ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

SISTEMI LINEARI DI CURVE PIANE

Tesi di Laurea in Geometria Proiettiva

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Monica Idà

Presentata da:
Elisa Raspanti

II Sessione
Anno Accademico 2010/2011

Indice

Introduzione

Lavorando in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, lo spazio proiettivo complesso 2-dimensionale, prendiamo in considerazione le curve algebriche di grado d, ovvero i luoghi degli zeri di polinomi omogenei di grado d nelle variabili x_0, x_1, x_2 a coefficienti complessi. Nello specifico la tesi verte sui sistemi lineari di curve piane, ovvero sui sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d)$, che è l'insieme dei polinomi omogenei non nulli di grado d a coefficienti in $\mathbb{C}$ nelle variabili x_0, x_1, x_2 quozientato con la relazione di proporzionalità.
Dopo aver esposto alcune nozioni e alcuni risultati più generali (tra cui la molteplicità di una curva in un punto, il passaggio da coordinate affini a coordinate proiettive e viceversa...), ci si soffermerà sullo studio di alcune condizioni lineari, come il passaggio di una curva piana per un punto con molteplicità almeno k; si proverà invece, ad esempio, che imporre che la singolarità in un punto fissato sia ordinaria, oppure non ordinaria, non dà condizioni lineari.
Si parlerà, poi, in una prima parte di sistemi lineari di coniche ($d = 2$) e in una seconda di sistemi lineari di cubiche ($d = 3$); in entrambi i casi si vedranno alcuni esempi e ci si concentrerà sui fasci di curve, ovvero i sistemi lineari 1-dimensionali, sia per le coniche che per le cubiche; è in quest'ultima parte che si inserisce la dimostrazione di una nota proposizione che afferma che se l'intersezione tra due cubiche è costituita da nove punti distinti e un'altra cubica $\mathcal{C}$ passa per otto di quei punti, allora quella cubica $\mathcal{C}$ deve passare anche per il nono.

Capitolo 1

Sistemi lineari di curve di grado d in $\mathbb{P}^2$

Si denota con $\mathbb{P}^n$ lo spazio proiettivo n-dimensionale su $\mathbb{C}$, cioè $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$. Si suppone fissato su $\mathbb{P}^n$ il riferimento proiettivo standard e si lavorerà con coordinate omogenee $x_0, x_1, ..x_n$. In particolare verrà considerato $\mathbb{P}^2$.

Definizione 1. Useremo la seguente notazione:

$$\mathbb{C}[x_0, x_1, ..x_n]_d := \{f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, ..x_n] \mid f \text{ omogeneo di grado d}\} \cup \{0\}$$

Lemma 1. $\mathbb{C}[x_0, x_1, ..x_n]_d$ è uno spazio vettoriale di dimensione

$$dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x_0, x_1, ..x_n]_d) = \binom{n+d}{d}$$

Dimostrazione. Si dimostra per doppia induzione su n e su d.
Se n=1 gli elementi di $\mathbb{C}[x_0, x_1]_d$ sono tutti e soli quelli ottenuti come combinazione lineare dai seguenti d+1 monomi, $x_0^d, x_0^{d-1}x_1, .., x_0 x_1^{d-1}, x_1^d$, cioè sono $\binom{1+d}{d}$. Supponiamo che il lemma sia vero per n-1. Se $d = 0$ ovviamente $\mathbb{C}[x_0, x_1, ..x_{n-1}]_0$ ha dimensione 1. Supponiamo ora che il lemma sia vero per d-1. Per rifarci alle ipotesi induttive consideriamo l'insieme dei monomi monici di grado d in $x_0, ..x_n$ come unione disgiunta $A \cup B$, dove A è l'insieme di quelli in cui compare x_n e B di tutti gli altri. Se ogni monomio di A

viene diviso per x_n, allora A è in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei monomi di grado d-1 in $x_0, ..x_n$ e quindi per l'ipotesi induttiva su d

$$\#A = dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x_0, ..x_n]_{d-1}) = \binom{n+(d-1)}{(d-1)},$$

dove #A indica la cardinalità dell'insieme A.
B invece è costituito dai monomi di grado d in $x_0, ..x_{n-1}$ e quindi per l'ipotesi induttiva su n

$$\#B = \binom{(n-1)+d}{d}.$$

In conclusione

$$dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x_0, x_1, ..x_n]_d) = \#A + \#B = \binom{n+(d-1)}{(d-1)} + \binom{(n-1)+d}{d} = \binom{n+d}{d}$$

per le note proprietà del coefficiente binomiale. □

Definizione 2. Una *curva algebrica* $\mathcal{C}$ di grado d di $\mathbb{P}^2$ è una classe di equivalenza $[f]_\sim$ dove $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d$, $f \neq 0$ e $\sim$ indica la relazione di proporzionalità. Si scrive

$$\mathcal{C} \,:\, f = 0,$$

si dice che f è un'equazione per $\mathcal{C}$; il grado di $\mathcal{C}$, denotato con deg$\mathcal{C}$, è quello di f.
Se d=1, la curva è una retta, se d=2, è detta conica, se d=3 cubica.
Il sistema lineare completo delle curve di grado d di $\mathbb{P}^2$ si definisce come

$$\Lambda_d := \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d)$$

cioè è l'insieme dei polinomi omogenei non nulli di grado d a coefficienti in $\mathbb{C}$ nelle variabili x_0, x_1, x_2 quozientato con la relazione di proporzionalità.
Per quanto visto nel lemma 1 la dimensione dello spazio proiettivo Λ_d è

$$N = N(d) := dim\Lambda_d = \binom{2+d}{d} - 1.$$

In particolare nel caso delle coniche $N = 5$.
Con "curva di $\mathbb{P}^2$" intenderemo nel seguito sempre una curva algebrica di $\mathbb{P}^2$.

Definizione 3. Un *sistema lineare* Γ *di curve* di grado d è un sottospazio proiettivo di Λ_d, cioè Γ è il proiettivizzato di un sottospazio vettoriale L di $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d$; quindi per verificare che un insieme $\Gamma \subseteq \Lambda_d$ sia un sistema lineare di curve, basta provare che dati due elementi di L anche una loro combinazione lineare sta in L.
La dimensione vettoriale di Γ è la dimensione di L e la dimensione proiettiva di Γ, o più semplicemente la dimensione di Γ è come al solito $dim\Gamma = dim\mathrm{L} - 1$.
Se $dim\Gamma = 1$, si dice che Γ è un fascio.

Notazione 1. Useremo la seguente notazione:
se la curva $\mathcal{C}: \ f = 0$ ha grado d, scriveremo

$$f = \sum_{i+j+k=d} a_{ijk} x_0^i x_1^j x_2^k.$$

Proposizione 1. Siano dati $P_1, ..P_t \in \mathbb{P}^2$, $P_i = [p_{0i}, p_{1i}, p_{2i}]$. L'insieme delle curve di grado d passanti per i punti $P_1, ..P_t$ è un sistema lineare di dimensione maggiore o uguale a $N - t$ e verrà denotato con $\Lambda_d(P_1, ..P_t)$.

