di muratura con malta di calce e frammenti lapidei di forma irregolare. All'interno di questa zona è presente una scala elicoidale che consente l'accesso ai loggiati e in sommità alla cella campanaria.

In Figura 5.2 è riportata una sezione della Torre nel piano di massima pendenza (direzione Nord-Sud); in particolare, si può notare lo scavo attualmente esistente attorno alla base della Torre, il cosiddetto “catino”, realizzato nel 1838 per portare alla luce le basi dei pali presenti nel sottosuolo.

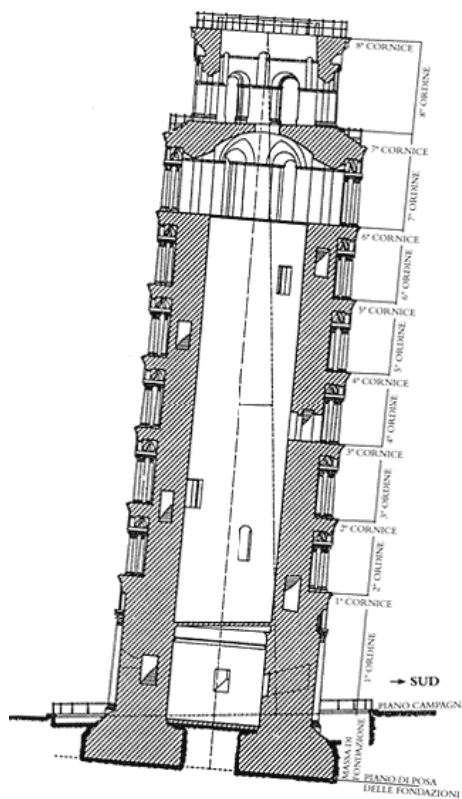


Figura 5.2. Sezione della Torre di Pisa (Burland e Viggiani, 1994).

La storia dei lavori di realizzazione della Torre di Pisa è solo parzialmente documentata ed è stata ricostruita sulla base di fonti indirette.

La costruzione, che ha avuto inizio il 9 agosto 1173, è avvenuta, nel corso di circa 200 anni, in 3 fasi successive caratterizzate da lunghi periodi di inattività:

- dal 1173 al 1178 furono costruiti i primi tre ordini,
- dal 1272 al 1278 vennero aggiunti altri quattro loggiati,

- dal 1360 al 1370 (quasi due secoli dopo l'inizio della costruzione della Torre) fu realizzata la cella campanaria (ottavo ordine).

Le ragioni delle interruzioni dei lavori non sono note, ma sono probabilmente connesse alle vicende politiche ed economiche della città piuttosto che a preoccupazioni di carattere statico. Tuttavia non vi è dubbio che la Torre sarebbe crollata se la costruzione fosse proseguita senza interruzioni (Burland e Viggiani, 1994).

Gli intervalli trascorsi tra le successive fasi sono rilevabili dalla presenza di filari di conci variamente dimensionati, che furono utilizzati per riportare in piano la quota che era stata raggiunta nella precedente fase costruttiva.

- La Torre di Pisa è una struttura isolata.
- L'altezza della Torre è di 58,4 m sul piano di fondazione e di oltre 55 m fuori terra.
- Il baricentro si trova 22,6 m al di sopra del piano di fondazione.
- La Torre pesa circa 142 MN e possiede una pianta circolare.
- L'anello di fondazione ha un diametro esterno di 19,6 m e un diametro interno di 4,5 m.
- L'inclinazione nel 2000 era di circa 5,5° verso Sud.

5.3.2 STRATIGRAFIA DEL SOTTOSUOLO E FONDAZIONI

La stratigrafia presente sotto la Torre di Pisa è stata studiata mediante estese indagini avviate dopo l'inizio del XX secolo. Una sezione schematica del sottosuolo della Torre secondo la direzione di massima pendenza è riportata in Figura 5.3.

Il sottosuolo della Piazza dei Miracoli, come quello di tutta la pianura Pisana, è composto da depositi geologicamente recenti (Pleistocene-Oligocene) di ambiente lagunare e palustre. Procedendo dal piano campagna (posto alla quota di circa 2,5÷3 m s.l.m.) verso il basso, è possibile individuare tre “complessi” aventi caratteri geotecnici distinti:

- **Complesso A**, dal piano campagna ad una profondità di circa 10 m: stratificazione irregolare di limi, argille e sabbie, ma con una prevalenza di limi

argillosi sotto la parte meridionale della Torre (si ritiene che questa sia la causa che ha portato il monumento ad inclinarsi). Nella parte inferiore del complesso A è presente uno strato di sabbia fine mediamente addensata dello spessore di un paio di metri (sabbie superiori).

- **Complesso B**, tra i 10 e i 40 m circa di profondità: terreno costituito principalmente da argille tenere, con uno strato intermedio di sabbia. Al suo interno si distinguono:
 - le argille superiori “pancone”, fra le profondità di 10 e 21 m circa; si tratta di argille di consistenza media o ridotta, da leggermente sovraconsolidate a normalmente consolidate;
 - le argille intermedie, fra le profondità di 21 e 25 m circa; si tratta di argille sovraconsolidate e di elevata consistenza;
 - le sabbie intermedie, fra le profondità di 25 e 27 m circa;
 - le argille inferiori, fra 27 e 40 m di profondità; si tratta di argille normalconsolidate di consistenza medio-alta.
- **Complesso C**, sotto i 40 m di profondità: sabbie dense (sabbie inferiori).

La superficie di separazione fra le sabbie superiori e le argille “pancone”, pressochè orizzontale in tutta la piazza, presenta una depressione di oltre due metri al di sotto della Torre, dovuta alla natura instabile del sottosuolo; è evidente che questa deformazione è stata indotta nel corso dei secoli dal peso esercitato dalla Torre stessa in una zona ristretta, portando a stimare che la struttura abbia subito un cedimento complessivo di circa $2,5 \div 3$ m (fin dall’inizio della costruzione nel 1173).

I cedimenti lato Nord e lato Sud valgono rispettivamente 1,86 m e 3,75 m, e danno luogo ad un cedimento differenziale di 1,89 m.

Il pelo libero della falda freatica si trova ad una profondità dal piano campagna compresa tra 1 e 2 m, nel complesso A.

Le fondazioni della Torre, fatte di pietrame e malta di calce di S. Giuliano, furono esaminate a più riprese fin dagli inizi del ‘900.

Il masso murario che costituisce le fondazioni è a forma di anello, con un diametro esterno di 19,6 m e un diametro interno di 4,5 m, ed è dotato di gradoni sia verso l'interno sia verso l'esterno (Figura 5.4).

La fondazione poggia direttamente sul terreno, senza palificazione.

Nel 1935 la muratura di riempimento delle fondazioni è stata iniettata con malta di cemento al fine di impermeabilizzarla.

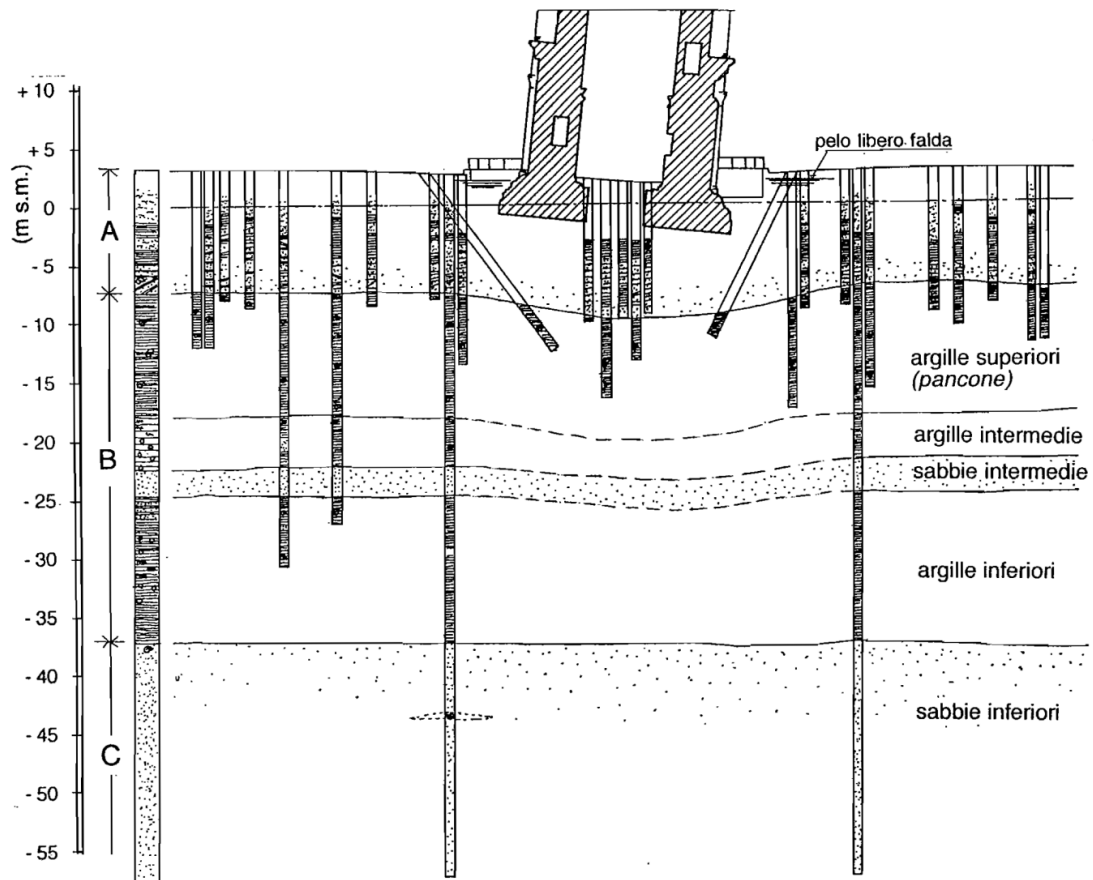


Figura 5.3. Sezione stratigrafica del sottosuolo della Torre di Pisa (Burland e Viggiani, 1994).

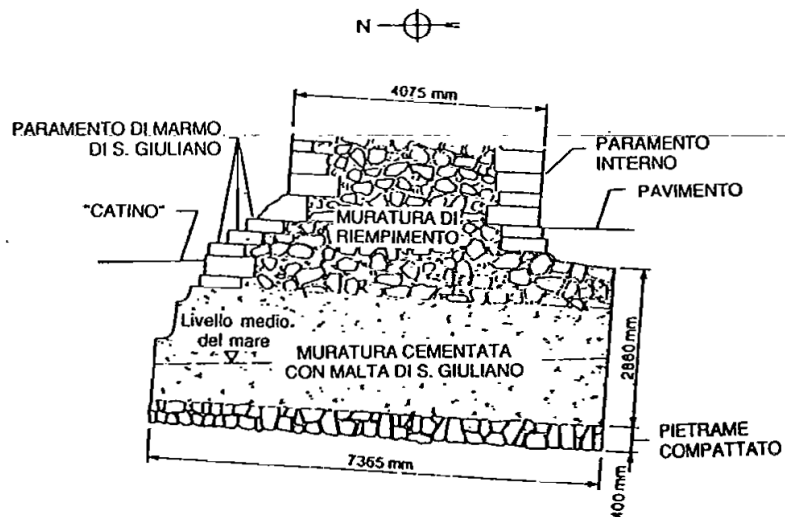


Figura 5.4. Sezione del masso di fondazione della Torre di Pisa (Burland e Viggiani, 1994).

5.3.3 EVOLUZIONE DELL'INCLINAZIONE NEL TEMPO

Il problema della pendenza della Torre di Pisa é quello che più di ogni altro ha affascinato ed incuriosito, nel corso del tempo, visitatori, appassionati d'arte e studiosi e che ha reso famoso ovunque questo monumento.

Durante la costruzione

La Torre di Pisa iniziò ad inclinarsi verso sud fin dall'inizio della sua costruzione, come è provato dalle correzioni apportate alla struttura. Infatti, come si può osservare in Figura 5.2, l'asse della Torre è curvo con la concavità rivolta verso Nord (Burland e Viggiani, 1994). L'analisi di tali correzioni consente di ricostruire la storia dell'inclinazione durante il periodo di costruzione (1173-1370).

Inizialmente la Torre si inclinò verso Nord, fino ad un'inclinazione di circa $0,2^\circ$ nel 1272 (quando la costruzione fu ripresa dopo la prima lunga interruzione). Nel 1278 (quando venne raggiunta la settima cornice), l'inclinazione era pari a circa $0,6^\circ$ verso Sud. Durante i 90 anni della seconda interruzione l'inclinazione aumentò fino a $1,6^\circ$; a questo punto fu aggiunta la cella campanaria.

Nei secoli passati

Dopo il termine della costruzione, il comportamento della Torre nel corso del tempo può essere ricostruito solo sommariamente a partire da vaghe e frammentarie fonti storiche, cioè sulla base di un affresco eseguito da Antonio Veneziano nel 1384 (Vita di San Ranieri), che mostra la Torre visibilmente pendente, e di tre misurazioni della proiezione eseguite rispettivamente dal Vasari nel 1550, da Cresy e Taylor nel 1817, e da Rouhault de Fleury nel 1859, impiegando un *filo a piombo* calato dalla settima cornice.

Mentre nei 267 anni intercorsi tra il 1550 e il 1817 l'inclinazione era aumentata di soli $0,15^\circ$, le successive misurazioni documentarono un incremento $0,5^\circ$. Confrontando le due misurazioni effettuate nel XIX secolo, si può quindi ritenere che la maggior parte dell'incremento della rotazione sia stata provocata dallo scavo del catino alla base del campanile, intrapreso da Alessandro della Gherardesca nel 1838 -1839 in base ad esigenze di natura storica ed estetica. Tale evento, infatti, alterò la stabilità della Torre.

L'accelerazione del processo di inclinazione durò alcuni anni dopo i lavori del 1838, per poi tornare a decrescere nella misura di circa un millimetro l'anno.

Nel XX secolo

Le prime misure attendibili sono state eseguite nel secolo scorso, grazie al miglioramento delle conoscenze e delle strumentazioni tecniche, unitamente all'interessamento delle autorità governative e di tutela. All'inizio di '900 sono state così avviate, e progressivamente ampliate ed approfondite, osservazioni strumentali sistematiche.

Nel 1911 iniziano le prime accurate indagini di misura dell'inclinazione della Torre per mezzo di misure geodetiche, che, utilizzando un teodolite posto in un punto preciso, si basavano sulla misura dell'angolo compreso tra la prima e la settima cornice.

L'inclinazione misurata nel 1911 era pari a $5^{\circ} 26' 11''$, corrispondente ad uno strapiombo di 4,22 m fra la settima e la prima cornice (altezza di 44,2 m).

Successivamente, nel 1928, sono stati posizionati quattro capisaldi alla base della Torre: a partire dalle loro quote è possibile dedurre le variazioni della pendenza, oltre che i movimenti altimetrici della Torre (livellazione).

Inoltre, nel 1934, sono stati installati un inclinometro a pendolo all'interno del cilindro cavo, e una livella a bolla ad alta precisione, della lunghezza di 4,5 m, nella stanza degli strumenti al primo piano della Torre.

Infine, nel 1992, questa strumentazione di tipo ottico e meccanico è stata integrata con una stazione elettronica di monitoraggio, con inclinometri a registrazione automatica che consentono la trasmissione in tempo reale all'intervallo di frequenza richiesto (anche ogni 4 minuti, se necessario) del valore dell'inclinazione nei piani Nord-Sud ed Est-Ovest.

L'inclinazione misurata nel 1993, prima dell'applicazione dei contrappesi di piombo, era pari a $5^{\circ} 33' 36''$.

Lo schema in Figura 5.5 mostra la storia completa della costruzione della Torre e la variazione dell'inclinazione nel corso del tempo, ricostruita in base alle misurazioni effettuate nel XX secolo. In Figura 5.6 è riportata la recente evoluzione delle rotazioni dal 1911.

Si può notare la grande sensibilità della Torre a qualsiasi variazione delle condizioni del terreno e ai lavori intrapresi alla base.

Lasciando da parte le variazioni causate da circostanze specifiche, la pendenza della Torre aumenta progressivamente nel tempo. In particolare, la velocità di rotazione della Torre ha accelerato da 4"/anno negli anni '30 a 6"/anno presso verso la fine degli anni '80.

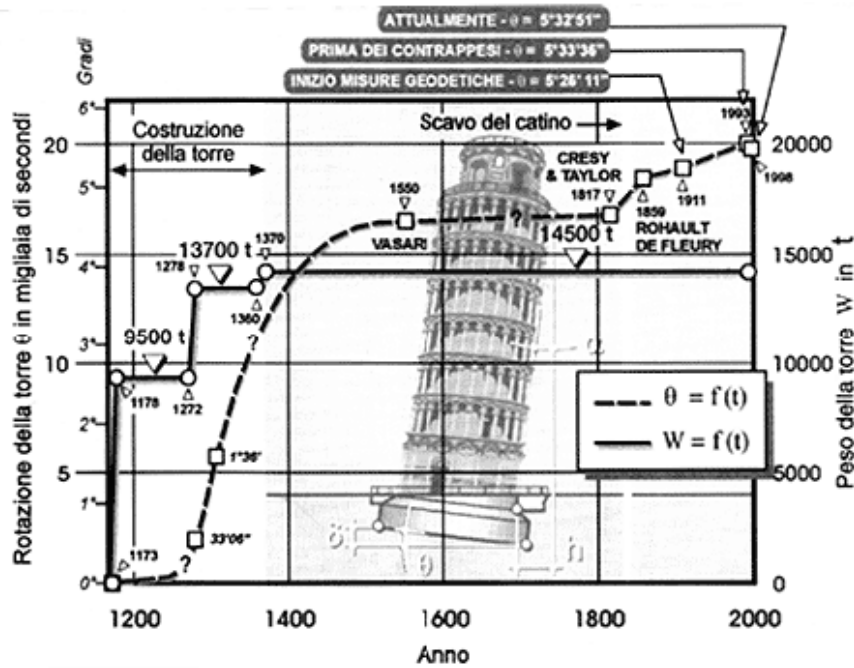


Figura 5.5. Rotazioni e storia della costruzione della Torre di Pisa (Marchi, 2008).

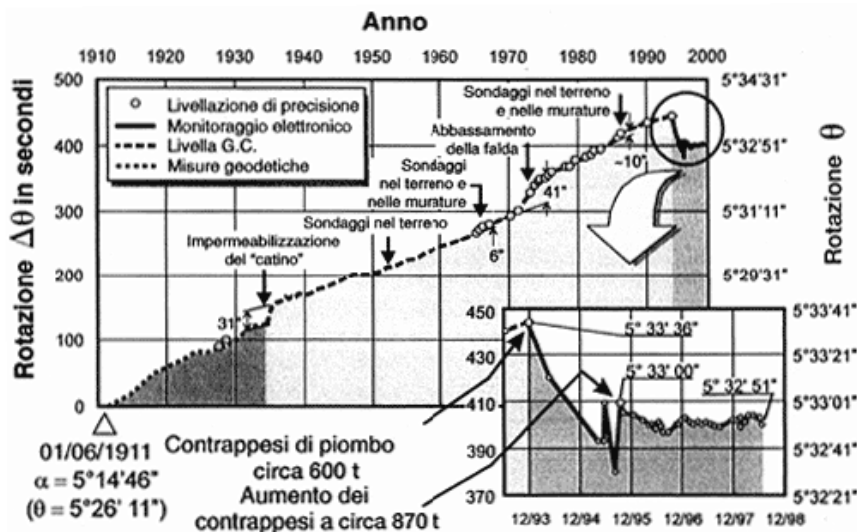


Figura 5.6. Rotazioni della Torre di Pisa dal 1911 (Marchi, 2008).

5.3.4 INTERVENTI GEOTECNICI

Nel corso del tempo, sin dal momento della costruzione, la Torre di Pisa è stata sottoposta a notevoli interventi di manutenzione e restauro, che hanno interessato due aspetti principali:

- 1) la conservazione dei materiali che ne compongono la struttura e la decorazione;
- 2) la statica, e più precisamente:
 - il consolidamento del terreno sul quale la Torre è edificata,
 - il consolidamento strutturale delle fondazioni e dell'opera in elevazione.

La prima commissione incaricata di occuparsi dei problemi di stabilità della Torre, che lavorò dal 1907 al 1910, fece eseguire sondaggi per approfondire la natura delle fondazioni della Torre e del terreno su cui sorge. In seguito a tali studi, nel 1911 fu avviato un monitoraggio sistematico dell'edificio, che negli anni seguenti è divenuto sempre più moderno e affidabile.

Tra il 1933 e 1935 furono messi in atto sia i lavori di consolidamento delle fondazioni, tramite iniezione a pressione attraverso fori nella muratura di una miscela di acqua e cemento, sia l'impermeabilizzazione del bacino intorno al basamento, ponendo sotto il lastrico una soletta di cemento e uno strato di impermeabilizzante.

Negli anni settanta fu chiarita l'importanza, per l'inclinazione della Torre, del fenomeno della subsidenza del terreno, che si era accentuato anche a causa dell'abbassamento della falda idrica dovuto agli intensi prelevamenti e pompaggi d'acque profonde condotti nel dopoguerra. Per questo motivo, nel 1973 fu vietato il prelievo di acque profonde in prossimità del Campanile: così il loro livello smise di diminuire e anche la velocità di rotazione della Torre tornò ai valori consueti.

Tuttavia, soltanto recentemente, gli interventi diretti sul sottosuolo hanno ridotto significativamente la pendenza della Torre, migliorandone le condizioni di stabilità.

Al fine di ridurre il rischio di una rottura dei terreni di fondazione e/o di un ribaltamento della Torre, durante la seconda metà del 1993 si è ricorso ad una stabilizzazione temporanea e reversibile delle fondazioni mediante l'applicazione di 600 tonnellate di contrappesi di piombo sul lato nord delle fondazioni, collocati al di sopra di un anello in calcestruzzo precompresso rimovibile, gettato intorno alla base della Torre (Figura 5.7). Questo intervento ha causato una riduzione della pendenza di circa

un minuto d'arco e, soprattutto, ha ridotto il momento ribaltante di circa il 10%. Nel settembre 1995 il carico è stato aumentato fino a 900 tonnellate al fine di controllare i movimenti della Torre in seguito ad un tentativo fallito di sostituire i contrappesi di piombo con tiranti d'acciaio temporanei infissi nel terreno.

Inoltre, la struttura è stata rinforzata mediante una cerchiatura della Torre con cavi d'acciaio a livello del primo ordine e ad intervalli fino al secondo piano. Infatti, dal punto di vista strutturale, il rischio maggiore per il campanile è quello di una rottura della muratura sul lato sud, in particolare al livello della loggia del secondo ordine, che comporterebbe il crollo di tutta la struttura sovrastante.

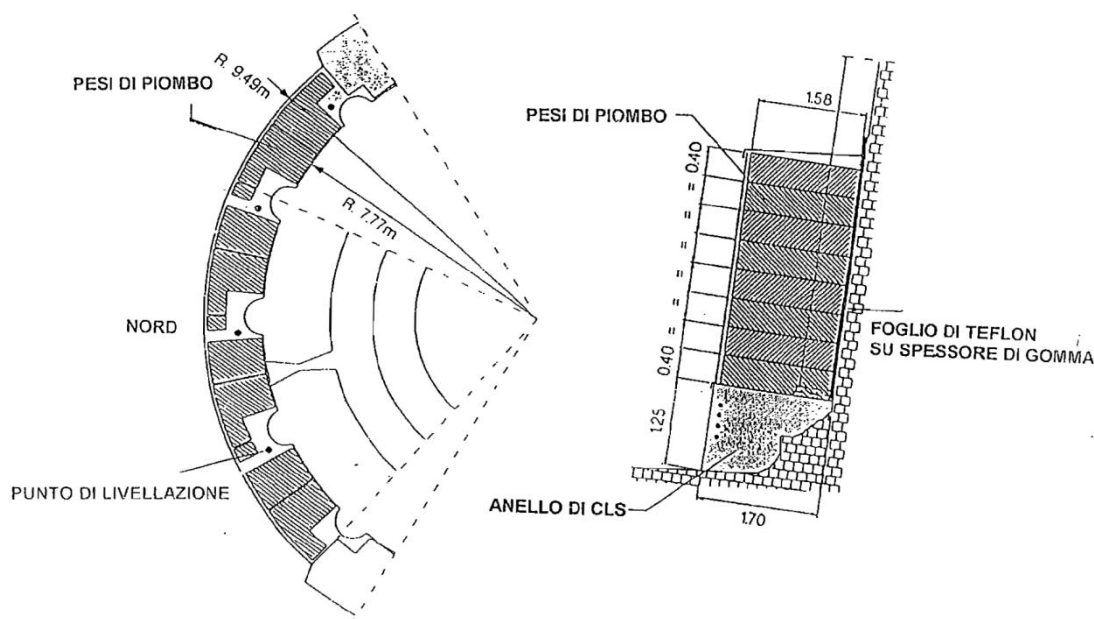


Figura 5.7. Schema dell'intervento di stabilizzazione provvisoria della Torre di Pisa: pianta dell'anello e posizionamento dei contrappesi di piombo (Desideri et al., 1997).

Negli ultimi decenni è proseguita la fase di studio di una soluzione definitiva che si potesse tradurre in una piccola riduzione dell'inclinazione di mezzo grado, che non è abbastanza per essere visibile, ma che potrebbe ridurre le tensioni nella muratura e stabilizzare le fondazioni. In particolare, sono stati analizzati diversi metodi capaci di indurre cedimenti controllati del lato Nord, al fine di provocare una diminuzione dell'inclinazione della torre senza applicare alcuna forza al monumento. La subsidenza controllata può essere realizzata in molti modi, fra i quali, ad esempio, il drenaggio tramite pozzi, il consolidamento dell'argilla del pancone sotto il lato Nord mediante elettro-osmosi o per depressione indotta da pompe a vuoto, e il caricamento del terreno

intorno il lato Nord della Torre per mezzo di una lastra ancorata al terreno. Tuttavia, nessuno di questi metodi è sembrato soddisfacente.

Ci si è quindi concentrati su un metodo noto come sottoescavazione (*soil extraction*), che comporta l'installazione di un certo numero di tubi di estrazione del terreno, sotto il lato Nord della fondazione (Figura 5.8). Esso costituisce un intervento non troppo invasivo per aumentare la stabilità della Torre e del tutto coerente con le esigenze architettoniche.

Tale tecnica di sottoescavazione è già stata utilizzata con successo, in particolare per ridurre i pericolosi cedimenti differenziali all'interno della Metropolitan Cathedral di Città del Messico.

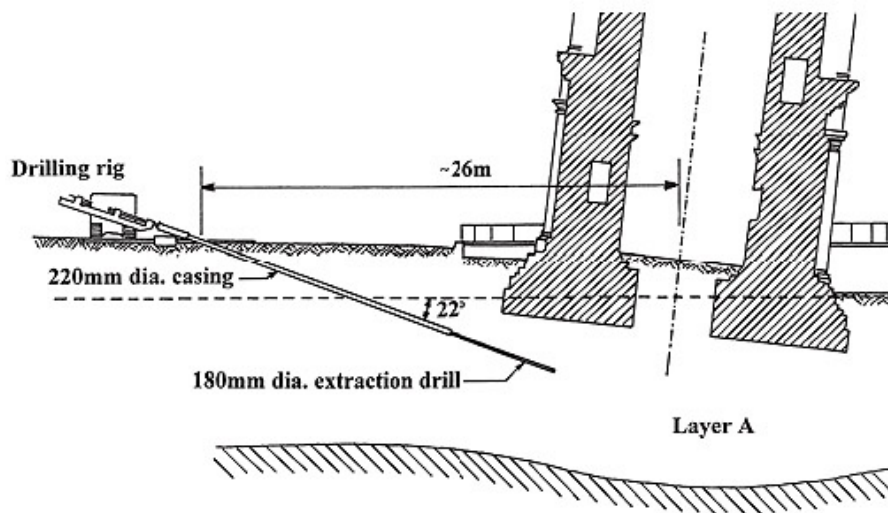


Figura 5.8. Schema dell'intervento di sottoescavazione per la Torre di Pisa (Marchi, 2008).

Nell'aprile 1996 la Commissione ha accettato di effettuare l'asportazione del terreno in una zona limitata al di sotto della Torre, al fine di osservarne la risposta. Il successo di questa fase di sottoescavazione preliminare ha convinto la Commissione ad effettuare l'intervento su tutta la larghezza delle fondazioni.

Di conseguenza, tra Dicembre 1999 e Gennaio 2000, sono stati installati 41 fori di estrazione a 0,5 m di distanza. La sottoescavazione è iniziata il 21 febbraio 2000 e dal Marzo 2008 la Torre ha raggiunto il livello definitivo di consolidamento sotto il profilo dell'inclinazione, ritornata allo stesso valore del 1838, cioè circa 5° (corrispondente ad uno spostamento alla cima del campanile di quasi mezzo metro). Secondo gli esperti, questo intervento consentirà di mantenere in sicurezza la Torre per almeno altri tre secoli.

I risultati della sottoescavazione preliminare e definitiva sono raffigurati in Figura 5.9.

Infine, il 22 aprile 2011, dopo vent'anni, sono terminati anche i lavori di restauro delle superfici lapidee, sia negli esterni che negli interni, permettendo così l'accesso ai visitatori.

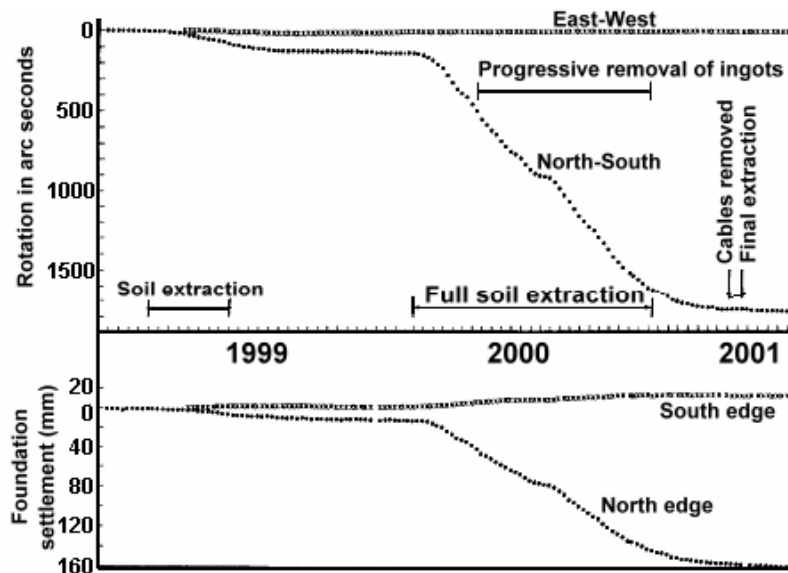


Figura 5.9. Risultati degli interventi di sottoescavazione per la Torre di Pisa (Marchi, 2008).

5.3.5 APPLICAZIONE DEL MODELLO DI CREEP

L'obiettivo di questa Sezione è quello di valutare l'applicabilità e l'affidabilità del modello di evoluzione delle rotazioni nel tempo, proposto nella Sezione 4.4, mediante la calibrazione dei parametri sui dati pregressi della Torre di Pisa.

Il problema della modellazione dei processi di *creep* impone di considerare periodi di tempo molto lunghi, soprattutto nel caso di torri storiche, costruite centinaia di anni fa. Per questo motivo si è scelto di misurare il tempo in anni e di assumere, per la Torre di Pisa, come origine $t = 0$ l'anno 1270, appena precedente all'inizio della seconda fase di costruzione della Torre (1272-1278).

Le principali proprietà geometriche della Torre di Pisa, necessarie ai fini dell'analisi di *creep*, sono:

- il peso della Torre $W = 142$ MN;

- l'altezza del baricentro al di sopra del piano di fondazione $h = 22,6$ m;
- la rigidezza rotazionale del sistema terreno-fondazione $k_{\theta} = 400000$ MNm/°.

I dati della rotazione registrati nel tempo $[\theta - t]$ costituiscono il punto di partenza dell'analisi del comportamento a lungo termine del sistema terreno-fondazione-torre (Figura 5.10).

Le rotazioni della torre θ vengono misurate in gradi sessagesimali oppure, alternativamente, in radianti, ricordando che $\theta[rad] = \theta[^\circ] \frac{\pi}{180}$.

Inoltre, a partire dai valori della rotazione, è possibile calcolare il corrispondente momento applicato in fondazione, essendo $M = Wh\theta$ (Figura 5.10).

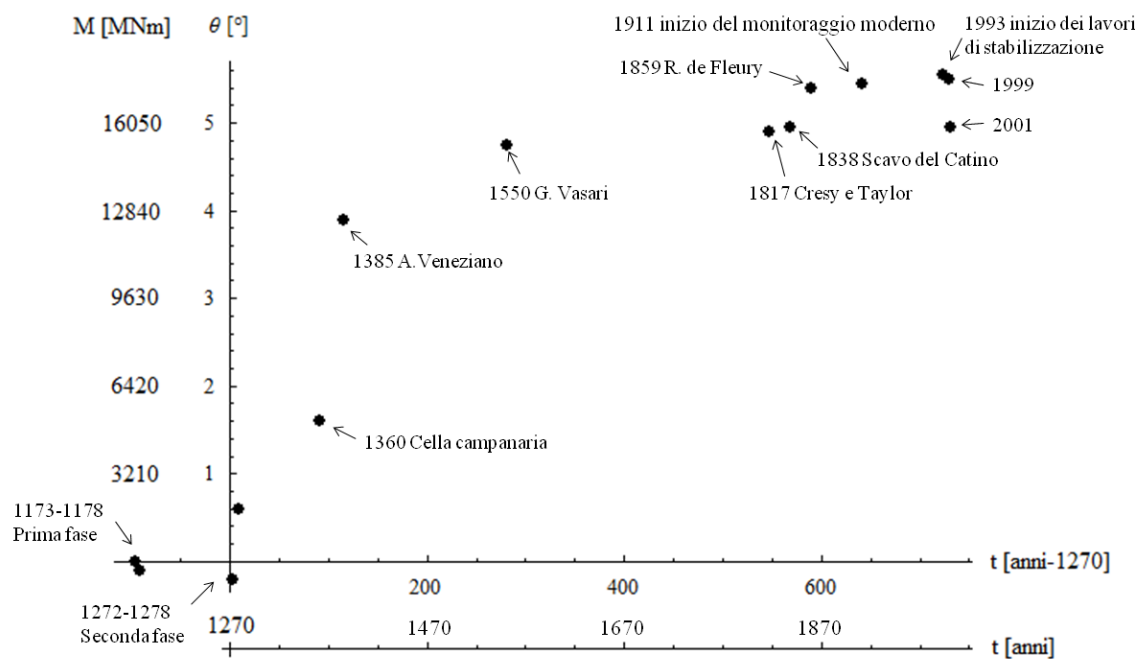


Figura 5.10. Rotazione e momento flettente della Torre di Pisa nel tempo.

Nella Tabella 5.1 sono riportati i dati dello strapiombo (in metri) della Torre e dell'inclinazione (positiva verso Sud, in gradi e in radianti) misurati fin dall'inizio della sua costruzione (cioè dal 1173). Inoltre sono messi in evidenza i corrispondenti valori del momento flettente e il riferimento della scala dei tempi.

Anno	Scala dei tempi	Strapiombo su 44,2 m	Inclinazione θ		Momento M	
			[°]	[rad]	[MNm] $M=W h \theta[^\circ]$	[MNm] $M=W h \theta[\text{rad}]$
[anni]	[anni]	[m]	[°]	[rad]	[MNm] $M=W h \theta[^\circ]$	[MNm] $M=W h \theta[\text{rad}]$
1173	-97	0,00	0,00	0,000	0	0
1178	-92	-0,08	-0,10	-0,002	-181	-3
1270	0	/	/	/	/	/
1272	2	-0,15	-0,20	-0,003	-642	-11
1278	8	0,46	0,60	0,010	1926	34
1360	90	1,23	1,60	0,028	5135	90
1385	115	3,01	3,90	0,068	12516	218
1550	280	3,67	4,75	0,083	15244	266
1817	547	3,79	4,90	0,086	15725	274
1838	568	3,83	4,95	0,086	15886	277
1859	589	4,18	5,40	0,094	17330	302
1911	641	4,22	5,45	0,095	17490	305
1993	723	4,29	5,55	0,097	17811	311
1999	729	4,26	5,50	0,096	17651	308
2001	731	3,83	4,95	0,086	15886	277

Tabella 5.1. Dati e rotazioni della Torre di Pisa.

Per determinare i parametri del modello di *creep* m , α e A è necessario conoscere l'andamento, o per lo meno una stima, della velocità di rotazione della Torre in funzione del tempo (in scala logaritmica) e del momento flettente (in scala semilogaritmica).

Il primo passo consiste quindi nell'interpolare i dati pregressi $[\theta - t]$, tenendo conto degli eventi storici e delle variazioni delle condizioni della Torre, con una funzione logaritmica del tipo:

Eq. 5.1
$$\theta = \ln\left(1 + \frac{t}{t_0}\right) + \theta_0$$

dove t_0 è un parametro della funzione (che dipende dell'entità e dall'unità di misura della rotazione) e $\theta_0 = \theta(t = 0)$ è l'imperfezione iniziale.

Nel caso della Torre di Pisa, si assume che nel 1270 $\theta_0 = 0,2^\circ$ e l'interpolazione dei dati esistenti è riportata in Figura 5.11.

È evidente che con una sola funzione di interpolazione non è possibile tenere conto di tutte le variazioni della stabilità della Torre, dovute ad esempio alle diverse fasi costruttive, allo scavo del catino e agli interventi di stabilizzazione.

Per questa ragione, nell'applicazione del modello di *creep* si trascurano i dati registrati prima del 1272, in cui la Torre era inclinata verso Nord, ma anche quelli del 1999, successivo all'applicazione dei contrappesi di piombo, e del 2001, in seguito all'inizio dell'intervento di sottoescavazione.

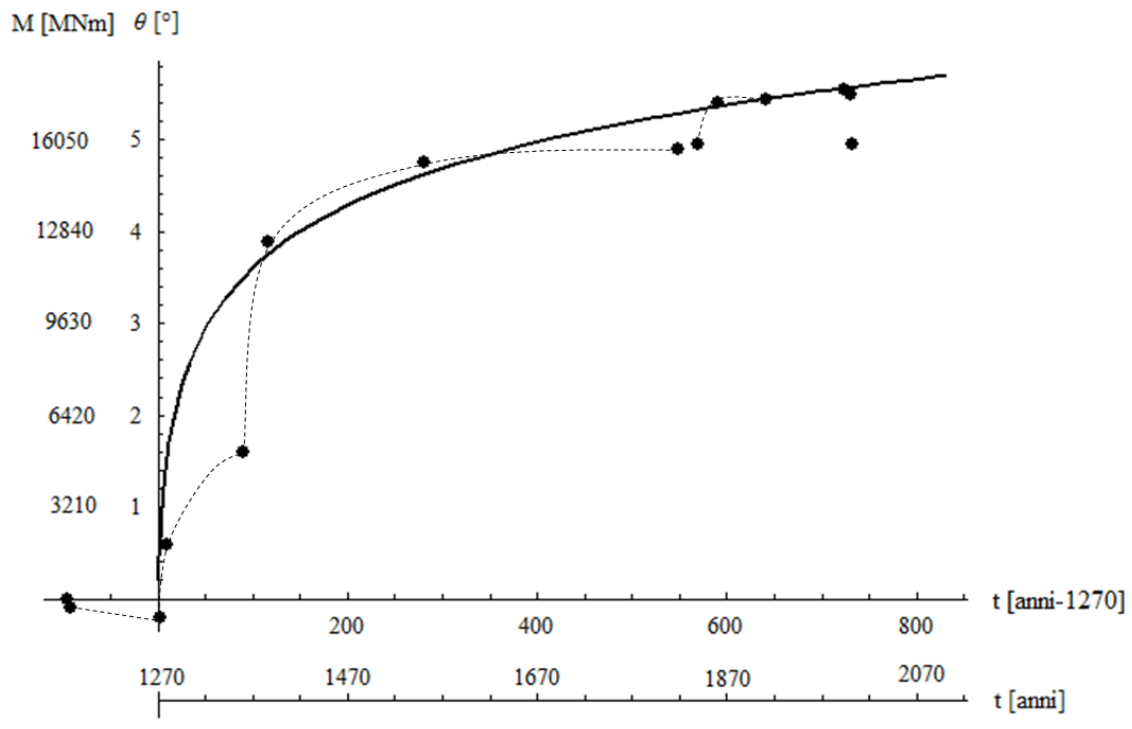


Figura 5.11. Interpolazione dei dati con una funzione logaritmica.

L'introduzione di una funzione interpolante consente di calcolare, facendone la derivata prima, una stima della velocità di rotazione nel tempo:

$$\text{Eq. 5.2} \quad \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \frac{1}{t_0(1+t/t_0)}$$

L'andamento $[d\theta/dt - t]$ per la Torre di Pisa è riportato in Figura 5.12, con la velocità di rotazione espressa in °/anno, e in Figura 5.13, in rad/anno.

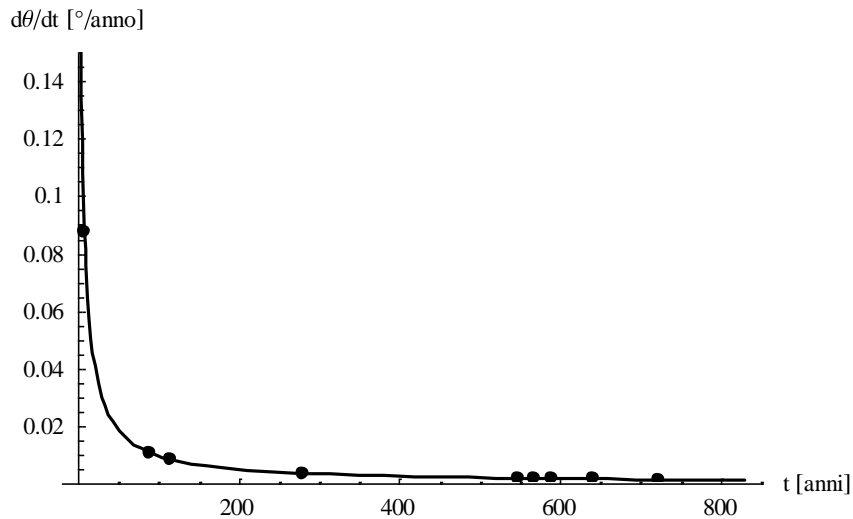


Figura 5.12. Velocità di rotazione (in °/anno) nel tempo.

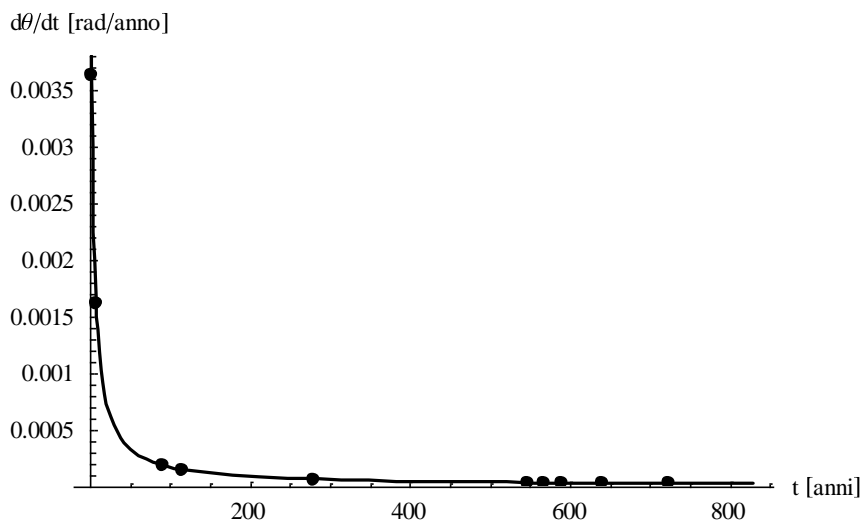


Figura 5.13. Velocità di rotazione (in rad/anno) nel tempo.

Non avendo a disposizione i risultati di prove di *creep* sui terreni presenti in sito, i parametri sono stati definiti e calibrati unicamente sulla base dell'analogia tra elemento di volume e macroelemento, come spiegato nella Sezione 4.4.2.

Il parametro m controlla l'andamento con cui la velocità di rotazione della torre diminuisce nel tempo e coincide con la pendenza della retta che interpola i dati noti sul piano $[\dot{\theta} - t]$ in scala logaritmica, cioè:

$$\text{Eq. 5.3} \quad m = - \frac{\Delta \log(\dot{\theta})}{\Delta \log(t)} \quad \left[\frac{\text{°/anno}}{\text{anno}} \right]$$

Si è scelto di utilizzare $m = 0,85$ (Figura 5.14): in relazione alle considerazioni fatte sull'elemento di volume nei Capitoli 1 e 2, tale valore è tipico di diversi tipi di terreni coesivi.

Inoltre, ripetendo l'analisi con le rotazioni espresse in radianti, piuttosto che in gradi, come si può vedere in Figura 5.15, si ritrova lo stesso valore di m , che può quindi essere considerato come un parametro costante.

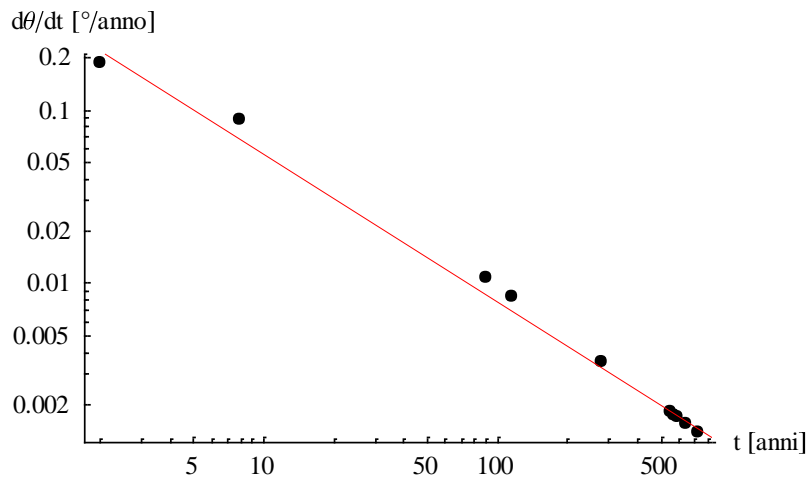


Figura 5.14. Velocità di rotazione (in °/anno) nel tempo in scala logaritmica per la calibrazione del parametro m .

