

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

EQUAZIONI NON LINEARI DI  
KOLMOGOROV-FOKKER-PLANCK ED  
APPLICAZIONI

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
Andrea Pascucci

Presentata da:  
Andrea Giuseppe Licata

Anno Accademico 2020/2021



## Abstract

I contenuti principali trattati in questa tesi sono stati ispirati da due lavori presentati nel corso dello scorso decennio ([1], [2]).

Il primo lavoro, pubblicato nel 2013 da O. A. Manita e S. V. Shaposhnikov, presenta un nuovo risultato di esistenza di soluzioni, nel senso delle distribuzioni, che siano misure di probabilità per PDE paraboliche non lineari del primo e secondo ordine. Vengono fornite condizioni sufficienti per l'esistenza locale e globale di tale tipo di soluzioni per il problema di Cauchy associato a tali equazioni.

Equazioni di tale tipo compaiono in maniera del tutto naturale in diversi ambiti applicativi, fra cui la finanza matematica. Nel lavoro presentato da G. Tataru e T. Fisher per Bloomberg nel 2010, viene proposto un modello stocastico per la modellazione del tasso di cambio di valuta estera al fine di prezzare dei particolari tipi di opzione, le opzioni a barriera, con le quali modelli più classici faticano maggiormente. Nella calibrazione di tale modello, per "fittare" il modello ai prezzi delle opzioni scambiate sul mercato, sorge il problema di risolvere un'equazione alle derivate parziali parabolica non lineare integro-differenziale e che dunque appartiene alla classe di PDE citata precedentemente.

# Indice

<b>1</b>	<b>Equazioni Paraboliche non Lineari di Kolmogorov-Fokker-Planck</b>	<b>3</b>
1.1	Risultati Preliminari . . . . .	4
1.2	Formulazione del problema . . . . .	7
1.3	Caso non degenerare . . . . .	10
1.4	Caso degenerare "smooth" . . . . .	19
1.5	Caso generale . . . . .	21
1.6	Esempi . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Modelli di Mercato</b>	<b>28</b>
2.1	Risultati preliminari di Calcolo Stocastico . . . . .	29
2.2	Modello di Black-Scholes . . . . .	35
2.3	Black-Scholes Hedging . . . . .	41
2.4	Modelli a Volatilità Locale . . . . .	44
2.5	Modelli a Volatilità Stocastica . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Modelli a Volatilità Stocastica Locale</b>	<b>49</b>
3.1	Un modello SLV per il pricing di opzioni a barriera . . . . .	52
	<b>Conclusioni</b>	<b>55</b>
	<b>Appendice</b>	<b>56</b>
	A0.2 Spazi di Holder . . . . .	57
	<b>References</b>	<b>59</b>



# Introduzione

Strumenti e concetti provenienti dalla matematica hanno sempre trovato varie applicazioni in tutte le altre discipline scientifiche; negli ultimi decenni, con lo sviluppo delle scienze informatiche e con la crescita costante del potere computazionale, anche alcuni concetti fra i più astratti trovano applicazioni pratiche in vari ambiti, tra cui la finanza.

Questa tesi inizia con lo studio dell'articolo [1] (pubblicato nel 2013 da O. Manita e S.V. Shaposhnikov), di natura puramente teorica, nel quale viene presentato un nuovo risultato di esistenza per le PDEs non lineari paraboliche del secondo ordine. Nel capitolo 1, dopo una breve introduzione del problema, vengono anzitutto presentati concetti e risultati preliminari di teoria della misura; viene inoltre presentato lo spazio in cui si lavorerà nel resto del capitolo, al fine di dimostrarne il risultato principale. Nel corso del capitolo 1 viene formulato il problema e introdotte delle ipotesi necessarie sotto le quali è possibile dimostrare il teorema principale del capitolo, ovvero un risultato che garantisce l'esistenza di una soluzione, nel senso delle distribuzioni, che sia una misura di probabilità per il problema di Cauchy associato alle equazioni non lineari paraboliche del secondo ordine. Per semplicità, chiameremo tali soluzioni anche **soluzioni di probabilità**. Vengono fornite condizioni sufficienti per l'esistenza di soluzioni locali e condizioni sufficienti per l'esistenza di soluzioni globali ed inoltre viene fornita una stima del momento fino al quale il problema di Cauchy ammette soluzione.

La dimostrazione del teorema principale del capitolo 1 è suddivisa in 3 step (per ognuno dei quali è dedicata una sezione): il problema viene in primo luogo dimostrato in un caso meno generale, introducendo ulteriori ipotesi sui coefficienti, al fine di poter utilizzare risultati di esistenza ed unicità presenti in letteratura per il problema lineare associato. L'esistenza e l'unicità di una soluzione di probabilità per il problema lineare associato risulta fondamentale per potere utilizzare il teorema del punto fisso di Schauder e dimostrare il risultato anche per il problema non lineare.

Nel secondo step della dimostrazione vengono alleggerite le ipotesi dello step 1 e viene utilizzato il metodo "vanishing viscosity": mediante tecniche di regolarizzazione dei coefficienti, si riconduce il problema dello step 2 a quello dello step precedentemente dimostrato, per poi ottenere il risultato cercato mediante passaggi al limite.

Nel terzo ed ultimo step viene infine dimostrato il risultato sotto le ipotesi del teorema, dimostrando prima un caso particolare ed in seguito utilizzando il caso particolare per dimostrare il risultato generale.

Alla fine del capitolo vengono forniti alcuni esempi di applicazione del teorema e vengono date alcune condizioni sufficienti affinché le stime temporali fornite dal teorema per l'esistenza di una soluzione siano "sharp".

Questa classe di Pdes trova applicazioni in vari ambiti, ad esempio nel problema del pricing dei derivati finanziari in finanza matematica. Il capitolo 2 inizia con una revisione dei fondamenti di calcolo stocastico e della teoria delle equazioni differenziali stocastiche (SDE), prestando particolare attenzione ai risultati che mettono in luce la profonda connessione fra la teoria delle SDE e quella delle PDE.

Viene successivamente presentato quello che, probabilmente, è il più famoso modello stocastico proposto (ed ancora largamente utilizzato) per la modellazione dei mercati

finanziari ed il pricing degli strumenti derivati: il modello di Black-Scholes-Merton. Questo modello, tuttavia, presenta diversi limiti, fra i quali spicca l'assunzione che la volatilità del sottostante sia costante, mentre differenti evidenze empiriche suggeriscono che ciò non sia realmente così. Nel corso degli anni sono dunque stati proposti differenti modelli per migliorare il modello e descrivere con maggior realismo la dinamica della volatilità. Nel corso del capitolo due saranno dunque presentati brevemente due dei framework proposti in letteratura: i modelli a volatilità locale ([3], [4]) e i modelli a volatilità stocastica ([5], [6]).

I modelli a volatilità locale assumono che la volatilità non sia costante, ma bensì una funzione deterministica dipendente dal tempo e dal prezzo del sottostante. I modelli a volatilità locale, una volta calibrati, sono in grado di replicare bene i prezzi di mercato delle opzioni vanilla tradati.

La dinamica della volatilità in un modello a volatilità stocastica viene invece modellata da un ulteriore processo stocastico e riescono a riprodurre una dinamica più realistica per la volatilità implicita.

Più recentemente, al fine di coniugare i pregi delle due classi precedenti di modelli, è stato proposta in letteratura una nuova classe di modelli più generale, di cui i due modelli precedenti possono essere considerati dei casi particolari: i modelli a volatilità locale stocastica. Il capitolo 3 inizia con la definizione e la presentazione di tali modelli. In questa classe di modelli la volatilità viene modellata come il prodotto fra un termine deterministico (come nel modello a volatilità locale), chiamata funzione di leva o superficie di leva, ed un termine stocastico (come nel modello a volatilità stocastica). La parte più complicata dell'implementazione di un modello a volatilità locale stocastica risiede nella calibrazione della funzione di leva. Dopo aver calibrato separatamente un modello a volatilità locale ed uno a volatilità stocastica, per poter coniugare coerentemente i due modelli, risulterà che è necessario risolvere una PDE. Più in particolare, la PDE che sorge dal processo di calibrazione è una PDE parabolica non lineare integro-differenziale, e dunque un'equazione della forma di quelle studiate nel capitolo 1. Nella parte finale del capitolo 3 viene infine presentato un particolare modello appartenente a tale classe, presentato in [2] per il pricing delle opzioni a barriera nel mercato FX.

# 1 Equazioni Paraboliche non Lineari di Kolmogorov-Fokker-Planck

L'obiettivo di questo capitolo sarà trovare delle condizioni sufficienti affinché il seguente problema di Cauchy non lineare per misure di probabilità ammetta soluzioni, nel senso delle distribuzioni, che siano misure di probabilità: (la sommatoria sugli indici  $i, j$  sarà sempre sottintesa)

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t = \partial_{x_i x_j} (a^{ij}(x, t, \mu) \mu_t) - \partial_{x_i} (b^i(x, t, \mu) \mu_t) \\ \mu_0 = \nu, \quad \nu \text{ misura di probabilità in } \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (1)$$

Equazioni di questo tipo sono anche note come **equazioni di Kolmogorov-Fokker-Planck paraboliche**. Equazioni di Kolmogorov-Fokker-Planck (KFP) per probabilità di transizione di processi diffusivi furono per la prima volta derivate da Kolmogorov in [7], in cui viene introdotto il problema riguardante l'esistenza e l'unicità di soluzioni che fossero misure di probabilità. In lavori classici sono stati studiati risultati di esistenza e unicità nel caso di coefficienti lisci e con crescita all'infinito al più lineare ([8], [9]).

Una trattazione sistematica sulla teoria delle equazioni di Kolmogorov-Fokker-Planck è presente in [10]. Le equazioni di Kolmogorov-Fokker-Planck sono molto utilizzate in fisica e meccanica statistica. Le equazioni di questo tipo generalizzano infatti diversi tipi di equazioni che trovano ampio uso nelle applicazioni: ad esempio le equazioni del trasporto ([11]), le equazioni di Vlasov ([12], [13]), le equazioni lineari di Fokker-Planck-Kolmogorov e le equazioni di McKean-Vlasov ([14], [15]). Diversi problemi della fisica che conducono allo studio di equazioni non lineari di Kolmogorov-Fokker-Planck possono essere trovati in [16]. Equazioni di questo tipo compaiono anche in applicazioni in ambito finanziario ([17], [2]), come vedremo anche successivamente.

Nel corso di questo capitolo, per semplicità di notazione, ometteremo il dominio di integrazione quando questo è chiaramente l'intero spazio  $\mathbb{R}^d$ .



## 1.1 Risultati Preliminari

Nella prima parte di questo capitolo vedremo alcuni concetti preliminari, essenziali per la corretta comprensione delle tecniche e metodologie utilizzate nei paragrafi successivi.

Introdurremo anzitutto alcuni concetti riguardanti la convergenza di successioni di misure; successivamente vedremo lo spazio di misure su cui lavoreremo nel corso del capitolo 2, elencandone alcune proprietà che si riveleranno necessarie per la dimostrazione del risultato principale del capitolo 2 ( il teorema 1.14). Per alcuni dei risultati presentati sarà riportata solo l'idea o omessa completamente la dimostrazione, riferendoci a [18] per una trattazione completa degli argomenti e dimostrazioni complete.

**Definizione 1.1.** *Una successione di misure  $\{\mu_n\}$  converge **debolmente** ad una misura  $\mu$  se, per ogni funzione  $f$  continua e limitata:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu$$

**Definizione 1.2.** *Una successione di misure  $\{\mu_n\}$  è detta di **Cauchy** se, per ogni funzione continua e limitata  $f$ , la successione  $\{\int f d\mu_n\}$  è una successione di Cauchy in  $\mathbb{R}$ .*

**Definizione 1.3.** *Sia  $\mathcal{M}$  una collezione di misure (eventualmente con segno) definite su  $\mathbb{R}^d$ . La collezione è detta **tight** (o, talvolta, **uniformemente tight**) se, per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste un insieme compatto  $K_\epsilon$  per cui, per ogni misura  $\mu \in \mathcal{M}$ :*

$$|\mu|(\mathbb{R}^d \setminus K_\epsilon) < \epsilon$$

dove  $|\mu|$  indica la variazione totale della misura  $\mu$ .

Introduciamo adesso lo spazio di misure su cui lavoreremo nel prossimo capitolo. L'obiettivo sarà poter utilizzare il teorema del punto fisso di Schauder (A0.4), per cui ci servirà uno spazio di misure che sia uno spazio di Banach.

Sia  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times [0, \tau])$  lo spazio lineare delle misure di Borel finite su  $\mathbb{R}^d \times [0, \tau]$ . Su tale spazio possiamo definire una norma, la norma di **Kantorovich-Rubinshtein**:

$$\|u\| = \sup\{\int f du : f \in \text{Lip}_1, |f| \leq 1\}$$

$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times [0, \tau])$  con tale norma è uno spazio normato.

**Proposizione 1.4.** *La topologia generata dalla norma di Kantorovich-Rubinshtein sull'insieme delle misure non negative coincide con la topologia della convergenza debole.*

*Dimostrazione.* [18] (Theorem 8.3.1) □

**Proposizione 1.5.** *Sia  $\{\mu_n\}$  una successione di Cauchy di misure Boreliane finite non negative su  $\mathbb{R}^d$ . Allora essa converge debolmente.*

*Dimostrazione.* Vogliamo vedere che se la successione  $\{\mu_n\}$  è di Cauchy, allora  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu$ , con  $\mu$  misura Boreliana finita. Per dimostrare ciò utilizzeremo il Teorema di Prokhorov (A0.5), che ci garantisce l'esistenza di una sottosuccessione convergente. Per utilizzare il suddetto teorema necessitiamo di due ipotesi: la successione  $\{\mu_n\}$  deve essere uniformemente limitata e uniformemente tight.

- Vediamo che è uniformemente limitata. La successione è di Cauchy, dunque se considero la funzione  $f = 1 \in C_b(\mathbb{R}^d)$  esisterà  $N \in \mathbb{N}$  tale che, per ogni  $n \geq N$ : (ricordiamo che le misure sono tutte finite)

$$|\int f d\mu_n - \int f d\mu_N| = |\mu_n(\mathbb{R}^d) - \mu_N(\mathbb{R}^d)| < 1 \Rightarrow |\mu_n| \in (\mu_N(\mathbb{R}^d) - 1, \mu_N(\mathbb{R}^d) + 1)$$

Chiaramente riesco a trovare un bound uniforme anche per  $n < N$ , essendo un numero finito. Quindi la successione è uniformemente limitata.

- Vediamo che la successione è tight. Supponiamo, per assurdo, che non lo sia. Esiste dunque  $\epsilon > 0$  tale che, per ogni compatto  $K \subset \mathbb{R}^d$ , possiamo trovare una misura  $\mu_k$  per cui  $|\mu_k|(X \setminus K^\epsilon) > \epsilon$ , dove  $K^\epsilon$  è l'intorno chiuso di raggio  $\epsilon$  di  $K$ . Utilizziamo ricorsivamente questo fatto per costruire una successione di compatti  $K_j$  e misure  $\mu_j$  con determinate proprietà. A patto di riordinare gli indici della successione  $\{\mu_n\}$ , sia  $\mu_1$  una qualunque misura per cui  $|\mu_1| > \epsilon$  e sia  $K_1$  un compatto per cui  $|\mu_1|(K_1) > \epsilon$ . Sia adesso  $\mu_2$  tale che  $|\mu_2|(X \setminus K_1^\epsilon) > \epsilon$ . Prendiamo adesso un compatto  $K_2 \subset X \setminus K_1^\epsilon$  tale che  $|\mu_2|(K_2) > \epsilon$ . Ponendo  $\overline{K_2} = K_1 \cup K_2$  possiamo quindi trovare una misura  $\mu_3$  per cui  $|\mu_3|(X \setminus \overline{K_2}^\epsilon) > \epsilon$  e procedere induttivamente. Abbiamo costruito successione di compatti  $K_j$ , a due a due disgiunti, e di misure  $\mu_j$  tali che:

- i)  $|\mu_j|(K_j) > \epsilon$
- ii)  $K_{j+1} \subset X \setminus (\cup_{i=1}^j K_i^\epsilon)$

Ma allora se poniamo  $U_j := K_j^{\epsilon/4}$ , tali insiemi sono sicuramente disgiunti. Consideriamo allora una successione di funzioni continue  $f_j$ , con  $\text{supp } f_j \subset U_j$ ,  $f_j = 1$  su  $K_j$  e  $0 \leq f_j \leq 1$ . Allora chiaramente avremo che:

$$\int_{U_j} f_j d\mu_j > \epsilon$$

Consideriamo ora la successione  $a_n = (a_n^1, a_n^2, \dots)$ , dove  $a_n^i = \int_{\mathbb{R}^d} f_i d\mu_n$ . Tale successione starà in  $l^1$  per come sono state costruiti i supporti delle  $f_i$ , essendo  $\sum_{i=1}^{\infty} |f_i| \leq 1$ . Ricordiamo ora che per ipotesi la nostra successione di misure è di Cauchy: ma allora anche la successione  $a_n$  sarà di Cauchy in norma  $l^1$  e quindi converge, da cui segue che  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n = 0$ , il che è un assurdo (per come avevamo costruito le  $f_j$ ). Quindi la successione deve essere tight.

Per il teorema di Prokhorov esiste allora una sotto-successione convergente ad una certa misura  $\mu$ , sia essa  $\mu_{n_k} \rightarrow \mu$ . Posso allora scegliere appropriati  $N$  ed  $n_k$  tale che, per ogni  $n > N$ , abbiamo che:

$$|\int f d\mu_n - \int f d\mu| \leq |\int f d\mu_n - \int f d\mu_{n_k}| + |\int f d\mu_{n_k} - \int f d\mu| < 2\epsilon$$

Dall'arbitrarietà di  $\epsilon$  segue la tesi.  $\square$

**Proposizione 1.6.** *Sia  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times [0, \tau])$  lo spazio lineare delle misure di Borel finite su  $\mathbb{R}^d \times [0, \tau]$ . Data una famiglia  $(\mu_t)_{t \in [0, \tau]}$  di misure Boreliane su  $\mathbb{R}^d$  tale che,  $\forall B \subset \mathbb{R}^d$  Boreliano, l'applicazione  $t \rightarrow \mu_t(B)$  è Borel misurabile, possiamo sempre associare un'unica misura  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times [0, \tau])$  (e in tal caso scriveremo  $\mu = (\mu_t)_{t \in [0, \tau]}$ ) tale che la seguente identità sia soddisfatta  $\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, \tau))$ :*

$$\int_{\mathbb{R}^d \times [0, \tau]} u(x, t) d\mu = \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} u(x, t) d\mu_t dt$$

*Dimostrazione.* Nelle nostre ipotesi è possibile farlo poiché l'ipotesi di misurabilità della mappa  $t \rightarrow \mu_t(B)$  ci permette di definire una misura di transizione (anche chiamata transition kernel, vedi [18] Capitolo 10.7).  $\square$

Per utilizzare il teorema del punto fisso di Schauder avremo bisogno di un appropriato sottoinsieme convesso, chiuso e limitato di  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times [0, \tau])$ . Introduciamo dunque in questo spazio una famiglia di sottoinsiemi, che chiameremo  $M_{\tau, \alpha}$ :

**Definizione 1.7.** *Siano  $\tau_0 > 0$ ,  $V$  funzione non negativa su  $\mathbb{R}^d$ . Per ogni  $\alpha \in C^+([0, \tau_0])$ ,  $\tau \in (0, \tau_0]$  definiamo  $M_{\tau, \alpha}(V)$  come l'insieme delle misure non negative  $\mu = (\mu_t)_{t \in [0, \tau]} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times [0, \tau])$  per cui  $\forall t \in [0, \tau]$  vale la seguente stima:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} V(x) d\mu_t \leq \alpha(t)$$

Vedremo che, per delle scelte appropriate, è possibile trovare un insieme della famiglia che ammette come sottoinsieme l'insieme convesso che ci servirà per utilizzare del teorema di Schauder.

**Osservazione 1.8.** Nella definizione precedente la scelta di prendere  $\alpha \in C^+([0, \tau_0])$ , invece che in  $C^+([0, \tau])$  ci permette di scegliere  $\alpha$  e  $\tau$  in maniera indipendente l'uno dall'altro.

Definiamo infine una convergenza più forte della convergenza debole

**Definizione 1.9.** *Una successione di misure  $\mu^n = (\mu_t^n)_{t \in [0, \tau]}$  su  $M_{\tau, \alpha}(V)$  è **V-convergente** ad una misura  $\mu = (\mu_t)_{t \in [0, \tau]}$  su  $M_{\tau, \alpha}(V)$  se per ogni  $t \in [0, \tau]$ , per ogni funzione continua  $F$  su  $\mathbb{R}^d$  per cui  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} F(x)/V(x) = 0$  vale la seguente uguaglianza:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} F(x) d\mu_t^n = \int_{\mathbb{R}^d} F(x) d\mu_t$$

## 1.2 Formulazione del problema

Se  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times [0, \tau])$ , con  $\tau > 0$ , sia  $L_\mu$  il seguente operatore:

$$L_\mu = a^{ij}(x, t, \mu) \partial_{x_i x_j} + b^i(x, t, \mu) \partial_{x_i}$$

Diremo che  $\mu = (\mu_t)_{t \in [0, \tau]}$  è soluzione del problema di Cauchy (1) se:

- Le  $\mu_t$  sono misure di probabilità;
- $\forall 1 \leq i, j \leq d$  le seguenti mappe, definite su  $\mathbb{R}^d \times [0, \tau]$ , sono Boreliane:

$$(x, t) \rightarrow a^{ij}(x, t, \mu), \quad (x, t) \rightarrow b^i(x, t, \mu)$$

e inoltre  $\forall U \subset \mathbb{R}^d$  palla chiusa abbiamo che  $a^{ij}, b^i \in L^1(U \times [0, \tau], d\mu)$

- $\forall t \in [0, \tau], \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  vale la seguente uguaglianza:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi d\mu_t - \int_{\mathbb{R}^d} \phi dv = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} L_\mu \phi d\mu_s ds \quad (2)$$

Introduciamo adesso tre ipotesi sui coefficienti  $a^{ij}, b^i$  dell'operatore  $L$ . Tali condizioni saranno sufficienti per il risultato, che enunceremo alla fine del paragrafo, di esistenza, di esistenza di soluzioni per il problema di Cauchy 1:

**(H1):** Esiste una funzione strettamente positiva  $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$ , detta **Funzione di Lyapunov** per  $L_\mu$ , con  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$  e per cui esistono due mappe  $\Lambda_1, \Lambda_2 : C^+([0, \tau_0]) \rightarrow C^+([0, \tau_0])$  tali che:

- $\forall \tau \in (0, \tau_0], \forall \alpha \in C^+([0, \tau_0])$  le funzioni  $a^{ij}, b^i$  sono ben definite su  $M_{\tau, \alpha} := M_{\tau, \alpha}(V)$
- $\forall \mu \in M_{\tau, \alpha}$  e  $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, \tau]$  vale che:

$$L_\mu V(x, t) \leq \Lambda_1[\alpha](t) + \Lambda_2[\alpha](t)V(x)$$

**Esempio 1.10.** La condizione (H1) è verificata, ad esempio, dall'operatore:

$$L_\mu u = (x, \Delta u) \int |y|^2 d\mu_t$$

In effetti basta prendere  $V(x) = 1 + |x|^2$ . In tal caso infatti vale la stima:

$$L_\mu V = 2|x|^2 \int |y|^2 d\mu_t \leq 2\alpha(t)V(x)$$

Basta scegliere allora  $\Lambda_1[\alpha] = 0$  e  $\Lambda_2[\alpha] = 2\alpha$ .

