Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

PROBABILITÀ E GIOCO D'AZZARDO
Progetto interdisciplinare tra matematica ed educazione civica

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Prof.ssa
Silvia BENVENUTI

Presentata da:
Francesca BELIGNI

Anno Accademico 2021-2022

Indice

Introduzione

Cosa è per te la probabilità?

Chiunque potrebbe rispondere a questa domanda: qualcuno fresco di studi attingerebbe alla definizione classica vista negli esercizi a scuola, altri richiamerebbero il concetto di possibilità, qualcun altro direbbe "non lo so, non me lo ricordo", come se fosse necessario ricordarsi un pensiero che possiamo elaborare o ragionamento. Non siamo abituati a rispondere a queste domande in matematica, perché si sa la matematica non dà spazio alle idee personali, alla soggettività: ma non è così. Rigore e informalità, oggettivo e soggettivo, concreto e astratto sono dimensioni che quando coesistono e si intrecciano creano la matematica. Pensiamo per un secondo al concetto di numero: cosa è più concreto ma contemporaneamente più astratto?

Il mio lavoro di tesi mira a mostrare tale dualismo sfruttando il concetto di probabilità. Spesso per questioni didattiche la scuola dedica poco tempo a questa branca della matematica, finalizzando le poche lezioni solo nella risoluzione di esercizi, possibilmente simili alla Prove Invalsi, per consentire agli studenti di non lasciare in bianco tali domande durante il test. Ma la scuola non deve solo preparare gli studenti ad affrontare un test, la scuola deve insegnare a ragionare, a mettere in discussione, ad argomentare e controbattere sfruttando le conoscenze apprese.

"Probabilità e gioco d'azzardo" è un progetto didattico interdisciplinare tra Matematica ed Educazione Civica elaborato per le classi seconde del Liceo Scientifico. Introducendo il concetto di probabilità si indagano le criticità legate al gioco d'azzardo, per capire come alcuni preconcetti e intuizioni relativi alla probabilità possano influenzare l'analisi e la comprensione del gioco d'azzardo. Nel progetto la dimensione teorica non è solo utile alla comprensione dell'aspetto pratico, ma ha un ruolo a sé stante, ricco di riflessioni e multidisciplinare. La dimensione pratica è caratterizzata in piccola parte dalla risoluzione di esercizi elementari, ma principalmente dall'analisi del SuperEnalotto e della Roulette.

L'obiettivo è fornire agli studenti strumenti ed idee che saranno realmente utili in futuro, con l'aumento inevitabile delle competenze disciplinari. Metterli di fronte ad un problema e fare in modo che non siano indifferenti o passivi, ma che ognuno a proprio modo se ne renda conto e possa rifletterci spontaneamente. L'apprendimento concettuale non è in questo progetto l'obiettivo primario: probabilmente ciò che spero di lasciare agli studenti non si può valutare oggettivamente o non lo si può fare nell'immediato, ma solo con il tempo.

Questo lavoro di tesi si compone di 5 capitoli. Il primo capitolo è dedicato alla storia della probabilità: le origini romane, il problema della posta, le principali dinamiche che hanno consentito l'evoluzione del concetto di probabilità fino ad oggi e le differenti interpretazioni correlate. Particolare attenzione è rivolta all'interpretazione assiomatica, poiché a mio parere rappresenta al meglio il dualismo tra rigore e astrattezza. Segue l'analisi delle principali misconcezioni proprie degli studenti nel contesto della probabilità. Il secondo capitolo analizza la probabilità all'interno del contesto scolastico mediante l'analisi dei documenti ministeriali, di alcuni libri di testo e delle Prove Invalsi. Il terzo capitolo illustra il fenomeno del gioco d'azzardo in Italia e la sua diffusione tra gli adolescenti. Commenta ed analizza in maniera puntuale il concetto di equità nello specifico nel SuperEnalotto e nel gioco della Roulette. Riflette, infine, sulle dinamiche psicologiche ed emotive legate al gioco. Il quarto capitolo descrive attentamente il progetto didattico "Probabilità e gioco d'azzardo": vengono analizzati i questionari sottoposti agli studenti, la struttura e il contenuto delle lezioni mediante l'analisi del materiale didattico realizzato. L'ultima parte del capitolo è dedicata al racconto dell'esperienza in classe durante lo svolgimento del progetto. Il quinto capitolo propone un'analisi delle risposte e dei risultati ottenuti dai questionari, per elaborare una riflessione conclusiva in merito all'attività realizzata.

Capitolo 1

La probabilità: origini, interpretazioni e misconcezioni

Il capitolo percorre i principali eventi che hanno consentito di elaborare la definizione moderna di probabilità: le origini dell'epoca romana, la risoluzione del problema della posta fino alle moderne e differenti interpretazioni della probabilità. Vengono introdotti alcuni elementi teorici necessari per procedere nella trattazione e per presentare, infine, le principali misconcezioni relative alla probabilità.

1.1 Storia della probabilità

1.1.1 Le origini

La branca della matematica che va sotto il nome di probabilità è storicamente nata per studiare il gioco d'azzardo. Secondo l'enciclopedia Treccani il gioco d'azzardo è "un'attività ludica in cui ricorre il fine di lucro e nella quale la vincita o la perdita è in prevalenza aleatoria, avendovi l'abilità un'importanza trascurabile".

L'etimologia del sostantivo azzardo e dell'aggettivo aleatorio è, infatti, simile: entrambe le parole derivano da "dado", in arabo *az-zahr* e in latino *alea*. In effetti il gioco dei dadi è uno dei giochi d'azzardo più antichi ed è anche stato il primo su cui sono stati scritti dei trattati di probabilità [33].

Il gioco d'azzardo era già noto agli antichi Romani, anche se non era approvato ed era ammesso soltanto in occasione dei *Saturnalia*, solenni feste religiose che si celebravano verso la fine di dicembre in onore di Saturno e prevedevano manifestazioni orgiastiche, scambi di doni, abolizione delle distanze sociali con conseguente rovesciamento delle norme che regolavano la vita di comunità. Per il resto dell'anno il gioco era proibito e chi trasgrediva veniva punito con una ammenda che ammontava fino a quattro volte la posta in gioco. Le leggi contro gli *aleatores* (giocatori d'azzardo) ebbero però un'efficacia limitata, tanto che persino gli esponenti dell'élite romana si appassionarono alle scommesse. Gli stessi imperatori furono vittime della frenesia del gioco. Narra Svetonio che Augusto «non si preoccupò affatto della sua reputazione di giocatore, e continuò a giocare, senza farne mistero, perché si divertiva, fino alla vecchiaia, e non soltanto in dicembre ma anche in tutti gli altri mesi, nei giorni lavorativi e in quelli festivi». Lo storico prosegue citando una lettera che il primo imperatore romano avrebbe scritto al figlio adottivo e futuro imperatore Tiberio: «Mio caro Tiberio, abbiamo passato molto piacevolmente le Quinquatrie [feste in onore di Minerva], perché abbiamo giocato durante tutti questi giorni e abbiamo riscaldato il tavolo da gioco. Personalmente ho perduto 20.000 sesterzi, ma perché, secondo mia abitudine, sono stato un giocatore eccessivamente generoso. Se avessi preteso le poste che ho condonato a ciascuno, ne avrei vinti almeno 50.000».

Tra i giochi più diffusi a Roma vi era *par impar*, "pari e dispari": un giocatore nascondeva nel pugno noci, ossicini o sassolini e l'avversario doveva indovinare se il numero fosse pari o dispari, mentre gli spettatori potevano scommettere sulla quantità di oggetti che ciascuno teneva nella mano. Ad esso si aggiungeva anche il cosiddetto *capita aut navia*, letteralmente "teste o navi", il nostro "testa o croce", che consisteva nel lanciare in aria una moneta avente la testa di Giano bifronte sul diritto e una nave sul rovescio [5].

Era conosciuto anche il gioco degli astragali. Si trattava di ossicini di forma cuboide ricavati perlopiù dal tarso posteriore di pecore e capre, benché ne esistessero anche riproduzioni nei materiali più svariati, quali l'oro, l'avorio, il bronzo e la terracotta. Poiché i due lati estremi erano arrotondati, le facce utili al gioco, lunghe e strette, erano quattro, difformi l'una dall'altra (piane, convesse, concave e sinuose) e dunque di diverso valore [8]. Il gioco non costituiva un semplice svago in cui i fanciulli si intrattenevano durante i momenti di inattività. Numerose sono, infatti, le testimonianze che rivelano l'ardore travolgente e sfrenato che pervadeva i giovani *astragalízontes*. Attraverso le parole di Omero (Iliade XXIII, 108-114) l'ombra di Patroclo ricorda ad Achille che accecato dall'ira, nella passione del gioco della fanciullezza, aveva ucciso il figlio di Anfidamante, suo giovane compagno di giochi:

«Noi fummo
Nella tua reggia allor nudriti insieme
Che Menézio d'Opunte a Ftia menommi
Giovinetto quel dì che per la lite
Degli astragali irato e fuor di senno
D'Anfidamante a morte misi il figlio,
Mio malgrado.»

(Iliade, XXXIII, 108-114)

Il gioco consisteva nel gettare in aria quattro astragali e nello scommettere su come si sarebbero disposti, o, qualora vi fossero incisi dei numeri, nell'indovinare il totale. Il peggior tiro che potesse capitare, detto colpo del cane o dell'avvoltoio, risultava dalla combinazione di quattro facce uguali ciascuna contenente solo un uno; il migliore, il cosiddetto colpo di Venere, era dato invece da quattro astragali caduti con quattro facce diverse (1, 3, 4, 6). Naturalmente non mancavano i bari; così per tirare gli astragali divenne obbligatorio utilizzare un *fritilus*, un bussolotto semiconico che riduceva le possibilità di imbroglio. L'epigrammista Marziale ne scriveva a proposito: «La mano disonesta che sa lanciare dadi truccati se lancia tramite me non otterrà nulla».

Il gioco più diffuso, però, era il gioco dei dadi. Questi, che i romani chiamavano *tesserae*, erano in avorio, osso, bronzo o ambra e avevano come oggi i sei lati segnati da numeri. In genere si lanciavano due o tre dadi, usando il *fritilus*; il gioco più comune prevedeva il conto dei punti usciti. Il gioco dei dadi sostituì man mano quello degli astragali il cui uso si perse nel tempo. Secondo la tradizione greca antica fu Palamede, re di Eubea, ad inventare i dadi da gioco durante la guerra di Troia.

Figura 1.1: Achille e Aiace giocano ai dadi (particolare di un vaso greco del VI a.C. conservato presso i Musei Vaticani)

Altrettanto in voga era la *micatio* (dal verbo micare, "saltellare", in riferimento a digitis, "dita"), la nostra morra, in cui due persone sporgevano simultaneamente il pugno destro distendendo un certo numero di dita e cercando di indovinare nel contempo la somma delle dita distese da entrambi.

I romani benpensanti consideravano i giocatori d'azzardo alla stregua di individui loschi e pericolosi: l'oratore e filosofo Cicerone li poneva sullo stesso livello di commedianti, ruffiani o debitori, tutti appartenenti alle infime classi del popolo. Eppure, le scommesse e il gioco d'azzardo avevano luogo comunque, benché al riparo da sguardi indiscreti: proprietari di locande e taverne nascondevano spesso nel retrobottega vere e proprie bische clandestine. Il gioco veniva così associato ad altri vizi, quali l'alcol e le prostitute; al contrario dei lupanari, però, che dovevano restare chiusi fino all'ora nona (le tre del pomeriggio), le taverne e le locande avevano il vantaggio di essere aperte dalla mattina alla sera e potevano offrire dunque ospitalità ai giocatori a ogni ora del giorno [26].

Nel corso dei secoli sia la Chiesa che lo Stato vietarono con leggi e bandi la pratica del gioco, non tanto per il gioco di sorte in sé quanto per i vizi indotti che lo accompagnavano: la bestemmia e il bere combattuti soprattutto dalla Chiesa, mentre lo Stato si preoccupava dello sperpero dei beni posseduti dai giocatori e dei crimini in cui spesso erano coinvolti. Nonostante ciò, il gioco d'azzardo fu per molti secoli il passatempo preferito e i giochi andavano dai già nominati dadi alle carte e alla "zara": gioco con tre dadi in cui a turno ogni giocatore chiama un numero da 3 a 18, quindi getta i dadi. Vince chi per primo ottiene il punteggio pari al numero chiamato. Viene menzionato persino da Dante nel VI Canto del Purgatorio quale similitudine tra se stesso e i partecipanti a tale gioco.

«Quando si parte il gioco de la zara,
colui che perde si riman dolente,
repetendo le volte, e tristo impara;

con l'altro se ne va tutta la gente;
qual va dinanzi, e qual di dietro il prende,
e qual dallato li si reca a mente;

el non s'arresta, e questo e quello intende;
a cui porge la man, più non fa pressa;
e così da la calca si difende.»

(Purgatorio VI, 1-9)

Nel Rinascimento i nobili avevano tra i loro passatempi preferiti proprio i giochi d'azzardo e affidavano a studiosi del tempo il compito di risolvere i loro quesiti. Al tema del gioco dei dadi Girolamo Cardano aveva dedicato un intero trattato *De ludo aleae* (del 1525 ma pubblicato postumo del 1663) dove analizza il gioco dei dadi. Lo stesso tema venne affrontato in maniera indipendente da Galileo Galilei nell'opera *Sopra le scoperte dei dadi* del 1630 [36] in cui, su richiesta del Granduca di Toscana, calcola le probabilità delle somme ottenute lanciando 3 dadi, numerati ciascuno da 1 a 6, ottenendo che esistono 27 modi per ottenere 10 e 11 contro i 25 per il 9 e il 12.

Lo studio sistematico delle probabilità sembra dunque nato dall'esigenza di risolvere dei problemi puramente pratici legati al gioco d'azzardo.

1.1.2 Il problema della posta

Storicamente la nascita della teoria della probabilità risale al 1654 quando Blaise de Pascal e Pierre de Fermat ebbero un intenso scambio epistolare in cui affrontavano il problema di ripartizione della posta in gioco, proposto a Pascal da Antoine Gombaud, cavaliere de Méré, famoso giocatore d'azzardo. Si tratta di un problema presentato originariamente in un manoscritto anonimo del XV secolo, che ha tenuto occupati i matematici dell'epoca per molto tempo poiché non riuscivano a trovare una soluzione. Una possibile formulazione è

Due persone – A e B – decidono di giocare alcune partite e depositano la stessa somma. In ogni partita vince l'uno o l'altro dei due giocatori, i quali hanno la stessa probabilità di vincita. Si aggiudica l'intera posta chi per primo arriva a vincere n partite. Ma, dopo un certo numero di partite, quando A ne ha vinte $n-a$ e B ne ha vinte $n-b$, i due giocatori decidono di interrompere il gioco. Come deve essere suddivisa la posta?

Luca Pacioli nell'opera a stampa *Summa de aritmetica* (1494) propone di dividere la posta in parti direttamente proporzionali ai punti totalizzati prima dell'interruzione, ovvero nel rapporto $a : b$. La risoluzione di Pacioli fu confutata nel XVI secolo da Tartaglia nel *General Trattato di numeri e misure* del 1494. Tartaglia osservò che, nel caso in cui il gioco venisse interrotto con un punteggio di 0 a 1 fra i due giocatori, tutta la vincita sarebbe dovuta essere destinata al giocatore in vantaggio, nonostante il risultato della partita fosse ancora del tutto incerto. Il piatto andava diviso in proporzione alla possibilità che i due giocatori avevano di ottenere i punti rimanenti per la vittoria, e non rispetto a quelli che avevano già raggiunto. Questa conclusione è vera, ma nella dimostrazione Tartaglia non giunse al risultato corretto [22].

Solo grazie allo scambio epistolare tra Blaise Pascal e Pierre de Fermat è stata trovata una soluzione innovativa che ha introdotto il ragionamento probabilistico. Invece di riflettere sulle partite che sono già state giocate, l'idea descritta nelle lettere si basava sulle partite che ancora devono essere giocate e sulle possibili situazioni che possono verificarsi. Vengono considerate tutte le alternative per cercare di capire quando e come vincerebbe A oppure B così da spartire la posta in modo equo.

La risoluzione proposta da Fermat prevede la determinazione del numero massimo di partite che sarebbero necessarie a terminare la gara, e fra queste il conteggio dei casi favorevoli a ciascuno dei due giocatori [19].

Il numero N di partite che dovrebbero essere giocate affinché si abbia la certezza che uno (uno soltanto, ovviamente) dei due giocatori si aggiudichi l'intera posta, vale a dire che arrivi a vincere n partite è:

$$N = a + b - 1 \tag{1.1}$$

Infatti, affinché il giocatore A si aggiudichi l'intera posta, dovrebbe vincere un numero a di partite, mentre nel contempo il giocatore B ne dovrebbe vincere al più $b - 1$, insufficienti per la vittoria finale. D'altro canto, se il giocatore A vincesse $a - 1$ partite, non basterebbero per la vittoria finale, mentre in questo caso il giocatore B, vincendone b, si aggiudicherebbe l'intera posta.

Occorre calcolare il numero dei possibili esiti delle N partite, come se fossero effettivamente giocate. Per esempio, se $a = 1$ e $b = 3$, per cui $N = 3$, i possibili esiti sono i seguenti:

$$AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB$$

dove con A è indicato l'evento "vince A" e con B l'evento "vince B".

In quest'esempio i possibili esiti sono tanti quante le disposizioni con ripetizione dei 2 oggetti distinti A, B, presi a 3 a 3, ovvero in numero di $D^r_{2,3} = 2^3$. Dunque, qualunque sia N, il numero dei possibili esiti delle N partite, fingendo che siano effettivamente giocate, è dato dal numero $D^r_{2,N}$ delle disposizioni con ripetizione dei 2 oggetti distinti A, B, presi a N a N, cioè

$$D^r_{2,N} = 2^N \tag{1.2}$$

È necessario calcolare adesso quanti dei possibili esiti 2^N sono favorevoli ad A e quanti a B. Supponiamo che sia $a \leq b$ e indichiamo con $F_A(a,b)$ il numero degli esiti favorevoli ad A e con $F_B(a,b)$ quello degli esiti favorevoli a B. Dei possibili 2^N esiti delle N partite, gli esiti favorevoli a B sono tutti e solo quelli in cui figurano al più $a-1$ vincite di A. Per esempio, se $a=2$ e $b=3$, per cui $N=4$, i possibili $2^4=16$ esiti delle 4 partite da giocare sono i seguenti:

$$AAAA, AAAB, AABA, AABB, ABAA, ABAB, ABBA, ABBB$$
$$BAAA, BAAB, BABA, BABB, BBAA, BBAB, BBBA, BBBB$$

Di questi, gli esiti favorevoli a B sono quelli in cui figura al più una vincita di A

$$ABBB, BABB, BBAB, BBBA, BBBB$$

Il numero 5 di questi esiti può essere concepito come somma di due addendi, uno formato da una sola unità (corrispondente all'esito $BBBB$) ed uno formato da 4 unità (corrispondenti agli esiti $ABBB, BABB, BBAB, BBBA$).

Il primo di essi si può interpretare come il numero delle permutazioni con ripetizione di 4 oggetti, di cui 0 uguali fra loro e 4 uguali fra loro; il secondo addendo si può interpretare come il numero delle permutazioni con ripetizione di 4 oggetti, di cui 1 uguali fra loro e 3 uguali fra loro.

Gli esiti favorevoli a B sono pertanto in numero di $P_4^{0,4} + P_4^{1,3}$.

Estendendo questo ragionamento al caso generale, si dimostra che, dei possibili 2^N esiti delle N partite, quelli favorevoli a B, ovvero quelli in cui figurano al più $a-1$ vincite di A, sono dati dalla somma seguente:

$$P_N^{0,N} + P_N^{1,N-1} + P_N^{2,N-2} + \cdots + P_N^{a-1,N-(a-1)} \tag{1.3}$$

dove $P_N^{k,N-k}$, con $k = 0, 1, 2, \ldots, a-1$, rappresenta il numero delle permutazioni con ripetizione di N oggetti, di cui k uguali fra loro ed $N-k$ uguali fra loro. Pertanto, tenendo presente che

$$P_N^{k,N-k} = \frac{N!}{k!(N-k)!} \tag{1.4}$$

risulta

$$F_B(a,b) = \sum_{k=0}^{a-1} P_N^{k,N-k} = \sum_{k=0}^{a-1} \frac{N!}{k!(N-k)!} \tag{1.5}$$

$$F_A(a,b) = 2^N - F_B(a,b) \tag{1.6}$$

Abbiamo, a questo punto, tutti gli elementi per calcolare come deve essere ripartita la posta fra A e B e anche le probabilità che hanno i due giocatori di aggiudicarsi l'intera posta. Allora, indicate con $P_A(a,b)$ la probabilità di A e con $P_B(a,b)$ quella di B, si ha:

$$P_B(a,b) = \frac{F_B(a,b)}{2^N} \tag{1.7}$$

$$P_A(a,b) = 1 - P_B(a,b) \tag{1.8}$$

Indicato con $R(a,b)$ il rapporto fra le parti della posta spettanti ad A e quelle spettanti a B, si ha:

$$R(a,b) = \frac{F_A(a,b)}{F_B(a,b)} = \frac{P_A(a,b)}{P_B(a,b)} \tag{1.9}$$

a numero delle partite mancanti ad A per vincere l'intera posta	b numero delle partite mancanti a B per vincere l'intera posta	N numero delle partite da giocare per avere certezza di un vincitore	2^N numero dei possibili esiti delle N partite	$F_B(a,b)$ numero degli esiti favorevoli a B	$F_A(a,b)$ numero degli esiti favorevoli ad A	$P_B(a,b)$ probabilità di B di vincere l'intera posta	$P_A(a,b)$ probabilità di A di vincere l'intera posta	R(a,b) rapporto fra le parti spettanti ad A e quelli spettanti a B
1	**2**	2	4	1	3	1/4	3/4	**3/1**
1	**3**	3	8	1	7	1/8	7/8	**7/1**
2	**3**	4	16	5	11	5/16	11/16	**11/5**
1	**4**	4	16	1	15	1/16	15/16	**15/1**
2	**4**	5	32	6	26	3/16	13/16	**13/3**
3	**4**	6	64	22	42	11/32	21/32	**21/11**
1	**5**	5	32	1	31	1/32	31/32	**31/1**
2	**5**	6	64	7	57	7/64	57/64	**57/7**
3	**5**	7	128	29	99	29/128	99/128	**99/29**
4	**5**	8	256	93	163	93/256	163/256	**163/93**

Figura 1.2: Possibili risultati al variare di a e b

La figura 1.2 riporta alcuni risultati. Non figurano casi in cui $a = b$, poiché in queste situazioni, banalmente, la posta va suddivisa in parti uguali.

1.1.3 Sviluppo della teoria della probabilità

Nel 1657 il fisico olandese Christiaan Huygens pubblica il *De Ratiociniis in ludo alea*, considerato il primo trattato di probabilità. In questa opera emerge uno degli aspetti più affascinanti della storia della probabilità: la sua uscita dalle sale da gioco alla conquista dei più svariati campi del sapere umano. Huygens riprende il problema della posta analizzato da Pascal e Fermat e attraverso opportune proposizioni definisce il concetto di valore atteso (in latino *expectatio*), generalizzando il problema della ripartizione della posta al caso in cui siano coinvolti tre giocatori. La seconda parte del *De ratiociniis* contiene problemi sul il gioco dei dadi (*de tesseris*).

Un primo esempio di applicazione del calcolo delle probabilità in un contesto diverso dal gioco d'azzardo emerge nell'opera di John Graunt (1620-1674) *Natural and political observations made upon the Bills of Mortality*, pubblicata nel 1662. Graunt era un commerciante di stoffe inglese e, insieme a Malthus, può essere considerato il fondatore della Demografia, quella scienza che studia, da un punto di vista quantitativo, tutto ciò che riguarda i movimenti delle popolazioni. Graunt cominciò a consultare i cosiddetti *Bills of mortality* (Bollettini di mortalità), che fornivano la lista delle nascite e dei decessi, suddivisi per età, sesso e causa di morte, monitorando le zone di Londra in cui si registravano le malattie con più frequenza. Lo studioso osservò che il 36% dei decessi erano bambini con meno di sei anni: elaborò una sua proiezione matematica per stabilire su cento neonati quanti avrebbero raggiunto le diverse età. La sua analisi si estese agli abitanti della città, stimando circa 384.000 abitanti, una valutazione considerata attendibile dai demografici contemporanei. Le sue osservazioni empiriche lo portarono a concludere che la campagna fosse più salutare della città, che i nati maschi fossero maggiori delle femmine, che le femmine contraessero più malattie dei maschi e che il numero dei maschi deceduti fosse superiore. Si dedicò allo studio delle cause biologiche, sociali ed economiche della mortalità, lo studio del rapporto tra i sessi, la differenza tra nascite e morti in città e campagna, i flussi migratori.

A partire dall'opera di Huygens anche gli altri matematici che si approcciarono al mondo del calcolo delle probabilità cercarono di andare oltre al contesto del gioco d'azzardo. Di notevole importanza è stata l'opera di Jacob Bernoulli, intitolata *Ars conjectandi* e pubblicata nel 1713, otto anni dopo la morte del matematico. L'opera consta di quattro parti, di cui l'ultima incompiuta e di un'appendice dedicato alle serie.

La prima parte dell'*Ars Conjectandi* riproduce il *De Ratiociniis in Ludo Aleae* di Huygens con delle annotazioni aggiunte, particolarmente interessanti sia come esempio di lettura critica di un testo matematico da parte di un altro matematico, sia come testimonianza dell'evoluzione della teoria della probabilità. Seguono una seconda parte dedicata al calcolo combinatorio ed una terza parte, nella quale sono esaminati dal punto di vista probabilistico i giochi d'azzardo più diffusi all'epoca. Infine, nella quarta parte Bernoulli intende allargare in modo considerevole il raggio di azione del calcolo delle probabilità proponendone anche un'analisi filosofica del concetto di probabilità [31]. Tale opera contiene anche il famoso teorema limite, che oggi porta il suo nome ed è più spesso chiamato *Legge dei grandi numeri*, vengono inoltre riportate le cosiddette prove di Bernoulli e l'espressione della distribuzione binomiale.

Allo sviluppo della teoria della probabilità hanno notevolmente contribuito Abraham de Moivre, Thomas Bayes e in particolare Pierre Simon de Laplace, che si è occupato di questa disciplina da tutti i punti di vista e ha contribuito affinché venisse riconosciuta come una vera disciplina scientifica, evidenziandone le importanti potenzialità che vanno ben oltre il gioco d'azzardo. Nel 1812 viene pubblicato il suo trattato principale in ambito probabilistico, intitolato *Théorie analitique des probabilités*, in cui si spiega la dimostrazione del Teorema centrale del limite, viene riconosciuta la distribuzione normale come distribuzione limite e si riscopre la formula di Bayes.

1.2 Cosa è la probabilità?

È complicato riuscire a definire nettamente la probabilità.
Possiamo provare a pensare alla probabilità come lo studio delle possibilità che un evento si verifichi: l'obiettivo è misurare la tendenza ad accadere da parte di un evento. Nella realtà non abbiamo abbastanza informazioni per affermare con assoluta certezza che un evento è vero oppure falso, ma potremmo solo dire che è probabile. Il concetto di probabilità è dunque legato strettamente all'incertezza: è una misura dell'incertezza. Ma come è possibile misurare qualcosa di incerto? Cosa significa? Non è facile rapportarsi e comprendere realmente questo concetto: "Nessuno ha la più pallida idea del suo significato" diceva nel 1929 Bertrand Russel, matematico e filosofo della scienza, specificando però che per tale ragione "il concetto di probabilità è il più importante della scienza moderna".

Nonostante i progressi raggiunti alla fine dell'Ottocento, la probabilità era agli inizi del Novecento ancora una disciplina poco rigorosa, costituita da problemi non solo matematici, ma anche statistici e filosofici, che si intrecciano tra loro. In occasione del II Congresso Internazionale dei Matematici, tenuto a Parigi del 1900 David Hilbert, nella sua famosa enumerazione dei problemi ritenuti fondamentali per lo sviluppo della matematica del XX secolo pose al sesto posto la questione di rendere la probabilità una disciplina matematica ovvero la questione di assiomatizzare la probabilità [10].

1.2.1 Elementi teorici per l'introduzione alla probabilità

Prima di analizzare nel dettaglio le differenti interpretazioni e definizioni di probabilità, è necessario introdurre le nozioni di esperimento aleatorio, esito, che insieme alla nozione di probabilità costituiscono i 3 concetti primitivi della Probabilità (come punto, retta e piano in Geometria euclidea).

Definizione 1. Un *esperimento aleatorio* è un esperimento di cui non conosciamo con certezza il risultato.

Definizione 2. Un *esito* è un ipotetico risultato dell'esperimento aleatorio.

Esempio 1. Un classico esempio di esperimento aleatorio è il lancio di una moneta i cui esiti sono generalmente indicati con "testa" e "croce".

Grazie ai concetti di esperimento aleatorio ed esito, possiamo dare la definizione di evento.

Definizione 3. Un *evento* è un'affermazione riguardante l'ipotetico risultato dell'esperimento aleatorio, di cui è possibile dire con certezza se è vera o falsa una volta noto l'esito dell'esperimento aleatorio. Gli esiti per cui un evento è vero si chiamano *casi favorevoli*, gli altri si chiamano *casi contrari*. Per convenzione gli eventi si indicano con una lettera maiuscola dell'alfabeto.

Esempio 2. Si lancia una dado. L'affermazione A = "esce un numero dispari" è un evento.

Esempio 3. Si lancia un dado. Consideriamo l'evento A = "esce un numero dispari". Uno spazio campionario naturale per questo esperimento aleatorio è l'insieme $\Omega = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Dunque l'evento A è rappresentato dal sottoinsieme $A = 1, 3, 5$.

Definizione 4. Si chiama *spazio campionario* un insieme i cui elementi rappresentano tutti gli esiti di un esperimento aleatorio e viene generalmente indicato con Ω. Un generico elemento di Ω è dunque un esito e verrà indicato con ω. Noi lavoreremo sempre con spazi campionari finiti. Ogni evento è rappresentato dal sottoinsieme di Ω costituito dai casi favorevoli, ovvero dagli esiti per cui l'evento è vero. Un qualunque sottoinsieme di Ω è considerato ancora evento.

Definizione 5. L'evento *certo* è un'affermazione sempre vera, qualunque sia l'esito dell'esperimento aleatorio. È rappresentato dall'insieme Ω stesso.

Definizione 6. L'evento *impossibile* è un'affermazione sempre falsa, qualunque sia l'esito dell'esperimento aleatorio. È rappresentato dall'insieme vuoto $\emptyset$.

Gli eventi sono quindi descritti sia da affermazioni che da insiemi. Sulle affermazioni possiamo eseguire le operazioni date dai connettivi logici (ovvero disgiunzione, congiunzione e negazione), le quali corrispondono alle relative operazioni insiemistiche (ovvero unione, intersezione, complementazione).

Dati due eventi A e B appartenenti a uno spazio campionario Ω:

Definizione 7. L'evento *unione* di A e B si indica con $A \cup B$ e si realizza quando si realizzano A o B o entrambi.

Definizione 8. L'evento *intersezione* di A e B si indica con $A \cap B$ e si realizza quando si realizzano entrambi gli eventi A e B.

Definizione 9. L'evento *contrario* di A e si indica con $\bar{A}$ l'evento che si realizza quando non si realizza A.

Definizione 10. Due eventi si dicono *compatibili* se il verificarsi di uno non esclude il verificarsi dell'altro. Si dicono *incompatibili* se il verificarsi di uno esclude il verificarsi dell'altro.

1.2.2 Le interpretazioni della probabilità

Fino agli anni 50 del Novecento numerose sono state le discussioni in merito all'interpretazione della probabilità e numerose sono tutt'ora le interpretazioni che vi sono collegate: classica, frequentista, soggettivista e assiomatica.

Definizione classica Originariamente dovuta a Laplace, afferma che dato uno spazio finito di eventi Ω, la probabilità è il rapporto tra il numero n_ω dei casi favorevoli al verificarsi di un qualunque evento ω e il numero n dei casi possibili, posto che gli eventi siano tutti equiprobabili.

$$P(\omega) = \frac{n_\omega}{n}, \forall \omega \in \Omega \tag{1.10}$$

La definizione classica è una definizione a priori. Per esempio, con riferimento all'esperimento consistente nel lancio di una moneta ben bilanciata, si conoscono gli eventi elementari (testa, croce) cui l'esperimento può dare luogo. Gli eventi hanno la caratteristica fondamentale di essere necessari, in quanto nel corso dell'esperimento o l'uno o l'altro degli eventi elementari deve necessariamente verificarsi; sono incompatibili ed equiprobabili, in quanto si assume che nessuno dei due eventi elementari abbia maggiori chance di manifestarsi rispetto all'altro. Con Laplace non parliamo solo di numeri razionali appartenenti all'insieme Q, ma anche di numeri reali. Parliamo di numeri reali quando ci riferiamo a misure di: aree, distanze e volumi. L'estensione al caso di eventi con risultati continui si attua attraverso una rappresentazione geometrica che la probabilità di un evento casuale è data dal rapporto tra l'area favorevole all'evento e l'area totale degli eventi possibili [24].