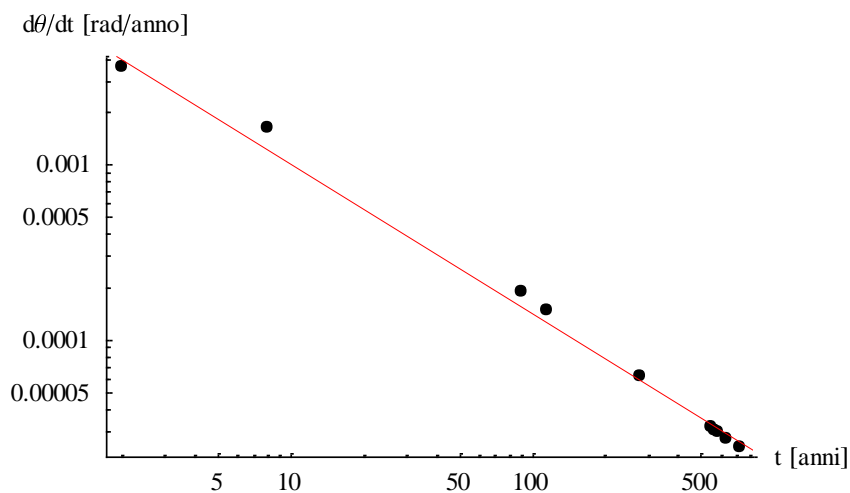


Figura 5.15. Velocità di rotazione (in rad/anno) nel tempo in scala logaritmica per la calibrazione del parametro m .

Teoricamente, i parametri A e α dovrebbero essere ricavati sul piano semilogaritmico $[\text{Log}(d\theta/dt) - M]$, riportato in Figura 5.16.

Il parametro A individua l'ordine di grandezza della velocità di rotazione della Torre in $[\text{°}/\text{anno}]$, mentre il parametro α indica l'effetto della variazione del momento flettente sulla velocità di *creep*.

In realtà, sulla base dei dati pregressi, non è possibile ricavare i parametri A e α in modo immediato per analogia, perché ogni dato è costituito da un valore della rotazione, e quindi del momento, misurato in un certo istante di tempo.

L'analogia con il modello per l'elemento di volume richiederebbe invece la conoscenza di almeno due valori della rotazione, e quindi del momento, in un certo istante di tempo.

Non avendo a disposizione questi dati, i parametri A e α possono essere calibrati in modo da rispettare la seguente condizione:

$$\text{Eq. 5.4} \quad 0 < \left[\exp(-\alpha Wh \theta_0) - \left(1 + \frac{Wh}{k_\theta} \right) \alpha Wh A \frac{t_i^m}{1-m} t^{1-m} \right] < 1$$

e da interpolare i dati pregressi di rotazione della Torre secondo la nuova funzione di *creep* rotazionale ricavata per il macroelemento:

$$\text{Eq. 5.5} \quad \theta(t) = -\frac{1}{\alpha Wh} \ln \left[\exp(-\alpha Wh \theta_0) - \left(1 + \frac{Wh}{k_\theta} \right) \alpha Wh A \frac{t_i^m}{1-m} t^{1-m} \right]$$

Ripetendo l'analisi con le rotazioni in radianti, piuttosto che in gradi, non si ritrovano gli stessi valori per A e α , come si può vedere in Figura 5.17: tali parametri dipendono evidentemente dall'unità di misura.

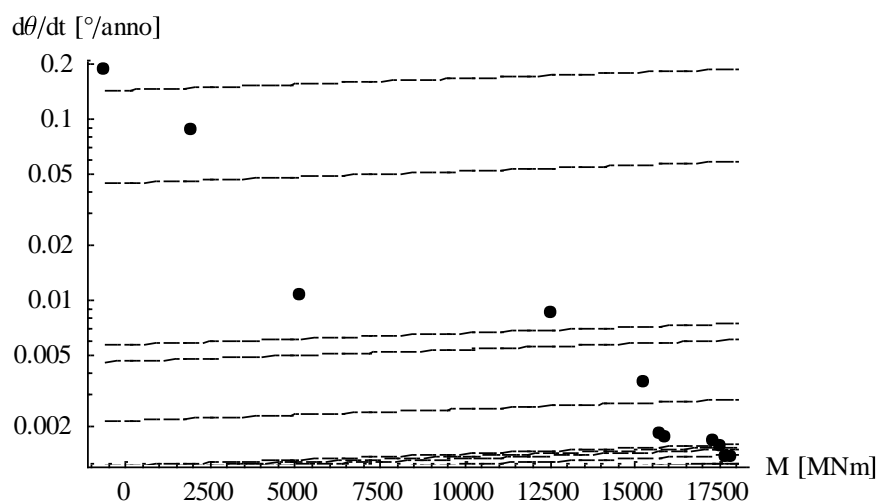


Figura 5.16. Velocità di rotazione (in °/anno) in funzione del momento flettente in scala semilogaritmica per la calibrazione dei parametri A e α .

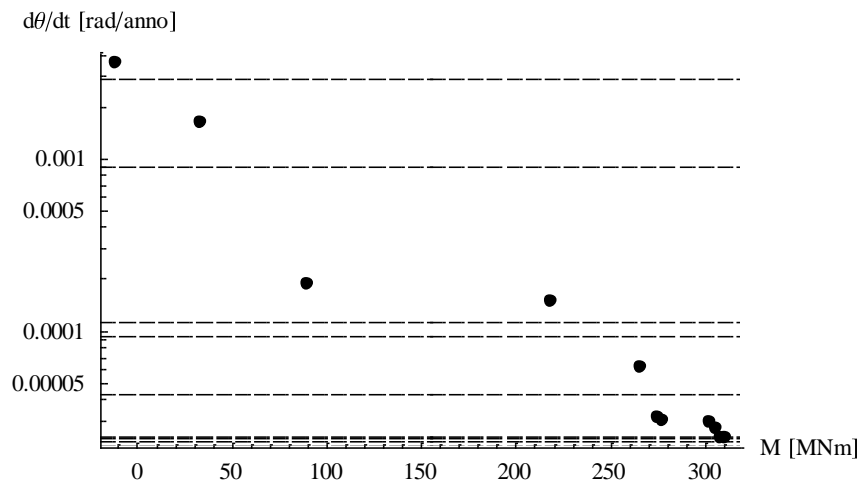


Figura 5.17. Velocità di rotazione (in rad/anno) in funzione del momento flettente in scala semilogaritmica per la calibrazione dei parametri A e α .

L'evoluzione delle rotazioni per *creep* nel tempo per la Torre di Pisa, caratterizzata da $A = 0,26^\circ/\text{anno}$ e $\alpha = 0,000015 \frac{^\circ/\text{anno}}{\text{MNm}}$, è riportata in Figura 5.18.

Si può notare che nel tratto iniziale la curva presenta un'elevata rigidità perciò la variazione iniziale della rotazione non risulta verosimile. Al contrario, la curva interpreta piuttosto bene i dati più recenti (relativi agli ultimi due secoli), sia in termini di rotazioni che di velocità di rotazione.

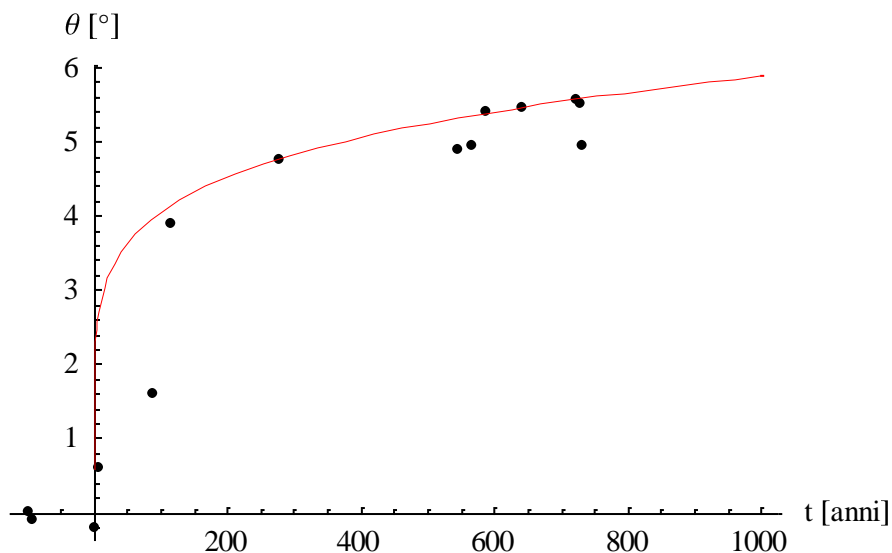


Figura 5.18. Evoluzione delle rotazioni nel tempo secondo il modello di *creep*.

Esiste un particolare valore di t , indicato con \bar{t} , per il quale la funzione dell'Eq. 5.5 tende bruscamente all'infinito, cioè la rotazione del sistema accelererà indefinitamente, in modo analogo a quanto accade durante il *creep* terziario, portando infine al collasso. Sulla scala dei tempi fissata il valore di \bar{t} può essere calcolato dalla seguente espressione:

$$\bar{t} = \left[\frac{(1-m)\exp(-\alpha Wh\theta_0)}{(1+Wh/k_\theta)\alpha Wh A t_i^m} \right]^{\frac{1}{1-m}} \cong 1,4 \cdot 10^7 \text{ anni}$$

Purtroppo in questo caso è evidente che non è possibile attribuire al valore assunto da \bar{t} un significato fisico, analogo al *time to failure* dei terreni coesivi.

Inoltre la posizione del punto di flesso, definito nella Sezione 4.4.1, può essere individuata in corrispondenza di:

$$\hat{t} \cong 4,6 \cdot 10^6 \text{ anni}$$

La rotazione corrispondente a \hat{t} assume un valore troppo elevato da poter pensare che il punto di flesso rappresenti l'innesco del *creep* terziario.

5.3.6 BIBLIOGRAFIA

1. Burland J.B. e Viggiani C. (1994). *Osservazioni sul comportamento della Torre di Pisa*. Rivista Italiana di Geotecnica, Vol. 3, p. 179–199.
2. Burland J.B. (1998). *The enigma of the leaning tower of Pisa*. Sixth Spencer J. Buchanan Lecture, Texas A&M University.
3. Burland J. B., Jamiolkowski M., e Viggiani C. (1998). *Stabilising the leaning tower of Pisa*. Bulletin of Engineering Geology and the Environment. Vol. 57(1), p. 91–99.
4. Desideri A., Russo G., e Viggiani C. (1997). *La stabilità di torri su terreno deformabile*. Rivista Italiana di Geotecnica, Vol. 1, p. 5–21.
5. Marchi M. (2008). *Stability and strength analysis of leaning towers*. Dottorato di ricerca in Ingegneria Geotecnica, Università degli studi di Parma, Dipartimento di Ingegneria Civile ed Architettura.

6. Nova R., e Montrasio L. (1995). *Un'analisi di stabilità del campanile di Pisa*. Rivista Italiana di Geotecnica, Vol. 2, p. 83–93.
7. Opera Primaziale Pisana., *Sito Ufficiale della Torre di Pisa*.
<http://www.opapisa.it>
8. Vari autori (2006). *La Torre restituita: gli studi e gli interventi che hanno consentito la stabilizzazione della torre di Pisa*. Roma: Istituto poligrafico e zecca dello Stato, Libreria dello Stato.

5.4 IL CAMPANILE DI SANTO STEFANO A VENEZIA

5.4.1 CARATTERISTICHE PRINCIPALI E CENNI STORICI

Il Campanile di Santo Stefano (Figura 5.19) si trova a Venezia nel sestiere di San Marco ed è uno tra i più alti della città.

La costruzione del Campanile iniziò nel 1450. Quando si raggiunse un'altezza di 27 m, i lavori furono interrotti a causa dell'evidente rotazione della struttura, che mise in luce l'inadeguatezza delle fondazioni fin dall'inizio.

I lavori ricominciarono circa 100 anni dopo, intorno al 1550. Nel tentativo di correggere l'inclinazione della Torre, nella seconda fase di costruzione i muri furono costruiti in direzione verticale. Come nel caso della Torre di Pisa, infatti, l'asse verticale del Campanile non è rettilineo.

Nel 1774 fu misurato, per la prima volta, lo spostamento orizzontale a livello del campanile, pari ad 80 cm verso il lato Est, lungo cui scorre un piccolo canale, chiamato Rio Malatin (Figura 5.19).

Dopo il crollo del campanile di San Marco nel 1902, nacque una forte preoccupazione per la stabilità del Campanile ed il Prefetto ordinò un controllo a tappeto sulle condizioni statiche di tutte le strutture campanarie della città. Per evitare vibrazioni eccessive fu sospeso il suono delle campane ed i primi studi eseguiti prospettavano la necessità dello smontaggio del secondo troncone. Tale ipotesi venne accantonata solo dopo uno studio approfondito degli ingegneri Antonelli e Caselli, che diedero avvio nel 1904 ad un intervento di consolidamento che si sarebbe dovuto concludere con il raddrizzamento del Campanile. Durante i lavori si verificò che lo strapiombo era dovuto alla rottura del masso fondale, con uno slittamento di circa 30 cm tra i due lembi. Le difficoltà che si presentarono durante l'esecuzione delle opere determinarono una revisione del progetto di rinforzo con l'inserimento, in sottopendenza, di cinque contrafforti in muratura e della relativa fondazione sul letto del canale, costituita da una soletta rettangolare in calcestruzzo su pali a vite di cemento. L'intervento si dimostrò efficace ma non risolutivo del fenomeno di inclinazione della Torre.

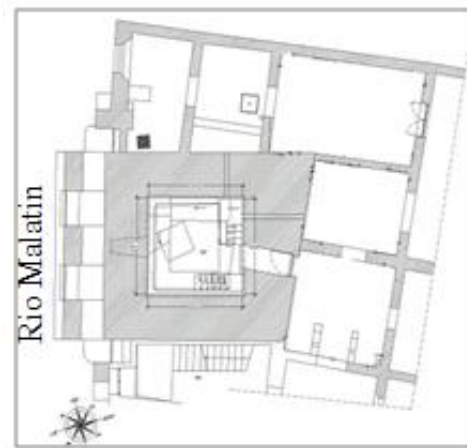


Figura 5.19. Il Campanile di Santo Stefano a Venezia.

- Il Campanile di Santo Stefano è una struttura isolata, ma prospiciente un canale.
- L'altezza della Torre, dalla fondazione alla cella campanaria, è di 61,9 m.
- Il baricentro si trova circa 25 m al di sopra del piano di fondazione.
- La Torre pesa circa 35 MN e possiede una pianta trapezia, che ha circa 7.3÷8 m di lato.
- La larghezza della fondazione è pari a circa 9 m.
- L'inclinazione misurata nel 1990 (prima dell'intervento di consolidamento) era di circa 2,2° verso Est.
- L'inclinazione misurata nel 2002 era di circa 2,6° verso Est.

5.4.2 STRATIGRAFIA DEL SOTTOSUOLO E FONDAZIONI

In occasione dell'intervento di consolidamento del 1904, è stato realizzato uno scavo attorno a gran parte della fondazione (Figura 5.20), descritto in un documento molto importante per gli interventi futuri.

Successivamente, alla fine del 1980, è iniziata un'ampia indagine geotecnica. In particolare, nel 1989 e nel 2004 sono state eseguite due prove penetrometriche con piezocono, due sondaggi, una prova dilatometrica, due carotaggi inclinati sulla fondazione, un carotaggio inclinato e uno verticale con estrazione di campioni di terreno indisturbati per prove di laboratorio (Figura 5.21).

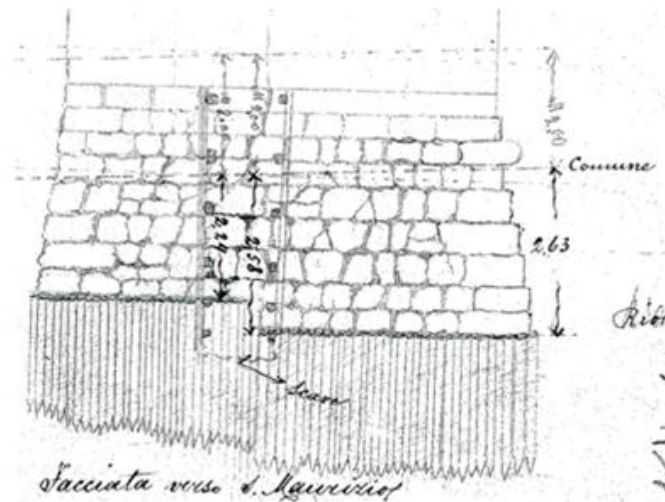


Figura 5.20. Scandaglio delle fondazioni del Campanile di Santo Stefano ordinato dagli Ing. Caselli ed Antonelli in previsione dell'intervento di consolidamento del 1904 (Marchi, 2008).

Grazie alle conoscenze derivate dallo scandaglio delle fondazioni del 1904 e dalla recente campagna di indagini, è stata effettuata la caratterizzazione stratigrafica e meccanica del sottosuolo.

Il profilo del terreno (Figura 5.22) sottostante la torre, di ambiente deposizionale lagunare-continentale della laguna veneta, è costituito da tre unità distinte:

- tra il piano campagna e una profondità di circa 3,5 m: strato di riporto antropico;
- tra 3,5 m e circa 7,6 m di profondità: argille limose normalmente consolidate e leggermente sovraconsolidate con inclusioni organiche e conchiglie (la base della Torre si trova a 4 m di profondità);
- tra 7,6 m e 13 m di profondità: sabbie fini limose, talvolta argillose;

- tra 13 m ed la massima profondità indagata: continuo alternarsi di strati di argilla limosa, limo argilloso e sabbia fine limosa.

Il livello medio della falda acquifera è di 1 m al di sotto del piano campagna.

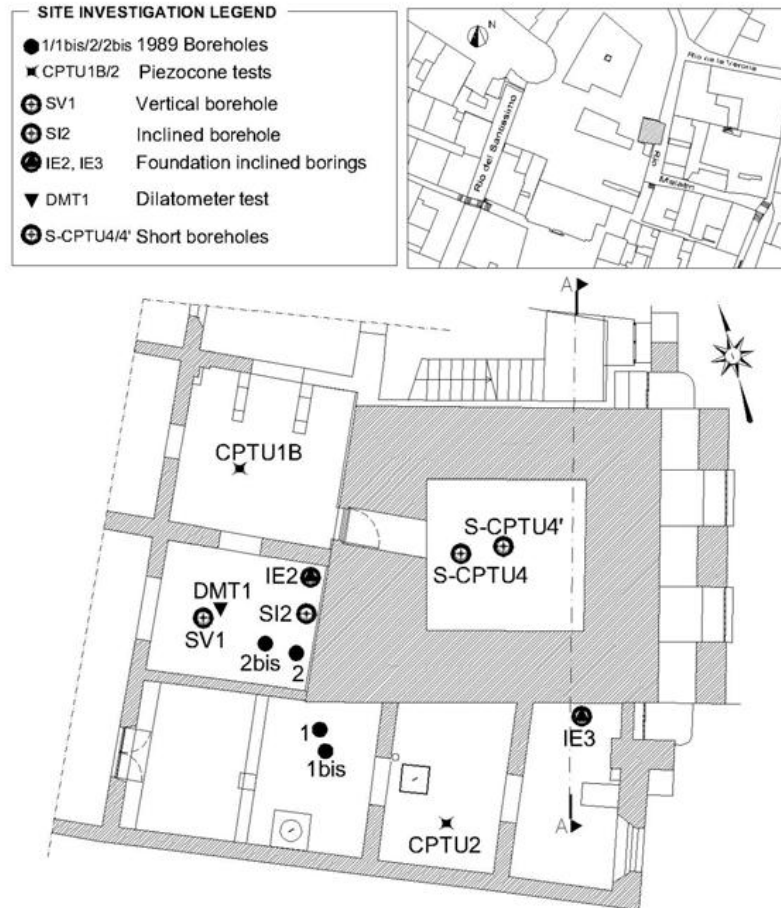


Figura 5.21. Piano delle indagini geotecniche (Marchi, 2008).

Oltre a fornire indicazioni sui terreni, le indagini hanno permesso la ricostruzione della geometria della fondazione e l'identificazione dei materiali utilizzati.

La fondazione ha una forma trapezoidale, sia in sezione che in pianta (Figura 5.22). La larghezza della fondazione è pari a circa 9 m. In altezza la dimensione media del masso fondale è di circa 4 m, con la presenza di una lesione verticale passante; tale differenza nella profondità del piano di posa è di circa 0,35 m, con il piano di posa della fondazione più basso nella zona verso il Rio.

Al di sotto del masso di fondazione, per lo più composto da blocchi di calcare in pietra d'Istria, è presente la palificata lignea originaria del Campanile (presumibilmente in ontano), costituita da pali infissi per battitura nello strato di argilla limosa ad un passo

di circa 30 cm e lunghi mediamente 2,50 m. Osservazioni dirette e prove sperimentali hanno mostrato buone condizioni di conservazione del legno.

A differenza di tutti gli altri casi, qui non è presente alcun assito di legno tra il masso fondale in pietra e i pali.

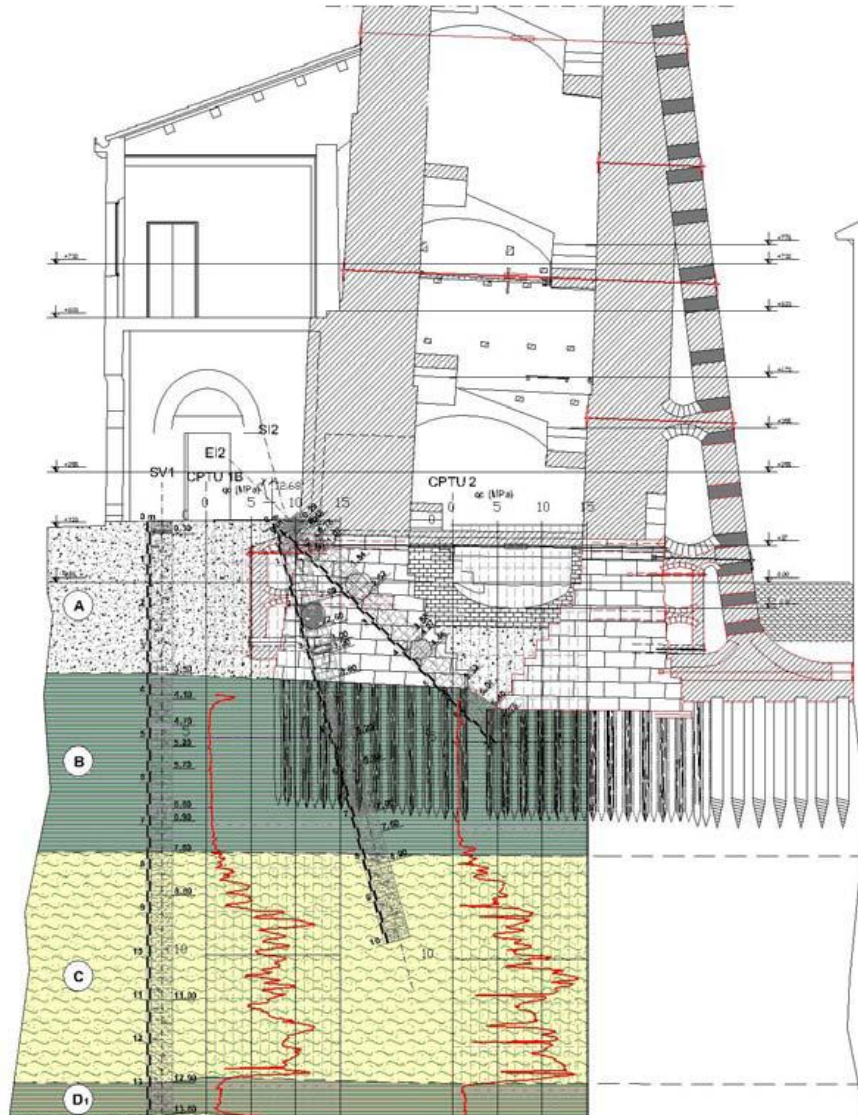


Figura 5.22. Ricostruzione della geometria della fondazione del Campanile di Santo Stefano.

5.4.3 EVOLUZIONE DELL'INCLINAZIONE NEL TEMPO

Fin dalla sua costruzione nel XVI secolo, il Campanile ha presentato un'evidente inclinazione. Tale movimento di rotazione è stato sicuramente innescato dalla presenza

del canale sul lato Est del Campanile, che costituisce un forte elemento di asimmetria. Un ulteriore elemento di asimmetria è dato dal masso di fondazione, come appena descritto nella Sezione 5.4.2. Inoltre, l'inclinazione del Campanile è stata influenzata dal dilavamento della malta del masso di fondazione dovuto all'azione del canale e dai fenomeni di *creep* dei terreni argillosi presenti nel sottosuolo.

Nel 1774, la prima misurazione della pendenza registrò uno spostamento orizzontale di 80 cm verso Est al livello del campanile, cioè su un'altezza di 44 m (corrispondente ad una rotazione di 1°).

Nel 1900, la velocità di tale movimento era di 7 mm/anno (1° ogni 100 anni) e lo strapiombo tra base e cella campanaria era aumentato a 170 cm.

Durante i lavori di consolidamento realizzati dal 1903 al 1905, fu registrato un improvviso aumento della pendenza di 15 cm, a causa del disturbo provocato dall'escavazione attorno alla fondazione e dalla realizzazione dei pali, ma alla fine dei lavori la velocità di incremento dell'inclinazione del Campanile era sostanzialmente diminuita fino a 1 mm/anno (2 millesimi di grado ogni 100 anni).

Tuttavia il fenomeno non si è arrestato. Nel 1940 venne rilevato uno strapiombo di 193 cm.

In seguito non sono state più effettuate misure attendibili fino all'inizio del decennio scorso: infatti nel 2000, risultando non sufficientemente rassicurante la situazione statica della struttura e non chiara l'evoluzione del fenomeno di dissesto, è stato installato sul Campanile un nuovo sistema di monitoraggio, con acquisizione automatica in tempo reale, al fine di controllare il comportamento della struttura.

Nel 2002 la misura di scostamento dalla verticalità, eseguita con la tecnica del pendolo a misura manuale, ha fornito un incremento di pendenza di 6,1 cm in 60 anni (circa 1 mm/anno), sostanzialmente in linea con la variazione dell'ultimo secolo.

Attualmente il Campanile, secondo quanto segnalato dalla Soprintendenza dei beni architettonici di Venezia, presenta quindi uno strapiombo, dalla sommità alla base, di circa 200 cm e per questo non è consentito l'accesso al pubblico.

Prima del luglio 2003, l'inclinazione del Campanile era diretta verso Est, cioè nella direzione di massimo scostamento dalla verticalità. In seguito è stata osservata un'inversione della tendenza dei movimenti del Campanile in direzione Sud-Ovest.

Risulta chiaro che, essendo ancora in atto un movimento di rotazione rispetto alla base dopo novanta anni dalla fine dei lavori di consolidamento, il problema non può considerarsi risolto, ma per trarre conclusioni affidabili è necessario un più lungo periodo di osservazione.

In Figura 5.23 è riportato l'andamento delle rotazioni del Campanile nel corso del tempo fin dall'inizio della sua costruzione.

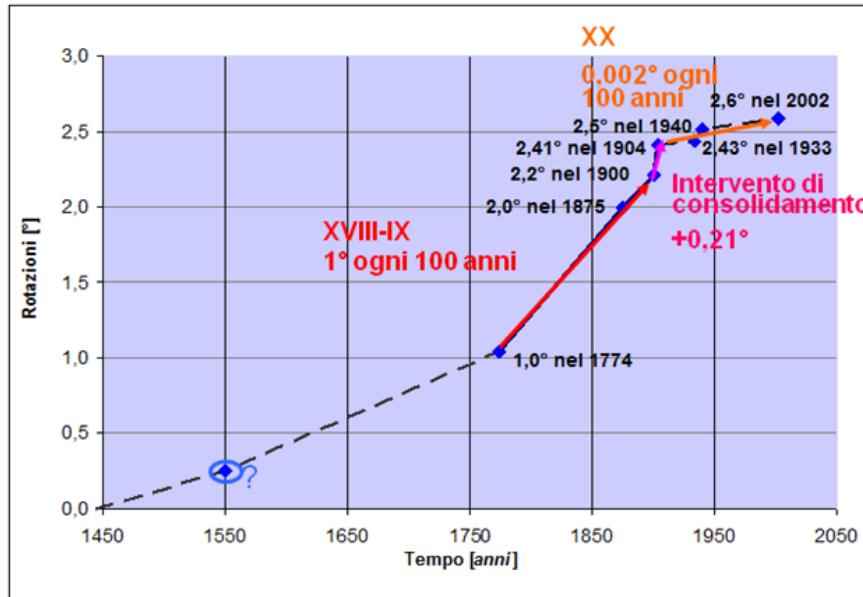


Figura 5.23. Storia dell'inclinazione del Campanile di Santo Stefano (Marchi, 2008).

5.4.4 INTERVENTI GEOTECNICI

L'intervento di rinforzo realizzato nel 1904 (Figura 5.24) ha sensibilmente modificato il comportamento del Campanile. In particolare, sono stati realizzati 5 contrafforti in muratura, alti 15 m (circa ¼ dell'altezza del Campanile), tre dei quali in sottopendenza, cioè sul lato Est, sul Rio Malatin, e uno sui lati rispettivamente Nord e Sud in prossimità del canale stesso. La relativa fondazione è costituita da una soletta rettangolare (4 m x 10 m) in calcestruzzo di circa 50 cm, realizzata sul letto del canale, e da una palificata, di circa 58 m², costituita da pali infissi a vite nello strato di sabbia, di lunghezza pari a 3 m e diametro medio di 0,28 m.

Inoltre, nel 1904 sono stati installati diversi incatenamenti metallici, molti dei quali sono recentemente risultati aperti in parecchi punti e in cattivo stato di conservazione.

Precauzionalmente nel 2003 sono stati eseguiti i primi interventi di messa in sicurezza della struttura e, in particolare, è stato installato un sistema provvisorio di confinamento del fusto del campanile con funi in acciaio.

Per definire un progetto di consolidamento definitivo del masso fondale che consenta di ridurre fortemente i movimenti di rotazione del Campanile, si stanno tuttora eseguendo indagini sul terreno e sulla struttura, modelli matematici di simulazione e campi prova.



Figura 5.24. Contrafforti realizzati durante l'intervento di consolidamento delle fondazioni del 1903-1905 (Marchi, 2008).

5.4.5 APPLICAZIONE DEL MODELLO DI CREEP

L'obiettivo di questa Sezione è la calibrazione dei parametri del modello di evoluzione delle rotazioni nel tempo, proposto nella Sezione 4.4, sui dati pregressi del Campanile di Santo Stefano a Venezia. Il procedimento seguito per tutti i *case histories* è riportato in modo esteso nella Sezione 5.3.5 per la Torre di Pisa.

Le principali proprietà geometriche, necessarie ai fini dell'analisi di *creep*, sono:

- il peso della Torre $W = 35 \text{ MN}$;
- l'altezza del baricentro al di sopra del piano di fondazione $h = 25 \text{ m}$;
- la rigidezza rotazionale del sistema terreno-fondazione $k_\theta = \infty \text{ MNm}^\circ$.

Come origine della scala dei tempi, si assume $t = 0$ in corrispondenza dell'anno 1750, due secoli dopo l'inizio della costruzione, a causa della mancanza di dati precedenti.

I dati della rotazione registrati nel tempo $[\theta - t]$ costituiscono il punto di partenza dell'analisi del comportamento a lungo termine del sistema terreno-fondazione-torre (Figura 5.25).

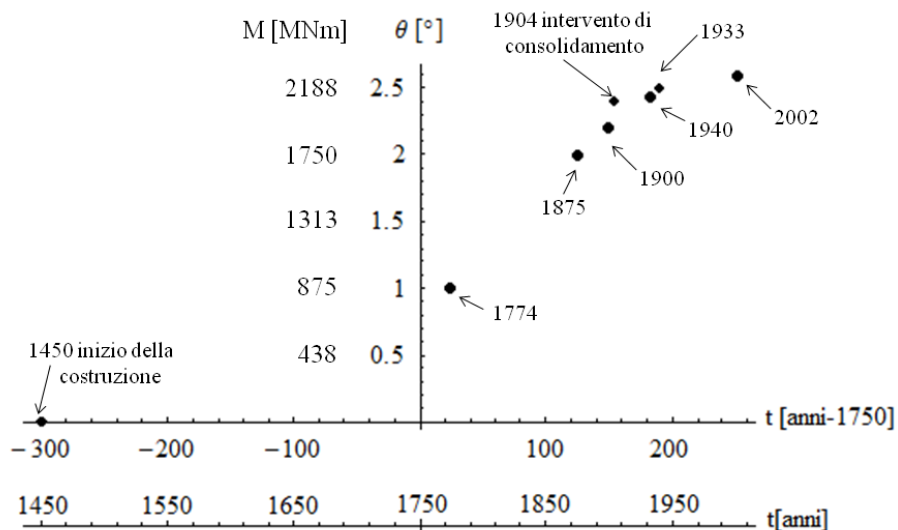


Figura 5.25. Rotazione e momento flettente del Campanile di Santo Stefano nel tempo.

Nella Tabella 5.2 sono riportati i dati noti dell'inclinazione (positiva verso Est, in gradi e in radianti) e dello strapiombo (in metri) del Campanile misurati fin dall'inizio della sua costruzione (cioè dal 1450). Inoltre, sono messi in evidenza il riferimento della scala dei tempi e i corrispondenti valori del momento flettente $M = Wh\theta$ applicato in fondazione, riportato anche in Figura 5.25.

Il primo passo consiste nell'interpolare i dati pregressi $[\theta - t]$, tenendo conto degli eventi storici e delle variazioni delle condizioni della Torre, con una funzione logaritmica del tipo:

Eq. 5.6
$$\theta = \ln\left(1 + \frac{t}{t_0}\right) + \theta_0$$

Nel caso del Campanile di Santo Stefano, si assume che nel 1750 $\theta_0 = 0,2^\circ$ e l'interpolazione dei dati esistenti è riportata in Figura 5.26.

Anno	Scala dei tempi	Strapiombo su 44 m	Inclinazione θ		Momento M	
			[°]	[rad]	[MNm] $M=W h \theta[^\circ]$	[MNm] $M=W h \theta[\text{rad}]$
[anni]	[anni]	[m]				
1450	-300	0,00	0,00	0,000	0	0
1750	0	/	/	/	/	/
1774	24	0,80	1,00	0,017	875	15
1875	125	1,50	2,00	0,035	1750	31
1900	150	1,70	2,20	0,038	1925	34
1904	154	1,85	2,41	0,042	2109	37
1933	183	1,87	2,43	0,042	2126	37
1940	190	1,93	2,50	0,044	2188	38
2002	252	1,99	2,60	0,045	2275	40

Tabella 5.2. Dati e rotazioni del Campanile di Santo Stefano.

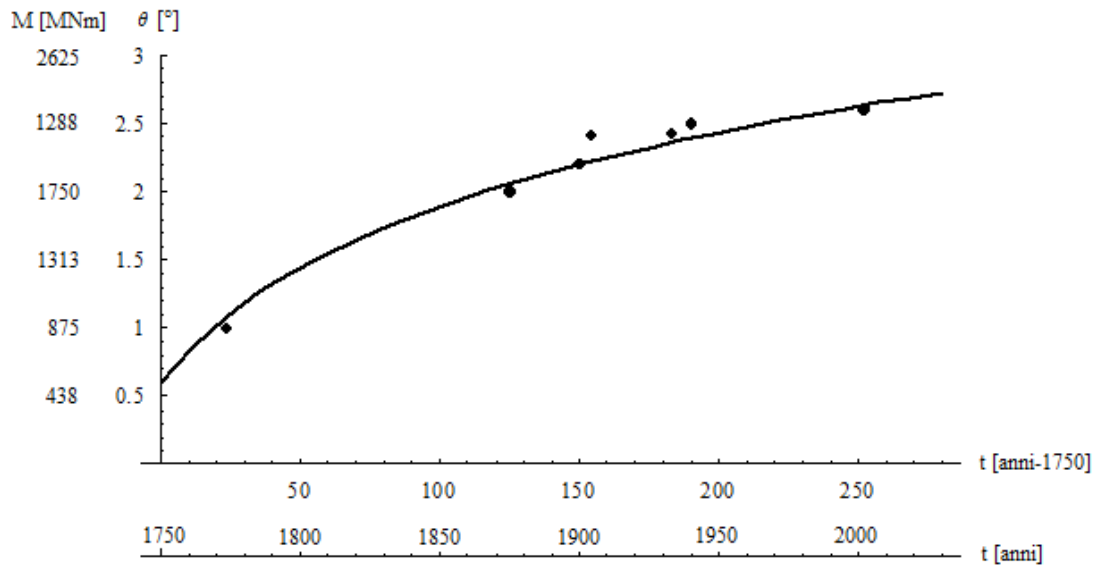


Figura 5.26. Interpolazione dei dati con una funzione logaritmica.

Nella successiva analisi si trascurano i dati registrati dopo l'intervento di consolidamento del 1904, che ha modificato in modo sostanziale le condizioni di equilibrio della torre.

L'andamento $[d\theta/dt - t]$, ottenuto dalla derivata prima della funzione interpolante, per il Campanile di Santo Stefano è riportato in Figura 5.27, con la velocità di rotazione espressa in $^\circ/\text{anno}$, e in Figura 5.28, in rad/anno .

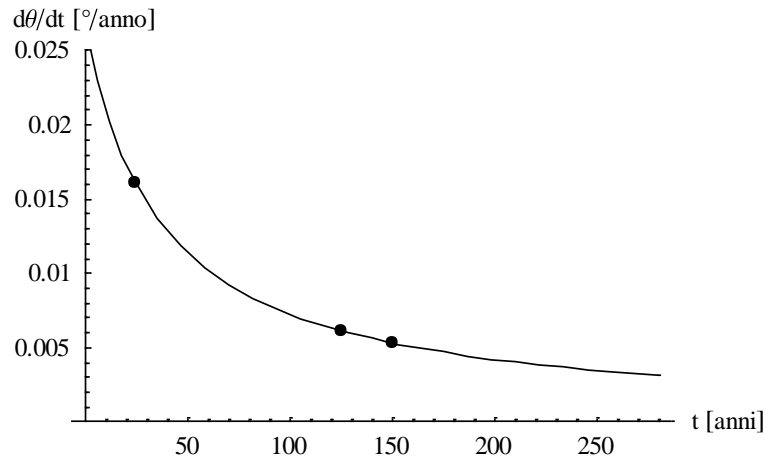


Figura 5.27. Velocità di rotazione (in $^\circ/\text{anno}$) nel tempo.

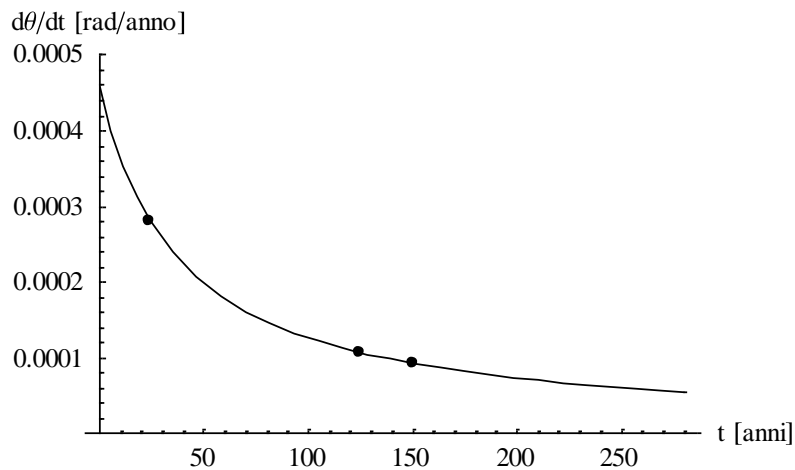


Figura 5.28. Velocità di rotazione (in rad/anno) nel tempo.

Non avendo a disposizione i risultati di prove di *creep* sui terreni presenti in sito, i parametri sono stati definiti e calibrati unicamente sulla base dell'analogia tra elemento di volume e macroelemento.

In particolare, si è scelto di utilizzare $m = 0,6$ (Figura 5.29).

Ripetendo l'analisi con le rotazioni espresse in radianti, piuttosto che in gradi, si ritrova lo stesso valore di m , che può quindi essere considerato come un parametro costante.

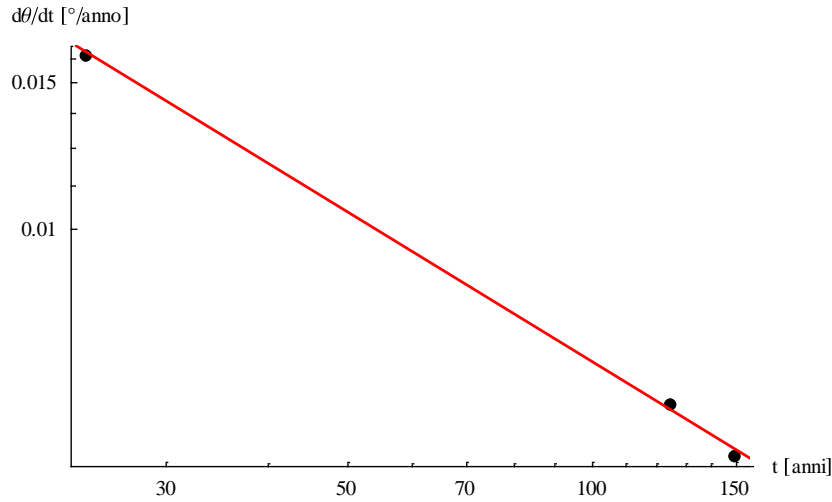


Figura 5.29. Velocità di rotazione (in °/anno) nel tempo in scala logaritmica per la calibrazione del parametro m .

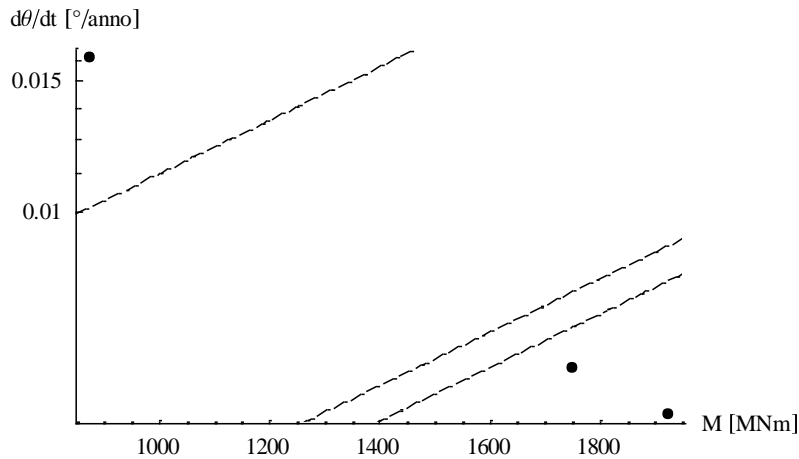


Figura 5.30. Velocità di rotazione (in °/anno) in funzione del momento flettente in scala semilogaritmica per la calibrazione dei parametri A e α .

Teoricamente, i parametri A e α dovrebbero essere ricavati sul piano semilogaritmico $[\text{Log}(d\theta/dt) - M]$, riportato in Figura 5.30.

In realtà, non avendo a disposizione questi dati, i parametri A e α possono essere calibrati in modo da rispettare la seguente condizione:

$$\text{Eq. 5.7} \quad 0 < \left[\exp(-\alpha Wh \theta_0) - \left(1 + \frac{Wh}{k_\theta} \right) \alpha Wh A \frac{t_i^m}{1-m} t^{1-m} \right] < 1$$

e da interpolare i dati pregressi di rotazione della Torre secondo la nuova funzione di *creep* rotazionale ricavata per il macroelemento:

$$\text{Eq. 5.8} \quad \theta(t) = -\frac{1}{\alpha Wh} \ln \left[\exp(-\alpha Wh \theta_0) - \left(1 + \frac{Wh}{k_\theta}\right) \alpha Wh A \frac{t_i^m}{1-m} t^{1-m} \right]$$

Ripetendo l'analisi con le rotazioni in radianti, piuttosto che in gradi, non si ritrovano gli stessi valori per A e α : tali parametri dipendono evidentemente dall'unità di misura.

L'evoluzione delle rotazioni per *creep* nel tempo per il Campanile di Santo Stefano, caratterizzata da $A = 0,033^\circ/\text{anno}$ e $\alpha = 0,00083 \frac{^\circ/\text{anno}}{\text{MNm}}$, è riportata in Figura 5.31.

Si può notare che la curva interpreta piuttosto bene i dati tra il 1750 e il 1900, sia in termini di rotazioni che di velocità di rotazione.

È evidente che l'intervento di rinforzo delle fondazioni del 1904 è stato efficace e ha permesso di stabilizzare la Torre che altrimenti sarebbe molto probabilmente crollata in breve tempo. In questo caso la formulazione sembra quindi rappresentare in modo corretto l'evoluzione prevista delle rotazioni.

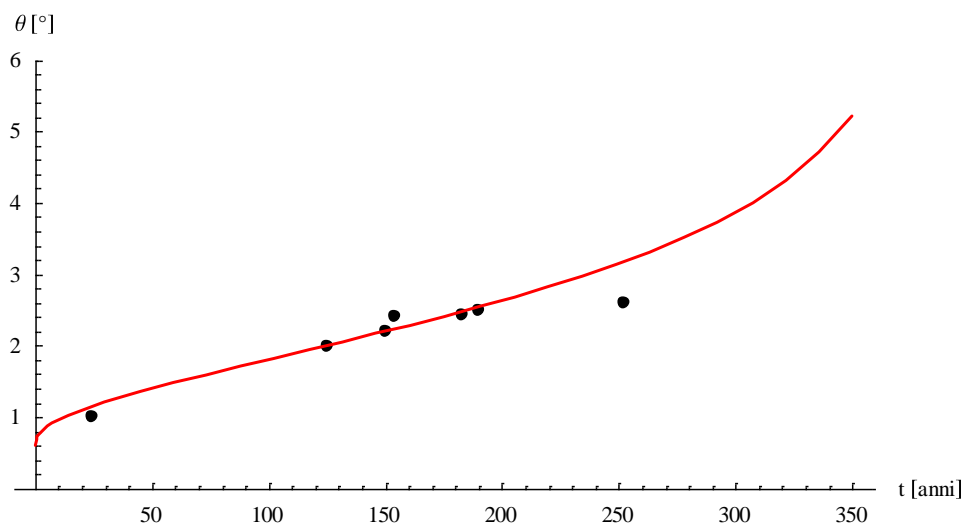


Figura 5.31. Evoluzione delle rotazioni nel tempo secondo il modello di *creep*.