Dimostrazione. I coefficienti a_{ijk} della generica curva di grado d passante per $P_1, ..P_t$ devono soddisfare il seguente sistema

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i+j+k=d} a_{ijk} p_{01}^i p_{11}^j p_{21}^k = 0 \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i+j+k=d} a_{ijk} p_{0t}^i p_{1t}^j p_{2t}^k = 0 \end{cases}$$

Trattandosi di un sistema lineare omogeneo di t equazioni in $N+1$ incognite (nel caso delle coniche si ha $N = 5$, quindi le incognite sono 6), rappresenta il proiettivizzato di un sottospazio vettoriale $\mathcal{A}$ di $\mathbb{C}^{N+1}$; dato che, chiamata M la matrice associata al sistema, $rg(M) \leqslant t$, si ha che $dim\mathbb{P}(\mathcal{A}) = dim\mathcal{A} - 1 \geqslant$
$\geqslant [(N+1) - t] - 1 = N - t$ □

Osservazione 1. Ricordiamo che un polinomio complesso omogeneo in due variabili, $G(\lambda, \mu)$, di grado d ha esattamente d radici contate con molteplicità pensando ad una radice di G come ad un punto $[\lambda_0, \mu_0]$ di $\mathbb{P}^1$.

Definizione 4. Data una retta r di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

$$r : \begin{cases} x_0 = \lambda a + \mu b \\ x_1 = \lambda c + \mu d \\ x_2 = \lambda e + \mu h \end{cases}$$

con $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ e *rango* $\begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & h \end{pmatrix} = 2$, considero un punto $P \in r$, $P = (\lambda_0 a + \mu_0 b, \lambda_0 c + \mu_0 d, \lambda_0 e + \mu_0 h)$. Sia $\mathcal{C} \in \Lambda_d$,

$$\mathcal{C} : \; F(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

Si definisce in questo modo la *molteplicità d'intersezione di* r *e* $\mathcal{C}$ *in* P:

$$i(\mathcal{C}, r, P) := \begin{cases} 0 & \text{se } P \notin \mathcal{C} \\ \infty & \text{se } r \subset \mathcal{C} \\ m & \text{se } [\lambda_0, \mu_0] \text{ è radice di molteplicità m per la} \\ & \text{risolvente } F(\lambda a + \mu b, \lambda c + \mu d, \lambda e + \mu h) = 0 \end{cases}$$

Definizione 5. Data una curva $\mathcal{C} \in \Lambda_d$ e un punto P, si definisce la *molteplicità di* $\mathcal{C}$ *in* P come il minimo delle molteplicità di intersezione in P di $\mathcal{C}$ con una qualsiasi delle rette del fascio di centro P:

$$\mu_P(\mathcal{C}) := \min_{r \ni P} i(\mathcal{C}, r, P)$$

Se $\mu_P(\mathcal{C}) = 1$ P è un punto semplice di $\mathcal{C}$.
Se $\mu_P(\mathcal{C}) > 1$ P è un *punto* multiplo di $\mathcal{C}$, in particolare è *doppio* se $\mu_P(\mathcal{C}) = 2$, *triplo* se $\mu_P(\mathcal{C}) = 3$ eccetera. La curva $\mathcal{C}$ si dice singolare se possiede anche solo un punto multiplo, altrimenti è non singolare (o liscia).

Osservazione 2. Le nozioni sopra introdotte proiettivamente sono nozioni locali e quindi si danno in modo analogo anche nel caso affine.

Osservazione 3. Nella maggior parte dei casi ragionare nell'affine semplifica i conti.

In generale, dato $f \in \mathbb{C}[x,y]$ con $deg f = d$, chiamiamo omogeneizzato di f rispetto a x_0 il polinomio F omogeneo di grado d in $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ con

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^d f(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}).$$

Viceversa se ho $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d$, si chiama demogeneizzato di F rispetto a x_0 il polinomio f di grado $\leqslant d$ in $\mathbb{C}[x,y]$ con

$$f(x,y) = F(1,x,y).$$

Chiamiamo U_0 la carta affine $U_0 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2 \mid x_0 \neq 0\}$. La biezione $U_0 \xrightarrow{\varphi_0} \mathbb{A}^2$ tale che $\varphi_0([a_0, a_1, a_2]) = \varphi_0([1, \frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}]) = (\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0})$ permette di associare ai punti di $\mathbb{P}^2$ con $x_0 \neq 0$ punti di $\mathbb{A}^2$ e viceversa. Possiamo inoltre associare al punto $[a_0, a_1, a_2]$ la direzione della retta di $\mathbb{A}^2$ con giacitura $< (a_1, a_2) >$. D'ora in avanti si userà questa corrispondenza per passare dai punti nell'affine a quelli nel proiettivo e viceversa.

Proposizione 2. a) Sia $m \geqslant 1$ e $\mathcal{C}$ una curva affine, $\mathcal{C}: \ f = 0$. Un punto P appartiene a $\mathcal{C}$ e ha molteplicità m per $\mathcal{C}$ se e solo se $f(P) = 0$, tutte le derivate di f fino all'ordine m-1 si annullano in P ed esiste una derivata parziale di f di ordine m non nulla in P.

b) Sia $m \geqslant 1$ e sia $\mathcal{C}$ una curva proiettiva, $\mathcal{C}: \ F = 0$. Un punto P appartiene a $\mathcal{C}$ e ha molteplicità m per $\mathcal{C}$, se e solo se in P si annullano tutte le derivate parziali di F di ordine m-1, mentre ce n'è una di ordine m non nulla.
Attenzione: affermare che $F(P) = 0$, o che $\frac{\delta^{m-1}F}{\delta x_0^i \delta x_1^j \delta x_2^{m-1-i-j}}|_P = 0$, significa scegliere un rappresentante vettoriale di P e chiedere che la funzione si annulli sul rappresentante. Si verifica facilmente che tale nozione è ben posta.

Per la dimostrazione vedi la proposizione 34.6 del [4].

Notazione 2. Sia $P \in \mathbb{P}^n$, $m \in \mathbb{Z}$ con $1 \leqslant m \leqslant d$; poniamo

$$\Lambda_d(P^m) = \{\mathcal{C} \in \Lambda_d \mid P \in \mathcal{C}, \ \mu_P(\mathcal{C}) \geqslant m\}.$$

Più in generale se $P_1, ..P_t$ sono i punti di $\mathbb{P}^n$, $m_i \in \mathbb{Z}$ con $1 \leqslant m_i \leqslant d$, poniamo:

$$\Lambda_d(P_1^{m_1}, .., P_t^{m_t}) = \{\mathcal{C} \in \Lambda_d \mid P_i \in \mathcal{C}, \mu_{P_i}(\mathcal{C}) \geqslant m_i \,\forall i\}.$$

Proposizione 3. Dati $P = [p_0, p_1, p_2] \in \mathbb{P}^2$, $m \in \mathbb{Z}$ con $1 \leqslant m \leqslant d$, si ha che $\Lambda_d(P^m)$ è un sistema lineare di dimensione $N - \binom{m+1}{2}$.