Per quanto di immediata comprensibilità e di pronta applicazione a semplici problemi pratici, la definizione classica è insoddisfacente da un punto di vista logico. Infatti, il riferimento nella definizione alla nozione di equiprobabilità dei risultati configura una tautologia. Inoltre, a prescindere dalle sue lacune logiche, l'applicabilità della definizione classica è confinata a quei contesti in cui l'osservatore sia in grado di rappresentare ex ante lo spazio degli eventi elementari e che questi, come detto, siano equiprobabili e finiti, condizioni che difficilmente si presentano nella realtà.

Definizione frequentista Formulata da Venn (1834-1923) e formalizzata da Richard Von Mises (1883-1953), emerge da un ragionamento a posteriori fondato sull'osservazione dei risultati di un esperimento. Consideriamo un esperimento articolato in n prove, nel corso del quale si verifichino k eventi elementari $\omega_1 \cdots \omega_k$ tra loro incompatibili, ma non equiprobabili. Ipotizziamo che in n prove l'evento elementare ω_i si sia manifestato n_i volte. Definendo la frequenza relativa dell'evento ω_i il rapporto $\frac{n_i}{n}$, la misura di probabilità del generico evento elementare ω è il limite della sua frequenza relativa al divergere del numero di prove. In simboli avremo che

$$P(\omega) = \lim_{x \to \infty} \frac{n_\omega}{n}, \forall \omega \in \Omega \tag{1.11}$$

La definizione frequentista è stata anche definita legge empirica del caso. Proprio perché formulata a posteriori, presenta alcune limitazioni. Quella più ovvia è che la misura di probabilità nella definizione frequentista presuppone lo svolgimento di un esperimento articolato su un gran numero di prove. Se un evento non si è ancora manifestato nel corso dell'esperimento, non se ne può misurare la probabilità: sarebbe infatti necessario ripetere l'esperimento infinite volte per avere la certezza che tutti gli eventi elementari si siano effettivamente manifestati. Bruno De Finetti critica tale definizione, ad esempio analizzando il gioco della roulette e comprendendo cosa significa che $p = \frac{1}{2}$ nell'interpretazione frequentista.

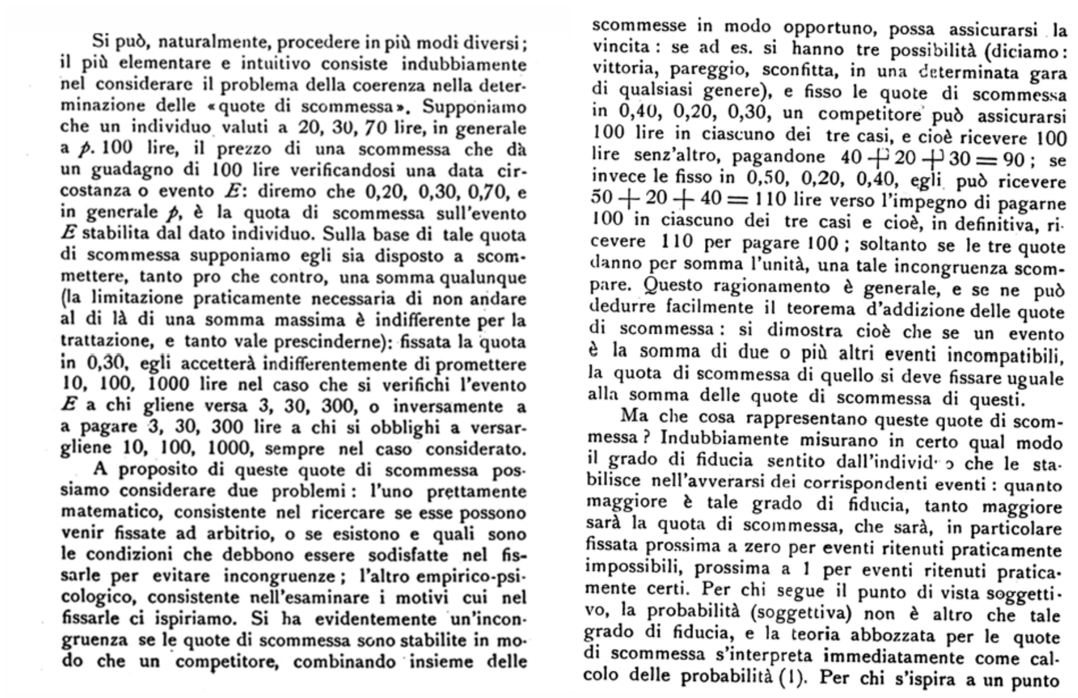
"Significa affermare che in una serie prestabilita di prove, la frequenza tende al limite $\frac{1}{2}$, ciò che si giustifica con l'osservazione empirica che, facendo un numero molto grande di prove ordinatamente la frequenza è prossima a $\frac{1}{2}$ e l'approssimazione è tanto maggiore quanto è maggiore il numero di prove. In particolare significa affermare l'impossibilità che venga sempre ‹‹nero››, indefinitamente. E qui vien spontaneo d'osservare che se è innegabile da un lato l'estrema inverosimiglianza che su un grand numero di prove appaia sempre nero. È altrettanto innegabile che si vede però alcuna ragione di escludere come impossibile a priori tale eventualità, che non contiene certo nulla di per sé stesso contraddittorio[16]."

Secondo il matematico italiano mediante l'interpretazione frequentista si ricorre all'errore perché ci si riduce in sostanza a sostituire arbitrariamente il concetto di probabilità con quello di frequenza limite, ad eseguire i calcoli sulla frequenza limite e ritornare poi a interpretare la frequenza-limite come probabilità.

Il campo di applicazione della definizione frequentista è molto vasto, poiché comprende la medicina, la psicologia, l'economia, la meccanica quantistica e in tutte le scienze per le quali si possono utilizzare metodi statistici. Tuttavia tale definizione non è universale. Per risolvere il problema dell'universalità sono stati proposti due approcci più consistenti sul piano matematico, l'impostazione soggettiva e quella assiomatica.

Definizione soggettivista Sviluppata indipendentemente da Ramsey (1903-1930) e De Finetti (1906-1985), l'impostazione soggettiva afferma che la probabilità di un evento ω è una misura p del grado di fiducia che un individuo attribuisce al verificarsi di ω sulla base delle sue opinioni ed informazioni sull'evento e il principio di coerenza.

In realtà De Finetti preferiva utilizzare una definizione più operativa: la probabilità di un evento ω, secondo l'opinione di un individuo I, è il prezzo p che I giudica equo pagare per riscuotere un importo unitario nel caso in cui ω si verifichi. L'impostazione soggettiva tende a recuperare, in un certo senso, un concetto di probabilità prossimo al senso comune, quello che si ha prima di andare a scuola e che si continua a utilizzare inconsciamente dopo, nonostante quello che si è appreso. Per i soggettivisti la probabilità è una misura del grado di fiducia – in inglese degree of belief – che una qualsiasi affermazione sia vera. E poiché quanto più si crede in un'affermazione, tanto più si è disposti a scommettere su di essa, si può utilizzare il concetto di scommessa coerente per definire in maniera operativa la misura di probabilità. Nella concezione di De Finetti una scommessa è coerente quando non determina una perdita certa a priori per il banco o per lo scommettitore, mentre il prezzo pagato si definisce equo se lo scommettitore non muta i termini della scommessa anche quando scambia il suo ruolo con quello di banco. Quindi coerenza significa il rispetto di alcuni criteri di carattere logico. Con la diretta implicazione che, per quanto in questa impostazione la valutazione sia un atto soggettivo, non è arbitraria. Infatti, se nell'analisi di un problema le valutazioni di una pluralità di osservatori potrebbero non concordare, quando il set informativo di cui dispone l'osservatore rimane immutato, non deve mutare il suo grado di fiducia circa l'avverarsi di ω.



Si può, naturalmente, procedere in più modi diversi; il più elementare e intuitivo consiste indubbiamente nel considerare il problema della coerenza nella determinazione delle «quote di scommessa». Supponiamo che un individuo valuti a 20, 30, 70 lire, in generale a p. 100 lire, il prezzo di una scommessa che dà un guadagno di 100 lire verificandosi una data circostanza o evento E: diremo che 0,20, 0,30, 0,70, e in generale p, è la quota di scommessa sull'evento E stabilita dal dato individuo. Sulla base di tale quota di scommessa supponiamo egli sia disposto a scommettere, tanto pro che contro, una somma qualunque (la limitazione praticamente necessaria di non andare al di là di una somma massima è indifferente per la trattazione, e tanto vale prescinderne): fissata la quota in 0,30, egli accetterà indifferentemente di promettere 10, 100, 1000 lire nel caso che si verifichi l'evento E a chi gliene versa 3, 30, 300, o inversamente a a pagare 3, 30, 300 lire a chi si obblighi a versargliene 10, 100, 1000, sempre nel caso considerato.

A proposito di queste quote di scommessa possiamo considerare due problemi: l'uno prettamente matematico, consistente nel ricercare se esse possono venir fissate ad arbitrio, o se esistono e quali sono le condizioni che debbono essere sodisfatte nel fissarle per evitare incongruenze; l'altro empirico-psicologico, consistente nell'esaminare i motivi cui nel fissarle ci ispiriamo. Si ha evidentemente un'incongruenza se le quote di scommessa sono stabilite in modo che un competitore, combinando insieme delle scommesse in modo opportuno, possa assicurarsi la vincita: se ad es. si hanno tre possibilità (diciamo: vittoria, pareggio, sconfitta, in una determinata gara di qualsiasi genere), e fisso le quote di scommessa in 0,40, 0,20, 0,30, un competitore può assicurarsi 100 lire in ciascuno dei tre casi, e cioè ricevere 100 lire senz'altro, pagandone $40 + 20 + 30 = 90$; se invece le fisso in 0,50, 0,20, 0,40, egli può ricevere $50 + 20 + 40 = 110$ lire verso l'impegno di pagarne 100 in ciascuno dei tre casi e cioè, in definitiva, ricevere 110 per pagare 100; soltanto se le tre quote danno per somma l'unità, una tale incongruenza scompare. Questo ragionamento è generale, e se ne può dedurre facilmente il teorema d'addizione delle quote di scommessa: si dimostra cioè che se un evento è la somma di due o più altri eventi incompatibili, la quota di scommessa di quello si deve fissare uguale alla somma delle quote di scommessa di questi.

Ma che cosa rappresentano queste quote di scommessa? Indubbiamente misurano in certo qual modo il grado di fiducia sentito dall'individuo che le stabilisce nell'avverarsi dei corrispondenti eventi: quanto maggiore è tale grado di fiducia, tanto maggiore sarà la quota di scommessa, che sarà, in particolare fissata prossima a zero per eventi ritenuti praticamente impossibili, prossima a 1 per eventi ritenuti praticamente certi. Per chi segue il punto di vista soggettivo, la probabilità (soggettiva) non è altro che tale grado di fiducia, e la teoria abbozzata per le quote di scommessa s'interpreta immediatamente come calcolo delle probabilità (1). Per chi s'ispira a un punto

Figura 1.3: Sezione dell'articolo [16], in cui presenta la sua idea di probabilità in relazione al concetto di scommessa

Definizione assiomatica Agli inizi del XX secolo si sentiva l'esigenza di sistematizzare in modo rigoroso le diverse concezioni, nel tentativo di costruire una teoria unificata della probabilità. In questo contesto la scelta degli assiomi da porre a fondamento dell'intera teoria accese un dibattito molto intenso tra le diverse correnti di pensiero, che rivendicavano la propria concezione di probabilità come elemento fondante. Il matematico russo A. N. Kolmogorov decise di non occuparsi dei "fondamenti" della probabilità ("che cosa è la probabilità") ma di occuparsi invece di fondare una solida teoria che "funzionasse" comunque, a prescindere da quale fosse la concezione probabilistica. Nel 1933 propose un'assiomatizzazione della probabilità nell'opera *Foundation of the theory of probability*, che oggi è universalmente accettata. Questa impostazione non dà della probabilità una definizione diretta ma accetta qualunque approccio, purché questo rispetti le proprietà fondamentali, assunte come assiomi; da queste si deducono le altre proprietà come teoremi [23].

La teoria assiomatica si fonda su tre momenti fondamentali:

1. l'individuazione dei concetti primitivi di prova, evento e spazio così come definiti in precedenza;
2. l'enunciazione degli assiomi (o postulati) della probabilità;
3. la dimostrazione dei teoremi mediante i postulati e con l'ausilio della logica e della matematica.

Assiomi della probabilità

Assioma 1 (positività). *La probabilità di un evento A è un numero unico maggiore o uguale di 0.*

$$P(A) \geq 0$$

Assioma 2 (certezza). *La probabilità dell'evento certo e quindi dello spazio campionario è sempre 1.*

$$P(\Omega) = 1$$

Dal primo e secondo assioma si deduce che la probabilità di un evento A è tale che

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Assioma 3 (unione). *Se $A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_k$ sono eventi incompatibili in Ω, cioè se $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ a probabilità dell'evento unione è la somma delle singole probabilità.*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

Qualunque interpretazione si favorisca, qualsiasi assegnazione venga effettuata, vi è comunque un consenso generale sulla matematica della probabilità, ovvero sulle regole che la probabilità deve verificare. La matematica della probabilità si chiama proprio *Calcolo delle probabilità*.
A partire da questi tre assiomi, sono stati in seguito formulati veri teoremi e leggi, che costituiscono la base della moderna teoria della probabilità.

Proposizione 1. *Dato un evento A, la probabilità dell'evento contrario di A è pari al complemento a 1 della probabilità di A.*

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

perché

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$$

Di conseguenza la probabilità dell'evento impossibile è pari a 0.

$$P(\emptyset) = P(\bar{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$$

Proposizione 2. *Se un evento A è incluso in un evento B, allora la sua probabilità è minore o uguale a quella di B.*

$$A \subseteq B \rightarrow P(B) = P(A \cup (\bar{A} \cap B)) = P(A) + P(\bar{A} \cap B) \geq P(A)$$

Teorema delle probabilità totali 1. Dati due eventi A e B, la probabilità dell'unione di A e B è pari alla somma delle probabilità dei due eventi meno la probabilità dell'intersezione.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

1.2.3 Intuizione e misconcezioni: due ostacoli all'apprendimento della probabilità

La probabilità è dunque un ambito di competenza matematica estremamente necessario nella nostra società. Viene utilizzata nell'analisi dei giochi d'azzardo, nella genetica, nelle previsioni metereologiche e numerosi altri ambiti. Fornisce gli strumenti per la deduzione delle leggi termodinamiche a partire da quelle meccaniche attraverso i metodi della meccanica statistica. Ma oltre all'applicazione della probabilità in varie discipline si riconosce anche il ruolo importante del ragionamento probabilistico nel processo decisionale: nella società moderna le persone si trovano sempre più spesso a prendere decisioni in un contesto che comporta incertezza.

L'introduzione dell'insegnamento della teoria della probabilità a scuola ha comportato la nascita di questioni di carattere didattico: in primo luogo riconoscere gli ostacoli all'apprendimento della probabilità ed elaborare strategie didattiche mirate per ridurli o eliminarli. Si definisce ostacolo all'apprendimento qualsiasi elemento che si frapponga alla costruzione cognitiva di un concetto. Gli ostacoli si differenziano in:

- Ostacoli didattici: sono gli ostacoli legati alle scelte strategiche del docente, ad esempio un'errata trasposizione didattica o errata scelta dell'ingegneria didattica;

- Ostacoli ontogenetici: sono gli ostacoli legati all'immaturità dello studente, l'età mentale è insufficiente rispetto al progetto proposto;

- Ostacoli epistemologici: sono gli ostacoli legati alla natura stessa dell'argomento.

Dunque le difficoltà possono essere causate dalla natura stessa del concetto insegnato, dal metodo di insegnamento proposto dal docente e dalle conoscenze pregresse o abilità proprie dello studente.

Il fattore che influenza maggiormente l'apprendimento è dato dalla conoscenza pregressa dello studente, che può dare luogo alle misconcezioni. Con misconcezione si intende una conoscenza specifica scorretta: non è l'errore, bensì la causa dell'errore. Si tratta principalmente di convinzioni implicite, di cui il soggetto non è consapevole e che per questo agiscono in modo più subdolo e sottile. Le misconcezioni possono coesistere con i concetti corretti ed interferire con l'abilità degli allievi di applicare tali concetti in maniera consistente e con fiducia [21]. Sebbene gli studenti possano apprendere regole e procedure della probabilità e siano in grado di risolvere correttamente gli esercizi, gli stessi studenti fraintendono le idee e i concetti base, ignorano le regole nel momento in cui esprimono il loro giudizio riguardo eventi incerti , e si lasciano guidare dalla loro intuizione [18]. Questo è da imputare anche al fatto che non c'è corrispondenza diretta tra il comprendere un argomento e il crederci: acquisire le conoscenze e le competenze relative ad un dato tema non implica l'annetterlo al proprio modo di pensare e ragionare.

Ruolo fondamentale nel processo di insegnamento/apprendimento della probabilità è giocato dall'intuizione. Nella sua accezione più generale, l'intuizione denota conoscenza immediata o, parafrasando lo psicologo J. S. Bruner [6], essa implica l'atto di afferrare il significato della struttura di un problema senza una dipendenza esplicita dall'apparato analitico. Analoga è la visione di E. Berne [4], psicologo canadese secondo cui l'intuizione è conoscenza basata sull'esperienza e acquisita attraverso il contatto sensoriale con l'oggetto (di indagine), senza che il soggetto che ha avuto l'intuizione sia in grado di formulare, a sè stesso o ad altri, come sia giunto a tali conclusioni.

La componente intuitiva è dunque un fattore da non ignorare o sottovalutare nel processo di insegnamento e apprendimento, potendo essere da essa favorito od ostacolato a causa della presenza di bias intuitivi, pre-esistenti nella mente degli studenti. Con il termine "bias intuitivo" si intende un giudizio (o pregiudizio) o una credenza sviluppati dall'individuo sulla base di processi cognitivi legati all'intuizione e, pertanto, ritenuti da egli veritieri ma che, di fatto, possono portare ad errori. Come riportato da Paul e Hlangamipai [28] la ricerca ha dimostrato che la maggior parte degli studenti non comprende i concetti che sono coinvolti nella probabilità. Le difficoltà nell'intuire le idee della probabilità derivano dalla incapacità dello studente di gestire i concetti di numero razionale e il ragionamento proporzionale che vengono utilizzati nell'interpretazione dei concetti di probabilità. Le debolezze degli studenti sulla gestione dei concetti di base che coinvolgono le frazioni, i decimali e le percentuali sono stati identificati come una potenziale minaccia alla comprensione dei concetti di probabilità. Gli studenti hanno difficoltà nel tradurre le affermazioni verbali di problemi in frasi algebriche, quindi difficoltà nella conversione da registro linguistico a matematico e algebrico. Viene inoltre osservato che la natura astratta e formale della probabilità spesso induce gli studenti a sviluppare un atteggiamento negativo verso i suoi concetti. Ostacoli ontogenetici quali il livello di maturità mentale degli studenti e livello di abilità matematiche specifiche impediscono il completo apprendimento. Gli studenti devono sviluppare abilità nell'affrontare concetti astratti prima di essere esposto al ragionamento probabilistico.

Gli studenti di matematica delle scuole secondarie spesso cadono vittime di idee sbagliate a causa del conflitto tra le aspettative basate sulla matematica e le loro intuizioni radicate nell'esperienza. Gli studenti sviluppano concetti di probabilità senza studiare formalmente la disciplina e alcuni dei loro concetti sono in contrasto con quelli insegnati in classe.

Le misconcezioni fondamentali messe in evidenza dalla letteratura sono relative a rappresentatività ed equiprobabilità [2].

Misconcezione di rappresentatività Nello studio di Kahneman e Tversky, citato da Ang e Shahrill in *Identifying students' specific misconceptions in learning probability. International Journal of Probability and Statistics* il misconcetto di rappresentatività è riferito alla tendenza degli studenti a pensare erroneamente che i campioni che corrispondono alla distribuzione della popolazione sono più probabili dei campioni che non lo fanno. Ad esempio nel lanciare una moneta, gli studenti con questa errata percezione penseranno che nel lancio di una serie di monete quella che ha un numero approssimativamente uguale di testa e croce è maggiore probabile di una serie con molte più code che teste. Questo specifico esempio indica tra le forma di rappresentatività le misconcezioni legate al caso. Una conseguenza di questa rappresentatività è la "gambler's fallacy", o fallacia dello scommettitore, che consiste nell'errata convinzione che eventi occorsi nel passato influiscano su eventi futuri nell'ambito di attività governate dal caso. Occorre, però, tenere presente che "il caso non ha memoria", ovvero in un processo casuale il realizzarsi (piuttosto che la ricorrenza o la non ricorrenza) di un evento non influenza la probabilità del verificarsi di eventi successivi.

Misconcezione di equiprobabilità Studenti con questo misconcetto tendono ad assumere che eventi casuali siano ugualmente probabili di natura. Intendono le possibilità di ottenere esiti diversi come eventi ugualmente probabili. Questo misconcetto attribuisce la stessa probabilità in modo casuale ad eventi diversi indipendentemente dalla loro reale possibilità. Ad esempio tali studenti tendono a pensare che quando due dadi vengono lanciati, tutte le somme possibili sono ugualmente probabili: non si accorgono che ottenere come somma 6 o 7 per i due dadi è più probabile di 2 o 12.

Un ruolo fondamentale nell'apprendimento/insegnamento della probabilità, come di qualsiasi altro concetto, è giocato dall'insegnante, come evidenziato dagli ostacoli didattici definiti in precedenza. La mancanza di conoscenza da parte degli insegnanti sulla probabilità è stata identificata come un predittore della comprensione limitata degli studenti. L'efficacia dell'istruzione della probabilità dipende da chi la insegna: gli insegnanti devono essere consapevoli delle intuizioni fallaci e delle misconcezioni che gli alunni potrebbero apportare allo studio delle probabilità e sostituirle con intuizioni corrette in linea con l'approccio formale.

Capitolo 2

La probabilità nel contesto scolastico

Il capitolo indaga il ruolo della probabilità nel contesto scolastico attraverso l'analisi dei documenti ministeriali dalla scuola primaria di primo grado alla scuola secondaria di secondo grado, lo studio della probabilità all'interno delle Prove Invalsi e il confronto di libri di testo. Analizza l'importanza del linguaggio specifico in matematica e il ruolo dell'Educazione Civica nell'attuale contesto scolastico.

2.1 La probabilità a scuola: riforme e indicazioni ministeriali

2.1.1 Introduzione della probabilità nei programmi scolastici

Dal 1923 al 1945 i programmi per le scuole secondarie di secondo grado erano rimasti legati, salvo alcune modifiche marginali, alla riforma Gentile[1].

[1]La riforma Gentile del 1924 è stata, dopo la legge Casati del 18560, la più importante delle riforme scolastiche italiane del XXI secolo. Le caratteristiche principali sono:

- Innalzamento dell'obbligo scolastico sino al quattordicesimo anno di età;
- Creazione dell'istituto magistrale per la formazione dei futuri insegnanti elementari;
- Istituzione di scuole speciali per gli alunni portatori di handicap;
- La messa al bando dello studio della pedagogia, della didattica e di ogni attività di tirocinio;
- Graduale messa al bando dagli istituti scolastici di ogni ordine e grado delle lingue delle comunità nazionali appena annesse all'Italia (tedesco, sloveno e croato).

Il compito di distribuire i diversi argomenti sull'intero arco quinquennale era lasciato interamente al docente, poiché i programmi citati si riferivano soltanto agli esami finali.

Nel 1945 una commissione nominata dai governi delle potenze vincitrici della Seconda Guerra Mondiale formulò nuovi piani di studio destinati a sostituire provvisoriamente quelli gentiliani. Già dal 1950 la comunità matematica italiana iniziò ad elaborare nuovi piani di studio, tenendo conto delle esperienze maturate nel frattempo in altre nazioni come Francia, Belgio ed Inghilterra.

La probabilità entra ufficialmente all'interno dei piani di studio grazie ai Programmi di Frascati del 1966, elaborati dalla Commissione Italiana Insegnamento Matematica (CIIM). Al quinto anno vengono infatti introdotti *Elementi di calcolo delle probabilità e semplici applicazioni alla statistica, alla teoria degli errori, ecc.* Bruno De Finetti in [14] commenta tale novità

"Probabilità e statistica. É questo l'argomento di mia più specifica competenza ma, al contrario di quanto si potrebbe supporre a prima vista, è proprio quello su cui mi trovo maggiormente in difficoltà e imbarazzi nell'esprimere pareri e suggerimenti sul modo di concretare le generiche indicazioni dei programmi (...). Ma poi c'è un'altra ragione più specifica e più assillante, che crea difficoltà e imbarazzo: ed è il fatto che nessuna spiegazione per quanto accurata sembra sufficiente a garantire dal rischio di fraintendimenti purtroppo assai frequenti. (...) La consapevolezza di questo rischio e della difficoltà di scongiurarlo (oltre allo scrupolo di non cadere nel comune difetto di sopravvalutare per naturale "deformazione professionale", l'importanza e "indispensabilità della propria materia") mi avevano trattenuto dall'associarmi espressamente e pressantemente alla proposta di vari colleghi (soprattutto Prodi) di inserire nei programmi tale argomento, attribuendo anzi a tale innovazione un significato e un valore particolarmente caratterizzanti per lo spirito della riforma. Naturalmente, apprezzavo e condividevo pienamente tali idee, e penso, con delle informazioni obiettive, di averle avvalorate, ma sempre preoccupandomi di non influenzare passionalmente il parere della maggioranza. (...) Alla fine, l'inclusione di tali argomenti fu approvata con voto unanime."

2.1.2 I quadri di riferimento

La scuola italiana si divide in due cicli:

- Primo ciclo, che comprende la scuola primaria e secondaria di primo grado
- Secondo ciclo, che comprende la scuola secondaria di secondo grado

I documenti di riferimento per il primo ciclo sono le *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione*, mentre i documenti di riferimento per il secondo ciclo sono le *Indicazioni Nazionali* per i Licei e le *Linee Guida* per gli istituti professionali e tecnici.
All'interno di tali documenti emergono tre finalità dell'insegnamento della matematica:

- Matematica come strumento per la vita quotidiana, per leggere e interpretare il mondo ed intervenire in maniera consapevole;
- Matematica usata per formare il pensiero razionale e le capacità comunicative dell'individuo;
- Matematica utilizzata come strumento culturale per leggere la storia ed interpretare le azioni dell'uomo.

Tali documenti, elaborati nel 2010 e nel 2012, hanno sostituito i precedenti *Programmi ministeriali*. Il passaggio da Programmi a Indicazioni è significativo, perché il docente e la scuola hanno maggiore autonomia e maggiore responsabilità nella formazione dello studente, scegliendo ed adattando opportunamente, ciò che emerge dalle Indicazioni. Nel rispetto e nella valorizzazione dell'autonomia delle istituzioni scolastiche, le Indicazioni costituiscono il quadro di riferimento per la progettazione curriculare affidata alle scuole. Il curricolo di istituto è espressione della libertà di insegnamento e dell'autonomia scolastica e, al tempo stesso, esplicita le scelte della comunità scolastica e l'identità dell'istituto stesso. Le Indicazioni indirizzano in maniera non vincolante l'acquisizione delle competenze necessarie e coerenti con la definizione di competenza matematica contenuta nella Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio del 18 dicembre 2006. La competenza matematica è inserita tra le 8 competenze chiave per la cittadinanza attiva.

Pellerey in [29] definisce la competenza come:

> *La capacità di far fronte a un compito o a un insieme di compiti, riuscendo a mettere in moto e a orchestrare le proprie risorse interne, cognitive, affettive e volitive e a utilizzare le risorse esterne disponibili in modo coerente e fecondo.*

In particolare la competenza matematica è l'abilità di sviluppare e applicare il pensiero matematico per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane. Partendo da una solida padronanza delle competenze aritmetico-matematiche, l'accento è posto sugli aspetti del processo e dell'attività oltre che su quelli della conoscenza. La competenza matematica comporta, in misura variabile, la capacità e la disponibilità a usare modelli matematici di pensiero (pensiero logico e spaziale) e di presentazione (formule, modelli, costrutti, grafici, carte).

Le altre competenze chiave per l'apprendimento permanente definite dal Parlamento Europeo e dal Consiglio dell'Unione Europea del 22 maggio 2018 sono:

- Competenza alfabetica funzionale
- Competenza multilinguistica
- Competenza matematica e Competenza in Scienze, Tecnologie e Ingegneria
- Competenza digitale
- Competenza personale, sociale e capacità di imparare a imparare
- Competenza in materia di cittadinanza
- Competenza imprenditoriale
- Competenza in materia di consapevolezza ed espressione culturali

Al termine del primo ciclo lo studente dovrebbe aver conseguito due tipi di competenze descritte nel Profilo dello Studente all'interno dei Quadri di Riferimento:

- le competenze trasversali: lo studente è in grado di affrontare in autonomia e con responsabilità situazioni tipiche della propria età esprimendo la propria personalità in tutte le sue dimensioni.

- le competenze specifiche: consentono l'analisi di dati reali e il possesso di un pensiero razionale che gli permetta di affrontare situazioni e problemi della vita quotidiana.

Le Indicazioni per il Primo Ciclo sono divise in traguardi e obiettivi di apprendimento. I traguardi sono prescrittivi e costituiscono i criteri per la valutazione delle competenze attese. Gli obiettivi di apprendimento individuano campi del sapere, conoscenze e abilità ritenuti indispensabili al raggiungimento dei traguardi per lo sviluppo delle competenze. In questo documento gli obiettivi relativi all'apprendimento della matematica vengono suddivisi in quattro ambiti: Numeri, Spazio e Figure, Relazioni e Funzioni, Dati e Previsioni.

Se le Indicazioni Nazionali per il primo ciclo rappresentano un documento unitario per l'educazione matematica fino ai quattordici anni, diverso è il quadro per la scuola secondaria di secondo grado. In base alla tipologia di istituto scolastico esistono 3 diversi documenti di riferimento:

- Le Indicazioni Nazionali per i Licei[2]
- Le Linee Guida per gli Istituti tecnici[3] e professionali[4]

Tutti e tre i documenti declinano gli obiettivi differenziandoli per il primo biennio, secondo biennio e quinto anno.

Nelle Linee Guida viene data molta importanza del laboratorio, a differenza di quanto venga esplicitato nelle Indicazioni. Rispetto alla metodologia nelle Indicazioni non viene dettato un modello didattico, questo favorisce la sperimentazione e lo scambio di esperienze metodologiche. In entrambi i documenti è richiesta una continuità rispetto al primo ciclo per favorire una verticalizzazione del curriculum, in particolare nelle Linee Guida viene sottolineata l'attenzione alle competenze trasversali. La descrizione degli obiettivi fondamentali differisce per forma e sostanza:

- all'elenco proposto nelle Linee Guida si contrappone la forma discorsiva delle Indicazioni;

[2]Consultabile al sito `https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf`

[3]Consultabile al sito `https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/nuovi_tecnici/INDIC/_LINEE_GUIDA_TECNICI_.pdf`

[4]Consultabile al sito `https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/nuovi_professionali/linee_guida/_LINEE%20GUIDA%20ISTITUTI%20%20PROFESSIONALI_.pdf`

- nelle Linee Guida per ogni disciplina si indicano le competenze di base attese a conclusione dell'obbligo di istruzione e in colonne distinte si elencano abilità e conoscenze. Nelle Indicazioni vengono introdotte le linee generali e le competenze per poi descrivere gli obiettivi di apprendimento specifici.

2.1.3 La probabilità all'interno dei quadri di riferimento

Riferimenti espliciti al concetto di probabilità e al pensiero probabilistico annesso si trovano già a partire dalle Indicazioni nazionali per il curricolo del primo ciclo. Tra i traguardi per lo sviluppo delle competenze al temine della scuola primaria è richiesto che *lo studente riconosca e quantifichi, in casi semplici, situazioni di incertezza.*

Nell'ambito Relazioni, dati e previsioni degli obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta ricorre la voce

In situazioni concrete, di una coppia di eventi intuire e cominciare ad argomentare qual è il più probabile, dando una prima quantificazione nei casi più semplici, oppure riconoscere se si tratta di eventi ugualmente probabili.

In linea con la continuità verticale espressamente cercata all'interno di tutti i quadri di riferimento, tra i traguardi al termine della scuola secondaria di primo grado vengono richiamate le situazioni di incertezza all'interno delle quali lo studente sta imparando a muoversi ed in particolare

Nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi...) si orienta con valutazioni di probabilità.

Nell'ambito Dati e previsioni emergono elementi più specifici della probabilità e prerequisiti funzionali al suo apprendimento nella scuola secondaria di secondo grado. Tra gli obiettivi di apprendimento figurano:

In semplici situazioni aleatorie, individuare gli eventi elementari, assegnare a essi una probabilità, calcolare la probabilità di qualche evento, scomponendolo in eventi elementari disgiunti.

Riconoscere coppie di eventi complementari, incompatibili, indipendenti.