Sulla scala dei tempi fissata il valore di \bar{t} , per il quale la rotazione del sistema accelera indefinitamente, portando infine al collasso (Figura 5.32), può essere calcolato, rispetto a $t = 0$ (nel 1750), dalla seguente espressione:

$$\bar{t} = \left[\frac{(1-m) \exp(-\alpha Wh \theta_0)}{\left(1 + Wh/k_\theta\right) \alpha Wh A t_i^m} \right]^{\frac{1}{1-m}} \cong 380 \text{anni}$$

che corrisponde al 2130.

Inoltre si può osservare la posizione del punto di flesso dell'Eq. 5.5 (puntino rosso in Figura 5.32):

$$\hat{t} \cong 110 \text{anni}$$

che corrisponde al 1860.

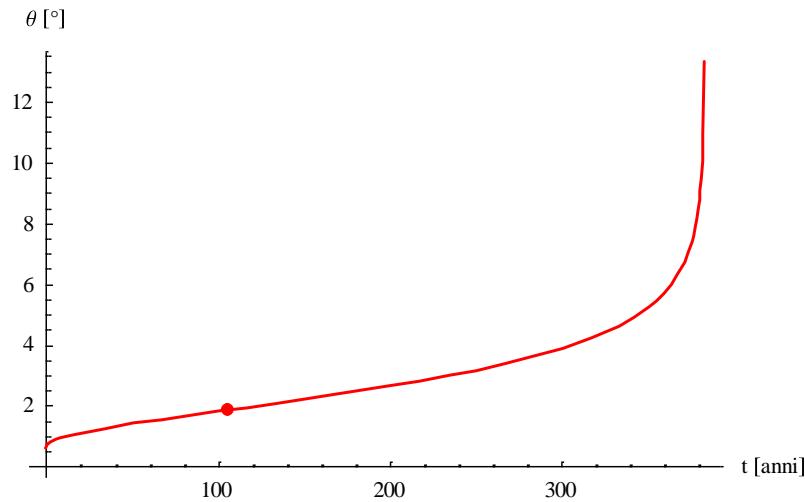


Figura 5.32. Evoluzione delle rotazioni nel tempo secondo il modello di *creep*.

5.4.6 BIBLIOGRAFIA

1. Autori vari (2007). *Controllo e messa in sicurezza del campanile di S. Stefano a Venezia*. Soprintendenza per i Beni Architettonici, per il Paesaggio e per il Patrimonio Storico, Artistico ed Etnoantropologico di Venezia e Laguna, Ministero per i Beni e le Attività Culturali.
2. Marchi M., Gottardi G., e Lionello A. (2006). *Sulle fondazioni dei campanili a Venezia*. In: *Fifth National Symposium of Researchers in Geotechnical Engineering*, p. 177–192. Bari: Helvenius.
3. Marchi M. (2008). *Stability and strength analysis of leaning towers*. Dottorato di ricerca in Ingegneria Geotecnica, Università degli studi di Parma, Dipartimento di Ingegneria Civile ed Architettura.
4. Zuccolo G. (1975). *Il restauro statico nell'architettura di Venezia*. Istituto Veneto di Scienza Lettere ed Arti, Venezia.
5. www.soprintendenza.venezia.beniculturali.it/soprive/restauri/Cantieri/campanile-di-s-stefano
6. www.patrimoniosos.it

5.5 LA TORRE GHIRLANDINA DI MODENA

5.5.1 CARATTERISTICHE PRINCIPALI E CENNI STORICI

La Torre Campanaria del Duomo di Modena, chiamata Ghirlandina per il doppio ordine di ringhiere che ne incoronano la punta come ghirlande (Figura 5.33), costituisce il simbolo della città ed è tutelata dall'Unesco come patrimonio artistico dell'umanità, insieme al Duomo e a Piazza Grande.

La Torre, originariamente dedicata a San Geminiano, iniziata tra il 1099 e il 1106, e alta circa 87 m con uno strapiombo di 1,5 m, è una delle più imponenti torri snelle costruite in epoca medioevale in Emilia Romagna, “seconda solo alla Torre degli Asinelli di Bologna” (Alfieri, 2009), iniziata nel 1109 e alta circa 97,2 m con uno strapiombo di 2,2 m, di cui si tratterà nella Sezione 5.6.

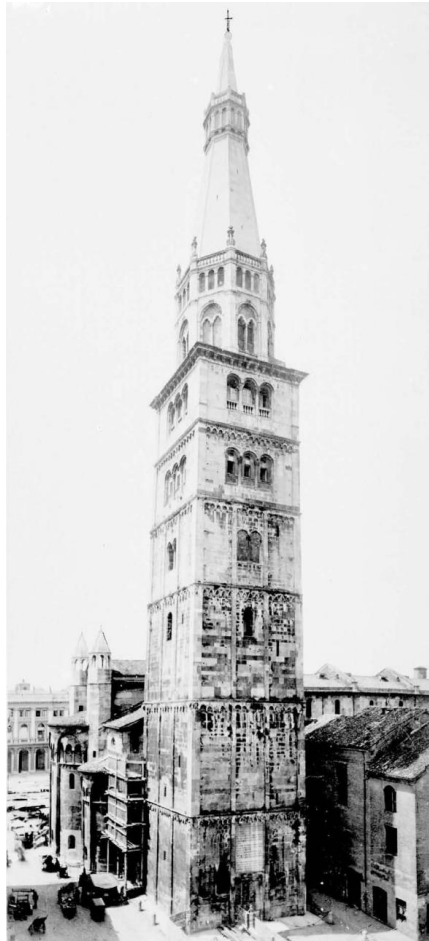


Figura 5.33. La Torre Ghirlandina di Modena, nel 1898 (Cadignani, 2010).



Figura 5.34. Immagine della zona absidale del duomo in cui si vede l'arco di collegamento tra Torre e Duomo (Alfieri, 2009).

La Torre sorge lungo il lato nord del Duomo, cui è collegata da due archi a sesto acuto realizzati nel 1338, arretrata rispetto alla facciata nella zona absidale (Figura 5.34).

Nello sviluppo verticale della Torre si possono distinguere tre parti principali:

- 1) il fusto (o canna), a sezione pressoché quadrata, costituito dai primi sei ordini, in stile romanico, fino ad una quota da terra di circa 47 m;
- 2) il tamburo ottagonale, in stile gotico, fino a 57 m;
- 3) la guglia piramidale su pianta ottagonale, in stile gotico, fino a 87 m, ad esclusione della croce.

La struttura è caratterizzata da murature in laterizio portanti che, al crescere della quota, si snelliscono sempre più fino a concentrare la propria funzione in quattro pilastri d'angolo (Figura 5.35).

L'analisi delle vicende storiche che riguardano la Ghirlandina è piuttosto complessa, anche a causa della mancanza di una documentazione in grado di accertare l'inizio e lo svolgimento del cantiere (Alfieri, 2009).

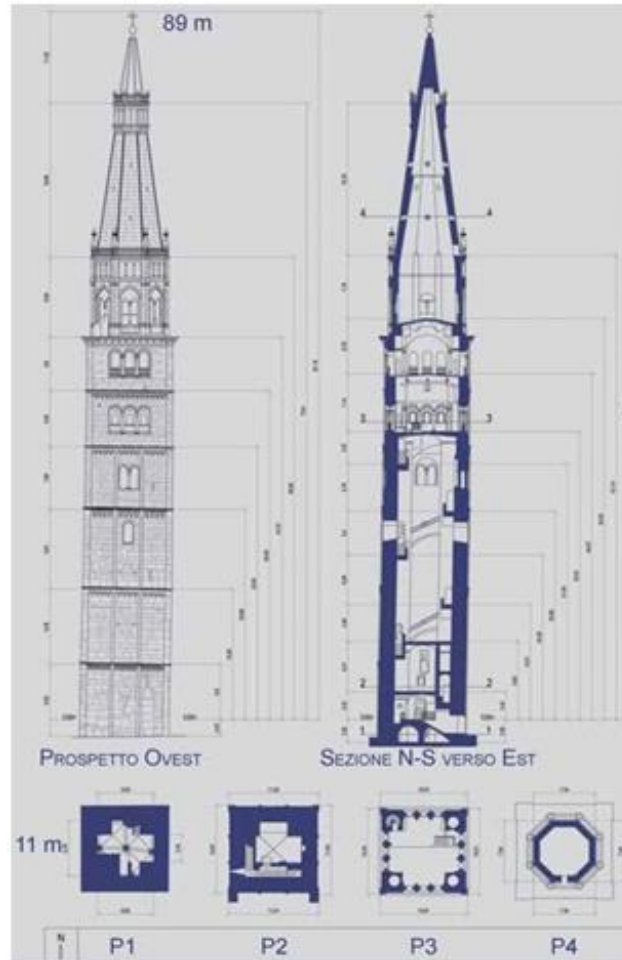


Figura 5.35. Prospetto Ovest, sezione Nord-Sud e piante della Ghirlandina (Cadignani, 2010).

Dagli studi condotti nei secoli si può concludere che l'edificazione della Ghirlandina, iniziata tra il 1099 e il 1106, contemporaneamente al Duomo, sia avvenuta in quattro fasi principali:

- Inizialmente sono state costruite le fondazioni e la base del fusto, per un'altezza di circa 13 m.
- Dopo una breve interruzione dei lavori (infatti il primo livello della torre presenta già un'inclinazione diversa rispetto agli altri), sono stati realizzati il fusto e la prima loggia fino al quinto ordine. In particolare il quinto ordine è stato realizzato tra il 1169 e 1179.
- Nei due secoli successivi la Torre è stata innalzata, probabilmente anche per motivi di rivalità con le torri di Bologna; in particolare, la costruzione del sesto

ordine, della parte ottagonale e della guglia è iniziata nel 1261, concludendosi nel 1319.

- Inoltre, si ritiene che nel 1587, durante alcuni lavori di restauro della parte sommitale, ci sia stata una sopraelevazione di ulteriori 7 m, con l'ulteriore sopraelevazione della guglia, giustificata da un'inclinazione completamente differente rispetto al resto della Torre.

La struttura presenta un asse non solo inclinato nel suo complesso, ma anche dall'andamento segmentato, che testimonia numerose interruzioni del processo costruttivo e successive correzioni della verticalità.

- La Torre è collegata al Duomo da due archi.
- L'altezza della Torre è di circa 92 m sul piano di fondazione e di circa 87 m fuori terra.
- Il baricentro si trova circa 30,6 m al di sopra del piano di fondazione.
- La Torre pesa circa 92 MN e possiede una pianta quadrata, che ha circa 11 m di lato.
- La larghezza della fondazione è pari a circa 12,4 m.
- L'inclinazione misurata nel 2006 era di circa 2,32° verso Sud-Ovest.

5.5.2 STRATIGRAFIA DEL SOTTOSUOLO E FONDAZIONI

A partire dal 1980 il Comune di Modena ha avviato un'organica attività di studio del fenomeno della subsidenza, basato sulla realizzazione di una rete di livellazione geodetica e nell'esecuzione di indagini geotecniche.

Il livello piezometrico profondo, che originariamente superava il piano campagna, si è abbassato nel tempo a causa dei forti prelievi d'acqua, stabilizzandosi dopo il 1970 a circa 10 m di profondità e determinando il vistoso incremento di subsidenza che ha raggiunto punte di 80-90 cm. Negli anni successivi, grazie alle iniziative del Comune di Modena volte a ridurre i prelievi di acqua, il livello piezometrico degli acquiferi compresi tra i 22 e 34 m e i 54 e 63 m di profondità è passato dai 10 m degli anni 1975-

1976 a 3-4 metri, e il livello nell'ambito dell'orizzonte più superficiale si colloca a circa 1,5-1,2 m dal piano campagna.

Le prime indagini della struttura fondale della Torre risalgono al periodo 1898-1901 (Figura 5.36), quando, nell'ambito degli studi sulla stabilità della Torre affidati a Silvio Canevazzi e a Francesco Cavani, vengono eseguiti scavi esplorativi sia all'interno del seminterrato, sia lungo il lato meridionale sia lungo il lato settentrionale (Cadignani, 2010).

Tra il 2007 e il 2008 sono state poi condotte altre indagini geotecniche, attraverso una serie di carotaggi meccanici, per indagare le ragioni dell'abbassamento e dell'inclinazione della Torre.

La posizione degli scavi e dei carotaggi è illustrata in Figura 5.37.

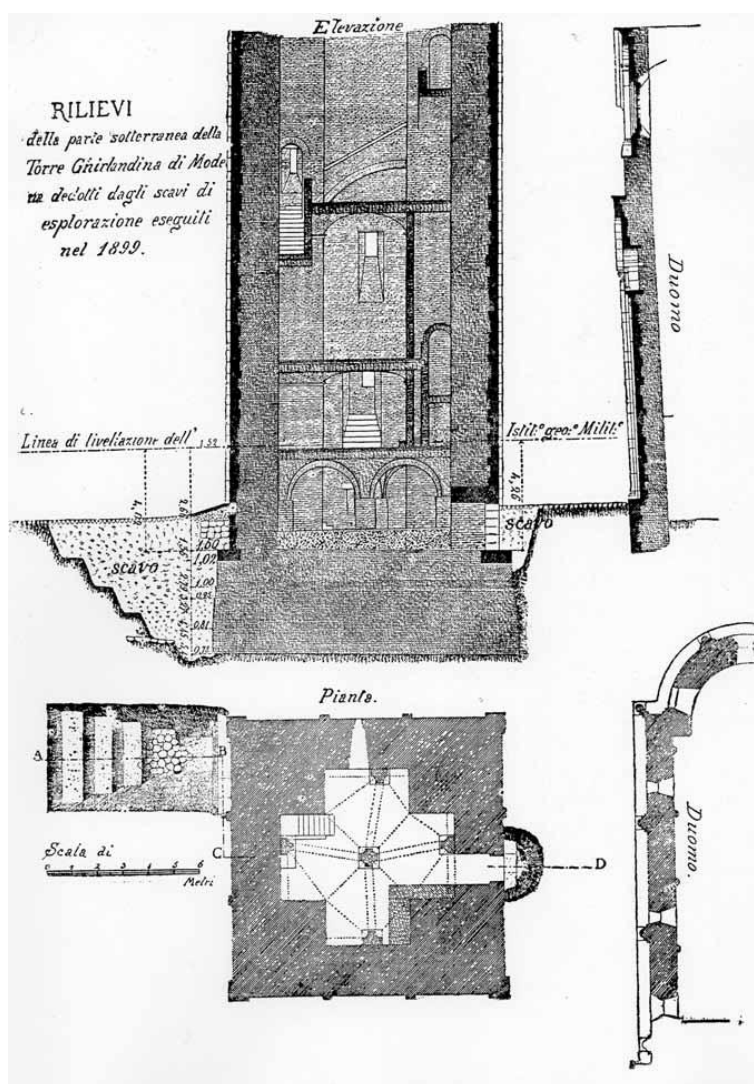


Figura 5.36. Sezione della Ghirlandina pubblicata dall'architetto Faccioli nella relazione sui lavori eseguiti dall'Ufficio regionale tra il 1898 e il 1901 (Cadignani, 2010).

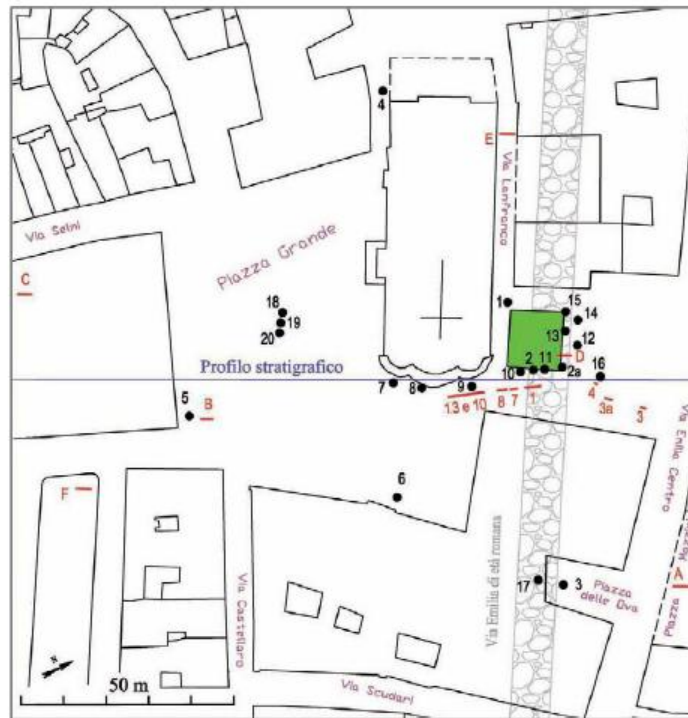


Figura 5.37. Planimetria con ubicazione in rosso degli scavi del 1898-1901 e in nero dei carotaggi del 2007-2008 (Alfieri, 2009).

Il sottosuolo modenese è composto da formazioni di ambiente alluvionale (Pleistocene medio), depositati su una superficie di discontinuità stratigrafica che li separa dai più antichi depositi di ambiente litorale. In Figura 5.38 è riportata una sezione schematica del profilo stratigrafico al di sotto della Torre, dove è possibile individuare:

- tra il piano campagna (posto 34 m s.l.m.) e una profondità di circa 2 m: terreno di riporto con frammenti di laterizi;
- tra 2 m e 7 m circa di profondità: orizzonte archeologico costituito da limi argillosi talvolta sabbiosi con torba e frammenti di laterizi di età romana (in particolare, tra 6,57 e 7,42 m di profondità si ritrovano il basolato della Via Emilia e riporti antropici romani);
- tra 7 m e 21 m circa di profondità: limi argillosi;
- tra 21 m e 33 m circa di profondità: ghiaie e sabbie con intercalazioni lentiformi limoso sabbiose.

I cedimenti lato Nord e lato Sud valgono rispettivamente 1,95 m e 2,19 m, e danno luogo ad un cedimento differenziale di 0,24 m.

La fondazione (Figura 5.38) non è molto profonda, in quanto attualmente il piano di posa si trova solo a una profondità di circa 5 m; tenendo conto che la Torre ha subito un cedimento medio di circa 2 m, originariamente la fondazione era interrata di poco più di 3 metri.

Ad una profondità di 1,48 m dall'attuale piano campagna, è presente una banchina che gira intorno alla Torre.

La fondazione, internamente cava, con uno spessore del muro di fondazione (di ottima fattura) pari a circa 3 m, non presenta un allargamento ragionevole (appena 70 cm) rispetto alle dimensioni in pianta e al paramento murario della Torre.

Inoltre, dalle indagini risulta che, nonostante la Torre sia edificata in zona alluvionale, la fondazione poggia direttamente sul terreno, senza palificazione.

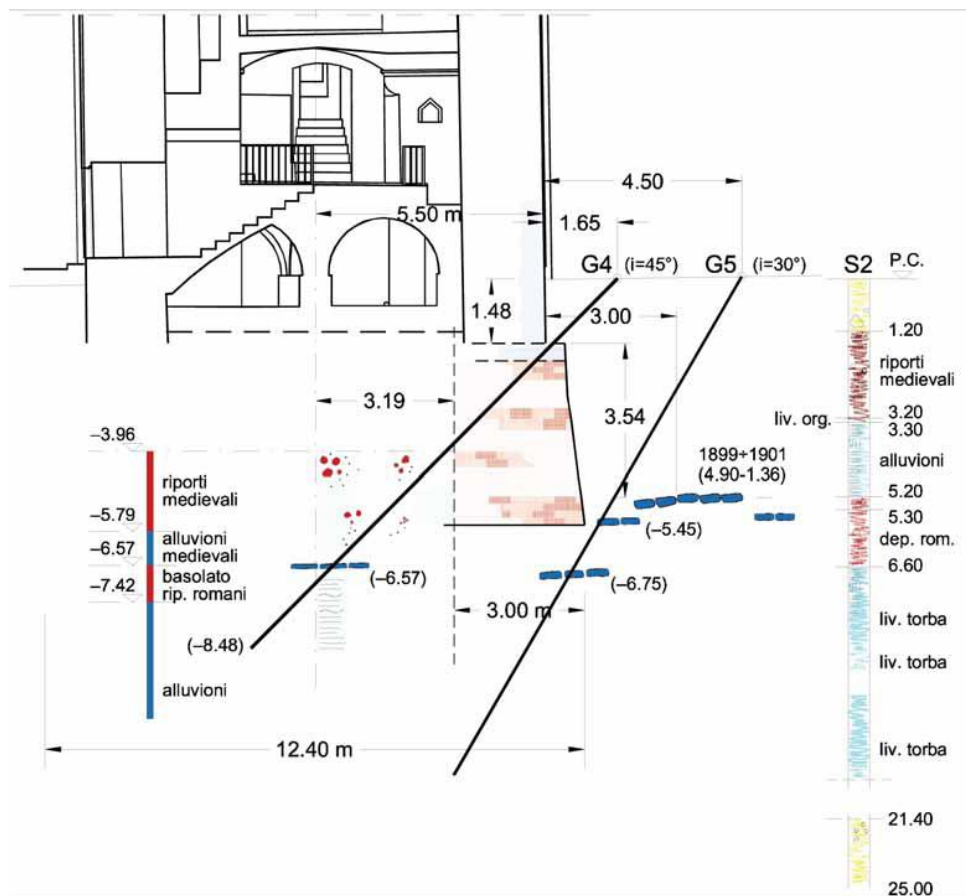


Figura 5.38. Sezione schematica del profilo stratigrafico e della fondazione della Ghirlandina, in seguito ai carotaggi del 2007 (Cadignani, 2010).

5.5.3 EVOLUZIONE DELL'INCLINAZIONE NEL TEMPO

La Ghirlandina esibisce una marcata pendenza, in particolare verso lo spigolo Sud-Ovest su cui si innesta uno dei due arconi di collegamento con il Duomo.

I primi rilievi dello scostamento dalla verticale dell'asse della Torre sono stati condotti dall'Ing. Marchi nel 1898 dell'Ufficio Tecnico Comunale, tramite l'uso del filo a piombo, e dall'Ing. Francesco Cavani nel 1901, attraverso un rilievo topografico solo della parte quadrangolare della Torre. Si riuscì così a stabilire che nel 1901 l'asse era inclinato in direzione Sud-Ovest con una pendenza pari a $1^{\circ}14'16''$ (cioè $1,23^{\circ}$) e uno strapiombo di 1,05 m rispetto a un'altezza di 48,80 m. I quattro spigoli presentavano invece un'inclinazione diversa a causa anche della rastremazione del profilo della Torre dal basso verso l'alto.

Inoltre, i rilievi del Cavani hanno messo in evidenza che le inclinazioni in direzione Est-Ovest sono uniformi verso Ovest, mentre in direzione Nord-Sud sono evidenti le correzioni alla pendenza eseguite nelle fasi costruttive (Alfieri, 2009). È quindi probabile che l'inclinazione verso Sud sia iniziata già durante la realizzazione della Torre e si sia stabilizzata dopo la realizzazione degli archi tra Torre e Duomo (a partire dal 1338), mentre si è manifestata anche verso Ovest solo dopo la fine della costruzione.

La presenza del peso della Cattedrale può quindi essere considerata una delle cause fondamentali della direzione del dissesto della Torre.

Ciò testimonia come effettivamente l'equilibrio della torre sia sensibile anche ad ogni minimo intervento o variazione del contesto.

L'andamento segmentato dell'asse porta a ipotizzare che il processo costruttivo sia stato più volte interrotto e ripreso dopo lunghi periodi di sosta, per consentire i cedimenti della struttura.

A partire dal 2003, il sistema di monitoraggio rileva le variazioni dell'inclinazione e dei cedimenti a breve e a lungo termine della Torre. L'analisi dei dati di questi primi anni ha evidenziato un fenomeno di rotazione estremamente limitato ma continuo, che dovrà comunque essere confermato nei prossimi anni: in particolare, l'incremento della pendenza verso il Duomo è modesto (lato Sud), mentre sono particolarmente accentuati i movimenti in direzione Ovest, dove l'assenza di collegamenti o ritegni lascia più possibilità di movimento alla struttura.

Nel 2006 l'asse era inclinato in direzione Sud-Ovest con una pendenza di $1^{\circ}19'16''$ (cioè $1,32^{\circ}$) e uno strapiombo di 1,13 m su un'altezza di 48,80 m.

Dal confronto tra il rilievo eseguito dal Cavani e quelli desunti dagli studi del 2006, si può notare come la pendenza dell'asse della Torre in direzione sud sia aumentata di 103 mm circa in un secolo, dato di poco superiore all'incremento medio al secolo dalla data di costruzione a oggi.

In Figura 5.39 è riportato l'andamento delle rotazioni della Ghirlandina nel corso del tempo fin dall'inizio della sua costruzione.

Per quanto riguarda i fenomeni di subsidenza naturali, il terreno ha subito abbassamenti di circa 2,5 mm all'anno.

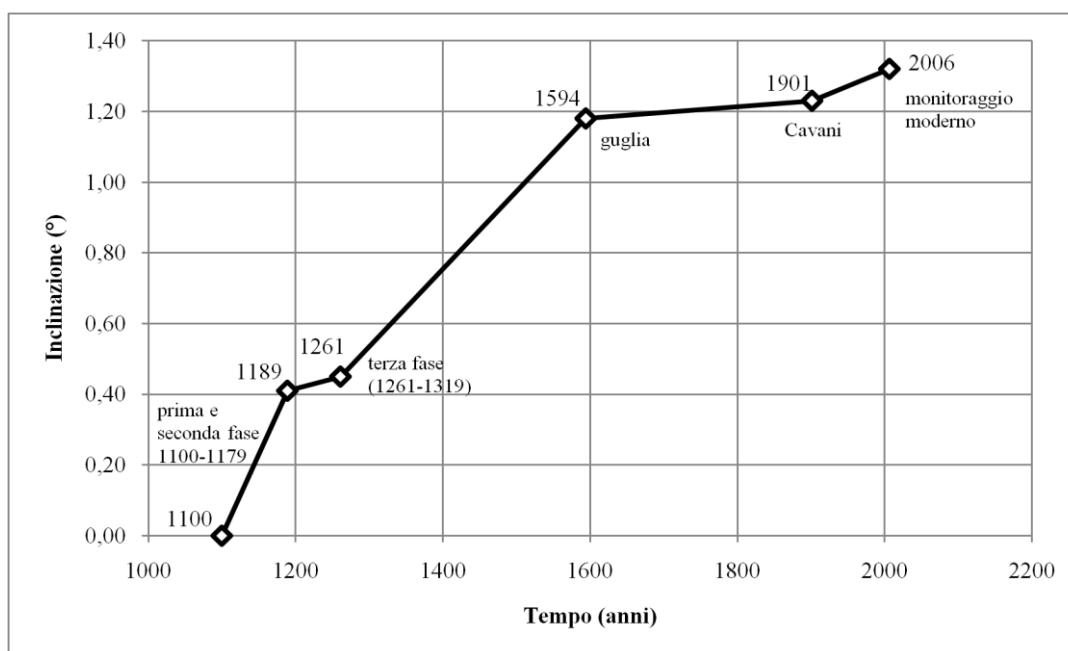


Figura 5.39. Grafico dell'evoluzione dell'inclinazione della Ghirlandina.

5.5.4 ATTIVITÀ DI MONITORAGGIO

Le ricerche geotecniche effettuate negli ultimi anni hanno confermato che il terreno al di sotto della muratura di fondazione non è stato consolidato attraverso palificazioni e altri interventi nei secoli passati.

A partire dal 2003, sia sulla Torre che sul Duomo, al fine di seguire nel tempo il comportamento statico e dinamico dei due monumenti, è stato installato un sistema di monitoraggio automatico, costituito in particolare da:

- estensimetri per misurare i cedimenti fondali;
- misuratori di giunti per valutare l'apertura e la chiusura delle lesioni;
- un pendolo per determinare lo strapiombo e quindi la rotazione della Torre;
- termometri per misurare la temperatura.

I dati acquisiti sono ancora insufficienti per riuscire a delineare un quadro definitivo del comportamento della Torre e del Duomo, ma non per realizzare stime iniziali, se confrontati con le informazioni storiche, i rilievi e i calcoli numerici.

L'orientamento del sistema di riferimento relativo (Figura 5.40), su cui si basa il pendolo, prevede un asse delle ascisse parallelo al lato ovest con direzione positiva verso sud e un asse delle ordinate parallelo al lato nord con direzione positiva verso ovest. Gli assi cartesiani si scostano da quelli relativi di circa 40° Nord.

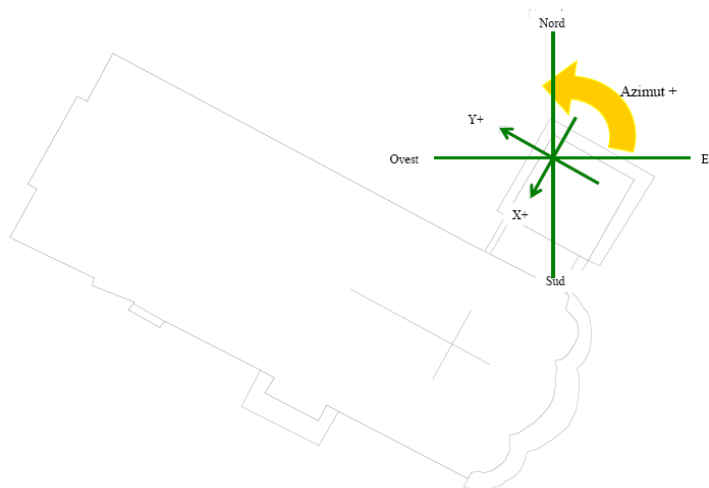


Figura 5.40. Orientamento del sistema di riferimento relativo del pendolo rispetto al Nord geografico (Alfieri, 2009).

I rilevamenti evidenziano che per la Torre è attivo un fenomeno di rotazione estremamente limitato ma continuo in direzione Sud-Ovest.

Sulla base dei risultati delle prime ricerche è stato progettato il restauro del Duomo e della Torre, che è iniziato nel 2008 ed è attualmente in corso.

Il sistema di monitoraggio automatico costituisce un elemento fondamentale di conoscenza e controllo per i prossimi anni.

5.5.5 APPLICAZIONE DEL MODELLO DI CREEP

L'obiettivo di questa Sezione è quello di valutare l'applicabilità e l'affidabilità del modello di evoluzione delle rotazioni nel tempo, proposto nella Sezione 4.4, mediante la calibrazione dei parametri sui dati pregressi della Torre Ghirlandina di Modena.

Il procedimento seguito per tutti i *case histories* è riportato in modo esteso nella Sezione 5.3.5 per la Torre di Pisa.

Le proprietà principali della geometria, necessarie ai fini dell'analisi di *creep*, sono:

- il peso della Torre $W = 92$ MN;
- l'altezza del baricentro al di sopra del piano di fondazione $h = 30,6$ m;
- la rigidezza rotazionale del sistema terreno-fondazione $k_{\theta} = 240000$ MNm/°.

Come origine della scala dei tempi, si assume $t = 0$ in corrispondenza dell'anno 1200, successivo alla seconda fase di costruzione della Torre (terminata nel 1179).

I dati della rotazione registrati nel tempo $[\theta - t]$ costituiscono il punto di partenza dell'analisi del comportamento a lungo termine del sistema terreno-fondazione-torre (Figura 5.41).

Nella Tabella 5.3 sono riportati i dati noti dell'inclinazione (positiva verso Sud-Ovest, in gradi e in radianti) e dello strapiombo (in metri) della Torre misurati fin dall'inizio della sua costruzione (cioè dal 1100 circa). Inoltre, sono messi in evidenza il riferimento della scala dei tempi e i corrispondenti valori del momento flettente $M = Wh\theta$ applicato in fondazione, riportato anche in Figura 5.41.

Anno	Scala dei tempi	Strapiombo su 48,8 m	Inclinazione θ		Momento M	
			[°]	[rad]	[MNm] $M=W h \theta[^\circ]$	[MNm] $M=W h \theta[\text{rad}]$
1100	-100	0,00	0,00	0,000	0	0
1189	-11	0,35	0,41	0,007	1154	20
1261	61	0,40	0,45	0,008	1267	22
1594	394	1,01	1,18	0,021	3322	58
1901	701	1,05	1,23	0,021	3463	60
2006	806	1,13	1,32	0,023	3716	65

Tabella 5.3. Dati e rotazioni della Ghirlandina.

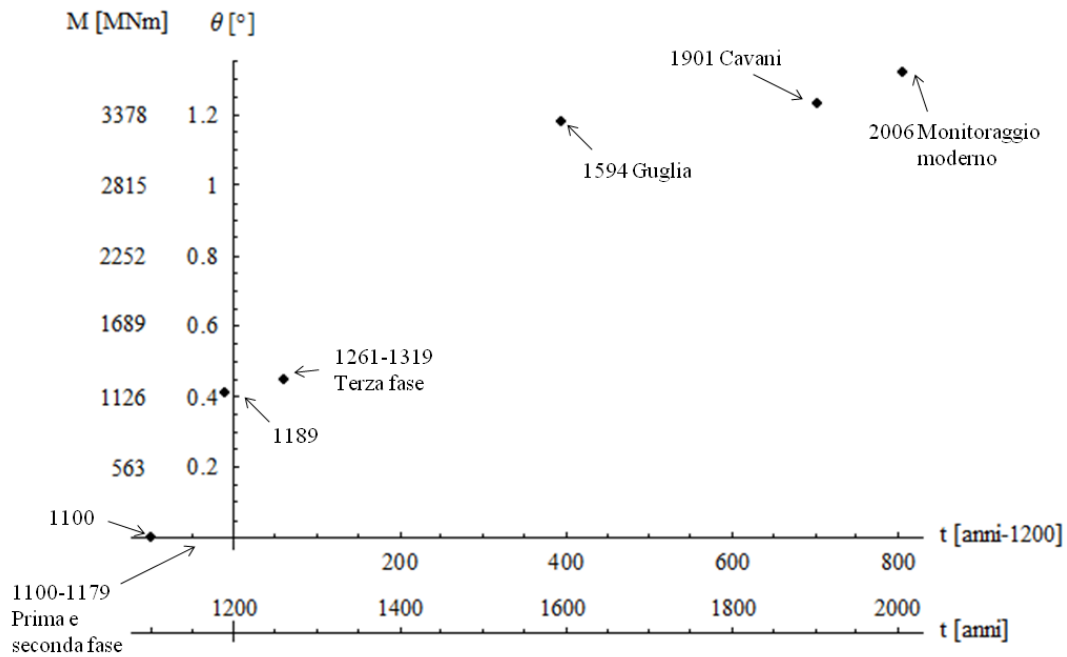


Figura 5.41. Rotazione e momento flettente della Ghirlandina nel tempo.

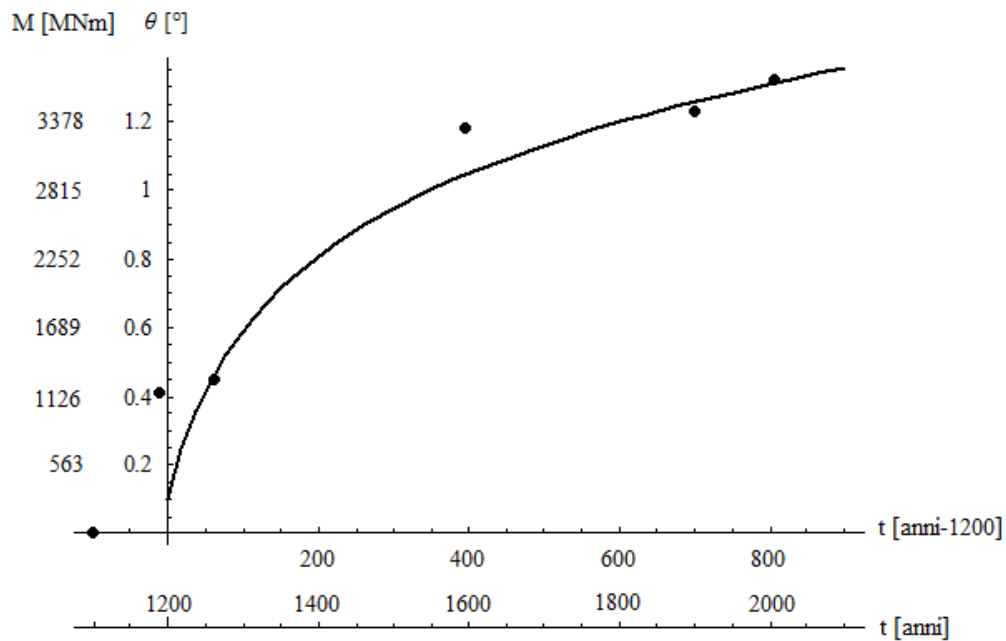


Figura 5.42. Interpolazione dei dati con una funzione logaritmica.

Il primo passo consiste nell'interpolare i dati pregressi $[\theta - t]$, tenendo conto degli eventi storici e delle variazioni delle condizioni della Torre, con una funzione logaritmica del tipo:

Eq. 5.9
$$\theta = c \ln\left(1 + \frac{t}{t_0}\right) + \theta_0$$

Nel caso della Torre Ghirlandina, si assume che nel 1200 $\theta_0 = 0,1^\circ$ e l'interpolazione dei dati esistenti è riportata in Figura 5.42.

Nella successiva analisi si trascurano i dati ricavati indirettamente prima del 1200 e si riferiscono in particolar modo ai dati più recenti e attendibili del 1901 e del 2006.

L'andamento $[d\theta/dt - t]$, ottenuto dalla derivata prima della funzione interpolante, per la Ghirlandina è riportato in Figura 5.43, con la velocità di rotazione espressa in $^\circ/\text{anno}$, e in Figura 5.44, in rad/anno .

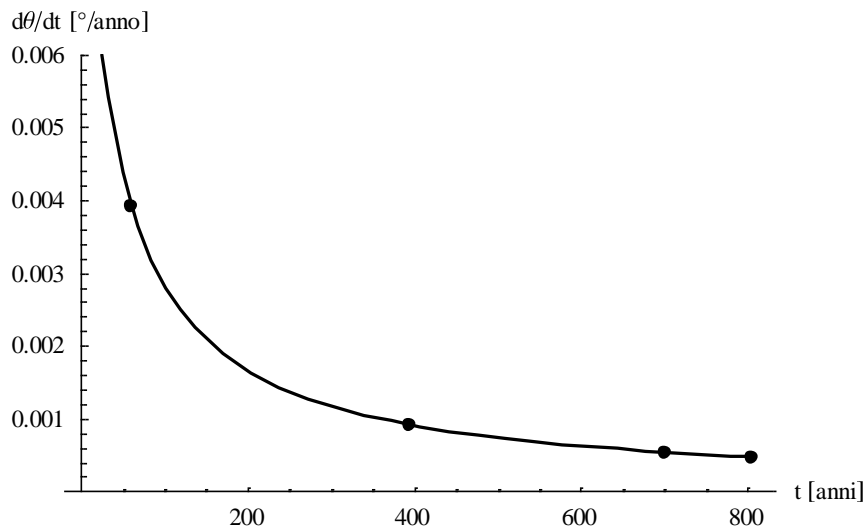


Figura 5.43. Velocità di rotazione (in $^\circ/\text{anno}$) nel tempo.

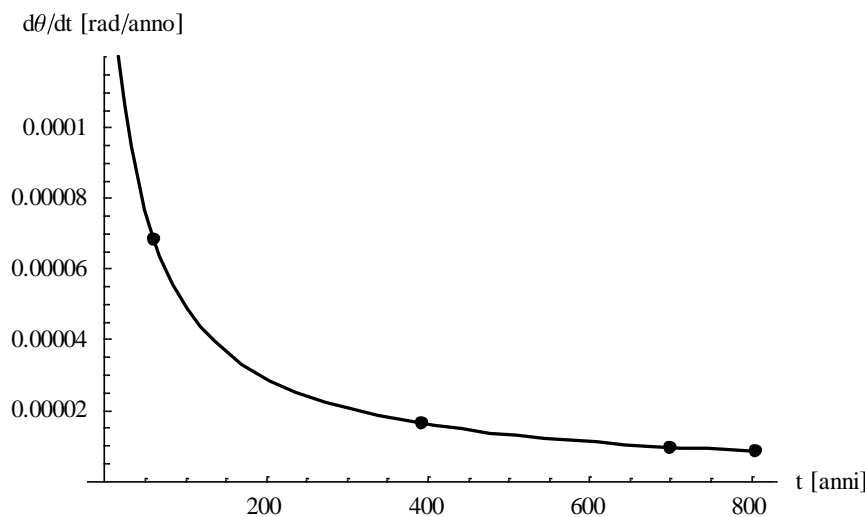


Figura 5.44. Velocità di rotazione (in rad/anno) nel tempo.

Non avendo a disposizione i risultati di prove di *creep* sui terreni presenti in sito, i parametri sono stati definiti e calibrati unicamente sulla base dell'analogia tra elemento di volume e macroelemento.

In particolare, si è scelto di utilizzare $m = 0,78$ (Figura 5.45).

Ripetendo l'analisi con le rotazioni espresse in radianti, piuttosto che in gradi, come si può vedere in Figura 5.46, si ritrova lo stesso valore di m , che può quindi essere considerato come un parametro costante.

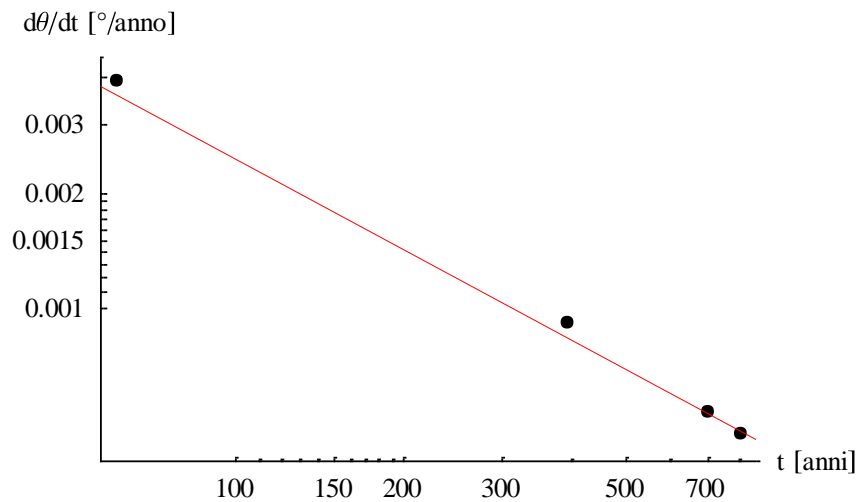


Figura 5.45. Velocità di rotazione (in °/anno) nel tempo in scala logaritmica per la calibrazione del parametro m .

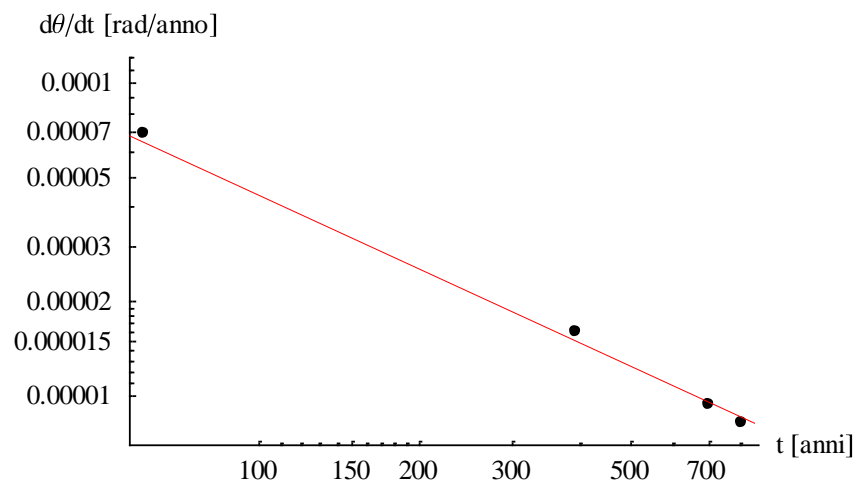


Figura 5.46. Velocità di rotazione (in rad/anno) nel tempo in scala logaritmica per la calibrazione del parametro m .

Teoricamente, i parametri A e α dovrebbero essere ricavati sul piano semilogaritmico [$\text{Log}(d\theta/dt) - M$], riportato in Figura 5.47.

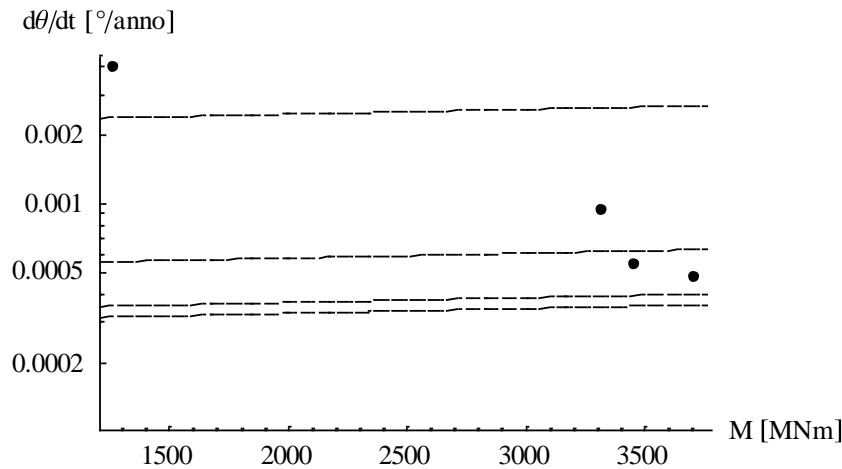


Figura 5.47. Velocità di rotazione (in °/anno) in funzione del momento flettente in scala semilogaritmica per la calibrazione dei parametri A e α .

In realtà, non avendo a disposizione questi dati, i parametri A e α possono essere calibrati in modo da rispettare la seguente condizione:

$$\text{Eq. 5.10} \quad 0 < \left[\exp(-\alpha Wh \theta_0) - \left(1 + \frac{Wh}{k_\theta} \right) \alpha Wh A \frac{t_i^m}{1-m} t^{1-m} \right] < 1$$

e da interpolare i dati pregressi di rotazione della Torre secondo la nuova funzione di *creep* rotazionale ricavata per il macroelemento:

$$\text{Eq. 5.11} \quad \theta(t) = -\frac{1}{\alpha Wh} \ln \left[\exp(-\alpha Wh \theta_0) - \left(1 + \frac{Wh}{k_\theta} \right) \alpha Wh A \frac{t_i^m}{1-m} t^{1-m} \right]$$

Ripetendo l'analisi con le rotazioni in radianti, piuttosto che in gradi, non si ritrovano gli stessi valori per A e α : tali parametri dipendono evidentemente dall'unità di misura.