**(H2):** Valgono le seguenti ipotesi:

- $\forall \tau \in (0, \tau_0], \alpha \in C^+([0, \tau_0]), \sigma \in M_{\tau, \alpha}$  e  $x \in \mathbb{R}^d$  le seguenti mappe sono Boreliane su  $[0, \tau]$ :

$$t \rightarrow a^{ij}(x, t, \sigma), \quad t \rightarrow b^i(x, t, \sigma)$$

- su ogni palla chiusa  $U \subset \mathbb{R}^d$  sono continue e limitate su  $U$ , uniformemente in  $\sigma \in M_{\tau, \alpha}$  e  $t \in [0, \tau]$ , le seguenti mappe:

$$x \rightarrow a^{ij}(x, t, \sigma), \quad x \rightarrow b^i(x, t, \sigma)$$

- Se una successione  $\mu^n \in M_{\tau, \alpha}$  è V-convergente a  $\mu \in M_{\tau, \alpha}$ , allora  $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, \tau]$  vi è la convergenza puntuale dei coefficienti, ovvero:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{ij}(x, t, \mu^n) = a^{ij}(x, t, \mu), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b^i(x, t, \mu^n) = b^i(x, t, \mu)$$

**Osservazione 1.11.** Dalla condizione (H2) seguono due fatti:

- $a^{ij}(x, t, \sigma)$ ,  $b^i(x, t, \sigma)$  sono continue in  $x$  e Borel-misurabili in  $t \Rightarrow$  sono Borel-misurabili nelle variabili  $(x, t)$  su  $\mathbb{R}^d \times [0, \tau]$ ;
- Per ogni  $t \in [0, \tau]$  le successioni  $a^{ij}(x, t, \mu^n)$ ,  $b^i(x, t, \mu^n)$  convergono uniformemente su ogni palla chiusa  $U \subset \mathbb{R}^d$ . Questo segue dalla convergenza puntuale e dal fatto che la successione di funzioni è continua e limitata su ogni palla chiusa  $U$ , uniformemente in  $\sigma, t$ .

**Esempio 1.12.** La condizione (H2) è verificata, ad esempio, da un operatore per cui:

$$\begin{aligned} a^{i,j}(x, t, \mu) &= 0 \\ b(x, t, \mu) &= \int K(x, y) d\mu_y \end{aligned}$$

con  $K$  campo vettoriale continuo su  $\mathbb{R}^d \times [0, \tau]$  per cui, data  $V$  funzione di Lyapunov:

$$K(x, y) \leq C_1(x) + C_2(x)V^{1-\gamma}(y)$$

dove  $\gamma \in (0, 1)$ , mentre  $C_1(x)$  e  $C_2(x)$  sono funzioni continue. La potenza  $1 - \gamma$  ci da la V-convergenza, mentre la misurabilità segue dalla continuità di  $K$  e dalla misurabilità delle mappe  $t \rightarrow \mu_t(B)$  per ogni Boreliano  $B$ . Un bound uniforme invece può essere ottenuto dalla seguente stima:

$$|K(x, y)| \leq C_1(x) + C_2(x) \left( \int V(x) d\mu_t \right)^{(1-\gamma)/\gamma}$$

Vediamo infine l'uniforme continuità. Sia  $U$  palla chiusa su  $\mathbb{R}^d$ . Per ogni  $\epsilon > 0$ , per ogni  $x, z \in U$ :

$$\begin{aligned} |b(t, x, \mu) - b(t, z, \mu)| &= \left| \int (K(x, y) - K(z, y)) d\mu_t \right| \leq \\ &2 \int_{|y| > R} (C_1(x) + C_2(x)V^{1-\gamma}(y)) d\mu_t + \int_{|y| \leq R} |K(x, y) - K(z, y)| d\mu_t \end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Chebyshev, esiste  $R$  per cui il primo integrale è minorato da  $\epsilon/2$  per ogni  $\mu_t \in M_{\tau, \alpha}$ . Se consideriamo tale  $R$  e prendiamo il compatto  $U \times \{y : |y| \leq R\}$ , per l'uniforme continuità di  $K$  su tale insieme compatto riusciamo a minorare anche il secondo integrale con  $\epsilon/2$  uniformemente in  $\mu$ , da cui la tesi.

**(H3):** Per ogni  $\tau \in (0, \tau_0]$ , per ogni  $\alpha \in C^+([0, \tau_0])$  e per ogni  $\sigma \in M_{\tau, \alpha}$  la matrice  $A(x, t, \sigma) = (a^{ij}(x, t, \sigma))_{1 \leq i, j \leq d}$  è simmetrica e semi-definita positiva, ovvero  $(A\xi, \xi) \geq 0 \forall \xi \in \mathbb{R}^d$

**Osservazione 1.13.** Vedremo più avanti che per la dimostrazione del teorema successivo, il risultato principale di questo capitolo, sarà sufficiente che le tre condizioni appena enunciate valgano non per tutti ma solo per un determinato insieme  $M_{\tau, \alpha}$ , con  $\tau$  e  $\alpha$  fissati. In particolare vedremo che  $\tau$  e  $\alpha$  saranno completamente determinati esclusivamente dal problema di Cauchy in esame e dalle mappe  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$ .

**Teorema 1.14.** *Supponiamo che valgano le condizioni (H1), (H2), (H3) per i coefficienti  $a^{ij}, b^i$ . Supponiamo che la condizione iniziale  $v$  sia una misura di probabilità su  $\mathbb{R}^d$  e che  $V \in L^1(v)$ . Allora:*

- i)  $\exists \tau \in (0, \tau_0]$  tale che il problema di Cauchy (1) abbia soluzione su  $[0, \tau]$ ;
- ii) Se  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  sono costanti, allora il problema di Cauchy (1) ha soluzione su tutto  $[0, \tau_0]$ ;
- iii) Se  $\Lambda_1[\alpha] = 0$  e  $\Lambda_2[\alpha](t) = G(\alpha(t))$ , con  $G$  strettamente monotona crescente, continua e positiva su  $[0, \infty)$ , allora il problema (1) ha soluzione su ogni intervallo  $[0, \tau]$ , con  $\tau \in (0, \tau_0]$  e  $\tau < T$ , dove  $T$  è definito dalle seguenti formule:

$$T = \int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{uG(u)}, \quad u_0 = \int_{\mathbb{R}^d} V(x)dv$$

- iv) Se  $\Lambda_1[\alpha](t) = G(\alpha(t))$  e  $\Lambda_2[\alpha] = 0$ , dove  $G$  è una funzione strettamente monotona crescente, continua e positiva su  $[0, +\infty)$  allora il problema di Cauchy (1) ha soluzione su ogni intervallo  $[0, \tau]$  con  $\tau \in (0, \tau_0]$ ,  $\tau < T$  e  $T$  definito da:

$$T = \int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{G(u)}, \quad u_0 = \int_{\mathbb{R}^d} V(x)dv$$

Inoltre, in ognuno dei casi precedenti, le  $\mu_t$  sono misure di probabilità e vale che  $\sup_{t \in [0, \tau]} \int V(x)d\mu_t < \infty$

**Osservazione 1.15.** La dimostrazione di questo teorema è divisa in tre passi. Nel primo passo dimostreremo il teorema nel caso in cui  $A$  sia una matrice non degenere e sufficientemente regolare (in un senso che enunceremo tra poco). Al passo due utilizzeremo il metodo "vanishing viscosity" per dimostrare il risultato nel caso di una matrice non degenere ma con delle ipotesi aggiuntive. Al passo tre infine dimostreremo il caso generale. Il motivo è che abbiamo bisogno dell'unicità della soluzione dell'equazione lineare associata al problema di Cauchy per potere utilizzare il teorema di Schauder e per fare ciò abbiamo bisogno di alcune restrizioni sulla regolarità della matrice  $A$ .

### 1.3 Caso non degenere

In questa sezione supponiamo che sia valida la seguente condizione, più forte di (H3):

**(H3')**: Vale (H3). Inoltre, valgono le seguenti ipotesi:

- Per ogni  $\tau \in (0, \tau_0)$ , ogni  $\alpha \in C([0, \tau_0])$ , ogni palla chiusa  $U \subset \mathbb{R}^d$  e ogni  $\sigma \in M_{\tau, \alpha}$ , esiste  $\lambda = \lambda(\sigma, U) > 0$  tale che, per ogni  $x, y \in U$  e per ogni  $t \in [0, \tau]$ ,  $\det A(x, t, \sigma) \neq 0$  ed inoltre:

$$|A(x, t, \sigma) - A(y, t, \sigma)| \leq \lambda|x - y|$$

- Per ogni  $\sigma \in M_{\tau, \alpha}$ , esistono  $C_1, C_2$  tali che:

$$\left| \sqrt{A(x, t, \sigma)} \nabla V(X) \right| \leq C_1 + C_2 V(x)$$

Consideriamo il problema di Cauchy lineare relativo al problema di Cauchy (1):

$$\partial_t \mu_t = \partial_{x_i x_j} (a^{ij}(x, t, \sigma) \mu_t) - \partial_{x_i} (b^i(x, t, \sigma) \mu_t), \quad \mu_0 = v$$

Abbiamo rafforzato l'ipotesi (H3) con (H3') perché, insieme alle ipotesi (H1) e (H2), è sufficiente per l'esistenza ([19], Theorem 3.1) e l'unicità ([20], Theorem 2.3) (vedi anche [21], remark 4.7) di una soluzione di probabilità  $\mu = (\mu_t)_{t \in [0, \tau]}$  per il problema di Cauchy lineare.

Sotto queste ipotesi è dunque ben definita la mappa  $Q : M_{\tau, \alpha} \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times [0, \tau])$ , definita da:

$$Q(\sigma) = \chi \iff \partial_t \chi_t = \partial_{x_i x_j} (a^{ij}(x, t, \sigma) \chi_t) - \partial_{x_i} (b^i(x, t, \sigma) \chi_t), \quad \chi_0 = v$$

La strategia per la dimostrazione del teorema sarà, applicando il teorema del punto fisso di Schauder, dimostrare che esiste  $\mu$  per cui  $Q(\mu) = \mu$  ( $\iff \mu$  è soluzione del problema di Cauchy (1)). Per fare ciò dovremo verificare la continuità di  $Q$  e trovare un compatto convesso  $K$  dentro  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times [0, \tau])$  per cui  $Q(K) \subset K$ .

Il compatto convesso in questione sarà, per una appropriata scelta di  $\tau$  e  $\alpha$ , l'insieme  $N_{\tau, \alpha}$  così definito:

**Definizione 1.16.** Sia  $\mu \in M_{\tau, \alpha}$ . Diciamo che  $\mu \in N_{\tau, \alpha}$  se per ogni  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ , per ogni  $t, s \in [0, \tau]$  vale la seguente stima:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \phi d\mu_t - \int_{\mathbb{R}^d} \phi d\mu_s \right| \leq \Lambda(\tau, \alpha, \phi) |t - s| \quad (3)$$

dove:

$$\Lambda(\tau, \alpha, \phi) = \sup\{|L_\chi \phi(x, t)| : (x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, \tau], \chi \in M_{\tau, \alpha}\}$$

**Osservazione 1.17.** Osserviamo anzitutto che  $\Lambda(\tau, \alpha, \phi)$  non dipende da  $\mu \in N_{\tau, \alpha}$ . Osserviamo, inoltre, che il sup di questa definizione è finito: ciò segue dal fatto che  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  e da (H2), che ci garantisce che le  $a^{ij}, b^i$  siano continue e limitate sulle palle chiuse  $U$  uniformemente in  $t \in [0, \tau]$ ,  $\chi \in M_{\tau, \alpha}$ .

**Lemma 1.18.** *Ogni successione di misure  $\mu^n = (\mu_t^n)_{t \in [0, \tau]}$  su  $N_{\tau, \alpha}$  ammette una sottosuccessione  $\{\mu^{n_i}\}$  che converge debolmente ad una misura  $\mu \in N_{\tau, \alpha}$ . Inoltre  $\{\mu_t^{n_i}\}$  converge debolmente a  $\mu_t$  per ogni  $t \in [0, \tau]$*

*Dimostrazione.* Per ogni  $t$  fissato, vediamo che la successione di misure  $\{\mu_t^n\}$  è tight. Ricordiamo che  $N_{\tau, \alpha} \subseteq M_{\tau, \alpha}$ . Per ogni  $t \in [0, \tau]$  vale dunque la seguente uguaglianza:

$$\int_{\mathbb{R}^d} V(x) d\mu_t^n \leq \alpha(t) \leq \max_{t \in [0, \tau]} \alpha(t) := M$$

Ma per la disuguaglianza di Chebyshev vale anche che:

$$\mu_t^n(\{x \in \mathbb{R}^d | V(x) \geq c\}) \leq \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^d} V d\mu_t^n \leq M \cdot \frac{1}{c}$$

Per la definizione di  $V$  possiamo trovare una palla chiusa  $B$  che contenga l'insieme  $K := \{V < c\}$ , con  $c < \infty$ . Ricordando che le misure  $\mu_t^n$  sono finite, possiamo sempre trovare una costante  $c = c(\epsilon)$  per cui:

$$\mu_t^n(\mathbb{R}^d \setminus B) < \epsilon$$

per ogni  $\epsilon > 0$ , previa un'accurata scelta di  $c$ . Ma allora la successione è tight.

La successione, inoltre, è uniformemente limitata poiché sta in  $M_{\tau, \alpha}$ .

Sia  $T = \{t_1, t_2, \dots\}$  un insieme numerabile denso in  $[0, \tau]$ . Per il teorema di Prokhorov, per ogni  $j$ , la successione  $\mu_{t_j}^n$  ammette una sotto-successione che converge debolmente. Usando il metodo diagonale riusciamo quindi a trovare una sotto-successione  $\mu_t^{n_i}$  che converge debolmente per ogni  $t \in T$ . Vediamo che è di Cauchy per ogni  $t \in [0, \tau]$ . Siano  $t \in [0, \tau]$ ,  $s \in T$ ,  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Allora:

$$\begin{aligned} & \left| \int \phi d\mu_t^{n_p} - \int \phi d\mu_t^{n_k} \right| \\ & \leq \left| \int \phi d\mu_t^{n_p} - \int \phi d\mu_s^{n_p} \right| + \left| \int \phi d\mu_s^{n_p} - \int \phi d\mu_s^{n_k} \right| + \left| \int \phi d\mu_s^{n_k} - \int \phi d\mu_t^{n_k} \right| \\ & \leq 2\Lambda(\tau, \alpha, \phi) \cdot |t - s| + \left| \int \phi d\mu_s^{n_p} - \int \phi d\mu_s^{n_k} \right| \end{aligned}$$

Per una scelta accurata di  $s$  possiamo rendere il primo addendo minore di  $\epsilon/2$  per ogni  $\epsilon > 0$ . Possiamo inoltre minorare il secondo addendo con  $\epsilon/2$  per la convergenza debole (ricordiamo che per  $s \in T$  ho convergenza debole e quindi la successione è di Cauchy). Ma allora la successione  $\int \phi d\mu_t^{n_i}$  è di Cauchy per ogni  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ .

Usiamo adesso il fatto che  $\mu_t^{n_i}$  è uniformemente tight. Per ogni  $\epsilon > 0$  e per ogni  $l$ , possiamo trovare dunque una palla  $U \subset \mathbb{R}^d$  tale che  $\mu_t^{n_i}(\mathbb{R}^d \setminus U) < \epsilon$ .

Sia ora  $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ ,  $|f(x)| \leq M$ . Costruiamo una funzione  $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  tale che  $|\psi(x)| \leq M + 1$  e  $|f(x) - \psi(x)| < \epsilon$  per ogni  $x \in U$ . Allora:

$$\begin{aligned} & \left| \int f d\mu_t^{n_p} - \int f d\mu_t^{n_k} \right| \leq \int_U |f - \psi| d\mu_t^{n_p} + \int_U |f - \psi| d\mu_t^{n_k} + \left| \int \psi d\mu_t^{n_p} - \int \psi d\mu_t^{n_k} \right| + \\ & \int_{\mathbb{R}^d \setminus U} (|f| + |\psi|) d\mu_t^{n_p} + \int_{\mathbb{R}^d \setminus U} (|f| + |\psi|) d\mu_t^{n_k} \leq 4\epsilon(M + 1) + \left| \int \psi d\mu_t^{n_p} - \int \psi d\mu_t^{n_k} \right| \end{aligned}$$



Essendo  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  ed essendo  $\int \psi d\mu_t^{n_i}$  successione di Cauchy, l'ultimo sommando può essere minorato con qualunque  $\epsilon > 0$ . Dunque la successione di misure  $\{\mu_t^{n_i}\}$  è di Cauchy per ogni  $t \in [0, \tau] \Rightarrow$  converge debolmente ad una certa misura  $\mu_t$  per ogni  $t \in [0, \tau]$  (per 1.5). Ma allora, per ogni  $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ , la mappa  $t \rightarrow \int f d\mu_t$  è il limite di funzioni misurabili e dunque è Borel misurabile su  $[0, \tau]$ .

Consideriamo adesso la classe  $\Phi$ , delle funzioni Boreliane misurabili  $\phi$  su  $\mathbb{R}^d$  per cui la mappa  $t \rightarrow \int \phi d\mu_t$  è Borel misurabile su  $[0, \tau]$ . Chiaramente  $\Phi$  contiene l'algebra  $C_b(\mathbb{R}^d)$ , ed inoltre è chiuso rispetto a limiti uniformi e limiti monotoni. Per il teorema della classe monotona (vedi [18], Theorem 2.19.9),  $\Phi$  contiene tutte le funzioni Boreliane limitate su  $\mathbb{R}^d$ . In particolare, se  $B \in \mathbb{R}^d$  Boreliano e  $\phi = 1_B$ , avremo che  $t \rightarrow \int \phi d\mu_t = \mu_t(B)$  è Borel misurabile su  $[0, \tau]$ .

Consideriamo adesso  $\mu = (\mu_t)_{t \in [0, \tau]}$ . Vogliamo vedere che  $\mu^{n_i}$  converge debolmente a  $\mu$ . Abbiamo visto che, data  $h \in C_b(\mathbb{R} \times [0, \tau])$  e per ogni  $t$  fissato:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int h(x, t) d\mu_t^{n_i} = \int h(x, t) d\mu_t$$

Ma  $h$  è limitata,  $\mu_t^{n_i}$  è una misura finita non negativa, quindi possiamo applicare il teorema della convergenza dominata di Lebesgue, che ci da la convergenza debole di  $\mu^{n_i} \rightarrow \mu$ :

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^\tau \int h(x, t) d\mu_t^{n_i} dt = \int_0^\tau \int h(x, t) d\mu_t dt$$

Mostriamo infine che  $\mu \in N_{\tau, \alpha}$ . Per ogni  $N \in \mathbb{N}$ , la convergenza debole delle  $\mu_t^{n_i} \rightarrow \mu_t$  e il lemma di Fatou ci danno che  $\mu \in M_{\tau, \alpha}$ . In effetti:

$$\int V(x) d\mu_t = \int \lim_{N \rightarrow \infty} \min\{V(x), N\} d\mu_t \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \int \min\{V(x), N\} d\mu_t \leq \alpha(t)$$

Infine, mandando  $l \rightarrow \infty$  nella stima:

$$|\int \phi d\mu_t^{n_i} - \int \phi d\mu_s^{n_i}| \leq \Lambda(\tau, \alpha, \phi) |t - s|$$

otteniamo:

$$|\int \phi d\mu_t - \int \phi d\mu_s| \leq \Lambda(\tau, \alpha, \phi) |t - s|$$

□

**Corollario 1.19.** *L'insieme  $N_{\tau, \alpha}$  è un compatto convesso di  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times [0, \tau])$*

*Dimostrazione.*  $M_{\tau, \alpha}$  è banalmente un insieme convesso dello spazio lineare delle misure Boreliane finite  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times [0, \tau])$ . Da ciò segue trivialmente che anche  $N_{\tau, \alpha}$  è convesso.

Come visto nei risultati preliminari,  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times [0, \tau])$  con la norma di Kantorovich-Rubinshtein è uno spazio normato in cui, nel sottoinsieme delle misure non negative, la topologia della norma coincide con quella della convergenza debole. Ma per il lemma precedente una qualunque successione di misure in  $N_{\tau, \alpha}$  converge debolmente ad una misura in  $N_{\tau, \alpha} \Rightarrow N_{\tau, \alpha}$  è compatto essendo  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times [0, \tau])$  uno spazio normato. □

**Lemma 1.20.** *Se una successione di misure  $\mu^n \in N_{\tau, \alpha}$  converge debolmente allora  $V$ -converge.*

*Dimostrazione.* Sia  $\mu^n \in N_{\tau, \alpha}$  successione che converge debolmente ad una misura  $\mu \in N_{\tau, \alpha}$ . Allora per ogni  $t \in [0, \tau]$  la successione  $\mu_t^n$  converge debolmente a  $\mu_t$ . Infatti per il Lemma 1.18 per ogni sottosuccessione di indici  $\{n_l\}$  troviamo una sottosuccessione  $\{n_{l_k}\}$  per cui  $\mu_t^{n_{l_k}}$  converge debolmente a  $\mu_t$  e dunque l'intera successione  $\mu_t^n$  converge debolmente.