Nel secondo ciclo vengono dunque utilizzati gli elementi introdotti in precedenza per introdurre gli studenti al *concetto di base dal calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica*, come si legge nelle Indicazioni Nazionali per i Licei.

Nel primo biennio *lo studente apprenderà la nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica.* Al quarto anno lo studente

> *Studierà la probabilità condizionata e composta, la formula di Bayes e le sue applicazioni, nonché gli elementi di base del calcolo combinatorio.*

In base al tipo di liceo frequentato tali argomentazioni verranno approfondite opportunamente o semplificate, per concludere al quinto anno con lo studio delle distribuzioni (normale e di Poisson solo per il Liceo Scientifico). Similmente nelle Linee Guida viene richiesto che alla fine del primo biennio lo studente conosca *il significato della probabilità e sue valutazioni. Semplici spazi (discreti) di probabilità: eventi disgiunti, probabilità composta, eventi indipendenti. Probabilità e frequenza* e sia capace di *calcolare la probabilità di eventi elementari.* Viene dunque anche richiesta la capacità di utilizzare la formula di Bayes nei problemi di probabilità condizionata alla fine del percorso quinquennale.

2.2 La probabilità a confronto nei libri di testo

Strumento fondamentale per favorire un'adeguata trasposizione didattica è il libro di testo a cui l'insegnante fa riferimento e con cui gli studenti si confrontano in autonomia durante il lavoro svolto a casa.

È infatti interessante analizzare come il concetto di probabilità venga introdotto e affrontato all'interno dei libri di testo. Per tale confronto ho utilizzato quattro testi di riferimento:

- LOESCHER, Matematica c.v.d. ed. Blu vol.2, G. Cariani, M. Fico, I. Pelicioli [9]
- PETRINI, Colori della matematica ed. Blu vol.2, L. Sasso, C. Zanone [34]
- LA SCUOLA, Linee di algebra vol.2, L. Scaglianti, F. Bruni [35]
- ZANICHELLI, Matematica.blu vol.2, M. Bergamini, G. Barozzi, A. Trifone [3]

Tutti i volumi proposti sono rivolti a studenti di un liceo scientifico.

I testi considerati hanno numerose analogie, ma anche tanti elementi differenti, sia nell'impostazione del capitolo sia nella modalità di spiegazione. Una prima differenza riguarda la posizione del capitolo relativo alla probabilità all'interno dei libri: solo nel testo "Matematica.blu" è inserito in appendice, mentre negli altri tre è parte integrante del percorso disciplinare dello studente.

In "Colori della matematica" la trattazione è molto ricca non solo in relazione ai concetti teorici necessariamente presentati ma per l'approccio, dove possibile, più discorsivo. Emergono, ad esempio, anche riferimenti storici e non solo teorici per presentare allo studente il concetto di probabilità da più punti di vista. In questo libro infatti la probabilità viene inizialmente definita come un numero che esprime il grado di fiducia attribuito al verificarsi di un evento (quindi implicitamente la definizione soggettiva) ma subito dopo vengono presentate chiare ipotesi e presupposti per presentare la probabilità mediante la definizione classica di Laplace, anche se tale definizione non occupa l'argomentazione centrale.

Lo studente viene accompagnato all'interno del capitolo in un percorso che spiega le criticità della definizione classica e introduce sia la definizione frequentista che quella soggettiva. Particolare attenzione è riposta anche nella spiegazione dell'approccio assiomatico moderno della probabilità. In "Matematica c.v.d" l'approccio assiomatico viene presentato per primo e, a differenza di tutti gli altri testi, la definizione classica, seppur protagonista del capitolo, compare esplicitamente dopo la descrizione assiomatica della probabilità.

"Linee di algebra" è tra i testi citati il meno recente, infatti l'impostazione proposta si discosta notevolmente dagli altri. Non viene fatta menzione della definizione soggettiva e assiomatica, ma, oltre alla definizione classica, viene solo citata la definizione frequentista. Interessante a mio parere è il collegamento che il testo propone tra tale definizione e il concetto di gioco equo, che in nessun altro testo viene presentato.

Inoltre, a differenza degli altri tre testi, non vi è alcuna sezione dedicata alla spiegazione del linguaggio specifico della probabilità: la parola evento è utilizzata ma non definita chiaramente. Non vengono menzionati poi i concetti di esperimento aleatorio, spazio campionario e non vi è alcun riferimento alla rappresentazione grafica degli eventi. I concetti appena citati, insieme alle operazioni tra eventi, trovano invece ampio spazio in tutti gli altri testi all'inizio del capitolo.

Il linguaggio insiemistico è richiamato solo nei tre manuali più recenti proprio per descrivere e analizzare il concetto di evento e di operazioni tra eventi e approcciarsi ai primi esercizi di probabilità. Nel testo della Zanichelli la relazione tra i concetti della teoria degli insiemi e le operazioni tra eventi non viene del tutto esplicitata, a differenza di quanto accade negli altri due, nei quali l'utilizzo di tabelle riassuntive mette realmente in evidenza l'applicazione del linguaggio insiemistico nell'ambito di eventi e spazi campionari propri della probabilità. Ogni testo guida lo studente nella conversione da un registro linguistico a uno matematico in particolare nell'analisi delle operazioni tra eventi.

Nel manuale "Linee di Algebra" il capitolo relativo alla probabilità è estremamente conciso e poco completo. I teoremi della probabilità vengono accennati senza formalismo e la trattazione risulta schematica. Il concetto di probabilità condizionata, pur non essendo richiamato all'interno delle Indicazioni Nazionali, viene presentato negli altri manuali.

Decisamente diverso invece è l'approccio dei testi al calcolo combinatorio. Nel manuale della Zanichelli non viene citato né all'interno del capitolo, né in un capitolo a parte. Nel testo de La Scuola è all'interno del capitolo relativo alla probabilità, come se fosse argomentazione necessaria per comprendere tale concetto. Nel testo della Loescher è descritto nel capitolo precedente alla probabilità e infine in "Colori della matematica" viene accennato all'interno del capitolo dopo la definizione classica.

Il manuale della Zanichelli è, tra i più recenti, quello più schematico e riassuntivo, come si evince dall'assenza, a inizio capitolo, di un'introduzione, come presente invece negli altri due testi. In particolare in "Colori della matematica" la spiegazione si sviluppa a partire dall'idea di incertezza e dall'applicazione del calcolo delle probabilità nato, citando il testo, dal gioco d'azzardo. Invece in "Matematica c.v.d." il discorso si apre analizzando ciò che con certezza può essere calcolato attraverso le leggi della fisica e cosa invece no.

Nel libro "Matematica.blu", mediante risorse web extra, vengono presentati due approfondimenti ed esempi di probabilità: il dilemma di Monty Hall e l'analisi del gioco del Superenalotto. Il testo risulta ricco di risorse e riferimenti esterni mediante schede di approfondimento, esercizi aggiuntivi e riproduzioni audio in inglese di alcuni elementi teorici. Il materiale audio è presente anche nel testo della Loescher, così come materiale extra. Nel manuale della Petrini numerosi sono i riferimenti digitali proposti che non solo riguardano la probabilità, ma analizzano anche l'aspetto storico di tale argomento, oltre che proporre collegamenti interdisciplinari e intradisciplinari.

"Il problema di una definizione universale di probabilità rimane aperto": con questa frase tra le righe del capitolo in "Matematica c.v.d." (nella sezione relativa alla definizioni di probabilità frequentista e soggettiva) emerge un'immagine dinamica di probabilità. Penso che presentare ai ragazzi la probabilità come qualcosa di non del tutto definito, non del tutto chiaro e soprattutto ancora in evoluzione sia una novità rispetto ai problemi e ai concetti che normalmente vengono ormai "presi per buoni" quando si parla di probabilità, poiché spesso lo studente accetta passivamente le nozioni senza pensare che possano essere messe in discussione.

Troviamo infine particolarmente interessante anche un'argomentazione presentata nel testo della Loescher dopo l'introduzione della definizione frequentista, di seguito riportata.

> Nell'estrazione del Lotto il fatto che un numero ritardi non deve far pensare che è più probabile che esca nelle estrazioni successive. Non esiste infatti alcun modo in cui una data estrazione possa essere influenzata dalle precedenti. Come si spiega allora il ritardo di certi numeri? Semplicemente con il fatto che *n* non è abbastanza grande e le frequenze non sono stabilizzate. In alternativa si può pensare che non tutte le palline abbiano la stessa probabilità di estrazione, magari per motivi indipendenti dalla volontà dei gestori del gioco. In tal caso conviene puntare sui numeri che escono con maggior frequenza e non sui ritardatari...

Figura 2.1: Estratto dal libro di testo Matematica c.v.d.

Emerge a mio parare uno degli aspetti che contraddistinguono la probabilità e che caratterizza la possibile difficoltà riscontrata dagli studenti nell'apprendere tale argomento: andare contro il senso comune, contro ciò che ciascuno di noi crede di sapere, perché la probabilità ci può aiutare a capire quanto e come possiamo fallire, ma può anche aiutarci a non farlo.

2.2.1 L'importanza del linguaggio

Come ogni disciplina, anche la matematica, nello specifico dunque il Calcolo delle probabilità, necessita di un linguaggio specifico. L'importanza e la necessità di un linguaggio specifico emerge anche nell'analisi dei libri di testo proposta.

La matematica ha sviluppato nel tempo un linguaggio specialistico che è diventato sempre più universale, preciso, conciso ed efficace. Tale linguaggio è dotato di un proprio codice semiologico, che si realizza in testi in cui convivono termini tecnici, figure e grafici, ed espressioni simboliche (equazioni, formule, espressioni algebriche ecc.); queste ultime, a volte, sono inserite in frasi che, per il resto, appartengono alla lingua comune (ne è un semplice esempio «Trovare le soluzioni dell'equazione $x^2 - 2 = 0$»). Numerosi autori in ambito di didattica della matematica hanno evidenziato come tra le cause delle difficoltà di apprendimento della disciplina da parte degli studenti vi sia proprio l'acquisizione del linguaggio "speciale" della matematica, spesso in contrasto con la lingua utilizzata fuori dal contesto scolastico a ciò si aggiungono alcuni problemi di comunicazione e di comprensione legati alla mancata padronanza della lingua comune. Individuate tanto dai matematici quanto dai linguisti sono in particolare le caratteristiche di precisione, concisione e universalità ad amplificare le difficoltà di apprendimento disciplinare. La sovrapposizione del linguaggio matematico con il linguaggio quotidiano può infatti generare equivoci e incomprensioni.

Il linguaggio nell'insegnamento dovrebbe essere usato per facilitare la comprensione: questo principio potrebbe avere come diretta conseguenza il rifuggire dal linguaggio specifico. D'altra parte, soprattutto per la matematica, la costruzione del linguaggio specifico è un obiettivo del percorso educativo.

lo studente deve saper padroneggiare il linguaggio formale e i procedimenti dimostrativi della matematica[5]

Non si può quindi evitare di far entrare in contatto gli allievi con quel linguaggio specifico, anzi occorre imporlo affinché lo facciano proprio. Questa contrapposizione prende il nome di paradosso del linguaggio specifico.

La mescolanza tra linguaggio quotidiano e specifico è quindi inevitabile e la conseguenza principale è l'utilizzo, da parte degli insegnanti, di una forma ibrida di questi registri, fenomeno che D'Amore chiama *matematichese* [11]. Questa pseudo-lingua viene utilizzata dall'insegnante nel tentativo di semplificare il linguaggio per superare il paradosso e l'allievo cerca di imitare l'insegnante rinunciando al senso e prestando attenzione alla forma.

Dalla letteratura emerge che per superare il paradosso è necessario mediare tra le attese dell'insegnante sulla correttezza della comunicazione e le verifiche sull'efficacia di questa. Il rigore matematico ha lo scopo di semplificare la comprensione e migliorare l'efficacia della comunicazione e deve essere quindi imposto. Fondamentale è dunque la scelta degli esempi proposti per far capire l'importanza di un linguaggio rigoroso ed è necessario mettere in relazione tra loro le varie tipologie di linguaggio, per evidenziare le differenze e le analogie, al fine di superare il paradosso e favorire l'apprendimento comunicativo [6] degli studenti.

[5] Obiettivo di apprendimento relativo al secondo biennio e quinto anno indicato nelle Linee Guida

[6] L'apprendimento comunicativo è legato all'abilità dell'allievo di esprimere idee matematica, giustificando, argomentando, dimostrando e rappresentando in modo efficace e visivo.

Una caratteristica del linguaggio della matematica è la sintesi (o concisione), che è in realtà una brevità densa d'informazione. Nel concetto di definizione, caratteristico dell'ambito matematico e in particolare dei libri scolastici, la sintesi trova l'espressione massima. Dalla sua origine aristotelica in avanti, è diventato patrimonio di diversi ambiti del sapere e della loro sistemazione. È, inoltre, appannaggio del senso comune, per il quale la definizione è una sorta di spiegazione: lo conferma il GRADIT (Il Grande dizionario italiano dell'uso (anche GRADIT o GDIU) è un dizionario d'italiano dell'uso curato da Tullio De Mauro,), in cui al lemma "definizione" si legge proprio la parola "spiegazione" «delle qualità, della natura, delle caratteristiche» di qualcosa. In matematica la definizione presenta tratti peculiari [17]. In [13] D'Amore – Fandiño Pinilla illustrano la prossimità della definizione con altre operazioni come la denotazione o la descrizione, e la varietà delle funzioni dell'atto di definire: «una definizione serve a identificare, a circoscrivere, a indicare, a scegliere, a designare, a denominare, a denotare, perfino a connotare». Ciò che però è meno evidente ai non specialisti è il valore strumentale che assume la definizione in matematica: «la compattezza della definizione fornisca uno strumento, laddove un elenco completo è o impossibile (come nel caso dei numeri primi che sono notoriamente infiniti) o troppo complesso quando l'elenco sarebbe improponibile». Questa compattezza non implica solo una selezione delle informazioni, ma anche una loro formulazione in forma sintetica e generale (cosa che distingue la definizione da un elenco di caratteristiche) [12].

2.3 La probabilità nei testi INVALSI

INVALSI è l'Ente di ricerca dotato di personalità giuridica di diritto pubblico che ha raccolto, in un lungo e costante processo di trasformazione, l'eredità del Centro Europeo dell'Educazione (CEDE) istituito nei primi anni settanta del secolo scorso. Annualmente INVALSI predispone delle prove scritte, a carattere nazionale, volte a verificare i livelli generali e specifici di apprendimento conseguiti dagli studenti delle classi seconda e quinta di scuola primaria, della classe terza di scuola secondaria di primo grado e delle classi seconda e quinta della secondaria di secondo grado (corrispondenti, rispettivamente, ai livelli scolastici: 2, 5, 8, 10, 13); L'Istituto, inoltre, si occupa di:

- effettuare verifiche periodiche sulle conoscenze e abilità degli studenti e sulla qualità complessiva dell'offerta formativa delle istituzioni di istruzione e di istruzione e formazione professionale, anche nel contesto dell'apprendimento permanente; in particolare gestisce il Sistema Nazionale di Valutazione (SNV);

- studiare le cause dell'insuccesso e della dispersione scolastica con riferimento al contesto sociale ed alle tipologie dell'offerta formativa;

- provvedere alla valutazione dei livelli di apprendimento degli studenti a conclusione dei percorsi dell'istruzione secondaria superiore, utilizzando le prove scritte degli esami di Stato secondo criteri e modalità coerenti con quelli applicati a livello internazionale per garantirne la comparabilità;

- fornire supporto e assistenza tecnica all'amministrazione scolastica, alle regioni, agli enti territoriali, e alle singole istituzioni scolastiche e formative per la realizzazione di autonome iniziative di monitoraggio, valutazione e autovalutazione;

- svolgere attività di formazione del personale docente e dirigente della scuola, connessa ai processi di valutazione e di autovalutazione delle istituzioni scolastiche;

- svolgere attività di ricerca;

- rappresentare il Paese nei progetti di valutazione internazionale come TIMSS (Triends in international mathematics and science study), OCSE-PISA (Programme for International Student Assessment);

- formulare proposte per la piena attuazione del sistema di valutazione dei dirigenti scolastici, definisce le procedure da seguire per la loro valutazione, formula proposte per la formazione dei componenti del team di valutazione e realizza il monitoraggio sullo sviluppo e sugli esiti del sistema di valutazione.

I quesiti proposti all'interno del test INVALSI vengono costruiti sulla base del Quadro di Riferimento[7]. Tale documento è elaborato a partire dalle Indicazioni Nazionali e dalle Linee Guida, riprendendone in particolare gli ambiti di contenuto e i traguardi di sviluppo delle competenze. Per quanto concerne alla matematica infatti i quattro ambiti di riferimento sono, coerentemente con le Indicazioni: Numeri, Spazio e figure, Relazioni e funzioni, Dati e previsioni.

[7] Consultabile al sito `https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_MATEMATICA.pdf`

I quesiti relativi alla probabilità rientrano nell'ultimo ambito tematico nella cui descrizione, alla voce Oggetti di valutazione, si trova:

- Evento certo, possibile e impossibile;
- Campione estratto da una popolazione: casuale e non casuale;
- Probabilità di un evento: valutazione della probabilità eventi elementari ed equiprobabili;
- Semplici valutazioni di probabilità di un evento a partire da dati statistici.

Osservando i traguardi di sviluppo indicati nella tabella sottostante, si nota la coerenza con le Indicazioni Nazionali sopra descritte. Lo studente deve imparare a muoversi in condizioni in incertezza e imparare a prendere delle decisioni, aumentando la propria autonomia procedendo nel percorso scolastico. Al termine del quinto anno di scuola superiore di secondo grado dovrà padroneggiare il concetto di probabilità e probabilità composta.

INVALSI Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione

Ente di Diritto Pubblico Decreto Legislativo 286/2004

Traguardi al termine della Scuola Primaria	Traguardi al termine della Scuola Secondaria di Primo Grado	Traguardi al termine della Scuola Secondaria di Secondo Grado
6. Riconosce e quantifica, in casi semplici, situazioni di incertezza.	**10**. Nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi, ecc.) si orienta con valutazioni di probabilità.	**12**. Esprime valutazioni e stime di probabilità in situazioni caratterizzate da incertezza. Esprime stime di probabilità di eventi composti a partire dalla conoscenza delle probabilità di eventi elementari.

Figura 2.2: Traguardi di sviluppo delle competenze relativi alla probabilità nei test INVALSI

2.4 Educazione civica a scuola

Da settembre 2020 l'Educazione Civica è una disciplina trasversale che interessa tutti i gradi scolastici, a partire dalla scuola dell'Infanzia fino alla scuola secondaria di II grado[8].

[8] Consutabile al sito `https://www.istruzione.it/educazione_civica/`

L'insegnamento ruota intorno a tre nuclei tematici principali:

1. COSTITUZIONE, diritto (nazionale e internazionale), legalità e solidarietà
2. SVILUPPO SOSTENIBILE, educazione ambientale, conoscenza e tutela del patrimonio e del territorio
3. CITTADINANZA DIGITALE

Come si legge nel comma 1 dell'articolo 1 della Legge n.92 del 20 agosto 2019

L'educazione civica contribuisce a formare cittadini responsabili e attivi e a promuovere la partecipazione piena e consapevole alla vita civica, culturale e sociale delle comunità, nel rispetto delle regole, dei diritti e dei doveri

La norma richiama il principio della trasversalità del nuovo insegnamento, anche in ragione della pluralità degli obiettivi di apprendimento e delle competenze attese, non ascrivibili a una singola disciplina e neppure esclusivamente disciplinari. Occorre creare agevole raccordo fra le discipline e le esperienze di cittadinanza attiva che devono concorrere a comporre il curricolo di educazione civica. Ogni disciplina è, di per sé, parte integrante della formazione civica e sociale di ciascun alunno [15].

Vengono individuati specifici traguardi per lo sviluppo delle competenze e obiettivi specifici di apprendimento, in coerenza con le Indicazioni nazionali per il curricolo delle scuole dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione, nonché con il documento Indicazioni nazionali e nuovi scenari e con le Indicazioni nazionali per i licei e le linee guida per gli istituti tecnici e professionali vigenti, assumendo a riferimento le seguenti tematiche:

- Costituzione, istituzioni dello Stato italiano, dell'Unione europea e degli organismi internazionali; storia della bandiera e dell'inno nazionale;
- Agenda 2030 [9] per lo sviluppo sostenibile, adottata dall'Assemblea generale delle Nazioni Unite il 25 settembre 2015;
- Educazione alla cittadinanza digitale, secondo le disposizioni dell'articolo 5;

[9] Il 25 settembre 2015, i 193 Paesi membri dell'ONU hanno adottato l'Agenda 2030 per uno sviluppo sostenibile. In vigore dal 2016 con i suoi 17 obiettivi di sviluppo sostenibile (Suistainable Development Goals, SDGs), l'Agenda costituisce il nuovo quadro di riferimento globale e universale per lo sviluppo sostenibile.

- Elementi fondamentali di diritto, con particolare riguardo al diritto del lavoro;

- Educazione ambientale, sviluppo eco-sostenibile e tutela del patrimonio ambientale, delle identità, delle produzioni e delle eccellenze territoriali e agroalimentari;

- Educazione alla legalità e al contrasto delle mafie;

- Educazione al rispetto e alla valorizzazione del patrimonio culturale e dei beni pubblici comuni;

- Formazione di base in materia di protezione civile.

Nell'ambito dell'insegnamento trasversale (comma 2 art.3) dell'educazione civica sono promosse l'educazione stradale, l'educazione alla salute e al benessere, l'educazione al volontariato e alla cittadinanza attiva, per rafforzare il rispetto nei confronti delle persone, degli animali e della natura.

L'insegnamento dell'Educazione Civica è dunque strutturato per sviluppare alcune tra le competenze chiave definite dal Parlamento Europeo, in particolare:

- Competenza digitale : presuppone l'interesse per le tecnologie digitali e il loro utilizzo con dimestichezza e spirito critico e responsabile per apprendere, lavorare e partecipare alla società.

- Competenza in materia di cittadinanza: si riferisce alla capacità di agire da cittadini responsabili e di partecipare pienamente alla vita civica e sociale, in base alla comprensione delle strutture e dei concetti sociali, economici, giuridici e politici oltre che dell'evoluzione a livello globale e della sostenibilità.

Capitolo 3

Il gioco d'azzardo: origini, criticità e aspetti psicologici

Il capitolo tratta le origini del gioco d'azzardo, la diffusione tra gli adolescenti in Italia e le dinamiche psicologiche ed emotive legate alla dipendenza da gioco d'azzardo. Il concetto di equità rappresenta l'elemento centrale del capitolo e viene analizzato nel gioco del SuperEnalotto e della Roulette.

3.1 Il gioco d'azzardo

Un gioco d'azzardo è un qualsiasi gioco il cui esito è aleatorio, ovvero influenzato dal caso [1].

Il termine gioco d'azzardo indica un'attività che prevede l'investimento irreversibile di una posta in denaro sulla previsione di un esito incerto, in cui poco contano le proprie abilità e poco incidono le proprie conoscenze ai fini del raggiungimento del risultato, essendo questo determinato in larga misura o persino totalmente dal caso.

Fare una giocata perfetta e vincere regala una sensazione pazzesca e adrenalinica. Ma c'è una cosa molto importante che tutti coloro che giocano dovrebbero sempre tenere a mente: non c'è alcun modo di pronosticare il risultato e il rischio di perdere e di farsi prendere la mano è molto alto.

Fino al 1638 non c'erano luoghi in cui le persone, per lo più di sesso maschile, si potessero riunire in maniera "ufficiale" per scommettere. C'erano le cosiddette bische clandestine, dove giocatori regolari si riunivano ma senza una legge che permettesse loro di scommettere in maniera indisturbata.

La parola "casinò" fu coniata verso la fine del XVIII e l'inizio del XIX secolo. In tale periodo iniziò l'inarrestabile diffusione delle case da gioco, specialmente nell'Europa continentale. Tali edifici erano più simili a dei sontuosi palazzi che a dei semplici luoghi per giocare a carte. Questo fenomeno può essere analizzato, da un punto di vista sociologico, come una distinzione di classe: alle bische clandestine con giocatori di ceti meno abbienti, magari in cerca di fortuna, si contrappongono, con la nascita dei casinò, coloro che giocano non solo per il "gusto" di giocare, ma anche per riunirsi in un contesto "diverso".

La metropoli più famosa al mondo per i suoi casinò è senza dubbio Las Vegas. Nel 1905 i lavoratori della ferrovia, che montavano i binari per collegare Las Vegas con la costa del Pacifico e città come Los Angeles e Salt Lake City, avevano bisogno di un luogo di svago dopo il lavoro. Gioco d'azzardo, alcolici e prostituzione divennero ben presto i vizi di Las Vegas, ma le autorità statali per frenare tali licenziose attività, istituirono una legge che vietava il gioco d'azzardo dal 1910 fino al 1931. In un'epoca di bar clandestini e proibizionismi, non c'era, però, modo di fermare questo circolo vizioso a tal punto che venne deciso di legalizzare nuovamente, e definitivamente, il gioco d'azzardo. Conseguenza di questa legalizzazione fu l'aumento esponenziale del numero di giocatori. Nonostante il Golden Gate fosse il primo casinò legale presente nella città, solo nel 1941 fu costruito un vero e proprio resort del gioco d'azzardo dove oltre al gioco, si cantava e si ballava: El Rancho Vegas [27].

Fino a qualche tempo fa l'Italia non era tra i paesi in cui il gioco d'azzardo era molto diffuso. La cultura del popolo italiano, basata sulla propensione al risparmio, ed una severa impostazione legislativa hanno storicamente arginato il dilagare di comportamenti d'azzardo tra la popolazione.

Il codice penale ne dà una definizione all'Art. 721: "sono giuochi d'azzardo quelli nei quali ricorre il fine di lucro e la vincita o la perdita è interamente o quasi interamente aleatoria" e lo inserisce tra le attività vietate. L'Art. 718 ne punisce l'esercizio e l'Art. 720 punisce la partecipazione a giochi d'azzardo[1]. Questa impostazione aveva determinato un'offerta estremamente limitata: nel nostro territorio prima del 2000 erano presenti solo quattro Case da Gioco

[1]Dispositivo dell'art. 720 Codice Penale Chiunque, in un luogo pubblico o aperto al pubblico, o in circoli privati di qualunque specie, senza esser concorso nella contravvenzione preveduta dall'articolo 718, è colto mentre prende parte al giuoco di azzardo [721], è punito con l'arresto fino a sei mesi o con l'ammenda fino a euro 516. La pena è aumentata:

1. nel caso di sorpresa in una casa da giuoco [721] o in un pubblico esercizio;
2. per coloro che hanno impegnato nel giuoco poste rilevanti [722].

nello zone turistiche o di confine (Sanremo, Saint Vincent, Campione d'Italia e Venezia).

A partire dagli anni '90 e a seguito soprattutto dell'affidamento nel 2003 del comparto del gioco d'azzardo lecito, sono occorsi numerosi cambiamenti frutto di una nuova cornice, quella del gioco d'azzardo industrializzato di massa. L'azzardo, un tempo considerato attività improduttiva e per nulla incentivato, ha iniziato ad essere proposto come attività ricreativa e mezzo per risanare i bilanci dello Stato. Gli spot pubblicitari trasmessi all'inizio di un video su YouTube o in televisione sono strumenti molto pericolosi. Mediante questi mezzi di comunicazione vengono diffusi messaggi sbagliati sul gioco d'azzardo, usando appositamente frasi e parole che confondono e nascondono la realtà. Prendiamo per esempio la pubblicità di Unibet [2] del 2017. "Sappiamo che non siete fortunati ma intelligenti" : questa affermazione è assolutamente forviante perché principalmente è tutta una questione di fortuna. Cercano di sminuire l'aspetto economico affermando che "non è una questione di soldi" ma che "vi piace vincere", giocando dunque sull'aspetto emotivo, sull'adrenalina dovuta ad un successo, oscurando però ciò che tale isolato successo può provocare. Si vuole proporre un'immagine del giocatore come vincente, intelligente, quasi eroico. E in 3-4 secondi, alla fine, la voce in sottofondo avverte che "il gioco è vietato ai minori e può causare dipendenza patologica". Una presa in giro non indifferente.

Nella pubblicità di giocodigitale.it del 2015, lo spettatore viene subito messo in guardia che "il gioco è vietato ai minori e può causare dipendenza patologica" sempre in massimo 3 secondi, ma il messaggio viene oscurato dal coro da stadio intonato di seguito, che inevitabilmente rimane in testa per invitarci a giocare. Non possiamo tralasciare il "bonus di benvenuto", un finto regalo che permetterà di non usare i propri soldi e quindi vincere senza aver perso nulla, ma che rappresenta solo una strategia di marketing per far cominciare a giocare.

Solo nel 2018 è stata introdotta una legge che limita la promozione del gioco d'azzardo come nuovo segmento di mercato e settore industriale.

È vietata qualsiasi forma di pubblicità, anche indiretta, relativa a giochi o scommesse con vincite di denaro nonché al gioco d'azzardo, comunque effettuata e su qualunque mezzo,

[2] Unibet è una società che opera nel mercato del gioco d'azzardo online e si colloca all'interno del panorama web offrendo prodotti come Poker online, Casinò online, Gratta e vinci, Scommesse Sportive, Scommesse Live, bingo online e Slot machine. La società ha sede a Malta ed è proprietà di Unibet Group plc, gruppo quotato al NASDAQ OMX Nordic Exchange. Il fatturato della compagnia nel 2011 è stato di oltre 197,2 milioni di GPB.

Sono esclusi dal divieto di cui al presente comma le lotterie nazionali a estrazione differita e i loghi sul gioco sicuro e responsabile dell'Agenzia delle dogane e dei monopoli.

3.1.1 Il gioco d'azzardo in Italia oggi: quanto, dove e a cosa si gioca

Nel 2020 il 42% dei ragazzi tra i 14 e i 19 anni ha fatto giochi d'azzardo/di fortuna, sviluppando nel 9% dei casi pratiche di gioco problematiche, con ripercussioni negative sulla sfera socio-emotiva e relazionale. Sono questi alcuni dati emersi dall'Osservatorio Gioco d'azzardo 2021, realizzato da Nomisma, società che realizza ricerche di mercato e consulenze, rivolgendosi ad imprese, associazioni e istituzioni pubbliche, in collaborazione con BPER Banca [25]. La fotografia evidenzia la diffusione del gioco d'azzardo in Italia e suggerisce l'importanza di un monitoraggio costante del fenomeno per definire azioni efficaci e concrete di prevenzione e sensibilizzazione. Nel 2020 il volume complessivo di gioco ha raggiunto gli 88,38 miliardi di euro, il 17,3% in meno rispetto al 2018. Le vincite ammontano a 75,36 miliardi di euro, con una perdita netta di 13,02 mld.

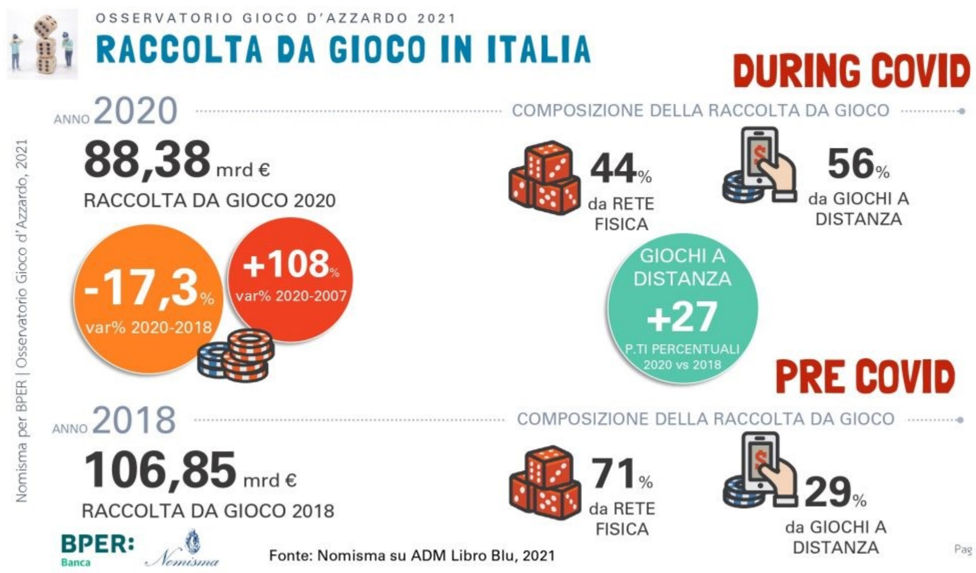


Figura 3.1: Raccolta da gioco in Italia

I giochi di carte o abilità rappresentano la principale fonte della raccolta da gioco (37,5 mrd), seguiti da newslot (18,97 mrd), scommesse a base sportiva/ippica (11,34 mrd), lotterie e gratta e vinci (8,17 mrd), lotto (6,41 mrd), scommesse virtuali e betting exchange (3,81 mrd), giochi numerici a totalizzatore (1,26 mrd) e, infine, Bingo (0,92 mrd). L'avvento di Internet ha rivoluzionato anche il mondo ludico. Questi giochi sono accessibili ovunque, in qualsiasi momento da chiunque e in modo anonimo. Sono inoltre caratterizzati da una grande competizione (che rende certamente più interessante la sfida). Un'altra caratteristica di molti giochi è che sono veloci, spesso consentono di ripetere le giocate senza limiti, salvo quello posto dalla propria disponibilità di denaro, e rivelano l'esito immediatamente. Nonostante il gioco d'azzardo, in tutte le sue forme, sia vietato ai minorenni, il Web ha spalancato le porte di questo mondo a tutti. Riguardo alle app sui principali store online se ne trovano a bizzeffe. E sono tutte gratuite. Ma si trovano immagini allettanti anche sui social ed è molto facile lasciarsi sedurre. Quando si chiede "conferma di essere un adulto", cosa ci vuole a "flaggare" un sì? Nell'anno della pandemia è aumentata di 27 punti percentuali la quota attribuibile ai giochi a distanza, che ha superato la "rete fisica": 56% contro 44%.