L'evoluzione delle rotazioni per *creep* nel tempo per la Torre Ghirlandina, caratterizzata da $A = 0,055^\circ / \text{anno}$ e $\alpha = 0,00005 \frac{^\circ / \text{anno}}{\text{MNm}}$, è riportata in Figura 5.48.

Si può notare che il tratto iniziale della curva, caratterizzato da un'elevata pendenza, non permette di interpretare in modo corretto l'evoluzione delle rotazioni della torre.

La formulazione sembra invece valida per interpolare i dati più recenti e affidabili, anche se molto poco numerosi. Tuttavia la Torre Ghirlandina è soggetta a monitoraggio

continuo dal 2003, quindi potrebbe essere molto interessante utilizzare tali dati, anno per anno, per migliorare la modalità di calibrazione dei parametri m , A e α e verificarne l'attendibilità.

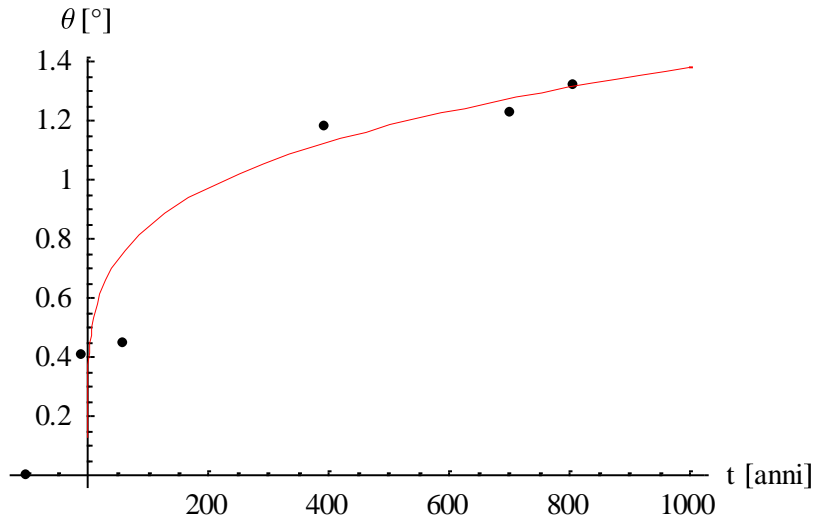


Figura 5.48. Evoluzione delle rotazioni nel tempo secondo il modello di *creep*.

Sulla scala dei tempi fissata il valore di \bar{t} , per il quale la rotazione del sistema accelera indefinitamente, portando infine al collasso, può essere calcolato dalla seguente espressione:

$$\bar{t} = \left[\frac{(1-m) \exp(-\alpha Wh \theta_0)}{(1+Wh/k_\theta) \alpha Wh A t_i^m} \right]^{\frac{1}{1-m}} \cong 3,6 \cdot 10^6 \text{ anni}$$

Inoltre la posizione del punto di flesso, definito nella Sezione 4.4.1, può essere individuata in corrispondenza di:

$$\hat{t} \cong 1,1 \cdot 10^6 \text{ anni}$$

La rotazione corrispondente a \hat{t} assume un valore troppo elevato da poter pensare che il punto di flesso rappresenti l'innescio del *creep* terziario.

5.5.6 BIBLIOGRAFIA

1. Alfieri S. (2009). *Il problema dell'interazione suolo-struttura per gli edifici storici: Il caso della Ghirlandina e del Duomo di Modena*. Dottorato di ricerca

Forme e Strutture dell'Architettura, Università degli studi di Parma, Dipartimento di Ingegneria Civile ed Architettura.

2. Cadignani R., a cura di (2010). *La torre Ghirlandina. Storia e restauro*. Luca Sossella Editore, Vol. 1-2.
3. Marchi M. (2008). *Stability and strength analysis of leaning towers*. Dottorato di ricerca in Ingegneria Geotecnica, Università degli studi di Parma, Dipartimento di Ingegneria Civile ed Architettura.
4. <http://turismo.comune.modena.it>

5.6 LA TORRE DEGLI ASINELLI DI BOLOGNA

5.6.1 CARATTERISTICHE PRINCIPALI E CENNI STORICI

La Torre degli Asinelli sorge, a fianco della Garisenda, nel centro storico di Bologna in Piazza di Porta Ravegnana (Figura 5.49) e, con un'altezza di 97,2 m e uno strapiombo verso Ovest di circa 2,2 m, rappresenta la torre pendente più alta d'Italia.

A Bologna, tra il XII ed il XIII secolo, furono innalzate numerose torri (circa 80), probabilmente sia con funzione militare che come simbolo di potere delle famiglie più ricche della città (Figura 5.50). Tra queste, la **Torre degli Asinelli**, eretta tra il 1109 e il 1119, deriva il suo nome dalla famiglia a cui tradizionalmente se ne attribuisce la costruzione. In realtà la scarsità di documenti risalenti ad epoche così remote rende meno certa l'origine delle torri: ad esempio, la famiglia degli *Asinelli* viene citata in associazione alla famosa torre per la prima volta solo nel 1185, quasi settant'anni dopo la presunta data di costruzione.

Il Comune ne divenne il proprietario nel XIV secolo e la utilizzò come prigione e fortilizio. Negli stessi anni intorno alla Torre fu realizzata una costruzione in legno, posta a trenta metri da terra e unita alla Garisenda con una passerella aerea (distrutta poi da un incendio nel 1398) dal quale era possibile dominare la città.

Nel 1448, alla base della Torre, fu costruita una roccetta merlata in muratura fornita di portici in sostituzione delle preesistenti strutture lignee.

Nei secoli la Torre ha subito gravi danni arrecati da fulmini (in particolare nel 1754 e nel 1763), incendi (nel 1185 e nel 1398), terremoti (ad esempio nel 1505), e dalle vibrazioni dovute ai bombardamenti della Seconda Guerra Mondiale. A questi eventi sono spesso seguiti restauri compiuti in tempi brevi. Nel 1824 fu installato un parafulmine.



Figura 5.49. Le due torri simbolo della città di Bologna: la Torre Garisenda e la Torre degli Asinelli.

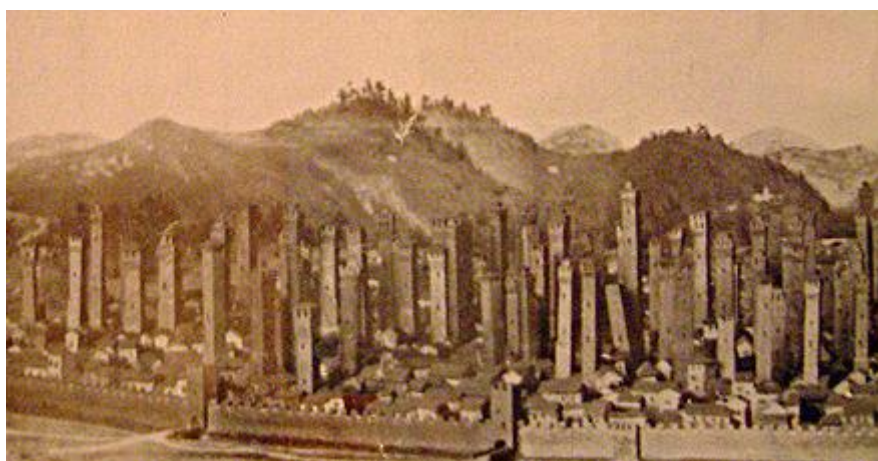


Figura 5.50. Panorama della Bologna turrific dell'XI secolo.

La Torre degli Asinelli è una struttura, a pianta quadrata, isolata, perciò non interagisce con altre strutture.

La struttura è stata costruita con la tecnica della muratura a sacco (Figura 5.51), cioè caratterizzata da due muri in mattoni pieni, uno interno molto più spesso e uno esterno, riempiti all'interno con un impasto di malta di calce, sassi e sabbia, e uniti con nervature in mattoni. Ogni 18-20 mani di mattoni venivano lasciati nella parete tre o quattro fori (tuttora visibili) che servivano da ancoraggio per le impalcature necessarie per il proseguimento dell'opera. Man mano che si innalzava la costruzione, la parete interna veniva assottigliata per alleggerire la struttura e l'ultimo tratto era in soli mattoni. La sezione infatti si restringe da 8,15 m, nella sezione di base, a 6 m, nella sezione di sommità (Figura 5.52).

Il basamento della Torre degli Asinelli è invece realizzato in blocchi di selenite squadri. A causa della sua elevata altezza, infatti, le murature alla base possono raggiungere anche spessori di 3,25 m.

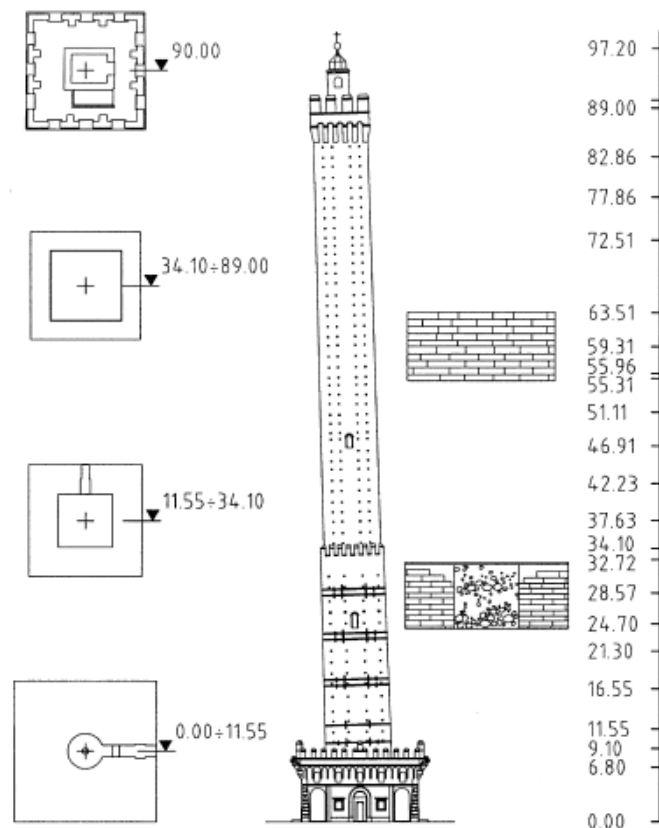


Figura 5.51. Prospetto nel piano di massima pendenza e sezioni tipiche della Torre degli Asinelli (Riva *et al.*, 1998).

- La Torre degli Asinelli è una struttura isolata.
- L'altezza della Torre è di circa 104 m sul piano di fondazione e di circa 97 m fuori terra.
- Il baricentro si trova circa 47 m al di sopra del piano di fondazione.
- La Torre pesa circa 73 MN e possiede una pianta quadrata, che ha circa 8 m di lato.
- La larghezza della fondazione è pari a circa 10 m.
- L'inclinazione misurata nel 2009 era di circa 1,6° verso Ovest.

5.6.2 STRATIGRAFIA DEL SOTTOSUOLO E FONDAZIONI

Recentemente è stato avviato un ampio studio delle caratteristiche del sottosuolo, basato sull'elaborazione dei risultati delle campagne di indagini geognostiche realizzate nell'area delle due Torri nel 1973, nel 1995 e nel 2000.

Per quanto riguarda l'inquadramento geologico, l'area in esame è caratterizzata dalla presenza di depositi quaternari di origine continentale riferibili al Supersistema (Pleistocene medio – Olocene) Emiliano-Romagnolo, che consistono in depositi alluvionali, deltizi, litorali e marini, organizzati in successioni cicliche di vario ordine gerarchico (Traversa, 2011).

La successione stratigrafica al di sotto della Torre è così costituita:

- dal piano campagna a 4,2 m di profondità: terreno di riporto;
- tra 4,2 m e 22,2 m di profondità - unità 1a: alternanza di argilla limosa e limo argilloso di colore nocciola;
- tra 22,20 e 34,90 m di profondità - unità 1b: alternanza di argilla limosa e limo argilloso grigio verde;
- tra 34,90 m e 48,0 m di profondità - unità 1c: alternanza di argilla limosa e limo argilloso grigio scuro bluastro o grigio verdastro.

Dal punto di vista idrologico risulta presente una prima falda superficiale a circa 5 m di profondità dal piano campagna.

Dal punto di vista idrologico risulta presente una prima falda superficiale a circa 5 m di profondità dal piano campagna.

La struttura di fondazione è stata ricostruita sulla base dei sondaggi eseguiti nel 1974. In Figura 5.52 si può notare che le dimensioni di base della Torre (sezione quadrata di lato pari a circa 9 m) presentano un allargamento di circa 1 m per ogni lato. Il piano di posa si trova a circa 7 m di profondità dal piano campagna.

Si presume che sia presente una palificata lignea di consolidamento del terreno di fondazione.

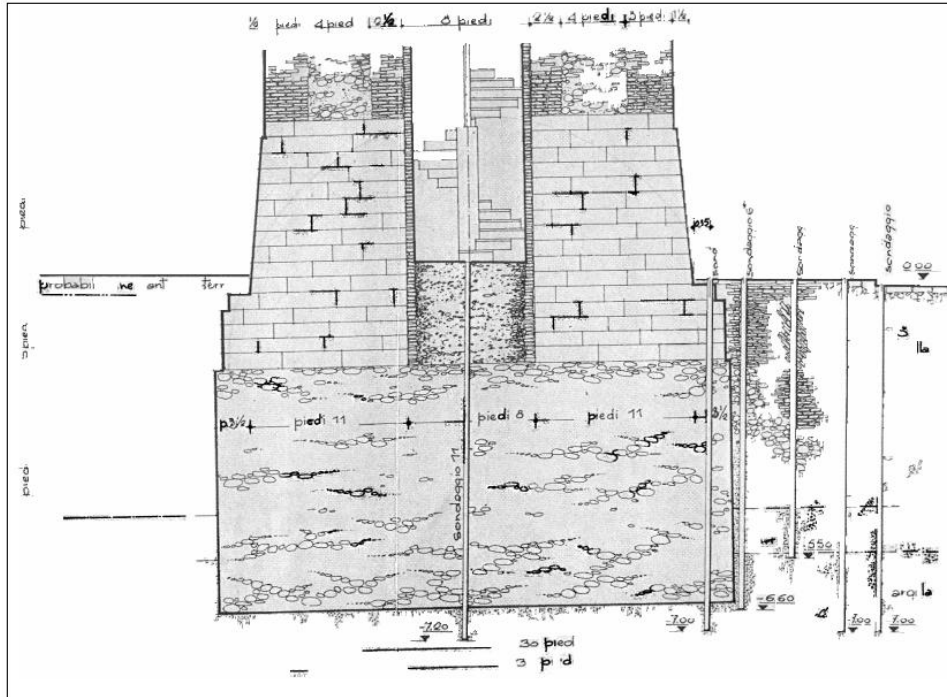


Figura 5.52. Sezione schematica della fondazione della Torre degli Asinelli, in seguito ai carotaggi del 1974 (Traversa, 2011).

5.6.3 EVOLUZIONE DELL'INCLINAZIONE NEL TEMPO

Per quanto riguarda lo studio sull'inclinazione della Torre degli Asinelli, nel 1912 fu effettuata la prima misurazione da parte del Prof. Ing. Francesco Cavani (Figura 5.54a): la pendenza dell'asse, in direzione Ovest, era pari a $1^{\circ}26'49''$ (cioè $1,45^{\circ}$), con un cedimento differenziale di circa 25 cm (Traversa, 2011).

Prima del 1912 non sono state effettuate misure dirette, ma è possibile risalire ad un valore approssimativo della pendenza della Torre nel XV secolo in modo indiretto, a

partire dal rilievo schematico della fronte meridionale della Torre riportato in Figura 5.53 (Bergonzoni, 1985).

L'incendio del 1399 distrusse il "corridore" di legno che circondava la Torre, a circa trenta metri d'altezza, in corrispondenza di una larga risega delle pareti. In seguito a tale evento, tra il 1400 e il 1477 circa, i tecnici del Comune decisero di costruire un giro di merli sull'antica risega esterna, che, sui lati meridionale e settentrionale della Torre, risultava inclinata da Est verso Ovest a causa della pendenza assunta nei primi tre secoli di vita. Per poter collocare i merli a regola d'arte e rendere orizzontale la risega, fu aggiunta una "bietta" di mattoni. Confrontando le sommità dei merli con la prima fila di fori da ponte presenti sulla parete settentrionale è possibile valutare in modo approssimato una correzione della pendenza, pari a circa $0,97^\circ$.

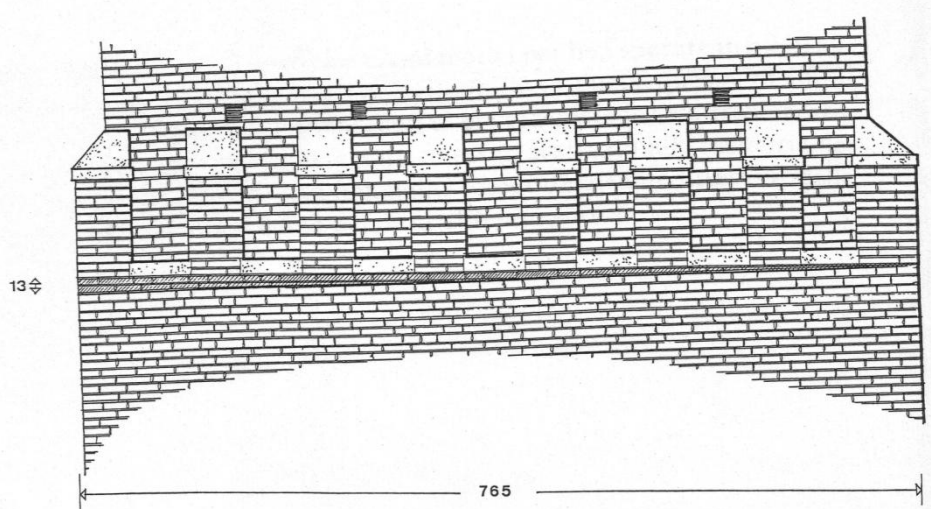


Figura 5.53. Rilievo schematico della fronte meridionale della Torre (Bergonzoni, 1985).

Recentemente, nell'ambito del monitoraggio attualmente in corso, l'inclinazione della Torre è stata misurata nel 2009: la pendenza dell'asse era pari a $1^\circ 37' 7''$ (cioè $1,62^\circ$), corrispondente ad un fuori piombo di 1,01 m su un'altezza di 35 m e un cedimento differenziale di circa 28 cm (Figura 5.54b).

La pendenza è quindi aumentata di circa $0,17^\circ$ tra il 1912 e il 2009, con una velocità di rotazione pari a circa 1,7 millesimi di grado all'anno.

La Torre degli Asinelli al contrario ha mostrato nel tempo un cedimento totale minore e praticamente costante rispetto all'adiacente Torre Garisenda (si veda Sezione 5.7).

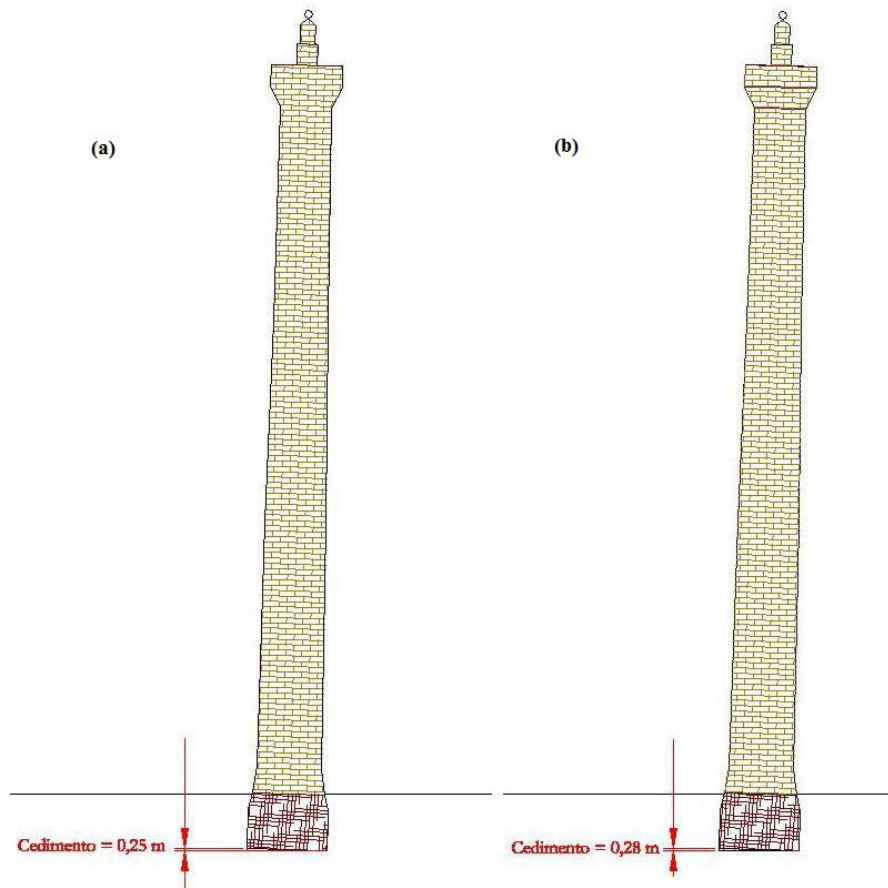


Figura 5.54. Cedimenti stimati della Torre degli Asinelli: (a) nel 1912, (b) nel 2009 (Traversa, 2011).

5.6.4 ATTIVITÀ DI MONITORAGGIO

Attualmente la Torre degli Asinelli e la Torre Garisenda sono al centro di un acceso dibattito che riguarda lo stato di salute di questi antichi monumenti e gli effetti di dissesto. Per questo motivo le due Torri sono state sottoposte ormai da molti anni ad una intensa attività di monitoraggio che ha riguardato in prevalenza le strutture, in particolare quelle esterne, evidenziando una sostanziale differenza tra il livello di conoscenza raggiunto per le strutture in elevazione rispetto a quelle di fondazione e dei terreni su cui poggiano le fondazioni stesse (Traversa, 2011).

Le conoscenze fino a oggi acquisite non permettono di identificare con la necessaria certezza le cause dei cedimenti differenziali che hanno determinato l'inclinazione delle due strutture, né di redigere un modello geologico-tecnico del sottosuolo attendibile. Tuttavia, attualmente si ritiene che la causa più probabile sia la presenza di livelli ricchi

di sostanze organiche maggiormente comprimibili e non omogeneamente distribuiti nel sottosuolo.

In futuro verranno quindi realizzate ulteriori indagini integrative, come ad esempio sondaggi, prelievo di campioni indisturbati da sottoporre a prove dinamiche e cicliche di laboratorio, indagini sismiche cross-hole.

5.6.5 APPLICAZIONE DEL MODELLO DI CREEP

L'obiettivo di questa Sezione è quello di valutare l'applicabilità e l'affidabilità del modello di evoluzione delle rotazioni nel tempo, proposto nella Sezione 4.4, mediante la calibrazione dei parametri sui dati pregressi della Torre degli Asinelli di Bologna.

Il procedimento seguito per tutti i *case histories* è riportato in modo esteso nella Sezione 5.3.5 per la Torre di Pisa.

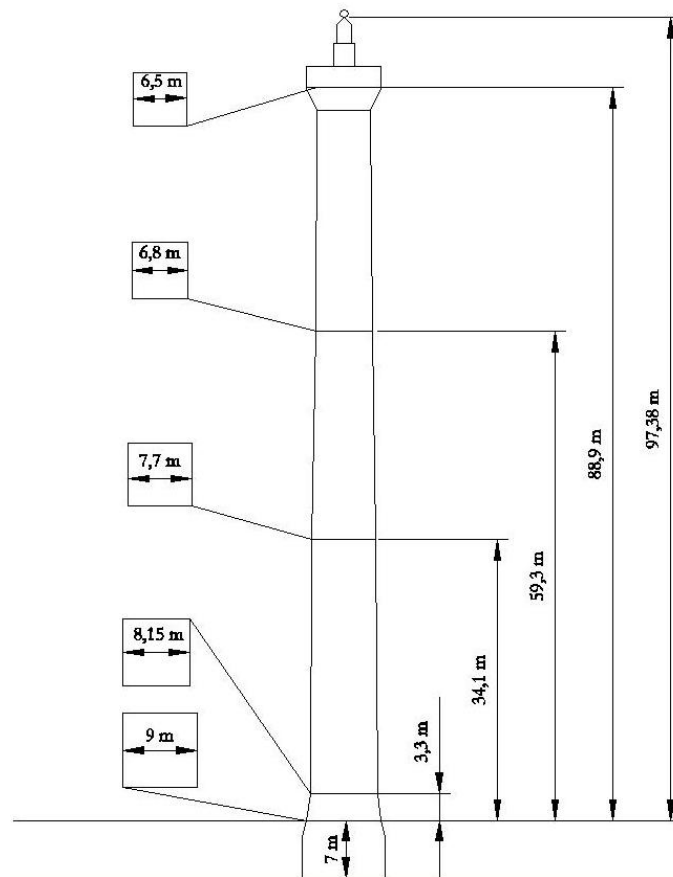


Figura 5.55. Ricostruzione schematica della Torre degli Asinelli (Traversa, 2011).

Le proprietà principali della geometria, necessarie ai fini dell'analisi di *creep*, sono:

- il peso della Torre $W = 73 \text{ MN}$;
- l'altezza del baricentro al di sopra del piano di fondazione $h = 47 \text{ m}$;
- la rigidezza rotazionale del sistema terreno-fondazione $k_{\theta} = 400000 \text{ MNm}^{\circ}$.

Il baricentro della struttura è stato calcolato in via approssimata, riducendo la forma del campanile ad una sagoma semplificata (Figura 5.55) e utilizzando gli strumenti per il calcolo delle proprietà delle masse forniti dal programma di disegno AutoCAD.

Come origine della scala dei tempi, si assume $t = 0$ in corrispondenza dell'anno 1200, al termine della costruzione della Torre.

I dati della rotazione registrati nel tempo $[\theta - t]$ costituiscono il punto di partenza dell'analisi del comportamento a lungo termine del sistema terreno-fondazione-torre (Figura 5.56).

Nella Tabella 5.4 sono riportati i dati noti dell'inclinazione (positiva verso Ovest, in gradi e in radianti) e dello strapiombo (in metri) della Torre misurati fin dall'inizio della sua costruzione (cioè dal 1110 circa). Inoltre, sono messi in evidenza il riferimento della scala dei tempi e i corrispondenti valori del momento flettente $M = Wh\theta$ applicato in fondazione, riportato anche in Figura 5.56.

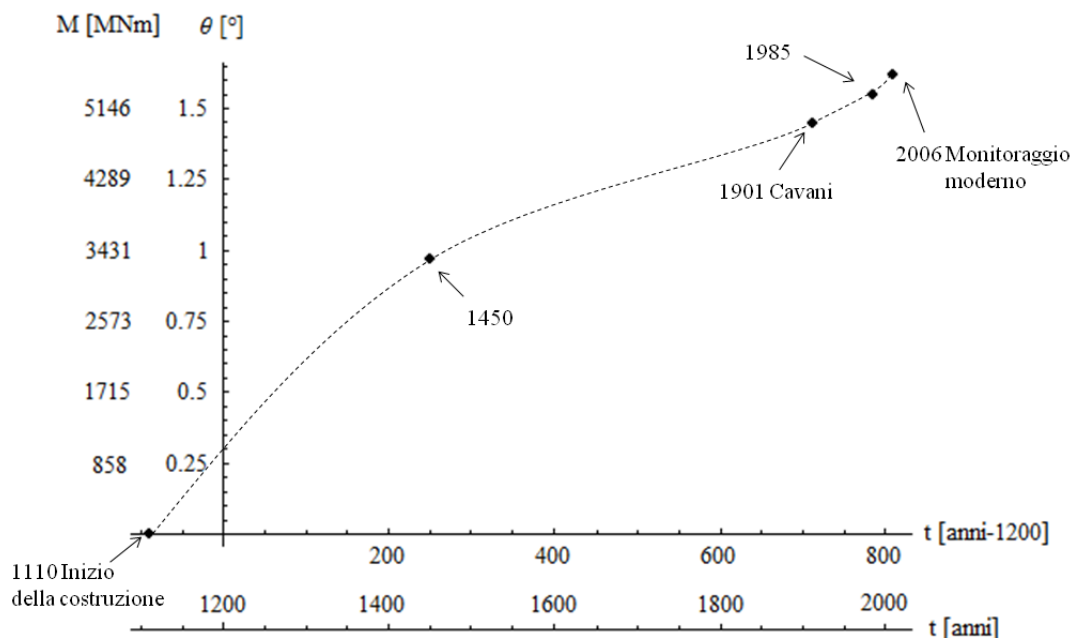


Figura 5.56. Rotazione e momento flettente della Torre degli Asinelli nel tempo.

Anno	Scala dei tempi	Strapiombo su 35 m	Inclinazione θ		Momento M	
			[°]	[rad]	[MNm] $M=W h \theta[^\circ]$	[MNm] $M=W h \theta[\text{rad}]$
[anni]	[anni]	[m]				
1110	-90	0,00	0,00	0,000	0	0
1200	0	-	-	-	-	-
1450	250	0,59	0,97	0,017	3328	58
1912	712	0,90	1,45	0,025	4975	87
1985	785	0,94	1,55	0,027	5318	93
2009	809	1,01	1,62	0,028	5558	97

Tabella 5.4. Dati e rotazioni della Torre degli Asinelli.

Il primo passo consiste nell'interpolare i dati pregressi $[\theta - t]$, tenendo conto degli eventi storici e delle variazioni delle condizioni della Torre, con una funzione logaritmica del tipo:

Eq. 5.12
$$\theta = c \ln\left(1 + \frac{t}{t_0}\right) + \theta_0$$

Nel caso della Torre degli Asinelli, si assume che nel 1200 $\theta_0 = 0,1^\circ$ e l'interpolazione dei dati esistenti è riportata in Figura 5.57.

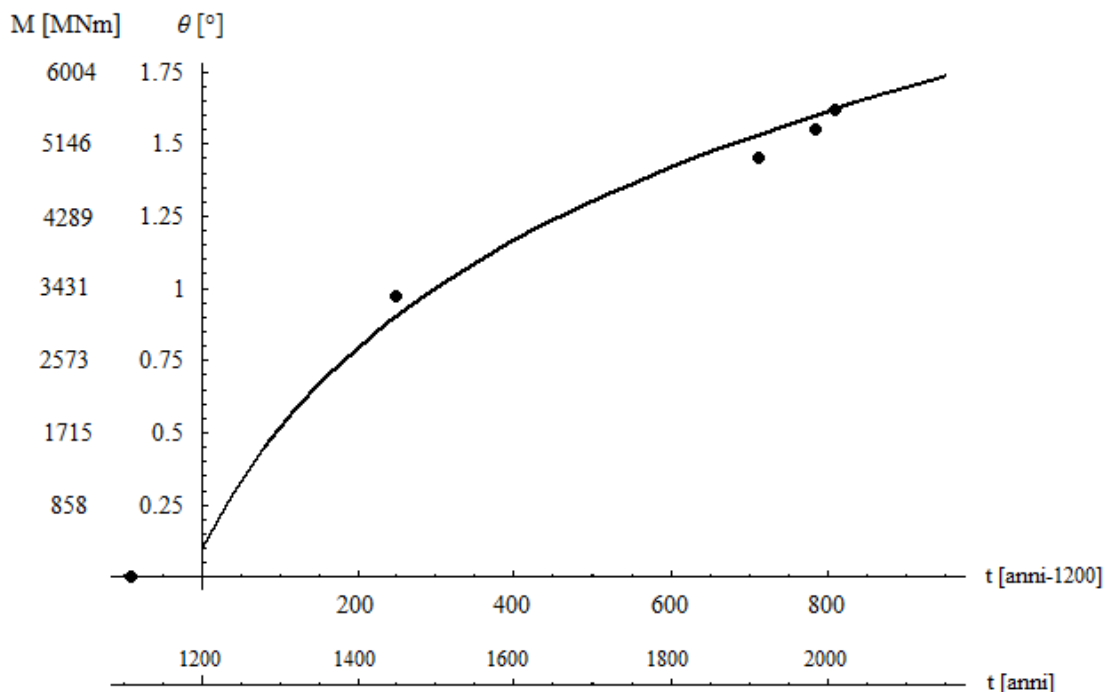


Figura 5.57. Interpolazione dei dati con una funzione logaritmica.

L'andamento $[d\theta/dt - t]$, ottenuto dalla derivata prima della funzione interpolante, per la Torre degli Asinelli è riportato in Figura 5.58, con la velocità di rotazione espressa in $^{\circ}/\text{anno}$, e in Figura 5.59, in rad/anno .

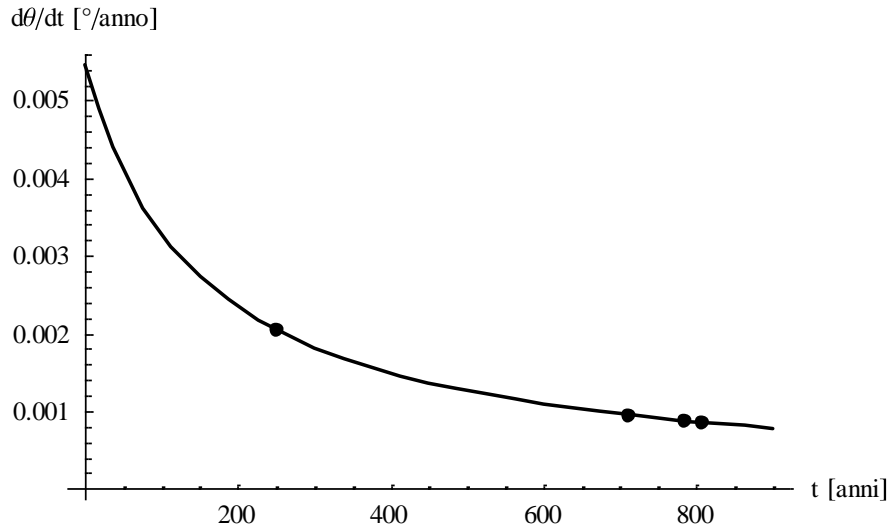


Figura 5.58. Velocità di rotazione (in $^{\circ}/\text{anno}$) nel tempo.

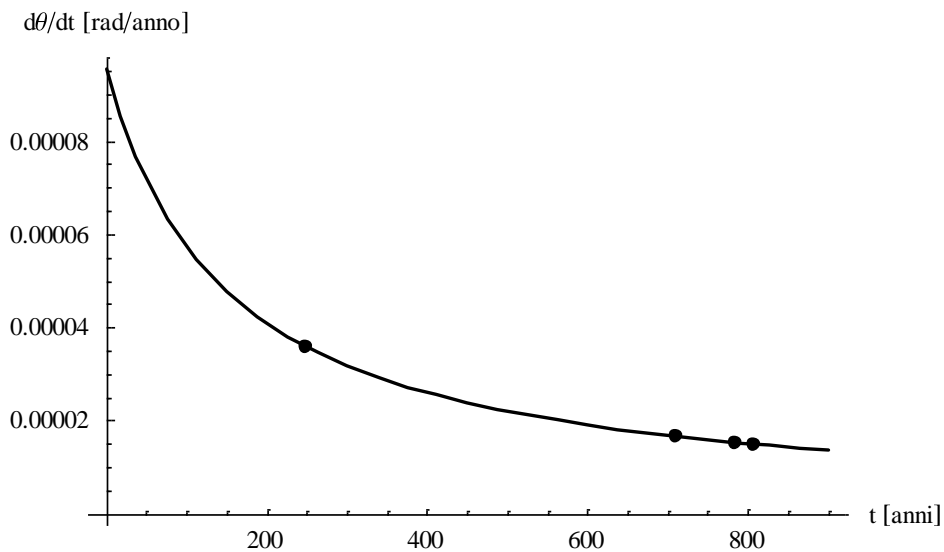


Figura 5.59. Velocità di rotazione (in rad/anno) nel tempo.

Non avendo a disposizione i risultati di prove di *creep* sui terreni presenti in sito, i parametri sono stati definiti e calibrati unicamente sulla base dell'analogia tra elemento di volume e macroelemento.

In particolare, si è scelto di utilizzare $m = 0,75$ (Figura 5.60).

Ripetendo l'analisi con le rotazioni espresse in radianti, piuttosto che in gradi, come si può vedere in Figura 5.61, si ritrova lo stesso valore di m , che può quindi essere considerato come un parametro costante.

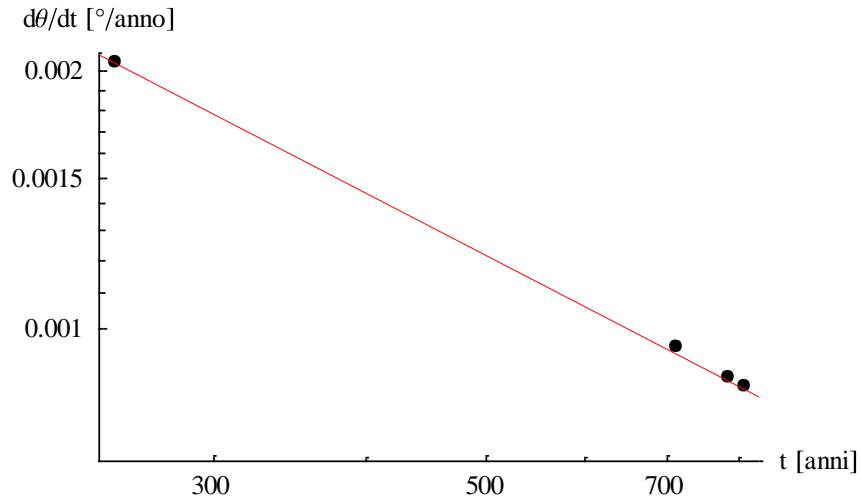


Figura 5.60. Velocità di rotazione (in °/anno) nel tempo in scala logaritmica per la calibrazione del parametro m .

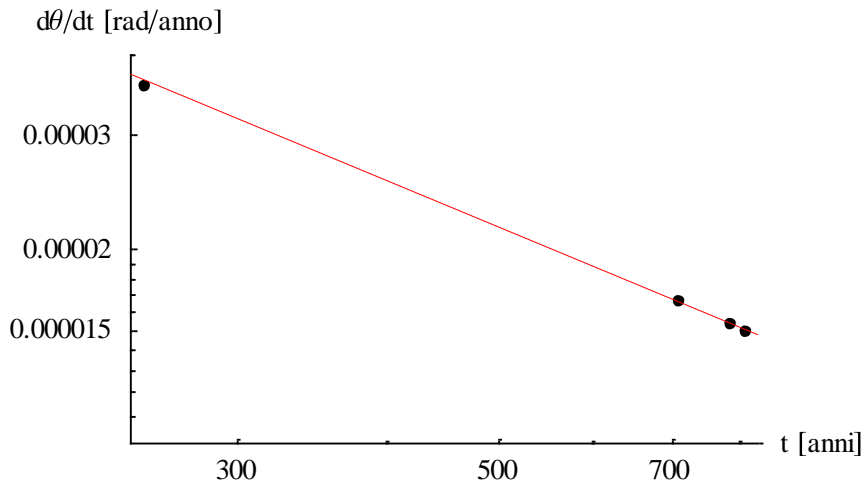


Figura 5.61. Velocità di rotazione (in rad/anno) nel tempo in scala logaritmica per la calibrazione del parametro m .

Teoricamente, i parametri A e α dovrebbero essere ricavati sul piano semilogaritmico [$\text{Log}(d\theta/dt) - M$], riportato in Figura 5.62.

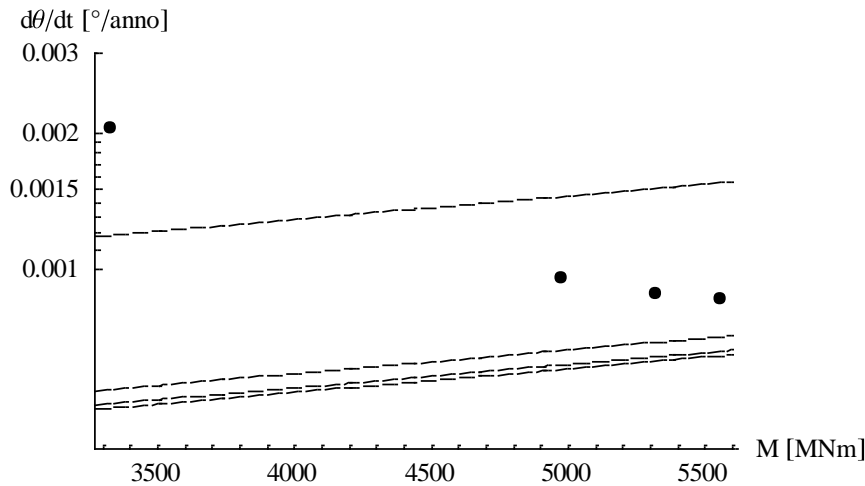


Figura 5.62. Velocità di rotazione (in °/anno) in funzione del momento flettente in scala semilogaritmica per la calibrazione dei parametri A e α .

In realtà, non avendo a disposizione questi dati, i parametri A e α possono essere calibrati in modo da rispettare la seguente condizione:

$$\text{Eq. 5.13} \quad 0 < \left[\exp(-\alpha Wh \theta_0) - \left(1 + \frac{Wh}{k_\theta} \right) \alpha Wh A \frac{t_i^m}{1-m} t^{1-m} \right] < 1$$

e da interpolare i dati pregressi di rotazione della Torre secondo la nuova funzione di *creep* rotazionale ricavata per il macroelemento:

$$\text{Eq. 5.14} \quad \theta(t) = -\frac{1}{\alpha Wh} \ln \left[\exp(-\alpha Wh \theta_0) - \left(1 + \frac{Wh}{k_\theta} \right) \alpha Wh A \frac{t_i^m}{1-m} t^{1-m} \right]$$

Ripetendo l'analisi con le rotazioni in radianti, piuttosto che in gradi, non si ritrovano gli stessi valori per A e α : tali parametri dipendono evidentemente dall'unità di misura.

L'evoluzione delle rotazioni per *creep* nel tempo per la Torre degli Asinelli, caratterizzata da $A = 0,05^\circ / \text{anno}$ e $\alpha = 0,00012 \frac{^\circ / \text{anno}}{\text{MNm}}$, è riportata in Figura 5.63.

Si può notare che il tratto iniziale della curva, caratterizzato da un'elevata pendenza, non permette di interpretare in modo corretto l'evoluzione delle rotazioni della torre.

La formulazione sembra invece valida per interpolare i dati più recenti e affidabili, anche se molto poco numerosi. Tuttavia da alcuni anni la Torre degli Asinelli è soggetta a monitoraggio continuo, quindi sarebbe molto interessante utilizzare tali dati, anno per

anno, per migliorare la modalità di calibrazione dei parametri m , A e α e verificarne l'attendibilità.

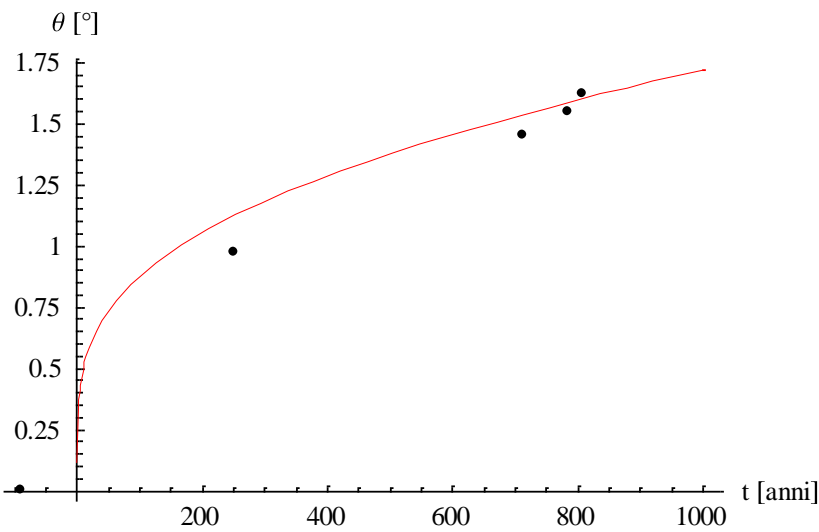


Figura 5.63. Evoluzione delle rotazioni nel tempo secondo il modello di *creep*.

Sulla scala dei tempi fissata il valore di \bar{t} , per il quale la rotazione del sistema accelera indefinitamente (Figura 5.64), portando infine al collasso, può essere calcolato dalla seguente espressione:

$$\bar{t} = \left[\frac{(1 - m) \exp(-\alpha Wh \theta_0)}{(1 + Wh / k_\theta) \alpha Wh A t_i^m} \right]^{\frac{1}{1-m}} \cong 17830 \text{anni}$$

Inoltre si può osservare la posizione del punto di flesso dell'Eq. 5.5 (puntino rosso in Figura 5.64), definito nella Sezione 4.4.1:

$$\hat{t} \cong 635 \text{anni}$$

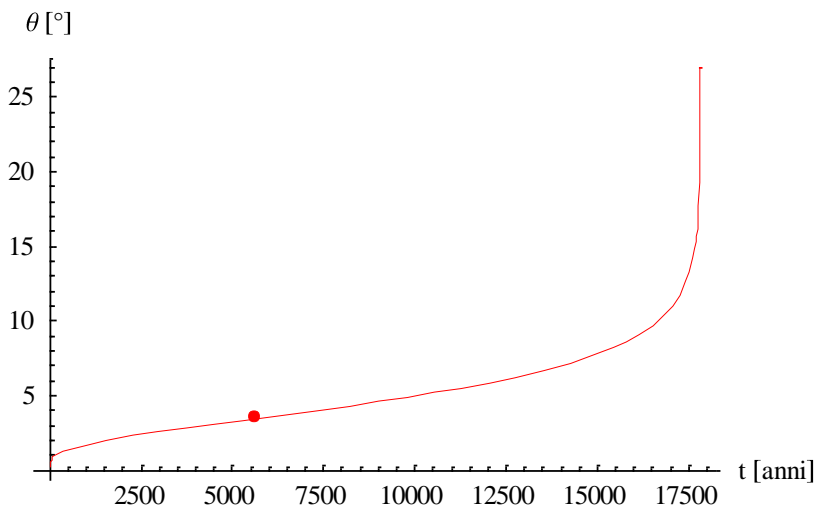


Figura 5.64. Evoluzione delle rotazioni nel tempo secondo il modello di *creep*.