Sia ora  $F$  funzione continua su  $\mathbb{R}^d$  per cui  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} F(x)/V(x) = 0$ . Consideriamo la seguente funzione, anch'essa continua:

$$g(x) := F(x)/(1 + V(x))$$

Allora avremo che  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = 0$  e dunque  $\forall \epsilon > 0$  esiste una funzione test  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  per cui  $|g(x) - \psi(x)| < \epsilon$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^d$  (vedi osservazione seguente alla fine della dimostrazione). Quindi:

$$\begin{aligned} \left| \int F d\mu_t^n - \int F d\mu_t \right| &= \left| \int g(1 + V) d\mu_t^n - \int g(1 + V) d\mu_t \right| = \\ & \left| \int g(1 + V) + \psi(1 + V) - \psi(1 + V) d\mu_t^n - \int g(1 + V) + \psi(1 + V) - \psi(1 + V) d\mu_t \right| \leq \\ & \left| \int \psi(1 + V) d\mu_t^n - \int \psi(1 + V) d\mu_t \right| + \epsilon \int (1 + V) d\mu_t^n + \epsilon \int (1 + V) d\mu_t \leq \\ & \left| \int \psi(1 + V) d\mu_t^n - \int \psi(1 + V) d\mu_t \right| + 2\epsilon(C + \alpha(t)) \end{aligned}$$

Dove l'ultima disuguaglianza segue dalla definizione di  $M_{\tau, \alpha}$ .

Ma per ipotesi  $\mu_t^n$  converge debolmente, quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int \psi(1 + V) d\mu_t^n - \int \psi(1 + V) d\mu_t \right| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int F d\mu_t^n - \int F d\mu_t \right| = 0$$

□

**Osservazione 1.21.** Data una funzione  $g \in C(\mathbb{R}^d)$  per cui  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = 0$  riesco

sempre a trovare una funzione  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  per cui  $|g(x) - \psi(x)| < \epsilon$ .

Infatti se  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = 0$  allora esiste un compatto  $K \subset \mathbb{R}^d$  per cui  $|f(x)| < \epsilon$  fuori da

$K$  (e dunque la funzione  $g$  sarà limitata). È quindi possibile trovare una funzione  $g' \in C_0(\mathbb{R}^d)$  continua a supporto compatto per cui  $|g(x) - g'(x)| < \epsilon/2$ .

Consideriamo adesso la mollificazione (vedi A0.7):

$$g'_\delta = g' * \phi_\delta \in C_0^\infty$$

Essendo  $g'(x) \in C_0(\mathbb{R}^d)$  avremo che

$$g'_\delta \rightarrow g' \text{ se } \delta \rightarrow 0^+ \text{ (uniformemente)}$$

Ma allora esisterà un certo  $\bar{\delta}$  per cui  $|g'_\delta(x) - g'(x)| < \epsilon/2 \Rightarrow |g'_\delta(x) - g(x)| < \epsilon$

**Corollario 1.22.** Supponiamo che  $Q(N_{\tau, \alpha}) \subseteq N_{\tau, \alpha}$  per un certo  $\tau \in (0, \tau_0]$  e una funzione  $\alpha \in C^+([0, \tau_0])$ . Allora  $Q$  è una mappa continua da  $N_{\tau, \alpha} \rightarrow N_{\tau, \alpha}$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo una successione di misure  $\{\mu^n\} \in N_{\tau,\alpha}$  che converge debolmente a  $\mu \in N_{\tau,\alpha}$ . Poniamo  $\chi^n = Q(\mu^n)$ . Vediamo che  $Q$  è sequenzialmente continua e, dunque, che è continua.

Vogliamo dimostrare che, per ogni sottosuccessione di  $\{\chi^n\}$ , esiste una sottosuccessione convergente ad un'unica misura  $\chi$  per cui  $Q(\mu) = \chi$ .

Anzitutto, dal Lemma 1.18, sappiamo che esiste una sottosuccessione di  $\{\chi^n\}$  che converge debolmente ad una misura  $\chi \in N_{\tau,\alpha}$  ed inoltre la successione  $\{\chi_t^{n_k}\}$  converge debolmente a  $\chi_t$  per ogni  $t \in [0, \tau]$ . Inoltre dalla convergenza debole di  $\mu^{n_k} \rightarrow \mu$  segue la V-convergenza per il lemma 1.20.

Per l'osservazione 1.11, sappiamo che per ogni  $t \in [0, \tau]$  le successioni di funzioni  $x \rightarrow a^{ij}(x, t, \mu^{n_k})$ ,  $x \rightarrow b^i(x, t, \mu^{n_k})$  convergono uniformemente su ogni palla chiusa  $U \subset \mathbb{R}^d$  alle funzioni (rispettivamente)  $a^{ij}(x, t, \mu)$  e  $b^i(x, t, \mu)$ .

Vediamo adesso che  $Q(\mu) = \chi$ . Sia  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^d$  palla chiusa contenente  $\text{supp } \phi$ . Essendo  $Q(\mu^{n_k}) = \chi^{n_k}$ , dalla definizione di  $Q$  seguirà che:

$$\int_U \phi d\chi_t^{n_k} - \int_U \phi dv = \int_0^t \int_U L_{\mu^{n_k}} \phi d\chi_s^{n_k} ds$$

Ma allo stesso tempo:

$$\int_U L_{\mu^{n_k}} \phi d\chi_s^{n_k} = \int_U (L_{\mu^{n_k}} \phi - L_\mu \phi) d\chi_s^{n_k} + \int_U L_\mu \phi d\chi_s^{n_k} ds$$

Mandando  $k \rightarrow \infty$  in quest'ultima uguaglianza possiamo osservare che il primo addendo del secondo termine tende a 0 per la convergenza uniforme delle  $a^{ij}(x, s, \mu^{n_k})$  e delle  $b^i(x, s, \mu^{n_k})$  su ogni palla chiusa  $U$ , mentre il secondo termine tende a  $\int_U L_\mu \phi d\chi_s$  per la convergenza debole della successione  $\{\chi_s^{n_k}\}$  alla misura  $\chi_s$ .

Nelle nostre ipotesi abbiamo che  $|L_{\mu^{n_k}} \phi| \leq \Lambda(\tau, \alpha, \phi) \Rightarrow$  gli integrali  $\int_U L_{\mu^{n_k}} \phi d\chi_s^{n_k}$  sono uniformemente limitati. Per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue dunque seguirà che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \int_U L_{\mu^{n_k}} \phi d\chi_s^{n_k} ds = \int_0^t \int_U L_\mu \phi d\chi_s ds$$

Mandando  $k \rightarrow \infty$  e mettendo tutto insieme otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_U \phi d\chi_t - \int_U \phi dv &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U \phi d\chi_t^{n_k} - \int_U \phi dv = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \int_U L_{\mu^{n_k}} \phi d\chi_s^{n_k} ds = \\ &= \int_0^t \int_U L_\mu \phi d\chi_s ds \end{aligned}$$

Dove nell'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato il fatto che  $\forall t, \{\chi_t^{n_k}\} \rightarrow \chi_t$  debolmente.

Dall'arbitrarietà di  $\phi$  seguirà che  $Q(\mu) = \chi$ . Osserviamo che tale  $\chi$  deve essere unica, poiché nelle nostre ipotesi il problema lineare di Cauchy ha soluzione unica e quindi la mappa  $Q$  è ben definita.  $\square$

**Lemma 1.23.** *Supponiamo  $\mu \in N_{\tau,\alpha}$  e  $\chi = Q(\mu)$  su  $[0, \tau]$ . Siano  $\Lambda_1, \Lambda_2$  le mappe definite in (H1). Definiamo le seguenti mappe:*

$$R[\alpha](t) = \exp\left(\int_0^t \Lambda_2[\alpha](s) ds\right), \quad S[\alpha](t) = R[\alpha](t) \int_0^t \frac{\Lambda_1[\alpha](s)}{R[\alpha](s)} ds$$

Allora per ogni  $t \in [0, \tau]$ :

$$\int V(x) d\chi_t \leq S[\alpha](t) + R[\alpha](t) \int V(x) dv$$

*Dimostrazione.* Sia  $\xi_m \in C^\infty[0, \infty)$  una funzione liscia tale che:

- $0 \leq \xi'_m(x) \leq 1$ ;
- $\xi_m(x)'' \leq 0$ ;
- $\xi_m(x) = x$  se  $x \leq m - 1$ ;
- $\xi_m(x) = m$  se  $x > m$

Sia inoltre  $\mu \in N_{\tau, \alpha}$ .

Per ipotesi  $\chi$  è soluzione del problema di Cauchy lineare: per ogni  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  dunque verificherà la relazione:

$$\int \phi d\chi_t - \int \phi dv = \int_0^t \int L_\mu \phi d\chi_s ds$$

Ovviamente, l'uguaglianza continua ad essere verificata per  $\phi \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ , essendo l'operatore del secondo ordine.

Consideriamo adesso la funzione  $\phi(x) := \xi_m(V(x)) - m$ . Tale funzione è in  $C_0^2(\mathbb{R}^d)$ : infatti  $V(x)$  esplose all'infinito e dunque esiste un compatto al di fuori del quale  $V(x) > m \Rightarrow \phi(x) = 0$ . Inoltre, dalla chain rule segue dunque che:

$$L_\mu \phi(x) = L_\mu(\xi_m(V(x))) = \xi'_m(V) L_\mu V + \xi''_m(A \nabla V, \nabla V)$$

Osserviamo adesso che dalla definizione di  $\xi_m$  segue che  $\xi_m(V(x)) \leq V(x)$  e, in particolare, coincideranno sull'insieme  $\{x \in \mathbb{R}^d | V(x) \leq m - 1\}$ . Ricordiamo inoltre che  $\xi''(x) \leq 0$ , che  $\xi'(x) = 0$  se  $x > m$  e che  $A$  è definita positiva. Ma allora:

$$\begin{aligned} \int_{|V| \leq m-1} V(x) d\chi_t &\leq \int \xi_m(V(x)) d\chi_t \leq \\ &\int \xi_m(V(x)) dv + \int_0^t \int (\xi'_m(V(x)) L_\mu V(x, s) + \xi''_m(V(x))(A \Delta V, \Delta V)) d\chi_s ds \\ &\leq \int V(x) dv + \int_0^t \int_{|V| \leq m} \xi'_m(V(x)) L_\mu V(x, s) d\chi_s ds \end{aligned}$$

Ma dalla condizione (H1) segue che:

$$\int_0^t \int_{|V| \leq m} L_\mu V(x, s) d\chi_s ds \leq \int_0^t \left( \Lambda_1[\alpha](s) + \Lambda_2[\alpha](s) \int_{|V| \leq m} V d\chi_s \right) ds$$

Ma allora se usiamo questo fatto nella disuguaglianza precedente, facciamo tendere  $m \rightarrow \infty$  e usiamo la disuguaglianza di Gronwall otteniamo il risultato cercato:

$$\begin{aligned} \int V d\chi_t &\leq \int V dv + \int_0^t \Lambda_1[\alpha](s) ds + \int_0^t \left( \Lambda_2[\alpha](s) \int v d\chi_s \right) ds \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int V d\chi_t \leq \exp \left( \int_0^t \Lambda_2[\alpha](s) ds \right) \cdot \left( \int V(x) dv + \int_0^t \Lambda_1[\alpha](s) ds \right) \end{aligned}$$

□

Il lemma appena dimostrato ci permette di trovare degli specifici  $\tau \in (0, \tau_0]$  e  $\alpha \in C^+([0, \tau])$  per cui  $Q(N_{\tau, \alpha}) \subset N_{\tau, \alpha}$  in ognuno dei 4 casi del teorema principale (1.14).

Osserviamo tuttavia che se  $\chi = Q(\mu)$ , allora automaticamente dovrà valere (3). Ci basterà dunque che  $Q(M_{\tau, \alpha}) \subseteq M_{\tau, \alpha}$ . Iniziamo trovando quello per il caso (i):

**Corollario 1.24.** *Esiste  $\tau \in (0, \tau_0)$  e una funzione costante  $a(t) = a > 0$  per cui  $Q(N_{\tau, \alpha}) \subseteq N_{\tau, \alpha}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\chi = Q(\mu)$ , con  $\mu \in N_{\tau, \alpha}$ . Osserviamo che le funzioni  $S[\alpha]$ ,  $R[\alpha]$  del lemma precedente non dipendono da  $\tau$  poiché  $\Lambda_1, \Lambda_2$  non vi dipendono.

Inoltre  $\lim_{t \rightarrow 0} S[\alpha](t) = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow 0} R[\alpha](t) = 1$ , per cui possiamo scegliere (per continuità)  $\tau$  tale che, per ogni  $t \in [0, \tau]$ :

$$S[\alpha](t) < 1, \quad R[\alpha](t) < 2$$

Se a questo punto utilizziamo il lemma precedente otteniamo:

$$\int V(x) d\chi_t \leq S[\alpha](t) + R[\alpha](t) \int V(x) dv < 2 \int V dv + 1$$

Se poniamo  $\alpha(t) = \alpha = 2 \int V dv + 1$  allora abbiamo ottenuto che  $Q(\mu) = \chi \in M_{\tau, \alpha}(V)$  e quindi, per quanto osservato precedentemente,  $\chi \in N_{\tau, \alpha}$ , da cui otteniamo la tesi.  $\square$

Continuiamo col caso (ii):

**Corollario 1.25.** *Se  $\Lambda_1, \Lambda_2$  sono funzioni costanti, per ogni  $\tau_0$  esiste una funzione costante  $\alpha(t) = \alpha$  con  $t \in [0, \tau_0]$  per cui  $Q(N_{\tau_0, \alpha}) \subseteq N_{\tau_0, \alpha}$ .*

*Dimostrazione.* Le mappe  $\Lambda_1, \Lambda_2$  sono costanti e dunque non dipendono da  $\alpha$ . Da ciò segue che non dipenderanno da  $\alpha$  anche le funzioni  $S[\alpha](t) = S(t), R[\alpha](t) = R(t)$  del Lemma 1.23. Quindi :

$$\int V(x) d\chi_t \leq S[\alpha](t) + R[\alpha](t) \int V(x) dv \leq \max_{t \in [0, \tau_0]} \left( S(t) + R(t) \int V(x) dv \right) := \alpha$$

Da cui otteniamo la tesi.  $\square$

Con gli ultimi due corollari troviamo infine  $\tau, \alpha$  negli ultimi due casi del teorema 1.14 (rispettivamente (iii) e (iv)).

**Corollario 1.26.** *Sia  $\Lambda_1[\alpha] = 0, \Lambda_2[\alpha](t) = G(\alpha(t))$  con  $G$  funzione continua, positiva e strettamente monotona crescente, definita su  $[0, \infty)$ . Poniamo:*

$$T = \int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{uG(u)}, \quad u_0 = \int V(x) dv$$

*allora, per ogni  $\tau \in (0, \tau_0]$  con  $\tau < T$ , esiste una funzione  $\alpha \in C^+([0, \tau_0])$  per cui  $Q(N_{\tau, \alpha}) \subseteq N_{\tau, \alpha}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\chi = Q(\mu)$ . L'ipotesi  $\Lambda_1[\alpha] = 0$  implica che  $S[\alpha](t) = 0$ . Ma allora per il Lemma 1.23:

$$\int V d\chi_t \leq \int V dv \exp \left( \int_0^t G(\alpha(s)) ds \right)$$

Siano  $\tau \in (0, \tau_0]$ ,  $\tau < T$ ,  $\alpha$  funzione su  $[0, \tau]$  definita implicitamente dalle seguenti formule:

$$t = \int_{\alpha_0}^{\alpha(t)} \frac{du}{uG(u)}, \quad \alpha(0) = \int V(x) dv$$

Se  $\tau < \tau_0$ , poniamo  $\alpha(t) := \alpha(\tau)$  per ogni  $t > \tau$ . Allora  $\alpha$  è differenziabile con continuità, strettamente monotona crescente su  $[0, \tau]$  e continua su  $[0, \tau_0]$ . Inoltre  $\alpha' = \alpha G(\alpha)$ . Dunque, per ogni  $t \in [0, \tau]$ , abbiamo:

$$\int V dv \exp \left( \int_0^t G(\alpha(s)) ds \right) = \alpha(t) \alpha^{-1}(0) \int V dv = \alpha(t)$$

Ma allora per  $\alpha$  definita in tale maniera  $\mu \in N_{\tau, \alpha} \Rightarrow \chi \in N_{\tau, \alpha}$ . □

**Corollario 1.27.** Sia  $\Lambda_2[\alpha] = 0$ ,  $\Lambda_1[\alpha](t) = G(\alpha(t))$  con  $G$  funzione strettamente monotona crescente, continua, positiva su  $[0, \infty)$ . Poniamo:

$$T = \int_{u_0}^{+\infty} \frac{du}{G(u)}, \quad u_0 = \int V(x) dv$$

allora per ogni  $\tau \in (0, \tau_0]$ , con  $\tau < T$ , esiste una funzione  $\alpha \in C^+([0, \tau_0])$  per cui  $Q(N_{\tau, \alpha}) \subseteq N_{\tau, \alpha}$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\chi = Q(\mu)$ . L'ipotesi  $\Lambda_2[\alpha] = 0$  implica che  $S[\alpha](t) = R[\alpha](t) = 0$ . Il Lemma 1.23 ci dice che:

$$\int V d\chi_t \leq \int V dv + \int_0^t G(\alpha(s)) ds$$

Siano  $\tau \in (0, \tau_0]$ ,  $\tau < T$ ,  $\alpha$  funzione su  $[0, \tau]$  definita implicitamente dalle seguenti formule:

$$t = \int_{\alpha(0)}^{\alpha(t)} \frac{du}{G(u)}, \quad \alpha(0) = \int V(x) dv$$

Se  $\tau < \tau_0$ , poniamo  $\alpha(t) = \alpha(\tau)$  per ogni  $t > \tau$ . Allora  $\alpha$  è differenziabile con continuità, strettamente monotona crescente su  $[0, \tau]$  e continua su  $[0, \tau_0]$ . Inoltre,  $\alpha' = G(\alpha)$ . Dunque, per ogni  $t \in [0, \tau]$ , abbiamo:

$$\int V dv + \int_0^t G(\alpha(s)) ds = \alpha(t) + \int V dv - \alpha(0) = \alpha(t)$$

Ma se allora mettiamo tutto insieme otteniamo:

$$\int V d\chi_t \leq \alpha(t)$$

□

**Osservazione 1.28.** Come già anticipato in precedenza, la scelta di  $\tau, \alpha$  nei corollari precedenti è completamente determinata dalle mappe  $\Lambda_1, \Lambda_2$ . Possiamo allora alleggerire le ipotesi di partenza supponendo che (H1), (H2), (H3') valga non su tutti, ma solo su un certo insieme fissato  $M_{\tau, \alpha}$ , dipendente solo da  $\Lambda_1, \Lambda_2$ .

**Osservazione 1.29.** Questi corollari ci permettono dunque di dimostrare il Teorema 1.14 nel caso non degenere. Infatti, per ognuno dei 4 casi (i)-(iv), i corollari precedenti ci permettono di trovare degli appropriati  $\alpha, \tau$ . Il corollario 1.19 ci dice che  $N_{\tau, \alpha}$  è compatto convesso, il corollario 1.22 ci dice che la mappa  $Q : N_{\tau, \alpha} \rightarrow N_{\tau, \alpha}$  è continua. Possiamo dunque applicare il teorema di Schauder (A0.4), che ci dice che esiste un punto fisso  $\mu$  per  $Q$  in  $N_{\tau, \alpha}$ , che sarà una soluzione di (1).

## 1.4 Caso degenere "smooth"

Assumiamo che siano valide (H1), (H2). Supponiamo anche che tutti le ipotesi di (H3') siano valide eccetto  $A$  non degenere.

Ricordiamo che  $V(x) > 0$ , quindi possiamo trovare una funzione strettamente positiva  $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  tale che:

$$\rho(x)(|\Delta V(x)| + |\nabla V(x)|^2) \leq \min \{V(x), 1\}$$

Proviamo adesso ad applicare il metodo "vanishing viscosity" (vedere, per esempio, [22]): l'obiettivo sarà ricondursi al caso precedente, il caso non degenere, in cui sappiamo che il risultato è valido, e tramite l'uso di limiti dimostrare il risultato nel caso in esame.

Consideriamo dunque, per ogni  $\epsilon > 0$ , il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t = \epsilon \rho(x) \Delta \mu_t + \partial_{x_i x_j} (a^{ij}(x, t, \mu) \mu_t) - \partial_{x_i} (b^i(x, t, \mu) \mu_t) \\ \mu_0 = v \end{cases} \quad \text{con } v \text{ misura di probabilità in } \mathbb{R}^d \quad (4)$$

Proviamo che per questa classe di problemi di Cauchy nel parametro  $\epsilon$  valgono tutte le ipotesi del caso non degenere. Vediamo (H1).

Poniamo:

$$L_{\mu, \epsilon} := \epsilon \rho \Delta + L_\mu$$

Sia  $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ . Allora:

$$(L_{\mu, \epsilon} V)(x, t) = \epsilon \rho(x) \Delta V(x) + L_\mu V(x, t) \leq \epsilon_0 \min \{V(x), 1\} + \Lambda_1[\alpha](t) + \Lambda_2[\alpha](t) V(x)$$

(H1) è dunque verificata prendendo  $\hat{\Lambda}_1[\alpha](t) = \Lambda_1[\alpha](t) + \epsilon_0$  oppure, se  $\Lambda_1 = 0$ , rimpiazzando  $\Lambda_2$  con  $\hat{\Lambda}_2[\alpha](t) = \Lambda_2[\alpha](t) + \epsilon_0$ . In tal caso cambierà anche la definizione di  $T$  che abbiamo dato nei casi (iii) e (iv) del teorema, che (rispettivamente) erano:

$$T = \int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{uG(u)} \quad \text{e} \quad T = \int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{G(u)}$$

Ricordiamo che  $G$  era la funzione strettamente monotona, continua e positiva che definiva  $\Lambda_1$  (oppure  $\Lambda_2$  nel caso (iv)). Avremo dunque nuovo momento  $T_{\epsilon_0} < T$ , in cui la funzione  $G$  viene rimpiazzata dalla funzione  $G + \epsilon_0$ .

Sia ora  $\epsilon_0$  tale che  $\tau < T_{\epsilon_0} < T$ : osserviamo che posso farlo perché  $T_{\epsilon_0} \rightarrow T$  se  $\epsilon_0 \rightarrow 0$ . Allora sono soddisfatte anche le condizioni (H2), (H3'). Infatti, (H2) e le ipotesi aggiuntive di (H3') rispetto ad (H3) valgono essendo  $\rho(x)$  liscia, mentre (H3) vale poiché  $\epsilon > 0$  e  $\rho(x) > 0$  (e in particolare questo implica anche che la matrice  $A_\epsilon = A + \epsilon \rho I$  sia non degenere).