3.2 La GenZ e il gioco d'azzardo

L'Osservatorio Gioco d'Azzardo di Nomisma ha dedicato un approfondimento alla GenZ (ragazzi di età compresa fra i 14 e i 19 anni), rilevando numeri e dati meritevoli di riflessioni. L'Osservatorio mostra come negli ultimi 12 mesi è stato il 42% dei giovani tra i 14 e i 19 anni a fare giochi d'azzardo – contro il 48% del 2018 e il 54% del 2014.

Figura 3.2: Giovani e propensione al gioco d'azzardo

Nel segmento degli under 19 la curiosità (per il 39% degli intervistati) e il divertimento (per il 36%) sono le leve principali che spingono i giovani a giocare, mentre il bisogno di denaro e la convinzione di vincere facilmente sono motivazioni d'ingresso rispettivamente per il 18% e il 12% della GenZ. Altri ragazzi, invece, hanno giocato d'azzardo perché il gioco è una pratica presente nella sfera familiare (17%) o amicale (12%).

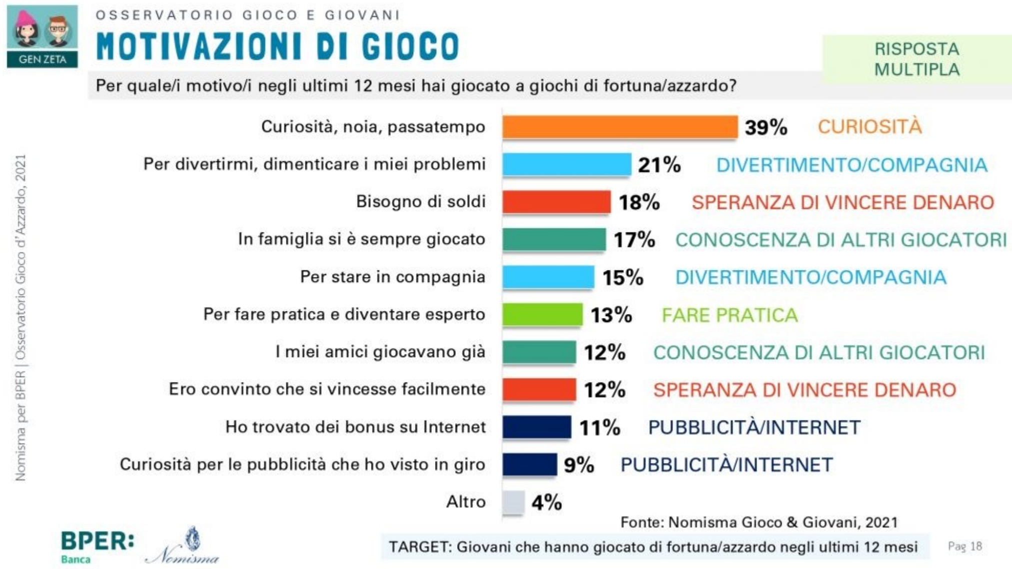


Figura 3.3: Motivazioni di gioco

I comportamenti di gioco dei ragazzi: frequenza e modalità Secondo questo studio nel 2020 il 5% dei giovani ha giocato almeno una volta a settimana o tutti i giorni o quasi (frequent player), il 5% lo ha fatto con cadenza mensile e il 32% ancora più raramente. Complici la pandemia e le limitazioni agli spostamenti imposte dallo scenario Covid e una maggiore propensione al digitale, l'online è oggi il canale di gioco prevalente per 1 player su 3 (31%), con il picco delle scommesse sportive online, praticate dal 42% dei soggetti (al secondo posto il poker online con il 24% e il casinò online con il 21%). In presenza, invece, il gioco più diffuso fra la Gen Zeta è il Gratta & Vinci, con il 56% delle preferenze, seguito dalle scommesse sportive in agenzia (22%).

A prescindere che si giochi nel reale o nel virtuale, da sempre la linea di confine tra il gioco come divertimento (detto anche gioco responsabile) ed una vera e propria dipendenza patologica, dove è il gioco ad avere il controllo (detta ludopatia), può essere davvero sottile, soprattutto in un periodo complesso come quello attuale dove un'alta percentuale di ragazzi (circa il 44% secondo la ricerca di Nomisma) dichiara di aver sperimentato situazioni di ansia, tensioni o difficoltà psicologiche a seguito della pandemia. Il gioco d'azzardo patologico è una malattia che ha gravi conseguenze fisiche, psicologiche e sociali e spesso si associa ad altre dipendenze, tra cui quella delle tecnologie digitali [7].

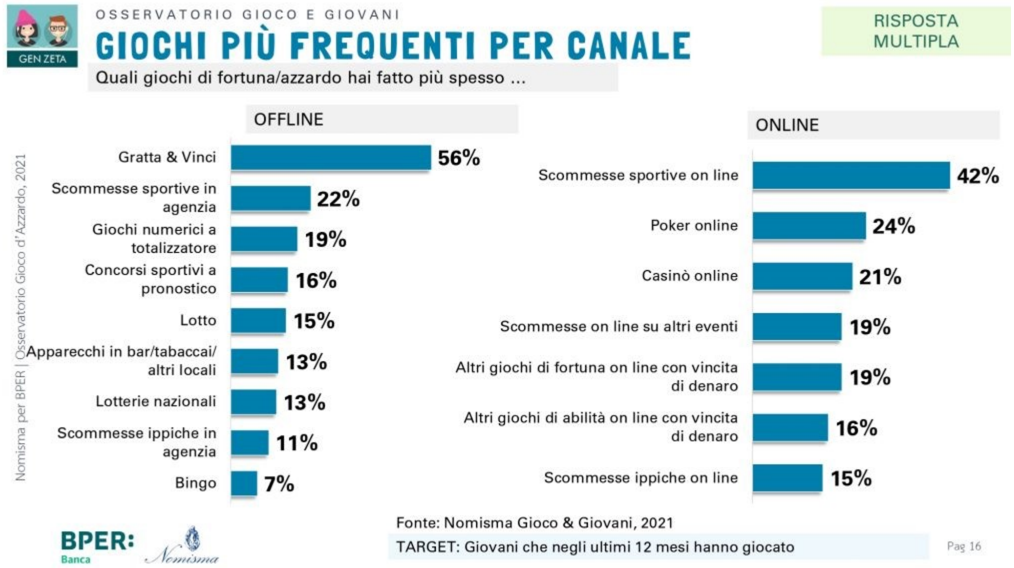


Figura 3.4: Giochi più frequenti per canale

Grazie alle elementari nozioni di calcolo delle probabilità è possibile analizzare alcuni giochi d'azzardo. L'obiettivo è confrontare ciò che spontaneamente siamo portati a pensare o a credere con quello che la teoria della probabilità ci consente di calcolare.

3.3 Il concetto di equità nei giochi d'azzardo

Il concetto di equità è stato citato e accennato nel descrizione dell'interpretazione soggettivista della probabilità nel primo capitolo.

Nel manuale "Linee di algebra" gli autori dedicano un paragrafo proprio all'analisi del concetto di equità nel gioco d'azzardo, a partire dalla frequenza relativa e dal calcolo del guadagno medio per il giocatore. Il valore atteso o speranza matematica $E(X)$ di una variabile casuale X è un numero che formalizza il concetto di valore medio di un fenomeno aleatorio. Nel caso di una variabile casuale discreta la speranza matematica si ottiene sommando i prodotto tra i possibili valori x_i di tale variabile e la probabilità p_i di verificarsi. Si tratta dunque della media ponderata dei possibili risultati.

$$E(X) = \frac{\sum_i x_i p_i}{\sum_i x_i p_i} \tag{3.1}$$

Ma dato che $\sum_i p_i = 1$ si ha

$$E(X) = \sum_i x_i p_i \tag{3.2}$$

Un gioco è equo se $E(X) = 0$.
Un gioco è vantaggioso se $E(X) > 0$.
Un gioco è svantaggioso se $E(X) < 0$.

Supponiamo di partecipare ad un gioco puntando un importo S. Sia Q la vincita lorda, cioè comprensiva della posta, e sia p la probabilità di vincita. Questo implica che p indica la probabilità di guadagnare al netto della posta $Q - S$ e $1 - p$ indica la probabilità di perdere l'importo S puntato.

Guadagno	**Perdita**
$Q - S$	$-S$
p	$1 - p$

La speranza matematica è dunque pari a

$$E(X) = (Q - S)p + (-S)(1 - p)$$

$$E(X) = Qp - Sp - S + Sp$$

$$E(X) = Qp - S$$

Affinché il gioco sia equo dalla definizione si evince che

$$E(X) = 0 \; sse \; Qp - S = 0 \longrightarrow Qp = S$$

In altre parole si definisce gioco equo un gioco in cui si paga al vincitore una somma Q pari all'importo giocato S diviso per la probabilità di vittoria p.

$$Q = \frac{S}{p} \longrightarrow vincita = \frac{importo\ giocato}{probabilità\ di\ vincita}$$

Ad esempio, scommettendo 1 a 'testa o croce' sulla possibilità che esca testa, se si verifica l'evento, che ha probabilità $\frac{1}{2}$, affinché il gioco sia equo il vincitore deve ricevere un premio di 2.

$$Q = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Due semplici giochi in cui analizzare il concetto di equità sono il SuperEnalotto e la Roulette francese.

3.3.1 Il SuperEnalotto

Per giocare al SuperEnalotto è necessario scegliere 6 numeri compresi fra 1 e 90 per partecipare all'estrazione. Il costo di una combinazione è 1€ e si può giocare una o più combinazioni alla volta.

Una volta scelti 6 numeri, il premio varia in base alla quantità di numeri indovinati. Le probabilità di vincita sono disponibili al sito del SuperEnalotto[3]

Quanto puoi vincere con SuperEnalotto

NUMERI INDOVINATI	PROBABILITÀ DI VINCITA	QUOTE MEDIE ATTESE
6	1 su 622.614.630	**Jackpot**
5+1	1 su 103.769.105	**311.000 €**
5	1 su 1.250.230	**32.000 €**
4	1 su 11.907	**300 €**
3	1 su 327	**25 €**
2	1 su 22	**5 €**

Figura 3.5: Tabella delle probabilità di vincita

Per comprendere meglio l'effettivo valore di probabilità, ho riportato nella tabella sottostante le probabilità di vincita in percentuale.

[3]Numero Jolly del SuperEnalotto: Oltre a scegliere i sei numeri principali del SuperEnalotto e l'opzionale numero SuperStar, c'è anche la possibilità di vincere grazie al numero Jolly, che permette ai giocatori che indovinano cinque dei sei numeri vincenti la possibilità di aumentare di valore il proprio premio.
Come funziona il Jolly? Il numero Jolly viene sorteggiato dalla stessa urna dei numeri principali del SuperEnalotto. Chi indovina cinque dei sei numeri principali più il Jolly vince i premi della categoria "5+Jolly", nota anche come "5+1". A differenza del SuperStar, non bisogna scegliere il numero Jolly sulla schedina. Il Jolly entra in ballo soltanto quando si indovinano cinque numeri principali: non ci sono categorie di premio dedicate a chi indovina il Jolly assieme a meno di cinque numeri principali.

NUMERI INDOVINATI	PROBABILITA' DI VINCITA
2	$\frac{1}{22} \approx 4{,}5\%$
3	$\frac{1}{327} \approx 0{,}3\%$
4	$\frac{1}{11907} \approx 0{,}008\%$
5	$\frac{1}{1250230} \approx 8 \cdot 10^{-5}\%$
5+1	$\frac{1}{103769105} \approx 9{,}6 \cdot 10^{-7}\%$
6	$\frac{1}{622614630} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-7}\%$

Figura 3.6: Tabelle delle probabilità di vincita modificata

Appare dunque evidente che le probabilità di vincita sono davvero molto basse.

Il Superenalotto è un gioco equo? Nell'ipotesi di aver indovinato 2 numeri su 6, l'importo pagato facendo una sola combinazione è 1€ quindi, affinché il gioco sia equo, la somma Q che dovremmo ricevere alla vincita ammonta a $Q = \frac{1}{\frac{1}{22}} = 2$€. E invece il premio proposto è di 5€. Quindi il SuperEnalotto non è un gioco equo. Analogamente nel caso in cui indoviniamo 3 numeri su 6 $Q = \frac{1}{\frac{1}{327}} = 327$€, invece il premio indicato è di 25€! Il premio relativo all'intera sestina vincente dovrebbe quindi essere pari a 622614630€ mentre il Jackpot attuale ammonta a 169200000€. Anche se in caso di vincita, indovinando ad esempio 2 numeri su 6, il guadagno netto è pari a 5 -1 =4€, dato che realmente c'è un possibile guadagno, è necessario osservare il fenomeno sul lungo periodo, perché è proprio in quella situazione che il giocatore va inevitabilmente in perdita e il banco (in questo caso lo stato) ci guadagna, a discapito del giocatore.

3.3.2 La roulette francese

Nel contesto dei casinò, il gioco più iconico presente nell'immaginario collettivo è senza dubbio la roulette: il suono della pallina bianca che gira sulla ruota prima di cadere su un numero è assolutamente inconfondibile.

La roulette francese è una ruota leggermente concava, all'interno della quale vi sono 37 sezioni, ognuna di esse contraddistinta da un numero, dallo 0 al 36. Ogni numero ha per colore il rosso o il nero, ad eccezione dello zero che appare su sfondo verde. Il croupier, ovvero colui che manovra la roulette, è deputato al lancio di una pallina che cadrà in una delle sezioni numerate. La pallina viene fatta ruotare in senso opposto a quello della roulette, e si ferma cadendo in uno dei settori numerati, determinando il numero vincente. Inoltre, a giri alternati, viene cambiato il senso della roulette (orario o antiorario) e con esso il senso della pallina sempre opposto a quello del disco.

Oltre alla roulette stessa, vi sarà lì vicino anche un grosso tavolo verde, corrispondente a un tappeto di gioco sul quale i giocatori effettueranno le proprie puntate. Tale panno di gioco vede una suddivisione delle proprie aree corrispondenti a possibilità diverse di puntata per i giocatori: ogni area del panno è abbinata ad un numero, un colore o qualche altra opzione su cui ognuno può scommettere delle fiches, cercando di prevedere l'esito del lancio della pallina nella roulette [20].

Le regole della roulette sono quindi estremamente semplici: si effettuano le scommesse desiderate sul tavolo verde dove sono indicati i numeri e si attende il lancio della pallina. In base al numero uscito dal lancio saranno dichiarate vincenti le puntate che coinvolgono quello stesso numero.

Puntate e sistemi di gioco A questo punto, oltre alle regole della roulette strettamente legate allo svolgimento, diventa importante conoscere il tipo di puntate possibili, unitamente alla loro entità di pagamento. Le combinazioni su cui è possibile puntare sono svariate, ognuna delle quali è quotata $\frac{36}{n} - 1$, essendo n la quantità di numeri compresi nella combinazione scelta:

- Plein (singolo numero) con cui si vince 35 volte la somma puntata
- Cheval (cavallo o coppia di numeri) con cui si vince 17 volte la somma puntata
- Transversale Pleine (terzina) con cui si vince 11 volte la somma puntata
- Carré (quartina) con cui si vince 8 volte la somma puntata
- Transversale Simple (sestina) con cui si vince 5 volte la somma puntata
- Douzaine (dozzina, prima, seconda o terza) con cui si vince 2 volte la somma puntata
- Colonne (colonna, prima, seconda o terza) con cui si vince 2 volte la somma puntata

La roulette francese è un gioco equo? In base alla quantità n di numeri compresi nella combinazione scelta, ogni combinazione è quotata $\frac{36}{n}-1$. Supponiamo di aver puntato 1€ sull'uscita di un numero, in caso di vincita si ottiene una vincita effettiva pari a $\frac{36}{1}-1=35$€. Mentre in caso di perdita avremo perso 1€. Supponendo invece di aver puntato 5€ sull'uscita di un numero, in caso di vincita si ottiene una vincita effettiva pari a $35\times 5=175$€. Mentre in caso di perdita avremo perso 5€. Abbiamo definito come gioco equo il gioco in cui si paga al vincitore una somma Q pari all'importo giocato S diviso per la probabilità di vittoria p.

$$Q=\frac{S}{p}\longrightarrow vincita=\frac{importo\ giocato}{probabilit\grave{a}\ di\ vincita}$$

Supponendo di aver puntato 1€ su un unico numero, il premio in caso di vincita è

$$Q=\frac{1}{\frac{1}{37}}=37$$

Invece il premio proposto è 35€. Quindi il gioco non è equo. Se il gioco fosse equo, il banco pagherebbe 37 volte la posta, invece il banco paga sempre 36 volte la posta giocata (in pratica il banco restituisce la posta giocata e aggiunge un importo pari a 35 volte la posta).

Ripetendo il ragionamento utilizzando espressamente la speranza matematica si ottiene

$$E(X)=35\left(\frac{1}{37}\right)+(-1)\left(\frac{36}{37}\right)=-\frac{1}{37}<0$$

Nelle medesime condizioni, ma con l'assenza dello zero, la roulette sarebbe un gioco equo.

$$E(X)=35\left(\frac{1}{36}\right)+(-1)\left(\frac{35}{36}\right)=\frac{0}{36}=0$$

Nella roulette francese il banco, invece, ha sempre un vantaggio matematico che corrisponde al $2,7\%$.

$$E(X)=-35\left(\frac{1}{37}\right)+(1)\left(\frac{36}{37}\right)=+\frac{1}{37}\approx 2,7\%>0$$

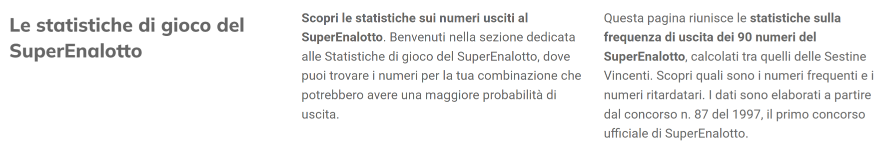
Dunque ogni volta che si punta 1€ si perdono 0,027€. Si deduce che per qualsiasi tipo di puntata si effettui alla roulette e con qualsiasi ammontare si scommetta su di essa, ebbene il vantaggio del banco sarà sempre inesorabilmente del 2,7%, senza alcuna possibilità di ridurre questa cifra. Questo beneficio, di cui gode il banco, non implica che il croupier vincerà sempre, vuol dire solamente che ha più possibilità di noi di realizzare un profitto, ma non comporta una perdita certa al giocatore, altrimenti nessuno andrebbe più a giocare in un casinò [32].

3.4 L'equiprobabilità

Affianco al concetto di equità è interessante analizzare anche l'equiprobabilità nel SuperEnalotto e nella roulette. Alla base dell'applicazione e delle critiche alla definizione classica di equiprobabilità vi è infatti tale prerequisito, che come già specificato rende la definizione tautologica.

Pur essendo l'elemento che consente di lavorare anche in contesti scolastici con i giochi d'azzardo per studiare le probabilità, è spesso non compresa realmente, portando il giocatore a ragionare in maniera scorretta e immotivata. Pensiamo, ad esempio, ai "numeri ritardatari".

Le riviste, le trasmissioni televisive e persino il sito web del SuperEnalotto[4] forniscono tabelle con tutti i numeri che non "escono" da più tempo, con anche il numero di settimane di ritardo.


Le statistiche di gioco del SuperEnalotto

Scopri le statistiche sui numeri usciti al SuperEnalotto. Benvenuti nella sezione dedicata alle Statistiche di gioco del SuperEnalotto, dove puoi trovare i numeri per la tua combinazione che potrebbero avere una maggiore probabilità di uscita.

Questa pagina riunisce le **statistiche sulla frequenza di uscita dei 90 numeri del SuperEnalotto**, calcolati tra quelli delle Sestine Vincenti. Scopri quali sono i numeri frequenti e i numeri ritardatari. I dati sono elaborati a partire dal concorso n. 87 del 1997, il primo concorso ufficiale di SuperEnalotto.

Figura 3.7: Schermata tratta dal sito del SuperEnalotto

Implicitamente quindi la frequente estrazione di alcuni numeri o il ritardo di altri può preannunciare l'uscita di determinati numeri e quindi permette di avere una maggiore probabilità di vincita.

Già dai primi dell'ottocento, De Laplace scrisse: "Quando un numero non esce da molto tempo, i giocatori corrono a coprirlo di danaro, essi ritengono che quel numero reticente debba uscire al primo colpo, a preferenza di altri, ma il passato non può avere alcuna influenza sull'avvenire".

Ma ogni numero ha sempre la stessa probabilità di essere estratto, quindi ogni combinazione ha la stessa probabilità di uscita. Non è affatto vero che i numeri con maggiore ritardo abbiano più probabilità di uscire rispetto agli altri: i numeri sono "senza memoria", tutti hanno la stessa probabilità d'uscita, perché ogni estrazione del SuperEnalotto è un evento indipendente dalle precedenti, dato che all'inizio di ogni estrazione i numeri estratti nella

[4] `https://www.superenalotto.it/archivio-estrazioni/statistiche`

precedente estrazione vengono reinseriti. Essendoci reinserimento i numeri ritardatari possono essere estratti nella stessa misura con cui possono essere estratti tutti gli altri numeri. Possiamo quindi concludere che giocare i numeri ritardatari è totalmente inutile. Così come è inutile puntare sui numeri frequenti.

In maniera analoga è opportuno proporre tale ragionamento anche per il gioco della roulette: la probabilità di estrazione di un numero è sempre $\frac{1}{37}$, indipendentemente da quanto ritardo abbia accumulato e ogni numero ha la stessa probabilità di uscita di un altro, proprio in virtù dell'equiprobabilità.

3.5 Le emozioni nel gioco d'azzardo e gli aspetti psicologici

Tutti i giocatori provano emozioni, positive e negative: pensiamo alla gioia di una vincita, all'ansia che domina gli istanti precedenti l'estrazione di una sequenza vincente, alla frustrazione per la perdita. Se osserviamo attentamente una persona grattare un Gratta&Vinci, notiamo dalle sue espressioni facciali, dalla sua postura, da come muove le mani che in quegli istanti da vivendo una carica emotiva intensa e significativa. Non solo le emozioni accompagnano il gioco d'azzardo nel momento in cui si gioca, ma anche nei momenti in cui lo si ricorda: i racconti dei giocatori d'azzardo sono carichi di emozioni, così come lo sono i ricordi. Anzi, possiamo dire che è proprio il ricordo delle emozioni provate che può spingere una persona a giocare di nuovo. Gli aspetti emotivi non possono essere trascurati, d'altro canto provare emozioni è una caratteristica di tutti noi essere umani. Anche l'attività matematica non è priva di emozioni: chi di noi non ha provato frustrazione per un problema di geometria che proprio non riesce? Chi non ha provato ansia per il compito di matematica o sollievo nello scoprire che è stato rimandato di qualche giorno? È indiscutibile che le emozioni esistano e guidino inevitabilmente le nostre scelte. Vi è però un legame molte forte tra conoscenza e emozione. Pensiamo ad esempio ad una persona che ha appena vinto 20€ con un Gratta&Vinci. La reazione emotiva è di gioia e tale gioia può indurlo a comprare un altro biglietto (quindi l'emozione influenza le sue azioni), nella speranza di ottenere un altro premio (l'emozione attiva una riflessione sul piano cognitivo). Questo esempio ci porta a fare una distinzione su ciò che intendiamo per conoscenza: la frase "la probabilità di trovare un premio da 20€ è data dal rapporto tra il numero di biglietti emessi con quel premio e il totale dei biglietti omessi" e la frase “dopo aver trovato un premio da 20€ ho maggiori probabilità di trovarne un altro” sono due forme diverse di conoscenza. La prima si fonda su regole matematiche ed è definita come la conoscenza vera e propria, la seconda si fonda su conclusioni soggettive che non sono riconosciute da una comunità scientifica ed è quindi definita credenza.

È stato riscontrato che una percentuale molto alta di schemi mentali distorti si genera proprio mentre si sta giocando d’azzardo.

- L’illusione del controllo: questa illusione è rafforzata dall’assunzione che l’esito di una mano è direttamente dipendente alle proprie abilità più di quanto non lo sia in realtà. Se si vince è grazie alla propria capacità, se si perde è causa di circostanze sfortunate. E in tutto questo non si prende in considerazione il meccanismo del rinforzo intermittente adottato dai provider dei giochi online: puoi essere sfortunato o giocare male un tot di partite, ma arriva quella buona che ti “ripaga” delle precedenti e ti fa vincere denaro, per indurti a continuare a giocare;

- L’effetto Monte-Carlo: dalla frequenza di eventi precedenti si arriva alla possibilità di eventi conseguenti (i numeri ritardatari del SuperEnalotto ad esempio);

- Interpretazione sbagliata delle possibilità di vincita: il giocatore spesso sopravvaluta in modo irrealistico le sue previsioni di vincita;

- La quasi-vincita: ad esempio quando alla roulette hai puntato sul 3 ed esce il 4, “ci sono andato molto vicino! Per questo devo continuare a giocare!”

- La cattura: questo caso descrive scelte oggettivamente errate, ma fatte volutamente , magari per giustificare l’investimento già effettuato “ok sono stato battuto, ma se sono arrivato fino a questo punto devo andare avanti, quindi continuo..”;

- Il tentativo di pareggiare delle perdite precedenti con puntate più alte.

Alcuni studi mostrano che coloro che possiedono un livello di conoscenza scientifica superiore corrono un minore rischio di sviluppare una dipendenza dal gioco d’azzardo. Ecco quindi che si intravede uno spiraglio di possibilità per la conoscenza matematica di giocare un ruolo preventivo in merito alla dipendenza da gioco. Mentre sul piano delle conoscenze è possibile intervenire per prevenire l’abuso di gioco d’azzardo, sul piano delle emozioni, alcuni studi hanno dimostrato che coloro che sviluppano un atteggiamento negativo verso il gioco hanno minori probabilità di sviluppare una patologia.

3.6 Il progetto BetOnMath

BetOnMath (Scommetti sulla Matematica) è un progetto di Matematica Civile. È stato realizzato nel biennio 2013-2015 grazie al Polisocial Award promosso dal Politecnico di Milano attraverso il programma Polisocial con il supporto di Fondazione Politecnico[5]. Nasce dall'osservazione della forte espansione del gioco d'azzardo in Italia e dalla constatazione che questo fenomeno ha radici nella preoccupante diffusione di un forte analfabetismo matematico.

BetOnMath è un progetto di ricerca finalizzato a creare un percorso formativo di probabilità che sia innovativo, certificato e disponibile a tutti gli insegnanti di scuola secondaria superiore che lo vogliano utilizzare all'interno della loro programmazione didattica. L'obiettivo è fornire un percorso didattico volto ad insegnare la probabilità per conoscere i giochi d'azzardo, analizzarli e prevenirne l'abuso.

Il percorso formativo fa emergere i concetti probabilistici soggiacenti ai giochi d'azzardo e le criticità (e relativi rischi) di alcuni tipici meccanismi decisionali erronei che vengono spesso attivati in condizione di incertezza.

Mediante una stretta interazione tra gli insegnanti che hanno utilizzato il percorso di formazione ed il team di BetOnMath, coadiuvato da esperti psicologi e di didattica della matematica, è stata realizzata un'attenta analisi e valutazione dell'efficacia del percorso formativo. Al termine del processo di valutazione, dopo due anni di sperimentazioni, osservazioni e ricerche, il percorso formativo è reso disponibile nel sito di BetOnMath.

Il progetto è caratterizzato dalla centralità del ruolo dell'insegnante nell'osservare, interpretare e intervenire nei diversi momenti della lezione, e dalla multidisciplinarietà, poiché gli aspetti psicologici si intrecciano alle conoscenze matematiche.

Il percorso didattico si articola in 10 moduli, che possono essere proposti, secondo gli autori, in aula in 3 lezione di 2 ore ciascuno. La prima lezione è incentrata sui concetti matematici di base utili ad interpretare i giochi d'azzardo. La seconda approfondisce il concetto di iniquità e introduce alle

[5] `http://www.polisocial.polimi.it/it/progetti`

peculiarità psicologiche correlate. Infine la terza richiede l'introduzione e l'utilizzo di concetti di combinatoria per analizzare più del dettaglio il gioco del Lotto. La lezione si conclude con una riflessione sulle conoscenze errate che influenzano l'interpretazione dei risultati nel giochi d'azzardo e nei giocatori.

Interessanti sono gli strumenti che compongono il materiale didattico:

- slides
- schede per i lavori di gruppo
- due simulatori di giochi d'azzardo: Gratta&Perdi e OpenSlot

3.6.1 Simulatore Gratta&Perdi

Il simulatore consente di simulare realmente le uscite dei giochi d'azzardo e per alcuni minuti gli studenti possono simulare ciò che accade ai giocatori "reali". Il simulatore Gratta&Perdi è scaricabile gratuitamente per smartphone e tablet con sistema Android. L'App Gratta&Perdi riproduce un popolare Gratta&Vinci, il cui costo del biglietto è 5€ e nel quale vi è circa il 61% di biglietti perdenti, il 29% di biglietti che contengono un premio pari alla somma spesa per compare il biglietto, ossia 5€, e il restante 10% dei biglietti contengono premi da 10€ fino ad un massimo di 500000€.

Il simulatore Gratta&Perdi presenta una schermata nella quale è possibile scegliere tra due opzioni: "Gratta 1 biglietto" e "Gratta N biglietti". Nel primo caso compare un "Gratta qui" sullo schermo e lo studente può virtualmente grattare un biglietto facendo scorrere il dito sullo schermo. Se il biglietto è perdente compare "Nessun premio" (ovvero perdi 5€), se il biglietto contiene un premio da 5 euro, compare "5 euro" (ma li avevi appena spesi) e se il biglietto contiene un premio pari o superiore a 10€ compare la cifra vinta. L'opzione "Gratta un biglietto" del simulatore vi permette di provare quanto sia poco probabile vincere effettivamente un biglietto al Gratta&Vinci.

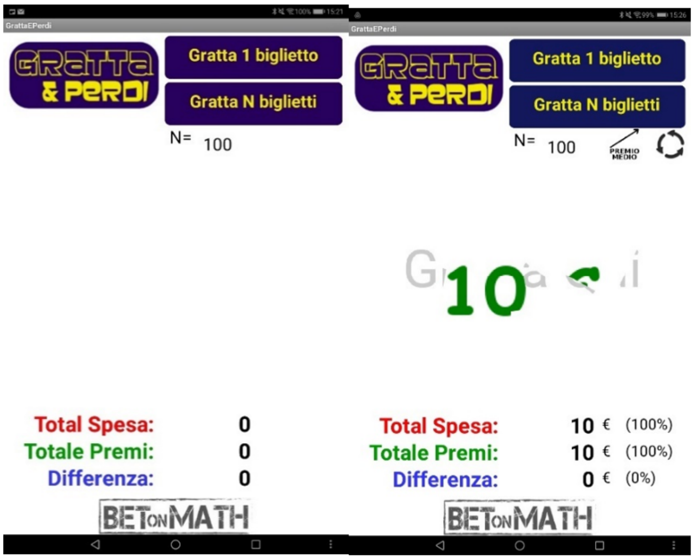


Figura 3.8: Schermate dell'applicazione

L'opzione "Gratta N biglietti" vi consente di fissare un numero N di biglietti da gratta (di default N=100) e in questo caso compare un grafico progressivo dato da due linee: una rossa che illustra la spesa e una verde che rappresenta i premi virtualmente vinti.