5.6.6 BIBLIOGRAFIA

1. Bergonzoni F. (1985). Un'istantanea del Quattrocento: quanto pendeva la torre degli Asinelli nel sec. XV. *Strenna Storica Bolognese*. P.47-54.
2. Giordano F., a cura di (2000). *La torre Garisenda*. Ed. Costa, Bologna.
3. Marchi M. (2008). *Stability and strength analysis of leaning towers*. Dottorato di ricerca in Ingegneria Geotecnica, Università degli studi di Parma, Dipartimento di Ingegneria Civile ed Architettura.
4. Pesci A., Casula G., Bonali E. e Boschi E. (2011). *Un metodo per lo studio di edifici storici mediante misure laser a scansione terrestre: le Due Torri di Bologna*. Rapporti tecnici INGV, Num. 178.
5. Rivaa P., Perottib F., Guidobonic E. e Boschid E. (1998). *Seismic analysis of the Asinelli Tower and earthquakes in Bologna*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 17, p. 525–550.
6. Traversa F., a cura di (2011). *Relazione tecnica: Risultati dell'analisi della documentazione relativa agli studi di caratterizzazione del sottosuolo delle torri Asinelli e Garisenda di Bologna*. ISPRA - Istituto Superiore per la Protezione e la Ricerca Ambientale, Dipartimento Difesa del Suolo.

5.7 LA TORRE GARISENDA DI BOLOGNA

5.7.1 CARATTERISTICHE PRINCIPALI E CENNI STORICI

Come noto, le due Torri Garisenda e Asinelli sorgono nel centro storico di Bologna in Piazza di Porta Ravegnana e sono diventate il simbolo della città (Figura 5.65).

Per analogia con la Torre degli Asinelli, è possibile collocare intorno al 1100 l'inizio della costruzione della Garisenda, che deriva il suo nome dalla famiglia a cui si attribuisce la costruzione.



Figura 5.65. Litografia acquerellata realizzata da G. B. Moore nel 1843 – Museo Civico del Risorgimento, Bologna (Giordano, 2000).

Inizialmente la Torre era alta circa 60 m, ma probabilmente subito dopo aver raggiunto tale altezza si è inclinata a causa di un improvviso cedimento del terreno di fondazione.

Nel 1293, infatti, l'impressionante strapiombo verso Est assunto dalla Torre ha portato il Comune a decidere per la sua demolizione, che non fu portata a termine per ragioni economiche e politiche (Giordano, 2000).

Nel corso del XIII secolo, molte torri pendenti o pericolanti furono mozzate o demolite, altre crollarono. Le ultime demolizioni avvennero nel XX secolo e oggi, delle numerosissime torri presenti in antichità, se ne sono salvate meno di venti.

Scampata alla demolizione totale, la Torre Garisenda è stata comunque scapitozzata nel 1353 e ridotta in altezza agli attuali 48 m, per evitarne il crollo (Figura 5.66). Probabilmente questo intervento ha permesso la conservazione della Torre fino ad oggi.

Dal 1890, dopo la demolizione degli edifici presenti nell'intorno della base, la Garisenda è una struttura isolata da ogni lato.

La struttura è stata costruita con la tecnica della muratura a sacco, analogamente alla Torre degli Asinelli; la sua sezione è quadrata e rastremata dal basso verso l'alto, da 7,4 m a 6,9 m (Figura 5.67).

Il basamento della Garisenda, restaurato alla fine del XIX secolo, è costituito da blocchi di selenite squadriati, sovrapposti gli uni agli altri.

Tra il 1998 ed il 2000 le superfici murarie esterne della Garisenda sono state restaurate e consolidate.

- La Torre Garisenda è una struttura isolata.
- L'altezza della Torre è di circa 53,5 m sul piano di fondazione e di circa 48 m fuori terra.
- Il baricentro si trova circa 25 m al di sopra del piano di fondazione.
- La Torre pesa circa 42 MN e possiede una pianta quadrata, di lato 7,4 m alla base.
- La larghezza della fondazione è pari a circa 9,4 m.
- L'inclinazione misurata nel 1999 era di circa 4,0° verso Est.



Figura 5.66. La Torre Garisenda a Bologna, nel 2000 a restauro ultimato.

5.7.2 STRATIGRAFIA DEL SOTTOSUOLO E FONDAZIONI

Recentemente è stato avviato un ampio studio delle caratteristiche del sottosuolo, basato sull'elaborazione dei risultati delle campagne di indagini geognostiche realizzate nell'area delle due Torri nel 1973, nel 1995 e nel 2000.

Per quanto riguarda l'inquadramento geologico, l'area in esame è caratterizzata dalla presenza di depositi quaternari di origine continentale riferibili al Supersistema (Pleistocene medio – Olocene) Emiliano-Romagnolo, che consistono in depositi alluvionali, deltizi, litorali e marini, organizzati in successioni cicliche di vario ordine gerarchico (Traversa, 2011).

La successione stratigrafica al di sotto della Torre è così costituita:

- dal piano campagna a 4,2 m di profondità: terreno di riporto;
- tra 4,2 m e 22,2 m di profondità - unità 1a: alternanza di argilla limosa e limo argilloso di colore nocciola;

- tra 22,20 e 34,90 m di profondità - unità 1b: alternanza di argilla limosa e limo argilloso grigio verde;
- tra 34,90 m e 48,0 m di profondità - unità 1c: alternanza di argilla limosa e limo argilloso grigio scuro bluastro o grigio verdastro.

Dal punto di vista idrologico risulta presente una prima falda superficiale a circa 5 m di profondità dal piano campagna.

La struttura di fondazione è stata ricostruita sulla base dei risultati delle ispezioni georadar. In particolare, come mostrato in Figura 5.67, le dimensioni di base della Torre (sezione quadrata di lato 7,4 m) rimangono inalterate fino a circa 2 m di profondità dal piano campagna, dove è presente un allargamento di circa 1 m per ogni lato. Il piano di posa si trova a circa 5,5 m di profondità dal piano campagna.

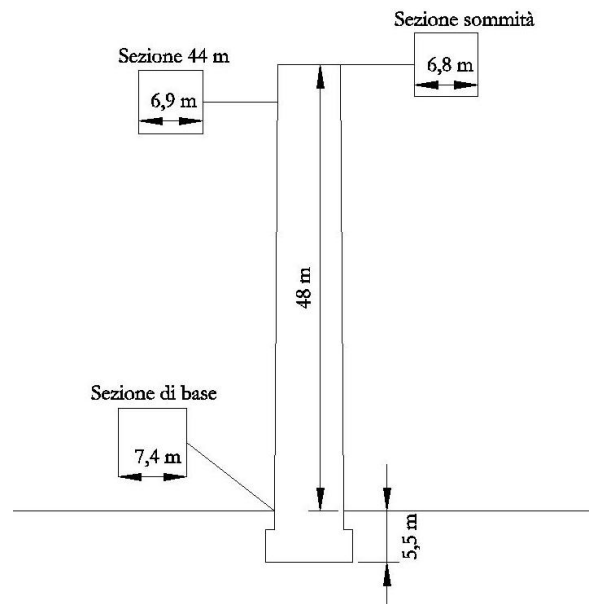


Figura 5.67. Ricostruzione schematica della sezione della Torre Garisenda (Traversa, 2011).

5.7.3 EVOLUZIONE DELL'INCLINAZIONE NEL TEMPO

Dal 1990 la stabilità della Garisenda viene controllata periodicamente per mezzo di 4 capisaldi fissati sulla fondazione della Torre, a due metri sotto il piano stradale.

Una delle prime osservazioni mirate a calcolare la pendenza della Garisenda è da attribuire all'ingegnere Franceschini, che, per conto del Gozzadini, misurò nel 1868 uno strapiombo di 2,52 m in sommità, corrispondente ad una pendenza di circa 3,0°.

Il primo studio approfondito sull'inclinazione della Garisenda risale al 1902 ad opera del Prof. Ing. Francesco Cavani (Figura 5.68a): l'inclinazione dell'asse della Torre, pendente da Ovest verso Est, era pari a $3^{\circ}49'52''$ (cioè $3,83^{\circ}$), con uno strapiombo di 3,22 m in sommità e un cedimento differenziale di circa 70 cm (Traversa, 2011).

Inoltre Cavani affermava che: “ ... Tale pendenza indica un cedimento del terreno sottostante, maggiore da una parte in confronto dell'altra, e che fu causa principale, se non unica, della inclinazione della torre. Il cedimento potrebbe crescere col tempo, specialmente se variassero le condizioni del terreno e della falda acqua sottostante; crescendo, aumenterebbe la pendenza, aumenterebbe la pressione su parte del materiale e del terreno, si potrebbe arrivare fatalmente alla caduta della torre. Che la pendenza delle torri dipenda sempre da irregolare cedimento del terreno sottostante non può più essere oggetto di discussione, non può più mettersi in dubbio ...”.

Durante le più recenti indagini, in particolare nel 1999, è stata misurata un'inclinazione della Torre pari a $4,05^{\circ}$, corrispondente ad uno strapiombo di 3,40 m in sommità e ad un cedimento differenziale di circa 73 cm (Figura 5.68b).

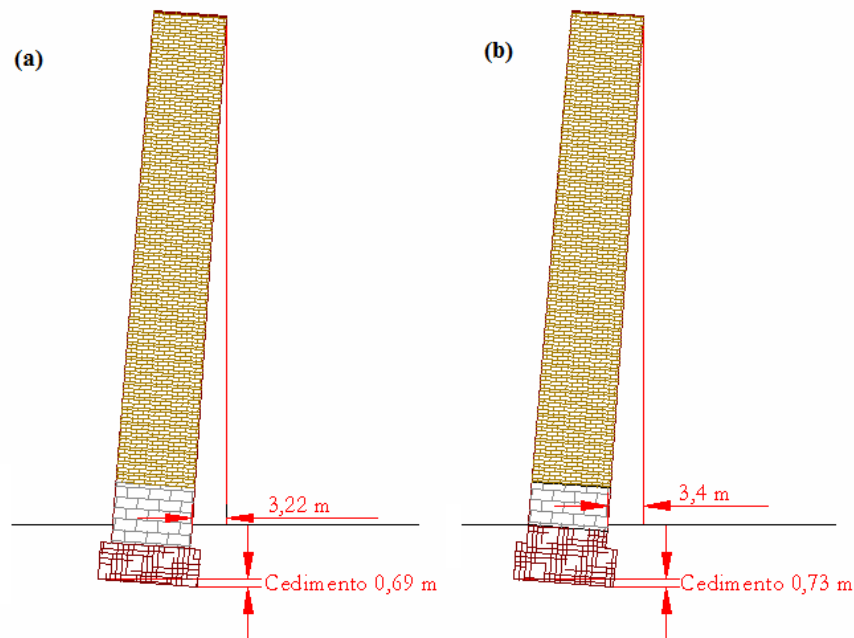


Figura 5.68. Cedimento, inclinazione e strapiombo stimati della Torre Garisenda: (a) nel 1902, (b) nel 1999 (Traversa, 2011).

La pendenza è quindi aumentata di circa $0,22^\circ$ tra il 1902 e il 1999, con una velocità di rotazione pari a circa 2,2 millesimi di grado all'anno.

Le due Torri manifestano comportamenti molto diversi che potrebbero essere legati alla diversa tecnica costruttiva adottata e al differente approfondimento delle fondazioni (Traversa, 2011).

5.7.4 ATTIVITÀ DI MONITORAGGIO

Le due Torri sono state sottoposte ormai da molti anni ad una intensa attività di monitoraggio che ha riguardato in prevalenza le strutture, in particolare quelle esterne, evidenziando una sostanziale differenza tra il livello di conoscenza raggiunto per le strutture in elevazione rispetto a quelle di fondazione e dei terreni su cui poggiano le fondazioni stesse (Traversa, 2011).

Le conoscenze fino a oggi acquisite non permettono di identificare con la necessaria certezza le cause dei cedimenti differenziali che hanno determinato l'inclinazione delle due strutture, né di redigere un modello geologico-tecnico del sottosuolo attendibile. Tuttavia, attualmente si ritiene che la causa più probabile sia la presenza di livelli ricchi di sostanze organiche maggiormente comprimibili e non omogeneamente distribuiti nel sottosuolo.

In futuro verranno quindi realizzate ulteriori indagini integrative, come ad esempio sondaggi, prelievo di campioni indisturbati da sottoporre a prove dinamiche e cicliche di laboratorio, indagini sismiche cross-hole.

5.7.5 APPLICAZIONE DEL MODELLO DI CREEP

L'obiettivo di questa Sezione è quello di valutare l'applicabilità e l'affidabilità del modello di evoluzione delle rotazioni nel tempo, proposto nella Sezione 4.4, mediante la calibrazione dei parametri sui dati pregressi della Torre Ghirlandina di Modena.

Il procedimento seguito per tutti i *case histories* è riportato in modo esteso nella Sezione 5.3.5 per la Torre di Pisa.

Le proprietà principali della geometria, necessarie ai fini dell'analisi di *creep*, sono:

- il peso della Torre $W = 42 \text{ MN}$;
- l'altezza del baricentro al di sopra del piano di fondazione $h = 25 \text{ m}$;
- la rigidezza rotazionale del sistema terreno-fondazione $k_\theta = 400000 \text{ MNm}^\circ$.

Il baricentro della struttura è stato calcolato in via approssimata, riducendo la forma del campanile ad una sagoma semplificata (Figura 5.67) e utilizzando gli strumenti per il calcolo delle proprietà delle masse forniti dal programma di disegno AutoCAD.

Come origine della scala dei tempi, si assume $t = 0$ in corrispondenza dell'anno 1353, in cui la Torre è stata scapitozzata. Tale intervento ha modificato radicalmente le condizioni del sistema terreno-fondazione, permettendone la conservazione fino ad oggi.

I dati della rotazione registrati nel tempo $[\theta - t]$ costituiscono il punto di partenza dell'analisi del comportamento a lungo termine del sistema terreno-fondazione-torre (Figura 5.69).

Nella Tabella 5.5 sono riportati i dati noti dell'inclinazione (positiva verso Est, in gradi e in radianti) e dello strapiombo (in metri) della Torre misurati fin dall'inizio della sua costruzione (cioè dal 1100 circa). Inoltre, sono messi in evidenza il riferimento della scala dei tempi e i corrispondenti valori del momento flettente $M = Wh\theta$ applicato in fondazione, riportato anche in Figura 5.69.

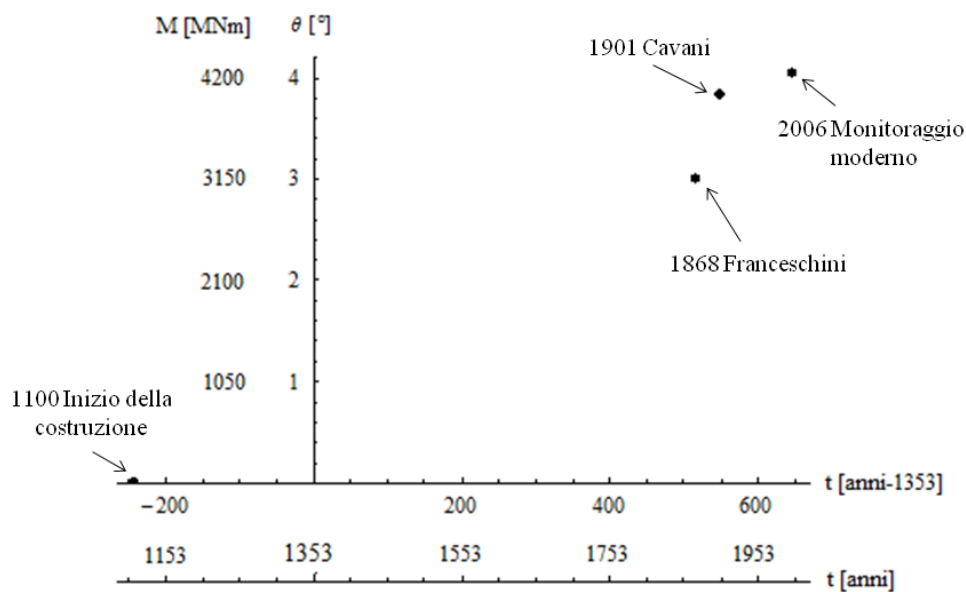


Figura 5.69. Rotazione e momento flettente della Torre Garisenda nel tempo.

Anno	Scala dei tempi	Strapiombo su 48 m	Inclinazione θ		Momento M	
			[°]	[rad]	[MNm] $M=W h \theta[^\circ]$	[MNm] $M=W h \theta[\text{rad}]$
[anni]	[anni]	[m]	[°]	[rad]	[MNm]	[MNm]
1100	-253	0,00	0,00	0,000	0	0
1353	0	/	/	/	/	/
1868	515	2,52	3,00	0,052	3150	55
1902	549	3,22	3,83	0,067	4022	70
1999	646	3,40	4,05	0,071	4253	74

Tabella 5.5. Dati e rotazioni della Garisenda.

Il primo passo consiste nell'interpolare i dati pregressi $[\theta - t]$, tenendo conto degli eventi storici e delle variazioni delle condizioni della Torre, con una funzione logaritmica del tipo:

$$\text{Eq. 5.15} \quad \theta = c \ln \left(1 + \frac{t}{t_0} \right) + \theta_0$$

Nel caso della Torre Garisenda, si assume che nel 1353 $\theta_0 = 1,0^\circ$ e l'interpolazione dei dati esistenti è riportata in Figura 5.70.

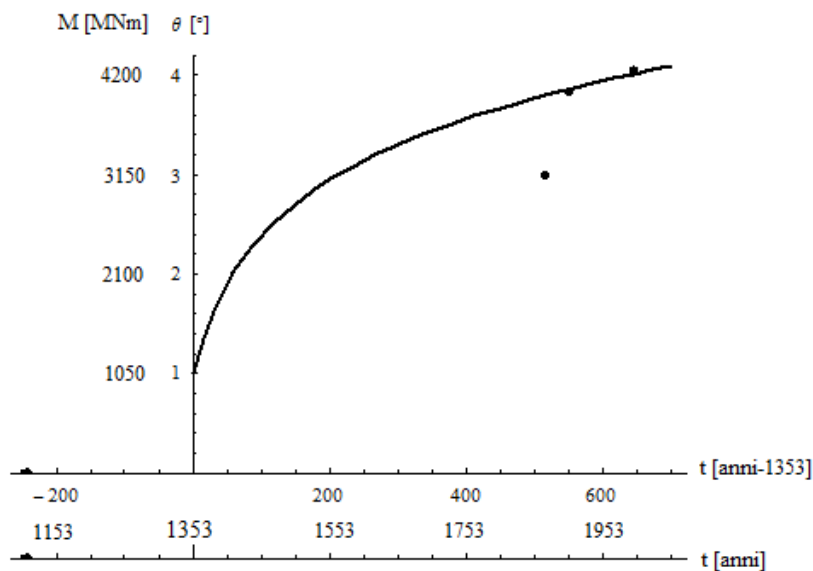


Figura 5.70. Interpolazione dei dati con una funzione logaritmica.

L'andamento $[d\theta/dt - t]$, ottenuto dalla derivata prima della funzione interpolante, per la Garisenda è riportato in Figura 5.71, con la velocità di rotazione espressa in $^\circ/\text{anno}$, e in Figura 5.72, in rad/anno .

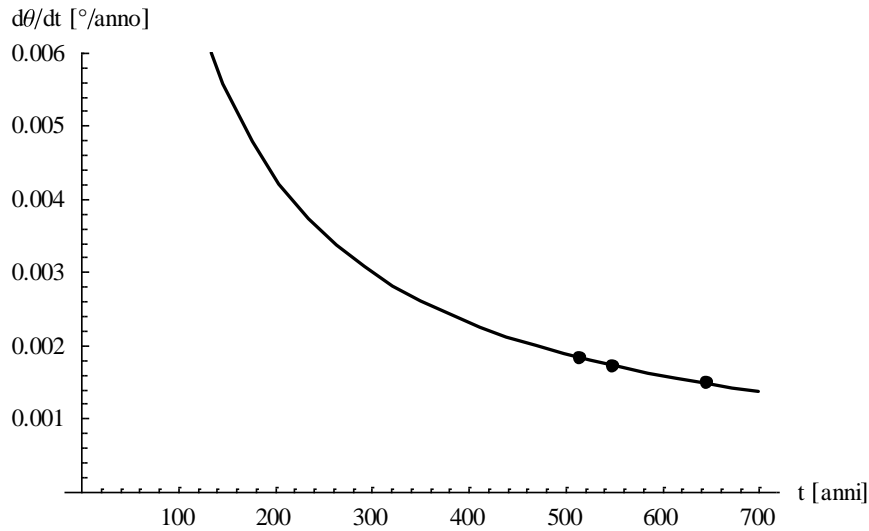


Figura 5.71. Velocità di rotazione (in $^\circ/\text{anno}$) nel tempo.

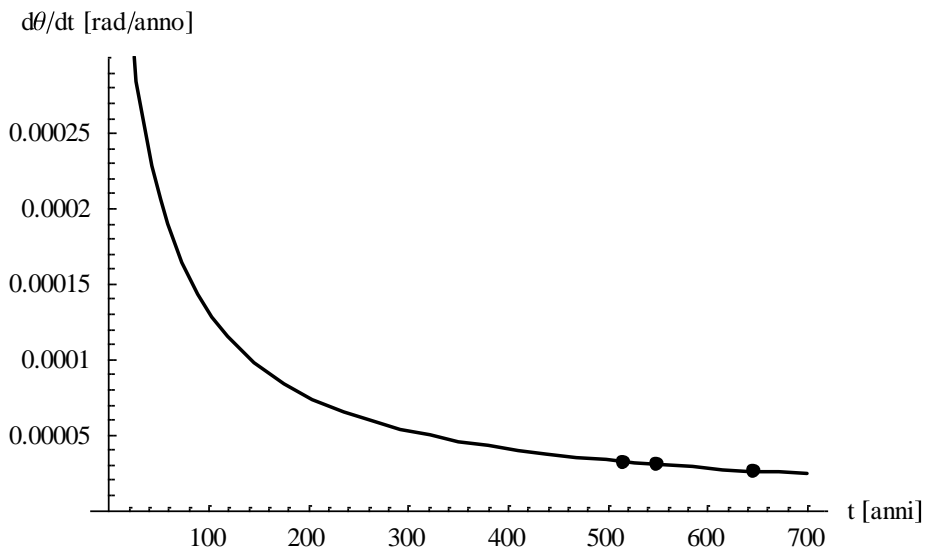


Figura 5.72. Velocità di rotazione (in rad/anno) nel tempo.

Non avendo a disposizione i risultati di prove di *creep* sui terreni presenti in sito, i parametri sono stati definiti e calibrati unicamente sulla base dell'analogia tra elemento di volume e macroelemento.

In particolare, si è scelto di utilizzare $m = 0,94$ (Figura 5.73).

Ripetendo l'analisi con le rotazioni espresse in radianti, piuttosto che in gradi, come si può vedere in Figura 5.74, si ritrova lo stesso valore di m , che può quindi essere considerato come un parametro costante.

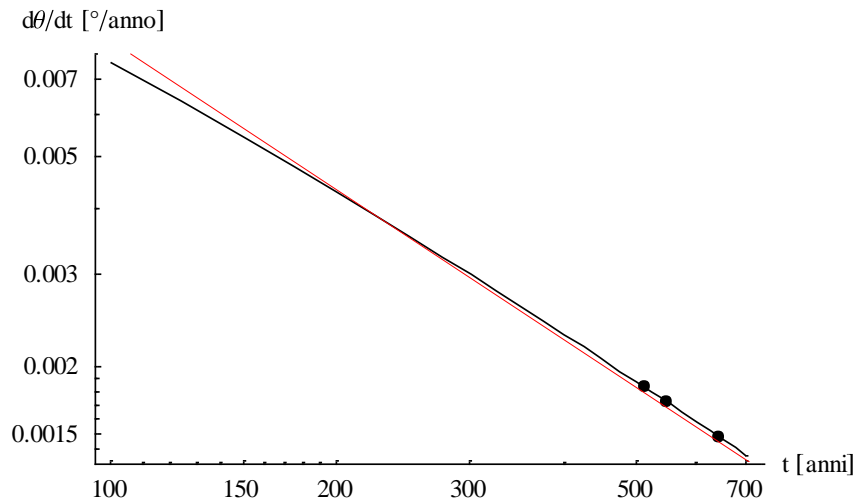


Figura 5.73. Velocità di rotazione (in °/anno) nel tempo in scala logaritmica per la calibrazione del parametro m .

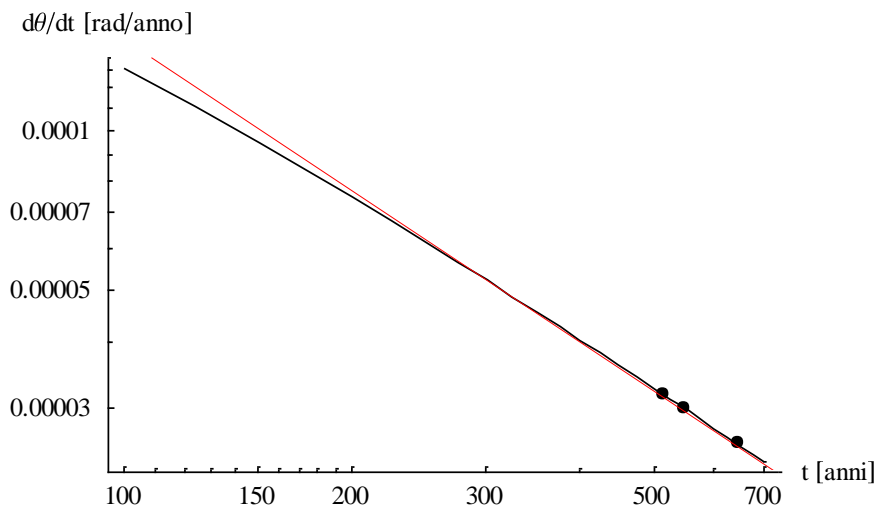


Figura 5.74. Velocità di rotazione (in rad/anno) nel tempo in scala logaritmica per la calibrazione del parametro m .

Teoricamente, i parametri A e α dovrebbero essere ricavati sul piano semilogaritmico $[\text{Log}(d\theta/dt) - M]$.

In realtà, non avendo a disposizione questi dati, i parametri A e α possono essere calibrati in modo da rispettare la seguente condizione:

$$\text{Eq. 5.16} \quad 0 < \left[\exp(-\alpha Wh \theta_0) - \left(1 + \frac{Wh}{k_\theta}\right) \alpha Wh A \frac{t_i^m}{1-m} t^{1-m} \right] < 1$$

e da interpolare i dati pregressi di rotazione della Torre secondo la nuova funzione di *creep* rotazionale ricavata per il macroelemento:

$$\text{Eq. 5.17} \quad \theta(t) = -\frac{1}{\alpha Wh} \ln \left[\exp(-\alpha Wh \theta_0) - \left(1 + \frac{Wh}{k_\theta}\right) \alpha Wh A \frac{t_i^m}{1-m} t^{1-m} \right]$$

Ripetendo l'analisi con le rotazioni in radianti, piuttosto che in gradi, non si ritrovano gli stessi valori per A e α : tali parametri dipendono evidentemente dall'unità di misura.

L'evoluzione delle rotazioni per *creep* nel tempo per la Torre Garisenda, caratterizzata da $A = 0,038^\circ / \text{anno}$ e $\alpha = 0,00048 \frac{^\circ / \text{anno}}{\text{MNm}}$, è riportata in Figura 5.75.

Si può notare che il tratto iniziale della curva, caratterizzato da un'elevata pendenza, non permette di interpretare in modo corretto l'evoluzione delle rotazioni della torre.

La formulazione sembra invece valida per interpolare i dati più recenti e affidabili, anche se molto poco numerosi. Tuttavia da diversi anni la Torre Garisenda è soggetta a monitoraggio continuo, quindi sarebbe molto interessante utilizzare tali dati, anno per anno, per migliorare la modalità di calibrazione dei parametri m , A e α e verificarne l'attendibilità.

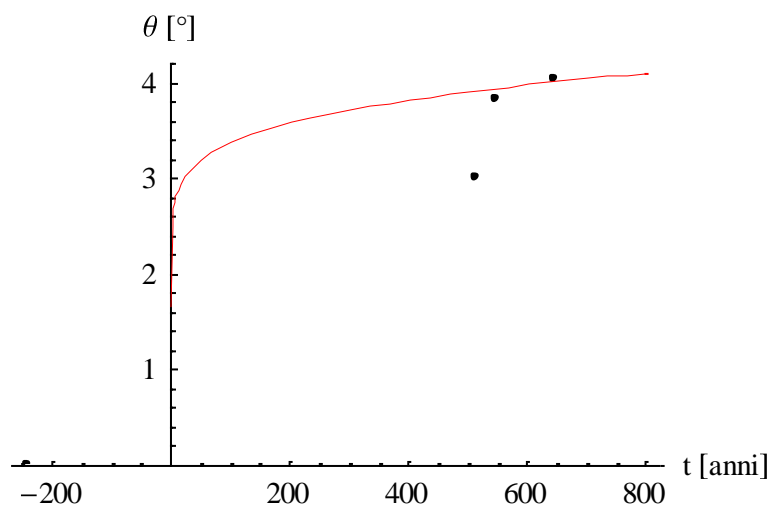


Figura 5.75. Evoluzione delle rotazioni nel tempo secondo il modello di *creep*.

Sulla scala dei tempi fissata il valore di \bar{t} , per il quale la rotazione del sistema accelera indefinitamente, portando infine al collasso, può essere calcolato dalla seguente espressione:

$$\bar{t} = \left[\frac{(1-m)\exp(-\alpha Wh\theta_0)}{(1+Wh/k_\theta)\alpha WhAt_i^m} \right]^{\frac{1}{1-m}} \cong 79000 \text{anni}$$

Inoltre la posizione del punto di flesso, definito nella Sezione 4.4.1, può essere individuata in corrispondenza di:

$$\hat{t} \cong 14150 \text{anni}$$

La rotazione corrispondente a \hat{t} assume un valore troppo elevato da poter pensare che il punto di flesso rappresenti l'innesco del *creep* terziario.

5.7.6 BIBLIOGRAFIA

9. Giordano F., a cura di (2000). *La torre Garisenda*. Ed. Costa, Bologna.
10. Marchi M. (2008). *Stability and strength analysis of leaning towers*. Dottorato di ricerca in Ingegneria Geotecnica, Università degli studi di Parma, Dipartimento di Ingegneria Civile ed Architettura.
11. Pesci A., Casula G., Bonali E. e Boschi E. (2011). *Un metodo per lo studio di edifici storici mediante misure laser a scansione terrestre: le Due Torri di Bologna*. Rapporti tecnici INGV, Num. 178.
12. Rivaa P., Perottib F., Guidobonic E. e Boschid E. (1998). *Seismic analysis of the Asinelli Tower and earthquakes in Bologna*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 17, p. 525–550.
13. Traversa F., a cura di (2011). *Relazione tecnica: Risultati dell'analisi della documentazione relativa agli studi di caratterizzazione del sottosuolo delle torri Asinelli e Garisenda di Bologna*. ISPRA - Istituto Superiore per la Protezione e la Ricerca Ambientale, Dipartimento Difesa del Suolo.
14. www.wikipedia.org

CONCLUSIONI

Sintesi dei contributi

I terreni coesivi, soggetti a un carico costante, sviluppano deformazioni differite nel tempo, che possono diventare di notevole entità, a causa dei processi viscosi che avvengono a livello dello scheletro solido. Il comportamento di *creep* assume quindi notevole importanza pratica nei problemi geotecnici in cui, al fine di evitare problemi di funzionalità in esercizio o di stabilità, interessano le deformazioni a lungo termine.

Nonostante il comportamento viscoso tensione-deformazione-tempo dei terreni sia stato diffusamente studiato negli ultimi decenni, sono ancora presenti numerosi aspetti irrisolti e non esiste un *framework* unitario, probabilmente anche a causa della difficoltà di eseguire prove a lungo termine e della conseguente mancanza di dati sperimentali per diversi tipi di terreni.

Per questo motivo il lavoro di tesi è stato caratterizzato da un grande sforzo iniziale di ricerca bibliografica sugli studi sperimentali e sulla modellazione del comportamento di *creep* dell'elemento di volume, al fine di raccogliere e organizzare le osservazioni più interessanti in modo schematico ma per quanto possibile esauriente, tentando così di organizzare la grande mole di informazioni presenti in letteratura.

Nel caso specifico delle torri, il *creep* dei terreni, associato ad imperfezioni strutturali o irregolarità del terreno di fondazione, può dar luogo ad una progressiva perdita di verticalità della struttura.

Comunque, anche se le deformazioni differite nel tempo possono portare ad una condizione critica per la stabilità della torre, a lungo termine il *creep* agisce sulla rigidità del terreno provocandone un rafforzamento (incrudimento per *creep*), che può compensare la riduzione del fattore di sicurezza del sistema.

Infatti si può dimostrare che tenendo conto di questo fenomeno le rotazioni ammissibili prima di raggiungere l'instabilità dell'equilibrio sono maggiori rispetto a

quelle previste con metodologie di analisi tradizionali e che non dipendono dallo specifico modello di *creep* considerato.

La previsione della risposta delle torri nel tempo rappresenta quindi da sempre una sfida affascinante, ma anche piena di incertezze per tutti gli addetti ai lavori, che recentemente si sono dedicati allo sviluppo e all'implementazione di specifici modelli elasto-plastici inelastici per le fondazioni superficiali.

Tali modelli consentono infatti di generare una curva $M - \theta$ affidabile, sulla base della quale possono essere fatte le opportune considerazioni sia in relazione alla capacità portante che alla stabilità dell'equilibrio.

La parte centrale della tesi si concentra in particolare sulla comprensione e sull'implementazione degli effetti che i fenomeni di *creep* hanno sulla stabilità delle torri storiche. Infatti è di fondamentale importanza tenere conto dell'influenza del *creep* sui meccanismi di collasso delle torri storiche al fine di interpretare in modo corretto il comportamento delle strutture reali.

Per completare l'analisi di stabilità delle torri alla luce dei fenomeni di *creep*, è stata quindi proposta una metodologia innovativa che permette di introdurre la variabile tempo direttamente nelle formulazioni dei modelli esistenti.

Il modello di previsione dell'evoluzione dell'inclinazione nel tempo si basa su una funzione di *creep* rotazionale ricavata a partire dall'analogia con il **modello semiempirico di Tavenas et al.** (1978).

Tale modello descrive, per l'elemento di volume, lo sviluppo nel tempo delle deformazioni di *creep*, sia volumetriche che deviatoriche, sfruttando l'equazione fenomenologica di Singh e Mitchell (1968).

Per analogia tra l'elemento di volume e il macroelemento, la pressione media p' e la tensione deviatorica q svolgono lo stesso ruolo del carico verticale V e del momento flettente M , rispettivamente; inoltre le deformazioni volumetriche ε_v e deviatoriche ε_q possono essere considerate equivalenti ai cedimenti verticali w e alle rotazioni θ .

Inoltre, nel caso delle torri, è necessario tenere conto del fatto che, mentre il carico verticale è costante, pari al peso proprio della torre $V = W$, il momento esterno applicato aumenta nel tempo all'aumentare della rotazione dell'asse, cioè $M = Wh\theta$.

Pertanto, la funzione di *creep* rotazionale introdotta definisce l'andamento con cui la rotazione dell'asse aumenta in seguito alla costruzione della torre e permette di

rappresentare il comportamento tipico dei processi di *creep*, distinguendo le fasi di *creep* primario, secondario e terziario. In particolare il processo di *creep* terziario, che è legato alla componente deviatorica degli sforzi, può provocare un rapido aumento dell'inclinazione, e quindi delle sollecitazioni, fino al collasso finale della struttura.

Dopo aver elaborato tale formulazione, il passo successivo è stato quello di valutarne l'applicabilità mediante la calibrazione dei parametri di *creep* t_i , m , A e α (definiti per analogia) sui dati pregressi dell'inclinazione di torri storiche.

Ai fini dell'analisi di *creep* è necessario conoscere esclusivamente il peso proprio della torre W , l'altezza del baricentro al di sopra del piano di fondazione h e la rigidezza rotazionale del sistema terreno-fondazione k_θ .

In particolare sono stati analizzati alcuni *case histories* rinomati in Italia, quali la Torre di Pisa, il campanile di Santo Stefano a Venezia, la Torre Ghirlandina di Modena, la Torre degli Asinelli e la Torre Garisenda di Bologna.

Nonostante i dati a nostra disposizione non siano molto numerosi e non sempre completamente attendibili, la calibrazione ha comunque permesso di individuare un *range* piuttosto ristretto dei valori assunti dai parametri di *creep* del modello.

Sviluppi futuri

In futuro, alla luce dei risultati ottenuti per i diversi *case histories* analizzati, sarà possibile affinare ulteriormente la legge proposta per la previsione dell'evoluzione delle rotazioni nel tempo.

In particolare, per quanto riguarda la calibrazione dei parametri di *creep*, potrebbe essere interessante lavorare sui numerosi dati derivanti dai recenti sistemi di monitoraggio, installati negli ultimi anni su numerose torri storiche. Tali sistemi forniscono registrazioni in continuo dell'evoluzione delle rotazioni nel tempo. Ciò permetterebbe infatti di verificare e approfondire l'analogia tra elemento di volume e macroelemento.

Inoltre sono necessari ulteriori passi avanti sulla possibile esistenza di relazioni tra i parametri del modello individuati e le proprietà fisiche dei terreni in sito.

Infine, nonostante la legge rotazioni-tempo proposta per il macroelemento permetta di rappresentare un comportamento analogo a quello dei processi di *creep*, rimane

aperta la problematica del possibile innesco del *creep* terziario. Tale fenomeno, pur essendo contemplato nella formulazione matematica definita $\theta(t)$, non ha tuttora una plausibile giustificazione fisica.

Da tali sviluppi deriveranno importanti considerazioni sulle previsioni dei meccanismi in atto e quindi sul collasso delle strutture per instabilità dell'equilibrio.

RINGRAZIAMENTI

Desidero innanzitutto ringraziare il Prof. Guido Gottardi per la disponibilità che mi ha sempre dimostrato e per i preziosi suggerimenti che hanno costantemente indirizzato il lavoro di tesi.

Ringrazio Michela, per la disponibilità, la pazienza e la passione con cui mi ha seguito in questi mesi, ma anche per la sua gentilezza e il suo sostegno, che mi hanno sempre incoraggiato.

Desidero ringraziare con affetto i miei genitori, per aver sempre cercato di lasciarmi scegliere liberamente e per avermi dato fiducia, ma anche Andrea e Christian, Carlotta e Cinzia, Luca, Matteo e Matilde, per il loro sostegno e la capacità di farmi sempre tornare il sorriso.

Ringrazio poi la famiglia di Derek per essermi stati vicini in questi anni in cui sono cresciuta e cambiata.

Un pensiero molto affettuoso va alla nonna Tina, a zio Stefano, a Daura, a Giacomo, e al nonno Giulio, ma anche alla nonna Giuliana e al nonno Pirò.

Ringrazio Daniela, Teo, Fra e Matti, e le amiche di sempre, Debora e Leti, che, nonostante i rispettivi impegni, sanno di poter contare su di me e io su di loro.

Un ringraziamento va alle mie compagne di squadra, in particolare a quelle “storiche”, che ormai non sono più solo compagne di squadra, ma veri e propri punti di riferimento per me, con cui mi sono confidata e divertita in questi ultimi anni.

Ringrazio i miei compagni di corso più cari, e soprattutto Oly e Sam, che mi sono state a fianco durante la vita universitaria e che resteranno presenti anche nel futuro.

Per ultimo, ma non certo per importanza, ringrazio Derek, che è sempre stato presente, a cui sono unita da un legame forte e speciale, con cui ho condiviso tutto e con cui continuerò a reinventarmi giorno dopo giorno.

APPENDICE A – IMPLEMENTAZIONE DEL MODELLO IN *MATHEMATICA*

A.1 INTRODUZIONE

Nell'Appendice A sono riportati per esteso i *notebook* di elaborazione (con le rotazioni in gradi) relativi ai *case histories* analizzati, cioè la Torre di Pisa (Sezione A.2), il Campanile di Santo Stefano (Sezione A.3), la Ghirlandina di Modena (Sezione A.4), la Torre degli Asinelli (Sezione A.5) e la Garisenda (Sezione A.6) di Bologna.