Grazie ai corollari della sezione precedente possiamo dunque trovare  $\tau$  e  $\alpha$  appropriati per ognuno dei quattro punti del Teorema 1.14. Come abbiamo osservato alla fine della sezione precedente  $\tau$  e  $\alpha$  non dipendono da  $\epsilon$ , poiché dipendono solo da  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$ . Se pongo allora  $\epsilon = 1/n < \epsilon_0$  possiamo usare il caso non degenere per l'operatore  $L_{\mu, \epsilon}$  e, per ogni  $n$ , trovare una misura  $\mu^n \in N_{\tau, \alpha}$  che sia soluzione di (4). Costruiamo in



questa maniera una successione di misure, ognuna soluzione di un differente problema di Cauchy del tipo (4).

Applicando il Lemma 1.18 possiamo trovare una sottosuccessione  $\{\mu^{n_k}\}$  che converga debolmente (e quindi V-converge per il lemma 1.20) ad una misura  $\mu \in N_{\tau,\alpha}$ . Vediamo che  $\mu$  è la soluzione di (1) cercata.

Per (H2) sappiamo che le successioni di funzioni  $a^{ij}(x, t, \mu^{n_k}), b^i(x, t, \mu^{n_k})$  convergono uniformemente su ogni palla  $U \subset \mathbb{R}^d$ . Se prendiamo  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,  $U$  palla che contiene il suo supporto, essendo  $\mu^{n_k}$  soluzione di (4):

$$\int_U \phi d\mu_t^{n_k} - \int_U \phi dv = \int_0^t \int_U [n_k^{-1} \rho \Delta \phi + L_{\mu^{n_k}} \phi] d\mu_s^{n_k} ds \quad (5)$$

Studiamo nel dettaglio i due addendi del secondo membro dell'uguaglianza precedente. Usando la convergenza uniforme dei coefficienti e la convergenza debole delle  $\{\mu_s^{n_k}\}$  per ogni  $s \in [0, t]$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_U L_{\mu^{n_k}} \phi d\mu_s^{n_k} = \int_U L_\mu \phi d\mu_s \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \int_U L_{\mu^{n_k}} \phi d\mu_s^{n_k} = \int_0^t \int_U L_\mu \phi d\mu_s$$

dove l'ultima implicazione segue dal teorema della convergenza dominata di Lebesgue, essendo  $|L_{\mu^{n_k}} \phi| \leq \Lambda(\tau, \alpha, \phi)$ . Inoltre ovviamente:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \int_U n_k^{-1} \rho \Delta \phi d\mu_s ds = 0$$

Da cui, mandando  $k \rightarrow \infty$  in (5), troviamo che  $\mu$  è soluzione di (1):

$$\int_U \phi d\mu_t - \int_U \phi dv = \int_0^t \int_U L_\mu \phi d\mu_s ds$$

## 1.5 Caso generale

Supponiamo (H1), (H2), (H3) soddisfatte. Iniziamo con un caso particolare.

Supponiamo che esista  $R > 0$  tale che  $A(x, t, \sigma) = 0$  per ogni  $x$  per cui  $|x| > R$ . Come conseguenza delle ipotesi (H2), per ogni  $\tau \in (0, \tau_0]$ , per ogni  $\alpha \in C^+([0, \tau_0])$  esiste un numero  $C(\alpha, \tau) > 0$  per cui  $|a^{ij}(x, t, \sigma)| \leq C(\alpha, \tau)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $t \in [0, \tau]$ ,  $\sigma \in M_{\tau, \alpha}$ . Inoltre, le mappe  $x \rightarrow a^{ij}(x, t, \sigma)$  sono continue su  $\mathbb{R}^d$  uniformemente in  $\sigma \in M_{\tau, \alpha}$ ,  $t \in [0, \tau]$ .

Sia  $w \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ , con  $\|w\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 1$  e tale che  $w \geq 0$  e  $w(x) = 0$  se  $|x| > 1$ . Dato  $0 < \delta < 1$ , sia  $w_\delta(x) = \delta^{-d}w(x/\delta)$ . Tramite la "mollificazione" dei coefficienti possiamo dunque ottenere la matrice "mollificata"  $A_\delta$ , i cui coefficienti saranno appunto:

$$a_\delta^{ij}(x, t, \sigma) = a^{ij} * w_\delta = \int a^{ij}(y, t, \sigma) w_\delta(x - y) dy$$

Ricordiamo (vedi Appendice A0.41) che il supporto della convoluzione di due funzioni è contenuto nella somma dei supporti: da ciò segue che per ogni  $\delta$  come sopra avremo che  $A_\delta(x, t, \sigma) = 0$  se  $|x| > R + 1$ . Inoltre, essendo le  $a^{ij}$  continue con supporto contenuto in un compatto, avremo che  $a_\delta^{ij}$  sono funzioni lisce e convergono uniformemente  $a_\delta^{ij} \rightarrow a^{ij}$  per  $\delta \rightarrow 0$ . Ma allora per ogni  $\sigma$  avremo che  $A_\delta(x, t, \sigma)$  è Lipschitziana uniformemente in  $t$  e vale (H2).

Dall'uniforme continuità (in  $\sigma$  e  $t$ ) della mappa  $x \rightarrow A(x, t, \sigma)$  segue inoltre che per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $\delta \in (0, 1)$  per cui per ogni  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $t \in [0, \tau]$ ,  $\sigma \in M_{\tau, \alpha}$ :

$$|A(x, t, \sigma) - A_\delta(x, t, \sigma)| \leq \left| \int A(x, t, \sigma) w_\delta(x - y) dy - \int A(y, t, \sigma) w_\delta(x - y) dy \right| \leq \int |A(x, t, \sigma) - A(x + y, t, \sigma)| w_\delta(y) dy < \epsilon$$

Per ogni  $\tau, \alpha$  riusciamo quindi a trovare una successione  $\delta_n > 0$  per cui, per ogni  $\sigma \in M_{\tau, \alpha}$ , valga la seguente stima:

$$\max_{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, \tau]} |A(x, t, \sigma) - A_n(x, t, \sigma)| < 1/n, \quad \text{con } A_n := A_{\delta_n}$$

Consideriamo adesso l'operatore:

$$L_{n, \mu} u := a_n^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + b^i \partial_{x_i} u$$

Sia ora  $\epsilon_0 > 0$ . Come nella precedente sezione, poniamo  $\hat{\Lambda}_2[\alpha] = \Lambda_2[\alpha]$  e rimpiazziamo la funzione  $\Lambda_1$  con  $\hat{\Lambda}_1[\alpha](t) = \Lambda_1[\alpha](t) + \epsilon_0$  (o, nel caso  $\Lambda_1 = 0$ , poniamo  $\hat{\Lambda}_2[\alpha] = \Lambda_2[\alpha] + \epsilon_0$ ). Ancora come nella sezione precedente avremo una nuova funzione  $G + \epsilon_0$  al posto di  $G$  ed un nuovo momento  $T_{\epsilon_0} < T$  tale che  $T_{\epsilon_0} \rightarrow T$  se  $\epsilon_0 \rightarrow 0$ , per cui possiamo scegliere un  $\epsilon_0$  tale che  $\tau < T_{\epsilon_0} < T$  e usare i corollari del caso non degenerare per trovare degli appropriati  $\alpha$  e  $\tau$ .

Vediamo adesso che sono valide le ipotesi (H1), (H2), (H3') per questo specifico insieme  $M_{\tau, \alpha}$ .

Ricordiamo che le  $a_n^{ij}$  convergono uniformemente ad  $a^{ij}$  e che i supporti di entrambi sono inclusi in un compatto. Esiste allora  $N$  tale che, per ogni  $n > N$  e ogni  $\mu \in M_{\tau, \alpha}$ :

$$|L_{n,\mu}V(x,t) - L_\mu V(x,t)| = |(a_n^{ij}(x,t) - a^{ij}(x,t))\partial_{x_i}\partial_{x_j}V(x)| \leq \epsilon_0 \min\{V(x), 1\}$$

Sappiamo che  $L_\mu$  soddisfa (H1). Siano  $\mu \in M_{\tau,\alpha}$ ,  $n > N$ . Allora:

$$L_{n,\mu}V = L_\mu V + (L_{n,\mu}V - L_\mu V) \leq \Lambda_1 + \Lambda_2 V + \epsilon_0 \min\{V, 1\} \leq \hat{\Lambda}_1 + \hat{\Lambda}_2 V$$

Ma allora, per  $n > N$ ,  $L_{n,\mu}$  soddisfa (H1) su  $M_{\tau,\alpha}$ . (H2), (H3') seguono invece dal fatto che  $A_n = 0$  se  $|x| > R+1 \Rightarrow |\sqrt{A_n}\Delta V| \leq C_1 + C_2 V$ , con  $C_1, C_2$  costanti. Inoltre,  $\tau$  e  $\alpha$  sono tali che  $Q(N_{\tau,\alpha}) \subseteq N_{\tau,\alpha}$ . Per ogni  $n > N$  esiste allora una soluzione  $\mu^n \in N_{\tau,\alpha}$  del problema di Cauchy con l'operatore  $L_{n,\mu}$ . Utilizzando il Lemma 1.18 e il Lemma 1.20 troviamo una sottosuccessione  $\{\mu^{n_k}\}$  che converge debolmente, e quindi V-converge, ad una misura  $\mu \in N_{\tau,\alpha}$ . Come nella sezione precedente vogliamo vedere che questa misura è la soluzione cercata di (1).

Sia  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Osserviamo che:

$$\int_0^t \int L_{n_k, \mu^{n_k}} \phi \, d\mu_s^{n_k} \, ds = \int_0^t \int (L_{n_k, \mu^{n_k}} \phi - L_{\mu^{n_k}} \phi) \, d\mu_s^{n_k} \, ds + \int_0^t \int L_{\mu^{n_k}} \phi \, d\mu_s^{n_k} \, ds$$

Analizziamo i due addendi del secondo membro dell'uguaglianza. Possiamo stimare il primo addendo con:

$$\left| \int_0^t \int (L_{n_k, \mu^{n_k}} \phi - L_{\mu^{n_k}} \phi) \, d\mu_s^{n_k} \, ds \right| \leq n_k^{-1} t \max_x |\partial_{x_i}\partial_{x_j}\phi(x)|$$

e quindi il primo addendo tende a 0 se  $k \rightarrow \infty$ . Per il secondo addendo, ripetendo la dimostrazione della sezione precedente, otteniamo:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \int L_{\mu^{n_k}} \phi \, d\mu_s^{n_k} \, ds = \int_0^t \int L_\mu \phi \, d\mu_s \, ds$$

Ma allora mettendo insieme le due cose abbiamo dimostrato che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \int L_{n_k, \mu^{n_k}} \phi \, d\mu_s^{n_k} \, ds = \int_0^t \int L_\mu \phi \, d\mu_s \, ds$$

Ma sappiamo anche che  $\mu^{n_k}$  è soluzione del problema di Cauchy per  $L_{n_k, \mu^{n_k}}$ , ovvero:

$$\int \phi \, \mu_t^{n_k} - \int \phi \, dv = \int_0^t \int L_{n_k, \mu^{n_k}} \phi \, d\mu_s^{n_k} \, ds$$

Da cui mandando  $k \rightarrow \infty$  troviamo che  $\mu$  è la soluzione cercata di (1).

Possiamo utilizzare questo caso speciale per ricondurci al caso generale.

Prendiamo una funzione  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,  $0 \leq \psi \leq 1$ ,  $\psi(x) = 1$  se  $|x| < 1$  e  $\psi(x) = 0$  se  $|x| > 2$ . Poniamo  $\psi_n(x) = \psi(x/n)$  e  $L_{n,\mu} := \psi_n L_\mu$ :  $\psi_n$  sarà supportata in  $|x| \leq 2n$  e la matrice  $A_n$  di  $L_{n,\mu}$  soddisfa la condizione del caso speciale, ovvero  $A_n(x, t, \sigma) = 0$  per  $|x| > n$  e ovviamente continua a soddisfare (H2) (essendo  $\psi$  liscia) e (H3) (essendo  $\psi$  non negativa). Anche (H1) è soddisfatta, poiché  $0 \leq \psi \leq 1$ :

$$L_{n,\mu}V = \psi_n L_\mu V \leq \psi_n \Lambda_1 + \psi_n \Lambda_2 V \leq \Lambda_1 + \Lambda_2 V$$

Per il risultato ottenuto nel caso speciale, possiamo trovare una soluzione  $\mu^n$  per il problema di Cauchy per l'operatore  $L_{n,\mu}$ , con  $\mu^n \in N_{\tau,\alpha}$  e  $\tau, \alpha$  determinati dai corollari visti durante la dimostrazione per il caso non degenero. Ancora una volta, essendo  $\tau$  e  $\alpha$  univocamente determinati dalle mappe  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$ , possiamo considerare la successione di soluzioni  $\{\mu^n\}$  ed assumere che esse appartengano tutte al medesimo insieme  $N_{\tau,\alpha}$ . Possiamo dunque sfruttare il Lemma 1.18 e il Lemma 1.20 per trovare una sottosuccessione  $\{\mu^{n_k}\}$  che converga debolmente e, quindi, V-converga. Mandando  $k \rightarrow \infty$  e utilizzando lo stesso argomento della sezione precedente (posso farlo perché  $L_{n,\mu}\phi(x) = L_\mu\phi(x)$  se  $|x| < n$ ) dimostriamo infine il teorema 1.14.  $\square$

Nel teorema principale di questo capitolo, abbiamo visto condizioni sufficienti per l'esistenza di soluzioni locali e globali. Il punto (iii) del teorema (e similmente il punto (iv)), nel caso in cui le funzioni dell'ipotesi (H1) siano  $\Lambda_1[\alpha] = 0$  e  $\Lambda_2[\alpha](t) = G(\alpha(t))$  con  $G$  strettamente monotona crescente, continua e positiva, ci assicura l'esistenza di una soluzione per ogni  $\tau$  tale che:

$$\tau < \int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{uG(u)}$$

In effetti, è possibile dimostrare che sotto certe ipotesi questa stima è la più fine possibile.

**Teorema 1.30.** *Sia  $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $V \geq 0$ ,  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$ . Sia  $G$  una funzione continua, positiva, monotona crescente su  $[0, +\infty)$ . Supponiamo inoltre che esistano due costanti  $C_1, C_2$  per cui  $|\sqrt{A(x,t,\mu)}\nabla V(x)|^2 \leq C_1 + C_2V(x)$ . Supponiamo che i coefficienti dell'operatore differenziale  $a^{ij}, b^i$  siano definiti su ogni  $M_{\tau,\alpha}(V)$  e che, per ogni  $\mu \in M_{\tau,\alpha}(V)$  ed ogni  $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0, \tau]$ , valga una delle due seguenti condizioni:*

$$(i) \quad L_\mu V(x,t) \geq G\left(\int V(x)d\mu_t\right)V(x)$$

$$(ii) \quad L_\mu V(x,t) \geq G\left(\int V(x)d\mu_t\right)$$

Supponiamo infine che  $u_0 = \int_{\mathbb{R}^d} V dv > 0$  e che, nel caso in cui valga la condizione (i):

$$T = \int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{uG(u)} < +\infty,$$

oppure, nel caso in cui valga (ii):

$$T = \int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{G(u)} < +\infty,$$

Allora il problema di Cauchy (1) non ammette soluzione di probabilità  $\mu = (\mu_t)_{t \in [0, \tau]}$  su  $[0, \tau]$  per  $\tau \geq T$  e

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{R}^d} V(x) d\mu_t < \infty$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo il risultato nel caso in cui valga l'ipotesi (i), poiché con un argomento simile è possibile dimostrare il caso (ii).

Se  $\mu = (\mu_t)_{t \in [0, \tau]}$  è una soluzione del problema di Cauchy (1) allora, per ogni  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ :

$$\int \phi d\mu_t - \int \phi dv = \int_0^t \int L_\mu \phi d\mu_s ds$$

Sia  $\xi_m \in C^\infty[0, \infty)$  tale che  $0 \leq \xi'_m(x) \leq 1$ ,  $\xi''_m \leq 0$ ,  $\xi_m(x) = x$  se  $x \leq m-1$  e  $\xi_m(x) = m$  per  $x > m$ . Se poniamo  $\phi(x) = \xi_m(V(x)) - m$ , allora tale funzione sarà  $\in C_0^\infty[0, +\infty)$  ed inoltre vale che:

$$L_\mu \xi_m(V) = L_\mu \phi = \xi'_m(V) L_\mu V + \xi''_m(V) (A \nabla V, \nabla V)$$

Ma allora:

$$\begin{aligned} \int \xi(V(x)) d\mu_t &= \int \xi_m(V(x)) dv + \int_0^t \int \xi'_m(V(x)) L_\mu V(x, t) d\mu_s ds + \\ &\int_0^t \int \xi''_m(V(x)) |\sqrt{A} \nabla V|^2 d\mu_s ds \geq \int \xi_m(V(x)) dv + \\ &\int_0^t \int \xi'_m(V) V G \left( \int V d\mu_s \right) d\mu_s ds - \int_0^t \int_{|V| \geq m} |\xi''_m(V)| (C_1 + C_2 V) d\mu_s ds \end{aligned}$$

Passando al limite per  $m \rightarrow \infty$ , essendo  $V \in L^1(\mu)$ :

$$\int V d\mu_t \geq \int V dv + \int_0^t G \left( \int V d\mu_s \right) \int V d\mu_s ds$$

Poniamo ora:

$$H(u) = G(u)u, \quad g(t) := \int V dv + \int_0^t H \left( \int V d\mu_s \right) ds$$

Allora possiamo riscrivere la disuguaglianza precedente come  $H^{-1}(g'(t)) \geq g(t) \Rightarrow g'(t) \geq H(g(t))$ . Dividendo per  $H$  ed integrando su  $[0, t]$  si ottiene dunque la seguente disuguaglianza per ogni  $t$ :

$$t \leq \int_{g(0)}^{g(t)} \frac{du}{uG(u)} \leq \int_{g(0)}^{+\infty} \frac{du}{uG(u)} = T$$

Essendo adesso  $g(0) = \int V(x) dv$ , se  $\tau \geq T$  allora per  $t = T$  avremmo  $g(t) = +\infty$ , il che è assurdo perché  $\sup_{t \in [0, \tau]} \int V(x) d\mu_t < \infty$   $\square$

## 1.6 Esempi

**Esempio 1.31.** Sia  $m > 0$ . Sia  $v$  misura di probabilità su  $\mathbb{R}^d$  tale che  $|x|^{m+1} \in L^1(v)$  e, nel caso in cui  $m < 1$ , allora  $|x|^2 \in L^1(v)$ . Consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$\partial_t \mu_t = \operatorname{div} \left( \mu_t \int |x - y|^{m-1} (x - y) d\mu_t \right), \quad \mu_0 = v$$

Allora esiste  $\tau > 0$  per cui il problema di Cauchy precedente ha soluzione in  $[0, \tau]$ . In particolare se  $0 < m < 1$  allora esiste una soluzione per ogni  $\tau > 0$ . Inoltre:

$$\sup_{t \in [0, \tau]} \int |x|^{m+1} d\mu_t < \infty$$

*Dimostrazione.* Iniziamo vedendo che le ipotesi del teorema siano verificate. Ovviamente  $a^{ij} = 0$ , mentre:

$$b(x, t, \mu) = - \int |x - y|^{m-1} (x - y) d\mu_t = -K(x, t) d\mu_t$$

dove abbiamo posto  $K(x, y) := -|x - y|^{m-1} (x - y)$ . Se  $m \geq 1$ ,  $V(x) = 1 + |x|^{m+1}$ , allora la funzione  $K(x, y)$  è continua su  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  per  $m > 0$ . Se poniamo  $\gamma = 1/(m+1)$  inoltre abbiamo il seguente bound  $|K(x, y)| \leq 2^m |x|^m + 2^m V^{1-\gamma}(y)$ . Osserviamo adesso che siamo proprio nelle ipotesi dell'esempio 1.12: per quanto visto dunque (H2) è verificata. Ovviamente anche (H3) è verificata, per cui ci resta verificare (H1).

$$L_\mu V(x, t) = (b(x, t, \mu), V(x)) = -(m+1) |x|^{m-1} \int |x - y|^{m-1} (x - y, x) d\mu_t$$

Ma:

$$\begin{aligned} - \int |x - y|^{m-1} (x - y, x) d\mu_t &= - \int |x - y|^{m+1} d\mu_t - \int |x - y|^{m-1} (x - y, y) d\mu_t \leq \\ &- \int |x - y|^{m+1} d\mu_t + \int |x - y|^m |y| d\mu_t \end{aligned}$$

Dove l'ultima disuguaglianza segue dalla disuguaglianza di Young (A0.9):

$$|x - y|^m |y| \leq \frac{m}{m+1} |x - y|^{m+1} + \frac{1}{m+1} |y|^{m+1}$$

Ma allora:

$$(b(x, t, \mu), V(x)) \leq |x|^{m-1} \int |y|^{m+1} d\mu_t$$

Per cui dalla disuguaglianza di Young segue che:

$$L_\mu V(x, t) \leq \frac{m-1}{m+1} V(x) + \frac{2}{m+1} \alpha^{(m+1)/2}(t)$$

Da cui (H1) è soddisfatta e possiamo applicare la (i) del teorema 1.14.