Dimostrazione. Per la proposizione 2, condizione necessaria e sufficiente affinché $\mu_P(\mathcal{C}) \geqslant m$ è che si annullino in P tutte le derivate parziali di ordine m-1. Sia $F = \Sigma a_{ijk} x_0^i x_1^j x_2^k$ il generico polinomio di grado d; imporre che le sue derivate parziali di ordine m-1 siano nulle dà un sistema lineare omogeneo di $\binom{(m-1)+2}{2}$ equazioni (tante quante i polinomi omogenei di grado m-1 nelle variabili x_0, x_1, x_2) nelle N+1 incognite a_{ijk}, $i + j + k = m - 1$. Quindi

$$dim(\Lambda_d(P^m)) \geqslant N - \binom{m+1}{2}.$$

Si dimostra che la dimensione è proprio quella, provando che le equazioni del sistema sono linearmente indipendenti. Senza perdita di generalità, si può supporre $P = [1, 0, 0]$ (basta scegliere opportunamente il sistema di riferimento); passando all'affine, come descritto nell'osservazione 3, $P = (0, 0)$ e inoltre il generico polinomio $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d$ che descrive una curva di Λ_d, deomogeneizzato, diventa un polinomio f di grado d in x e y, in generale non omogeneo. Dato che $P = (0, 0)$, il polinomio F coincide con il suo sviluppo in serie di Taylor in P, quindi i coefficienti delle x e delle y corrispondono proprio alle derivate in P, moltiplicati per opportuni coefficienti numerici; quindi annullare le derivate parziali fino all'ordine m-1 significa annullare i corrispondenti coefficienti di f e questo dà un sistema di equazioni linearmente indipendenti in Λ_d. □

Osservazione 4. Imporre che la curva generica abbia un punto di molteplicità esattamente m non dà un sistema lineare. Infatti bisognerebbe aggiungere nella dimostrazione precedente che almeno uno dei coefficienti di grado m del polinomio sia non nullo, ma questa non è una condizione lineare in Λ_d.

Proposizione 4. Dati $P_i \in \mathbb{P}^2$, $m_i \in \mathbb{Z}$ con $1 \leqslant m_i \leqslant d \, \forall i = 1..t$, si ha che $\Lambda_d(P_1^{m_1}, .., P_t^{m_t})$ è un sistema lineare di dimensione

$$dim \Lambda_d(P_1^{m_1}, .., P_t^{m_t}) \geqslant N - \sum_{i=1}^{t} \binom{m_i + 1}{2}.$$

Dimostrazione. Imporre il passaggio per P_i ad una $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d$ con $\mathcal{S} : F = 0$, $\mu_{P_i}(\mathcal{S}) \geqslant m_i$, significa annullare le derivate parziali di F in P_i di ordine m-1 (proposizione 2). Ragionando come nella dimostrazione della proposizione 3, questo corrisponde ad un sistema lineare omogeneo di $\sum_{i=1}^{t} \binom{m_i+1}{2}$ equazioni in $N + 1$ incognite e dunque è provata la tesi. □

Proposizione 5. Fissata una retta r e un punto $P \in r$, fissato $k \in \mathbb{N}$ oppure $k = \infty$

$$H = \{C \in \Lambda_d \mid i(\mathcal{C}, r, P) \geqslant k\}$$

è un sistema lineare. In particolare quindi assegnare una tangente (cioè scegliere $k = 2$) dà un sistema lineare.

Dimostrazione. Dati $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in H$ con $\mathcal{C} : F = 0$, $\mathcal{D} : G = 0$, dati $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, considero $\mathcal{E} : \alpha F + \beta G = 0$. Si vuole dimostrare che $\mathcal{E} \in H$, $\forall\, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in H$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$; questo infatti è sufficiente per dire che H è un sistema lineare (vedi definizione 3).
Nelle notazioni usate per la definizione 4, se $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in H$ allora $[\lambda_0, \mu_0]$ è una radice di molteplicità almeno k per

$$F(\lambda a + \mu b, \lambda c + \mu d, \lambda e + \mu h) = 0$$

e per

$$G(\lambda a + \mu b, \lambda c + \mu d, \lambda e + \mu h) = 0.$$

Quindi se $k \in \mathbb{N}$, lo è anche per

$$\alpha F(\lambda a + \mu b, \lambda c + \mu d, \lambda e + \mu h) + \beta G(\lambda a + \mu b, \lambda c + \mu d, \lambda e + \mu h) = 0.$$

Se $k = \infty$, considerando $r : l = 0$, si ha che

se $r \subset \mathcal{C}$ e $r \subset \mathcal{D}$ allora (vedi lemma al paragrafo §2.5 [2]) $l|F$ e $l|G$

quindi

$$l|\alpha F + \beta G \text{ e quindi (vedi lemma al paragrafo §2.5 [2]) } r \subset \mathcal{E}$$

In ogni caso si trova che $i(\mathcal{E}, r, P) \geqslant k$, cioè $\mathcal{E} \in H$. Quindi H è un sistema lineare di curve. $\square$

Osservazione 5. Sia $\mathcal{C} \in \Lambda_d$, sia $P = [1, a, b]$ e sia $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C} \cap U_0 : f = 0$. Se $\mu_P(\mathcal{C}) = m$, allora esistono m rette t_j contate con molteplicità tali che $i(\mathcal{C}, t_j, P) \geqslant m + 1$. Queste rette sono dette *tangenti principali* a $\mathcal{C}$ in P e la loro equazione globale è data su U_0 da

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \frac{\delta^m f}{\delta x^i \delta y^{m-i}}|_{(a,b)} (x-a)^i (y-b)^{m-i} = 0 \tag{1.1}$$

Si chiama *cono tangente alla curva in P* la curva di equazione affine 1.1, cioè il complesso delle tangenti principali. Se il numero di tangenti principali distinte è proprio m, il punto è detto *punto multiplo (o punto singolare) ordinario*; un *nodo* è un punto doppio ordinario, una *cuspide* è un punto doppio non ordinario.

Imporre che le curve abbiano un punto di molteplicità e che la singolarità sia ordinaria, oppure non ordinaria, non dà condizioni lineari:

Lemma 2. Fissato un punto P, si considerino i seguenti insiemi

$$\Sigma = \{\mathcal{C} \in \Lambda_d \mid C \text{ ha un nodo in P}\}$$

$$\Sigma' = \{\mathcal{C} \in \Lambda_d \mid C \text{ ha un punto doppio non ordinario in P}\}$$

Né l'uno né l'altro sono sistemi lineari.