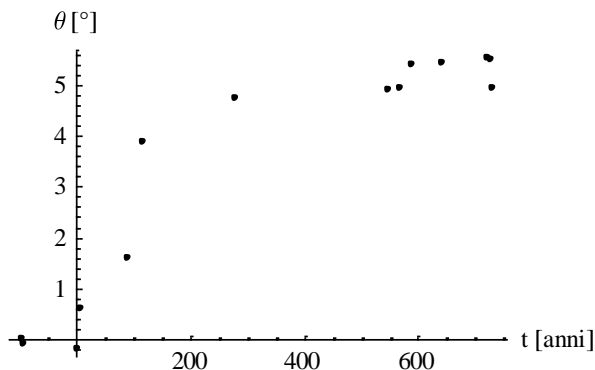
A.2 NOTEBOOK DELLA TORRE DI PISA

Caratteristiche principali della Torre

```
W=142; (* peso stimato della torre in MN *)
h=22.6; (* altezza del baricentro della torre in m *)
k=400000; (* rigidezza rotazionale in MNm/° *)
θ0=0.2; (* imperfezione iniziale in ° *)
```

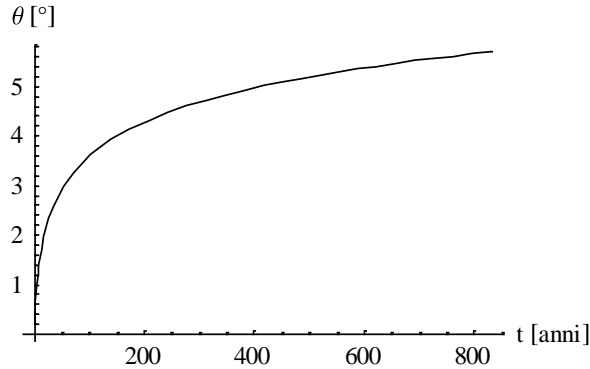
Dati pregressi rotazione-tempo in gradi

```
creepdata = {{-97,0}, {-92,-0.1}, {2,-0.2}, {8,0.6}, {90,1.6}, {115,3.9},
{280,4.75}, {547,4.9}, {568,4.95}, {589,5.4}, {641,5.45}, {723,5.55},
{729,5.5}, {731,4.95}};
GRAFcreepdata = ListPlot[creepdata, PlotStyle->PointSize[0.015], AxesLabel->{"t
[anni]", "θ [°]"}, TextStyle->{FontFamily->"Times", FontSize->12}>(*t=0 nel 1270*)
```

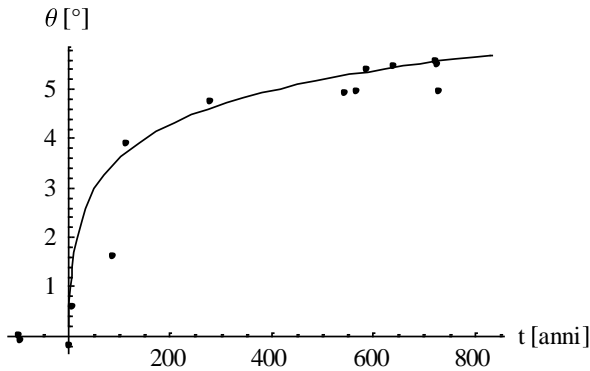


Semplice fitting dei dati della Torre con funzione logaritmica

```
fitting = Log[1+t/t0]+  $\theta$ 0/.{t0 ->3.4};
gr1= Plot[fitting,{t, 0, 830}, PlotStyle -> {Thickness[.005]}, AxesLabel-> {"t
[anni]"," $\theta$  [°]"}, TextStyle->{FontFamily->"Times", FontSize->12} (* t = 0 nel
1270 *)
```



```
GRAFfitting =Show[GRAFcreepdata,gr1]
```

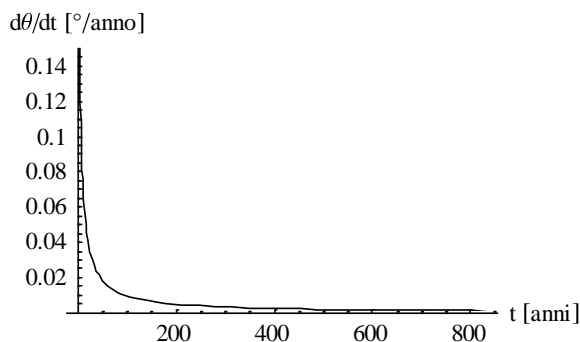


Verifica della correttezza del fitting

```
N[fitting]/.t->115 (* nel 1385  $\theta$ =3.9° *)
3.75029
N[fitting]/.t->589 (* nel 1859  $\theta$ =5.4° *)
5.36041
N[fitting]/.t->723 (* nel 1993  $\theta$ =5.55° *)
5.56433
```

Valutazione della velocità di rotazione $d\theta/dt$ nel tempo a partire dalla curva di fitting

```
creeprate=D[fitting,t];
GRAFcreeprate= Plot[creeprate,{t, 0, 830},PlotRange-> {0,0.15}, PlotStyle ->
{Thickness[.005]}, AxesLabel-> {"t [anni]","d $\theta$ /dt [°/anno]"},
TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12} (* t = 0 nel 1270 *)
```



```

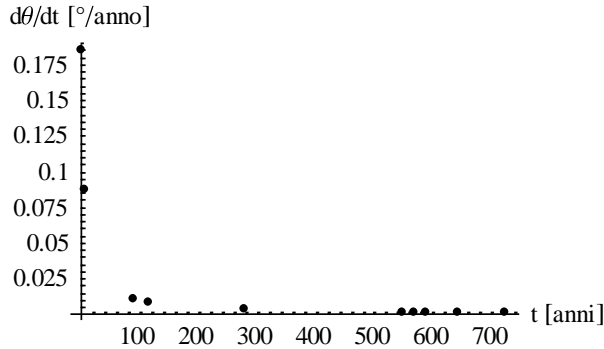
creepratedata={ {2,N[creeprate]/.t->2}, {8,N[creeprate]/.t->8}, {90,N[creeprate]/.t->90}, {115,N[creeprate]/.t->115}, {280,N[creeprate]/.t->280}, {547,N[creeprate]/.t->547}, {568,N[creeprate]/.t->568}, {589,N[creeprate]/.t->589}, {641,N[creeprate]/.t->641}, {723,N[creeprate]/.t->723}
{{2,0.185185}, {8,0.0877193}, {90,0.0107066}, {115,0.00844595}, {280,0.00352858}, {547,0.00181686}, {568,0.00175009}, {589,0.00168805}, {641,0.00155183}, {723,0.00137665}}

```

```

GRAFcreepratedata =ListPlot[creepratedata, PlotStyle->PointSize[0.02],
AxesLabel-> {"t [anni]", "dθ/dt [°/anno]"}, TextStyle->{FontFamily->"Times",
FontSize->12}]

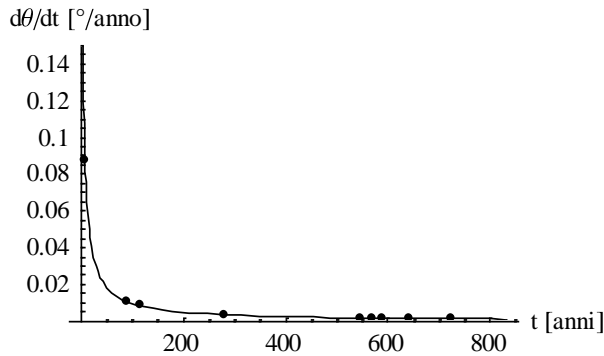
```



```

GRAFvelocita=Show[GRAFcreeprate, GRAFcreepratedata]

```

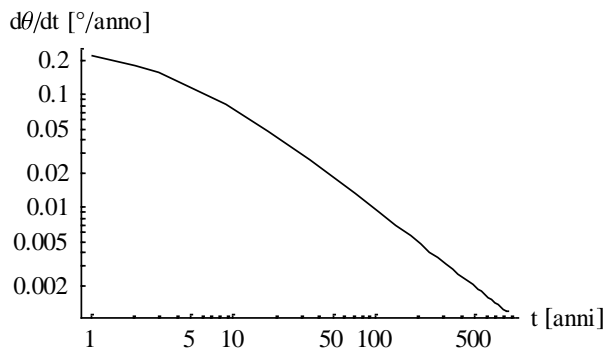


Valutazione della velocità di rotazione $d\theta/dt$ nel tempo IN SCALA LOGARITMICA

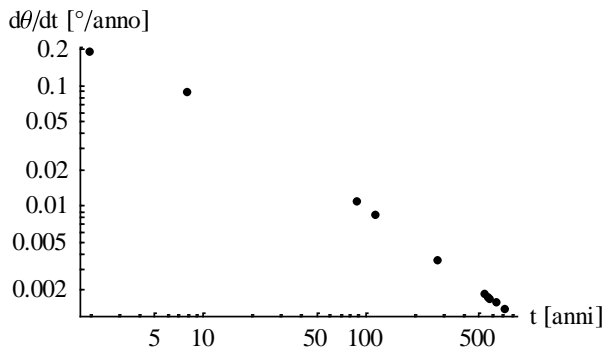
```

<<Graphics`Graphics`
dθdtlogl=LogLogPlot[creeprate, {t,1,830}, PlotStyle->{Thickness[.005]},
AxesLabel-> {"t [anni]", "dθ/dt [°/anno]"},
TextStyle->{FontFamily->"Times", FontSize->12}]

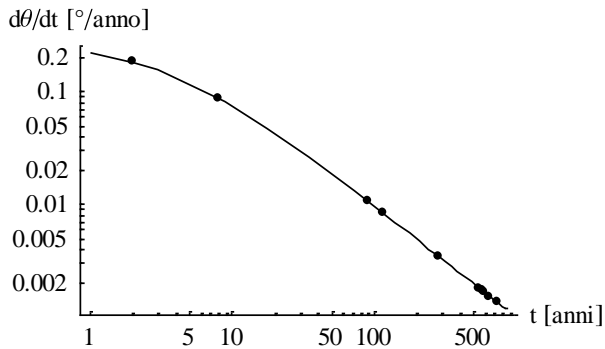
```



```
dθdtlog2=LogLogListPlot[creepdata, PlotStyle→PointSize[0.02], AxesLabel→
{"t [anni]", "dθ/dt [°/anno]"}, TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```

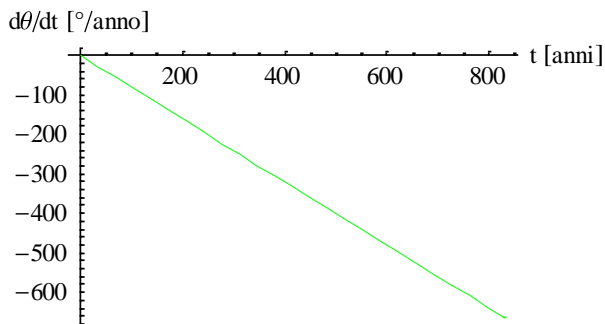


```
dθdtlog3=Show[dθdtlog1,dθdtlog2]
```

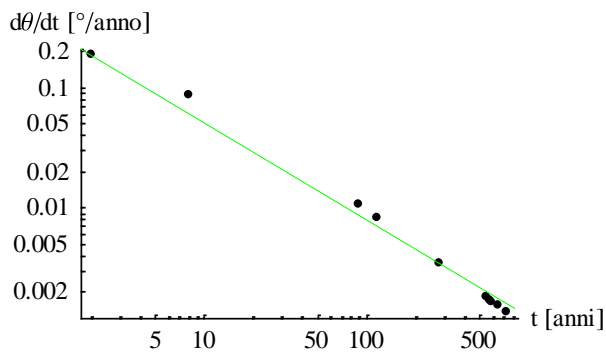


PRIMA interpolazione dei dati con una retta per ricavare il PARAMETRO $m = 0.8$

```
retta08=-m t+b/.{m → 0.8,b→-0.5};
grretta08= Plot[retta08,{t, 0, 830}, PlotStyle → {Thickness[.005],
RGBColor[0,1,0]}, AxesLabel→ {"t [anni]", "dθ/dt [°/anno]"},
TextStyle→{FontFamily→"Times", FontSize→12}]
```



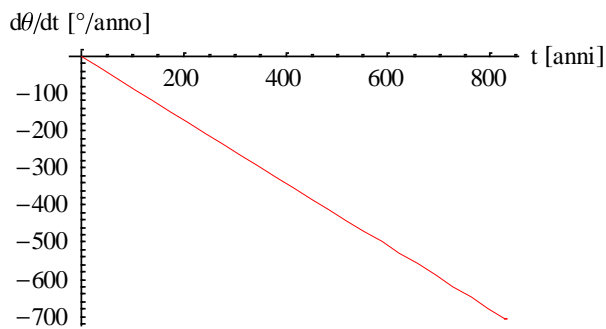
```
dθdtlog08=Show[dθdtlog2,grretta08]
```



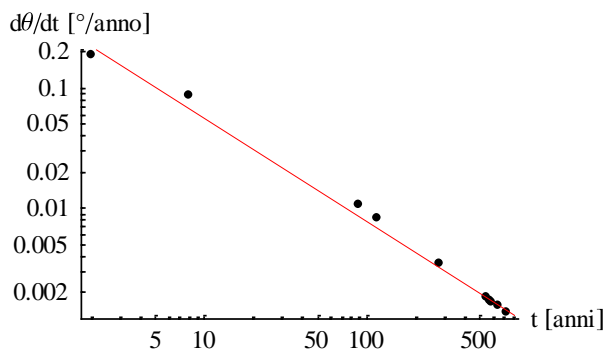
(* nell'elemento di volume m è la pendenza delle analoghe rette ma a tensione deviatorica costante *)

SECONDA interpolazione dei dati con una retta per ricavare il PARAMETRO $m=0.85$

```
retta085=-m t+b/.{m → 0.85,b→-0.4};
grretta085= Plot[retta085,{t, 0, 830}, PlotStyle → {Thickness[.005],
RGBColor[1,0,0]}, AxesLabel→ {"t [anni]","dθ/dt [°/anno]"},
TextStyle→{FontFamily→"Times", FontSize→12}]
```

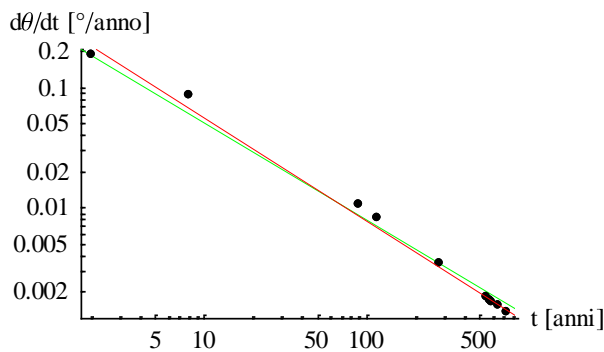


```
dθdtlog085=Show[dθdtlog2,grretta085]
```



CONFRONTO TRA DIVERSI VALORI DEL PARAMETRO m

```
Show[dθdtlog08, dθdtlog085]
```



Rappresentazione della velocità di rotazione in funzione del momento esterno ($M = W h \theta$), corrispondenti ai dati della torre

```

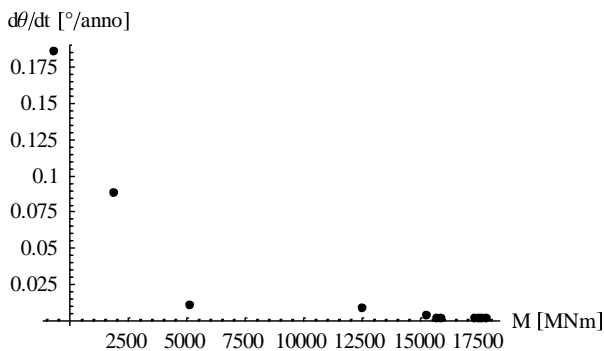
creepratemomdata = {{-142*22.6*0.2,N[creeprate]/.t->2},
{142*22.6*0.6,N[creeprate]/.t->8}, {142*22.6*1.6,N[creeprate]/.t->90},
{142*22.6*3.9,N[creeprate]/.t->115}, {142*22.6*4.75,N[creeprate]/.t->280},
{142*22.6*4.9,N[creeprate]/.t->547}, {142*22.6*4.95,N[creeprate]/.t->568},
{142*22.6*5.4,N[creeprate]/.t->589}, {142*22.6*5.45,N[creeprate]/.t->641},
{142*22.6*5.55,N[creeprate]/.t->723}, {142*22.6*5.5,N[creeprate]/.t->729}}
(* velocità di rotazione in °/anno, momento esterno in MNm *)
{{-641.84,0.185185}, {1925.52,0.0877193}, {5134.72,0.0107066},
{12515.9,0.00844595}, {15243.7,0.00352858}, {15725.1,0.00181686},
{15885.5,0.00175009}, {17329.7,0.00168805}, {17490.1,0.00155183},
{17811.1,0.00137665}, {17650.6,0.00136537}}

```

```

dθdtM=ListPlot[creepratemomdata, PlotStyle->PointSize[0.02],AxesLabel-> {"M
[MNm]", "dθ/dt [°/anno]"},TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}]

```

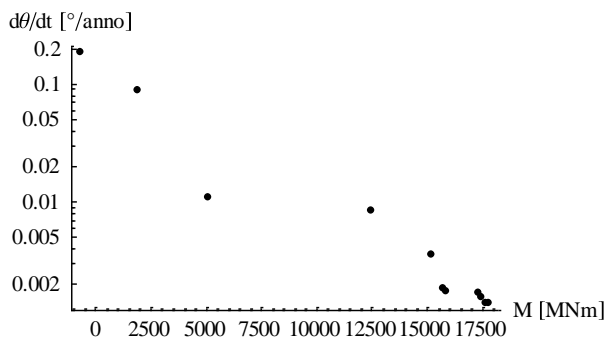


Rappresentazione della velocità di rotazione in funzione del momento esterno ($M = W h \theta$) in SCALA SEMILOGARITMICA, corrispondenti ai dati della torre, da cui teoricamente si ricavano i PARAMETRI A e α

```

<<Graphics`Graphics`
logdθdtM=LogListPlot[creepratemomdata, PlotStyle->PointSize[0.02],AxesLabel->
{"M [MNm]", "dθ/dt [°/anno]"},TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}]

```

Utilizzo della formula di Singh e Mitchell 1968 per creare le rette $\ln(d\theta/dt)-M$ (una per ogni istante di tempo, cioè una per ogni dato della torre) da cui ricavare i parametri A e α come per l'elemento di volume (α è la pendenza delle rette, A sarebbe l'intercetta della retta corrispondente al tempo di riferimento $t_i = 1$ anno)

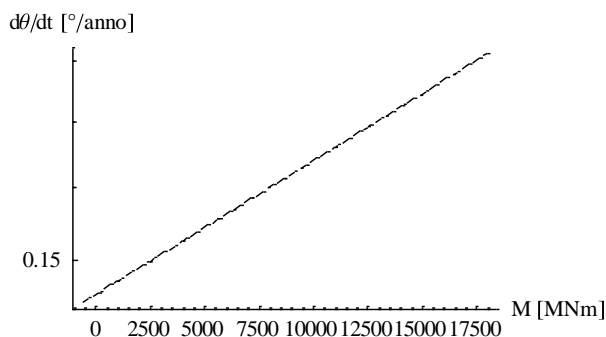
(*ricordandosi che $d\theta/dt$ dipende dalla funzione di fitting e quindi dal parametro t_0^*)

DATO 1

```
singhmittchell1=A Exp[α M] (ti/t)^m /.{α→0.000015, A→0.26, m→0.85, ti→1, θ→-0.2, t→2};
```

```
N[singhmittchell1]/.M→{-641.84`0.142862
```

```
formula1= LogPlot[singhmittchell1,{M, -600, 18000}, PlotStyle → {Dashing[{0.02,0.01}], Thickness[.003]}, AxesLabel→ {"M [MNm]","dθ/dt [°/anno]"}, TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```

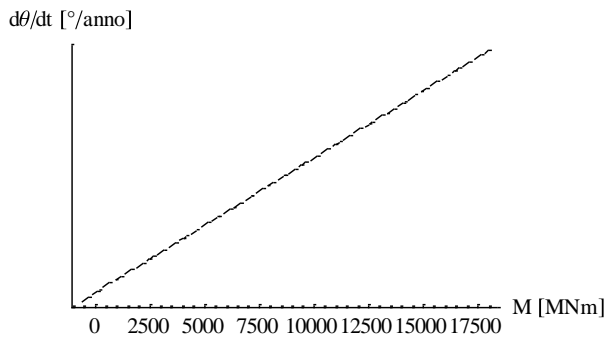


DATO 2

```
singhmittchell2= A Exp[α M] (ti/t)^m /.{α→0.000015, A→0.26, m→0.85, ti→1, θ→0.6, t→8};
```

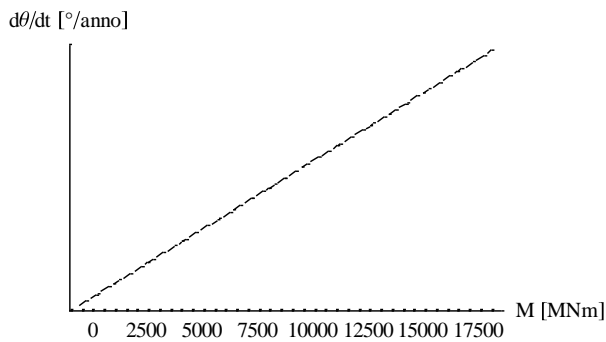
```
N[singhmittchell2]/.M→{1925 }0.0456969
```

```
formula2= LogPlot[singhmittchell2,{M, -600, 18000}, PlotStyle → {Dashing[{0.02,0.01}],Thickness[.003]}, AxesLabel→ {"M [MNm]","dθ/dt [°/anno]"}, TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```



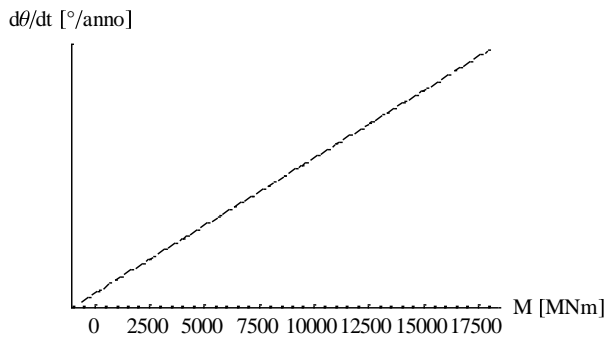
```

DATO 3
singhmitchell3=A          Exp[α          M] (ti/t)^m          /.{α
→0.000015,A→0.26,m→0.85,ti→1,θ→1.6,t→90};
N[singhmitchell3]/.M→(5134.7 )
0.00612797
formula3=  LogPlot[singhmitchell3,{M, -600, 18000}, PlotStyle →
{Dashing[{0.02,0.01}],Thickness[.003]}, AxesLabel→ {"M [MNm]","dθ/dt
[°/anno]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
    
```



```

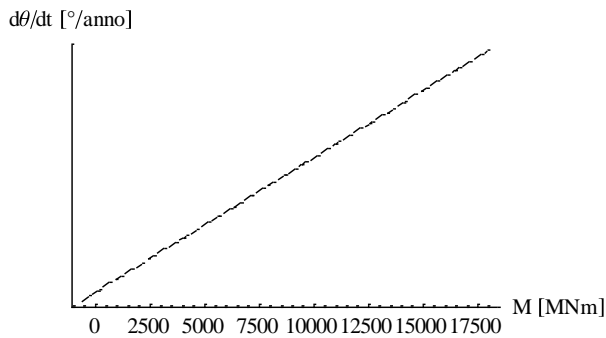
DATO 4
singhmitchell4=A          Exp[α          M] (ti/t)^m          /.{α
→0.000015,A→0.26,m→0.85,ti→1,θ→3.9,t→115};
N[singhmitchell4]/.M→(12515.9 )
0.00555794
formula4=  LogPlot[singhmitchell4,{M, -600, 18000}, PlotStyle →
{Dashing[{0.02,0.01}],Thickness[.003]}, AxesLabel→ {"M [MNm]","dθ/dt
[°/anno]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
    
```

**DATO 5**

```

singhmitcell15=A          Exp[α          M] (ti/t)^m          /.{α
→0.000015,A→0.26,m→0.85,ti→1,θ→4.75,t→280};
N[singhmitcell15]/.M→(15243.7 )
0.00271765
formula5=  LogPlot[singhmitcell15,{M, -600, 18000}, PlotStyle →
{Dashing[{0.02,0.01}],Thickness[.003]}, AxesLabel→ {"M [MNm]","dθ/dt
[°/anno]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]

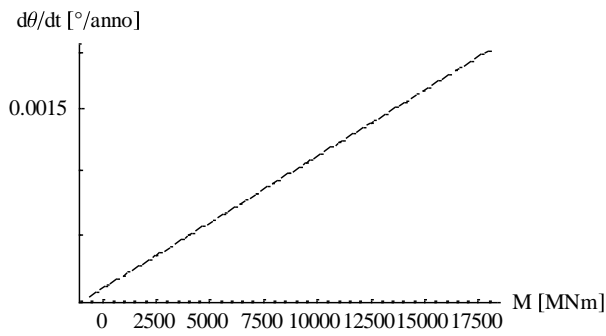
```

**DATO 6**

```

singhmitcell16=A          Exp[α          M] (ti/t)^m          /.{α
→0.000015,A→0.26,m→0.85,ti→1,θ→4.9,t→547};
N[singhmitcell16]/.M→(15725.1 )
0.00154926
formula6=  LogPlot[singhmitcell16,{M,-600, 18000}, PlotStyle →
{Dashing[{0.02,0.01}],Thickness[.003]}, AxesLabel→ {"M [MNm]","dθ/dt
[°/anno]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]

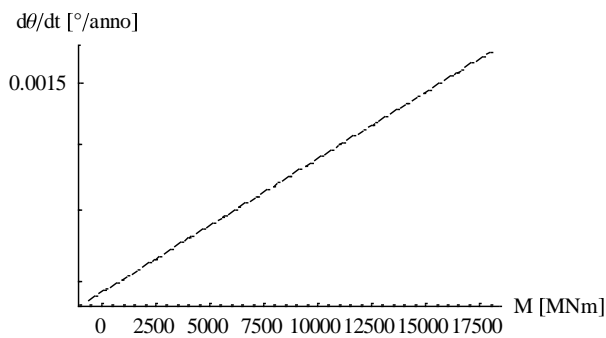
```



DATO 7

```

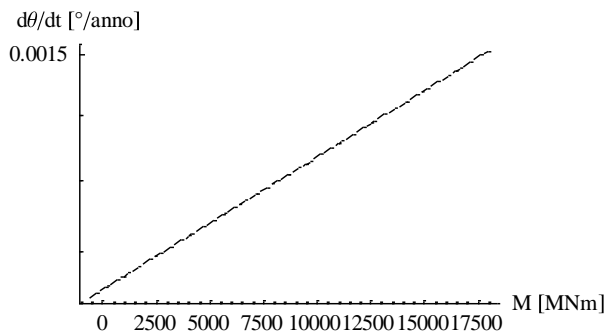
singhmitchell17=A                               Exp[α           M] (ti/t)^m           /.{α
→0.000015,A→0.26,m→0.85,ti→1,θ→4.95,t→568};
N[singhmitchell17]/.M→(15885.5)
0.00150405
formula7=   LogPlot[singhmitchell17,{M,        -600,        18000},   PlotStyle   →
{Dashing[{0.02,0.01}],Thickness[.003]},   AxesLabel→   {"M        [MNm]","dθ/dt
[°/anno]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
    
```



DATO 8

```

singhmitchell18=A                               Exp[α           M] (ti/t)^m           /.{α
→0.000015,A→0.26,m→0.85,ti→1,θ→5.4,t→589};
N[singhmitchell18]/.M→(17329.7 )
0.00149028
formula8=LogPlot[singhmitchell18,{M,        -600,        18000},   PlotStyle   →
{Dashing[{0.02,0.01}],Thickness[.003]},   AxesLabel→   {"M        [MNm]","dθ/dt
[°/anno]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
    
```

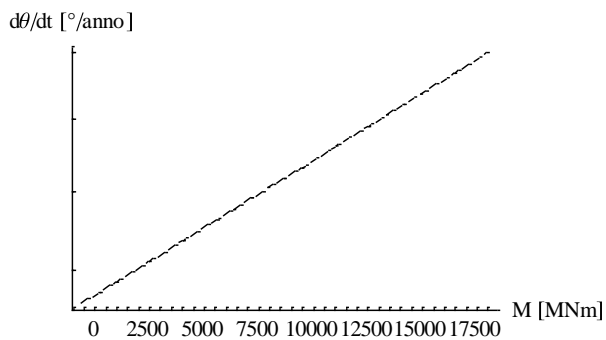


DATO 9

```

singhmittchell9=A          Exp[α          M] (ti/t)^m          /.          {α
→0.000015,A→0.26,m→0.85,ti→1,θ→5.45,t→641};
N[singhmittchell9]/.M→(17490.14 )
0.00139022
formula9=  LogPlot[singhmittchell9,{M, -600, 18000}, PlotStyle →
{Dashing[{0.02,0.01}],Thickness[.003]}, AxesLabel→ {"M [MNm]","dθ/dt
[°/anno]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]

```

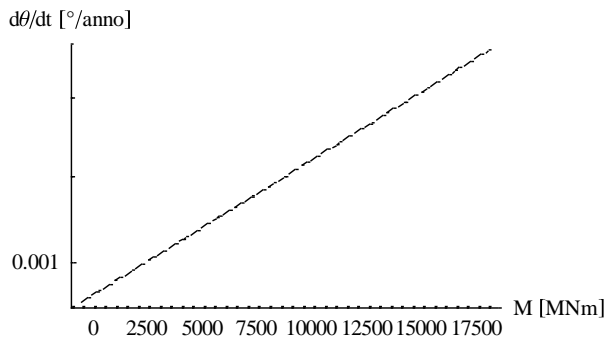


DATO 10

```

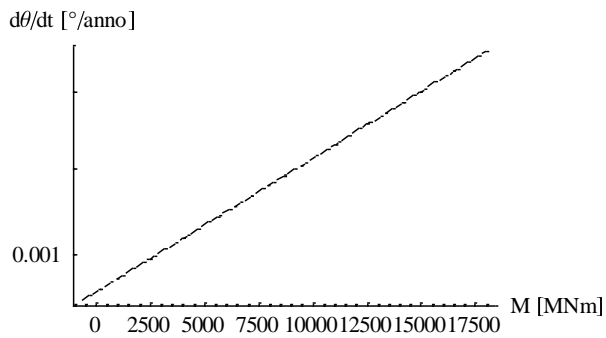
singhmittchell10=A          Exp[α          M] (ti/t)^m          /.          {α
→0.000015,A→0.26,m→0.85,ti→1,θ→5.55,t→723};
N[singhmittchell10]/.M→(17811.1 )
0.00126106
formula10=  LogPlot[singhmittchell10,{M, -600, 18000}, PlotStyle →
{Dashing[{0.02,0.01}],Thickness[.003]}, AxesLabel→ {"M [MNm]","dθ/dt
[°/anno]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]

```

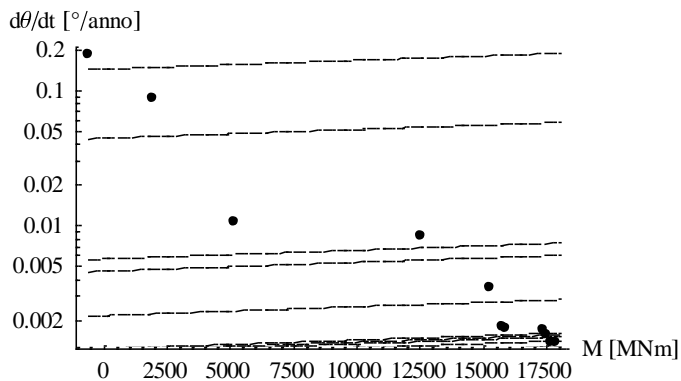


DATO 11

```
singhmitchell111=A Exp[α M] (ti/t)^m /.{α
→0.000015,A→0.26,m→0.85,ti→1,θ→5.5,t→729};
N[singhmitchell111]/.M→(17650.6)
0.00124922
formula11= LogPlot[singhmitchell111,{M, -600, 18000}, PlotStyle →
{Dashing[{0.02,0.01}],Thickness[.003]}, AxesLabel→ {"M [MNm]","dθ/dt
[°/anno]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```



```
Show[logdθdtM
, formula1, formula2, formula3, formula4, formula5, formula6, formula7, formu
la9, formula10, formula11]
```

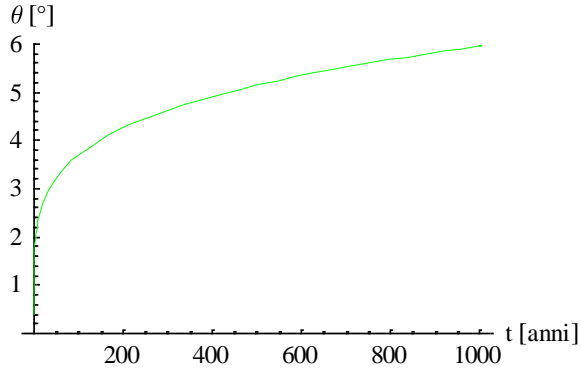


con $m = 0.8$: PRIMA PROVA CON LA FORMULA RICAVATA INTEGRANDO LA RELAZIONE DI SINGH E MITCHELL CON MOMENTO VARIABILE

```

logitmod08 = Log[-α A W h (1+W h/k) (ti^m) (t^(1-m))/(1-m)+E^(-α W h θ)]/(-α
W h) /. {ti →1, α →0.00001,A→0.26,m→0.8};
rotaztempo08= Plot[logitmod08, {t,0,1000},PlotRange → {0,6}, PlotStyle →
{Thickness[.005],RGBColor[0,1,0]}, AxesLabel→ {"t [anni]", "θ
[°]"}, TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]

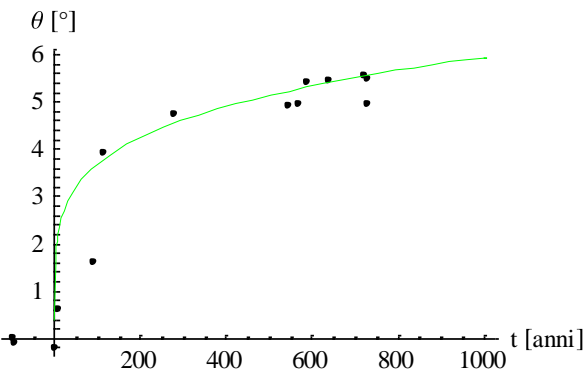
```



```

grafinale08 =Show[GRAFcreepdata,rotaztempo08 ]

```



```

logitmod08 /. t→ 723 (* nel 1993 sarebbe 5.55° *)
5.55571

```

con m = 0.8: Calcolo l'asintoto all'infinito

```

tf108=((1-m)E^(-α W h θ))/(α A W h (1+W h/k) (ti^m) )^(1/(1-m))/. { α
→0.00001,A→0.26,m→0.8, ti → 1}
7.36224 ×106

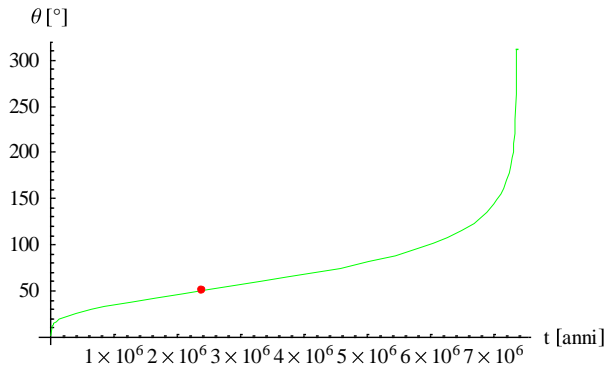
```

con m = 0.8: Calcolo il punto di flesso

```

derivataseconda08=D[logitmod08,{ t,2}];
Simplify[derivataseconda08];
tf208=FindRoot[derivataseconda08==0,{ t,10000}]
{t → 2.41246 ×106}
θtf208= Log[-α A W h (1+W h/k) (ti^m) (t^(1-m))/(1-m)+E^(-α W h θ)]/(-α W h)
/. {ti →1,t →2.4*10^6, α →0.00001,A→0.26,m→0.8}
50.222
flesso08={2.4*10^6,50};
rotaztempo08bis= Plot[logitmod08, {t,0,10000000}, PlotStyle →
{Thickness[.005],RGBColor[0,1,0]}, Epilog→ {PointSize[.02],Hue[.0],
Point[flesso08]},AxesLabel→ {"t [anni]", "θ [°]"},
TextStyle→{FontFamily→"Times", FontSize→12}]

```

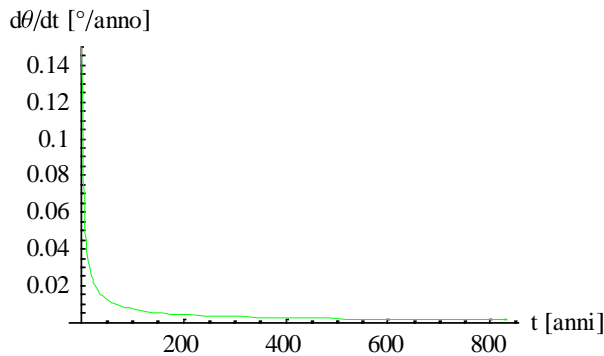


con $m = 0.8$: Valutazione della velocità di rotazione nel tempo a partire da questa nuova formulazione

```

creeprate08=D[logitmod08,t];(*velocità di rotazione in °/anno*)
graficovelocità08= Plot[creeprate08,{t, 0, 830},PlotRange->{0,0.15},
PlotStyle->{Thickness[.005],RGBColor[0,1,0]}, AxesLabel->{"t [anni]","dθ/dt
[°/anno]"},TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}]

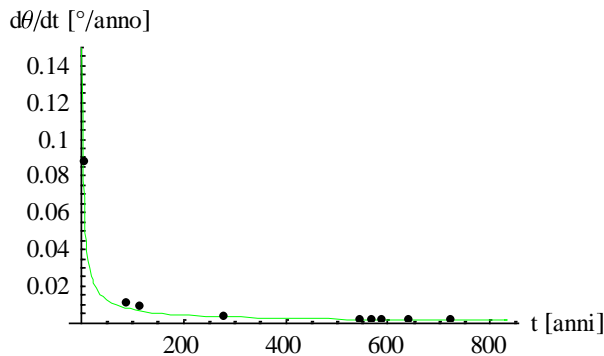
```



```

veltempo08=Show[graficovelocità08,GRAFcreepratedata]

```



```

logitrate08 = 3600creeprate08;
logitrate08 /.t ->660 (* nel 1930, dovrebbe essere circa 4"/anno *)
6.23841
logitrate08/.t ->720 (* nel 1990, dovrebbe essere circa 6"/anno *)
5.83774

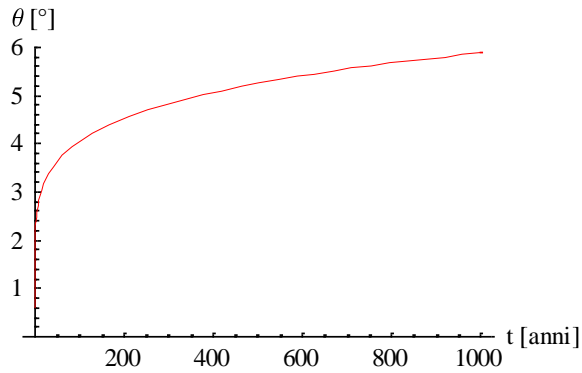
```

SECONDA PROVA con $m = 0.85$

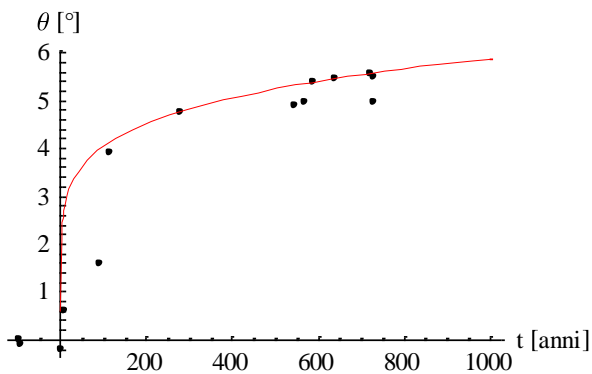
```

logitmod085 = Log[-α A W h (1+W h/k) (ti^m) (t^(1-m))/(1-m)+E^(-α W h θ0)]/(-α
W h) /. {ti ->1, α ->0.000015,A->0.26,m->0.85};
rotaztempo085= Plot[logitmod085, {t,0,1000},PlotRange->{0,6}, PlotStyle->
{Thickness[.005],RGBColor[1,0,0]}, AxesLabel->{"t [anni]","θ
[°]"},TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}]

```

```
grafinale085 =Show[GRAFcreepdata,rotaztempo085 ]
```



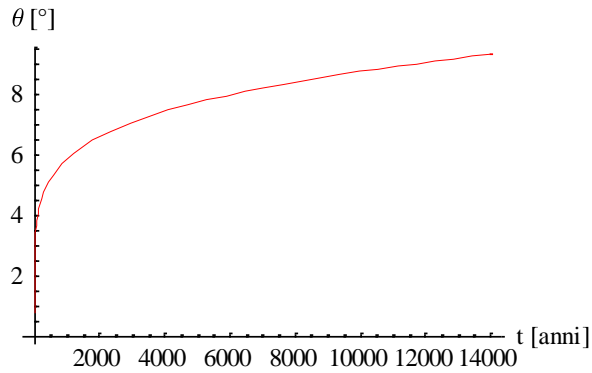
```
logitmod085 /. t -> 723 (* nel 1993 sarebbe 5.55° *)
5.575
```

con $m = 0.85$: Calcolo l'asintoto all'infinito

```
tf1085=(((1-m)E^(-alpha W h theta))/(alpha A W h (1+W h/k) (ti^m) ))^(1/(1-m))/.{ alpha
->0.000015,A->0.26,m->0.85, ti -> 1}
1.37992 x 10^7
```

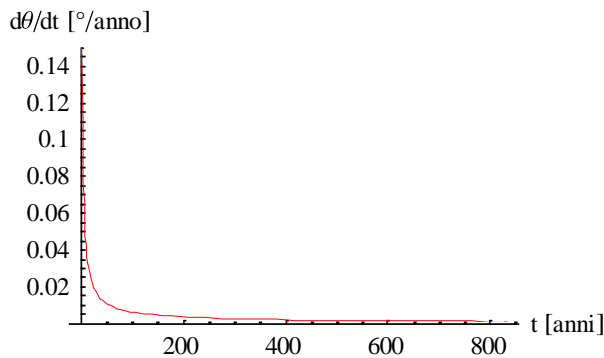
con $m = 0.85$: Calcolo il punto di flesso

```
derivataseconda085=D[logitmod085,{ t,2}];
tf2085=FindRoot[derivataseconda085==0,{ t,100000}]
{t -> 4.66997 x 10^6}
thetaf2085= Log[-alpha A W h (1+W h/k) (ti^m) (t^(1-m))/(1-m)+E^(-alpha W h theta)]/(-alpha W h)
/. {ti ->1,t ->4.67*10^6, alpha ->0.000015,A->0.26,m->0.85}
39.6101
flesso085={4.7*10^6,39.6};
rotaztempo085BIS= Plot[logitmod085, {t,0,1.4*10000}, PlotStyle ->
{Thickness[.005],RGBColor[1,0,0]}, Epilog-> {PointSize[.02],
Hue[.0],Point[flesso085]}, AxesLabel-> {"t [anni]","theta [°]"},
TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}]
```

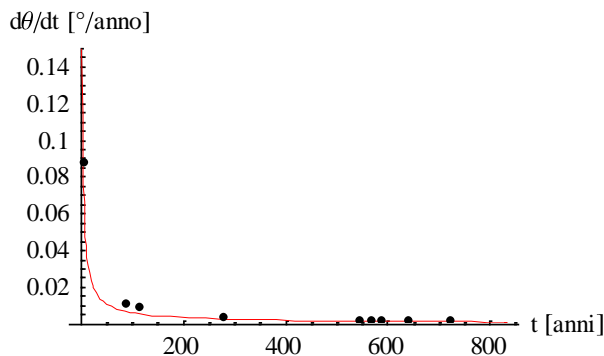


con $m = 0.85$: Valutazione della velocità di rotazione nel tempo a partire da questa nuova formulazione

```
creeprate085=D[logitmod085,t];(*velocità di rotazione in °/anno*)
graficovelocità085= Plot[creeprate085,{t, 0, 830},PlotRange->{0,0.15},
PlotStyle->{Thickness[.005],RGBColor[1,0,0]}, AxesLabel->{"t [anni]", "dθ/dt
[°/anno]"},TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}]
```



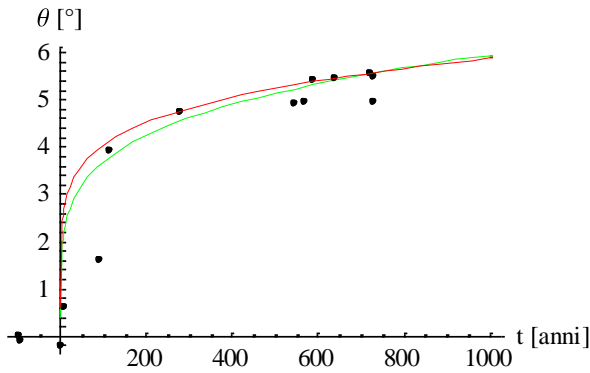
```
veltempo085=Show[graficovelocità085,GRAFcreepratedata]
```



```
logitrate085 = 3600creeprate085;
logitrate085 /.t ->660 (* nel 1930, dovrebbe essere circa 4"/anno *)
4.93114
logitrate085/.t ->720 (* nel 1990, dovrebbe essere circa 6"/anno *)
4.59711
```

CONFRONTO

```
Show[graffinale08,graffinale085]
```



A.3 NOTEBOOK DEL CAMPANILE DI SANTO STEFANO

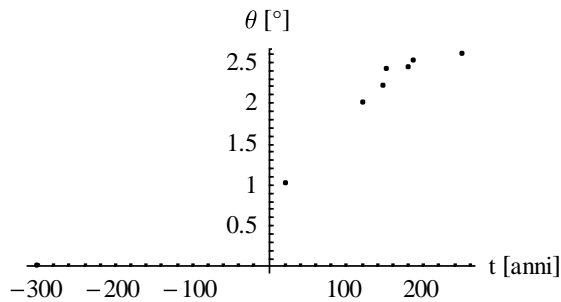
Caratteristiche principali della Torre

$W=35$; (* peso stimato della torre in MN *)
 $h=25$; (* altezza del baricentro della torre in m *)
 $k=\infty$; (* rigidezza rotazionale in MNm/° *)
 $\theta_0=0.6$; (* imperfezione iniziale in ° *)

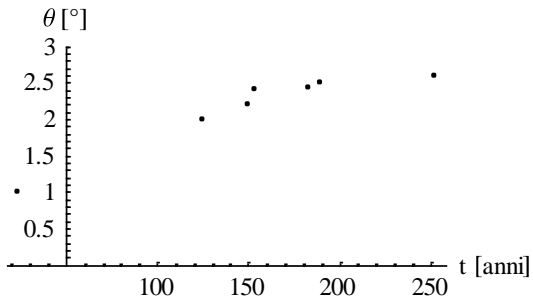
Dati pregressi rotazione-tempo in gradi

```
creepdata = {{-300,0}, {24,1}, {125,2}, {150,2.2}, {154,2.41}, {183,2.43},
{190,2.5}, {252,2.6}};
```

```
GRAFcreepdata =ListPlot[creepdata, PlotStyle->PointSize[0.015],AxesLabel->{"t
[anni]","θ [°]"},TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12},AspectRatio->0.5]
(* t = 0 nel 1750 *)
```

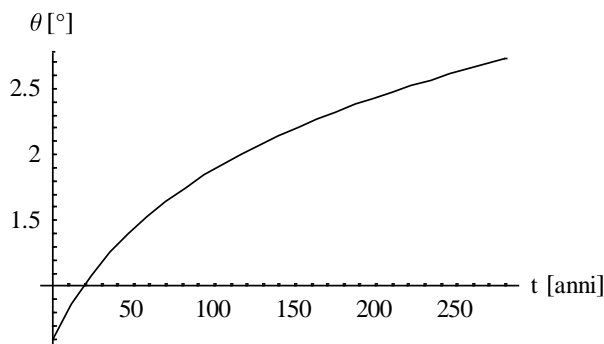


```
creepdata2
={{24,1}, {125,2}, {150,2.2}, {154,2.41}, {183,2.43}, {190,2.5}, {252,2.6}};
GRAFcreepdata2 =ListPlot[creepdata2, PlotRange -> {0,3},
PlotStyle->PointSize[0.015],AxesLabel->{"t [anni]","θ [°]"},
TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12},AspectRatio->0.5]
(* t = 0 nel 1750 *)
```

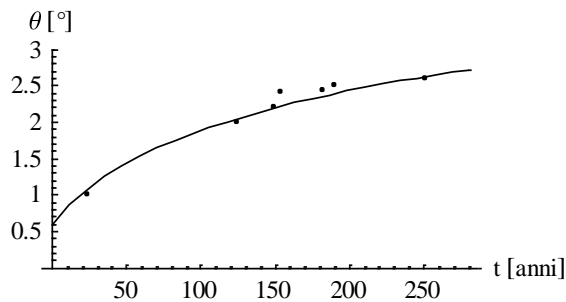


Semplice fitting dei dati della Torre con funzione logaritmica

```
fitting = Log[1+t/t0]+ theta0/.{t0 ->38};
gr1= Plot[fitting,{t, 0, 280}, PlotStyle -> {Thickness[.005]}, AxesLabel-> {"t
[anni]","theta [°]"},TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}>(*t = 0 nel 1750*)
```



```
GRAFFitting =Show[GRAFcreepdata2,gr1]
```

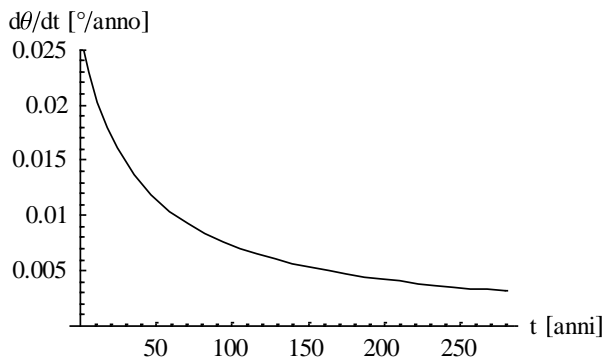


Verifica della correttezza del fitting

```
N[fitting]/.t->24 (* nel 1774 theta=1.0° *)
1.08955
N[fitting]/.t->125 (* nel 1875 theta=2.0° *)
2.05616
N[fitting]/.t->150 (* nel 1900 theta=2.2° *)
2.19886
```

Valutazione della velocità di rotazione dθ/dt nel tempo a partire dalla curva di fitting

```
creeprate=D[fitting,t];
GRAFcreeprate= Plot[creeprate,{t, 0, 280},PlotRange-> {0,0.025}, PlotStyle ->
{Thickness[.005]}, AxesLabel-> {"t [anni]","dtheta/dt [°/anno]"},
TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}>(* t = 0 nel 1750 *)
```



```

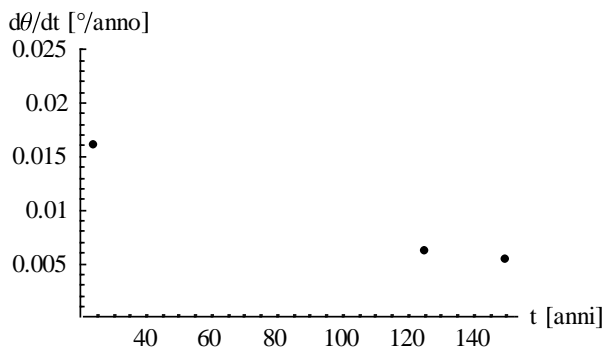
creepratedata={ {24,N[creeprate]/.t->24}, {125,N[creeprate]/.t->125}, {150,N[creeprate]/.t->150}}
(* TRASCURO I DATI SUCCESSIVI ALL'INTERVENTO DEL 1903-1904 *)
{{24,0.016129}, {125,0.00613497}, {150,0.00531915}}

```

```

GRAFcreepratedata =ListPlot[creepratedata,PlotRange->
{0,0.025},PlotStyle->PointSize[0.02],AxesLabel-> {"t [anni]","dθ/dt
[°/anno]"},TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}]

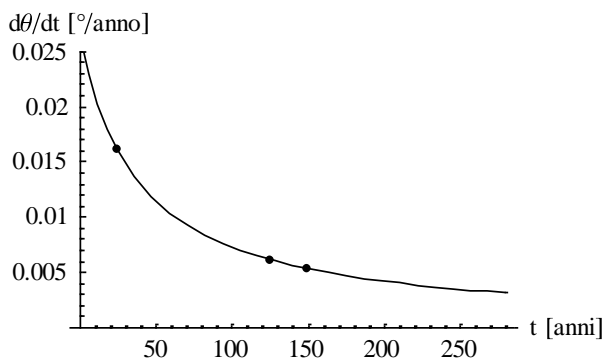
```



```

GRAFvelocita=Show[GRAFcreeprate,GRAFcreepratedata]