Nel caso  $0 < m < 1$  basta prendere  $V(x) = 1 + |x|^2$  e, ripetendo il ragionamento precedente, trovare la stima:

$$(L_\mu V)(x, t) \leq 2\alpha^{(m+1)/2}(t)$$

Da ciò segue che  $\Lambda_2[\alpha] = 0$ ,  $\Lambda_1[\alpha] = 2\alpha^{(m+1)/2}(t)$  ed, essendo  $(m+1)/2 < 1$ :

$$\int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{u^{(m+1)/2}}/2 = \infty, \quad u_0 = \int (1 + |x|^2)dv$$

Da cui possiamo applicare la (iv) del teorema 1.14 e trovare una soluzione globale.  $\square$

**Esempio 1.32.** Sia  $K \in C^2([0, \infty])$ ,  $K(0) = 0$ ,  $K'(0) = 0$ ,  $K'(u) > 0$ ,  $K''(u) > 0$  per  $u > 0$ . Supponiamo inoltre che esistano due costanti  $C_1 > 0$ ,  $C_2 > 0$  tali che, per ogni  $u, v > 0$ :

$$K'(u+v) \leq C_1 K(u) + C_2 K(v)$$

Supponiamo inoltre che per un certo  $m > 1$  valga che  $K^m(|x|) \in L^1(v)$ . Se poniamo  $W(x) = K(|x|)$ , allora esiste  $\tau > 0$  per cui il seguente problema di Cauchy ammette una soluzione di probabilità  $\mu = (\mu_t)_{t \in [0, \tau]}$  su  $[0, \tau]$ :

$$\partial_t \mu_t = \operatorname{div} \left( \mu_t \int \nabla W(x-y) d\mu_t \right), \quad \mu_0 = v$$

Inoltre vale che:

$$\sup_{t \in [0, \tau]} \int K^m(|x|) d\mu_t < \infty$$

*Dimostrazione.* Avremo che  $a^{ij} = 0$ , mentre

$$b(x, t, \mu) = - \int \frac{K'(|x-y|)(x-y)}{|x-y|} d\mu_t$$

Verifichiamo la validità di (H2). Sia  $V(x) = K^m(|x|) + 1$ . Osserviamo che, se pongo  $\gamma = (m-1)/m$ :

$$K'(|x-y|) \leq C_1 K(|x|) + C_2 K(|y|) \leq C_1 K(|x|) + C_2 V^{1-\gamma}(y)$$

Ci resta allora da verificare (H1) (poiché (H3) vale banalmente):

$$\begin{aligned} (b(x, t, \mu), x) &= - \int \frac{K'(|x-y|)(x-y, x)}{|x-y|} d\mu_t \leq \\ &- \int K'(|x-y|)|x-y| d\mu_t + \int K'(|x-y|)|y| d\mu_t \end{aligned}$$

Ricordiamo la seguente disuguaglianza di Young, dati  $c, d > 0$ :

$$cd \leq \int_0^c (K')^{-1}(s) ds + \int_0^d f(t) dt$$

Ricordando che  $K'$  è invertibile poiché  $K'' > 0$ . Osserviamo inoltre che vale anche la seguente disuguaglianza:

$$\int_0^{K'(|x-y|)} (K')^{-1}(u) du \leq |x-y| K'(|x-y|)$$

Applicando la prima disuguaglianza a  $K'(|x-y|)|y|$  e utilizzando la seconda disuguaglianza otteniamo infine che:

$$(b(x, t, \mu)) \leq \int \left( \int_0^{|y|} K'(u) du \right) d\mu_t$$

Inoltre osserviamo che  $\nabla V(x) = mK^{m-1}(|x|)K'(|x|)\frac{x}{|x|}$ . Allora esisteranno delle costanti  $c_1, c_2 > 0$  per cui:

$$L_\mu V(x, t) \leq (c_1 + c_2 V(x)) \left( \int V(y) d\mu_t \right)^{1/m} = (c_1 + c_2 V(x)) \alpha^{1/m}(t)$$

Ma allora vale (H1) e quindi possiamo usare la (i) del teorema.  $\square$

Vediamo infine un esempio in cui le  $a^{ij}$  non siano identicamente nulle.

**Esempio 1.33.** Sia  $\tau_0 > 0$ . Sia  $b(x, t)$  campo vettoriale continuo su  $\mathbb{R}^d \times [0, \tau_0]$ . Siano  $F$  una funzione continua non negativa su  $\mathbb{R}^d$ ,  $G$  una funzione continua, positiva, strettamente monotona crescente su  $[0, +\infty)$ , con  $G(0) > 1$ . Poniamo:

$$b(x, t, \mu) = b(x, t) G \left( \int F(y) d\mu_t \right)$$

Consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$\partial_t \mu_t = \Delta \mu_t + \operatorname{div} (\mu_t b(x, t, \mu)), \quad \mu_0 = \nu$$

**Proposizione 1.34.** *Supponiamo che esista una funzione  $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$  tale che  $V \geq 1$ ,  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$  e  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{V(x)} = 0$ . Supponiamo inoltre che per ogni  $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, \tau_0]$  esistano due costanti  $C_1, C_2$  per cui:*

$$|\Delta V(x)| + (b(x, t), \nabla V(x)) \leq C_1 + C_2 V(x)$$

*Sia  $V \in L^1(\nu)$ . Allora esiste  $\tau \in [0, \tau_0]$  per cui, su  $[0, \tau]$ , il problema di Cauchy precedente ammetta soluzione di probabilità  $\mu = (\mu_t)_{t \in [0, \tau]}$ . Inoltre:*

$$\sup_{t \in [0, \tau]} \int V(x) d\mu_t < \infty$$

*In particolare, avremo una soluzione globale sull'intervallo  $[0, \tau_0]$  se:*

$$\int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{uG(u)} = +\infty, \quad u_0 = \int V d\nu$$

*Dimostrazione.* Sia  $\mu \in M_{\tau, \alpha}$ . La dimostrazione segue immediatamente dal teorema una volta osservato che:

$$\begin{aligned} L_\mu V(x, t) &= \Delta V + (b(x, t), \nabla V(x)) G(\alpha(t)) = \\ & \Delta V + (b(x, t), \nabla V(x)) + (b(x, t), \nabla V(x)) (G(\alpha(t)) - 1) \leq (C_1 + C_2 V) G(\alpha(t)) \end{aligned}$$

$\square$



## 2 Modelli di Mercato

Come già anticipato nel capitolo precedente, la classe di PDEs non lineari studiata, e più in generale diverse classi di PDEs, trovano applicazioni in diversi settori, tra cui l'ambito della finanza matematica. Da qui in avanti vogliamo approfondire l'applicazione dello studio delle equazioni non lineari di KFP al problema del pricing dei derivati di strumenti finanziari.

Un *derivato* è un contratto finanziario il cui valore dipende da un asset sottostante, quali ad esempio un'azione, un tasso d'interesse, un tasso di cambio fra valute.

Un tipo molto diffuso di derivato finanziario è quello delle *opzioni*. Un'opzione è un contratto fra due parti, in cui chi compra, pagando un premio, si assicura il diritto di esercitare l'opzione stessa in un certo momento futuro.

Due tipi molto importanti di opzioni sono le *opzioni put* e le *opzioni call* europee. Le opzioni put garantiscono a chi le possiede (e quindi a chi le compra da un'altra controparte) il diritto di vendere una certa quantità dell'asset sottostante in un istante futuro  $T$  predeterminato (detto *Maturity*) ad un prezzo determinato (detto *Strike*). Viceversa, le opzioni call garantiscono a chi le possiede il diritto di comprare (una certa quantità dell'asset sottostante) ad un prezzo fissato, in un istante futuro fissato. Questi due tipi di opzioni sono anche noti come *plain vanilla* per la loro semplicità.

Banalmente, il *Payoff* di una call europea con strike  $K$  e maturity  $T$  sarà:

$$(S_T - K)^+ := \max(S_T - K, 0)$$

Al contrario, il payoff di una put sarà il seguente:

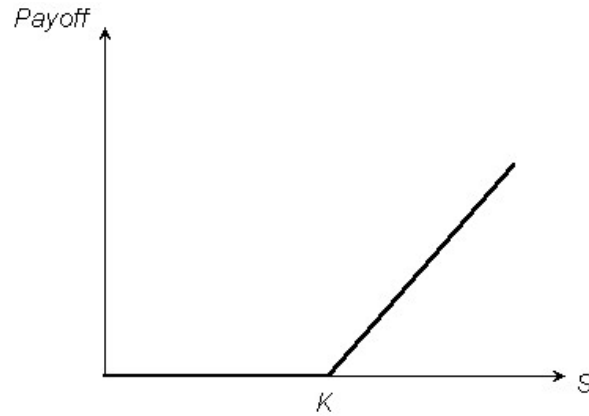
$$(K - S_T)^+ := \max(K - S_T, 0)$$

Data un'opzione call con strike  $K$ , dato il valore attuale del sottostante  $S_t$  diremo che l'opzione è:

- In The Money (ITM) se  $S_t > K$ ;
- AT The Money (ATM) se  $S_t \approx K$ ;
- Out the money (OTM) se  $S_t < K$ .

Chiaramente, nel caso di una put la terminologia sarà speculare. Ovviamente, al tempo  $t_0$  in cui viene stipulato il contratto non può essere noto il valore che l'opzione avrà a scadenza  $T$ : dunque il valore finale del contratto non può dunque essere noto nel momento in cui viene stipulato. Da ciò nasce il problema non banale di determinare un prezzo equo (anche detto *fair price*) per l'opzione, ovvero il *premio* che il compratore dell'opzione paga al tempo  $t_0$ .

Un altro problema che sorge in maniera naturale è quello della copertura (o *hedging*): ad esempio, disegnando un semplice grafico del payoff di un'opzione call (vedi figura sottostante) è evidente che essa possa garantire al suo compratore un guadagno potenzialmente illimitato e, specularmente, il venditore di un'opzione call potrà affrontare, potenzialmente, una perdita illimitata. Da ciò segue il problema di trovare una strategia di copertura, ovvero una strategia di investimento che, usando il premio



**Figura 2.1:** Payoff di un'opzione Call con strike  $K$

ricevuto vendendo il derivato, possa replicare il payoff a scadenza, qualunque sia il valore terminale del sottostante.

Nel corso di questo capitolo, dopo una revisione generale sulla teoria delle equazioni differenziali stocastiche, vedremo diversi modelli proposti in letteratura per la modellazione dei mercati. Inizieremo con il più classico dei modelli, quello di Black-Scholes. Tuttavia, il modello di Black-Scholes ha diversi limiti, come vedremo più nel dettaglio più avanti, fra i quali spicca l'assunzione che la volatilità del prezzo di un asset rischioso sia costante.

Per correggere le sistematiche differenze fra i prezzi del mercato e i prezzi teorici del modello di Black-Scholes, differenti approcci per la modellazione della volatilità sono stati introdotti. Fra queste classi di modelli proposte, ne vedremo tre: i modelli a volatilità locale (LV Models), i modelli a volatilità stocastica (SV Models) ed infine i modelli a volatilità stocastica locale (SLV Models). In particolare, quest'ultima classe di modelli è stata introdotta in letteratura al fine di combinare le migliori caratteristiche dei modelli LV e SV, minimizzandone allo stesso tempo i difetti ([23]). Vedremo infine uno specifico modello appartenente alla classe SLV, proposto in [2] per il pricing delle opzioni a barriera nel mercato FX. Questo modello risulterà collegato, in un certo senso che vedremo in seguito, alla PDE nonlineari di Kolmogorov-Fokker-Planck studiate nel capitolo precedente.

## 2.1 Risultati preliminari di Calcolo Stocastico

In questa sezione rivedremo brevemente la teoria fondamentale delle equazioni differenziali stocastiche (SDE). Per una trattazione completa e dettagliata dei concetti e dei risultati, e le relative dimostrazioni, si rimanda il lettore a [24], [25], [26].

Siano  $T \in \mathbb{R}$  ed  $N, d \in \mathbb{N}$ . Un'equazione differenziale stocastica (SDE) è un'espressione della forma

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

dove  $W$  è un moto Browniano  $d$ -dimensionale su uno spazio di probabilità con filtrazione  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$  in cui valgano le ipotesi usuali e dove  $b, \sigma$  sono funzioni misurabili:

$$b = b(t, c) : [0, T] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \sigma = \sigma(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N \times d}$$

dette, rispettivamente, **coefficiente di drift** e **coefficiente di diffusione**.

**Definizione 2.1.** Sia  $Z \in \mathbb{R}^N$ . Un processo  $(X_t)_{t \in [0, T]}$  continuo ed  $\mathcal{F}_t$ -adattato è una soluzione rispetto a  $W$  della SDE di sopra con condizione iniziale  $Z$  se:

- $b(t, X_t) \in \mathbb{L}_{loc}^1$  e  $\sigma(t, X_t) \in \mathbb{L}_{loc}^2$ ;
- $X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, \quad t \in [0, T]$ ;

**Definizione 2.2.** Più in generale, diremo che l'equazione stocastica con coefficienti  $\sigma, b, Z$  è **risolvibile in senso debole** se esiste un moto Browniano e uno spazio di probabilità con filtrazione in cui valgano le ipotesi usuali rispetto ai quali l'SDE ammette soluzione.

Se l'equazione stocastica con coefficienti  $\sigma, b, Z$  ammette soluzione rispetto ad ogni moto Browniano e spazio di probabilità con filtrazione (che rispetti le ipotesi usuali) diremo invece che è **risolvibile in senso forte**.

**Osservazione 2.3.** In realtà, è possibile estendere le definizioni precedenti assegnando un dato iniziale  $Z$  non deterministico, ma che sia una variabile aleatoria  $\mathcal{F}_0$ -misurabile.

Sulla base della definizione precedenti, una soluzione forte è costruita su un dato spazio probabilità e su un dato moto Browniano  $W$ , mentre nel caso di una soluzione debole lo spazio di probabilità e il Browniano  $W$  sono parte della soluzione e non del problema da risolvere.

Avendo definito due tipi differenti di soluzione, anche per il concetto di unicità della soluzione risulta naturale introdurne due tipi:

**Definizione 2.4.** Data una SDE con coefficienti  $Z, b, \sigma$ , diremo che la soluzione è **unica in senso debole** se due soluzioni sono uguali in legge.

Diciamo invece che la soluzione è **unica in senso forte** se due soluzioni definite sullo stesso spazio di probabilità sono indistinguibili.

**Osservazione 2.5.** Ricordiamo che due processi stocastici  $X_t, Y_t$ , con  $t \in I$ , definiti su  $\Omega$  sono **uguali in legge** se hanno la stessa distribuzione (o, equivalentemente, le stesse distribuzioni finite dimensionali). Ciò dunque significa che potrebbero anche essere definiti su spazi di probabilità differenti.

Invece, due processi stocastici  $X_t, Y_t$ , con  $t \in I$ , definiti su  $\Omega$  sono **indistinguibili** se è quasi certo l'insieme

$$(X = Y) := \{w \in \Omega \mid X_t(w) = Y_t(w) \text{ per ogni } t \in I\}$$

Esistono vari risultati sull'unicità e l'esistenza della soluzione, sia in senso debole che in senso forte.

**Teorema 2.6.** Siano  $b, \sigma$  Lipschitz-continue e a crescita al più lineare in  $x$ , uniformemente in  $t$  su  $[0, T]$ , ovvero (rispettivamente) esistono due costanti positive  $c_1, c_2$  per cui, per ogni  $t \in [0, T]$  e  $x, y \in \mathbb{R}^N$ :

$$\begin{aligned} |b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| &\leq c_1|x - y| \\ |b(t, x)| + |\sigma(t, x)| &\leq c_2(1 + |x|) \end{aligned}$$

Allora esiste una soluzione in senso forte per la SDE con coefficienti  $b, \sigma$  e dato iniziale  $Z \in m\mathcal{F}_0$ .

**Teorema 2.7.** *Nelle ipotesi in cui  $b, \sigma$  siano localmente Lipschitziane in  $x$  uniformemente in  $t$ , ovvero se per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esiste una costante  $k_n$  tale che, per ogni  $t \in [0, T]$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^N$  con  $|x|, |y| \leq n$ :*

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq k_n|x - y|$$

Allora la soluzione dell' SDE con coefficienti  $b, \sigma$  e condizione iniziale  $Z \in m\mathcal{F}_0$ , se esiste, è unica in senso forte.

In certi casi il coefficiente di diffusione di un processo non soddisfa la condizione di Lipschitz. In letteratura sono comunque presenti dei risultati piuttosto generali, come il seguente (si veda [27] per una trattazione completa), che ci garantisce unicità ed esistenza anche in condizione più deboli.

**Teorema 2.8.** *Supponiamo che  $b$  sia Lipschitz-continua. Supponiamo che esista una funzione  $\rho(u)$ ,  $u \in (0, \infty)$  per cui  $\int_0^\epsilon \rho^{-2}(u)du = \infty$  per un certo  $\epsilon > 0$  e che:*

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq \rho(|x - y|)$$

Allora esiste un'unica soluzione forte  $X_t$  per la SDE con coefficienti  $b, \sigma$  e condizione iniziale  $Z \in m\mathcal{F}_0$

Il seguente risultato, dimostrato da Yamada e Watanabe (1971), vale invece nel caso in cui i coefficienti  $b, \sigma$  non dipendano dal tempo  $t$ .

**Teorema 2.9.** *Supponiamo che  $b(x)$  soddisfi la condizione di Lipschitz e  $\sigma(x)$  sia  $\alpha$ -Holderiana con  $\alpha \geq 1/2$ , ovvero valga:*

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

per una certa costante  $C$ . Allora, se esiste una soluzione forte, essa è anche unica.

**Proposizione 2.10.** *Una soluzione  $X_t$  della SDE con coefficienti  $Z \in m\mathcal{F}_0$  e  $b, \sigma$  che verificano le ipotesi di crescita lineare e Lipschitzianità locale verifica la **proprietà di Markov**, ovvero  $X$  è un processo di Markov con legge di transizione  $p = p(t, x, s, \cdot)$ : per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq t \leq s \leq T$ ,  $p = p(t, x, s, \cdot)$  sarà dunque la legge del processo  $X_s^{t,x}$ , ovvero la soluzione della SDE con condizione iniziale  $x$  al tempo  $t$  e calcolata al tempo  $s$ .*

Data una SDE, possiamo costruire un'altra SDE che ci da una soluzione debole della prima SDE tramite il seguente teorema dovuto a Gyongy ([28]):

**Teorema 2.11** (Mimicking Theorem). *Supponiamo che  $b(X_t, t), \sigma(X_t, t)$  siano processi limitati adattati per cui  $\sigma\sigma^*$  sia uniformemente positiva definita. Allora esiste una SDE  $Y_t$*

$$dY_t = \alpha(Y_t, t)dt + \beta(Y_t, t)dW_t$$

con

$$\begin{aligned}\alpha(x, t) &= E[b|X_t = x] \\ \beta(x, t) &= (E[\sigma\sigma^*|X_t = x])^{1/2}\end{aligned}$$

che ammette una soluzione debole avente la stesse distribuzioni finito dimensionali di  $X_t$ , per ogni  $t$ .

Consideriamo adesso  $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^d) \in \mathbb{R}^d$  un moto Browniano  $d$ -dimensionale fissato,  $t > 0$ ,  $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^N)$  un processo stocastico a valori in  $\mathbb{R}^N$  soluzione della seguente SDE:

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$$

Con  $\mu(X_t, t) \in \mathbb{R}^N$ ,  $\sigma(X_t, t) \in \mathbb{R}^{N \times d}$ .

**Proposizione 2.12 (Lemma di Ito).** *Sia  $f \in C^2(\mathbb{R})$ . Allora il processo  $f(t, X_t)$  seguirà la seguente dinamica:*

$$df(t, X_t) = \left( \partial_t f + \mu_t \partial_x f + \frac{\sigma_t^2}{2} \partial_{xx} f \right) (t, X_t) dt + \sigma_t \partial_x f(t, X_t) dW_t$$

Riportiamo adesso alcuni risultati, alla base della profonda connessione esistente fra la teoria delle SDEs e quella delle PDEs. Applicando la formula di Ito relativa ad una funzione  $f \in C^2(\mathbb{R}^N)$  otteniamo:

$$df(X_t) = \mathcal{A}_t f(X_t) dt + (X_t) \cdot \sigma(t, X_t) dW_t$$

dove  $\mathcal{A}_t$  (detto **operatore caratteristico** della SDE) è:

$$\mathcal{A}_t := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N c_{ij}(t, x) \partial_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^N \mu_j(t, x) \partial_{x_j}$$

con  $(c_{ij}) := \sigma\sigma^*$ .

**Proposizione 2.13** (Equazione di Fokker-Planck). *Supponiamo che  $X_t$  sia un processo Markoviano con legge di transizione  $p$ . Dato il valore iniziale  $X_0$  del processo  $X_t$ ,  $p$  è soluzione (nel senso delle distribuzioni) dell'equazione di Fokker-Planck (detta anche equazione Forward di Kolmogorov):*

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t} + \mathcal{A}^* p &= 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \\ p(0, x, 0, \cdot) &= \prod_{i=1}^N \delta(X_0^i - x^i)\end{aligned}$$

La soluzione viene espressa nel senso delle distribuzioni poiché in generale  $p(t, x, T, \cdot)$  è una distribuzione di probabilità.

In generale, si può dimostrare che l'equazione di Kolmogorov forward ammette soluzioni distribuzionali sotto ipotesi molto generali quali ad esempio, il teorema seguente (Theorem 1.1.9 in [29])

**Teorema 2.14.** *Siano  $c : \mathbb{R}^N \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ ,  $\mu : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  funzioni continue, tali che  $(x) = ((c_{ij}(x)))_{1 \leq i, j \leq N}$  sia simmetrica e definita non-negativa. Supponiamo inoltre che:*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{\text{Trace}(c(x)) + 2(x, \mu(x))^+}{1 + |x|^2} < \infty$$

*Allora l'equazione forward di Kolmogorov ammette soluzione nel senso delle distribuzioni.*

Un risultato più forte, che richiede però ipotesi meno rilassate, è il seguente:

**Teorema 2.15.** *Supponiamo che  $\mu(x, t), \sigma(x, t)$  siano  $\alpha$ -Holderiane con  $0 < \alpha \leq 1$  e due volte differenziabili rispetto ad  $x$ . Supponiamo inoltre che  $\sigma\sigma^*$  sia uniformemente definita positiva.*

*Allora esiste un'unica soluzione  $p$  per l'equazione di Fokker-Planck ed essa coincide con la densità di transizione di  $X_t$ .*

Vediamo adesso un altro risultato cardine per il collegamento fra la teoria delle SDE e quella delle PDE. Consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \mathcal{A}u - au + \partial_t u = f, & \text{su } S_T := (0, T) \times \mathbb{R}^n \\ u(T, \cdot) = \phi \end{cases} \quad (6)$$

dove  $f, a, \phi$  sono funzioni date.

**Teorema 2.16** (Feynman-Kac formula). *Supponiamo che i coefficienti  $b, \sigma$  siano misurabili e con crescita al più lineare in  $x$ . Sia  $u(t, x) \in C^2(S_t) \cap C(\bar{S}_T)$  una soluzione del problema di Cauchy (6), con  $a \in C(S_T)$  tale che  $\inf a > -\infty$ . Assumiamo inoltre che almeno una delle due seguenti condizioni sia verificata:*

- *Esistono due costanti positive  $M, p$  per cui:*

$$|u(t, x)| + |f(t, x)| \leq M(1 + |x|^p), \quad (t, x) \in S_T$$

- *La matrice  $\sigma$  è limitata ed esistono due costanti positive  $M, \alpha$  tale che*

$$|u(t, x)| + |f(t, x)| \leq Me^{\alpha|x|^2}, \quad (t, x) \in S_T$$

*Allora, per ogni  $(t, x) \in S_T$ , vale la seguente formula di rappresentazione:*

$$u(t, x) = E \left[ e^{-\int_t^T a(s, X_s) ds} \phi(X_T^{t, x}) - \int_t^T e^{-\int_t^s a(r, X_r) dr} f(s, X_s) ds \right]$$

La formula di rappresentazione ci permette di connettere la soluzione al problema di Cauchy per la PDE alla densità di transizione per le SDE.