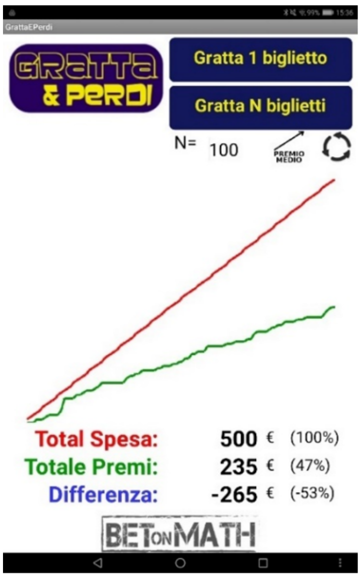


Figura 3.9: Schermate dell'applicazione

Notiamo inoltre che i simulatori attivano e richiedono un certo bagaglio di conoscenze matematiche:

- dimestichezza con i grafici, poiché vengono mostrati senza alcuna spiegazione;

- comprensione dei numeri interi, che esprimono la spesa, i premi e il bilancio complessivo;

Un certo livello di conoscenza matematica di base viene messa in campo, ma tale conoscenze non è fine a se stessa: essa ha lo scopo di indirizzare l'attenzione degli studenti sul gioco, di suscitare reazioni a seconda di ciò che compare, provocare commenti, esaltazione, frustrazione, coinvolgimento. Non c'è una distinzione tra momento "puramente emotivo" e "puramente cognitivo" nell'attività col simulatore: nello stesso istante in cui gli studenti visualizzano sullo schermo un risultato, una reazione emotiva è suscitata e tale reazione provoca un'azione nuove al simulatore. Vi è dunque un intreccio tra le conoscenze e le esperienze che gli studenti hanno del gioco d'azzardo, al punto che non è possibile distinguere emozione da cognizione.

Capitolo 4

Il progetto didattico "Probabilità e gioco d'azzardo"

"Probabilità e gioco d'azzardo" è un progetto interdisciplinare tra matematica ed educazione civica elaborato per le classi seconde del Liceo Scientifico. L'obiettivo del progetto è introdurre il concetto di probabilità e indagare le criticità legate al gioco d'azzardo, per capire come alcuni preconcetti e intuizioni relativi alla probabilità possano influenzare l'analisi e la comprensione del gioco d'azzardo (come indicato nel comma 1 dell'articolo 1 della Legge n.92 del 20 agosto 2019).

L'esigenza di realizzare un progetto interdisciplinare nasce dall'introduzione delle ore di educazione civica in ogni contesto disciplinare.

Sono sempre stata incuriosita dalla probabilità e dalle applicazioni che da essa derivano, per tale ragione ho scelto di trattare il concetto e nello specifico l'introduzione della probabilità, nel mio progetto. Il percorso scolastico superiore, nella mia personale esperienza, si è concentrato nella spiegazione della probabilità finalizzata alla risoluzione meccanica dei quesiti delle prove invalsi al secondo anno e dei quesiti della prova di maturità al quinto. Data l'importanza della probabilità sia a livello concettuale che applicativo, credo che sia necessario andare oltre la semplice risoluzione di esercizi e riflettere con gli studenti sul significato, sull'interpretazione e sull'evoluzione di tale concetto. L'obiettivo è mostrare come in generale la matematica non è solo esercizio e applicazione meccanica, ma è ricca di riflessioni, idee e ragionamenti, applicabili quotidianamente.

La scelta di affrontare il tema del gioco d'azzardo e della dipendenza correlata deriva dalla necessità di fornire ai giovani studenti una visione realistica e concreta di un fenomeno spesso sottovalutato, che continua, però, a diffondersi anche tra i più piccoli. Per comprendere e studiare al meglio i preconcetti propri degli studenti è dunque necessario che non abbiano formalmente affrontato nel contesto scolastico la probabilità. In linea con le Indicazioni Nazionali, il progetto è rivolto a studenti del secondo anno del Liceo Scientifico.

Il progetto mira a far acquisire ai ragazzi specifiche conoscenze disciplinari:

- Origini del pensiero probabilistico;
- concetto di evento, evento certo, impossibile e contrario;
- definizione assiomatica e definizione classica di probabilità;
- probabilità della somma e del prodotto logico di eventi;
- probabilità dell'evento contrario;

Si intende contribuire non solo allo sviluppo della competenza matematica ma anche alle competenze digitali e alla competenza di cittadinanza: gli studenti affrontano il tema della dipendenza dal gioco d'azzardo per mettere in luce le problematiche che ne conseguono, i rischi e gli aspetti psicologici che influenzano il giocatore. Le nozioni e abilità matematiche in merito alla probabilità consentono un'analisi oggettiva e puntuale del gioco d'azzardo.

Programmare percorsi didattici implica identificare e definire gli obiettivi che si intende proporre come traguardo dell'attività didattica stessa. Stabilire e descrivere gli obiettivi di un itinerario didattico comporta sia l'individuazione del contenuto dell'obiettivo sia l'esplicitazione del tipo di «prestazione» (di competenza cognitiva) che si vuole stimolare su quel determinato contenuto. Strumenti utili per analizzare la componente cognitiva degli obiettivi sono le tavole tassonomiche[1] degli obiettivi cognitivi. La tavola a cui faccio riferimento è di Arrigo e Frabboni e rappresenta uno strumento nelle mani dell'insegnante per controllare/progettare la qualità dell'insegnamento, assicurando la complessità degli approcci educativi.

[1]In campo educativo e didattico per tassonomia s'intende la classificazione sistematica secondo una gerarchia ascendente, che va dalle abilità elementari a quelle più complesse, basata sulla descrizione accurata di comportamenti pedagogici d'insegnamento-apprendimento: in tal senso si parla di "tassonomia degli obiettivi educativi e didattici". La distinzione tra obiettivi educativi e obiettivi didattici (o ”istruttivi” o, con un anglicismo, ”istituzionali”), essendo attinenti i primi a sviluppi generali dell'intelligenza, della creatività della personalità e delle relazioni sociali, i secondi all'acquisizione di determinati contenuti o abilità.

1. **Il conoscere** (apprendimenti elementari)	1.1 **Memorizzazioni**	1.1.1 riprodurre/ripetere termini
		1.1.2 riprodurre/ripetere simboli
		1.1.3 riprodurre/ripetere concetti
	1.2 **Automatismi cognitivi**	1.2.1 classificare secondo un criterio noto
		1.2.2 ordinare secondo un criterio noto
	1.3 **Operazioni**	1.3.1 eseguire operazioni elementari
		1.3.2 eseguire operazioni concatenate
	1.4 **Concetti**	1.4.1 definire un concetto
		1.4.2 riconoscere un concetto
		1.4.3 esemplificare un concetto
2. **Il comprendere** (apprendimenti intermedi)	2.1 **Comprensione**	2.1.1 descrivere ragionamenti/procedimenti
		2.1.2 riconoscere situazioni/procedimenti
		2.1.3 tradurre situazioni/procedimenti
	2.2 **Applicazione**	2.2.1 eseguire/applicare procedimenti
		2.2.2 applicare procedimenti noti in ambiti nuovi
		2.2.3 verificare procedimenti
3.1 **Il pensiero convergente** (apprendimenti superiori convergenti)	3.1.1 **Analisi**	3.1.1 analizzare
		3.1.2 confrontare
		3.1.3 impostare un ragionamento induttivo
	3.1.2 **Sintesi**	3.2.1 sintetizzare
		3.2.2 schematizzare
		3.2.3 impostare un ragionamento deduttivo
3.2 **Il pensiero divergente** (apprendimenti superiori divergenti)	3.2.1 **Intuizione**	3.2.1.1 tentare soluzioni
		3.2.1.2 formulare ipotesi
		3.2.1.3 riconoscere il problema chiave
	3.2.2 **Invenzione**	3.2.2.1 estrapolare leggi/principi
		3.2.2.2 inventare per analogia
		3.2.2.3 formulare soluzioni nuove

Figura 4.1: Tavola tassonimica di Arrigo e Frabboni

Data l'uguaglianza dei traguardi e obiettivi di apprendimento tra i vari istituti superiori, il progetto può essere svolto in ogni tipologia di scuola superiore, apportando alcune modifiche dove ritenuto più necessario.

4.1 Struttura del progetto

Il progetto didattico è composto da quattro moduli, strutturati in: due lezioni frontali della durata di 2 ore ciascuna, un'attività laboratoriale di un'ora e un'attività individuale di circa 30 minuti da far svolgere agli studenti prima della prima lezione frontale. Per svolgere il progetto durante l'orario scolastico sono quindi necessarie 5 ore.

Il primo modulo del percorso comporta la visione di un video e la compilazione di un questionario iniziale, volto a ricevere feedback sul video ed ad indagare i preconcetti e le intuizioni sulla probabilità proprie degli studenti.

Il secondo modulo consiste nell'introduzione alla probabilità sia mediante un approccio storico che teorico, la risoluzione di alcuni esercizi di base e testi tratti dalle prove Invalsi.

Il terzo modulo introduce al gioco d'azzardo e analizza il concetto di equità nel SuperEnalotto e nella roulette francese.

Infine il quarto modulo propone un'attività laboratoriale mediante il Simulatore Gratta&Perdi ripreso dal progetto BetOnMath e la compilazione di un questionario conclusivo.

L'apprendimento in matematica è una combinazione di molteplici fattori.

> *"In matematica infatti non basta aver costruito un concetto, ma occorre saperlo usare per effettuare calcoli o dare risposta agli esercizi, combinarlo con altri e con strategie opportune per risolvere problemi, occorre saper spiegare a sé stessi e agli altri il concetto costruito e la strategia seguita, occorre saper far uso sapiente delle trasformazioni semiotiche che permettono di passare da una rappresentazione all'altra[30]."*

L'obiettivo del progetto è di lavorare sulle 5 dimensioni dell'apprendimento matematico:

- Attraverso i momenti di discussione in aula e l'attività laboratoriale si intende favorire principalmente la componente concettuale e comunicativa dell'apprendimento. In particolare con l'attività Gratta&Perdi anche la componente semiotica ha un ruolo centrale;
- La risoluzione di esercizi e problemi alla lavagna o individualmente favorisce invece la componente algoritmica, strategica e nuovamente semiotica dell'apprendimento.

Nei paragrafi successivi ogni modulo viene opportunamente descritto e spiegato.

4.1.1 Modulo 1

Prima dell'inizio delle lezioni frontali l'attività che gli studenti devono svolgere individualmente e in autonomia è la visione del video Introduzione alla probabilità, realizzato in collaborazione con i colleghi Domenico Iorio, Simone Chiusoli e Davide Furlanetto per l'esame conclusivo del corso di Didattica della Matematica a luglio 2021. Il video è breve (circa 3 minuti) ma ricco di contenuti da approfondire: l'obiettivo è infatti di incuriosire, mostrando contenuti avvincenti. Mediante la definizione classica viene introdotta la probabilità, mentre il paradosso di Monty-Hall e dei due figli mostrano il suo aspetto contro-intuivo e infine il video propone una piccola digressione sul gioco d'azzardo e sul SuperEnalotto per introdurre il concetto di equità.

Inizialmente il video è stato realizzato per gli studenti del Liceo delle Scienze Umane, ma data la somiglianza e l'analogia dei traguardi di apprendimento e sviluppo delle competenze tra i vari istituto di secondo grado in merito alla probabilità al secondo anno, è rivolto a qualsiasi studente che voglia approcciarsi al mondo della probabilità.

Dopo la visione del video lo studente compila un questionario, fondamentale per la preparazione del materiale didattico delle lezioni successive. Il questionario è disponibile al link ed è stato realizzato tramite la piattaforma Google Moduli, per essere compilato interamente online. L'indagine mediante questionario costituisce una delle tecniche di ricerca sociale maggiormente impiegate. Privo di valutazione e anonimo tale questionario consente allo studente di esprimersi in maniera spontanea e naturale, senza essere in alcun modo condizionato. Il questionario è strutturato in 7 sezioni:

1. Informazioni personali: vengono richieste età, sesso, classe e creazione di un codice per garantire l'anonimato e confrontare le risposte dello stesso soggetto con il questionario a conclusione dell'attività;

2. Feedback video: gli aspetti che sono piaciuti di più e gli aspetti che sono piaciuti di meno con relativa motivazione;

3. Sul concetto di probabilità: per indagare l'idea intuitiva che gli studenti hanno di probabilità viene chiesto in primo luogo di spiegare cosa intendono per definizione e stabilire se secondo loro la definizione fornita nel video è corretta o meno e perché. Successivamente viene chiesto ai ragazzi di spiegare cosa è per loro la probabilità e di definire la parola evento;

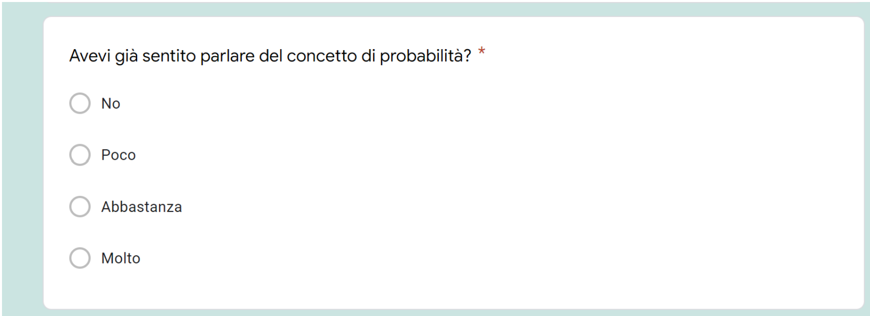
4. Paradossi: per invece indagare l'aspetto contri-intuitivo viene chiesto agli studenti come avrebbero risolto i paradossi e se sono rimasti stupiti dalle risposte corrette;

5. Il gioco d'azzardo: lo studente definisce il gioco d'azzardo, il concetto di equità e spiega il rapporto che ha con la matematica.

Le ultime due sezioni non devono essere compilate entrambe: se lo studente ha avuto esperienze con i giochi d'azzardo compila la sezione 6 altrimenti la 7. Nella sezione 6 infatti vengono fatte domande più specifiche sull'esperienza di gioco: frequenza, tipologia, motivazioni. Nella sezione 7 invece vengono

solo chieste le tipologie di giochi conosciute e le ragioni per cui non si è mai giocato.
Le domande proposte nel questionario si distinguono in due tipologie:

- Domande a risposta chiusa



Avevi già sentito parlare del concetto di probabilità? *

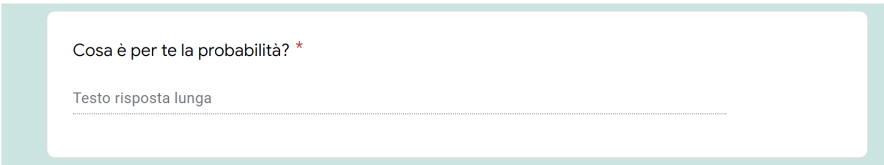
No

Poco

Abbastanza

Molto

- Domande a risposta aperta



Cosa è per te la probabilità? *

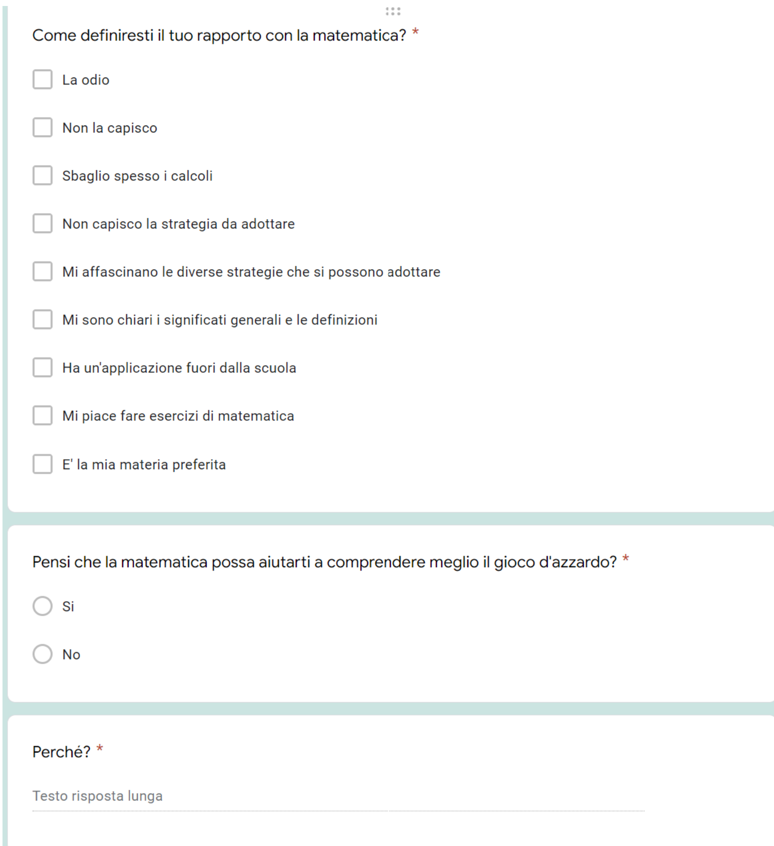
Testo risposta lunga

La maggior parte delle domande è a risposta chiusa: lo studente deve scegliere una delle opzioni di risposta già previste dal ricercatore. Nelle domande a risposta aperta lo studente è libero di rispondere, senza vincoli o suggerimenti. L'utilizzo di tali domande consente di indagare i preconcetti e le idee degli studenti e anche di lavorare, già in principio, su alcuni obiettivi della tavola tassonomica, in particolare si riconoscono:

- 1.4.1 definire un concetto
- 1.4.3 esemplificare un concetto
- 3.1.3 impostare un ragionamento induttivo
- 3.2.2.1 estrapolare leggi/principi

Si pensa tradizionalmente che le emozioni siano contrapposte alla ragione, come il cuore è contrapposto alla mente. Che il primo sia il luogo dei sentimenti e che il secondo sia il luogo della conoscenza. Che la matematica sia questione solo di testa. Ma in realtà la matematica è questione di testa e di emozione. Le emozioni infatti sono una componente costitutiva dell'apprendimento: se uno studente prova un senso di insuccesso rispetto alla strategia che mette in atto, sarà scoraggiato dal proseguire in quella direzione. Se al contrario prova un senso di verosimiglianza di successo, sarà incoraggiato a portare avanti l'attività. Il coinvolgimento degli studenti è un elemento cruciale in qualsiasi processo di apprendimento, nella lezione frontale così come nei lavori di gruppo, nei momenti di studio individuale e di esercitazione. Un altro elemento fondamentale è la competenza percepita dello studente rispetto al compito assegnato: il sentire di poter portare un contributo è spesso più rilevante del contributo stesso. Le emozioni non caratterizzano soltanto il momento iniziale dell'attività matematica, con un effetto di stimolo o di impedimento, ma accompagnano tutta l'attività, evolvono con essa e permangono dopo che si è conclusa. Un risultato inatteso genera una reazione emotiva, che è diversa in ciascuno e che determina anche il rapporto che lo studente ha con la matematica.

La sezione 5 si conclude con domande che mirano a comprendere il rapporto che lo studente ha con la matematica: l'obiettivo è far riflettere oggettivamente l'alunno sulle emozioni che lo legano alla matematica e sulla ragioni ti tali sentimenti. Viene infine chiesto ai ragazzi se e come, la matematica può aiutare a comprende il gioco d'azzardo.


Come definiresti il tuo rapporto con la matematica? *

- [ ] La odio
- [ ] Non la capisco
- [ ] Sbaglio spesso i calcoli
- [ ] Non capisco la strategia da adottare
- [ ] Mi affascinano le diverse strategie che si possono adottare
- [ ] Mi sono chiari i significati generali e le definizioni
- [ ] Ha un'applicazione fuori dalla scuola
- [ ] Mi piace fare esercizi di matematica
- [ ] E' la mia materia preferita

Pensi che la matematica possa aiutarti a comprendere meglio il gioco d'azzardo? *

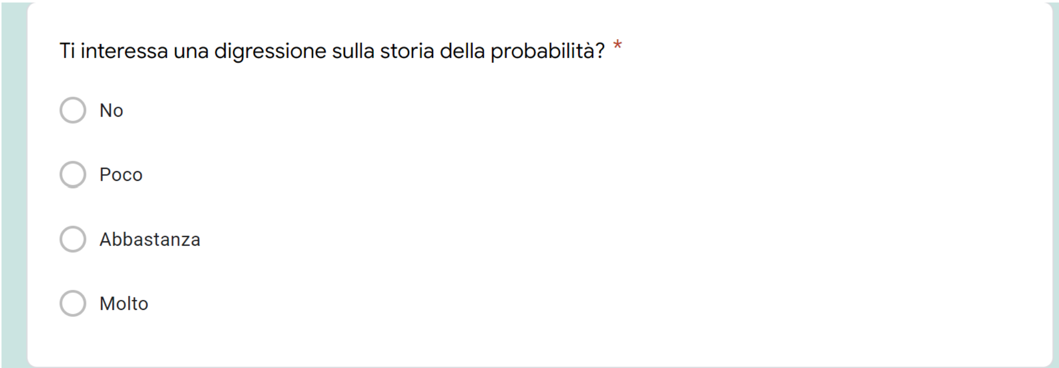
- Si
- No

Perché? *

Testo risposta lunga

4.1.2 Modulo 2

La prima lezione frontale del progetto prevede una durata di 2 ore. Inizialmente il docente riprende il video che gli studenti hanno visto in autonomia, proponendo nelle slide i feedback ricevuti. L'obiettivo è di creare un primo momento di commento e riflessione di classe sul video. Tra le domande del questionario di particolare interesse per sviluppare le argomentazioni successive è


Ti interessa una digressione sulla storia della probabilità? *

No

Poco

Abbastanza

Molto

La lezione infatti è incentrata sull'introduzione alla probabilità mediante un approccio storico e tale domanda consente di procedere nella trattazione.

A mio parere considerare le dinamiche storiche nella trattazione di contenuti disciplinari matematici è particolarmente stimolante e interessante per gli studenti. Penso che possano avere un'idea più completa e realistica dell'evoluzione del pensiero matematico e comprendere come si è arrivati all'idea formale e sintetica moderna. Dall'approccio storico emerge l'importanza dell'errore che caratterizza l'evoluzione del pensiero e non la penalizza, ma la arricchisce. Significativa è anche la rete interdisciplinare che di conseguenza viene costruita e che colloca la matematica al centro della cultura.

L'obiettivo della lezione è di fornire agli studenti gli elementi essenziali per comprendere il contesto storico in cui la probabilità ha avuto origine e si è sviluppata negli anni. A partire dall'origine del sostantivo azzardo e dell'aggettivo alea, si evidenzia dunque come lo studio sistematico delle probabilità sembra nascere dall'esigenza di risolvere dei problemi puramente pratici legati al gioco d'azzardo. Necessari perciò risultano i riferimenti all'epoca romana, la descrizione dei primi giochi d'azzardo (par impar, capita aut navia, gioco degli astragali e gioco della zara), accompagnati da riferimenti sia all'Iliade di Omero che alla Divina Commedia di Dante, al fine di costruire la rete interdisciplinare di cui sopra. Citando l'opera *Sopra le scoperte dei dadi* di Galileo viene introdotto il Rinascimento poiché rappresenta un contesto storico molto importante nella storia della probabilità. Lo sguardo viene poi del tutto rivolto al problema della posta: l'obiettivo è far comprendere come l'idea avuta da Pascal e Fermat sia stata innovativa e abbia dato origine al pensiero probabilistico. Ai fini del progetto ritengo che non sia necessario approfondire la risoluzione del problema, poiché gli studenti non hanno in mano gli strumento teorici necessari per comprenderla.

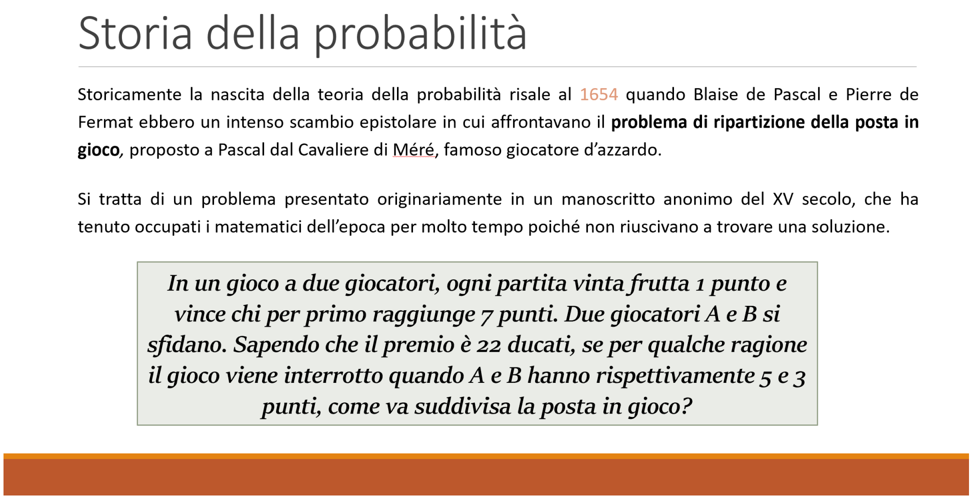


Figura 4.2: Slide tratta dal materiale didattico

Per concludere la prima parte della lezione, incentrata sull'origine della probabilità, occorre citare l'opera *De Ratiociniis in ludo alea* di Huygens, poiché considerato primo trattato di probabilità e l'opera *Ars Conjectandi* di Bernoulli.

La seconda parte della lezione è dedicata a comprendere cosa è la probabilità, cosa significa. Come accadrà spesso durante le lezioni del percorso il docente riprende le domande del questionario opportunamente inerenti per mostrare le risposte fornite dai ragazzi. Il questionario (soprattutto quello iniziale) non è finalizzato soltanto alla ricerca, ma costituisce uno strumento necessario durante la lezione. È infatti utile per interrompere il ritmo monotono delle lezioni frontali, fornire dinamicità e creare piccoli momenti di interazione tra docente e alunni. Gli studenti hanno anche modo di conoscere le risposte dei compagni, sempre nel rispetto dell'anonimato, e cogliere idee o aspetti a cui non avevano pensato. In questo momento specifico del percorso la domanda che viene ripresa è "Cosa è per te la probabilità?". A partire dalle risposte, il docente mostra come fino al 1933 non vi era una risposta comunemente accettata e che tutt'ora esistono differenti interpretazioni. L'idea è di definire almeno inizialmente la probabilità mediante concetti astratti, di impronta più filosofica, per riassumerla in 3 distinte questioni:

1. Che cosa è la probabilità?

2. Come si assegna/ si stima la probabilità?

3. Quali regole/ assiomi verifica la probabilità?

Dato che la terza questione è di specifico interesse della matematica, si parla di calcolo delle probabilità. L'obiettivo è, secondo questa modalità di trattazione, mostrare il ruolo della matematica all'interno di un contesto ampio e vario come la probabilità. Una piccola parentesi sull'importanza del linguaggio specifico in matematica conclude la seconda parte della lezione. Riprendendo la domanda del questionario "Cosa è per te una definizione?" si esplicitano le caratteristiche di universalità, rigore e sintesi che caratterizzano la matematica grazie al linguaggio specifico.

La terza parte della lezione è interamente dedicata all'introduzione del linguaggio specifico della probabilità e alla definizione dei concetti chiave: esperimento aleatorio, esito, spazio campionario, evento. Nello specifico il concetto di evento certo e impossibile, unione, intersezione e contrario, eventi compatibili e incompatibili. Opportuni esempi affiancano tutti gli elementi teorici descritti. Per definire la probabilità ho scelto di seguire l'interpretazione assiomatica. Le motivazioni sono molteplici:

- L'analisi del contesto storico trova una sua conclusione nel lavoro di Kolmogorov quindi ho voluto creare continuità con la trattazione fornita;

- A mio parere è molto interessante e rispecchia l'idea di rigore e universalità di cui accennato nel linguaggio specifico;

- Crea un parallelismo con la teoria assiomatica euclidea, affrontata dagli studenti nel primo biennio[2].

L'obiettivo principale di tale scelta è però di discostarmi dalle proposte dei libri di testo, che mettono al centro la definizione classica senza dare opportuna importanza alle ipotesi che sorreggono tale definizione. La circolarità

[2]Dalle Indicazioni Nazionali si legge: *Saranno obiettivo dello studio gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio entri cui prendono forma i procedimenti caratteristici del pensiero matematico; il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano. Verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione.*

dell'interpretazione classica è la critica che ha portato all'introduzione di altre interpretazioni e trovo incoerente basare la trattazione della probabilità su tale definizione. Evitando eccessivi formalismi e seguendo le nozioni descritte in precedenza si introducono gli assiomi e le proprietà derivabili. Per improntare una riflessione con gli studenti sulla validità della definizione classica, il docente riprende dal questionario la domanda "Credi che la definizione mostrata nel video sia valida e corretta? Perché?" (Ricordiamo che nel video si fa cenno proprio alla definizione classica). Le seguenti slide mostrano come introdurre a lezione le definizione classica a partire dalla definizione assiomatica.

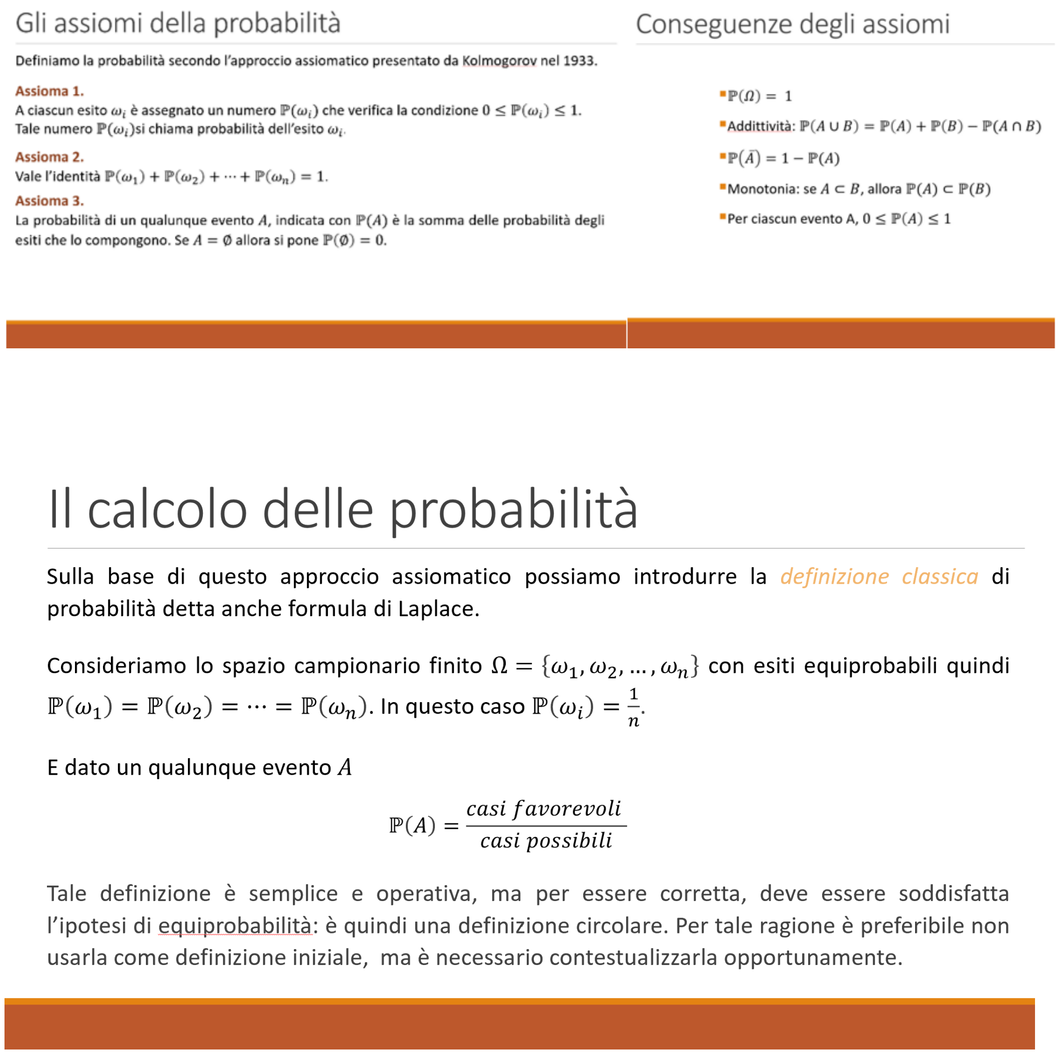


Figura 4.3: Slide tratte dal materiale didattico

L'ultima parte della lezione è dedicata alla risoluzione di due gruppi di esercizi, da parte degli alunni con l'aiuto dell'insegnante. Il primo è un insieme di esercizi da me elaborati, mentre il secondo raccoglie alcuni esercizi tratti dalle prove Invalsi.

Di seguito sono presentati gli esercizi del primo gruppo:

Esercizio 1

Si lancia un dado.

- Qual è la probabilità che esca un numero pari?
- Qual è la probabilità che esca il numero 5?
- Qual è la probabilità che non esca il numero 1?
- Qual è la probabilità che esca un numero maggiore di 4?
- Qual è la probabilità che esca un numero maggiore di 3 e dispari?
- Qual è la probabilità che esca un numero maggiore di 3 o dispari?

Figura 4.4: Esercizio 1 tratto dal materiale didattico

Esercizio 2

Consideriamo una scatola con 10 palline rosse e 8 palline blu.

- Qual è la probabilità di estrarre una pallina rossa?
- Se vengono fatte due estrazioni con reimmissione, qual è la probabilità di estrarre una pallina rossa e una blu? È importante sapere se prima quella rossa o quella blu?
- Se invece vengono fatte due estrazione senza reimmissione cambia la probabilità di estrarre una pallina rossa e una blu?