```

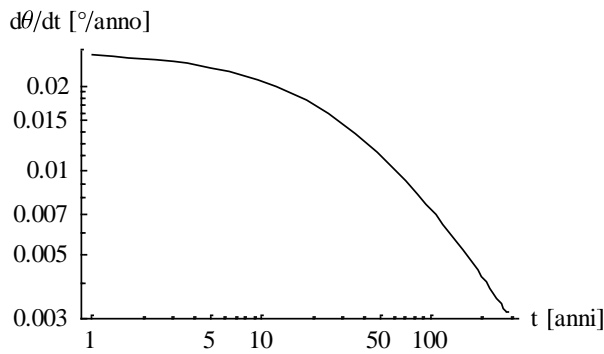


Valutazione della velocità di rotazione $d\theta/dt$ nel tempo IN SCALA LOGARITMICA

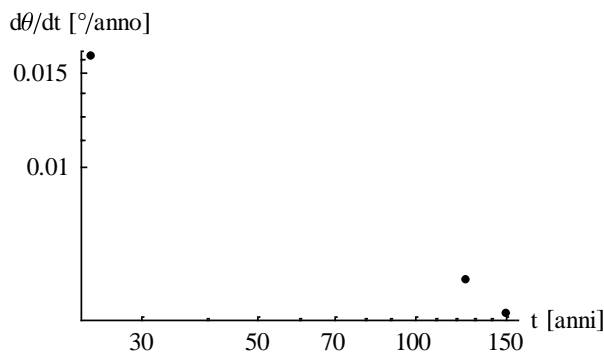
```

<<Graphics`Graphics`
dθdtlog1=LogLogPlot[creeprate, {t,1,280},PlotStyle->{Thickness[.005]},
AxesLabel-> {"t [anni]","dθ/dt
[°/anno]"},TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}]

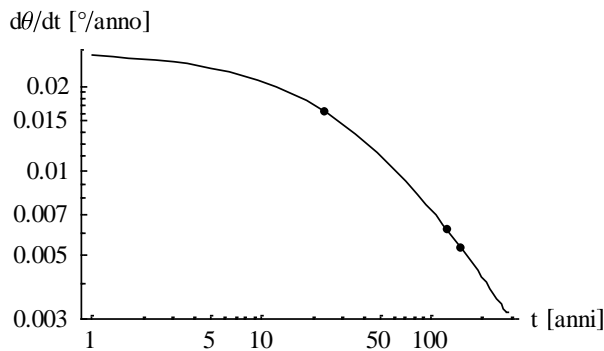
```



```
dθdtlog2=LogLogListPlot[creepratedata,PlotStyle→PointSize[0.02],AxesLabel→
{"t [anni]","dθ/dt [°/anno]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```

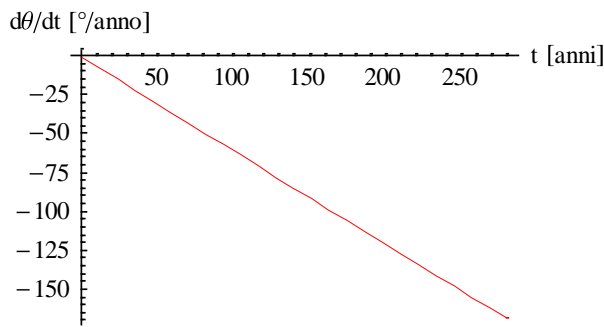


```
dθdtlog3=Show[dθdtlog1,dθdtlog2]
```

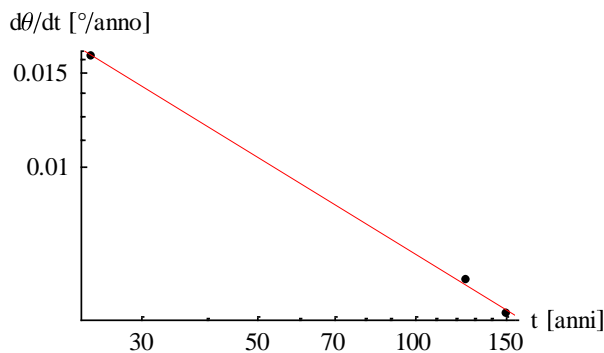


Interpolazione dei dati con una retta per ricavare il PARAMETRO m

```
retta=-m t+b/.{m → 0.6,b→-0.96};
grretta= Plot[retta,{t, 0, 280}, PlotStyle → {Thickness[.005],
RGBColor[1,0,0]}, AxesLabel→ {"t [anni]","dθ/dt [°/anno]"},
TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```



dθdtlog=Show[dθdtlog2,grretta]



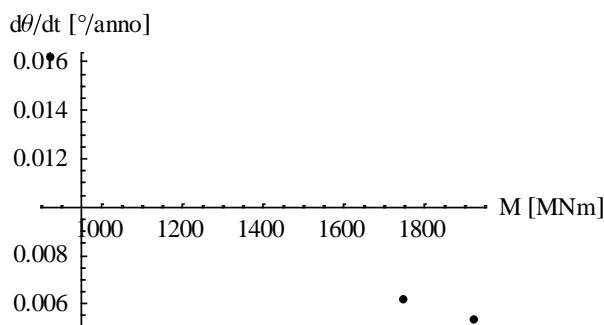
(* nell'elemento di volume m è la pendenza delle analoghe rette ma a tensione deviatorica costante *)

Rappresentazione della velocità di rotazione in funzione del momento esterno ($M = W h \theta$), corrispondenti ai dati della torre

```

creepratemoMdata
={ {35*25*1,N[creeprate]/.t->24}, {35*25*2,N[creeprate]/.t->125}, {35*25*2.2,N[creeprate]/.t->150}};
(* velocità di rotazione in °/anno, momento esterno in MNm *)
dθdtM=ListPlot[creepratemoMdata, PlotStyle->PointSize[0.02], AxesLabel-> {"M
[MNm]", "dθ/dt [°/anno]"}, TextStyle->{FontFamily->"Times", FontSize->12}]

```

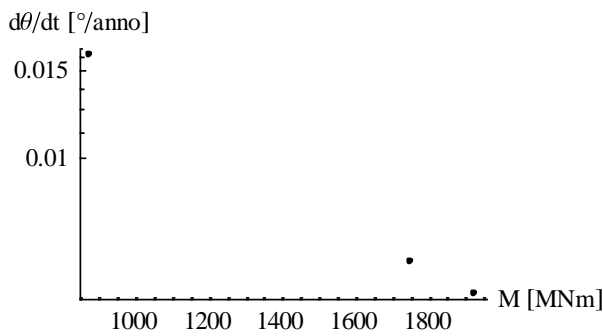


Rappresentazione della velocità di rotazione in funzione del momento esterno ($M = W h \theta$) in SCALA SEMILOGARITMICA, corrispondenti ai dati della torre, da cui teoricamente si ricavano i PARAMETRI A e α

```

<<Graphics`Graphics`
logdθdtM=LogListPlot[creepratemoMdata, PlotStyle->PointSize[0.02], AxesLabel->
{"M [MNm]", "dθ/dt [°/anno]"}, TextStyle->{FontFamily->"Times", FontSize->12}]

```

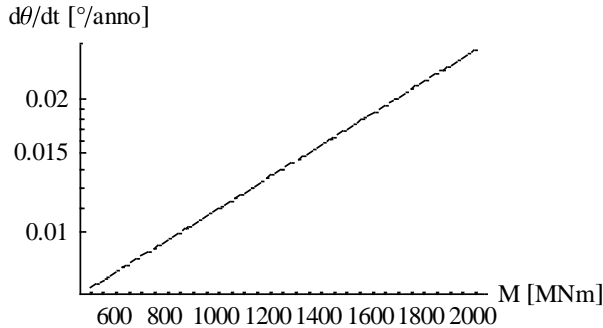


Utilizzo della formula di Singh e Mitchell 1968 per creare le rette $\ln(d\theta/dt)$ -M (una per ogni istante di tempo, cioè una per ogni dato della torre) da cui ricavare i parametri A e α come per l'elemento di volume (α è la pendenza delle rette, A sarebbe l'intercetta della retta corrispondente al tempo di riferimento $t_i = 1$ anno)

(*ricordandosi che $d\theta/dt$ dipende dalla funzione di fitting e quindi dal parametro t_0 *)

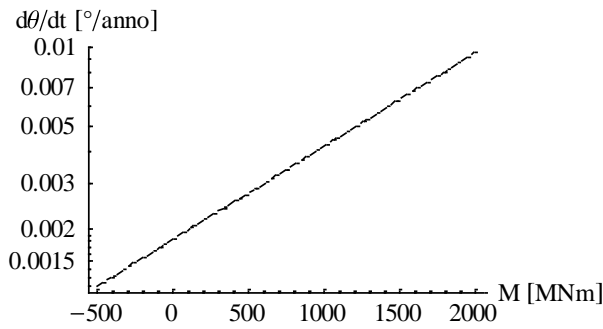
DATO 1

```
singhmittchell1=A Exp[α M] (ti/t)^m /.{α
→0.00083,A→0.033,m→0.6,ti→1,θ→1.0,t→24};
N[singhmittchell1]/.M→875      (* da confrontare con creepratemomdata *)
0.0101343
formula1= LogPlot[singhmittchell1,{M, 500, 2000}, PlotStyle →
{Dashing[{0.02,0.01}],Thickness[.003]}, AxesLabel→ {"M [MNm]","dθ/dt
[°/anno]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```



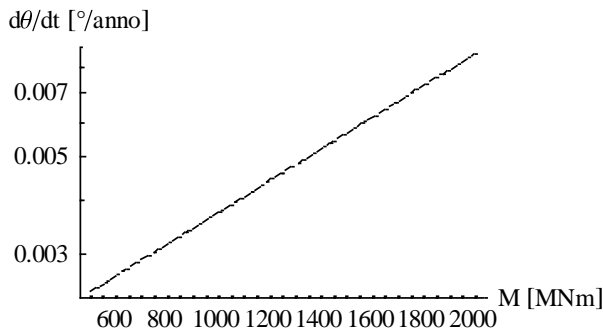
DATO 2

```
singhmittchell2=A Exp[α M] (ti/t)^m /.{ α
→0.00083,A→0.033,m→0.6,ti→1,θ→2.0,t→125};
N[singhmittchell2]/.M→(1750 )      (* da confrontare con creepratemomdata *)
0.0077836
formula2= LogPlot[singhmittchell2,{M, -500, 2000}, PlotStyle →
{Dashing[{0.02,0.01}],Thickness[.003]}, AxesLabel→ {"M [MNm]","dθ/dt
[°/anno]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```

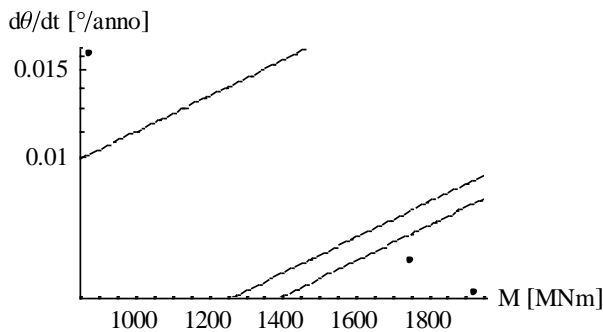



DATO 3

```
singhmitcell3=A Exp[α M] (ti/t)^m /.{α
→0.00083,A→0.033,m→0.6,ti→1,θ→2.2,t→150};
N[singhmitcell3]/.M→(1925) (* da confrontare con creepratemomdata *)
0.00806776
formula3= LogPlot[singhmitcell3,{M, 500, 2000}, PlotStyle →
{Dashing[{0.02,0.01}],Thickness[.003]}, AxesLabel→ {"M [MNm]", "dθ/dt
[°/anno]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```

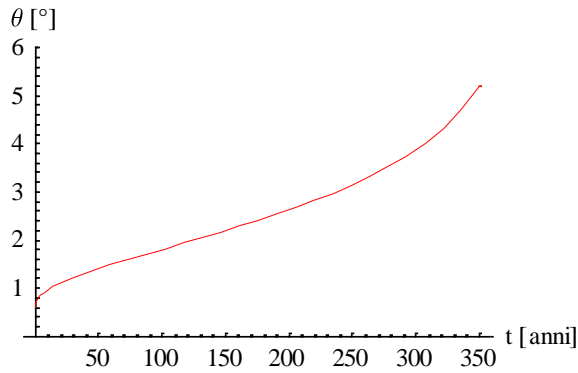


```
Show[logdθdtM , formula1, formula2, formula3]
```

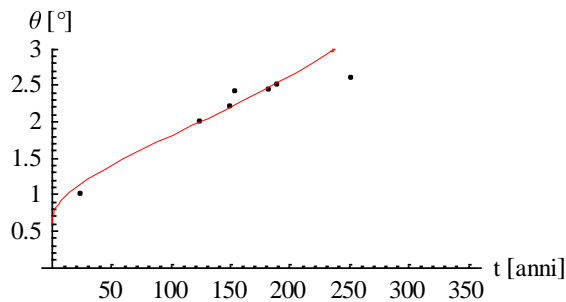


con m = 0.6: PRIMA PROVA CON LA FORMULA RICAVATA INTEGRANDO LA RELAZIONE DI SINGH E MITCHELL CON MOMENTO VARIABILE

```
logitmod06 = Log[-α A W h (1+W h/k) (ti^m) (t^(1-m))/(1-m)+E^(-α W h θ)]/(-α
W h) /. {ti →1, α →0.00083,A→0.033,m→0.6};
rotaztempo06= Plot[logitmod06, {t,0,350},PlotRange → {0,6}, PlotStyle →
{Thickness[.005],RGBColor[1,0,0]}, AxesLabel→ {"t [anni]", "θ
[°]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```



graffinale06=Show[GRAFcreepdata2,rotaztempo06]



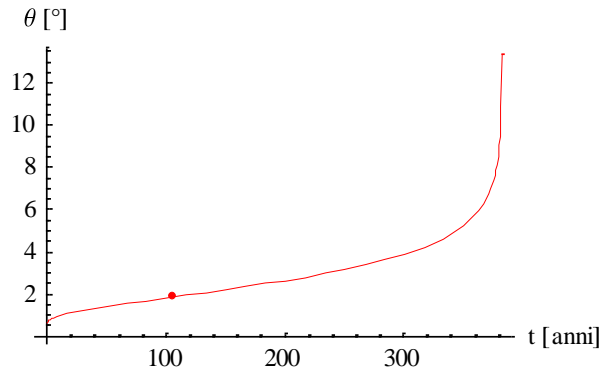
```
logitmod06 /. t -> 24 (* nel 1774 sarebbe 1.0° *)
1.15199
logitmod06 /. t -> 125 (* nel 1875 sarebbe 2.0° *)
2.00319
logitmod06 /. t -> 150 (* nel 1900 sarebbe 2.2° *)
2.20122
```

con m = 0.6: Calcolo l'asintoto all'infinito

```
tf106=(((1-m)E^(-alpha W h theta))/(alpha A W h (1+W h/k) (ti^m) ))^(1/(1-m))/ . {alpha
->0.00083,A->0.033,m->0.6, ti -> 1}
382.86
```

con m = 0.6: Calcolo il punto di flesso

```
derivataseconda06=D[logitmod06,{ t,2}];
tf206=FindRoot[derivataseconda06=0,{ t,100}]
{t->106.762}
thetaf206= Log[-alpha A W h (1+W h/k) (ti^m) (t^(1-m))/(1-m)+E^(-alpha W h theta)]/(-alpha W h)
/. {ti ->1,t ->106, alpha ->0.00083,A->0.033,m->0.6}
1.85577
flesso06={106,1.85};
rotaztempo06bis= Plot[logitmod06, {t,0,400}, PlotStyle ->
{Thickness[.005],RGBColor[1,0,0]}, Epilog->
{PointSize[.02],Hue[.0],Point[flesso06]},AxesLabel-> {"t [anni]","theta [°]"},
TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}]
```

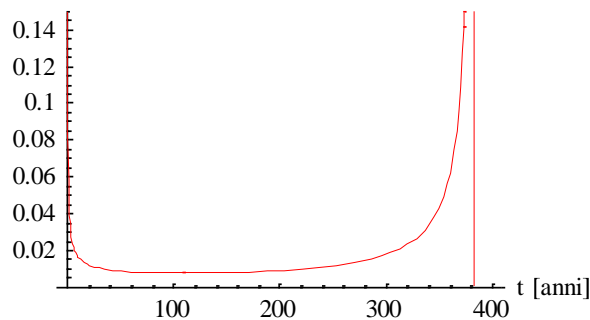


con $m = 0.6$: Valutazione della velocità di rotazione nel tempo a partire da questa nuova formulazione

```
creeprate06=D[logitmod06,t];(*velocità di rotazione in °/anno*)
```

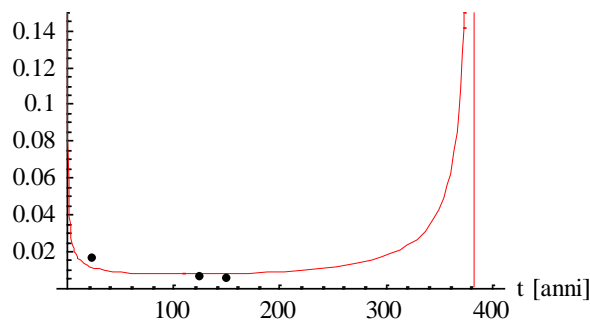
```
graficovelocità06= Plot[creeprate06,{t, 0, 400},PlotRange->{0,0.15},
PlotStyle->{Thickness[.005],RGBColor[1,0,0]}, AxesLabel->{"t [anni]", "dθ/dt
[°/anno]"},TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}]
```

dθ/dt [°/anno]



```
veltempo06=Show[graficovelocità06,GRAFcreepratedata]
```

dθ/dt [°/anno]



```
creeprate06 /.t ->24 (* nel 1774 dovrebbe essere circa 0.01°/anno *)
```

```
0.011317
```

```
creeprate06/.t ->125 (* nel 1875 dovrebbe essere circa 0.01°/anno *)
```

```
0.00780168
```

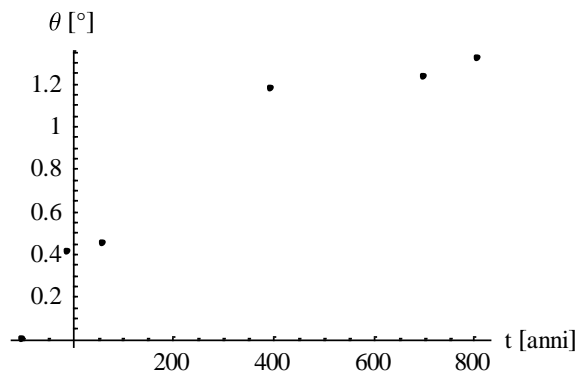
A.4 NOTEBOOK DELLA TORRE GHIRLANDINA

Caratteristiche principali della Torre

```
W=92; (* peso stimato della torre in MN *)
h=30.6; (* altezza del baricentro della torre in m *)
k=240000; (* rigidezza rotazionale in MNm/° *)
θ0=0.1; (* imperfezione iniziale in ° *)
```

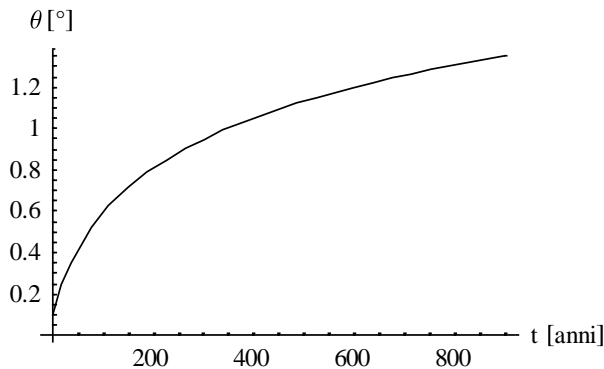
Dati misurati rotazione-tempo in gradi

```
creepdata = {{-100,0}, {-11,0.41}, {61,0.45}, {394,1.18}, {701,1.23},
{806,1.32}}; (* t = 0 nel 1200 *)
GRAFcreepdata =ListPlot[creepdata, PlotStyle→PointSize[0.015],AxesLabel→ {"t
[anni]", "θ [°]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
(* t = 0 nel 1200 *)
```

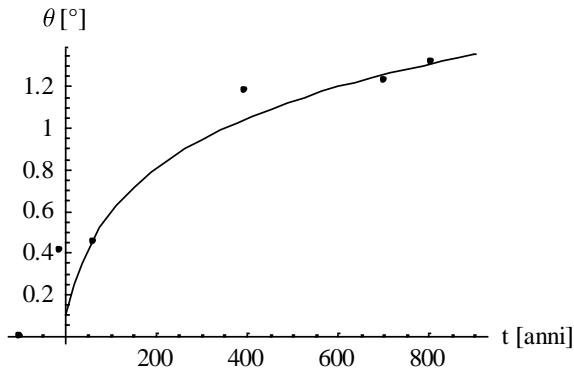


Semplice fitting dei dati della torre con funzione logaritmica

```
fitting = 0.4Log[1+t/t0]+ θ0/.{t0 →41};
gr1 = Plot[fitting,{t, 0,900}, PlotStyle → {Thickness[.005]}, AxesLabel→ {"t
[anni]", "θ [°]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}] (*t = 0 nel 1200*)
```



```
GRAFfitting =Show[GRAFcreepdata,gr1]
```

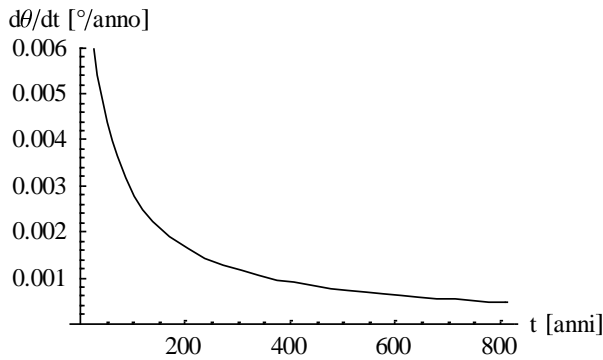


Verifica della correttezza del fitting

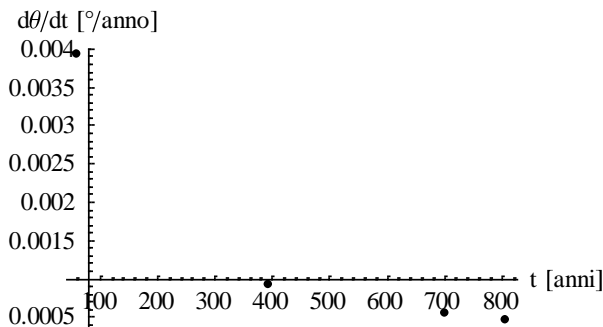
```
N[fitting]/.t->701 (* nel 1901  $\theta=1.23^\circ$  *)
1.25831
N[fitting]/.t->806 (* nel 2006  $\theta=1.32^\circ$  *)
1.31125
```

Valutazione della velocità di rotazione $d\theta/dt$ nel tempo a partire dalla curva di fitting

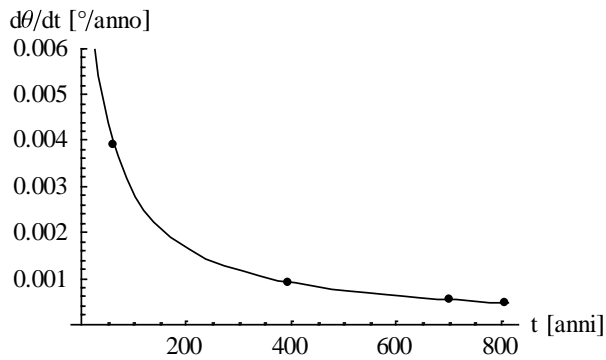
```
creeprate=D[fitting,t];
GRAFcreeprate= Plot[creeprate,{t, 0, 810},PlotRange-> {0,0.006}, PlotStyle ->
{Thickness[.005]}, AxesLabel-> {"t [anni]","d $\theta$ /dt
[ $^\circ$ /anno]},TextStyl->{FontFamily->"Times",FontSize->12}] (* t = 0 nel 1200 *)
```



```
creepratedata={{61,N[creeprate]/.t->61},{394,N[creeprate]/.t->394},{701,N[creep
rate]/.t->701},{806,N[creeprate]/.t->806}}
{{61,0.00392157},{394,0.00091954},{701,0.000539084},{806,0.000472255}}
GRAFcreepratedata
=ListPlot[creepratedata,PlotStyle->PointSize[0.02],AxesLabel-> {"t
[anni]","d $\theta$ /dt [ $^\circ$ /anno]},TextStyl->{FontFamily->"Times",FontSize->12}]
```

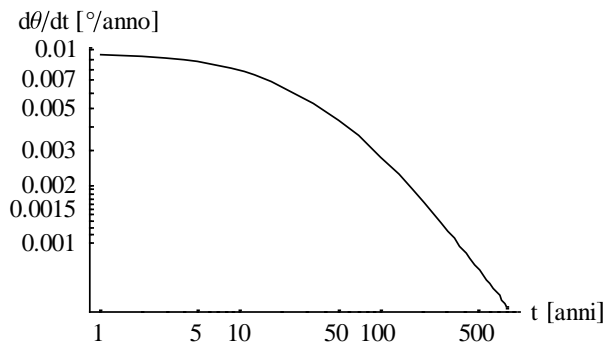


```
GRAFvelocita=Show[GRAFcreeprate,GRAFcreepratedata]
```

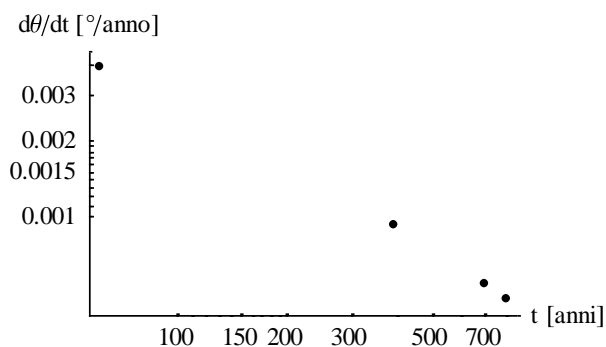


Valutazione della velocità di rotazione $d\theta/dt$ nel tempo IN SCALA LOGARITMICA

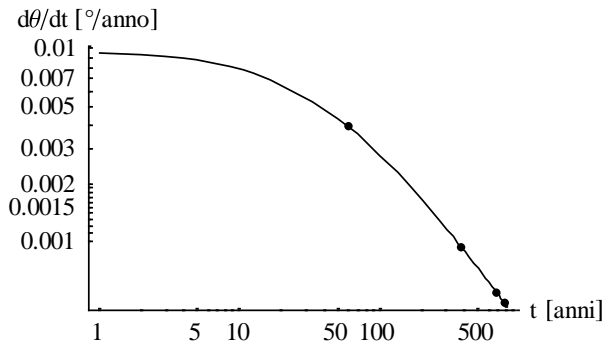
```
<<Graphics`Graphics`
dθdtlog1=LogLogPlot[creeprate, {t,1,810},PlotStyle → {Thickness[.005]},
AxesLabel→ {"t [anni]", "dθ/dt
[°/anno]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```



```
dθdtlog2=LogLogListPlot[creepratedata,PlotRange →
{0.0004,0.0045},PlotStyle→PointSize[0.02],PlotRange→All,AxesLabel→ {"t
[anni]", "dθ/dt [°/anno]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```

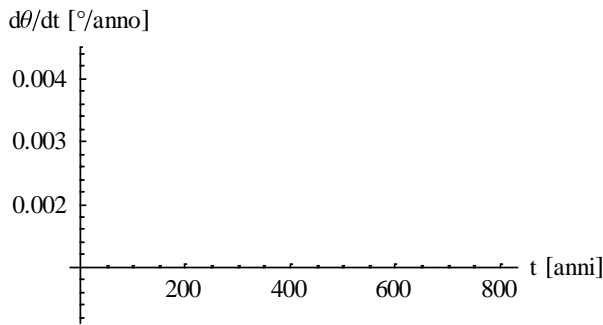


```
dθdtlog3=Show[dθdtlog1,dθdtlog2]
```

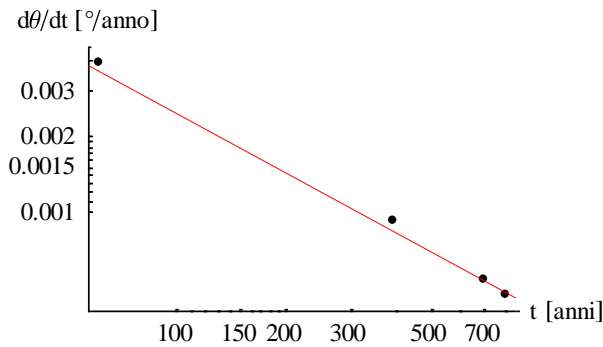


Interpolazione dei dati con una retta per ricavare il PARAMETRO $m = 0.78$

```
retta=-m t+b/.{m → 0.78,b→-1.05};
grretta= Plot[retta,{t, 0, 810},PlotRange → {0.0001,0.0045},PlotStyle →
{Thickness[.005],RGBColor[1,0,0]}, AxesLabel→ {"t [anni]","dθ/dt
[°/anno]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```



```
dθdtlog082=Show[dθdtlog2,grretta]
```



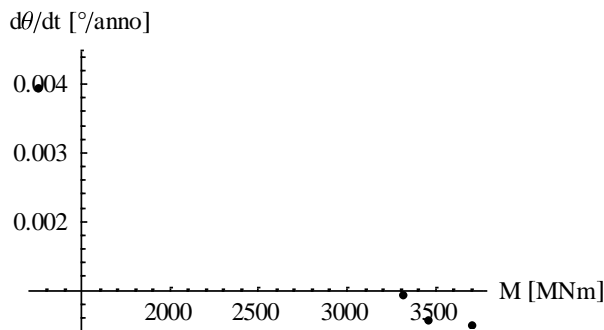
(* nell'elemento di volume m è la pendenza delle analoghe rette ma a tensione deviatorica costante *)

Rappresentazione della velocità di rotazione in funzione del momento esterno ($M = W h \theta$), corrispondenti ai dati della torre

```
creepatemomdata={ {92*30.6*0.45,N[creepate]/.t→61},
{92*30.6*1.18,N[creepate]/.t→394}, {92*30.6*1.23,N[creepate]/.t→701},
{92*30.6*1.32,N[creepate]/.t→806} }

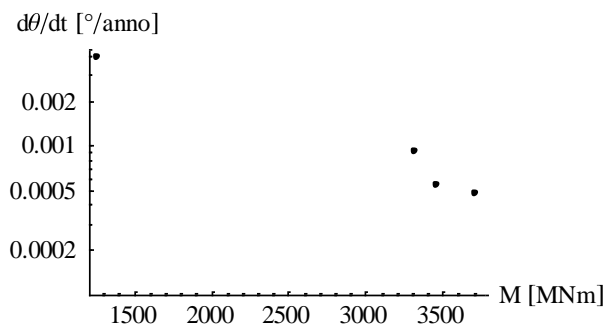
{{1266.84,0.00392157},{3321.94,0.00091954},{3462.7,0.000539084},{3716.06,0.000472255}}
```

```
dθdtM=ListPlot[creepratemomdata,PlotRange → {0.0004,0.0045},
PlotStyle→PointSize[0.02], AxesLabel→ {"M [MNm]", "dθ/dt [°/anno]"},
TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```



Rappresentazione della velocità di rotazione in funzione del momento esterno ($M = W h \theta$) in SCALA SEMILOGARITMICA, corrispondenti ai dati della torre, da cui teoricamente si ricavano i PARAMETRI A e α

```
<<Graphics`Graphics`
logdθdtM=LogListPlot[creepratemomdata, PlotRange → {0.0001,0.0045},
PlotStyle→PointSize[0.02], AxesLabel→ {"M [MNm]", "dθ/dt [°/anno]"},
TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```

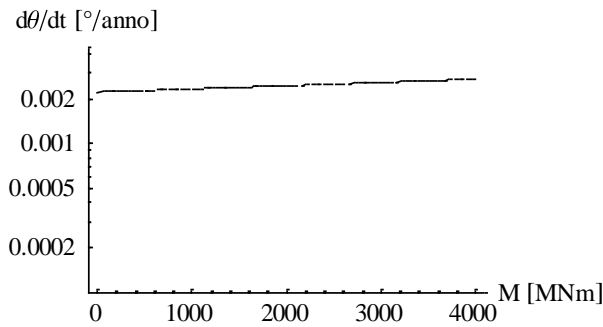


Utilizzo della formula di Singh e Mitchell 1968 per creare le rette $\ln(d\theta/dt)-M$ (una per ogni istante di tempo, cioè una per ogni dato della torre) da cui ricavare i parametri A e α come per l'elemento di volume (α è la pendenza delle rette, A sarebbe l'intercetta della retta corrispondente al tempo di riferimento $t_i = 1$ anno)

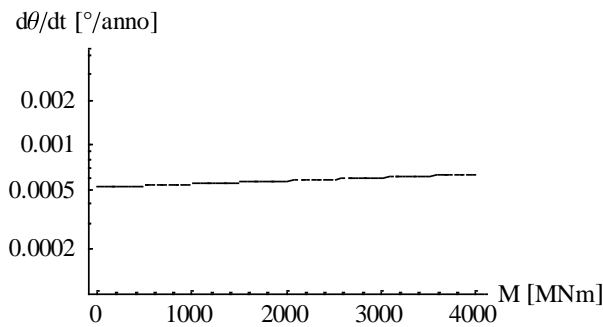
(*ricordandosi che $d\theta/dt$ dipende dalla funzione di fitting e quindi dal parametro t_0 *)

DATO 1

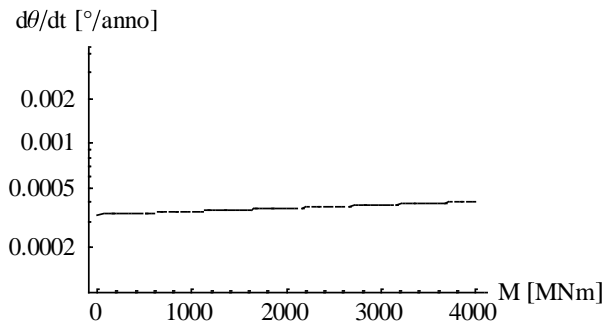
```
singhmittchell1=A Exp[α M] (ti/t)^m /.{α
→0.00005,A→0.055,m→0.78,ti→1,θ→0.45,t→61};
N[singhmittchell1]/.M→(1267) (* da confrontare con creepratemomdata *)
0.00237311
formulal= LogPlot[singhmittchell1,{M, 0, 4000},PlotRange → {0.0001,0.0045},
PlotStyle→ {Dashing[{0.02,0.01}],Thickness[.003]}, AxesLabel→ {"M
[MNm]", "dθ/dt [°/anno]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```


**DATO 2**

```
singhmittchell2=A Exp[α M] (ti/t)^m /.α
→0.00005,A→0.055,m→0.78,ti→1,θ→1.18,t→394};
N[singhmittchell2]/.M→(3322)      (* da confrontare con creepratemomdata *)
0.000613779
formula2= LogPlot[singhmittchell2,{M, 0, 4000},PlotRange →
{0.0001,0.0045},PlotStyle → {Dashing[{0.02,0.01}],Thickness[.003]}, AxesLabel→
{"M [MNm]","dθ/dt [°/anno]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```

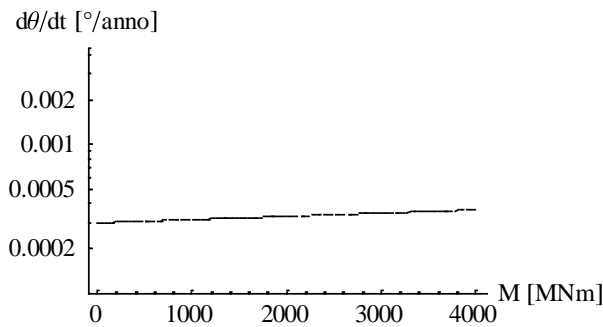
**DATO 3**

```
singhmittchell3=A Exp[α M] (ti/t)^m /.α
→0.00005,A→0.055,m→0.78,ti→1,θ→1.23,t→701};
N[singhmittchell3]/.M→(3463)      (* da confrontare con creepratemomdata *)
0.000394367
formula3= LogPlot[singhmittchell3,{M, 0, 4000},PlotRange →
{0.0001,0.0045},PlotStyle → {Dashing[{0.02,0.01}],Thickness[.003]}, AxesLabel→
{"M [MNm]","dθ/dt [°/anno]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```

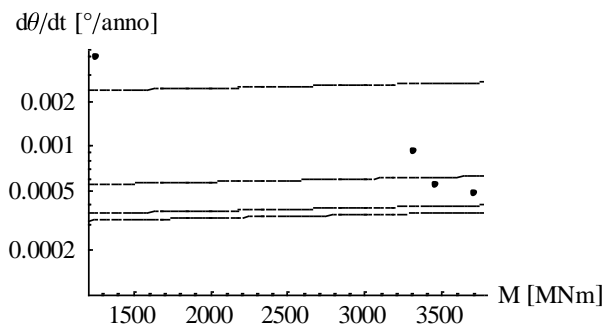


DATO 4

```
singhmittchell4=A Exp[α M] (ti/t)^m /.{α
→0.00005,A→0.055,m→0.78,ti→1,θ→1.32,t→806};
N[singhmittchell4]/.M→(3716) (* da confrontare con creepratemomdata *)
0.00035819
formula4= LogPlot[singhmittchell4,{M,0,4000}, PlotRange →
{0.0001,0.0045},PlotStyle → {Dashing[{0.02,0.01}],Thickness[.003]}, AxesLabel→
{"M [MNm]", "dθ/dt [°/anno]"},TextStyl→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```

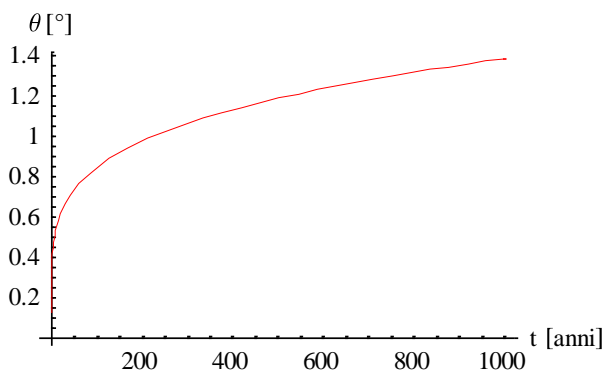


```
Show[logdθdtM, formula1, formula2, formula3, formula4]
```

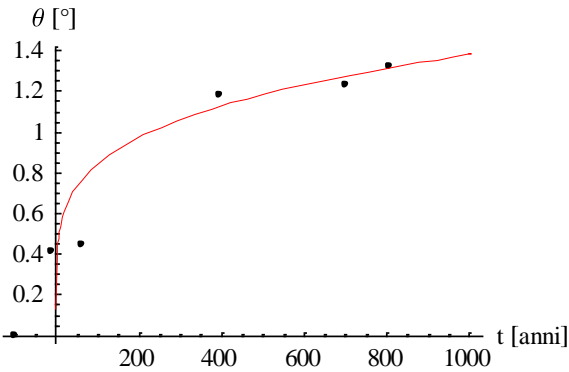


APPLICAZIONE DELLA FORMULA RICAIVATA INTEGRANDO LA RELAZIONE DI SINGH E MITCHELL CON MOMENTO VARIABILE

```
logitmod = Log[-α A W h (1+W h/k) (ti^m) (t^(1-m)) / (1-m)+E^(-α W h θ)] / (-α W
h) /. {ti →1, α →0.00005,A→0.055,m→0.78};
rotaztempo= Plot[logitmod, {t,0,1000}, PlotStyle → {Thickness[.005],
RGBColor[1,0,0]}, AxesLabel→{"t [anni]", "θ [°]"},
TextStyl→{FontFamily→"Times", FontSize→12}]
```



```
grafinale =Show[GRAFcreepdata,rotaztempo]
```



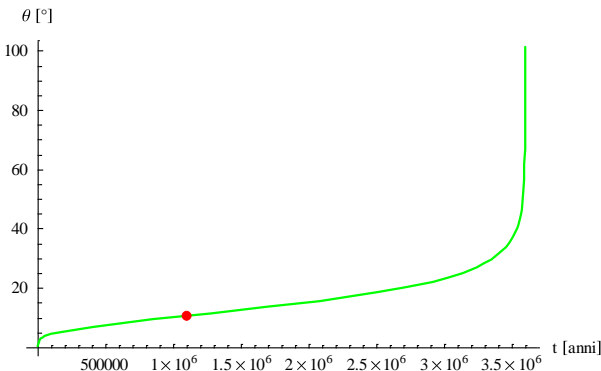
```
logitmod /. t -> 701 (* nel 1901 θ=1.23° *)
1.27664
logitmod /. t -> 806 (* nel 2006 θ=1.32° *)
1.31666
```

Calcolo l'asintoto all'infinito

```
tf1=(((1-m)E^(-α W h θ0))/(α A W h (1+W h/k) (ti^m) ))^(1/(1-m))/. { α
->0.00005,A->0.055,m->0.78, ti -> 1}
3.60062 × 106
```

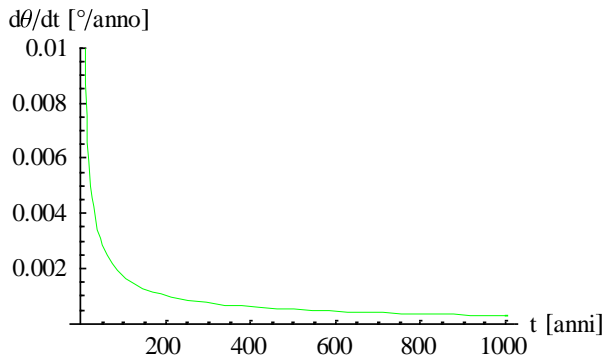
Calcolo il punto di flesso

```
derivataseconda=D[logitmod,{ t,2}];
Simplify[derivataseconda];
tf2=FindRoot[derivataseconda==0,{ t,10000}]
{t -> 1.16385 × 106}
θtf2= Log[-α A W h (1+W h/k) (ti^m) (t^(1-m))/(1-m)+E^(-α W h θ0)]/(-α W h) /.
{ti ->1,t ->1.1*10^6, α ->0.00005,A->0.055,m->0.78}
10.5527
flesso={1.1*10^6,10.5};
rotaztempobis= Plot[logitmod, {t,0,10000000}, PlotStyle ->
{Thickness[.005],RGBColor[0,1,0]}, Epilog-> {PointSize[.02],Hue[.0],
Point[flesso]}, AxesLabel-> {"t [anni]","θ [°]"},
TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}]
```

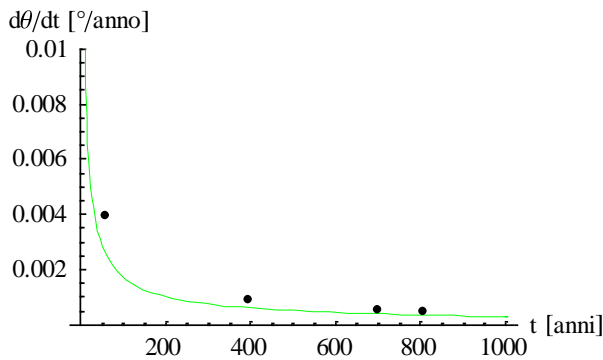


Valutazione della velocità di rotazione nel tempo a partire da questa nuova formulazione

```
creeprate=D[logitmod,t];(*velocità di rotazione in °/anno*)
graficovelocità= Plot[creeprate,{t, 0, 1000},PlotRange-> {0,0.01}, PlotStyle ->
{Thickness[.005],RGBColor[0,1,0]}, AxesLabel-> {"t [anni]","dθ/dt
[°/anno]"},TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}]
```



```
veltempo=Show[graficovelocità,GRAFcreepratedata]
```



```
creeprate /.t ->600 (* nel 1800, dovrebbe essere circa 0.15°/anno *)
0.0004507
creeprate/.t ->800 (* nel 2000, dovrebbe essere circa 0.11°/anno *)
0.000364228
```

A.5 NOTEBOOK DELLA TORRE DEGLI ASINELLI

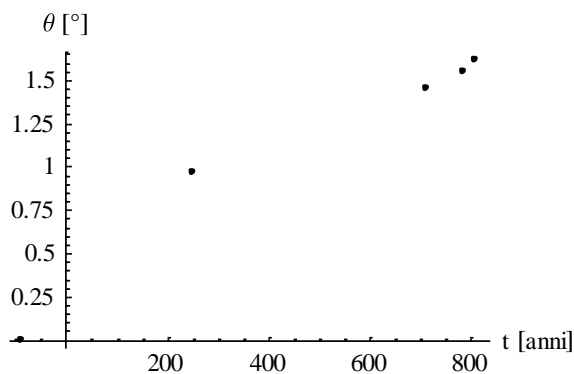
Caratteristiche principali della Torre

```
W=73; (* peso stimato della torre in MN *)
h=47; (* altezza del baricentro della torre in m *)
k=400000; (* rigidezza rotazionale in MNm/° *)
θ0=0.1; (* imperfezione iniziale in ° *)
```

Dati misurati rotazione-tempo in gradi

```
creepdata ={{-90,0},{250,0.97},{712,1.45},{785,1.55},{809,1.62}};
```

```
GRAFcreepdata =ListPlot[creepdata, PlotStyle->PointSize[0.015],AxesLabel->{"t
[anni]","θ [°]"},TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}]
```

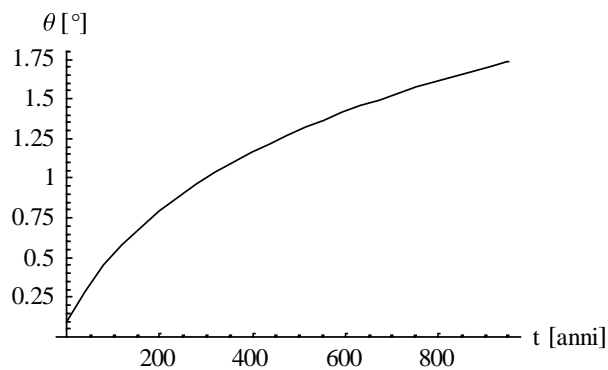


(* t = 0 nel 1200 *)

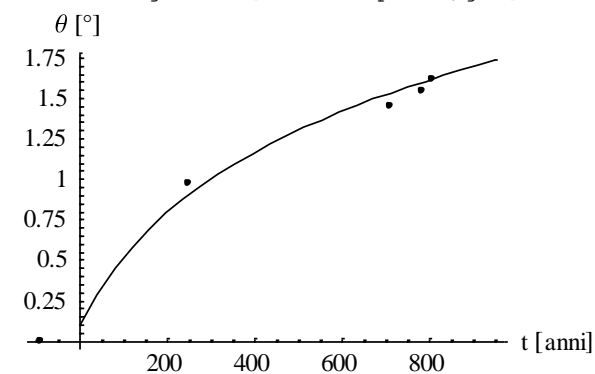
Semplice fitting dei dati della torre con funzione logaritmica