**Teorema 2.17.** *Se esiste una soluzione fondamentale per l'operatore  $\mathcal{A} + \partial_t$ , allora coincide con la densità di transizione di*

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

*Dimostrazione.* Se l'operatore ha soluzione fondamentale  $\Gamma(t, x; T, y)$  allora, per ogni funzione  $\phi$  continua e limitata, la funzione

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y) \Gamma(t, x; T, y) dy$$

è soluzione classica del problema di Cauchy (6) con  $a = f = 0$ . Per la formula di Feynman-Kac dunque avremo che

$$E[\phi(X_T^{t,x})] = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y) \Gamma(t, x; T, y) dy$$

Da ciò segue dunque che se  $t < T, x \in \mathbb{R}^N$ , allora  $\Gamma$  è proprio la densità di transizione del processo  $X_T^{t,x}$ . □

## 2.2 Modello di Black-Scholes

Il modello di Black-Scholes-Merton, spesso abbreviato con Black-Scholes (BS) è stato introdotto per la prima volta nel 1973 ed è tutt'ora largamente applicato sui mercati finanziari. Per il loro lavoro, Fischer Black e Myron Scholes hanno ricevuto nel 1997 il premio nobel per l'economia. L'intuizione fondamentale del modello di Black-Scholes è che un titolo derivato sia implicitamente prezzato se il sottostante è scambiato sul mercato.

L'ipotesi del modello di Black-Scholes è che il mercato sia composto da un asset non rischioso  $B$ , detto **bond** o **obbligazione**, e da uno stock rischioso  $S$ . Si suppone che il prezzo del bond verifichi la seguente equazione:

$$dB_t = rB_t dt$$

in cui  $r$  è il **tasso d'interesse**, che si assume costante. Assumendo  $B_0 = 1$ , allora avremo che:

$$B_t = e^{rt}$$

L'equazione precedente implica che il prezzo del bond segua una dinamica deterministica, dipendente solo dal tempo  $t$ . Per quanto riguarda il prezzo dell'asset rischioso, si assume invece che esso segua un moto Browniano geometrico, ovvero:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Dove i parametri ( $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+$ ) rappresentano, rispettivamente, il trend e la volatilità, mentre  $(W_t)_{t \in [0, T]}$  è un moto Browniano reale su uno spazio di probabilità con filtrazione  $(\Omega, \mathbb{F}, P, (\mathbb{F})_t)$ .

L'interpretazione finanziaria dietro questa dinamica è che la variabile aleatoria  $S_t/S_0$  (ovvero il ritorno dell'investimento) abbia distribuzione log-normale o, in altri termini, che la variabile aleatoria  $\ln(S_t/S_0)$  abbia distribuzione normale con media  $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$  e varianza  $\sigma^2 t$ .

Risolvendo l'equazione precedente otteniamo la dinamica del prezzo dell'asset rischioso:

$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right)$$

Prima di procedere con il pricing delle opzioni vanilla nel modello di Black-Scholes, introduciamo alcuni concetti di finanza matematica. Per una trattazione completa ed estensiva dell'argomento si rimanda a ([24], capitolo 7).

**Definizione 2.18.** *Una strategia (o portafoglio) è un processo stocastico  $(\alpha_t, \beta_t)$  in cui  $\alpha \in \mathbb{L}_{loc}^2$ ,  $\beta \in \mathbb{L}_{loc}^1$ .*

*Il processo stocastico valore del portafoglio  $(\alpha, \beta)$  sarà invece:*

$$V_t^{(\alpha, \beta)} = \alpha_t S_t + \beta_t B_t$$

Nella definizione precedente,  $\alpha_t$  e  $\beta_t$  sono interpretabili come le quantità di  $S$  e  $B$  possedute al tempo  $t$ . Nel caso in cui nel modello di mercato siano consentite le vendite allo scoperto (short-selling),  $\alpha_t$  e  $\beta_t$  possono anche assumere valori negativi. Nel modello di Black-Scholes è assunta l'opportunità di vendita allo scoperto.



**Definizione 2.19.** Una strategia  $(\alpha_t, \beta_t)$  è detta **auto-finanziante** se:

$$dV_t^{(\alpha, \beta)} = \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t$$

ovvero, in notazione integrale:

$$V_t^{(\alpha, \beta)} = V_0^{(\alpha, \beta)} + \int_0^t \alpha_s dS_s + \int_0^t \beta_s dB_s$$

**Osservazione 2.20.** Essendo  $S$  un processo stocastico continuo e adattato,  $\alpha \in \mathbb{L}_{loc}^2 \Rightarrow \alpha S \in \mathbb{L}_{loc}^2$  e quindi l'integrale stocastico precedente è ben definito.

L'ipotesi di portafoglio auto-finanziante implica che il cambio di valore istantaneo del portafoglio dipenda solo dal cambio del valore degli asset e non da un'iniezione/prelievo esterna di capitale.

**Proposizione 2.21.** Una strategia  $(\alpha, \beta)$  è auto-finanziante se e solo se

$$d\tilde{V}_t^{(\alpha, \beta)} = \alpha_t d\tilde{S}_t$$

dove  $\tilde{S}_t := e^{-rt} S_t$  e  $\tilde{V}_t = e^{-rt} V_t$  sono i processi prezzo e valore **scontati**. In altre parole, quindi, vale che:

$$\tilde{V}_t^{(\alpha, \beta)} = V_0^{(\alpha, \beta)} + \int_0^t \alpha_s d\tilde{S}_s$$

Ma allora ciò significa che il valore del portafoglio al tempo  $t$  è univocamente determinato dal suo valore iniziale  $V_0^{(\alpha, \beta)}$  e dal processo  $\alpha$ , che rappresenta l'ammontare posseduto dello stock rischioso.

**Definizione 2.22.** Una strategia  $(\alpha_t, \beta_t)$  è **Markoviana** se  $\alpha_t = \alpha(t, S_t)$ ,  $\beta_t = \beta(t, S_t)$ , con  $\alpha, \beta \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}_{>0})$

Il processo valore di una strategia Markoviana sarà una funzione  $f$  del tempo e del prezzo dell'asset rischioso  $S_t$ :

$$f(t, S_t) := V_t^{(\alpha, \beta)} = \alpha(t, S_t) S_t + \beta(t, S_t) e^{rt}, \text{ con } t \in [0, T]$$

Ovviamente, dalla definizione di strategia Markoviana segue che  $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}_{>0})$ .

**Proposizione 2.23.** Supponiamo che  $(\alpha, \beta)$  sia una strategia Markoviana. Allora sono equivalenti le seguenti:

(i)  $(\alpha, \beta)$  è autofinanziante;

(ii) Se  $(t, s) \in [0, T] \times \mathbb{R}_{>0}$ , allora  $f(t, S_t) := V_t^{(\alpha, \beta)}$  è soluzione della seguente PDE, detta **PDE di Black-Scholes**:

$$\frac{\sigma^2 s^2}{2} \partial_{ss} f(t, s) + rs \partial_s f(t, s) + \partial_t f(t, s) = r f(t, s)$$

Inoltre, vale la seguente uguaglianza:  $\partial_s f(t, s) = \alpha(t, s)$

Il teorema precedente mette in relazione la condizione di strategia auto-finanziante con un'equazione differenziale alle derivate parziali, tra i cui coefficienti figurano la volatilità  $\sigma$  e il tasso d'interesse risk-free  $r$ . Osserviamo invece che la PDE non dipende dal coefficiente  $\mu$ , il trend.

Per utilizzare la teoria delle PDE è necessario restringere la famiglia delle strategie (o portafogli) ammissibili e imporre delle condizioni sulla funzione di payoff  $F$ .

**Definizione 2.24.** Una strategia  $(\alpha, \beta)$  è detta **ammissibile** se è limitata dal basso, ovvero esiste una costante  $C$  per cui

$$V_t^{(\alpha, \beta)} \geq C \text{ con } t \in [0, T], \text{ q.c}$$

In tal caso diremo che  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ .

L'intuizione che sta alla base di tale imposizione è quella di escludere le strategie di investimento finanziarie che richiedono un debito infinito.

**Definizione 2.25.** Diremo che un derivato europeo con payoff  $F(S_T)$  è **replicabile** se esiste un portafoglio ammissibile  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ , detto **portafoglio replicante** per  $F(S_t)$ , tale che

$$V_T^{(\alpha, \beta)} = F(S_T) \text{ su } \mathbb{R}_{>0}$$

Se consideriamo adesso un derivato europeo con payoff  $F(S_T)$ , il problema del pricing diventa quello di dimostrare che esiste almeno una strategia replicante (ovvero se il mercato è **completo**) e che, se ne esistono più di una, tutte le strategie replicanti hanno lo stesso valore (se e solo se vi è **assenza d'arbitraggio**). Il prezzo di arbitraggio dello strumento finanziario sarà, per definizione, il valore di una sua strategia replicante.

**Teorema 2.26.** Sia  $F(S_T)$  il payoff di un derivato Europeo, con  $F$  funzione localmente integrabile su  $\mathbb{R}_{>0}$ , limitata dal basso e per cui esistono due costanti  $a < 1, C \in \mathbb{R}$  per cui:

$$F(s) \leq C \exp(C|\log s|^{1+a}), \text{ con } s \in \mathbb{R}_{>0}$$

Allora il modello di mercato di BS è completo e non ammette opportunità di arbitraggio, ovvero ogni derivato Europeo verificanti le ipotesi di sopra è replicabile da un unico portafoglio replicante.

In particolare, esiste un'unica strategia di replica  $h = (\alpha_t, \beta_t) \in \mathcal{A}$  per  $F(S_t)$ , definita da:

$$\alpha_t = \partial_s f(t, S_t) \quad \beta_t = e^{-rt} (f(t, S_t) - S_t \partial_s f(t, S_t))$$

in cui  $f$  è soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2 s^2}{2} \partial_{ss} f + rs \partial_s f + \partial_t f &= rf \quad \text{su } [0, T[ \times \mathbb{R}_{>0} \\ f(T, s) &= F(s) \quad \text{con } s \in \mathbb{R}_{>0} \end{aligned}$$

Per definizione dunque  $f(t, S_t) = V_t^{(\alpha, \beta)}$  è il prezzo d'arbitraggio di  $F(S_T)$ .

**Osservazione 2.27.** L'ipotesi del teorema precedente sulla funzione  $F$  non è realmente restrittiva. La richiesta di tale ipotesi deriva dall'utilizzo di un risultato sull'esistenza della soluzione per la PDE, ma non crea alcun limite effettivo poiché tale condizione è verificata dalla maggior parte dei derivati Europei scambiati sul mercato, in quanto la funzione  $\exp((\log s)^{1+a})$  con  $s > 1$  cresce, per  $s \rightarrow \infty$ , meno di un esponenziale ma più rapidamente di qualsiasi funzione polinomiale.

Osserviamo che l'equazione precedente è nella forma esatta di quelle risolubili mediante la formula di Feynman-Kac:

$$f(t, s) = e^{-r(T-t)} E[\phi(X_T) | X_t = s]$$

in cui il processo  $X$  è della stessa forma del processo  $S$ , ma in cui il drift  $\mu$  è sostituito dal tasso di interesse risk free  $r$ :

$$\begin{aligned} dX_u &= rX_u dy + \sigma X_u dW_u \\ X_t &= s \end{aligned}$$

Tale pratica è anche chiamata **cambio di misura martingala**, che implica che il pricing vada effettuato in un mondo **neutrale al rischio** (ovvero in cui l'investitore non è né propenso né avverso al rischio, ovvero dove il ritorno  $\mu$  di un titolo rischioso sia uguale a quello del bond  $r$ ). Da questo fatto segue uno dei risultati centrali per il pricing dei derivati finanziari:

**Teorema 2.28.** *Il prezzo d'arbitraggio di un derivato con payoff  $\phi(S_T)$  è dato dalla seguente formula:*

$$f(t, s) = e^{-r(T-t)} E^Q[\phi(S_T) | S_t = s]$$

dove la dinamica di  $S$  sotto la misura di probabilità **risk-neutral**  $Q$  è la seguente:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Per maggiori dettagli sul concetto di misura neutrale al rischio si rimanda il lettore a [24].

**Corollario 2.29.** *Nelle ipotesi del mercato di BS, ovvero in cui la dinamica del sottostante sia governata dall'equazione:*

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Data un'opzione call, in cui  $\phi(S_T) = \max(S_T - K, 0)$ , dato  $r$  il tasso d'interesse short-term,  $K$  lo strike,  $T$  la maturity, dopo alcuni calcoli si ottengono le seguenti formule per i prezzi delle opzioni call e put europee:

$$\begin{aligned} C_t &= S_t \phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \phi(d_2), \\ P_t &= K e^{-r(T-t)} \phi(-d_2) - S_t \phi(-d_1) \end{aligned}$$

dove  $\phi(x)$  è la funzione di ripartizione della normale standard

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy$$

mentre  $d_1, d_2$  sono definiti dalle seguenti formule:

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

**Osservazione 2.30.** Dalla formula precedente segue che nel modello di BS, il prezzo di un'opzione call europea è una funzione di 5 parametri,  $C_{BS} = C_{BS}(\sigma, S, K, T, r)$ . Di tali parametri, l'unico che non è direttamente osservabile è la volatilità  $\sigma$ .

Osserviamo adesso che, essendo la funzione  $\sigma \Rightarrow C_{BS}(\sigma, S, K, T, r)$  strettamente crescente, è anche invertibile. Ma allora possiamo considerare la funzione inversa

$$\sigma^* := VI(C^*, S, K, T, r)$$

dove  $\sigma^*$  è l'unico valore del parametro volatilità tale per cui

$$C^* = C_{BS}(\sigma^*, S, K, T, r)$$

La funzione  $C^* \rightarrow VI(C^*, S, K, T, r)$  è detta **funzione volatilità implicita**.

Se adesso fissiamo  $S$  ed  $r$ , possiamo considerare la famiglia di prezzi  $C_i^*$ , corrispondenti alla famiglia di strike  $K^i$  e maturity  $T^i$ :

$$\{C_i^* | i = 1, \dots, M\}$$

Definiremo la **superficie di volatilità implicita** come il grafico della funzione:

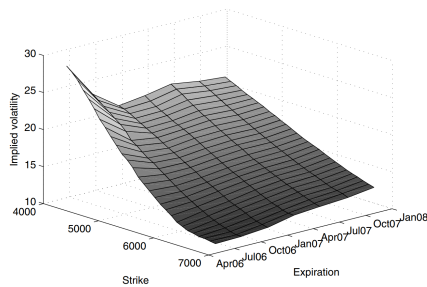
$$(K^i, T^i) \rightarrow VI(C_i^*, S, K^i, T^i, r)$$

Se assumiamo le ipotesi del modello di BS per la dinamica del sottostante, data una famiglia di prezzi alla Black-Scholes  $\{(C_{BS}^i)_{i \in I}\}$ , corrispondenti ad una famiglia di  $\{K^i, T^i\}$ , dovranno coincidere le volatilità implicite corrispondenti, ovvero:

$$VI(C_{BS}^i, S, K^i, T^i, r) = \sigma \text{ per ogni } i \in I$$

Ma nel modello di Black-Scholes la volatilità è assunta costante e pari a  $\sigma$ , per cui la superficie di volatilità implicita dovrà essere il grafico della funzione costante pari a  $f = \sigma$ .

Empiricamente, tuttavia, se si costruisce la superficie di volatilità implicita sui prezzi quotati del mercato, è ben noto che i prezzi delle opzioni Europee sullo stesso sottostante abbiano volatilità non costante, ma che cambia al variare di strike e maturity. Se in particolare fissiamo la maturity  $T$ , possiamo osservare che ogni sezione della superficie di volatilità calcolata empiricamente assume una forma particolare, detta **smile** (da cui nasce il cosiddetto **effetto smile**).



**Figura 2.2:** Superficie di volatilità delle opzioni dell'indice FTSE, 31/03/2006

L'effetto smile sulla sezione della volatilità implicita riflette il fatto che il mercato tenda a dare maggior valore (e quindi maggiore volatilità implicita) a casi estremi ITM o OTM, rispetto alle opzioni ATM. Questo fatto, a sua volta, riflette la reazione del mercato al concetto di rischio che viene percepito rispetto alle situazioni più estreme, quali grossi aumenti/cali nella quotazione del sottostante.

## 2.3 Black-Scholes Hedging

Consideriamo il punto di vista della controparte venditrice di un'opzione (ad esempio una banca), che ha l'obiettivo di determinare una strategia di copertura (**hedging**) per limitare le potenziali perdite derivanti dalla vendita dell'opzione.

Consideriamo un portafoglio  $V$  composto da una certa quantità del sottostante rischioso  $S_t$  e da una vendita allo scoperto di un derivato del sottostante avente payoff  $F(S_T)$ , con prezzo  $f(t, S_t)$ :

$$V(t, S_t) = \alpha_t S_t - f(t, S_t)$$

L'obiettivo sarà quello di determinare la quantità  $\alpha_t$  di sottostante rischioso posseduto in maniera da rendere  $V$  neutrale rispetto al cambio di prezzo del sottostante. Analiticamente, ciò si traduce nell'imporre la seguente condizione:

$$\partial_s V(t, s) = 0 \Rightarrow \alpha_t = \partial_s f(t, s)$$

Tale strategia è nota come **Copertura Delta** (o *delta hedging*). Dalla condizione di portafoglio auto-finanziante e dal lemma di Ito seguirà che:

$$\begin{aligned} dV(t, S_t) &= \alpha_t dS_t - df(t, S_t) = \left( (\alpha_t - \partial_s f) \mu S_t - \partial_t f - \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \partial_{ss} f \right) dt \\ &+ (\alpha_t - \partial_s f) \sigma S_t dW_t = \left( -\partial_t f - \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \partial_{ss} f \right) dt + (\alpha_t - \partial_s f) \sigma S_t dW_t \end{aligned}$$

Imponendo la condizione  $\alpha_t = \partial_s f(t, S_t)$ , viene eliminata sia la parte non deterministica di  $V$  (la parte rischiosa), ma anche la dipendenza dal ritorno medio  $\mu$  del sottostante.

Sotto tale condizione, la dinamica di  $V$  è dunque non stocastica e quindi priva di rischio: per l'assenza di opportunità di arbitraggio  $V$  dovrà avere lo stesso ritorno dell'asset risk-free, ovvero la sua dinamica dovrà essere la seguente:

$$dV(t, S_t) = rV(t, S_t)dt = r(\partial_s f(t, S_t)S_t - f(t, S_t))dt$$

Se adesso uguagliamo i due termini sopra ottenuti, otteniamo l'equazione di Black-Scholes:

$$r(\partial_s f(t, S_t)S_t - f(t, S_t))dt = \left( -\partial_t f - \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \partial_{ss} f \right) dt$$

**Osservazione 2.31.** Osserviamo che nei due approcci utilizzati per ricavare l'equazione di BS abbiamo escluso l'esistenza di opportunità di arbitraggio. In realtà, però, ciò che abbiamo davvero imposto è la condizione di portafoglio autofinanziante: l'AOA è soltanto una sua conseguenza. Intuitivamente, ciò corrisponde al fatto che se una strategia è adattata e autofinanziante, allora non può generare un profitto risk-free maggiore di quello del bond.

Da un punto di vista teorico, la strategia Delta-Hedging vista in precedenza garantisce una replica perfetta del payoff dell'opzione. Tuttavia, nella pratica non è utilizzabile: richiederebbe un ri-bilanciamento continuo del portafoglio e ciò non è sempre possibile/conveniente, per via dei costi da pagare per ogni transazione. Inoltre,

come già detto, la volatilità non è davvero costante.

Nel modello di Black-Scholes il valore di una strategia è funzione di diversi parametri: il prezzo del sottostante, la volatilità, il tasso d'interesse short-term, la maturity. Potrebbe allora essere utile provare a valutare la sensibilità del portafoglio rispetto a degli indicatori che valutino l'impatto dello shock su uno dei parametri sul valore del portafoglio. Chiaramente, gli indicatori più naturali per tale scopo sono le derivate parziali del valore del portafoglio rispetto al parametro in questione: tali indicatori sono comunemente noti come **greche**.

**Definizione 2.32.** *Sia  $f(t, S, \sigma, r)$  una strategia Markoviana auto-finanziante nel modello di mercato di Black-Scholes. Definiamo:*

- $\Delta = \partial_S f$  (Delta)
- $\Gamma = \partial_{SS} f$  (Gamma)
- $\nu = \partial_\sigma f$  (Vega)
- $\rho = \partial_r f$  (Rho)
- $\Theta = \partial_t f$  (Theta)

*Inoltre, una strategia è detta neutrale rispetto ad uno dei fattori di rischio se la corrispondente greca è nulla.*

Le greche possono essere utilizzate per determinare strategie di copertura più efficienti del Delta-hedging, per superarne i problemi visti (non continuità delle strategie, costi di transazione, volatilità non costante).

Nonostante i suoi limiti, anche se potrebbe sembrare contro-intuitivo, il modello di Black-Scholes è largamente utilizzato. Fra le proprietà che lo rendono appetibile vi è una certa "robustezza" rispetto all'errore commesso nella stima dei parametri del modello. Spieghiamo brevemente il senso di tale affermazione, rimandando il lettore a ([24], capitolo 7.4.2/7.4.3) per una trattazione dell'argomento dettagliata e rigorosa.

Supponiamo ad esempio di assumere la seguente dinamica alla Black-Scholes per il sottostante rischioso  $S$ :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Supponiamo adesso di utilizzare la strategia delta-hedging rispetto alla dinamica precedente. Supponiamo però che la *reale* dinamica del sottostante sia differente da quella assunta, guidata dal seguente processo:

$$d\bar{S}_t = \mu_t \bar{S}_t dt + \sigma_t \bar{S}_t dW_t \quad \text{con } \mu_t \in \mathbb{L}_{loc}^1, \sigma_t \in \mathbb{L}_{loc}^2$$

Abbiamo visto precedentemente che la strategia delta-hedging replica il payoff  $F(\bar{S}_T)$  per ogni possibile traiettoria del processo prezzo del sottostante. Tuttavia, il fatto che la dinamica reale sia differente da quella assunta nel modello BS fa sì che si perda la proprietà di autofinanziamento: nella pratica dunque la copertura avrà un costo differente rispetto al prezzo di Black-Scholes per l'opzione  $f(0, \bar{S}_0)$  con payoff  $F(S_T)$ . Più in particolare, si ottiene che l'errore commesso rispetto ad una specificazione erronea della dinamica per il sottostante è il seguente termine:

$$I = -\frac{1}{2} \int_0^T (\sigma^2 - \sigma_t^2) \bar{S}_t^2 \partial_{SS} f(t, \bar{S}_t) dt$$

Osserviamo anzitutto che l'errore dipende solo dall'errore nella specificazione della volatilità e non nel drift. In particolare, l'errore è piccolo se  $\partial_{SS} f$  è piccolo. Inoltre, se il prezzo è convesso (come nel caso delle opzioni Put e Call), allora  $\partial_{SS} f \geq 0$  e quindi la strategia di Black-Scholes, scegliendo una volatilità abbastanza grande  $\sigma \geq \sigma_t$ , super-replica il derivato. Ricordiamo comunque che esistono opzioni (come ad esempio le opzioni digitale o alcune opzioni a barriera) per cui il prezzo non è una funzione convessa del prezzo del sottostante e per cui quindi  $\partial_{SS} f$  non è necessariamente positiva. In certi casi potrebbe dunque essere necessario diminuire la volatilità, anziché aumentarla.