Dimostrazione. Basta esibire un controesempio per entrambi gli insiemi.
Per semplicità si possono fare i conti prima nell'affine e poi passare al proiettivo (vedi osservazione 3).
Si scelgono

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + y^3$$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 + y^3.$$

Questi polinomi coincidono con i loro sviluppi di Taylor nell'origine; siccome in entrambi i casi la prima componente omogenea non nulla è quella di grado 2, in entrambi i casi l'origine è un punto doppio; il cono tangente si ottiene imponendo alla componente omogenea di grado 2 (la prima non nulla) di annullarsi, ottenendo rispettivamente

$$(x + y)(x - y) = 0$$

$$(x + iy)(x - iy) = 0.$$

Si nota che in entrambi i casi il cono tangente si spezza in due tangenti principali distinte, quindi in entrambi i casi l'origine è un punto doppio ordinario. Considero ora la combinazione lineare di f e g ottenuta semplicemente sommandole:

$$e(x, y) = f(x, y) + g(x, y) \quad \Rightarrow \quad e(x, y) = 2x^2 + 2y^3$$

Questo coincide con lo sviluppo di Taylor nell'origine; la prima componente omogenea non nulla è ancora quella di grado 2, ma il cono tangente che si ottiene è

$$x(2x) = 0.$$

In questo caso il cono tangente è costituito da una tangente doppia e quindi l'origine è un punto doppio non ordinario.
Traducendo questo risultato nel proiettivo, si ha che all'origine corrisponde il punto $P = [1, 0, 0]$, ad *f*, a g e ad e corrispondono rispettivamente

$$\begin{aligned} F =& x_0 x_1^2 - x_0 x_2^2 + x_2^3 \\ G =& x_0 x_1^2 + x_0 x_2^2 + x_2^3 \\ E =& 2x_0 x_1^2 + 2x_2^3 \end{aligned}$$

e per quanto appena visto nell'affine, ponendo $\mathcal{C} : F = 0$, $\mathcal{D} : G = 0$, $\mathcal{M} : E = 0$, con $d = 3$ si ha che $F + G = E$, quindi

$$\mathcal{C} \in \Sigma,\ \mathcal{D} \in \Sigma \text{ ma } \mathcal{M} \notin \Sigma.$$

Allora si può dire che Σ non è un sistema lineare.

Si procede in maniera analoga per Σ'. Si scelgono

$$\begin{aligned} f(x,y) =& x^2 + y^3 \\ g(x,y) =& - x^2 + y^3. \end{aligned}$$

Questi coincidono con gli sviluppi di Taylor nell'origine; in entrambi casi la prima componente non nulla è quella di grado 2 e il cono tangente ottenuto annullando quella componente è costituito da una tangente doppia. Quindi l'origine è un punto doppio non ordinario sia per l'uno che per l'altro.
Come prima, si considera la combinazione lineare di f e g ottenuta sommandole:

$$e(x,y) = f(x,y) + g(x,y) \quad \Rightarrow \quad e(x,y) = 2y^3$$

Si nota dunque che in questo caso l'origine è un punto triplo.
Come anche prima, si traduce questo risultato nel proiettivo dove ad f, g ed e corrispondono rispettivamente

$$\begin{aligned} F =& x_0x_1^2 + x_2^3 \\ G =& - x_0x_1^2 + x_2^3 \\ E =& 2x_2^3 \end{aligned}$$

e per quanto appena visto nell'affine, ponendo $\mathcal{C} : F = 0$, $\mathcal{D} : G = 0$, $\mathcal{M} : E = 0$, con $d = 3$ si ha che

$$\mathcal{C} \in \Sigma', \mathcal{D} \in \Sigma' \text{ ma } \mathcal{M} \notin \Sigma'.$$

Allora si può dire che Σ' non è un sistema lineare. $\square$

1.1 Sistemi lineari di coniche

Osservazione 6. Scelgo come base di $V = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_2$ la base seguente, formata dai monomi di secondo grado presi in un ordine fissato: (x_0^2, x_1^2, x_2^2,

$x_0x_1,\ x_0x_2,\ x_1x_2$). Allora è possibile identificare $\Lambda_2 := \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_2)$ con un $\mathbb{P}^5$ tramite l'isomorfismo

$$\varphi : \Lambda_2 \to \mathbb{P}^5$$

$$[a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + ..] \longmapsto [a_{00}, a_{11}, ..]$$

Quindi, fissato un ordine per i coefficienti del polinomio che definisce la curva di Λ_2, questi sono coordinate omogenee in $\Lambda_2 \cong \mathbb{P}^5$. In pratica all'elemento $f \in \mathbb{C}[x_0x_1x_2]_2$ con $f(x_0, x_1, x_2) = a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{01}x_0x_1 + $ $+ a_{02}x_0x_2 + a_{12}x_1x_2$ viene associata la sestupla $(a_{00}, a_{11}, a_{22}, a_{01}, a_{02}, a_{12}) \in \mathbb{C}^6$ e questo isomorfismo vettoriale ne induce uno proiettivo.
Quindi l'insieme delle coniche di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ è uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}(\mathbb{C}^6) \cong \mathbb{P}^5(\mathbb{C})$.

Osservazione 7. Sia S il sottoinsieme delle coniche passanti per un punto $P = [p_0, p_1, p_2]$. Dalla proposizione 3 segue che S è un iperpiano di $\mathbb{P}(V)$.

1.1.1 Fasci di coniche

Definizione 6. Una retta di $\mathbb{P}(V)$ è detta *fascio* di coniche. Quindi un fascio di coniche è un sistema lineare di coniche 1-dimensionale (si veda la definizione 3).

Esempio 1. L'insieme $\mathcal{F}$ delle coniche passanti per i punti [1,0,-1], [0,1,2], [1,-1,0], [1,-1,2] è un fascio di coniche.

Nelle notazioni precedenti
$f(1, 0, -1) = 0 \Longrightarrow a_{00} + a_{22} - a_{02} = 0$
$f(0, 1, 2) = 0 \Longrightarrow a_{11} + 4a_{22} + 2a_{12} = 0$
$f(1, -1, 0) = 0 \Longrightarrow a_{00} + a_{11} - a_{01} = 0$
$f(1, -1, 2) = 0 \Longrightarrow a_{00} + a_{11} + 4a_{22} - a_{01} + 2a_{02} - 2a_{12} = 0$

Quindi i coefficienti della generica conica $f = 0$ passante per i punti [1,0,-1], [0,1,2], [1,-1,0], [1,-1,2] verificano il seguente sistema:

$$\begin{cases} a_{02} = a_{00} + a_{22} \\ a_{11} = -4a_{22} - 2a_{12} \\ a_{01} = a_{00} - 4a_{22} - 2a_{12} \\ a_{00} + a_{11} + 4a_{22} - a_{00} - a_{11} + 2a_{02} - 2a_{12} = 0 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} a_{02} = a_{00} + a_{22} \\ a_{11} = -4a_{22} - 2a_{12} \\ a_{01} = a_{00} - 4a_{22} - 2a_{12} \\ a_{12} = 2a_{22} + a_{02} \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} a_{02} = a_{00} + a_{22} \\ a_{11} = -4a_{22} - 2(3a_{22} + a_{00}) \\ a_{01} = a_{00} - 4a_{22} - 2(3a_{22} + a_{00}) \\ a_{12} = 3a_{22} + a_{00} \end{cases}$$

cioè, ponendo $a_{00} = \lambda$, $a_{22} = \mu$

$$\begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{11} \\ a_{22} \\ a_{01} \\ a_{02} \\ a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -10 \\ 0 & 1 \\ -1 & -10 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