```
fitting = 0.82Log[1+t/t0]+ theta0/.{t0 ->150};
```

```
gr1 = Plot[fitting,{t, 0, 950},PlotRange -> {0,1.8}, PlotStyle ->
{Thickness[.005]}, AxesLabel-> {"t [anni]","theta [degrees]"},
TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}] (* t = 0 nel 1200 *)
```



```
GRAFFitting =Show[GRAFcreepdata,gr1]
```



Verifica della correttezza del fitting

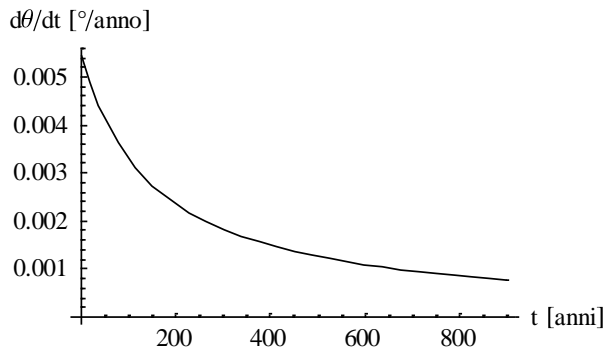
```
N[fitting]/.t->250(* nel 1450 theta=0.97 degrees *)
0.90428
N[fitting]/.t->712(* nel 1912 theta=1.45 degrees *)
1.53387
N[fitting]/.t->809(* nel 2009 theta=1.62 degrees *)
1.62131
```

Valutazione della velocità di rotazione $d\theta/dt$ nel tempo a partire dalla curva di fitting

```

creeprate=D[fitting,t];
GRAFcreeprate=Plot[creeprate,{t,0,900},PlotStyle->{Thickness[.005]},
AxesLabel->{"t [anni]","dθ/dt [°/anno]"},
TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}>(* t = 0 nel 1200 *)

```



```

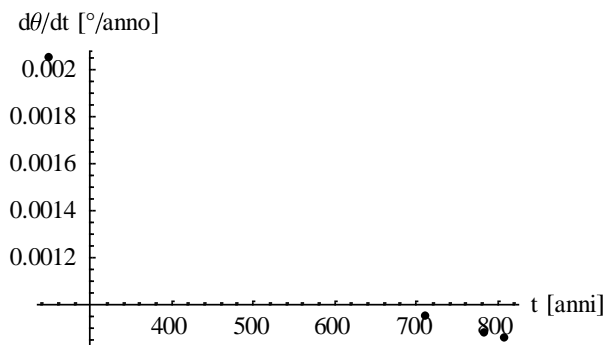
creepratedata={ {250,N[creeprate]/.t->250}, {712,N[creeprate]/.t->712}, {785,N[creeprate]/.t->785}, {809,N[creeprate]/.t->809}
{{250,0.00205}, {712,0.000951276}, {785,0.000877005}, {809,0.000855057}}

```

```

GRAFcreepratedata=ListPlot[creepratedata,PlotStyle->PointSize[0.02],
AxesLabel->{"t [anni]","dθ/dt [°/anno]"},
TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}

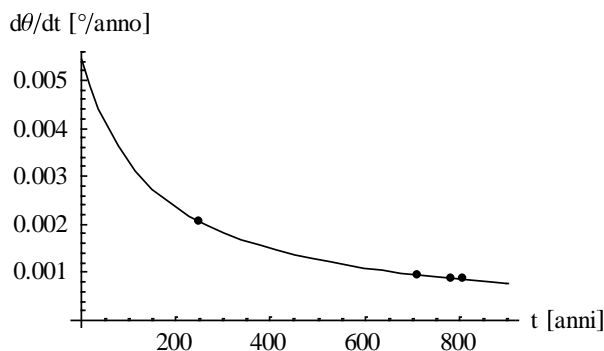
```



```

GRAFvelocita=Show[GRAFcreeprate,GRAFcreepratedata]

```

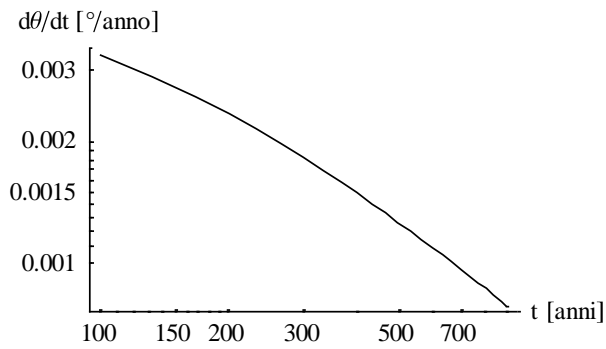


Valutazione della velocità di rotazione $d\theta/dt$ nel tempo IN SCALA LOGARITMICA

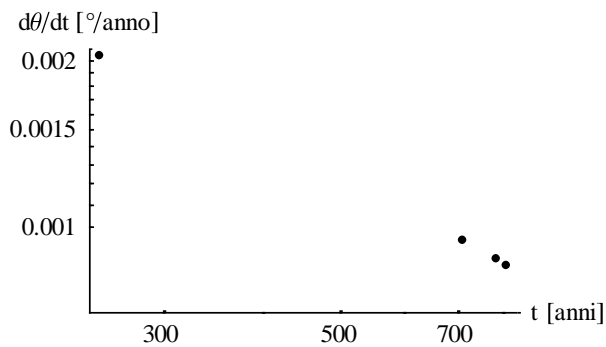
```

<<Graphics`Graphics`
dθdtlogl=LogLogPlot[creeprate,{t,100,900},PlotStyle->{Thickness[.005]},
AxesLabel->{"t [anni]","dθ/dt [°/anno]"},
TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}

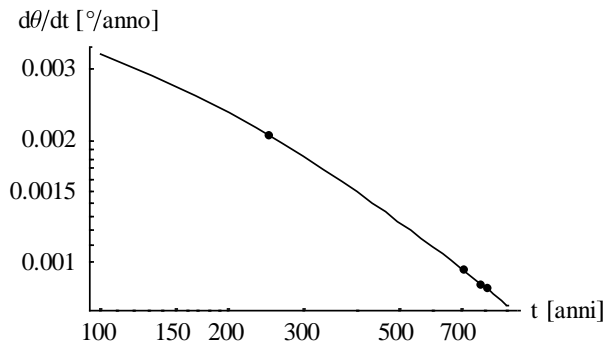
```



```
dθdtlog2=LogLogListPlot[creepratedata,PlotRange →
{0.0007,0.0021},PlotStyle→PointSize[0.02],AxesLabel→ {"t [anni]","dθ/dt
[°/anno]"}, TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```

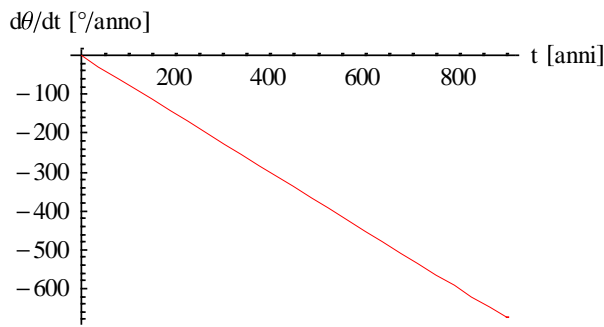


```
dθdtlog3=Show[dθdtlog1,dθdtlog2]
```

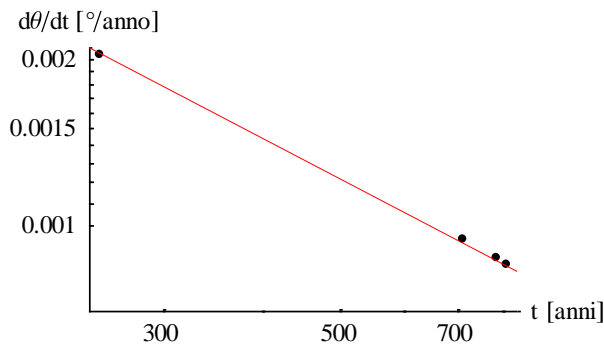


Interpolazione dei dati con una retta per ricavare il PARAMETRO m

```
retta=-m t+b/.{m → 0.75,b→-0.89};
grretta= Plot[retta,{t,0, 900},PlotStyle → {Thickness[.005],RGBColor[1,0,0]},
AxesLabel→ {"t [anni]","dθ/dt [°/anno]"},
TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```



dθdtlog=Show[dθdtlog2,grretta]



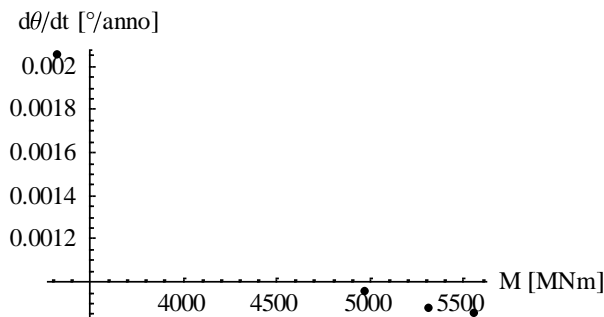
(* nell'elemento di volume m è la pendenza delle analoghe rette ma a tensione deviatorica costante *)

Rappresentazione della velocità di rotazione in funzione del momento esterno ($M = W h \theta$), corrispondenti ai dati della torre

```
creepratemomdata={ {73*47*0.97,N[creeprate]/.t->250}, {73*47*1.45,N[creeprate]/.t->712}, {73*47*1.55,N[creeprate]/.t->785}, {73*47*1.62,N[creeprate]/.t->809} }
```

```
{ {3328.07,0.00205}, {4974.95,0.000951276}, {5318.05,0.000877005}, {5558.22,0.000855057} }
```

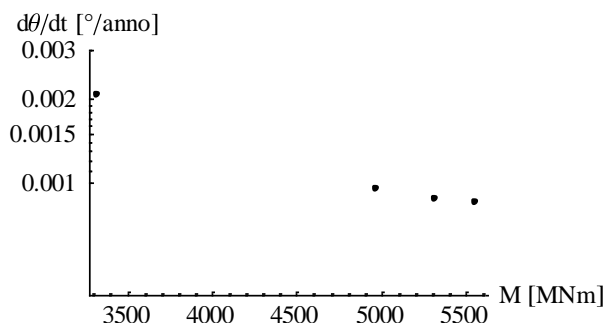
```
dθdtM=ListPlot[creepratemomdata,PlotStyle->PointSize[0.02],AxesLabel-> {"M [MNm]", "dθ/dt [°/anno]"},TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12} ]
```



Rappresentazione della velocità di rotazione in funzione del momento esterno ($M = W h \theta$) in SCALA SEMILOGARITMICA, corrispondenti ai dati della torre, da cui teoricamente si ricavano i PARAMETRI A e α

<<Graphics`Graphics`


```
logdθdtM=LogListPlot[creepatemomdata, PlotRange → {0.0004,0.003},
PlotStyle→PointSize[0.02],AxesLabel→ {"M [MNm]", "dθ/dt [°/anno]"},
TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```

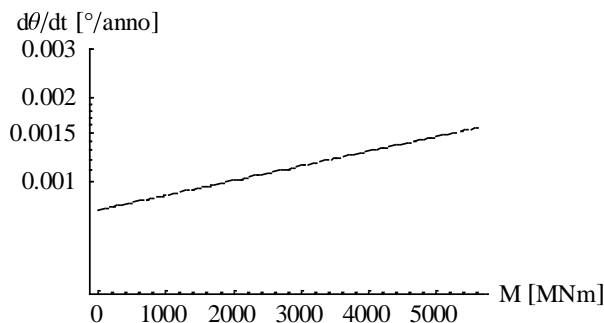


Utilizzo della formula di Singh e Mitchell 1968 per creare le rette $\ln(d\theta/dt)-M$ (una per ogni istante di tempo, cioè una per ogni dato della torre) da cui ricavare i parametri A e α come per l'elemento di volume (α è la pendenza delle rette, A sarebbe l'intercetta della retta corrispondente al tempo di riferimento $t_i = 1$ anno)

(*ricordandosi che $d\theta/dt$ dipende dalla funzione di fitting e quindi dal parametro t_0 *)

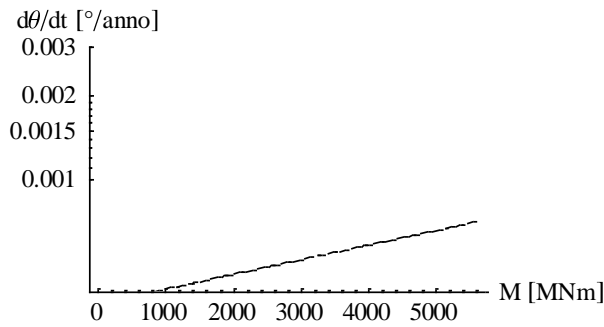
DATO 1

```
singhmittchell1=A Exp[α M] (ti/t)^m /.{α
→0.00012,A→0.05,m→0.75,ti→1,θ→0.97,t→250};
N[singhmittchell1]/.M→(3328) (* valori di M e dθ/dt da confrontare con
creepatemomdata *)
0.00118565
formula1= LogPlot[singhmittchell1,{M, 0, 5600}, PlotRange →
{0.0004,0.003},PlotStyle→ {Dashing[{0.02,0.01}],Thickness[.003]}, AxesLabel→
{"M [MNm]", "dθ/dt [°/anno]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```



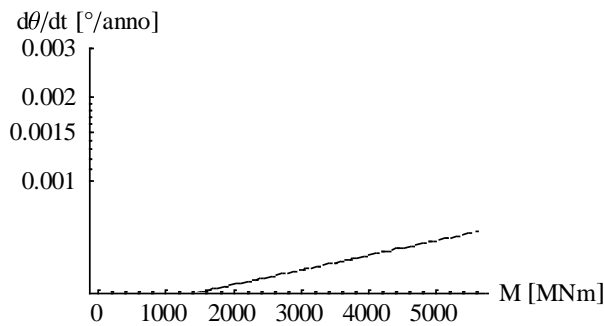
DATO 2

```
singhmittchell2=A Exp[α M] (ti/t)^m /.{α
→0.00012,A→0.05,m→0.75,ti→1,θ→1.45,t→712};
N[singhmittchell2]/.M→(4975) (* valori di M e dθ/dt da confrontare con
creepatemomdata *)
0.000658998
formula2= LogPlot[singhmittchell2,{M, 0, 5600},PlotRange →
{0.0004,0.003},PlotStyle→ {Dashing[{0.02,0.01}],Thickness[.003]}, AxesLabel→
{"M [MNm]", "dθ/dt [°/anno]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```



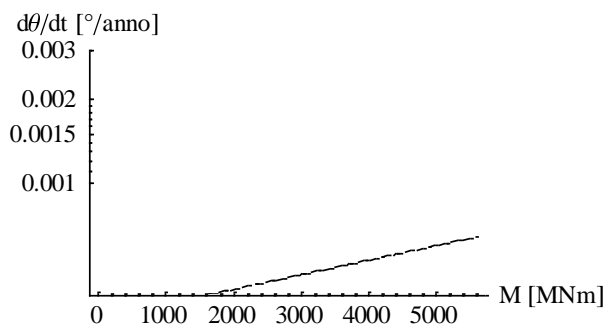
DATO 3

```
singhmittchell13=A Exp[α M] (ti/t)^m /.{α
→0.00012,A→0.05,m→0.75,ti→1,θ→1.55,t→785};
N[singhmittchell12]/.M→ (5318)      (* valori di M e dθ/dt da confrontare con
creepratemomdata *)
0.000686688
formula3= LogPlot[singhmittchell13,{M, 0, 5600},PlotRange →
{0.0004,0.003},PlotStyle → {Dashing[{0.02,0.01}],Thickness[.003]}, AxesLabel→
{"M [MNm]","dθ/dt [°/anno]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```

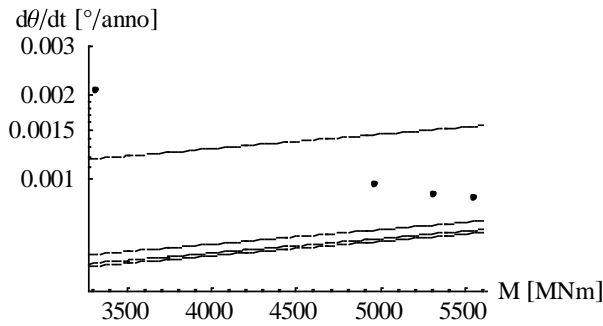


DATO 4

```
singhmittchell4=A Exp[α M] (ti/t)^m /.{α
→0.00012,A→0.05,m→0.75,ti→1,θ→1.62,t→809};
N[singhmittchell4]/.M→ (5558)      (* valori di M e dθ/dt da confrontare con
creepratemomdata *)
0.000642193
formula4= LogPlot[singhmittchell4,{M, 0, 5600},PlotRange →
{0.0004,0.003},PlotStyle → {Dashing[{0.02,0.01}],Thickness[.003]}, AxesLabel→
{"M [MNm]","dθ/dt [°/anno]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```



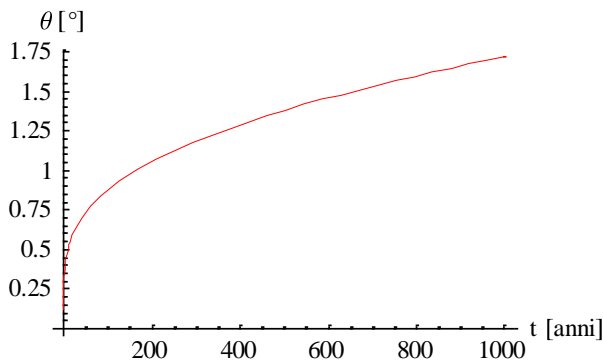
```
Show[logdθdtM, formula1, formula2, formula3, formula4]
```



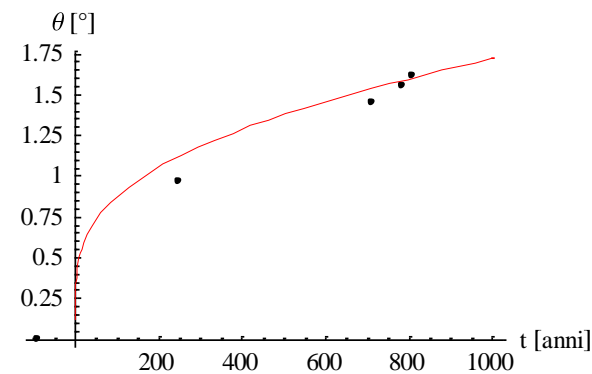
APPLICAZIONE DELLA FORMULA RICAIVATA INTEGRANDO LA RELAZIONE DI SINGH E MITCHELL CON MOMENTO VARIABILE

```
logitmod = Log[-α A W h (1+W h/k) (ti^m) (t^(1-m))/(1-m)+E^(-α W h θ)]/(-α W h) /. {ti ->1, α ->0.00012,A->0.05,m->0.75};
```

```
rotaztempo= Plot[logitmod, {t,0,1000}, PlotStyle -> {Thickness[.005], RGBColor[1,0,0]}, AxesLabel-> {"t [anni]", "θ [°]"}, TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}]
```



```
grafinale =Show[GRAFCreepdata,rotaztempo]
```



```
logitmod /. t-> 712 (* nel 1912 θ=1.45° *)
1.53899
logitmod /. t-> 809 (* nel 2009 θ=1.62° *)
1.60355
```

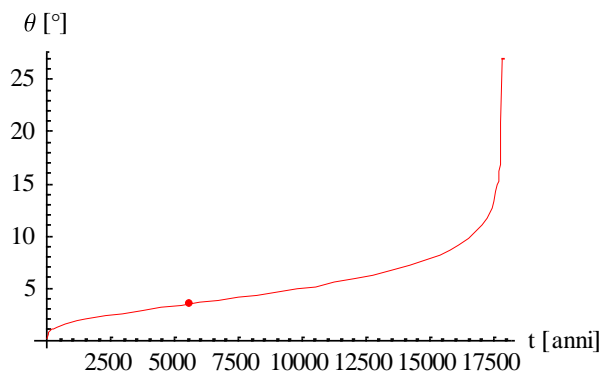
Calcolo l'asintoto all'infinito

```
tf1=((1-m)E^(-α W h θ0))/(α A W h (1+W h/k) (ti^m) )^(1/(1-m))/ . { α
→0.00012,A→0.05,m→0.75, ti → 1}
17828.4
```

Calcolo il punto di flesso

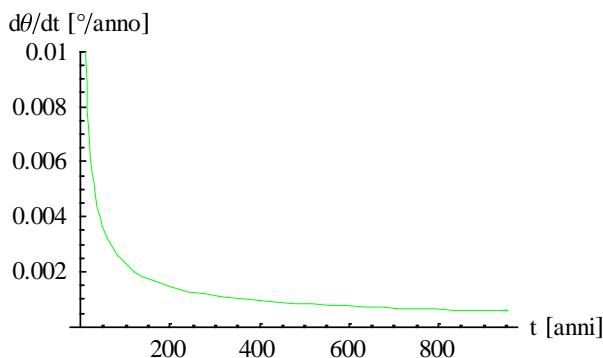
```
derivataseconda=D[logitmod,{ t,2}];
Simplify[derivataseconda];
tf2=FindRoot[derivataseconda==0,{ t,1000}]
{t→5641.01}
θtf2= Log[-α A W h (1+W h/k) (ti^m) (t^(1-m))/(1-m)+E^(-α W h θ0)]/(-α W h) /.
{ti →1,t →5641,α →0.00012,A→0.05,m→0.75}
3.46708
flesso={5641,3.47};
```

```
rotaztempobis= Plot[logitmod, {t,0,18000}, PlotStyle →
{Thickness[.005],RGBColor[1,0,0]}, Epilog→
{PointSize[.02],Hue[.0],Point[flesso]},AxesLabel→ {"t [anni]","θ [°]"},
TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```

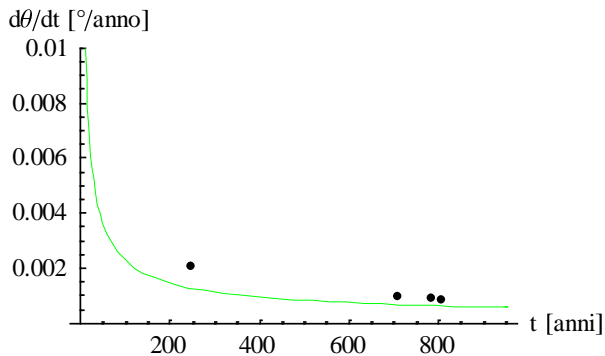


Valutazione della velocità di rotazione nel tempo a partire da questa nuova formulazione

```
creerate=D[logitmod,t];(*velocità di rotazione in °/anno*)
graficovelocità= Plot[creerate,{t, 0, 950},PlotRange→ {0,0.01}, PlotStyle →
{Thickness[.005],RGBColor[0,1,0]}, AxesLabel→ {"t [anni]","dθ/dt
[°/anno]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```



```
veltempo=Show[graficovelocità,GRAFcreepratedata]
```



```
creeprate/.t ->800 (* nel 2000, dovrebbe essere circa 0.0017°/anno *)
0.000647218
```

A.6 NOTEBOOK DELLA TORRE GARISENDA

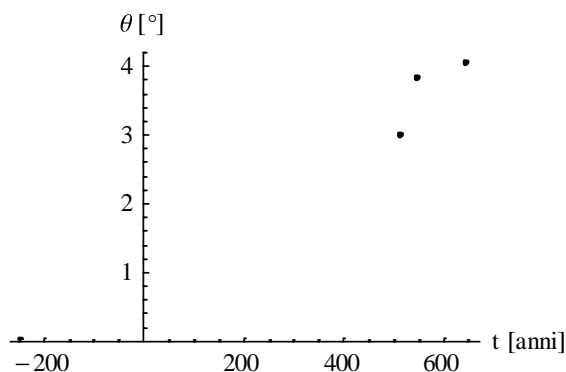
Caratteristiche principali della Torre

```
W=42; (* peso stimato della torre in MN *)
h=25; (* altezza del baricentro della torre in m *)
k=400000; (* rigidezza rotazionale in MNm/° *)
θ0=1; (* imperfezione iniziale in ° *)
```

Dati misurati rotazione-tempo in gradi

```
creepdata = {{-243,0}, {515,3.0}, {549,3.83}, {646,4.05}}; (* t = 0 nel 1353 *)
```

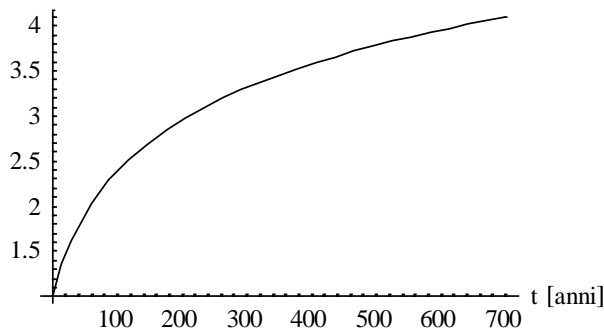
```
GRAFcreepdata =ListPlot[creepdata, PlotRange->
{0,4.2},PlotStyle->PointSize[0.015],AxesLabel-> {"t [anni]","θ [°]"},
TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}]
(* t = 0 nel 1353 *)
```



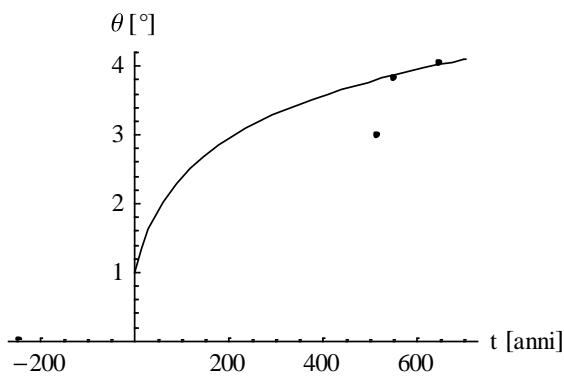
Semplice fitting dei dati della torre con funzione logaritmica

```
fitting = Log[1+t/t0]+ θ0/.{t0 ->33};
```

```
gr1 = Plot[fitting,{t, 0,700}, PlotStyle -> {Thickness[.005]}, AxesLabel-> {"t
[anni]", "θ [°]"},TextStylе->{FontFamily->"Times",FontSize->12}} (* t = 0 nel 1353*)
θ[°]
```



```
GRAFfitting =Show[GRAFcreepdata,gr1]
```

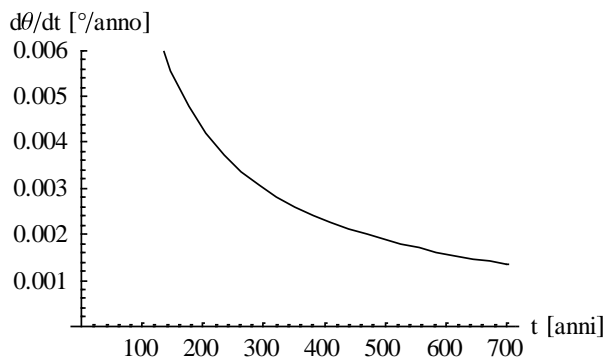


Verifica della correttezza del fitting

```
N[fitting]/.t->549 (* nel 1902 θ=3.83° *)
3.86996
N[fitting]/.t->646 (* nel 2006 θ=4.05° *)
4.02411
```

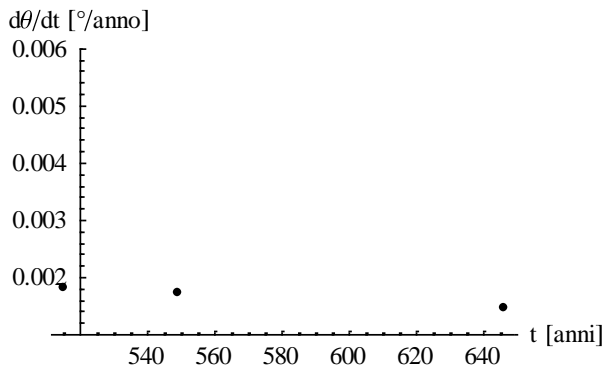
Valutazione della velocità di rotazione dθ/dt nel tempo a partire dalla curva di fitting

```
creeprate=D[fitting,t];
GRAFcreeprate= Plot[creeprate,{t, 0, 700},PlotRange-> {0,0.006}, PlotStyle ->
{Thickness[.005]}, AxesLabel-> {"t [anni]", "dθ/dt [°/anno]"},
TextStylе->{FontFamily->"Times",FontSize->12}} (* t = 0 nel 1353 *)
```

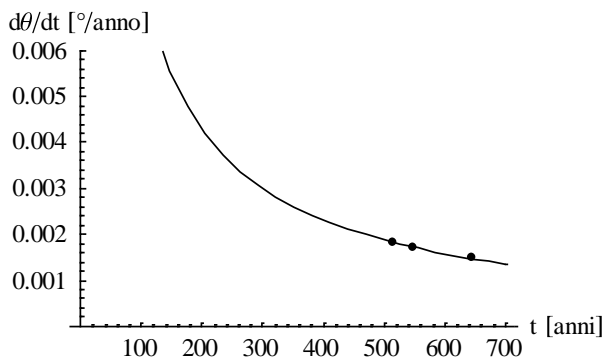


```
creepratedata={{515,N[creeprate]/.t->515},{549,N[creeprate]/.t->549},{646,N[creep
rate]/.t->646}}
{{515,0.00182482},{549,0.00171821},{646,0.00147275}}
```

```
GRAFcreepratedata =ListPlot[creepratedata,PlotRange->{0.001,0.006},
PlotStyle->PointSize[0.02],AxesLabel->{"t [anni]","dθ/dt [°/anno]"},
TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}]
```

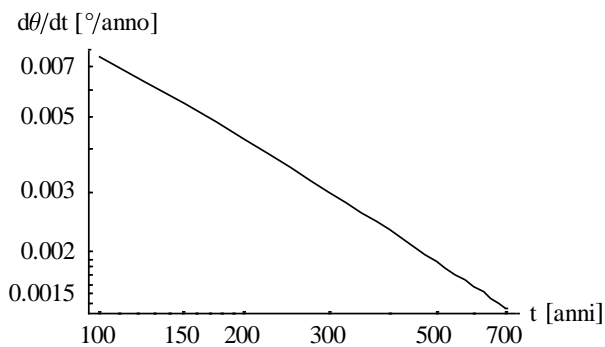


```
GRAFvelocita=Show[GRAFcreeprate,GRAFcreepratedata]
```

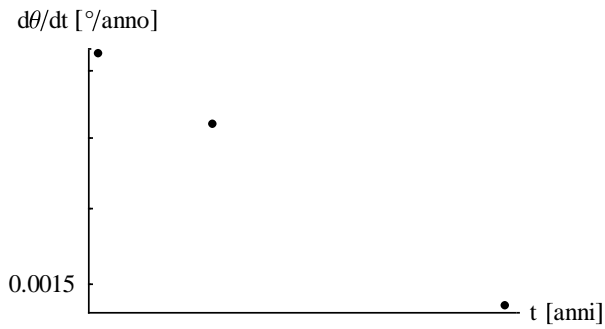


Valutazione della velocità di rotazione $d\theta/dt$ nel tempo IN SCALA LOGARITMICA

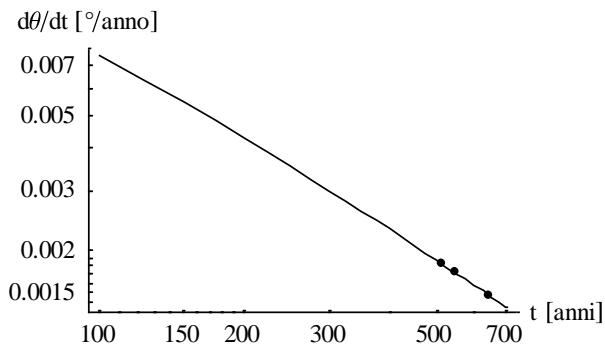
```
<<Graphics`Graphics`
dθdtlog1=LogLogPlot[creeprate, {t,100,700},PlotStyle->{Thickness[.005]},
AxesLabel->{"t [anni]","dθ/dt [°/anno]"},
TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}]
```



```
dθdtlog2=LogLogListPlot[creepratedata,PlotStyle->PointSize[0.02],PlotRange->All,
AxesLabel->{"t [anni]","dθ/dt [°/anno]"},
TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}]
```



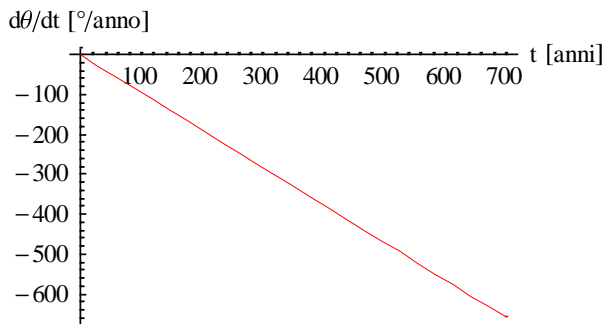
```
dθdtlog3=Show[dθdtlog1,dθdtlog2]
```



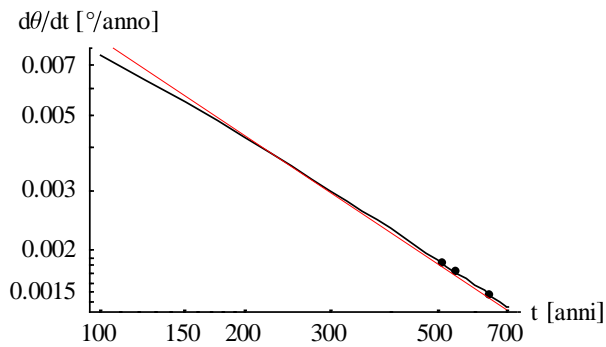
[Interpolazione dei dati con una retta per ricavare il PARAMETRO \$m = 0.78\$](#)

```
retta=-m t+b/.{m -> 0.94,b->-0.2};
```

```
grretta= Plot[retta,{t, 0, 700},PlotStyle -> {Thickness[.005],RGBColor[1,0,0]},
AxesLabel-> {"t [anni]", "dθ/dt
[°/anno]"},TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}]
```



```
dθdtlog=Show[dθdtlog3,grretta]
```

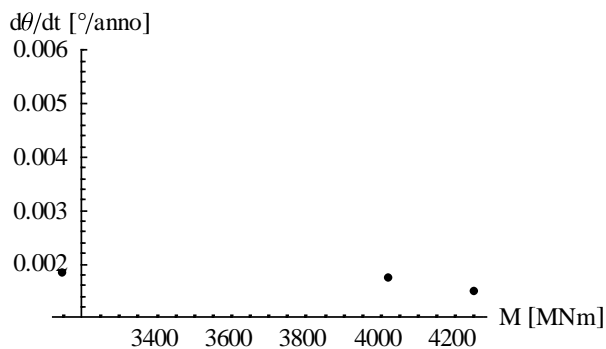



(* nell'elemento di volume m è la pendenza delle analoghe rette ma a tensione deviatorica costante *)

Rappresentazione della velocità di rotazione in funzione del momento esterno ($M = W h \theta$), corrispondenti ai dati della torre

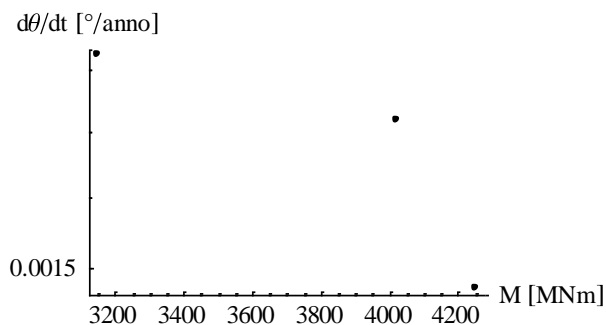
```
creepratemomdata={ {42*25*3,N[creeprate]/.t->515}, {42*25*3.83,N[creeprate]/.t->549}, {42*25*4.05,N[creeprate]/.t->646} }
{{3150,0.00182482}, {4021.5,0.00171821}, {4252.5,0.00147275}}
```

```
dθdtM=ListPlot[creepratemomdata,PlotRange->{0.001,0.006},
PlotStyle->PointSize[0.02],AxesLabel->{"M [MNm]","dθ/dt [°/anno]"},
TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}]
```



Rappresentazione della velocità di rotazione in funzione del momento esterno ($M = W h \theta$) in SCALA SEMILOGARITMICA, corrispondenti ai dati della torre, da cui teoricamente si ricavano i PARAMETRI A e α

```
<<Graphics`Graphics`
logdθdtM=LogListPlot[creepratemomdata,PlotStyle->PointSize[0.02],AxesLabel->
{"M [MNm]","dθ/dt [°/anno]"},TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}]
```



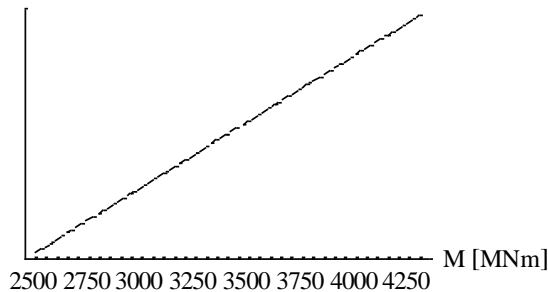
Utilizzo della formula di Singh e Mitchell 1968 per creare le rette $\ln(d\theta/dt)$ -M (una per ogni istante di tempo, cioè una per ogni dato della torre) da cui ricavare i parametri A e α come per l'elemento di volume (α è la pendenza delle rette, A sarebbe l'intercetta della retta corrispondente al tempo di riferimento $t_i = 1$ anno)

(*ricordandosi che $d\theta/dt$ dipende dalla funzione di fitting e quindi dal parametro t_0 *)

DATO 1

```
singhmittchell1=A Exp[α M] (ti/t)^m /.{ α
→0.00048,A→0.038,m→0.94,ti→1,θ→3.0,t→515};
N[singhmittchell1]/.M→(3150)      (* da confrontare con i creepratemomdata *)
0.000486786
formula1= LogPlot[singhmittchell1,{M, 2500, 4300}, PlotStyle→
{Dashing[{0.02,0.01}],Thickness[.003]}, AxesLabel→ {"M [MNm]", "dθ/dt
[°/anno]"},TextStyl→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```

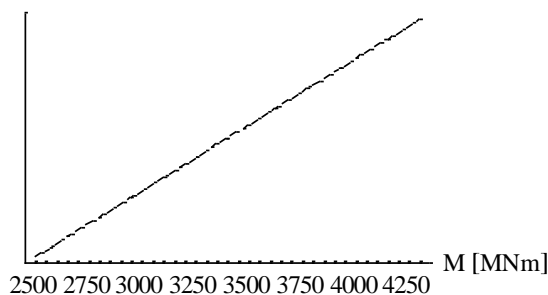
$d\theta/dt$ [°/anno]



DATO 2

```
singhmittchell2=A Exp[α M] (ti/t)^m /.{ α
→0.00048,A→0.038,m→0.94,ti→1,θ→3.83,t→549};
N[singhmittchell2]/.M→(4021)      (* da confrontare con creepratemomdata *)
0.00069632
formula2= LogPlot[singhmittchell2,{M, 2500, 4300},PlotStyle →
{Dashing[{0.02,0.01}],Thickness[.003]}, AxesLabel→ {"M [MNm]", "dθ/dt
[°/anno]"},TextStyl→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```

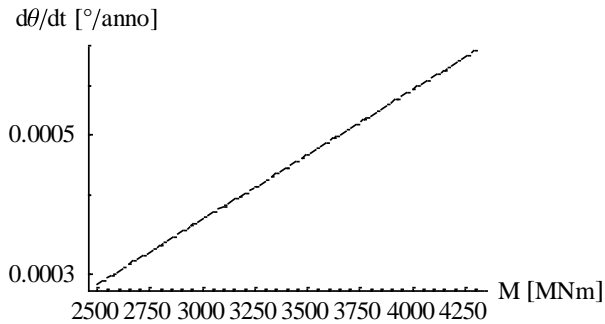
$d\theta/dt$ [°/anno]



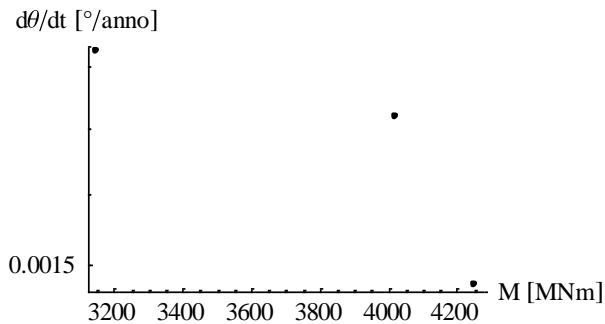
DATO 3

```
singhmittchell3=A Exp[α M] (ti/t)^m /.{ α
→0.00048,A→0.038,m→0.94,ti→1,θ→4.05,t→646};
N[singhmittchell3]/.M→(4252)      (* da confrontare con creepratemomdata *)
0.000667641
```

```
formula3= LogPlot[singhmittchell3,{M, 2500, 4300},PlotStyle →
{Dashing[{0.02,0.01}],Thickness[.003]}, AxesLabel→ {"M [MNm]", "dθ/dt
[°/anno]"},TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```

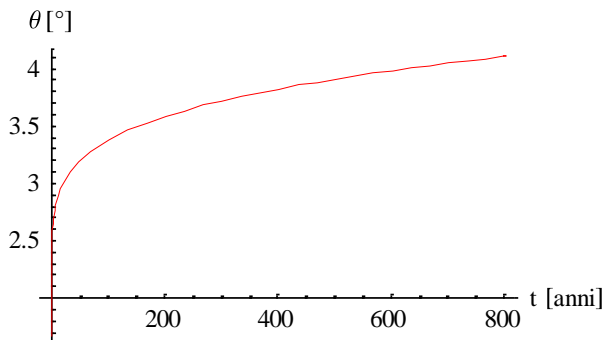


```
Show[logdθdtM, formula1, formula2, formula3]
```

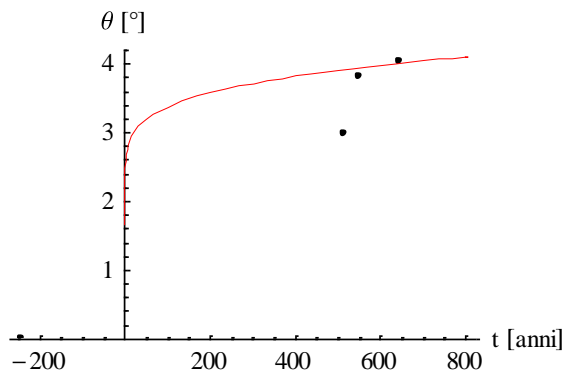


APPLICAZIONE DELLA FORMULA RICAIVATA INTEGRANDO LA RELAZIONE DI SINGH E MITCHELL CON MOMENTO VARIABILE

```
logitmod = Log[-α A W h (1+W h/k) (ti^m) (t^(1-m))/(1-m)+E^(-α W h θ0)]/(-α W
h) /. {ti →1, α →0.00048,A→0.038,m→0.94};
rotaztempo= Plot[logitmod, {t,0,800}, PlotStyle →
{Thickness[.005],RGBColor[1,0,0]}, AxesLabel→ {"t [anni]", "θ [°]"},
TextStyle→{FontFamily→"Times",FontSize→12}]
```



```
grafinale =Show[GRAFcreepdata, rotaztempo]
```



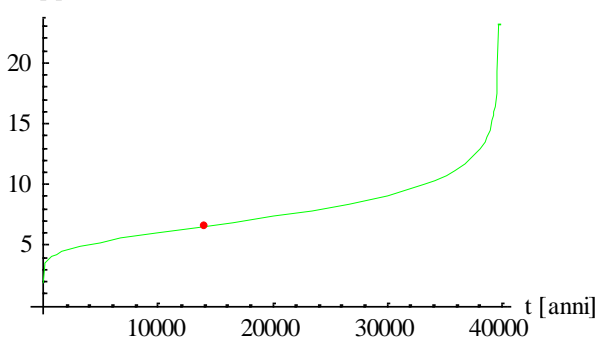
```
logitmod /. t -> 549 (* nel 1902 theta=3.83° *)
3.94645
logitmod /. t -> 646 (* nel 1999 theta=4.05° *)
4.01406
```

Calcolo l'asintoto all'infinito

```
tf1=(((1-m)E^(-alpha W h theta))/(alpha A W h (1+W h/k) (ti^m) ))^(1/(1-m))/. {
alpha -> 0.00048,A->0.038,m->0.93, ti -> 1}
79070.4
```

Calcolo il punto di flesso

```
derivataseconda=D[logitmod,{ t,2}];
Simplify[derivataseconda];
tf2=FindRoot[derivataseconda==0,{ t,10000}]
{t->14148.2}
thetaf2= Log[-alpha A W h (1+W h/k) (ti^m) (t^(1-m))/(1-m)+E^(-alpha W h theta)]/(-alpha W h) /.
{ti -> 1,t ->14148, alpha ->0.00048,A->0.038,m->0.94}
6.58214
flesso={14148,6.58};
rotaztempobis= Plot[logitmod, {t,0,80000}, PlotStyle ->
{Thickness[.005],RGBColor[0,1,0]}, Epilog->
{PointSize[.02],Hue[.0],Point[flesso]},AxesLabel-> {"t [anni]","theta [°]"},
TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}]
```



Valutazione della velocità di rotazione nel tempo a partire da questa nuova formulazione

```
creepate=D[logitmod,t];(*velocità di rotazione in °/anno*)

graficovelocità= Plot[creepate,{t, 0, 700},PlotRange-> {0,0.01}, PlotStyle ->
{Thickness[.005],RGBColor[0,1,0]}, AxesLabel-> {"t [anni]","dtheta/dt
[°/anno]"},TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->12}]
```