È in questo senso che il modello di Black-Scholes è robusto: se usato con le dovute accortezze precauzionali, può essere effettivamente impiegato per l'hedging di derivati.



## 2.4 Modelli a Volatilità Locale

Abbiamo visto che il modello di Black-Scholes presente un importante limite, ovvero l'assunzione irrealistica che la volatilità  $\sigma$  sia un parametro costante. Per tale ragione differenti modelli sono stati proposti per superare l'effetto smile e riprodurre più realisticamente la superficie di volatilità implicita. In questa sezione studieremo uno di questi modelli, il modello a volatilità locale (LV).

L'assunzione chiave del modello a volatilità locale è che il parametro volatilità  $\sigma_{LV}$  sia dipendente dal tempo  $t$  e dal prezzo spot del sottostante  $S_t$  (**superficie di volatilità**). In questo modello, supponiamo che la dinamica del sottostante sia descritta dalla seguente equazione differenziale stocastica:

$$dS_t = \mu(t, S_t)S_t dt + \sigma_{LV}(t, S_t)S_t dW_t$$

Nelle ipotesi della sezione precedente anche tale modello è completo ed è dunque possibile determinare il prezzo di un'opzione e la copertura risolvendo un problema di Cauchy. Per replicare la superficie di volatilità implicita è necessario calibrare il modello, ovvero determinare una funzione  $\sigma = \sigma(t, S_t)$  tale che i prezzi teorici corrispondano ai prezzi presenti quotati sul mercato. Tale problema è noto come *problema inverso*.

Nel 1994, Dupire ([3]) ha mostrato come sia teoricamente possibile risolvere il problema inverso per il seguente modello LV:

$$dS_t = (r - d)S_t dt + \sigma_{LV}(t, S_t)S_t dW_t$$

Per la formula di Feynman-Kac, il prezzo di un'opzione call europea sarà:

$$C(K, T) = e^{-rT} \int_0^\infty (S_T - K)^+ p(S_T, T | S_0) dS_T = e^{-rT} \int_K^\infty (S_T - K) p(S_T, T | S_0) dS_T$$

dove  $p(S_T, T | S_0) = p(S_0, 0; S_T, T)$  è la densità di transizione del processo  $S$  con valore iniziale  $S_0$ . Differenziamo anzitutto  $C(T; K)$  due volte rispetto a  $K$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial K} &= -e^{-rT} \int_K^\infty p(S_T, T | S_0) dS_T \\ \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} &= -e^{-rT} p(K, T | S_0) \end{aligned}$$

**Osservazione 2.33.** Il risultato appena ottenuto, inizialmente derivato da Breeden e Litzenberg [30], ci dice che conoscere i prezzi di mercato delle opzioni Call per ogni strike  $K$  e maturity  $T$  ci consente, teoricamente, di ottenere la densità di transizione di  $S_T$ .

La derivata rispetto alla maturità  $T$  del prezzo dell'opzione call sarà invece:

$$\frac{\partial C}{\partial T} = -rC + e^{-rT} \int_K^\infty (S_T - K) \frac{\partial p}{\partial T} dS_T$$

Ricordiamo inoltre che l'evoluzione temporale della densità di transizione soddisfa l'equazione di Fokker-Planck:

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S_T^2} [\sigma_{LV}(S_T, T)^2 S_T^2 p(T, S_T)] - (r - d) \frac{\partial C}{\partial S_T} [S_T p(T, S_T)] \Rightarrow$$

$$\frac{\partial C}{\partial T} + rC = e^{-rT} \int_k^\infty (s - K) \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} [\sigma_{LV}(s, T)^2 s^2 p(s, T)] - (r - d) \frac{\partial C}{\partial s} [Sp(s, T)] \right) ds$$

Integrando per parti, assumendo che  $p(T, S_T)$  decada esponenzialmente per  $S_T \rightarrow \infty$  e sostituendo le relazioni trovate in precedenza derivando rispetto allo strike  $K$  otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial T} &= -rC + (r - d)e^{-rT} \int_K^\infty sp \, ds - \frac{1}{2} e^{-rT} \sigma_{LV}(K, T)^2 K^2 p(K, T) = \\ &= -rC + (r - d)C + (r - d)e^{-rT} \int_0^\infty Kp \, ds - \frac{1}{2} e^{-rT} \sigma_{LV}(K, T)^2 K^2 p(K, T) = \\ &= -dC - (r - d)K \frac{\partial C}{\partial K} + \frac{1}{2} \sigma_{LV}(K, T)^2 K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} \end{aligned}$$

Abbiamo dunque derivato la seguente equazione, nota come **Equazione di Dupire**:

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2} \sigma_{LV}^2(K, T) K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} - (r - d)K \frac{\partial C}{\partial K} - dC$$

L'interesse nell'equazione di Dupire deriva dal fatto che è possibile prezzare le opzioni Call per ogni Strike e Maturity risolvendo il problema di Cauchy per l'equazione di Dupire con condizione iniziale:

$$C(0, S; 0, K) = (S - K)^+$$

La seconda importante conseguenza della formula di Dupire è che grazie ad essa abbiamo trovato una formula chiusa per il calcolo della volatilità locale  $\sigma_{LV}(s, t)$  a partire dai prezzi di mercato delle opzioni Call, nota come **Formula di Dupire**:

$$\sigma_{LV}^2(K, T) = 2 \frac{\frac{\partial C}{\partial T} + (r - d)K \frac{\partial C}{\partial K} + dC}{K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}$$

Tramite la formula precedente, assumendo l'esistenza e la continuità dei prezzi quotati dal mercato per ogni strike  $K$  e maturità  $T$ , è teoricamente possibile calcolare la superficie di volatilità che riproduca esattamente i prezzi di mercato, di cui sarà inoltre garantita l'esistenza e la continuità. Ovviamente nella pratica ciò non è possibile, poiché sul mercato non è possibile osservare un prezzo per ogni strike e maturity, ma ne sarà disponibile solo un certo numero finito. Sarà dunque necessario effettuare un'interpolazione e delle approssimazioni numeriche delle derivate per ottenere i prezzi delle opzioni Call e le sue derivate. Tale operazione introduce nella valutazione errori ed instabilità numeriche, rendendo la valutazione della formula e la corrispondente superficie di volatilità altamente instabile. Per l'utilizzo ed il calcolo nella pratica della volatilità  $\sigma_{LV}$  sono state computate altre formule meno compatte e meno interpretabili, ma più stabili numericamente.

Il modello LV ha diverse proprietà interessanti:

- è un'estensione diretta del modello di Black-Scholes, in cui viene assunta una sola fonte di stocasticità, e continua ad essere un modello di mercato completo;
- riproducendo i prezzi spot di mercato riesce a riprodurre le opzioni vanilla quotate e le opzioni esotiche con lo stesso modello;
- una volta computata la superficie di volatilità  $\sigma_{LV}$ , per apprezzare un derivato è sufficiente risolvere una pde parabolica standard, per cui sono disponibili diversi metodi numerici veloci e stabili;

Nonostante ciò, i modelli a volatilità locale, e più in generale i modelli di mercato completo, sono comunemente considerati irrealistici e incapaci di coprire il rischio di volatilità. Infatti Hagan, Kumar et al [31] hanno dimostrato che la delta di un'opzione calcolata con un modello LV è errata. Ciò costituisce un problema, poiché diverse tecniche comunemente usate nell'hedging prevedono il calcolo delle greche. Nel loro argomento hanno infatti provato che i modelli LV presentano un errore intrinseco: la previsione della dinamica della volatilità implicita è errata e ciò causa di riflesso un errore nel delta, che risulterà dunque intrinsecamente errato.

Oltre al problema del delta, un altro problema intrinseco dei modelli LV, come sottolineato da Fengler ([32]), è che predicono degli smile futuri flat, che generalmente non è ciò che ci aspetteremmo. Per questa ragione opzioni che iniziano nel futuro long-term verranno apprezzate incorrettamente, poiché verranno apprezzate sotto l'assunzione di una volatilità implicita forward flat.

## 2.5 Modelli a Volatilità Stocastica

Un'altra classe di modelli a volatilità non costante, abbondantemente trattata in letteratura, è la classe dei modelli in cui la volatilità del prezzo di un sottostante rischioso segue un processo stocastico autonomo. Un modello del genere, detto modello a volatilità stocastica (SV Model), nel caso 1-dimensionale sarà dunque della forma:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu(t, S_t)S_t dt + V_t S_t dW_t^1 \\ dV_t &= a(t, V_t)dt + b(t, V_t)dW_t^2 \end{aligned}$$

dove  $(W^1, W^2)$  è un moto Browniano 2-dimensionale correlato. Diversi modelli SV sono stati proposti in letteratura: fra essi citiamo il modello di Heston, il modello Garch, il modello CEV.

Una caratteristica comune di tali modelli è l'incompletezza del mercato, a causa dell'addizionale fonte di stocasticità introdotta.

Uno dei più popolari modelli SV è il modello di Heston. Nel modello di Heston la dinamica di un sottostante rischioso  $S_t$  è descritta dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche accoppiate:

$$\begin{aligned} dS_t &= r_t S_t dt + S_t \sqrt{V_t} dW_t^1 \\ dV_t &= k(\theta - V_t)dt + \xi \sqrt{V_t} dW_t^2 \\ dW_t^1 dW_t^2 &= \rho dt \end{aligned}$$

I parametri del modello di Heston sono  $(k, \theta, \xi, \rho)$ :  $k$  è il tasso di ritorno alla media (**mean reversion rate**),  $\theta$  è il livello di varianza a lungo termine,  $\xi$  è la volatilità della volatilità, mentre  $\rho$  è la correlazione fra i due moti Browniani. I parametri sono tutti strettamente positivi, eccetto  $\rho \in (-1, 1)$ .

Il modello SV di Heston assume dunque che la volatilità sia un processo stocastico che mostra una tendenza a tornare verso un valore di media a lungo termine con tasso di frequenza  $\theta$ , ha una volatilità proporzionale alla radice quadrata della volatilità stessa e la cui fonte di volatilità sia correlata con la varianza del prezzo del sottostante.

Più in particolare, un valore di  $\xi$  elevato introduce una volatilità stocastica maggiore al modello, mentre valori di  $\xi$  tendenti allo zero fanno degenerare il modello SV ad un modello a volatilità deterministica. Un valore di  $\rho$  positivo porta il modello ad un'asimmetria destra, mentre un valore negativo ad un'asimmetria sinistra. Il valore di  $\theta$  determina l'altezza dello smile della volatilità implicita, mentre un valore alto di  $k$  aumenta il livello della volatilità per opzioni at-the-money (e dintorni). Osserviamo infine che, al contrario di  $S_0$ , non possiamo osservare direttamente  $V_0$ , per cui anche il valore iniziale della volatilità dovrà essere un parametro da calibrare.

Per costruzione, il modello di Heston presenta diverse proprietà desiderabili. Anzitutto il fatto che sia mean-reverting: questa assunzione è coerente con quanto osservato nei mercati finanziari. Se la volatilità non fosse mean-reverting infatti i mercati sarebbero caratterizzati da un numero considerevole di asset con volatilità elevatissima o quasi nulla, mentre nella pratica tali casi sono spesso isolati e hanno breve durata.

Inoltre, introduce degli shock correlati fra il guadagno degli asset e la volatilità: un fatto comunemente osservato ed accettato sui mercati finanziari è che la volatilità tende ad aumentare quando ci sono grossi cali nel prezzo di un sottostante.

Un'altra proprietà molto appetibile del modello di Heston è l'esistenza di formule chiuse per il pricing di opzioni Europee. La disponibilità di tali formule è in particolare importante per la calibrazione ed il fitting dei parametri ai prezzi del mercato. Una volta calibrato il modello, infatti, il modello di Heston può essere utilizzato per prezzare anche prodotti non attivamente scambiati sul mercato. Infine, dal punto di vista computazionale, il pricing delle opzioni europee con il modello di Heston è molto rapido e computazionalmente poco costoso [33].

In generale, uno dei limiti dei modelli SV è che, sebbene riescano a modellare realisticamente l'effetto smile a lungo termine e l'asimmetria, non riescono generalmente nel descrivere realisticamente le dinamiche short-term della volatilità implicita e a fittare i prezzi spot del mercato.

### 3 Modelli a Volatilità Stocastica Locale

Come visto, i modelli LV ed SV hanno proprietà quasi speculari. Mentre i modelli LV riescono a fittare i prezzi spot del mercato, hanno un problema intrinseco nel produrre la dinamica della volatilità implicita; al contrario invece i modelli SV riescono a predire realisticamente la dinamica della volatilità implicita, ma non riescono a fittare esattamente i prezzi spot delle opzioni vanilla.

Per combinare i vantaggi dei modelli SV e LV ed, allo stesso tempo, ovviare ai difetti dei due, è stata sviluppata nel tempo una classe di modelli a volatilità stocastica locale (SLV), che coniughi il maggior realismo nella dinamica dello smile del modello SV con il buon fitting dei prezzi di mercato del modello LV.

Un primo approccio potrebbe essere quello di calcolare il prezzo dell'opzione come combinazione convessa dei prezzi calcolati a partire dai singoli modelli LV e SV, calibrati in maniera indipendente. Tale approccio risulta tuttavia abbastanza innaturale, in quanto la dinamica del processo prezzo sottostante a tale idea implicherebbe che il processo, al tempo  $t_0$ , "decida" in maniera casuale di seguire il modello SV con probabilità  $\alpha \in [0, 1]$  oppure il modello LV con probabilità  $1 - \alpha$ . Per altre modelli più realistici, generalmente la difficoltà maggiore consiste nel riuscire ad ottenere una buona calibrazione del modello in un tempo "accettabile".

Introduciamo un altro tipo di combinazione, non lineare e non parametrica, dei due modelli visti nei paragrafi precedenti. Diversi modelli possono essere ottenuti seguendo tale logica, a seconda della scelta della superficie di volatilità locale e della dinamica della volatilità. Introduciamo brevemente il concetto di modello SLV, per poi studiare nel prossimo paragrafo un particolare modello della classe. In generale, un modello SLV è dato dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu_1(S_t, t)dt + L(S_t, t)\sigma_1(S_t, V_t, t)dW_t^1 \\ dV_t &= \mu_2(V_t, t)dt + \sigma_2(V_t, t)dW_t^2 \\ dW_t^1 dW_t^2 &= \rho dt \end{aligned} \tag{7}$$

Consideriamo adesso una versione semplificata di questo modello, della stessa forma del modello che utilizzeremo nel paragrafo successivo per il pricing di una particolare classe di opzioni nel mercato FX. Supponiamo in particolare che il drift  $\mu_1$  dipenda solo dal tempo (e lo chiamiamo  $r(t)$ ) e che  $\sigma_1$  dipenda solo dalla volatilità:

$$\begin{aligned} dS_t &= r(t)dt + L(S_t, t)\sigma_1(V_t)dW_t^1 \\ dV_t &= \mu(V_t, t)dt + \sigma_2(V_t, t)dW_t^2 \\ dW_t^1 dW_t^2 &= \rho dt \end{aligned} \tag{8}$$

Supponiamo di avere una superficie di prezzi vanilla  $C(T, K)$  e la corrispondente volatilità locale  $\sigma_{LV}$ , fittata tramite la formula di Dupire. Supponiamo inoltre che valgano le seguenti ipotesi (si rimanda a (A0.2) per la definizione degli spazi di Holder  $H$ ):

- i)  $\forall t \geq 0, S \in R_+, (V, \delta_1, \delta_2) \in \mathbb{R}^3$ , esiste una certa costante  $K > 0$  per cui:

$$L^2(S, t)\sigma_1^2(V)S^2\delta_1^2 + 2\rho L(S, t)\sigma_1(V)S\sigma_2(V, t)\delta_1\delta_2 + \sigma_2^2(V, t)\delta_2^2 \geq K(\delta_1^2 + \delta_2^2)$$

ii) Le funzioni  $L^2$ ,  $L\sigma_1\sigma_2$ ,  $\sigma_2^2 \in H^{2,h,h/2}(\mathbb{R}^2)$ , mentre  $\sigma_1^2 \in H^{2,h}(\mathbb{R})$

iii)  $r(t) \in H^{1,h/2}(]0, T[)$ ,  $\mu \in H^{1,h,h/2}(\mathbb{R}^2)$

L'ipotesi (i) di uniforme ellitticità e le ipotesi sulla regolarità dei coefficienti, unite ai risultati del capitolo 5 del libro di Friedman [25] ci assicurano che la probabilità di transizione del modello (8) abbia densità di transizione rispetto alla misura di Lebesgue ([34]).

Poniamo, per semplicità di notazione,  $p(t, S, V) := p(t, S, V, t_0, S_0, V_0)$ .

**Proposizione 3.1.** *Se il modello (8) fitta la superficie delle opzioni vanilla  $C(T, K)$ , allora deve necessariamente valere la seguente:*

$$L^2(S, t) = \sigma_{LV}^2(S, t) \frac{\int_{\mathbb{R}} p(t, S, Y) dY}{\int_{\mathbb{R}} \sigma_1^2(Y) p(t, S, Y) dY} \quad (9)$$

*Dimostrazione.* Supponiamo che il modello fitti esattamente la superficie  $C(T, K)$ . Scriviamo l'equazione forward di Kolmogorov per la densità congiunta  $p$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial S^2} \left( \frac{1}{2} L^2 \sigma_1^2 S^2 p \right) - \frac{\partial^2}{\partial S \partial V} (\rho L \sigma_1 \sigma_2 S p) - \frac{\partial^2}{\partial V^2} \left( \left( \frac{1}{2} \sigma_2^2 p \right) \right) \\ + \frac{\partial}{\partial S} (r S p) + \frac{\partial}{\partial V} (\mu p) = 0 \\ p(0, S, V, 0, S_0, V_0) = \delta(S - S_0) \delta(V - V_0) \end{aligned} \quad (10)$$

Definiamo  $q(t, S) = \int_{\mathbb{R}} p(t, S, Y) dY$ . Integrando l'equazione precedente e portando al limite per eliminare le costanti di integrazione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial S^2} \left( \frac{1}{2} L^2 S^2 \left( \int_{\mathbb{R}} \sigma_1^2(Y) p(t, S, Y) dY \right) \right) + \frac{\partial}{\partial S} (r S q) = 0 \\ q(0, S, 0, S_0) = \delta(S - S_0) \end{aligned}$$

Se applichiamo questa equazione ad un modello puramente LV (ovvero un modello in cui  $L = \sigma_{LV}$ ,  $\sigma_1 = 1$ ), la densità marginale  $q_{LV}$  di tale modello dovrà soddisfare:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{LV}}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial S^2} \left( \frac{1}{2} \sigma_{LV}^2 S^2 q_{LV} \right) + \frac{\partial}{\partial S} (r S q_{LV}) = 0 \\ q_{LV}(0, S) = \delta(S - S_0) \end{aligned}$$

Per l'ipotesi assunta sul fitting delle vanilla del modello SLV, avremo che  $q = q_{LV}$ . Ma allora se identifichiamo i due termini nelle due formule precedenti otteniamo la condizione necessaria per la calibrazione ed il fitting delle vanilla:

$$L^2(S, t) = \sigma_{LV}^2(S, t) \frac{q}{\int_{\mathbb{R}} \sigma_1^2(Y) p(t, S, Y) dY}$$

□

**Osservazione 3.2.** Abbiamo dunque l'equivalenza fra l'esistenza di un modello (8) che calibri perfettamente le vanilla  $C$  e l'esistenza di una soluzione  $p$  per la PDE (10) (dopo aver sostituito il valore di  $L$  nell'equazione il valore di  $L$  appena trovato). L'implicazione inversa deriva direttamente dall'utilizzo della soluzione  $p$  della PDE nella definizione di  $L$ .

**Osservazione 3.3.** Utilizziamo la proposizione appena dimostrata, sostituendo in (10) il valore di  $L$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial S^2} \left( \frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 \sigma_{LV}^2 \frac{\int_{\mathbb{R}} p dY}{\int_{\mathbb{R}} \sigma_2^2(Y) p dY} p \right) - \frac{\partial^2}{\partial S \partial V} \left( \rho \sigma_1 \sigma_2 S \sigma_{LV} \left( \frac{\int_{\mathbb{R}} p dY}{\int_{\mathbb{R}} \sigma_2^2(Y) p dY} \right)^{1/2} p \right) \\ - \frac{\partial^2}{\partial V^2} \left( \frac{1}{2} \sigma_2^2 p \right) + \frac{\partial}{\partial S} (rSp) + \frac{\partial}{\partial V} (\mu p) = 0 \\ p(0, S, V, 0, S_0, V_0) = \delta(S - S_0) \delta(V - V_0) \end{aligned} \quad (11)$$

La densità congiunta  $p(t, S, V)$  del processo SLV dovrà essere dunque soluzione della PDE parabolica non lineare integro-differenziale. Vi è dunque equivalenza fra l'esistenza di un modello (8) che fitti le opzioni vanilla e l'esistenza di una soluzione per la PDE (11). Osserviamo che tale equazione rientra nella classe di PDE non lineari paraboliche del secondo ordine studiate nel capitolo 1 di questa tesi.

Abbiamo in precedenza fornito delle condizioni sufficienti sui coefficienti affinché il modello SLV ammetta densità di probabilità. Tali condizioni sono piuttosto forti in quanto, fra le altre cose, richiedono l'appartenenza a spazi di Holder. L'esistenza di un modello SLV che fitti le opzioni vanilla non richiede tuttavia che la PDE forward di Kolmogorov ammetta una densità di probabilità come soluzione: in effetti è sufficiente che essa ammetta una soluzione che sia una misura di probabilità. Più in generale infatti, un modello SLV che fitta le opzioni vanilla (e con le stesse distribuzioni marginali del modello LV) verifica la seguente:

$$\sigma_{LV}^2 = L(S, t) E[V_t^2 | S_t = S]$$

Ma sotto le ipotesi (H1), (H2), (H3) del capitolo 1 la PDE (11) ammette una soluzione che sia una misura di probabilità, che sarà la probabilità di transizione congiunta del processo SLV, e dunque ciò ci garantisce l'esistenza di un modello SLV che fitti le opzioni vanilla. Chiaramente, sotto tale ipotesi, non è garantito che la probabilità di transizione ammetta densità, né tanto meno è detto che la soluzione sia unica: nel corso del capitolo 1 è stato investigato esclusivamente un risultato di esistenza, mentre il problema dell'unicità non è stato trattato.