Queste equazioni parametriche rappresentano una retta di $\mathbb{P}(V)$, dato che il rango della matrice è 2. La generica conica del fascio ha equazione

$$(\lambda)x_0^2+(-2\lambda-10\mu)x_1^2+\mu x_2^2+(-\lambda-10\mu)x_0x_1+(\lambda+\mu)x_0x_2+(\lambda+3\mu)x_1x_2 = 0$$

cioè

$$\mathcal{F}: \quad (x_0^2-2x_1^2-x_0x_1+x_0x_2+x_1x_2)\lambda+(-10x_1^2+x_2^2-10x_0x_1+x_0x_2+3x_1x_2)\mu = 0$$

Inoltre le coniche degeneri di $\mathcal{F}$ si determinano imponendo al determinante della matrice A associata ad f di annullarsi.

$$\mathbf{det(A)} = det\begin{pmatrix} \lambda & \frac{-\lambda-10\mu}{2} & \frac{\lambda+\mu}{2} \\ \frac{-\lambda-10\mu}{2} & -2\lambda-10\mu & \frac{\lambda+3\mu}{2} \\ \frac{\lambda+\mu}{2} & \frac{\lambda+3\mu}{2} & \mu \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda\mu(-2\lambda-10\mu)+(-\lambda-10\mu)(\frac{\lambda+3\mu}{2})(\frac{\lambda+\mu}{2})+(\frac{\lambda+5\mu}{2})(\lambda+\mu)^2+$$

$$-\lambda(\frac{\lambda+3\mu}{2})^2-\mu(\frac{\lambda+10\mu}{2})^2 =$$

$$= -2\lambda^2\mu-10\lambda\mu^2-\frac{1}{4}(\lambda^3+14\lambda^2\mu+43\lambda\mu^2+30\mu^3)+\frac{\lambda+5\mu}{2}(\lambda^2+\mu^2+2\lambda\mu)+$$

$$-\frac{\lambda}{4}(\lambda^2+9\mu^2+6\lambda\mu)-\frac{\mu}{4}(\lambda^2+100\mu^2+20\lambda\mu) =$$

$$= -\frac{15}{4}\lambda^2\mu-\frac{90}{4}\lambda\mu^2-30\mu^3$$

Quindi

$$-15\mu(\lambda+4\mu)(\lambda+2\mu)=0 \tag{1.2}$$

Questa è un'equazione omogenea di terzo grado in due incognite, quindi deve avere tre soluzioni omogenee in λ,μ, corrispondenti alle tre coniche degeneri di $\mathcal{F}$:

$$\begin{cases} \lambda=-4\mu \\ (x_0^2-2x_1^2-x_0x_1+x_0x_2+x_1x_2)\lambda+(-10x_1^2+x_2^2-10x_0x_1+x_0x_2+3x_1x_2)\mu=0 \end{cases}$$

cioè

$$-4x_0^2-2x_1^2+x_2^2-6x_0x_1-3x_0x_2-x_1x_2=0$$

$$\begin{cases} \lambda=-2\mu \\ (x_0^2-2x_1^2-x_0x_1+x_0x_2+x_1x_2)\lambda+(-10x_1^2+x_2^2-10x_0x_1+x_0x_2+3x_1x_2)\mu=0 \end{cases}$$

cioè

$$-2x_0^2 - 6x_1^2 + x_2^2 - 8x_0x_1 - x_0x_2 + x_1x_2 = 0$$

$$\begin{cases} \mu = 0 \\ (x_0^2 - 2x_1^2 - x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2)\lambda + (-10x_1^2 + x_2^2 - 10x_0x_1 + x_0x_2 + 3x_1x_2)\mu = 0 \end{cases}$$

cioè

$$x_0^2 - 2x_1^2 - x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2 = 0$$

Un'alternativa a quella di determinare le soluzioni dell'equazione 1.2 è quella di trovare le tre coppie di rette che passano per i quattro punti [1,0,-1], [0,1,2], [1,-1,0], [1,-1,2]. Questi quattro punti sono in posizione generale (cioè a tre a tre non allineati, cioè a tre a tre linearmente indipendenti, vedi figura 1.1). Infatti $(1,-1,2) = -\frac{2}{3}(1,0,-1) + \frac{2}{3}(0,1,2) + \frac{5}{3}(1,-1,0)$ cioè scelti dei rappresentanti vettoriali dei punti, è possibile scriverne uno come combinazione lineare a coefficienti tutti non nulli degli altri tre. Quindi le uniche coniche degeneri che passano per i quattro punti sono le coppie di rette con ciascuna retta passante per due dei punti.

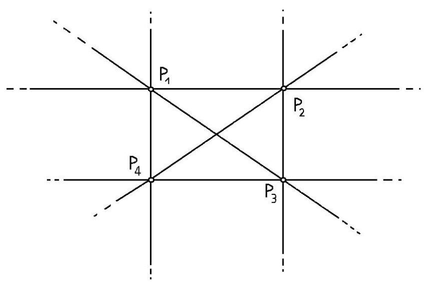

Figura 1.1: Quattro punti in posizione generale

Passando alla carta affine U_0 i punti [1,0,-1], [0,1,2], [1,-1,0], [1,-1,2] corrispondono rispettivamente a A=(0,-1), B=(-1,0), la direzione C della retta y=2x, D=(-1,2). Le coniche degeneri del fascio sono rappresentate da α, β, γ, dove α rappresenta la coppia costituita dalla retta che passa per A e B e da quella che passa per D con direzione C, β rappresenta la coppia costituita dalla retta che passa per A e D e da quella che passa per B con direzione C, γ rappresenta la coppia costituita dalla retta che passa per A con direzione C e da quella che passa per B e D.

$$\begin{aligned}
\alpha: &\quad (y+x+1)(y-2x-4)=0\\
\beta: &\quad (y+3x+1)(y-2x-2)=0\\
\gamma: &\quad (x+1)(y-2x+1)=0
\end{aligned}$$

Omogeneizzando si ottengono

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}: &\quad -4x_0^2-2x_1^2+x_2^2-6x_0x_1-3x_0x_2-x_1x_2=0\\
\bar{\beta}: &\quad -2x_0^2-6x_1^2+x_2^2-8x_0x_1-x_0x_2+x_1x_2=0\\
\bar{\gamma}: &\quad x_0^2-2x_1^2-x_0x_1+x_0x_2+x_1x_2=0
\end{aligned}$$

Si noti che le tre coniche coincidono con quelle trovate prima.

Esempio 2. L'insieme $\mathcal{G}$ delle coniche passanti per i punti $P_1=[1,0,-1]$, $P_2=[0,1,2]$, $P_3=[1,1,1]$, $P_4=[1,-1,2]$ è un fascio di coniche.