Figura 4.5: Esercizio 2 tratto dal materiale didattico

Esercizio 3

Due monete non truccate vengono lanciate contemporaneamente

- Descrivi lo spazio campionario di questo esperimento aleatorio.
- Descrivi la probabilità di ogni evento possibile. Sono equiprobabili?
- Qual è la probabilità che esca 2 volte testa o 2 volte croce?
- Se le monete vengono lanciate una dopo l'altra, lo spazio campionario cambia?
- Descrivi la probabilità di ogni evento possibile. Sono equiprobabili?
- Qual è la probabilità che al primo lancio esca croce?
- Qual è la probabilità che non esca due volte croce?

Figura 4.6: Esercizio 3 tratto dal materiale didattico

L'obiettivo è analizzare e riprendere i concetti teorici spiegati, procedendo in maniera graduale dal più semplice al più complesso, attraverso una sequenza di domande. Ho cercato di presentare tre differenti esperimenti aleatori:

dadi, scatola contenente palline e monete. Le situazioni descritte sono le più comuni tra gli esercizi dei libri di testo, poiché rappresentano contesti in cui poter applicare la definizione classica. Il livello di difficoltà cresce sia all'interno di ciascun esercizio che tra gli esercizi stessi: il numero 3 è infatti più ricco e complesso dei precedenti, il numero 2 rispetto al numero 1 introduce per aumentare la difficoltà la situazione di non reimmissione e reimmissione. Tramite questi esercizi l'insegnante lavora con gli alunni sulla definizione classica di probabilità, sulla somma e sul prodotto logico di eventi.

Il secondo gruppo di esercizi è invece composto da esempi tratti dalle prove Invalsi, test a cui gli studenti verranno sottoposti alla fine del biennio. Dato che tra i quesiti della prova ci sono anche quesiti relativi alla probabilità, l'obiettivo è familiarizzare con la struttura delle domande. Per trattare gli eventi elementari e le semplici situazioni proposte nell'ora di teoria precedente ho scelto esercizi di grado 10 ma anche di grado 8, poiché, tra gli esercizi di grado 10, ho trovato molti riferimenti alla probabilità condizionata e al calcolo combinatorio, nonostante non siano proposti nelle Indicazioni Nazionali. Nei libri di testo, come accennato nel capitolo 2, la probabilità condizionata viene però affrontata: a mio parere tale scelta editoriale deriva anche dalla necessità di imparare a rispondere ai quesiti delle prove Invalsi. Di seguito sono riportati gli esercizi inseriti nel progetto da svolgere in classe.
Nel sito Invalsi vengono esplicitati gli obiettivi per gli esercizi del grado 10:

- **Obiettivi LG-IN** - Significato della probabilità e sue valutazioni. Semplici spazi (discreti) di probabilità: eventi disgiunti, probabilità composta, eventi indipendenti. Nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica.

Per gli esercizi del grado 8:

- **Obiettivi IN - Ob8-84** Saper valutare la variabilità di un insieme di dati determinandone, ad esempio, il campo di variazione;

- **Traguardi IN - TS-XXI** Nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi, ...) si orienta con valutazioni di probabilità.

PROVA MAT-SNV 2016 GRADO 10 19-0

D19. Quale tra i seguenti numeri non può rappresentare la probabilità di un evento?

A. ☐ $\frac{2}{3}$

B. ☐ $\frac{11}{15}$

C. ☐ $\frac{8}{7}$

D. ☐ $\frac{20}{27}$

PROVA MAT-SNV DEL 2015 GRADO 10 06-A

D6. Da un mazzo di 52 carte da gioco (composto da 13 carte per ognuno dei semi: cuori, quadri, fiori, picche) sono stati tolti i 4 assi.

a. Si estrae una carta a caso. Qual è la probabilità che sia di cuori?

Risposta: ....

b. Da un mazzo di 52 carte uguale al precedente sono state tolte alcune carte di fiori. Dopo questa operazione la probabilità di estrarre, a caso, una carta di fiori è $\frac{6}{45}$. Quante carte di fiori sono state tolte?

Risposta: ....

PROVA MAT-SNV 2016 GRADO 10 29-0

D29. Nella scatola *A* vi sono 6 palline verdi e 4 rosse. Nella scatola *B* vi sono invece 12 palline verdi e 5 rosse. Quante palline verdi si devono spostare dalla scatola *B* alla scatola *A* affinché la probabilità di estrarre una pallina verde da *A* diventi uguale alla probabilità di estrarre una pallina verde da *B*?

A. ☐ 5

B. ☐ 7

C. ☐ 4

D. ☐ 2

Figura 4.7: Esercizi tratti dalle prove Invalsi grado 10

PROVA MAT-SNV 2010 GRADO 8 24-0

D24. **Elena compie gli anni in giugno. Di seguito è riportato il calendario di giugno 2010, dove sono evidenziati i giorni festivi.**

Giugno

Lu	Ma	Me	Gi	Ve	Sa	Do
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				

Qual è la probabilità che Elena compia gli anni in un giorno festivo?

Risposta: ……………………………………………………………………………………...

PROVA MAT-PN 2012 GRADO 8 19-B

E19. **Immagina di lanciare prima una moneta e poi un dado.**

a. **Completa la seguente tabella che riassume tutti i casi che possono verificarsi (alcune caselle sono già compilate).**

	FACCE DEL DADO					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Testa (T)	T ; 1	…………	…………	…………	T ; 5	…………
Croce (C)	C ; 1	…………	C ; 3	…………	…………	…………

b. **La probabilità che escano una croce e un numero dispari è**

A. ☐ $\frac{1}{2}$

B. ☐ $\frac{3}{12}$

C. ☐ $\frac{3}{8}$

D. ☐ $\frac{2}{12}$

Figura 4.8: Esercizi tratti dalle prove Invalsi grado 8

Gli obiettivi cognitivi che si intende sviluppare con lo svolgimento di tali esercizi sono principalmente elementari e intermedi. Nello specifico si riconoscono:

- 1.3.1 eseguire operazioni elementari
- 1.3.2 eseguire operazioni concatenate
- 1.4.1 riconoscere un concetto
- 2.1.2 riconoscere situazioni/procedimenti
- 2.2.1 eseguire/applicare procedimenti
- 2.2.2 applicare procedimenti noti in ambiti nuovi

Tra gli obiettivi superiori divergenti si riconosce:

- 3.2.1.3 riconoscere il problema chiave

4.1.3 Modulo 3

La seconda lezione è strutturata in maniera analoga alla prima: prevede una durata di 2 ore ed è frontale, con interazioni e riflessioni di gruppo dovute principalmente ai commenti relativi alle risposte del questionario. In questa lezione emerge il legame interdisciplinare tra matematica ed educazione civica poiché si introduce agli studenti il tema del gioco d'azzardo.

Il docente riprende la domanda del questionario "Cosa è per te il gioco d'azzardo?" e commenta con gli studenti le risposte raccolte, per poi procedere nel dare una definizione più formale e chiara di tale concetto. Riprendendo il lavoro svolto da Nomisma, viene proposta una panoramica sul gioco d'azzardo in Italia, ponendo particolare attenzione allo sviluppo del gioco online in relazione alla pandemia da Covid-19 del 2020.

Per catturare l'attenzione degli alunni si propone la visione dei video relativi a pubblicità del gioco d'azzardo (citare quelli nel capitolo sopra) per commentare con gli studenti il messaggio fornito. L'obiettivo è anche aiutare i ragazzi a osservare con occhio critico i mass media, le tecniche di comunicazione digitali per contribuire a sviluppare la competenza digitale, richiesta dal Parlamento Europeo. In ottica di cittadinanza l'attenzione si sposta poi sull'analisi del rapporto tra generazione Z e gioco d'azzardo. Vengono presentati, senza entrare nel dettaglio, i numeri più significativi della ricerca di Nomisma, ponendo l'attenzione sulle motivazioni di gioco, la frequenza e la tipologia di gioco, in linea con le domande descritte nella sezione 6 del questionario.

La prima parte della lezione si conclude mettendo in luce la linea molto sottile tra gioco d'azzardo come divertimento e dipendenza, illustrando ai ragazzi che, grazie alle poche regole del calcolo delle probabilità affrontate nella lezione precedente, è possibile analizzare qualche piccolo esempio di gioco d'azzardo. Il tema della seconda parte della lezione è il concetto di equità. È necessario definire l'equità mediante la definizione semplificata che non fa uso del concetto di speranza matematica , non introdotta a livello teorico e assente tra le conoscenze che, secondo le indicazioni nazionali, gli studenti devono apprendere. Per parlare di equità si analizzano due giochi d'azzardo: il SuperEnalotto e la Roulette francese.

Ho scelto tali giochi come esempio perché conosciuti, semplici da comprendere e consentono di affrontare tematiche specifiche inerenti al progetto.

Nel caso del SuperEnalotto, dopo una breve spiegazione del gioco, è possibile analizzare le probabilità di vincita. Dato che per calcolare tali probabilità è necessaria la conoscenza del calcolo combinatorio devono essere direttamente recuperate dal sito.

Quanto puoi vincere con SuperEnalotto

NUMERI INDOVINATI	PROBABILITÀ DI VINCITA	QUOTE MEDIE ATTESE
6	1 su 622.614.630	**Jackpot**
5+1	1 su 103.769.105	**311.000 €**
5	1 su 1.250.230	**32.000 €**
4	1 su 11.907	**300 €**
3	1 su 327	**25 €**
2	1 su 22	**5 €**

Figura 4.9: Screen tratto dal sito SuperEnalotto

Per rendere più esplicito il valore delle probabilità di vincita ho preferito riportare i dati in una nuova tabella, sostituendo alla dicitura 1 su 22 l'esplicito rapporto $\frac{1}{22}$ e il relativo valore in percentuale.

NUMERI INDOVINATI	PROBABILITA' DI VINCITA
2	$\frac{1}{22} \approx 4{,}5\%$
3	$\frac{1}{327} \approx 0{,}3\%$
4	$\frac{1}{11907} \approx 0{,}008\%$
5	$\frac{1}{1250230} \approx 8 \cdot 10^{-5}\%$
5+1	$\frac{1}{103769105} \approx 9{,}6 \cdot 10^{-7}\%$
6	$\frac{1}{622614630} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-7}\%$

Figura 4.10: Probabilità vincita al SuperEnalotto

In classe vengono invece svolti i calcolo relativi al concetto di l'equità: utilizzando la definizione si dimostra infatti che il SuperEnalotto non è un gioco equo e data la differenza notevole tra la somma che dovrebbe essere vinta e la somma proposta come vincita la non equità è ben evidenziata.

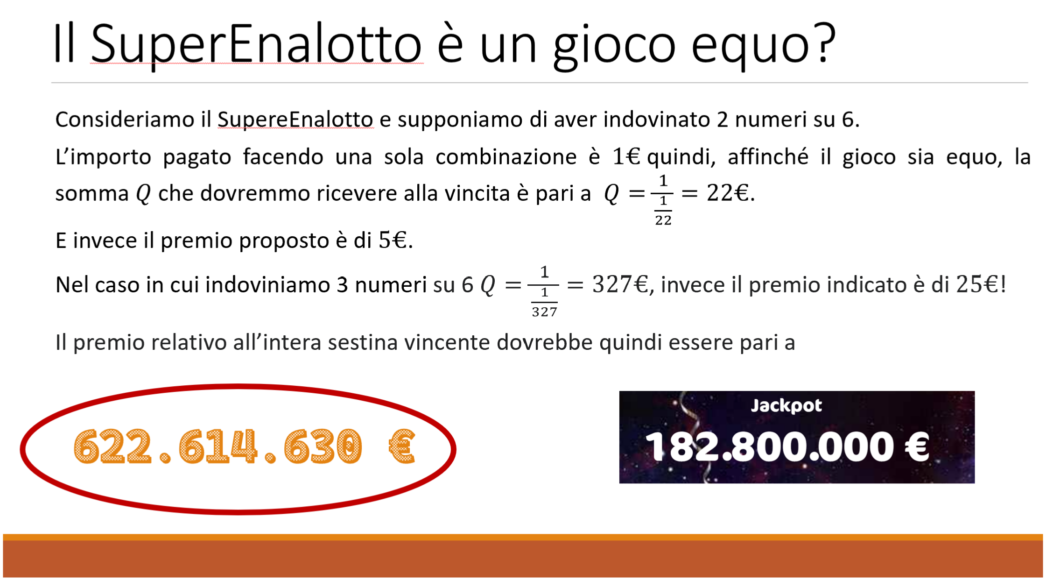
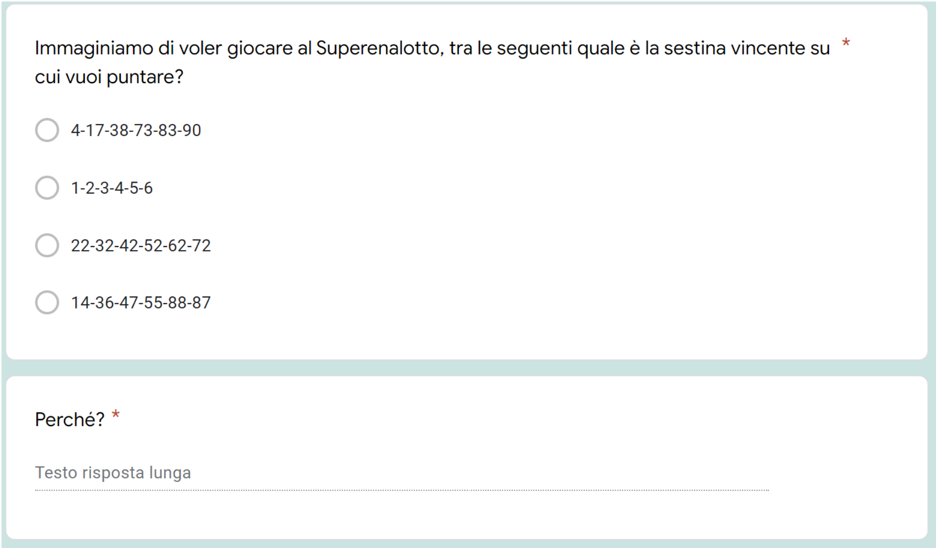


Figura 4.11: Slide tratta dal materiale didattico

La domanda del questionario



Immaginiamo di voler giocare al Superenalotto, tra le seguenti quale è la sestina vincente su cui vuoi puntare? *

- 4-17-38-73-83-90
- 1-2-3-4-5-6
- 22-32-42-52-62-72
- 14-36-47-55-88-87

Perché? *

Testo risposta lunga

Figura 4.12: Domanda del questionario

È molto importante per questa parte del percorso. Consente infatti di riflettere sul concetto dei numeri ritardatati nel SuperEnalotto e di mettere in luce le due principali misconcezioni della probabilità, cioè rappresentatività e in particolare la misconcezione del caso e l'equiprobabilità.

Il docente propone schematicamente le scelte indicate dai ragazzi commentando le motivazioni. Quello che ci si aspetta è che la maggior parte dei ragazzi escluderà dalla scelta le combinazioni che contengono un qualunque tipo di ordine (1-2-3-4-5-6 sono numeri consecutivi ; 22-32-42-52-62-72 sono tutti numeri pari) preferendo le combinazioni casuali, dimostrando dunque la tendenza ad escludere l'ordine dalla casualità.

Analogamente anche il gioco della roulette consente di analizzare le stesse tematiche. Si introducono le modalità di gioco, le puntante, le vincite e vengono calcolate direttamente alcune probabilità di vincita, data la semplicità dell'operazione.

Calcoliamo insieme alcune probabilità

La probabilità che esca il 5 è $P(5) = \frac{1}{37} \approx 2{,}7\ \%$

La probabilità che esca il 33 è $P(33) = \frac{1}{37}$

La probabilità che esca il 6 o il 13 è $P(esce\ 6\ o\ 13) = P(6) + P(13) = \frac{2}{37}$ perché eventi indipendenti

La probabilità che esca il 31 o il 32 è $P(esce\ 31\ o\ 32) = P(31) + P(32) = \frac{2}{37}$

La probabilità che esca il 14 o il 22 o il 24 è $P(esce\ 14\ o\ 22\ o\ 24) = P(14) + P(22) + P(24) = \frac{3}{37}$

Possiamo generalizzare affermando che se puntiamo su n numeri la probabilità di vincita è pari a $P = \frac{n}{37}$

La probabilità che esca un rosso è $P("esce\ rosso") = \frac{18}{37}$, infatti in questo caso stiamo puntando su 18 numeri

Figura 4.13: Slide tratta dal materiale didattico

Si tratta infatti di calcolare la probabilità di eventi elementari, per mostrare l'equiprobabilità, e la somma logica di eventi indipendenti, per creare continuità con gli strumenti teorici della lezione precedente. Per richiamare i numeri ritardati del SuperEnalotto e il concetto che "il caso non ha memoria" si riflette sulla falsità di affermazioni del tipo

"Se un numero non è uscito per 100 volte, allora uscirà a breve"

"Se è uscito rosso 20 volte di fila è improbabile che esca rosso ancora una volta"

Figura 4.14: Frasi tratte dal materiale didattico

con l'obiettivo di richiamare nuovamente le misconcezioni di rappresentatività e equiprobabilità. La lezione si conclude con lo studio dell'equità della roulette, affrontato come mostrato nelle slide seguenti.

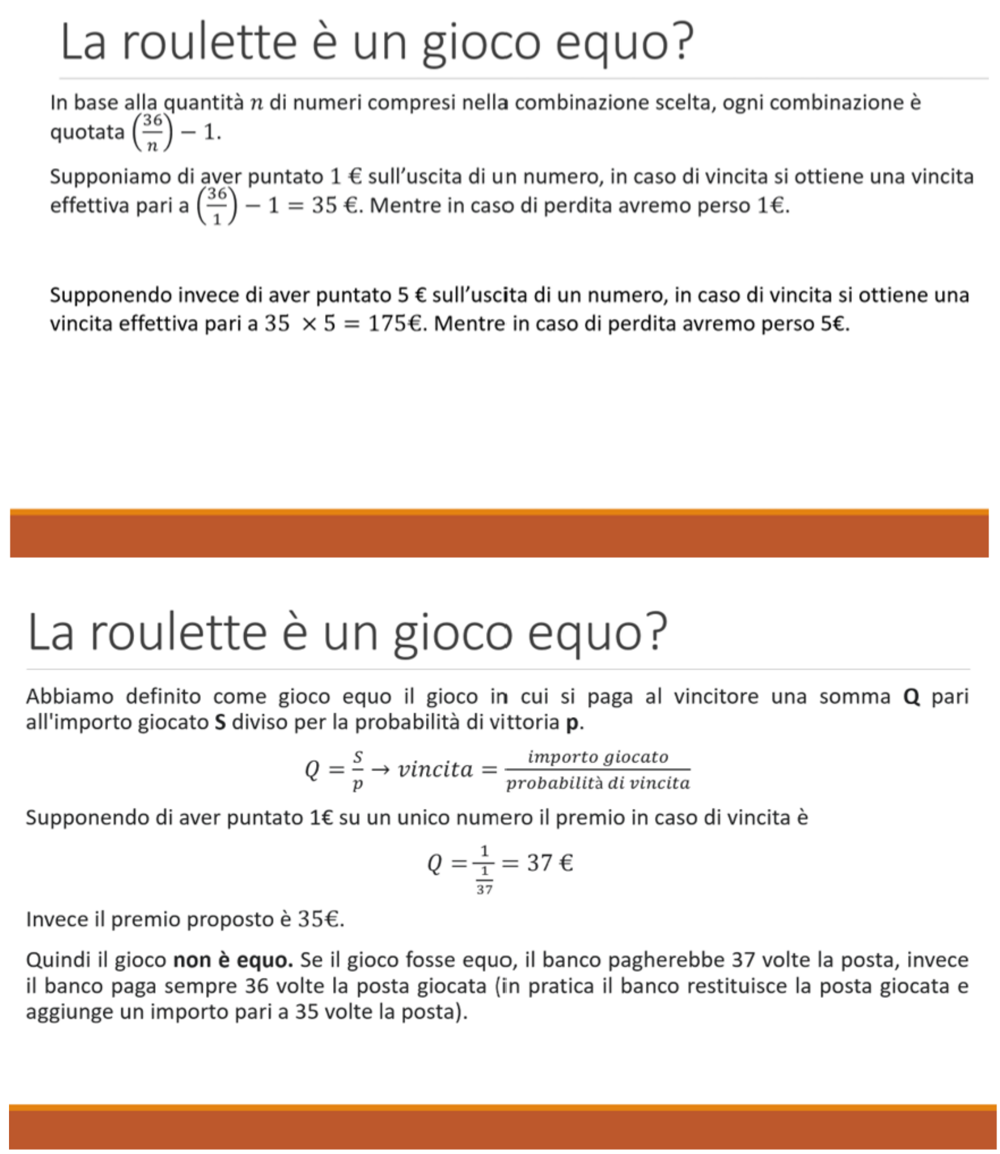


Figura 4.15: Slide tratte dal materiale didattico

Sia nel primo che nel secondo modulo le lezioni descritte sono principalmente frontali e consentono di promuovere situazioni didattiche. Vi è dunque l'intenzione esplicita di insegnare, il docente ha un ruolo centrale rispetto all'alunno e vige pienamente il contratto didattico. Come spiegato in precedenza, i riferimenti alle risposte del questionario sono molto utili per interrompere la staticità della lezione frontale.

4.1.4 Modulo 4

L'ultima lezione del progetto didattico ha una durata di circa 1 ora. La maggior parte della lezione viene dedicata ad un'attività laboratoriale, per differenziarsi dalle precedenti lezioni e fornire una diversa dinamica. L'obiettivo è realizzare una situazione a-didattica, in cui si rompe il contratto didattico e l'allievo diventa protagonista rispetto al contenuto del processi di apprendimento.

L'attività consiste nel lavorare con il simulatore Gratta&Perdi, elaborato durante il progetto BetOnMath. Ho scelto di proporre questa attività nel progetto, perché il simulatore consente di simulare realmente le uscite dei giochi d'azzardo e vivere in prima persona le emozioni che provano i giocatori. A mio parere tale dinamica è interessante, poiché il contesto del gioco d'azzardo è intriso di emozioni.

Per poter giocare è necessario che gli studenti abbiano dei dispositivi Android, poiché il simulatore supporta solo tale sistema operativo. Nel questionario infatti viene chiesto se si ha la possibilità di portare a scuola un dispositivo Android. In base alle risposte ottenute si può organizzare l'attività singolarmente o in piccoli gruppi. L'indicazione è di lavorare in gruppi di due o tre persone e di non lavorare individualmente. L'interazione tra pari è infatti molto importante per stimolare l'apprendimento e per imparare divertendosi. Dall'utilizzo del simulatore emergono due messaggi che l'insegnante può veicolare: da un lato la probabilità di aggiudicarsi premi elevati è estremamente bassa, dall'altra il gioco d'azzardo sistematico, ripetuto su un numero di giocate sempre più elevato non è più azzardo, ma certezza di perdere. Il simulatore dunque può essere visto come esempio di un dispositivo tecnologico che provoca reazioni emotive al gioco d'azzardo. Mentre il giocatore reale prova e gestisce le emozioni da solo, in classe gli studenti vivono un'esperienza collettiva. Ruolo centrale hanno i compagni e l'insegnante. Inoltre la conoscenze matematica che il docente porta in classe aiuta a dare senso all'esperienze, sul piano cognitivo ed emotivo.

Per scaricare l'applicazione si può utilizzare il sito Gratta&Perdi o recuperare il QR code dal materiale del progetto[3]. Dopo aver introdotto il simulatore e spiegato come funziona, il docente guida gli studenti nell'installazione dell'applicazione. Una volta installata, i ragazzi hanno una ventina di minuti per giocare liberamente, provare strategie e cambiare a piacere le impostazioni di default del gioco. L'obiettivo è infatti di creare una situazione di gioco piacevole, rilassata che consenta di analizzare una volta conclusa l'attività, le emozioni che ha suscitato.

[3]https://betonmath.polimi.it/wp-content/uploads/9KcD4g9Hx9/Modulo4.pdf

Conclusi i 20 minuti di attività autonoma il docente cerca di cogliere riflessioni e spunti di discussione dagli alunni, chiedendo loro quanto hanno vinto, quanto hanno giocato e che emozioni hanno provato. Per continuità con il lavoro svolto nelle precedenti lezione è necessario chiedere inoltre se secondo loro Gratta&Perdi è un gioco equo.

L'attività laboratoriale lascia il posto all'ultimo intervento dell'insegnante: il ruolo delle emozioni nel gioco d'azzardo e alcuni aspetti psicologici distorti che ne derivano.

Gli ultimi minuti della lezione sono dedicati alle conclusioni e a eventuali domande o interventi degli alunni.

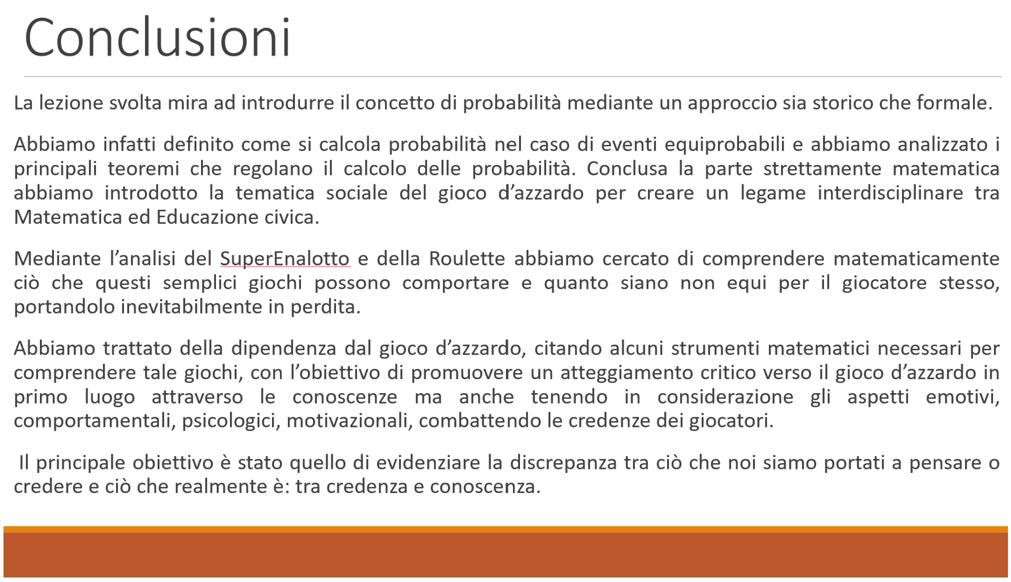


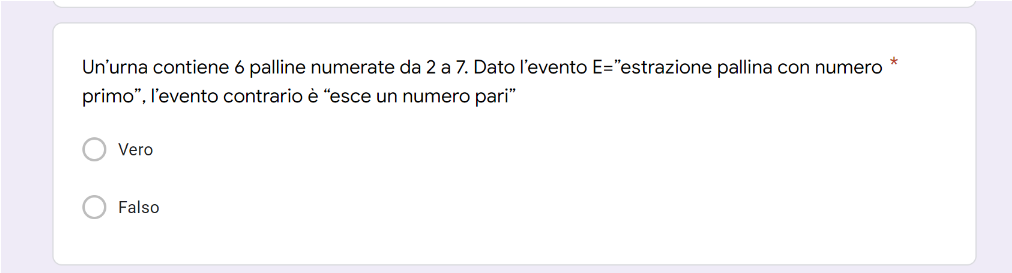
Figura 4.16: Slide tratta dal materiale didattico

Se i tempi lo consentono è ottimale dedicare 10 minuti, una volta concluso il progetto, alla compilazione del questionario finale. Qualora non ci fosse tempo a lezione i ragazzi lo possono compilare in un secondo momento.

Il questionario mira ad analizzare le competenze disciplinari e di cittadinanza che gli studenti hanno appreso e/o sviluppato durante il percorso e a ricevere feedback in merito alle attività svolte per cogliere gli aspetti critici e migliorarli.

La prima sezione del questionario chiede le stesse informazioni personali del primo: età, sesso, classe e codice di riferimento.

La seconda sezione del questionario è quella relativa alle competenze disciplinari. Come nel primo questionario, viene riproposta la domanda "Cosa è la probabilità di un evento?” per confrontare tale risposta con la precedente: l’obiettivo cognitivo è definire un concetto.

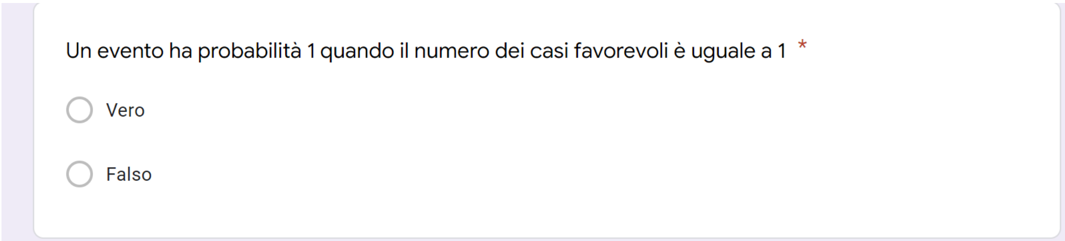


Un’urna contiene 6 palline numerate da 2 a 7. Dato l’evento E=”estrazione pallina con numero primo”, l’evento contrario è “esce un numero pari” *

Vero

Falso

Figura 4.17: Domanda del questionario



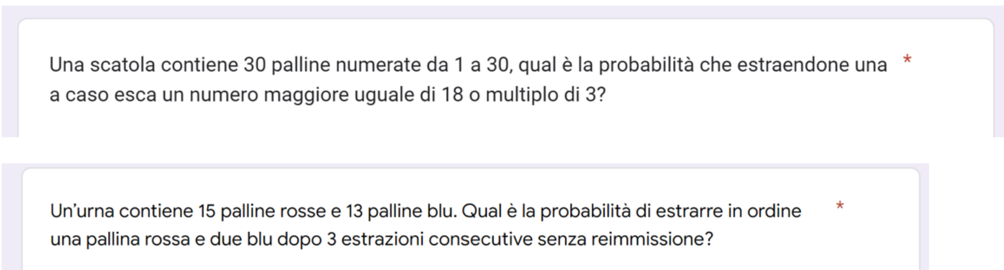
Un evento ha probabilità 1 quando il numero dei casi favorevoli è uguale a 1 *

Vero

Falso

Figura 4.18: Domanda del questionario

In entrambe le domande l’obiettivo cognitivo è riconoscere un concetto. Consentono di valutare, a livello di conoscenze, l’apprendimento del concetto di probabilità di un evento certo e della definizione classica di probabilità. Nella seconda domanda si valuta anche il concetto di evento contrario e il prerequisito necessario è la conoscenza dei numeri primi.



Una scatola contiene 30 palline numerate da 1 a 30, qual è la probabilità che estraendone una a caso esca un numero maggiore uguale di 18 o multiplo di 3? *

Un’urna contiene 15 palline rosse e 13 palline blu. Qual è la probabilità di estrarre in ordine una pallina rossa e due blu dopo 3 estrazioni consecutive senza reimmissione? *

Figura 4.19: Domanda del questionario

Gli obiettivi cognitivi delle ultime due domande della sezione sono riconoscere un concetto, riconoscere situazioni/procedimenti e eseguire operazioni concatenate. Le domande mirano a valutare l’apprendimento del concetto di probabilità della somma logica degli eventi e del prodotto logico di eventi.

La seconda sezione raccoglie feedback sul progetto didattico: gli elementi che sono piaciuti di più e gli elementi che sono piaciuti di meno, quali argomenti approfondire e che cosa hanno imparato da queste lezioni.

Infine l'ultima sezione riguarda le competenze di cittadinanza.

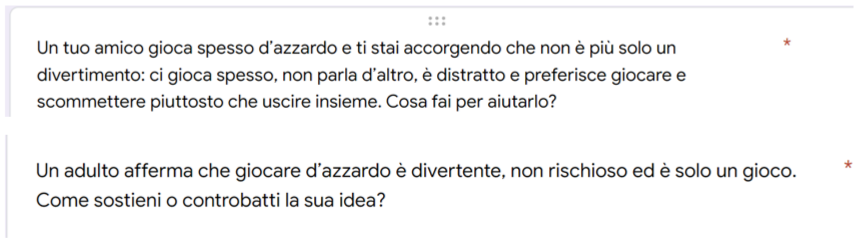


Figura 4.20: Domanda del questionario

Anche in queste ultime domande si riconoscono alcuni obiettivi cognitivi: tentare soluzioni, riconoscere il problema chiave, formulare nuove soluzioni. Estrapolati dal contesto matematico, tali obiettivi costituiscono principi necessari alla formazione di un cittadino consapevole e positivamente attivo.

4.2 Esperienza in classe

Il progetto didattico è stato svolto in classe durante l'esperienza di tirocinio curriculare, che ho realizzato dal 4 marzo 2022 al 17 maggio 2022 l'I.I.S.S. "A. Poliziano" di Montepulciano, in provincia di Siena. Grazie alla collaborazione delle docenti Daniela Melosi e Barbara Bianchini, ho avuto la possibilità di lavorare attivamente all'interno delle loro classi e proporre il mio progetto didattico. Le classi a cui faccio riferimento sono:

- II A liceo scientifico – composta da 16 alunni, seguita dalla prof.ssa Bianchini
- II B liceo scientifico – composta da 21 alunni, seguita dalla prof.ssa Melosi
- II D liceo scientifico sez. Scienze Applicate – composta da 28 alunni, seguita dalla prof.ssa Bianchini

Il quadro orario del liceo scientifico sez. Scienze Applicate propone, nella classe II, quattro ore di matematica, a differenza delle cinque ore proposte dall'altro corso di studi. L'opzione Scienze Applicate differisce dal classico liceo scientifico per l'assenza dello studio del latino e la presenza di due ore di informatica fin dal primo anno.