### 3.1 Un modello SLV per il pricing di opzioni a barriera

Il mercato delle opzioni FX è generalmente riconosciuto come uno dei più liquidi, anche per opzioni esotiche o per le opzioni a barriera, che sono la classe di opzioni che ci interessa prezzare in questa sezione. Le opzioni a barriera, un tipo di opzione esotica, sono una particolare classe di opzioni che nascono (**knock-in**) o cessano di esistere (**knock-out**) nel momento in cui il prezzo del sottostante raggiunge un determinato prezzo prefissato (la **barriera**). Ovviamente per definizione esse sono path-dependent: come già visto, il modello LV ha dei problemi nel pricing delle opzioni il cui payoff non dipenda solo dallo stato finale ma anche dal percorso seguito dal sottostante.

Nel paper di Bloomberg ([2]) viene presentato un particolare modello SLV:

$$\begin{aligned} dS_t &= (r_d - r_f)S_t dt + L(S_t, t)S_t V_t dW_t^1 \\ dV_t &= k(\theta - V_t)dt + \xi V_t dW_t^2 \\ dW_t^1 dW_t^2 &= \rho dt \end{aligned} \tag{12}$$

Tale modello è anche implementato nella funzione OVML (Option Valuation Multi-Leg) del terminale Bloomberg, funzione che serve a prezzare strategie di opzioni multi-gamba (ovvero strategie che coinvolgono l'acquisto/vendita di due o più opzioni allo stesso tempo) FX.

In tale modello,  $S_t$  rappresenta il processo tasso di cambio per unità di valuta domestica-estera,  $V_t$  è il processo volatilità,  $r_d, r_f$  sono i tassi d'interesse domestici ed esteri, che assumeremo essere deterministici.  $L(S_t, t)$  è la **superficie di leva (leverage surface)**, che rappresenta la componente di volatilità locale del modello ed è calibrata sulle informazioni del mercato. Gli altri parametri ( $k, \theta, \xi, \rho$ ) hanno la stessa interpretazione di quelli del modello SV. Gli autori assumono anche che tali parametri possano avere una struttura a termine, con valori costanti a tratti.

Osserviamo che se  $\xi = 0$  il modello SLV degenera ad un modello LV, mentre dall'altro lato se  $L(S_t, t) = 1$  il modello degenera ad un modello SV. I parametri che "pesano" le due componenti (SV e LV) del modello SLV sono dunque  $\xi$ , ovvero la volatilità della volatilità, e la correlazione fra i Browniani  $\rho$ .

Scelto un set di parametri stocastici, si può calibrare la superficie di leva  $L(S_t, t)$  affinché coincida con il mercato spot delle opzioni vanilla. Entrambi gli step, la scelta dei parametri e la calibrazione della superficie di leva, sono importanti per ottenere un modello realistico, ma il secondo è più importante, poiché corregge eventuali errori nella scelta dei parametri stocastici e perché un eventuale calibrazione errata per la superficie di leva porterebbe ad un errore più grande nel pricing delle opzioni a barriera rispetto ad un errore di simile entità nella scelta dei parametri.

Concentriamoci dunque sul problema della calibrazione di  $L(S_t, t)$ , supponendo di avere un insieme di parametri stocastici, le curve dei tassi d'interesse e la superficie di volatilità implicita. Per fare ciò, anzitutto matchiamo il mercato con un modello LV e successivamente troviamo una funzione di leva tale per cui il modello SLV abbia la stessa distribuzione marginale del modello LV.

Se consideriamo dunque il modello LV:

$$dS_t = (r_d - r_f)S_t dt + \sigma_{LV}(S_t, t)S_t dW_t$$

Possiamo utilizzare, come visto nella sezione 2.4, la formula di Dupire per computare la volatilità locale  $\sigma(S_t, t) := \sigma_{LV}(S_t, t)$ .

A questo punto, utilizziamo il risultato trovato nella sezione precedente (9), che ci dice che la distribuzione marginale del modello SLV è uguale alla distribuzione di un modello LV in cui  $\sigma(S_t, t)$  ed è dato da:

$$\sigma(S_t, t)^2 = E[L(S_t, t)^2 V_t^2 | S_t = S] = L(S_t, t)^2 E[V_t^2 | S_t = S]$$

Tale condizione è equivalente a richiedere che sussista la seguente relazione:

$$p_{LV}(t, S_t) = \int_{\mathbb{R}_+} p(t, S, Y) dY$$

Vogliamo dunque imporre che  $\sigma(S_t, t)$  sia la volatilità locale calibrata con la formula di Dupire: la difficoltà di tale step è l'individuazione di  $L(S_t, t)$  per cui valga la relazione di sopra, poiché anche  $E[V_t^2 | S_t = S]$  dipende in maniera non banale da  $L(S_t, t)$ . In effetti, se consideriamo la PDE Forward di Kolmogorov per la densità di transizione  $p(t, S, V)$  di (12):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p}{\partial t}(t, S, V) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} (S^2 L(S_t, t)^2 V^2 p(t, S, V)) - \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial^2}{\partial V^2} (V^2 p(t, S, V)) \\ & - p(t, S, V) \xi \frac{\partial^2}{\partial S \partial V} (L(S_t, t) S V^2 p(t, S, V)) + \frac{\partial}{\partial S} ((r_d - r_f) S p(t, S, V)) \\ & + \frac{\partial}{\partial V} (k(\theta - V) p(t, S, V)) = 0, \\ & p(t_0, S, V) = \delta(S - S_0) \delta(V - V_0) \end{aligned} \quad (13)$$

Calcoliamo l'attesa condizionata della varianza dato lo spot futuro come l'integrale rispetto alla densità:

$$E[V_t^2 | S_t = S] = \frac{\int_0^\infty Y^2 p(t, S, Y) dY}{\int_0^\infty p(t, S, Y) dY}$$

Sostituendo all'equazione di sopra otteniamo dunque:

$$\sigma(S_t, t)^2 = L(S_t, t)^2 \frac{\int_0^\infty Y^2 p(t, S, Y) dY}{\int_0^\infty p(t, S, Y) dY} \quad (14)$$

Conoscere  $L$  ci da  $p$  risolvendo la PDE (13), mentre conoscere  $p$  ci da  $L$  per la formula precedente. Mettendo insieme (14) e (13) otteniamo che, per trovare

$p(t, S, V)$ , occorre risolvere la seguente PDE non lineare:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t}(t, S, V) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} \left( S^2 \sigma(S_t, t)^2 \frac{\int_0^\infty p(t, S, Y) dY}{\int_0^\infty V^2 p(t, S, Y) dY} V^2 p(t, S, V) \right) - \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial^2}{\partial V^2} (V^2 p(t, S, V)) \\ - p(t, S, V) \xi \frac{\partial^2}{\partial S \partial V} \left( \sigma(S_t, t) \left( \frac{\int_0^\infty p(t, S, Y) dY}{\int_0^\infty V^2 p(t, S, Y) dY} S V^2 \right)^{1/2} p(t, S, V) \right) \\ + \frac{\partial}{\partial S} ((r_d - r_f) S p(t, S, V)) + \frac{\partial}{\partial V} (k(\theta - V) p(t, S, V)) = 0, \\ p(t_0, S, V) = \delta(S - S_0) \delta(V - V_0) \end{aligned} \quad (15)$$

In accordo coi risultati ottenuti nella sezione precedente, l'equazione trovata è una PDE non lineare integro-differenziale, per cui valgono le stesse considerazioni sottolineate per la classe a cui il modello in esame appartiene.

In [2] si sceglie di adottare un metodo numerico, rapido e numericamente stabile, per la calibrazione della superficie di leva. Il metodo utilizzato è un metodo del punto fisso, in cui viene risolta ricorsivamente la PDE lineare associata a (15) tramite un metodo alle differenze finite.

Se  $Q$  è la mappa per cui  $Q(p^{(i)}) = p^{(i+1)}$  se e solo se  $p^{(i+1)}$  è soluzione della PDE lineare associata a  $p$ , allora è possibile costruire una sequenza ricorsiva di soluzioni, ad ognuna delle quali sarà associata una certa funzione di leva  $L^{(n)}(S, t)$ , fino a convergenza numerica.

Una volta calibrato il modello, infine, il pricing delle opzioni può essere realizzato risolvendo la seguente PDE per il prezzo  $C(t, S, V)$  di un contratto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} S^2 L(S, t)^2 V^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \rho \xi S L(S, t) V^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial V} + \frac{1}{2} \xi^2 V^2 \frac{\partial^2 C}{\partial V^2} + (r_d - r_f) S \frac{\partial C}{\partial S} + \\ k(\theta - V) \frac{\partial C}{\partial V} = r_d C \end{aligned}$$

Con le appropriate condizioni al bordo e valore finale per il payoff.

## Conclusioni

In questa tesi abbiamo dimostrato un risultato, di carattere puramente teorico, di esistenza di soluzioni (nel senso delle distribuzioni) che siano misure di probabilità per PDEs non lineari paraboliche del secondo ordine. Abbiamo fornito delle condizioni di esistenza globale e locale e, sotto certe ipotesi, fornito un momento temporale  $T$  oltre il quale sappiamo non esistere alcuna soluzione su ogni intervallo  $[0, \tau]$  per  $\tau \geq T$ . Tramite la profonda connessione fra la teoria delle PDEs e delle SDE siamo riusciti a collegare la classe di PDEs appena studiata con un'applicazione pratica di carattere finanziaria, la calibrazione di un modello SLV proposto da Bloomberg per il pricing di opzioni a barriera nel mercato FX. L'esistenza di un modello SLV, e dunque di un processo stocastico, che fitti le opzioni vanilla scambiate sul mercato è infatti equivalente all'esistenza di una soluzione, che sia la probabilità di transizione del processo stocastico, di una PDE non lineare integro differenziale. Le ipotesi, in generale più rilassate, dell'esistenza di una soluzione che sia una misura di probabilità (rispetto ai risultati di esistenza di soluzioni che siano densità di probabilità) permettono di garantire l'esistenza di un tale processo sotto ipotesi più deboli. Il nostro risultato, tuttavia, non garantisce in alcun modo l'unicità: uno studio riguardante l'unicità è stato pubblicato nel 2014 dagli stessi autori che hanno ricavato il risultato d'esistenza in [35], in cui condizioni sufficienti per l'unicità sono state fornite.

## Appendice

**Teorema A0.4.** [*Teorema del punto fisso di Schauder*] Sia  $K$  compatto convesso non vuoto in uno spazio normato completo. Sia  $Q$  mappa continua tale che  $Q(K) \subseteq K$ . Allora  $Q$  ha un punto fisso ovvero esiste  $x \in K$  tale che  $Q(x) = x$

*Dimostrazione.* Una dimostrazione può essere trovata in [18] □

**Teorema A0.5.** [*Teorema di Prokhorov*] Sia  $\mathcal{M}$  una famiglia di misure Boreliane su  $\mathbb{R}^d$ . Allora sono equivalenti le seguenti condizioni:

- (i) Ogni successione  $\{\mu_n\} \in \mathcal{M}$  contiene una sottosuccessione che converge debolmente;
- (ii) la famiglia  $\mathcal{M}$  è uniformemente tight e uniformemente limitata nella norma della variazione totale.

*Dimostrazione.* [18] [Theorem 8.6.2] □

**Lemma A0.6.** *Lemma di Gronwall* Sia  $\varphi \in C([0, T])$  tale che

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t f(s)\varphi(s) ds, \quad t \in [0, T],$$

dove  $a \in \mathbb{R}$  e  $f$  è una funzione continua non negativa. Allora:

$$\varphi(t) \leq ae^{\int_0^t f(s) ds}, \quad t \in [0, T].$$

*Dimostrazione.* Sia

$$F(t) = a + \int_0^t f(s)\varphi(s) ds.$$

Per ipotesi,  $\varphi \leq F$ . Allora essendo  $f$  non negativa:

$$\frac{d}{dt} \left( e^{-\int_0^t f(s) ds} F(t) \right) = e^{-\int_0^t f(s) ds} (-f(t)F(t) + f(t)\varphi(t)) \leq 0.$$

Integrando otteniamo

$$e^{-\int_0^t f(s) ds} F(t) \leq a,$$

da cui la tesi

$$\varphi(t) \leq F(t) \leq ae^{-\int_0^t f(s) ds}.$$

□

**Definizione A0.7.** Sia  $\phi \geq 0$ , funzione su  $\mathbb{R}^d$ ,  $\int \phi = 1$ ,  $\phi(x) = 0$  se  $|x| > 1$ . Per ogni  $\epsilon > 0$  definiamo la seguente funzione, detta **mollificatore**:  $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-d}\phi(x/\epsilon)$ .

**Proposizione A0.8.** Consideriamo (quando ben definita) la convoluzione  $f_\epsilon = f * \phi_\epsilon$ . Allora:

- $\text{Supp } f_\epsilon \subset \text{supp } f + \text{supp } \phi_\epsilon$

- Se  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  con supporto contenuto in un compatto  $K \Rightarrow f_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$
- Se in particolare  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  allora  $f_\epsilon \rightarrow f$  per  $\epsilon \rightarrow 0+$  uniformemente

*Dimostrazione.* Dimostrazioni ed ulteriori proprietà della mollificazione possono essere trovati su [[36], pag. 1-5]  $\square$

**Proposizione A0.9** (Disuguaglianza di Young). *Date due costanti  $a \geq 0, b \geq 0$ , se  $p > 1, q > 1$  sono due numeri reali tali che  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , allora:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

L'uguaglianza si ha solo se  $a^p = b^q$

*Dimostrazione.* La dimostrazione è banale se  $a = 0$  oppure  $b = 0$ . Supponiamo dunque che  $a > 0, b > 0$ . Sia  $t$  tale che  $t = \frac{1}{p}$ ,  $(1-t) = 1/q$ . La funzione logaritmo è concava, dunque:

$$\ln(ta^p + (1-t)b^q) \geq t\ln(a^p) + (1-t)\ln(b^q) = \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$$

L'uguaglianza si ha solo se  $a^p = b^q$ . Elevando ad  $e$  si ottiene la disuguaglianza.  $\square$

## A0.2 Spazi di Holder

Sia  $D$  un dominio in  $\mathbb{R}^{d+1}$ , con  $d$ -coordinate spaziali ed una coordinata temporale,  $P = (t, x) = (t, x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ .

Se  $P = (t, x), Q = (t', x')$ , definiamo una distanza (parabolica):

$$d(P, Q) = (|x - x'|^2 + |t - t'|)^{1/2}$$

dove  $|x|$  è l'usuale norma euclidea di un vettore  $d$ -dimensionale.

Questa formula definisce una metrica e può essere usata per definire l' $h$ -Holder continuità, con  $0 < h < 1$ . Data una funzione  $u$  definiamo le seguenti:

- $|u|_{H^0(D)} = \sup_D |u|$
- $H_h^D(u) = \sup_{P, Q \in D} \frac{|u(P) - u(Q)|}{d(P, Q)^h}$
- $|u|_{H^{0,h,h/2}(D)} = |u|_{H^0(D)} + H_h^D(u)$

**Definizione A0.10.** *Diciamo che  $u$  è **uniformemente Holder** con esponente  $h$  in  $D$ , e scriviamo  $u \in H^{0,h,h/2}(D)$ , se e solo se  $|u|_{H^{0,h,h/2}(D)} < \infty$ .*

Supponiamo adesso che  $u$  sia differenziabile rispetto a  $t$  e due volte differenziabile rispetto ad  $x$ , con tutte le derivate continue. Possiamo definire le seguenti norme:

- $|u|_{H^{1,h,h/2}(D)} = |u|_{H^{0,h,h/2}(D)} + \sum_{1 \leq i \leq d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{H^0(D)} + |\partial_t u|_{H^{0,h,h/2}(D)}$

- $|u|_{H^{2,1}(D)} = |u|_{H^0(D)} + \sum_{1 \leq i \leq d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{H^0(D)} + \sum_{1 \leq i, j \leq d} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{H^0(D)} + |\partial_t u|_{H^0(D)}$
- $|u|_{H^{2,h,h/2}(D)} = |u|_{H^{1,h,h/2}(D)} + \sum_{1 \leq i, j \leq d} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{H^{0,h,h/2}(D)}$

**Definizione A0.11.** Denotiamo con  $H^{1,h,h/2}$ ,  $H^{2,1}(D)$  e  $H^{2,h,h/2}(D)$  gli insiemi di tutte le funzioni  $u$  per cui la corrispondente norma (fra quelle definite prima) sia finita.

In particolare, tali insiemi sono spazi di Banach e algebre ([33]). Gli spazi di ordine superiore possono essere definiti seguendo la stessa procedura.

## Bibliografia

- [1] O. Manita and S. Shaposhnikov, “Nonlinear parabolic equations for measures,” *St. Petersburg Math. J.*, vol. 25, no. 1, pp. 43–62, 2013.
- [2] Tataru and Fisher, “Stochastic local volatility.” Bloomberg, 2010.
- [3] B. Dupire, “Pricing with a smile,” 1994.
- [4] E. Derman and I. Kani, “Riding on a smile,” *Risk*, vol. 7, 01 1994.
- [5] S. Heston, “A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options,” *Review of Financial Studies*, vol. 6, pp. 327–343, 1993.
- [6] J. Hull and A. G. White, “The pricing of options on assets with stochastic volatilities,” *Journal of Finance*, vol. 42, pp. 281–300, 1987.
- [7] Kolmogoroff, “Über die analytischen methoden in der wahrscheinlichkeitsrechnung,” *Mathematische Annalen*, vol. 104, pp. 415–458, 1931.
- [8] D. Aronson and P. Besala, “Uniqueness of solutions of the Cauchy problem for parabolic equations,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 13, p. 516–526, 03 1966.
- [9] A. Erdelyi and A. Friedman, “Partial differential equations of parabolic type,” *The Mathematical Gazette*, vol. 51, p. 83, 02 1967.
- [10] Bogachev and et. al., *Fokker-Planck-Kolmogorov Equations*, vol. 207 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 2015.
- [11] L. Ambrosio, “Transport equation and Cauchy problem for bv vector fields,” *Inventiones mathematicae*, vol. 158, pp. 227–260, 11 2004.
- [12] R. L. Dobrushin, “Vlasov equations,” *Functional Analysis and Its Applications*, vol. 13, pp. 115–123, 1979.
- [13] V. V. Kozlov, “The generalized Vlasov kinetic equation,” *Russian Mathematical Surveys*, vol. 63, pp. 691–726, 2008.
- [14] McKean and Henry, “A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations,” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 56, pp. 1907–11, 01 1967.
- [15] H. McKean, “Propagation of chaos for a class of non-linear parabolic equations,” *Stochastic differential equations (Lecture series in differential equations, session 7, Catholic University, 1967)*, vol. 2, 01 1967.



- [16] K. Ishige and M. Murata, “Uniqueness of nonnegative solutions of the Cauchy problem for parabolic equations on manifolds or domains,” *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, vol. Ser. 4, 30, no. 1, pp. 171–223, 2001.
- [17] A. Shapovalov, A. Trifonov, and M. Elena, “Nonlinear Fokker-Planck equation in the model of asset returns,” *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, vol. 4, 04 2008.
- [18] V. Bogachev, *Measure Theory*, vol. 1-2 of *Measure Theory*. Springer, 2007.
- [19] V. Bogachev, G. Da, P. Röckner, G. Da Prato, and M. Röckner, “On parabolic equations for measures,” *Communications in Partial Differential Equations - COMMUN PART DIFF EQUAT*, vol. 33, 03 2007.
- [20] S. Shaposhnikov, “On uniqueness of a probability solution to the Cauchy problem for the Fokker–Planck–Kolmogorov equation,” *Theory of Probability Its Applications*, vol. 56, pp. 96–115, 01 2012.
- [21] V. Bogachev, M. Röckner, and S. V. Shaposhnikov, “On uniqueness problems related to the Fokker–Planck–Kolmogorov equation for measures,” *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 179, pp. 7–47, 2011.
- [22] R. J. Diperna and P.-L. Lions, “Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces,” *Inventiones mathematicae*, vol. 98, pp. 511–547, 1989.
- [23] C. Homescu, “Local stochastic volatility models: Calibration and pricing,” *SSRN Electronic Journal*, 01 2014.
- [24] A. Pascucci, *PDE and martingale methods in option pricing*, vol. 2 of *Bocconi & Springer Series*. Springer, Milan; Bocconi University Press, Milan, 2011.
- [25] A. Friedman, *Stochastic Differential Equations and Applications*, pp. 75–148. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [26] T. Bjork, *Arbitrage Theory in Continuous Time*. No. 9780199574742 in OUP Catalogue, Oxford University Press, 2009.
- [27] Y. Tian, “The hybrid stochastic-local volatility model with applications in pricing fx options,” *SSRN Electronic Journal*, 01 2013.
- [28] I. Gyöngy, “Mimicking the one-dimensional marginal distributions of processes having an Ito differential,” *Probability Theory and Related Fields*, vol. 71, pp. 501–516, 1986.
- [29] C.-Y. Wang, “Partial differential equations for probabilists,” *Journal of Applied Statistics*, pp. 1393–1394, 01 2014.
- [30] D. T. Breeden and R. H. Litzenberger, “Prices of state-contingent claims implicit in option prices,” *The Wharton School*, 1978.

- 
- [31] P. Hagan, D. Kumar, A. Lesniewski, and D. Woodward, “Managing smile risk,” *Wilmott Magazine*, vol. 1, pp. 84–108, 01 2002.
- [32] M. Fengler, *Semiparametric Modeling of Implied Volatility*. 12 2005.
- [33] P. Carr and D. B. Madan, “Option valuation using the fast Fourier transform,” *Journal of Computational Finance*, vol. 2, pp. 61–73, 1999.
- [34] R. T. des Combes, “Non-parametric model calibration in finance,” 2011.
- [35] O. A. Manita, M. S. Romanov, and S. V. Shaposhnikov, “On uniqueness of solutions to nonlinear Fokker–Planck–Kolmogorov equations,” *arXiv e-prints*, p. arXiv:1407.8047, July 2014.
- [36] L. Hörmander, *Linear Partial Differential Operators*. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer, 1963.