Nelle notazioni precedenti
$f(1,0,-1)=0 \Longrightarrow a_{00}+a_{22}-a_{02}=0$
$f(0,1,2)=0 \Longrightarrow a_{11}+4a_{22}+2a_{12}=0$
$f(1,1,1)=0 \Rightarrow a_{00}+a_{11}+a_{22}+a_{01}+a_{02}+a_{12}=0$
$f(1,-1,2)=0 \Rightarrow a_{00}+a_{11}+4a_{22}-a_{01}+2a_{02}-2a_{12}=0$

Quindi i coefficienti della generica conica $f=0$ passante per i punti [1,0,-1], [0,1,2], [1,1,1], [1,-1,2] verificano il seguente sistema:

$$\begin{cases}
a_{02}=a_{00}+a_{22}\\
a_{11}=-4a_{22}-2a_{12}\\
a_{00}+(-4a_{22}-2a_{12})+a_{22}+a_{01}+(a_{00}+a_{22})+a_{12}=0\\
a_{00}+(-4a_{22}-2a_{12})+4a_{22}-a_{01}+2(a_{00}+a_{22})-2a_{12}=0
\end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} a_{02} = a_{00} + a_{22} \\ a_{11} = -4a_{22} - 2a_{12} \\ a_{12} = 2a_{00} - 2a_{22} + a_{01} \\ -5a_{00} + 10a_{22} - 5a_{01} = 0 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} a_{02} = a_{00} + a_{22} \\ a_{11} = -2a_{00} - 4a_{22} \\ a_{12} = a_{00} \\ a_{01} = -a_{00} + 2a_{22} \end{cases}$$

cioè, ponendo $a_{00} = \lambda$, $a_{22} = \mu$

$$\begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{11} \\ a_{22} \\ a_{01} \\ a_{02} \\ a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

Queste equazioni parametriche rappresentano una retta di $\mathbb{P}(V)$, dato che il rango della matrice che compare è 2. La generica conica del fascio ha equazione

$$\lambda x_0^2 + (-2\lambda - 4\mu)x_1^2 + \mu x_2^2 + (-\lambda + 2\mu)x_0x_1 + (\lambda + \mu)x_0x_2 + (\lambda)x_1x_2 = 0 \quad (1.3)$$

cioè

$$\mathcal{G}: \quad (-4x_1^2 + x_2^2 + 2x_0x_1 + x_0x_2)\mu + (x_0^2 - 2x_1^2 - x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2)\lambda = 0$$

Le coniche degeneri di G si determinano imponendo al determinante della matrice A associata ad f di annullarsi.

$$\mathbf{det(A)} = det \begin{pmatrix} \lambda & \frac{-\lambda+2\mu}{2} & \frac{\lambda+\mu}{2} \\ \frac{-\lambda+2\mu}{2} & -2\lambda - 4\mu & \frac{\lambda}{2} \\ \frac{\lambda+\mu}{2} & \frac{\lambda}{2} & \mu \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda(-2\lambda - 4\mu)\mu + 2(\frac{-\lambda + 2\mu}{2})\frac{\lambda}{2}(\frac{\lambda + \mu}{2}) +$$

$$-(\frac{\lambda + \mu}{2})^2(-2\lambda - 4\mu) - \lambda(\frac{\lambda}{2})^2 - \mu(\frac{-\lambda + 2\mu}{2})^2 =$$

$$= (-2\lambda^2\mu - 4\lambda\mu^2) + (-\frac{1}{4}\lambda^3 + \frac{1}{4}\lambda^2\mu + \frac{1}{2}\lambda\mu^2) +$$

$$+(\frac{1}{2}\lambda^3 + \frac{5}{2}\lambda\mu^2 + 2\lambda^2\mu + \mu^3) + (-\frac{1}{4}\lambda^3) + (-\frac{1}{4}\lambda^2\mu - \mu^3 + \lambda\mu^2) =$$

$$= 0$$

Dunque le coniche del fascio sono tutte degeneri, poiché il determinante associato alla matrice della generica conica di G è nullo.

Cerchiamo di capire cosa succede geometricamente.

Si ha che P_1, P_2, P_3 sono linearmente dipendenti, quindi allineati; sia r la retta da loro generata. Il punto P_4 non sta su r, quindi le terne P_1, P_2, P_4; P_1, P_3, P_4; P_2, P_3, P_4 sono terne di punti linearmente indipendenti (vedi la figura 1.2).

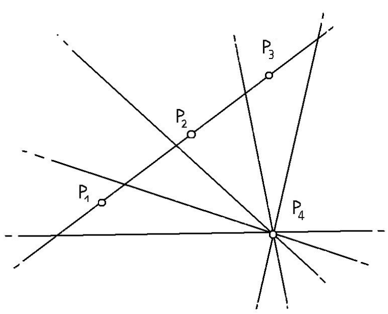

Figura 1.2: Quattro punti di cui tre allineati

Considero la retta r che passa per i tre punti allineati P_1, P_2, P_3; imponendo alla generica retta $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ il passaggio per P_1 e P_2 si ottiene il sistema seguente:

$$\begin{cases} a_0 - a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases}$$

Quindi $[a_0, a_1, a_2] = [a, -2a, a]$, cioè la retta che passa per i tre punti è

$$r : \quad x_0 - 2x_1 + x_2 = 0.$$

Invece i coefficienti della generica retta passante per P_4 devono soddisfare la seguente condizione:

$$a_0 - a_1 + 2a_2 = 0$$

Quindi $[a_0, a_1, a_2] = [\alpha, \alpha + 2\beta, \beta]$, cioè le rette che passano per P_4 sono della forma

$$r_{\alpha,\beta} : \quad \alpha x_0 + (\alpha + 2\beta)x_1 + \beta x_2 = 0.$$

Considero

$$\mathcal{A} = \{r \cup r_{\alpha,\beta} : \ (\alpha x_0 + (\alpha + 2\beta)x_1 + \beta x_2)(x_0 - 2x_1 + x_2)\}$$

Si ha che $\mathcal{A} = \mathcal{G}$; infatti, una conica $\mathcal{C}$ passa per P_1, P_2, P_3 e P_4 se e solo se $\mathcal{C} \supset r$ (in quanto $\mathcal{C}$ ed r si incontrano in almeno tre punti) e $P_4 \in \mathcal{C}$; dunque, se e solo se $\mathcal{C}$ è degenere, con $\mathcal{C} = r \cup t$ dove t è un'altra retta, con $P_4 \in t$; dunque, se e solo se $\mathcal{C} \in \mathcal{A}$.
Osserviamo che

$$(\alpha x_0 + (\alpha + 2\beta)x_1 + \beta x_2)(x_0 - 2x_1 + x_2) =$$

$$= \alpha x_0^2 - 2(\alpha + 2\beta)x_1^2 + \beta x_2^2 + (2\beta - \alpha)x_0x_1 + (\alpha + \beta)x_0x_2 + \alpha x_1x_2$$

Con $\alpha = \lambda$, $\beta = \mu$ questa espressione coincide con quella trovata in 1.3 per $\mathcal{G}$.