In tutte le classi la durata del percorso didattico è stata di cinque ore, come previsto durante la progettazione, con le seguenti tempistiche.

	II A	II B	II D
I lezione – modulo 2	5 aprile 2022 Durata: 2 ore	4 aprile 2022 Durata: 2 ore	14 maggio 2022 Durata: 2 ore
II lezione – modulo 3	6 aprile 2022 Durata: 2 ore	6 aprile 2022 Durata: 2 ore	16 maggio 2022 Durata: 2 ore
III lezione – modulo 4	12 aprile 2022 Durata: 1 ora	13 aprile 2022 Durata: 1 ora	17 maggio 2022 Durata: 1 ora

Figura 4.21: Calendario lezioni

Per le classi II A e II B ho usufruito delle ore a disposizione delle professoresse previste dall'orario scolastico, mentre per la classe II D, ho avuto modo di concludere il progetto il 17 maggio, sfruttando un'ora che gli studenti avrebbero avuto di supplenza non con un loro docente.

I giorni precedenti alla prima lezione le professoresse hanno inviato, tramite il registro elettronico, il seguente messaggio agli studenti per poter compilare il questionario iniziale e permettermi di inserire le risposte all'interno del materiale didattico.

Ciao ragazzi, la prossima settimana inizieremo insieme un progetto interdisciplinare tra matematica ed educazione civica sulla probabilità e il gioco d'azzardo. Per poter lavorare insieme vi chiedo di dedicare una mezz'ora a due piccole attività entro domenica sera.
1) Guardare il video al seguente link https://youtu.be/bquFGHiB8p0
2) Una volta visto il video, compilare un questionario al link https://forms.gle/bUDLaXMgFWu6z4CZ9 entro domenica.
Grazie per la collaborazione!!
Ci vediamo martedì!
Francesca

Figura 4.22: Messaggio inviato agli studenti

Le tabelle sottostanti mostrano più nel dettaglio la struttura e le tempistiche delle lezioni nelle classi, suddividendo la lezione nelle fasi principali.

LEZIONE 1			
	II A	II B	II D
Storia della probabilità e elementi teorici	1 ora e 30 minuti	1 ora e 15 min	1 ora e 40 min
Esercizi	30 minuti	45 minuti	20 minuti

Figura 4.23: Organizzazione attività prima lezione

Le differenti tempistiche sono giustificate da alcuni fattori:

- La II B è stata la prima classe in cui ho svolto il percorso: per paura di non riuscire a trattare tutti gli argomenti previsti nella parte teorica, ho tenuto un ritmo troppo veloce, concludendo prima di quanto pensassi. Ho dedicato molto tempo alla risoluzione degli esercizi usando quelli previsti nel materiale e aggiungendone altri dal libro di testo [3]. Nelle altri due classi ho gestito la lezione diversamente, avendo più padronanza delle tempistiche e degli argomenti da trattare.

- È stato più complicato gestire la classe più numerosa (la II D) perché ho dovuto richiamare l'attenzione più volte e era quasi impossibile avere silenzio assoluto. Anche per questo ho impiegato molto tempo nella prima parte della lezione e ho dedicato poco tempo agli esercizi.

Gli esercizi proposti nel materiale didattico sono stati volti alla lavagna dagli studenti, corretti e commentati insieme. Non sono emerse particolari difficoltà nella risoluzione: solo il terzo esercizio (il più complesso in ordine di difficoltà) ha richiesto il mio intervento in tutte le classi.

Tra gli esercizi tratti dalle prove Invalsi gli studenti hanno avuto maggiore difficoltà con il numero D29 (**riportare nelle note testo**). Penso che tale difficoltà sia dovuta alla diversa formulazione della domanda: non era esplicitata la richiesta di trovare la probabilità, anche se necessaria per lo svolgimento dell'esercizio. L'esercizio E19 proponeva lo stesso spazio campionario dell'esercizio 3, perciò tale elemento non ha creato difficoltà. Il teorema delle probabilità totali ha rappresentato in generale l'ostacolo maggiore.

Gli studenti hanno partecipato attivamente e sono rimasta sorpresa anche dallo svolgimento degli esercizi: pensavo che avrebbero avuto più difficoltà, essendo la prima volta in cui sentivano parlare di probabilità. Non avendo fatto lavorare i ragazzi individualmente e in maniera autonoma non sono sicura che ciascuno abbia realmente appreso tutti gli elementi della lezione: l'impressione che ho avuto si riferisce alla classe nel complesso.

LEZIONE 2			
	II A	II B	II D
Il gioco d'azzardo in Italia e il concetto di equità nel gioco d'azzardo	2 ore	2 ore	2 ore

Figura 4.24: Organizzazione attività seconda lezione

Anche durante la seconda lezione gli studenti hanno partecipato con domande o con riflessioni. Dopo la visione dei due video pubblicitari è intervenuta Matilde della II A chiedendo

mi sembra di aver capito che da qualche anno c'è una legge che regola un po' questo fenomeno, è possibile?

Abbiamo così parlato in classe della legge n.96 del 2018 e commentato i due video. In generale ho notato particolare attenzione in questa fase della lezione, perché abbiamo interrotto il ritmo monotono della lezione frontale e, data l'età, i ragazzi non conoscevano o non si ricordavano gli spot.

ma davvero questi video erano trasmessi in tv? ha chiesto Viola di II B

sì certo proprio intelligenti... ha commentato Elena di II B

Dopo aver illustrato la diffusione del gioco d'azzardo in Italia, in II D, prima che potessi continuare il discorso, si è creato un dibattito sui principali giochi diffusi. I ragazzi hanno proposto delle "classifiche" e insieme abbiamo confrontato se ciò che avevano pensato fosse coerente con la documentazione che avevo trovato per la lezione.

*pensavo che il gioco più diffuso fossero le scommesse anche offline ... non mi aspettavo il Gratta&Vinci*ha affermato Lorenzo

ma è logico che sia il Gratta&Vinci! C'è tanta pubblicità! ribatte Eleonora

eh ma anche le scommesse sportive sono tanto pubblicizzate! Quando ci sono le partite di calcio vengono nominate spesso! risponde Lorenzo

Ho notato inoltre interesse e curiosità quando ho mostrato la non equità del Superenalotto e la grande differenza tra il premio che dovremmo ricevere e il premio proposto. Ed è stato divertente commentare insieme le combinazioni scelte da giocare al SuperEnalotto.

vabbé dai ma chi ha scelto 1,2,3,4,5,6 non vuole proprio vincere ha detto Dario di II D

per stare sicuri è ovvio che non dobbiamo scegliere 22-32-42-52-62-72 è troppo particolare dice Alberto di II B

ma che c'entra è indifferente quale scegliamo tanto hanno tutte stessa probabilità! risponde Alessandro di II B

LEZIONE 3			
	II A	II B	II D
Attività con simulatore	30 minuti	30 minuti	40 minuti
Aspetti psicologici e conclusioni	15 minuti	15 minuti	10 minuti
Questionario finale	15 minuti	15 minuti	10 minuti

Figura 4.25: Organizzazione attività terza lezione

L'ultima lezione è stata, a livello di tempistiche, identica per la II A e II B. Nella II D ho impiegato troppo tempo nell'attività con il simulatore, perché ho avuto più difficoltà nel gestire la classe: ho dovuto ripetere più volte le modalità per scaricare l'applicazione, perché non tutti riuscivano a sentire o non prestavano attenzione e anche il momento di confronto prima delle conclusioni ha richiesto più tempo del previsto per dare modo ai ragazzi di parlare. Anche nelle altre classi è stato perso qualche minuto di troppo nell'installazione dell'applicazione, ma una volta che tutti avevano pronto il dispositivo hanno lavorato e commentato tra loro tranquillamente.

In II A durante questa ultima lezione ho lavorato in modalità mista. Un ragazzo infatti seguiva da casa: abbiamo avviato una lezione su Meet e un suo compagno di classe al primo banco teneva il computer accanto così da aiutarlo ad installare l'applicazione mentre io aiutavo gli altri alunni in aula. Durante l'attività di tirocinio ho svolto qualche lezione teorica alle classi e altre volte mi era capitato di dover far fronte a questa esigenza, perciò sono arrivata preparata. Le prime volte mi capitava di non interpellare spesso i ragazzi a casa e non chiedere se ci fossero problemi tecnici o se avessero compreso il concetto descritto. Fortunatamente in questo caso la lezione non prevedeva nessun specifico obiettivo di apprendimento disciplinare e gli elementi teorici trattati sono stati minimi. Purtroppo il ragazzo si è perso la dinamica a-didattica e l'attività svolta in gruppo. Abbiamo comunque cercato di farlo interagire proprio come se fosse stato in presenza.

Tutti gli studenti sono apparsi entusiasti quando ho descritto l'attività che avremmo dovuto fare. In ogni classe gli studenti hanno lavorato a gruppi di 2 (prevalentemente) o 3 considerando il compagno di banco più vicino. Una volta fornite le indicazioni per scaricare e installare l'applicazione i ragazzi hanno cominciato a giocare: non nascondo che ogni tanto ho dovuto richiamare l'ordine, ma principalmente hanno lavorato mantenendo un tono di voce adeguato. Per le classi II A e B posso dire con certezza che tutti hanno preso seriamente l'attività, invece per la II D non ho avuto sempre la possibilità di controllare tutti dato il numero elevato di componenti. In generale però i ragazzi hanno partecipato e pur usando il telefono sono rimasti concentrati sull'attività. Erano divertiti, emozionati e passando per i banchi ho notato alcuni aspetti interessanti:

- Se non vincevano allora cercavano di ricominciare a giocare velocemente;
- Se vincevano un premio si scambiavano un cinque o commentavano dicendo ad esempio "grandeee siamo state brave!" e esultavano;
- Ho dovuto richiamare più volte l'attenzione per concludere l'attività con il simulatore perché continuavano a giocare.

Osservando questi comportamenti posso concludere che l'attività con il simulatore ha avuto successo: le emozioni emerse richiamano le emozioni provate dai giocatori d'azzardo.

Alla fine dell'attività ho chiesto ad ogni coppia se considerando tutte le partite giocate avessero alla fine vinto o perso denaro:

- In II A 6 coppie su 8 hanno dichiarato di aver perso soldi;
- In II B 7 coppie su 10 hanno dichiarato di aver perso soldi e 1 coppia di aver pareggiato;
- In II D 10 gruppi su 12 hanno dichiarato di aver perso soldi;

L'esito della domanda ha avvalorato uno tra gli obiettivi del progetto: comprendere che il gioco d'azzardo porta a perdite nel lungo periodo.

4.2.1 Esperienza in IV B

La professoressa Melosi insegnava anche nella classe IV B. Dato che durante il secondo anno non aveva affrontato il tema della probabilità mi ha chiesto di proporre il progetto nella classe quarta, così da svolgere anche le ore di educazione civica, trattando del gioco d'azzardo. Ho perciò proposto il progetto in classe ma in accordo con la docente ho effettuato solo 3 ore sulle 5 previste, eliminando i questionari e l'attività con il simulatore. Tale percorso dunque non fornisce alcun contributo al mio lavoro di ricerca per la tesi. La prima lezione della durata di due ore è stata svolta l'8 aprile 2022, mentre la seconda lezione di un'ora l'11 aprile 2022. Alcune delle domande più significative del questionario le ho riproposte durante la lezione, per poter argomentare coerentemente e per coinvolgere al meglio gli studenti. La differenza di età tra gli alunni di quarta e di seconda ha determinato un diverso comportamento durante le lezioni: nella classe quarta i ragazzi hanno partecipato molto più attivamente, ma dall'altra parte chi era disinteressato era molto più evidente che nelle classi seconde. Inoltre le lezioni hanno avuto un ritmo molto più veloce e sono nati dibattiti interessanti. Ad esempio alcuni ragazzi hanno parlato di alcune loro esperienze come le scommesse sul calcio online o il poker. Gli esercizi svolti per applicare la teoria sono stati principalmente tratti dal libro di testo Zanichelli ed. Blu volume 4. Per alzare il livello e per mettere alla prova i ragazzi gli ultimi minuti della lezione ho proposto un quesito della prova di maturità del 2017.

8. Un dado ha la forma di un dodecaedro regolare con le facce numerate da 1 a 12. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata dal numero 3 si presenti con una probabilità p doppia rispetto a ciascun'altra faccia. Determinare il valore di p in percentuale e calcolare la probabilità che in 5 lanci del dado la faccia numero 3 esca almeno 2 volte.

Figura 4.26: Quesito n. 8 maturità 2017

È stato risolto da uno studente, che era intervenuto più volte durante le lezioni, e che, su indicazione della professoressa, aveva buoni risultati in matematica. Per la risoluzione ha lavorato principalmente in autonomia, sono intervenuta soltanto per consigliare di lavorare alla fine con la probabilità dell'evento contrario e per poi rispiegare alla classe il procedimento da lui svolto alla lavagna. Un'altra differenza che ho riscontrato tra le classi è l'abilità nell'utilizzo di un linguaggio specifico e la capacità di esporre la strategie e i procedimenti applicati. Nella classe quarta alcuni ragazzi avevano chiaramente raggiunto tale competenza mentre altri no, invece nella classe seconda tutti gli studenti avevano difficoltà nell'aspetto comunicativo ed espositivo più che nell'utilizzo del linguaggio. Probabilmente ho notato questo perché gli esercizi proposti non richiedevano abilità in tali settori, dato che non era quello l'obiettivo dell'attività.

Capitolo 5

Analisi dei questionari

Nel seguente capitolo vengono descritte e commentate le risposte fornite al questionario iniziale e finale suddivise per sezione e, dove opportuno, anche per classe.

5.1 Questionario iniziale

Il questionario è stato compilato da

- 13 alunni su 16 in II A
- 17 alunni su 21 in II B
- 18 alunni su 28 in II D

Per un totale di 48 risposte su 65 alunni.

Dalle risposte del questionario risulta che il video "Introduzione alla probabilità" è piaciuto *abbastanza* al 62,5% degli studenti e molto al 35,4%. Solo 1 studente (il 2,1% mancante) ha indicato *poco*: nelle risposte successive non ha specificato quali aspetti del video gli fossero piaciuti di meno o di più e ha scelto come aggettivi *breve, curioso, divertente*. Trovo dunque questa risposta poco coerente e incompleta rispetto alle altre analizzate nel complesso.

In generale i principali aggettivi attribuiti al video sono stati *breve* (52,1%), *chiaro* (77,1%), *curioso* (70,8%) e *interessante* (75%). Per pochi studenti è risultato scontato e confusionario.

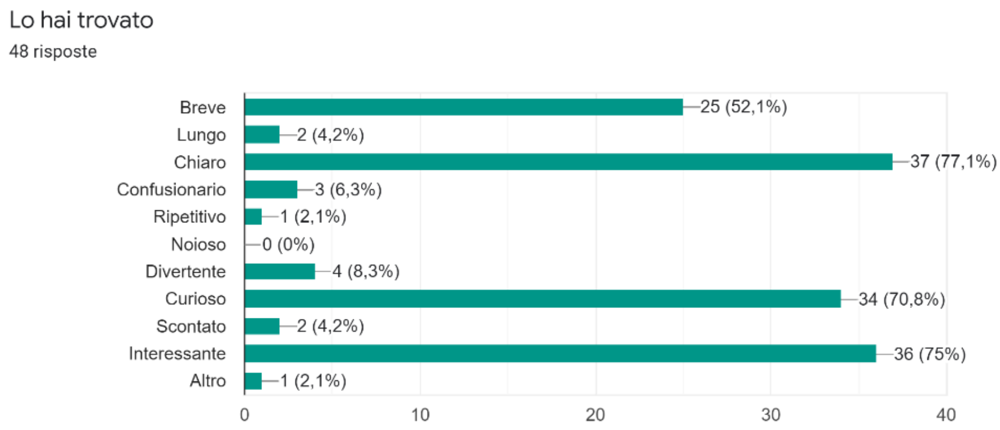


Figura 5.1: Feedback video

Tra gli aspetti che sono piaciuti di più ritengo sia interessante sottolineare:

- Il gioco delle tre scatole
- L'applicazione della probabilità alla vita reale

Il discorso della probabilità delle scatole	I collegamenti con la quotidianità
La probabilità delle 3 scatole	L'applicazione della probabilità alla vita di tutti i giorni
Il gioco delle tre scatole	Mi è piaciuto molto vedere come la si potesse applicare alla vita reale
La percentuale delle 3 scatole	Il paragone con i giochi d'azzardo, tema molto attuale
La cosa delle 3 scatole	

Figura 5.2: Risposte tratte dal questionario

La brevità del video è invece risultato uno degli aspetti che è piaciuto di meno. Dalle risposte sottostanti si evincono anche altri elementi:

Le definizioni, che sono poche, ma che anche probabilmente devono essere scritte, son però l'aspetto che mi è piaciuto di meno

Avrei fatto dei paragoni più concreti sulla vita di tutti i giorni

Fornire immediatamente una risposta veloce senza dare tempo di riflettere

Figura 5.3: Risposte tratte dal questionario

Credo che sia necessario scrivere a video le definizioni per consentire agli studenti di visualizzarle e concentrarsi qualche secondo solo sul concetto matematico. Concordo con l'idea di mostrare esempi più concreti e fornire intervalli più adeguati, allungando la durata del video.

Il paradosso dei due figli ha creato alcune perplessità.

Gli esempi riguardanti la probabilità dei figli, che non ho ben capito

L'esempio con i figli mi ha un po' confuso

Figura 5.4: Risposte tratte dal questionario

L'83,3% ha guardato il video una sola volta: tra le risposte fornite la più comune è "*perché avevo capito quasi tutto alla prima visione*", "*è stato chiaro dopo la prima visione*".

Chi invece ha guardato il video più volte afferma che:

All'inizio non mi era chiara la parte del gioco d'azzardo

Per comprendere meglio

Per comprenderlo e riflettere meglio

Per ricordarmelo meglio

Perché non mi era chiaro l'esempio delle scatole

La parte dei video relativa ai paradossi ha avuto dunque un duplice ruolo: da un lato ha incuriosito e stupito i ragazzi, dall'altro ha determinato qualche difficoltà.

La maggior parte degli studenti non conosceva nessuno dei due paradossi proposti nel video.

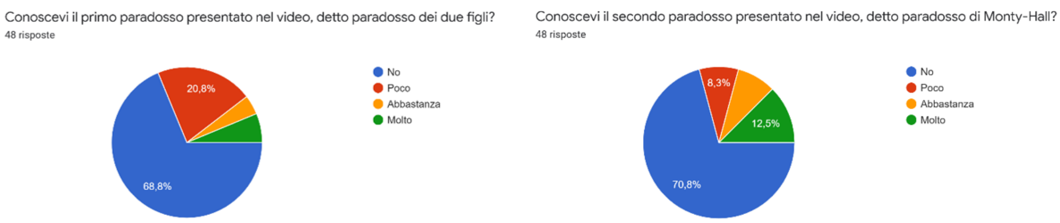


Figura 5.5: Conoscenza dei paradossi

Il 75% avrebbe risposto 50% al paradosso dei due figli e il 62,5% avrebbe tenuto il pacco invece che cambiarlo. Il concetto di paradosso e di contrapposizione tra intuizione e realtà viene, mediante questi dati, effettivamente confermato. Alcuni ragazzi hanno un'idea nitida e corretta di paradosso un fatto che viene descritto dove il risultato risulta contrario rispetto all'opinione di tutti

Un paradosso è un' affermazione o un' espressione che va in contrasto con l' opinione comune o con la verosimiglianza, e riesce, quindi, a stupire o a sorprendere

Un paradosso è qualcosa che indica il contrario di ciò che sembra scontato.

mentre altri hanno idee confuse

È un argomentazione

un paradosso è un avvenimento a cui siamo impossibilitati a dare una risposta poiché non porta a nessuna soluzione

Dire una cosa per affermare l'opposto

Durante la prima lezione del progetto è stata dedicata una piccola parentesi all'importanza del linguaggio specifico e all'universalità e rigore che ne deriva. Questo aspetto della matematica emerge secondo me nella spiegazione che un alunno di II B fornisce del concetto di definizione:

Una frase oggettiva che vale per tutti e sempre e offre una spiegazione riguardo qualcosa di preciso.

I termini *oggettivo* ed *espressione* predominano nelle risposte dei ragazzi alla domanda "Cosa è per te una definizione?"

Un'espressione che spiega in maniera del tutto oggettiva e generalizzata l'argomento che tratta

È un insieme di frasi che spiega oggettivamente un concetto tramite la teoria.

la spiegazione di un termine

Descrizione oggettiva di un termine

Figura 5.6: Risposte tratte dal questionario

L'universalità e l'a-temporalità espresse dalle parole "che vale per tutti e sempre" non è, però, emersa in nessun'altra risposta. Per tale ragione penso che sia stato importante aver dedicato del tempo al ruolo del linguaggio e all'universalità e rigore della matematica (l'idea di affrontare tale tema è nata prima della somministrazione e analisi del questionario).

Particolare è secondo me anche la risposta di una ragazza di II A, perché è l'unica ad utilizzare per spiegare il concetto di definizione il termine "*efficace*", caratteristica decisamente propria della matematica.

Una spiegazione chiara ed efficace di un determinato argomento

Per gli studenti il concetto di probabilità non è del tutto sconosciuto, ma la definizione classica proposta nel video era nota solo al 33,3% degli studenti.

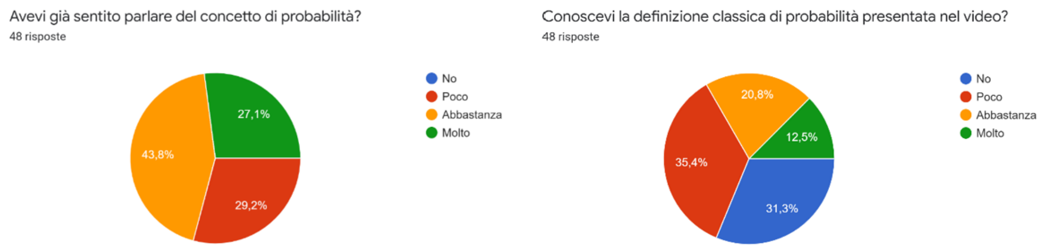


Figura 5.7: Conoscenza concetto i probabilità

Nessuno ha messo in dubbio la validità e la correttezza della definizione, anzi il 66,7% la ritiene molto valida e corretta perché

> Sono calcoli matematici quindi veritieri
>
> Se è su YouTube e la prof ce l'ha fatta vedere è attendibile
>
> Perché spiegato in modo semplice

In generale l'aggettivo *semplice* predomina nelle risposte dei ragazzi. Sembra dunque che il livello di validità sia principalmente misurato dalla semplicità e dalla chiarezza. Significative sono però anche le altre due risposte. Lo spirito critico viene meno per due ragioni:

- il ragionamento mostrato, ritenuto logico, e l'uso di strumenti matematici sono sufficienti per garantire la validità e correttezza;
- YouTube viene considerato una fonte attendibile soprattutto se la stessa insegnante ne fa uso dunque non c'è necessità di mettere in dubbio la correttezza.

A mio parere la matematica, ed in particolare i procedimenti che fanno uso della matematica, non vengono mai messi in discussione dagli studenti, ma presi per buoni. Spesso non solo gli studenti, ma soprattutto gli adulti, "alzano le mani" di fronte ad affermazioni che contengano matematica, indipendentemente dalla profondità delle nozioni richieste, come se rinunciassero a priori a capire e si attenessero ad una forma di ipse dixit. Credo quindi sia stato importante mostrare ai ragazzi l'evoluzione storica che ha portato all'interpretazione di probabilità, oggi accettata, per mostrare l'importanza dell'errore e di come alcuni ragionamenti, seppur matematici, non sempre risultino corretti. L'idea di mostrare la matematica come qualcosa in continua evoluzione può aiutare gli studenti ad abbandonare l'idea statica e certa che hanno di questa disciplina poiché spesso viene ridotta a meri meccanicismi.

Tra le risposte mi ha colpito molto:

non avendo conoscenze approfondite non posso giudicare il livello della definizione ma posso dire che è stata chiara

L'implicazione *chiara* $\rightarrow$ *corretta* viene abbandonata: lo studente riconosce di non avere le conoscenze per poter stabilire la validità e dunque si limita solo a constatare che la ritiene chiara. Nessun'altra risposta fornisce questo tipo di ragionamento.

Una delle domande chiave all'interno del questionario è "Cosa è per te la probabilità?". Ho suddiviso le risposte in diverse categorie scegliendone alcune più rappresentative.

GRUPPO 1	GRUPPO 2	GRUPPO 3	GRUPPO 4
La probabilità indica quanto sia possibile che un qualcosa accada	il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi probabile	la probabilità è un calcolo che definisce le percentuali di possibilità	è la rappresentazione numerale di ciò che è probabile che accada.
La possibilità che un evento, fra più eventi, può accadere	è il calcolo dei casi favorevoli e sfavorevoli affinché accada un certo evento.	è in percentuale le possibilità che accada una qualunque azione	Vedo la probabilità come un modo di prevedere un eventuale futuro.
la probabilità è la possibilità che qualcosa accada nel corso del tempo	l rapporto tra casi favorevoli e casi totali	La percentuale di volte che si può verificare un determinato fatto	
Le possibilità che qualcosa accada			
la possibilità di un avvenimento			

Figura 5.8: Risposte tratte dal questionario

Il **GRUPPO 1** mostra che la probabilità viene associata al concetto di possibilità e di contare le possibilità che un evento accada. Non tutti usano la parola evento ma avvenimento, inteso come sinonimo, oppure qualcosa che accada. Quando viene chiesto loro di dare una definizione di evento propongono idee o spiegazioni concordi con la risposta precedente.

Rimanendo nell'argomento un evento è un accadimento utile allo studio che si sta conducendo

un avvenimento che si verifica

Qualcosa che si verifica

La risposta che si avvicina di più al concetto di evento nel senso probabilistico è secondo me "*un caso con determinate caratteristiche tra tutti i casi possibili*", perché specifica la particolarità e la singolarità dell'evento rispetto a tutte le altre possibilità.

Il **GRUPPO 2** riporta come definizione di probabilità la definizione classica: gli studenti che hanno fornito questa risposta a mio parere si sono limitati a riprodurre la definizione del video senza proporre una personale interpretazione della probabilità.

Il **GRUPPO 3** raccoglie quelle definizioni in cui la probabilità è associata alla percentuale. Ritengo che tale associazione denoti una confusa comprensione anche del concetto stesso di percentuale. Il valore percentuale è soltanto una diversa rappresentazione nel registro simbolico del valore numerico della probabilità. Non è corretto riconoscere la probabilità soltanto mediante un valore percentuale.

Infine il **GRUPPO 4** mostra due definizioni in cui emergono immagini inedite. Vedere la probabilità come strumento per prevedere il futuro consente di proiettarla in un contesto più ampio, complesso e anche più concreto. L'idea di definirla come rappresentazione numerale è l'immagine più vicina a quella che ho cercato di fornire all'interno del progetto. Ho infatti cercato di fare molta leva sull'interpretazione assiomatica per far capire ai ragazzi che nel contesto matematico la probabilità è un numero compreso tra 0 e 1, senza lasciare eccessivo spazio alla dimensione filosofica. La definizione dello studente mostra un errore che ho ritrovato anche in altre definizioni: la circolarità. Infatti la probabilità viene definita mediante la parola stessa probabilità.
Di seguito alcune delle definizioni tautologiche ritrovate tra le risposte al questionario.

La probabilità che succeda qualcosa

La probabilità che un determinato evento si verifichi

una probabilità di vincita o di successo

Durante la lezione teorica, ho cercato di focalizzare l'attenzione dei ragazzi sulla circolarità della definizione classica e quindi sulle criticità che ne derivano, mostrando loro come, senza volerlo e intuitivamente avevano commesso lo stesso "errore" nelle loro definizioni di probabilità. Infine la maggior parte degli studenti (abbastanza – 58,3% e molto – 20,8%) ha dichiarato di essere interessata ad una digressione storica.

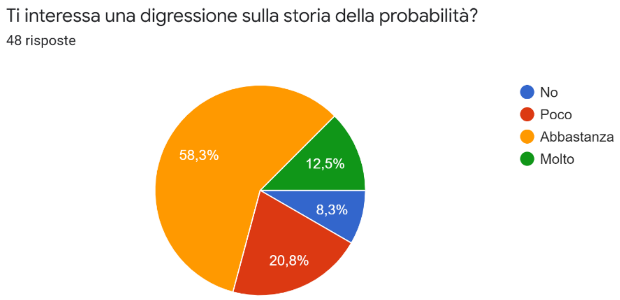


Figura 5.9: Interesse digressione storica

Gli studenti riconoscono nel gioco d'azzardo un'attività in cui si perdono o vincono dei soldi casualmente, in cui la probabilità di vincere è bassa, una scommessa.

Gioco in cui si scommettono soldi per una piccola probabilità di vincere

cercare di guadagnare in base al caso

Gioco dove si può perdere o guadagnare casualmente

Alcuni riconoscono la dipendenza e il rischio, sia a livello economico che psicologico, che può comportare.

Una attività che genera dipendenza e si basa sullo scommettere soldi per cercare di vincerne di più

un gioco in cui si scommettono soldi per cercare di vincerne di più, molto corrotto, e che spesso diventa una dipendenza.

una dipendenza che ti porta a credere di vincere

Il gioco d'azzardo è un gioco che tocca direttamente la psiche delle persone

Le risposte descritte in 5.10 mostrano come gli studenti, quando sono estraniati rispetto alle situazioni proposte dalle affermazioni, riescano, nella maggior parte, a ragionare razionalmente.

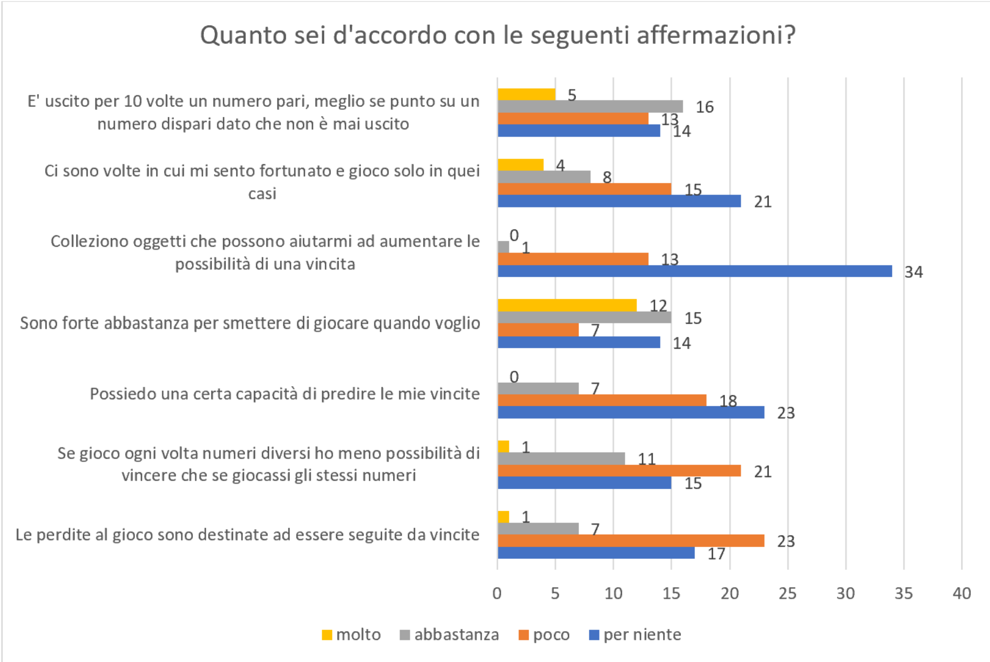


Figura 5.10: Riepilogo risposte studenti

Ad esempio riconoscono che non ha alcun senso collezionare oggetti portafortuna per aumentare la probabilità di vincita (98%), oppure che non è corretto affermare che le perdite sono destinate ad essere seguite da vincite (83%). Significativa è anche la percentuale di ragazzi che ha fiducia nella propria capacità di interrompere il gioco quando vogliono: il 25% ha infatti risposto che è molto d'accordo con questa affermazione, il 31% ha risposto di essere abbastanza d'accordo. Ritengo interessante anche notare le risposte relative all'affermazione " è uscito per 10 volte un numero pari, meglio se punto su un numero dispari dato che non è mai uscito": l'obiettivo di questa frase è di indagare l'errata convinzione che eventi occorsi nel passato influiscano su eventi futuri in attività governate dal caso. A differenza delle altre risposte qui il divario tra chi è d'accordo (si intende chi ha scelti molto o abbastanza) e chi non è d'accordo (chi ha scelto poco e per niente) non è molto netto. 21 ragazzi su 48, dunque il 43,75%, hanno dichiarato di essere d'accordo, dimostrando la presenza della misconcezione sopra citata. Parallelamente però l'altra metà degli studenti si dichiara in disaccordo, facendo dunque intendere di non cadere nella misconcezione. Tale domanda è stata dunque utile per affrontare a lezione il tema dei numeri ritardatari nel SuperEnalotto e nella Roulette.

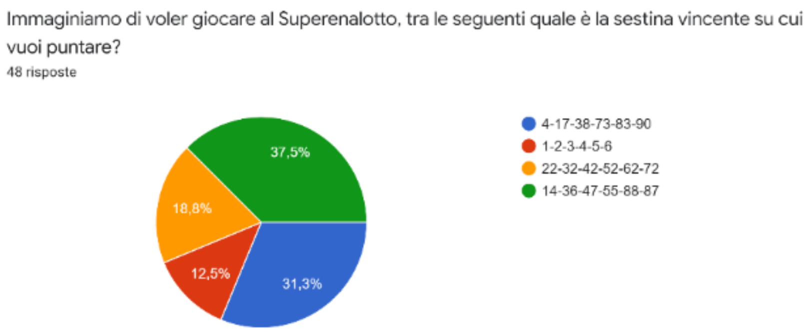


Figura 5.11: Scelta sestina vincente

Il 68,8% degli studenti ha indicato come sestina vincente 4-17-38-73-83-90 o 14-36-47-55-87-88. Le motivazioni fornite per giustificare la scelta, riportate di seguito, confermano le aspettative descritte nel progetto: gli studenti tendono ad escludere l'ordine quando si parla di fenomeni casuali.

La seconda è una sequenza che è molto improbabile. La terza è uno schema, si aggiunge una decina alla cifra precedente ogni volta. La quarta è più probabile delle due precedenti ma comunque meno della prima dato che le ultime due cifre sono in sequenza. Quindi l'ultima opzione rimanente è la prima.

La seconda è una sequenza che è molto improbabile. La terza è uno schema, si aggiunge una decina alla cifra precedente ogni volta. La quarta è più probabile delle due precedenti ma comunque meno della prima dato che le ultime due cifre sono in sequenza. Quindi l'ultima opzione rimanente è la prima

I numeri sono abbastanza distanti tra loro e casuali.

secondo me scrivere più numeri distaccati e senza una sequenza logica è meglio

Coloro che hanno motivato la scelta affermando

Perché mi piace di più

il 4 è il mio numero preferito e il 17 è la data del mio compleanno

Non c'è un motivo

hanno involontariamente raggiunto la consapevolezza che non c'è nulla che possa far preferire una sestina all'altra se non il personale gusto, dato che sono equiprobabili. Ma tale concreta motivazione è stata fornita soltanto da 2 studenti su 48:

Ho risposto alla domanda precedente in quanto obbligatoria, ma ritengo tutte le sestine esattamente identiche per quanto riguarda la probabilità di vittoria (II B)

Ne ho messa una a caso dato che ognuno potrebbe essere un numero vincente (II A)

Il concetto di gioco equo è intuitivamente noto alla maggior parte degli studenti:

è un gioco in cui in caso di vincita si pareggia con i soldi delle perdite in base alle probabilità di vincita

Un gioco dove quando vinci guadagni tutta la somma dei soldi spesi fino a quel giorno più i soldi della vincita

quando perdi un tot di soldi ma dopo li recuperi vincendo

un gioco in cui è possibile vincere soldi o almeno pareggiarli con quelli persi.

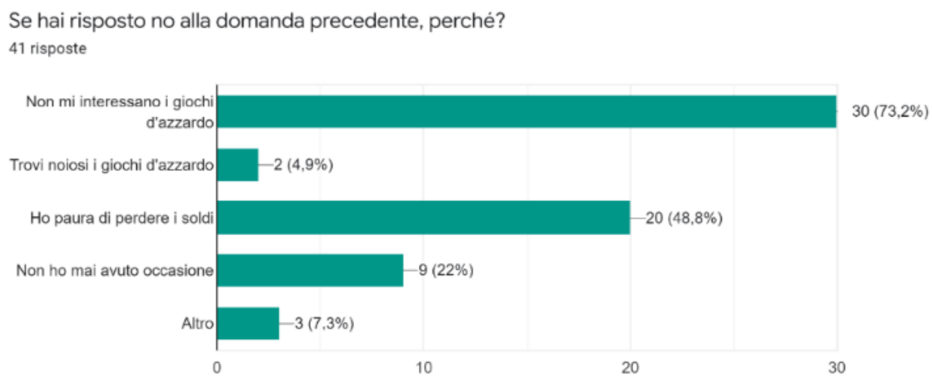
L'85,4% riconosce che la matematica può aiutare a comprendere il gioco d'azzardo. Leggendo le motivazioni portate dal restante 14,6% per giustificare il contrario ritengo che abbiano confuso comprendere il gioco d'azzardo con aiutarti a vincere al gioco d'azzardo.

il gioco d'azzardo va a fortuna indipendentemente se sai la matematica

secondo me non c'entrano niente insieme

il gioco d'azzardo non si può predire, hai gli occhi bendati (se giochi onestamente)

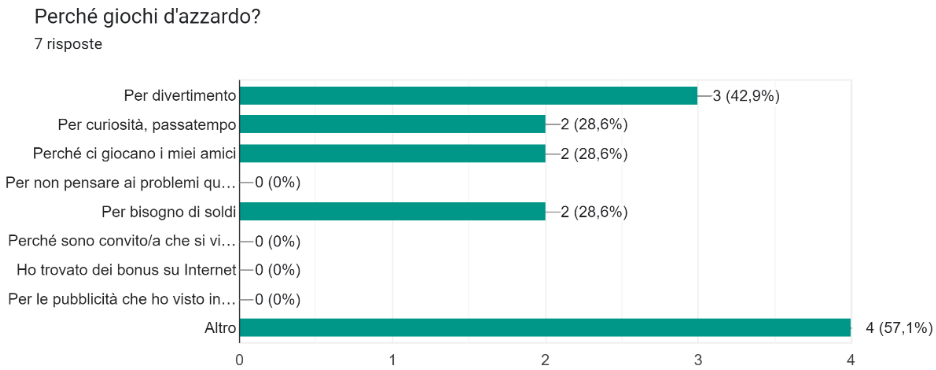
Sempre l'85,4% degli studenti dichiara di non aver mai giocato d'azzardo, perché principalmente non interessati e impauriti dalla possibilità di perdere denaro.



Il gioco più conosciuto è il Gratta&Vinci (97,6%), seguito da SuperEnalotto (75,6%), Slot Machine (73,2%), Scommesse sportive e Bingo (46%) e Poker Online (41,5%).

Sono invece 7 gli studenti che hanno dichiarato di aver giocato d'azzardo con pochissima frequenza, ad esempio una volta al mese, e di non giocare da soli ma con gli amici o familiari. Divertimento e curiosità, necessità di soldi

soldi e conoscenza di altri giocatori (4 studenti su 7 affermano di conoscere altri giocatori tra gli adulti) sono le motivazioni di gioco emerse dal questionario e sono in linea con le motivazioni indicate da Nomisma nella ricerca che ho riportato nella seconda lezione del progetto. Tra i giochi d'azzardo proposti nel questionario gli studenti affermano di aver giocato almeno una volta al Gratta&Vinci, a carte (a soldi), slot machine e scommesse sportive. 6 alunni su 7 dichiarano di fissare un limite di soldi da giocare e riescono a non superare tale soglia.



5.2 Questionario finale

Per analizzare il questionario finale ho suddiviso le risposte in base alla classe di provenienza prima di proporre un quadro complessivo, perché le modalità di gestione delle lezioni sono state differenti e sulla base di tali differenze posso confrontare i risultati ottenuti.

Il questionario è stato compilato da:

- 16 alunni su 16 in II A
- 20 alunni su 21 in II B
- 27 alunni su 28 in II D

Per un totale di 63 alunni su 65.

La prima domanda **"Cosa è la probabilità di un evento?"** riprende la domanda del precedente questionario " Cosa è per te la probabilità?" ed è necessaria per comprendere se e come gli studenti dopo l'unica lezione di teoria che abbiamo svolto abbiamo cambiato, evoluto il loro pensiero.

In **II A** la maggior parte degli alunni è rimasta ancorata all'idea informale che la probabilità è la possibilità che un evento accada. L'alunna TI88 ha definito la probabilità di un evento come "la misura dell'incertezza che tale evento si verifichi" abbandonando la definizione precedente che associava semplicemente la probabilità alla possibilità. L'alunno B156 ha invece definito la probabilità come "la frequenza con cui quell'evento può avvenire" , riprendendo l'idea accennata a lezione di interpretazione frequentista. Nel precedente questionario aveva fornito una definizione errata di probabilità poiché circolare (la probabilità è la probabilità che un evento si verifichi). Il lavoro svolto in aula ha avuto successo perché a partire dall'idea intuitiva originale i due studenti hanno avuto un'evoluzione.

In **II B** la maggior parte degli studenti ha abbandonato il concetto di possibilità o di percentuale proponendo la definizione classica. L'alunna HI51 era stata l'unica a vedere la probabilità come rappresentazione numerale di ciò che può accedere e dopo il percorso si è semplicemente affidata alla definizione classica. Per coerenza con l'idea iniziale proposta speravo che avesse definito la probabilità come numero compreso tra 0 e 1. Gli alunni NI47 e TI36 hanno indicato la stessa definizione del precedente questionario basata sul concetto di possibilità. Solo lo studente NI00 ha proposto la definizione classica in maniera corretta "il rapporto tra il numero di casi favorevoli e il numero di tutti i casi ugualmente possibili". Sono stata molto soddisfatta che non abbia usato "ugualmente probabili" perché altrimenti avrebbe formulato una definizione circolare (e dunque scorretta). Su questo punto ho insistito molto a lezione e avrei sperato di ritrovare questa accortezza più spesso.

Ritengo che l'elevato numero di studenti che, in questa classe, ha proposto la definizione classica sia legato al maggiore numero di esercizi svolti rispetto alle altre. Abbiamo quindi applicato molte volte questa definizione, dandole un ruolo centrale in merito alla risoluzione degli esercizi.

In **II D** la situazione è molto diversa rispetto alle altre classi: il divario tra il numero di compilazioni del primo questionario e il secondo non mi ha consentito di fare un confronto proficuo, inoltre alcuni studenti non hanno fornito un codice univoco per identificarsi rendendo dunque impossibile il tracciamento. Quello che però emerge dalle risposte è che solo 5 studenti su 27 hanno indicato la definizione classica di probabilità, ma tale aspetto non mi sorprende perché non abbiamo dedicato molto tempo agli esercizi e dunque non l'hanno applicata molte volte quanto nelle altre classi. È semplicemente rimasta una definizione tra le tante descritte durante la lezione. La studentessa 0109 ha proposto una definizione che accenna all'interpretazione frequentista "quante volte può accadere qualcosa" riempiendo così lo spazio vuoto lasciato nel primo questionario. Anche Riccardo (ha deciso di inserire direttamente il nome come codice) ha scelto un'interpretazione frequentista affermando "la probabilità di un evento è la frequenza con cui viene quella determinata situazione". L'alunna CI05 ripropone, come nel primo questionario, la definizione classica ma si autocorregge sostituendo "il rapporto tra il numero di casi favorevoli e quello dei casi probabili" con "rapporto tra casi favorevoli e possibili". Tra le definizioni predomina l'associazione della probabilità alla possibilità di vincita in un gioco, perché a mio parere abbiamo dedicato molto tempo al tema del gioco d'azzardo: i ragazzi sembravano interessati e ci siamo concentrati molto su questo aspetto a differenza delle altre classi.

Seguono i 4 esercizi pensati per analizzare il raggiungimento di competenze disciplinari elementari.

Vero o falso?

Esercizio 1 Un evento ha probabilità 1 quando il numero dei casi favorevoli è uguale a 1.

Classe	**Vero**	**Falso**	**% risposta corretta (falso)**
II A	10	6	38%
II B	14	6	30%
II D	18	9	33%

Esercizio 2 Un'urna contiene 6 palline numerate da 2 a 7. Dato l'evento E ="estrazione pallina con numero primo", l'evento contrario è "esce un numero pari".

Classe	**Vero**	**Falso**	**% risposta corretta (falso)**
II A	3	13	81%
II B	5	15	75%
II D	14	13	48%

Le tabelle mostrano come il concetto di evento contrario sia stato appreso dalla maggior parte degli studenti, con evidenti migliori risultati nelle due classi in cui ho svolto più esercizi, lavorando più frequentemente con il concetto di evento contrario. Ammetto invece di essere rimasta un po' delusa dal primo esercizio: pensavo di aver dedicato sufficiente tempo al concetto di evento certo nel contesto della definizione classica. Alla luce di questi risultati cercherò di proporre un'altra formulazione dell' esercizio più chiara e netta ad esempio "un evento ha probabilità 1 quando è un evento impossibile", così da non lasciare spazio alla definizione classica, ma ragionare unicamente sul concetto di evento certo e impossibile.

Risposta aperta

Esercizio 3 Una scatola contiene 30 palline numerato da 1 a 30, qual è la probabilità che estraendone una a caso esca un numero maggiore uguale di 18 o un multiplo di 3?

Indico con A l'evento "esce un numero maggiore uguale di 18" e con B l'evento "un multiplo di 3", la congiunzione "o" implica che occorre lavorare con l'evento unione $A \cup B$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dato che $P(A) = \frac{13}{30}; P(B) = \frac{10}{30}; P(A \cap B) = \frac{5}{30}$.

$$P(A \cap B) = \frac{13}{30} + \frac{10}{30} - \frac{5}{30} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} \approx 60\%$$

Classe	**% risposta corretta** $\frac{3}{5}$
II A	56%
II B	35%
II D	7%

I principali errori riscontrati nelle risposte (singolo errore presente o combinazione di più errori) sono:

II A

- Non considerare 18 tra i numeri maggiori uguali di 18, quindi $P(A) = \frac{13}{30}$ e non $P(A) = \frac{12}{30}$;
- Sommare la probabilità dell'evento intersezione invece che sottrarre;
- Sommare le singole probabilità senza sottrarre l'evento intersezione;
- Uno studente ha scritto solo 17 ed immagino che rappresenti il numero di casi favorevoli. Posso dunque dedurre che non ha capito che la probabilità è un numero minore di 1 e che pur avendo applicato correttamente il teorema ha sbagliato nel calcolo delle probabilità dei singoli eventi.

II B

- Non considerare 18 tra i numeri maggiori uguali di 18 quindi $P(A) = \frac{13}{30}$ e non $P(A) = \frac{12}{30}$;

- Considerare l'evento intersezione e non unione;

- Sommare le singole probabilità senza sottrarre l'evento intersezione;

- Uno studente ha scritto solo 17 ed immagino che rappresenti il numero di casi favorevoli. Posso dunque dedurre che non ha capito che la probabilità è un numero minore di 1 e che pur avendo applicato correttamente il teorema ha sbagliato nel calcolo delle probabilità dei singoli eventi.

II D

Molti non hanno proprio risposto o hanno chiaramente risposto a caso, chi invece ha provato a dare una risposta:

- Ha trovato correttamente le probabilità dei singoli eventi ma non ha applicato il teorema;

- Ha considerato l'evento intersezione e non unione;

- Non ha considerato 18 tra i numeri maggiori uguali di 18 quindi $P(A) = \frac{13}{30}$ e non $P(A) = \frac{12}{30}$.

Esercizio 4 Un'urna contiene 15 palline rosse e 13 palline blu. Qual è la probabilità di estrarre in ordine una pallina rossa e due blu dopo 3 estrazioni consecutive senza reimmissione?

Indicando con A l'evento descritto nella domanda,

$$P(A) = \frac{15}{28} \times \frac{13}{27} \times \frac{12}{26} = \frac{5}{42} \approx 12\%$$

perché ad ogni estrazione il numero delle palline diminuisce dato che non vengono reinserite.

Classe	**% risposta corretta** $\frac{5}{42}$
II A	31%
II B	25%
II D	0%

I principali errori riscontrati nelle risposte sono:

II A

- Calcolare correttamente le probabilità ma fare la somma al posto del prodotto;

- Calcolare correttamente i casi possibili ma sbagliare nel calcolo dei casi favorevoli ad esempio scrivendo $\frac{1}{19656}$.

2 studenti hanno esplicitamente detto di non sapere come procedere.

II B

- Calcolare correttamente i casi possibili ma sbagliare nel calcolo dei casi favorevoli ad esempio scrivendo $\frac{1}{19656}$;

- Considerare $\frac{1}{28}$ come probabilità di estrarre una qualunque pallina e sommare per 3 volte (come il numero di estrazione) le probabilità ottenendo $\frac{3}{28}$.

2 studenti hanno esplicitamente detto di non sapere come procedere.

II D

Nessuno studente ha fornito la risposta corretta: alcuni non hanno risposto, altri hanno scritto di non sapere come fare e invece i tre studenti che hanno provato a fornire un risultato hanno considerato $\frac{1}{28}$ come probabilità di estrarre una qualunque pallina e sommare per 3 volte (come il numero di estrazione) le probabilità ottenendo $\frac{3}{28}$.

Dai risultati ottenuti posso concludere nel complesso che:

- La definizione classica di probabilità è stata la più utilizzata dagli studenti, poiché viene applicata nella risoluzione degli esercizi;

- Il concetto di evento contrario è stato compreso meglio del concetto di evento certo(in riferimento alle risposte ottenute);

- La maggior parte degli studenti è riuscita ad applicare la definizione classica negli esercizi nel calcolo delle probabilità di eventi elementari;

- Maggiore difficoltà sono state riscontrate nell'applicazione corretta del teorema delle probabilità totali e nel distinguere tra somma e prodotto logico degli eventi. Alcuni errori sono stati secondo me dovuti a disattenzioni nella lettura del testo.

A livello di competenze disciplinari sono nel complesso soddisfatta del risultato ottenuto: non mi aspettavo la risoluzione corretta di tutti gli esercizi poiché abbiamo dedicato poco tempo alla pratica. Per tale ragione ritengo i risultati in generale non soddisfacenti della II D coerenti con il tempo dedicato a lezione allo svolgimento degli esercizi. In un contesto scolastico reale ci sarebbe stata una diversa gestione del tempo e del contenuto teorico da affrontare, dando occasione ai ragazzi di esercitarsi e successivamente effettuare delle prove di verifica adeguate. Dunque per il contesto e le modalità sono soddisfatta che una buona parte di studenti abbia preso confidenza con il concetto di probabilità.

Per quanto concerne le competenze di cittadinanza ritengo che la maggior parte degli studenti abbia preso seriamente le domande e tentato di formulare delle reali strategie d'azione. Per aiutare l'amico che sta dedicando troppo tempo al gioco tanto da farlo diventare una dipendenza o per controbattere l'adulto che non vede il rischio o il pericolo nel giocare d'azzardo, i ragazzi propongono varie strategie:

- Far comprendere che con il gioco d'azzardo si perdono sempre soldi anche se apparentemente non sembra;
- Chiedere aiuto ad un adulto e/o uno specialista nel campo di dipendenze e dunque di ludopatia;
- Condividere del tempo insieme, uscire e cercare di tenerlo il più possibile lontano da contesti pericolosi;
- Usare l'applicazione Gratta&Perdi per fargli comprendere quanto sia reale la possibilità di perdere;
- Mettere in luce i più semplici errati comportamenti che ha per far capire il gioco influenza psicologicamente;
- Dimostrare che il gioco è sfavorevole, non equo e quindi alla fine non vincerà ma perderà soldi.

Dalle risposte si evince che alcune delle argomentazioni descritte a lezione come concetto di gioco equo, simulazione Gratta&Perdi, aspetti psicologici, abbiano colpito gli studenti e siano diventati una possibile risorsa per combattere la ludopatia e comprendere il pericolo che comporta. Dunque uno tra i principali obiettivi del progetto ritengo che sia stato raggiunto.

È stato poi chiesto ai ragazzi di fornire alcuni feedback sul progetto didattico. Gli argomenti che sono piaciuto di più sono stati Gratta&Perdi e aspetti psicologici. La storia della probabilità è stata per alcuni un argomento interessante e curioso mentre per altri ciò che è piaciuto di meno.

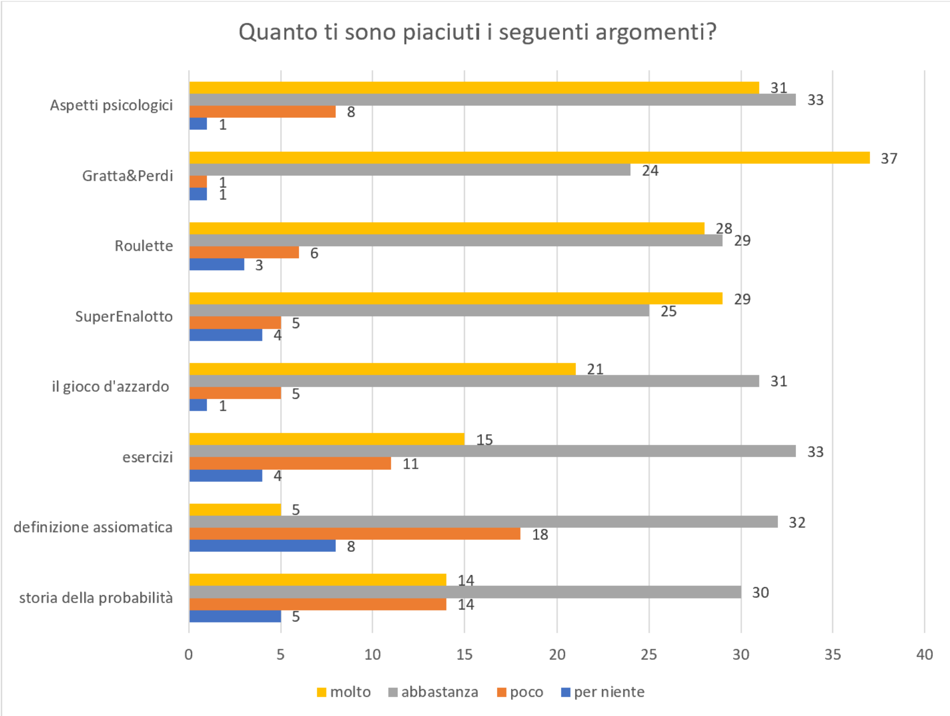


Figura 5.12: Preferenze studenti in merito agli argomenti del progetto

Nel questionario iniziale Ti88 (II B) e Li38 (II A) erano molto interessati alla digressione storica e nel questionario finale hanno dichiarato che è piaciuta molto e che è stato uno degli aspetti più interessanti. Al contrario No05 (II A) non era inizialmente interessato e lo ha indicato come l'argomento che è piaciuto di meno.

Gli aspetti psicologici rappresentano anche l'argomento che molti studenti della II A e II B avrebbero voluto approfondire di più, mentre nella classe II D il gioco della roulette. Solo una studentessa di II B è rimasta esplicitamente incuriosita dalla definizione assiomatica tanto da indicarla come argomento da approfondire. Sono contenta che almeno un allievo abbia apprezzato questo approccio e ne sia rimasto incuriosito. Sempre in II B una studentessa ha invece citato i paradossi come approfondimento e sono rimasta altrettanto colpita poiché a lezione non ne abbiamo fatto menzione in alcun modo.

Conclusioni

Sono molto soddisfatta dell'attività e dei risultati ottenuti nel complesso. Gli studenti hanno partecipato attivamente e spontaneamente, creando dibattiti inerenti e coinvolgenti. Dato che hanno utilizzato argomenti e concetti descritti nel corso della lezione per sostenere le proprie idee, posso concludere di aver raggiunto il mio obiettivo: fornire agli studenti strumenti da utilizzare per argomentare, controbattere e riflettere. La componente strettamente disciplinare ha rispecchiato le aspettative: solo una piccola parte di studenti ha appreso le nozioni teoriche velocemente affrontate, mentre la maggior parte avrebbe semplicemente avuto bisogno di più tempo e più esercizio. Se da un lato i risultati della II A e II B mi hanno sorpreso positivamente, sono rimasta delusa dai risultati della II D. Le gestione di una classe numerosa come la II D è stata una difficoltà durante lo svolgimento del progetto: l'inesperienza ha condizionato l'effettiva esecuzione della lezione. Avrei dovuto trovare strade alternative per parlare ai ragazzi: ogni classe è un mondo differente e ho concretamente compreso quanto una strategia seppur valida e corretta per alcune non lo sia altrettanto per altre. Credo che sarebbe stato in questa classe necessario non trattare tutti gli argomenti previsti, ma scegliere i più importanti per affrontarli con cura, ripetendo quanto necessario gli elementi non chiari o non compresi.

Video, slide, libro di testo, lavagna e simulatore rappresentano il materiale didattico utilizzato. Ho cercato di proporre un utilizzo strategico e diversificato delle tecnologie come materiale didattico, perché rappresentano un'importante potenziale per l'apprendimento e perché possono arricchire le lezioni rendendole dinamiche, interattive e divertenti.

Il mio obiettivo è di poter utilizzare concretamente questo progetto all'interno del percorso scolastico che spero di intraprendere nel prossimo futuro, ma per farlo è necessario apportare alcune modifiche strutturali e organizzative. Per consentire l'apprendimento, non solo di alcuni studenti ma della maggior parte, occorre adeguare le tempistiche delle lezioni alla classe: procedere più lentamente nella teoria, svolgere più esercizi sia in aula che in autonomia a casa e distaccare maggiormente la parte teorica dal momento interdisciplinare del gioco d'azzardo.

Non tutti gli argomenti che vengono affrontati nel contesto scolastico sono adatti per costruire percorsi di questo tipo, ma spero, nel corso della mia futura carriera da insegnante, di riuscire a elaborarne molti altri per creare dinamicità, divertimento e curiosità nell'insegnamento e nell'apprendimento. Credo che sia importante porre agli studenti delle domande e lasciare che possano rifletterci e ragionare per fornire una risposta, facendogli capire che non sempre esiste una netta distinzione tra giusto e sbagliato. A partire dalle proprie idee saranno loro stessi a modificare e far evolvere la risposta attraverso gli strumenti e il linguaggio specifici di ogni disciplina.

Bibliografia

[1] Chiara Andrà, Marco Verani e Nicola Parolini. «BetOnMath: Azzardo e matematica a scuola». In: *BetOnMath: azzardo e matematica a scuola* (2018).

[2] Lai Huat Ang e Masitah Shahrill. «Identifying students' specific misconceptions in learning probability». In: *International Journal of Probability and Statistics* 3.2 (2014), pp. 23–29.

[3] M. Bergamini, G. Barozzi e A. Trifone. *Matematica.blu*. Vol. 2. Bologna: Zanichelli, 2018.

[4] Eric Berne. «The nature of intuition». In: *Psychiatric Quarterly* 23.2 (1949), pp. 203–226.

[5] Maria Maddalena Bovetti. *Il Calcolo delle probabilità e la Teoria dei Giochi*. `https://matematica.unibocconi.it/articoli/il-calcolo-delle-probabilit%C3%A0-e-la-teoria-dei-giochi`. 2008.

[6] Jerome S Bruner. *On Knowing. Essays for teh Left hand*. 1966.

[7] Antonella Bruzzone. *Gioco d'azzardo online, una nuova trappola per gli adolescenti*. `https://www.consapevolmenteconnessi.it/dipendenza-gioco-dazzardo-online/`. 2020.

[8] Barbara Caré. «Il gioco degli astragali: un passatempo tra antico e moderno». In: *Il gioco degli astragali: un passatempo tra antico e moderno* (2010), pp. 32–42.

[9] G. Cariani, M. Fico e I. Pelicioli. *Matematica c.v.d., Edizione Blu*. Vol. 2. Torino: Loescher, 2019.

[10] Andrea Cosso. *Appunti al corso di Complementi di probabilità e statistica matematica*. manuale del docente. Alma Mater Studiorum - Università di Bologna, 2020.

[11] Bruno D'Amore. «La didàctica de las matemàticas a la vuelta del milenio: raıces, vınculos e intereses». In: *Educaciòn matemàtica* 12.01 (2000), pp. 39–50.

[12] Bruno D'Amore. «Lingua, matematica e didattica». In: *La matematica e la sua didattica* 1 (2000), pp. 28–47.

[13] Bruno D'Amore e Marta Isabel Fandiño Pinilla. «Su alcune D in didattica della matematica: designazione, denotazione, denominazione, descrizione, definizione, dimostrazione. Riflessioni matematiche e didattiche che possono portare lontano». In: *Bollettino dei docenti di matematica* 64 (2012), pp. 33–46.

[14] Bruno De Finetti. «Le proposte per la matematica nei nuovi licei: informazioni, commenti critici, suggerimenti». In: *Periodico di matematiche* s 4 (1967), p. 45.

[15] Ministero dell'istruzione. *Linee guida per l'insegnamento dell'educazione civica*. https://www.istruzione.it/educazione_civica/allegati/Linee_guida_educazione_civica_dopoCSPI.pdf. 2019.

[16] Bruno de Finetti. «Sul concetto di probabilità». In: *Rivista italiana di statistica, economia e finanza* 5 (1933), pp. 723–747.

[17] Simone Fornara, Silvia Demartini e Silvia Sbaragli. «Se la sintesi diventa un problema. Alcune caratteristiche del linguaggio specialistico della matematica in prospettiva didattica». In: *Linguaggi settoriali e specialistici. Sincronia, diacronia, traduzione, variazione. Atti del XV Congresso della Società Internazionale di Linguistica e Filologia Italiana (SILFI), Genova, 28-30 maggio 2018*. Cesati. 2020, pp. 499–506.

[18] Joan Garfield e Dani Ben-Zvi. «How students learn statistics revisited: A current review of research on teaching and learning statistics». In: *International statistical review* 75.3 (2007), pp. 372–396.

[19] Antonino Giambò. *Il problema della divisione della posta*. https://www.matmedia.it/wp-content/uploads/2020/02/Divisione-della-posta.pdf. 2020.

[20] Giocodigitale.it. *Roulette francese: regole, puntate e vincite del più classico dei giochi da casinò*. https://casino.giocodigitale.it/it/blog/giochi/regole-puntate-roulette-francese/.

[21] Leonid Khazanov e Lucio Prado. «Correcting Students' Misconceptions about Probability in an Introductory College Statistics Course.» In: *Adults Learning Mathematics* 5.1 (2010), pp. 23–35.

[22] Barbara Mazzotti e Giulia Cenacchi. *Scheda di lavoro 3: il problema della divisione della posta*. progetto divulgazione e museologia della matematica. Dipartimento di Matematica - Università di Bologna, 2015.

[23] Angelica Nicolae. *Definizione assiomatica o la teoria unificata di probabilità*. progetto didattico. Dipartimento di Matematica - Alma Mater Studiorum università di Bologna, 1999.

[24] Angelica Nicolae. *Definizione classica di probabilità o laplaciana*. progetto didattico. Dipartimento di Matematica - Alma Mater Studiorum università di Bologna, 1999.

[25] *Il gioco d'azzardo in Italia secondo l'Osservatorio Nomisma*. Nomisma Gioco&Giovani, 2021.

[26] Miguel Angel Novillo Lòpez. *La passione per il gioco nell'antica Roma*. `https://www.storicang.it/a/passione-per-il-gioco-nellantica-roma_15217`. 2017.

[27] Filomena Oronzo. *Storia del gioco d'azzardo: dai gladiatori al casinò*. `https://sociologicamente.it/storia-del-gioco-dazzardo-dai-gladiatori-ai-casino/`. 2018.

[28] Mutodi Paul e Ngirande Hlanganipai. «The nature of misconceptions and cognitive obstacles faced by secondary school mathematics students in understanding probability: A case study of selected Polokwane secondary schools». In: *Mediterranean Journal of Social Sciences* 5.8 (2014), pp. 446–446.

[29] Michele Pellerey. *Le competenze individuali e il portfolio*. La Nuova Italia, 2004.

[30] Martha Isabel Fandiño Pinilla. «Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica». In: *Valutare e intervenire in modo mirato e specifico. Prefazione di Giorgio Bolondi. Trento: Erickson* 133 (2008), p. 134.

[31] Riccardo Rosso. *Capitolo 5 - L'Ars Conjectandi di Jakob Bernoulli*. pubblicazioni docente. Dipartimento di Matematica - Università di Pavia, 2007.

[32] Roulette.am. *Matematica e roulette*. `https://www.roulette.am/matematica/probabilita/`.

[33] Alberto Saracco. «Fate il nostro gioco—gioco d'azzardo e matematica». In: *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana* 2.2 (2017), pp. 157–173.

[34] L. Sasso e C. Zanone. *Colori della matematica, Edizione Blu*. Milano: Petrini, 2019.

[35] L. Scaglianti e F. Bruni. *Linee di algebra*. Vol. 2. Brescia: La scuola, 2007.

[36] Antonello Schiacchitano. *Considerazioni di Galileo Galilei*. `http://www.sciacchitano.it/Alle%20soglie%20del%20sito/Considerazioni%20di%20Galileo%20Galilei%20sui%20tre%20dadi.pdf`. 2008.