1.2 Sistemi lineari di cubiche

Notazione 3. Sia $\mathcal{C} : F = 0$, $\mathcal{C} \in \Lambda_3$; porremmo

$$F = ax_0^3 + bx_0^2x_1 + cx_0^2x_2 + dx_0x_1x_2 + ex_1^2x_0 + fx_2^2x_0 + gx_1^2x_2 + hx_2^2x_1 + ix_1^3 + lx_2^3 \tag{1.4}$$

che sulla carta affine U_0 (vedi osservazione 3) diventa

$$f = a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2 + gx^2y + hxy^2 + ix^3 + ly^3$$

e porremmo $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C} \cap U_0$, quindi $\mathcal{C}_0 : \ f = 0$.
Con questa notazione nel seguito verranno indicate le cubiche nel proiettivo e nell'affine rispettivamente. Nella scrittura 1.4 di una cubica generica intervengono dieci parametri omogenei e in effetti lo spazio delle cubiche piane è un $\mathbb{P}^9$, perché come abbiamo visto (definizione 2)

$$dim\Lambda_3 = \binom{3+2}{2} - 1 = 9.$$

Definizione 7. Una *curva* $\mathcal{C} \in \Lambda_d$ di equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ è *irriducibile* se lo è il polinomio $F(x_0, x_1, x_2)$, altrimenti è riducibile. Se è riducibile, il polinomio $F(x_0, x_1, x_2)$ si fattorizza nel prodotto di k polinomi omogenei irriducibili, con $2 \leqslant k \leqslant d$ sia $F = F_1 \cdot ... \cdot F_k$. Allora le curve $\mathcal{C}_i : \ F_i = 0$, $i = 1, ..k$, sono dette componenti irriducibili di $\mathcal{C}$. L'unione dei supporti delle componenti irriducibili costituisce il supporto di $\mathcal{C}$.

Notazione 4. Sia $P \in \mathbb{P}^2$, $m = 1, 2, 3$ (vedi notazione 2)

$$\Lambda_3(P^m) = \{\mathcal{C} \in \Lambda_3 \mid P \in \mathcal{S}, \mu_P(\mathcal{S}) \geqslant m\}.$$

Per quanto visto nella proposizione 3, $\Lambda_3(P^m)$ è un sistema lineare di dimensione $9 - \binom{m+1}{2}$.

Esempio 3. Considero $\mathcal{C} \in \Lambda_3(P)$, con $\mathcal{C} : F = 0$. Per semplicità si considera $P = [1, 0, 0]$, che corrisponde all'origine nell'affine; lavorando quindi nella carta affine U_0 abbiamo $\mathcal{C}_0 : f = 0$. Imponendo alla generica cubica affine di avere molteplicità almeno 1 in $(0,0)$ si ottiene $a = 0$. Quindi il sistema lineare delle cubiche che passano semplicemente per 0 è

$$\Lambda_3(P) = \{\mathcal{C} \in \Lambda_3 \mid \mathcal{C} : F = 0,$$

$$F = bx_0^2x_1 + cx_0^2x_2 + dx_0x_1x_2 + ex_1^2x_0 + fx_2^2x_0 + gx_1^2x_2 + hx_2^2x_1 + ix_1^3 + lx_2^3\}$$

Esempio 4. Considero $\mathcal{C} \in \Lambda_3(P^2)$, con $\mathcal{C} : F = 0$; come prima si lavora nell'affine prendendo come punto l'origine. Imponendo alla generica cubica di avere molteplicità almeno 2 in $(0,0)$ si ottiene $a = b = c = 0$; basta infatti usare la proposizione 2.a. Quindi

$$\Lambda_3(P^2) = \{\mathcal{C} \in \Lambda_3 \mid \mathcal{C} : F = 0,$$

$$F = dx_0x_1x_2 + ex_1^2x_0 + fx_2^2x_0 + gx_1^2x_2 + hx_2^2x_1 + ix_1^3 + lx_2^3\}.$$

Le cubiche irriducibili di $\Lambda_3(P^2)$ hanno un nodo o una cuspide in P (vedi osservazione 5); si può dimostrare infatti che una cubica piana irriducibile con una cuspide o un nodo non può avere altri punti singolari. Sia infatti P un nodo di una cubica $\mathcal{C} \in \Lambda_3(P^2)$ (analogamente si potrebbe ragionare con P cuspide); sia per assurdo Q un altro punto singolare e sia r la retta generata da P e da Q; dato che sono entrambi punti singolari $i(\mathcal{C}, r, P) \geqslant 2$, $i(\mathcal{C}, r, Q) \geqslant 2$; quindi $i(\mathcal{C}, r, P) + i(\mathcal{C}, r, Q) \geqslant 4$ e siccome $deg\mathcal{C} = 3$ si ha $r \subset \mathcal{C}$; ma allora (vedi lemma 3, più avanti) l'equazione di $\mathcal{C}$ è divisibile per quella della retta, in contraddizione con l'ipotesi di irriducibilità per la cubica.

Le cubiche riducibili di $\Lambda_3(P^2)$ invece possono essere costituite, per esempio, dall'unione di una conica irriducibile e una retta che incontra la conica in due punti distinti (figura 1.3) o coincidenti (figura 1.4). Nella figura 1.3 la cubica ha un nodo in P e in Q; nella figura 1.4, invece, la cubica ha un unico punto singolare che è una cuspide.

Le cubiche riducibili di $\Lambda_3(P^2)$ possono anche essere date dall'unione di tre rette. Nella figura 1.5 le tre rette sono distinte e c'è un solo punto P singolare che è triplo ordinario; nella figura 1.6 i punti Q, R, S sono doppi ordinari (quindi nodi) e sono ciascuno un punto d'intersezione di due delle tre rette; nella figura 1.7 il punto triplo non ordinario T è in comune a una retta doppia e a una retta e ci sono infiniti punti doppi non ordinari; nella figura 1.8 tutti i punti della retta tripla sono tripli non ordinari.

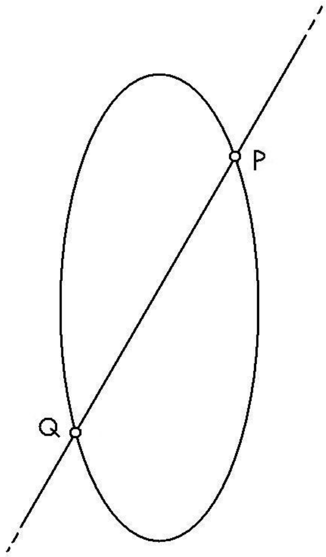

Figura 1.3: Ad esempio $x_2(x_0^2+x_1^2+$ $+x_2^2)=0$, $P=[i,1,0]$, $Q=[-i,1,0]$

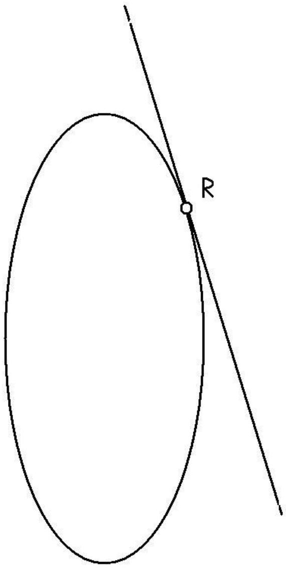

Figura 1.4: Ad esempio $(x_0^2+x_1^2+$ $+x_2^2)(x_0-ix_2)=0$, $R=[i,0,1]$

Proposizione 6. Se una curva di grado d ha un punto di molteplicità d, allora si spezza nell'unione di d rette.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{C}\,:\; F=0$ una curva proiettiva di grado d e P un suo punto di molteplicità d. Sia Q un altro punto qualsiasi della curva; allora se r è la retta PQ, si ha $i(\mathcal{C},r,P)+i(\mathcal{C},r,Q)\geqslant d+1$ da cui $r\subset\mathcal{C}$.
Dunque $\mathcal{C}$ è unione di rette e dovendo avere grado d, è unione di d rette contate con molteplicità.

□

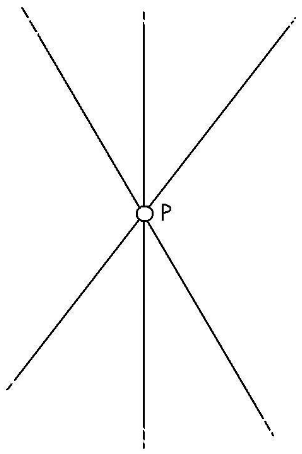

Figura 1.5: Ad esempio $x_1x_2(x_1 - x_2) = 0$, $P = [1, 0, 0]$

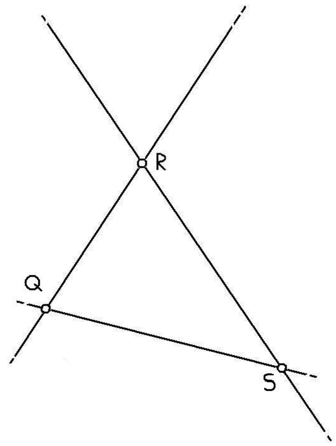

Figura 1.6: Ad esempio $x_2(x_2 - x_1 + -x_0)(x_2 + x_1 - x_0) = 0$, $Q = [1, 1, 0]$, $R = [1, -1, 0]$, $S = [1, 0, 1]$

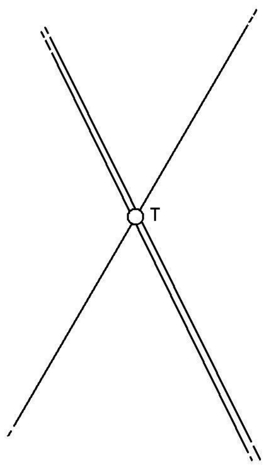

Figura 1.7: Ad esempio $x_2(x_1^2) = 0$, $T = [1, 0, 0]$

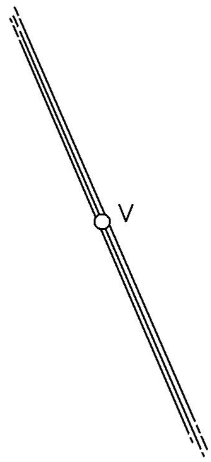

Figura 1.8: Ad esempio $x_1^3 = = 0$, $V = [1, 0, 0]$

Esempio 5. Considero $\mathcal{C} \in \Lambda_3(P^3)$, con $\mathcal{C}: \ F = 0$; come nei casi precedenti si lavora nella carta affine U_0 prendendo come punto l'origine. Imponendo alla generica cubica di avere molteplicità almeno 3 in $(0, 0)$ si ottiene $a = b = = c = d = e = f = 0$ (si usi la proposizione 2.a). Quindi

$$\Lambda_3(P^3) = \{\mathcal{C} \in \Lambda_3 \mid \mathcal{C} : F = 0,$$

$$F = gx_1^2x_2 + hx_2^2x_1 + ix_1^3 + lx_2^3\}.$$

Dalla proposizione 6 si ha che $\mathcal{C}$ si spezza in 3 rette contate con molteplicità; quindi tutte le curve di $\Lambda_3(P^3)$ sono riducibili. Le tre rette possono essere distinte e aventi un solo punto singolare triplo ordinario (vedi figura 1.5), oppure si può avere una retta doppia che incontra un'altra retta in un punto triplo non ordinario (vedi figura 1.7), oppure una retta tripla i cui punti sono tutti tripli non ordinari (vedi figura 1.8).

Esempio 6. Siano P, Q punti distinti di $\mathbb{P}^2$ e si consideri ora il sistema lineare di cubiche che in P e in Q ha molteplicità almeno 2, cioè $\Lambda_3(P^2, Q^2)$ (vedi notazione 2). Per la proposizione 4 si tratta di un sistema lineare di dimensione almeno

$$9 - 2\binom{3}{2} = 3.$$

Dato che per le cubiche $\mathcal{C} \in \Lambda_3(P^2, Q^2)$ da $\mu_P(\mathcal{C}) \geqslant 2$, $\mu_Q(\mathcal{C}) \geqslant 2$, come abbiamo già visto in esempio, si ha $i(\mathcal{C}, r, P) \geqslant 2$, $i(\mathcal{C}, r, Q) \geqslant 2$, dove r è la retta generata da P e da Q; quindi $i(\mathcal{C}, r, P) + i(\mathcal{C}, r, Q) \geqslant 4$ e siccome $deg\mathcal{C} = 3$ si ha $r \subset \mathcal{C}$, allora (vedi il lemma 3 più avanti) l'equazione della retta divide quella della cubica. Dunque, tutte le cubiche di $\Lambda_3(P^2, Q^2)$ sono riducibili e possono essere date, per esempio, dall'unione di una conica irriducibile e una retta che la interseca in due punti distinti corrispondenti a due nodi (come in figura 1.3). Le cubiche di $\Lambda_3(P^2, Q^2)$ possono anche essere date da tre rette distinte che a due a due si intersecano in un nodo (vedi figura 1.6), oppure da una retta doppia e un'altra retta che la incontra in un punto triplo non ordinario (figura 1.9) oppure da una retta tripla i cui punti sono tutti tripli non ordinari e quindi possiede in particolare due punti di molteplicità almeno due (figura 1.10).

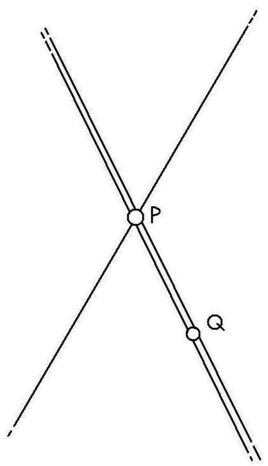

Figura 1.9: Ad esempio $x_2(x_1^2) = 0$, $P = [1,0,0]$, $Q = [1,0,1]$

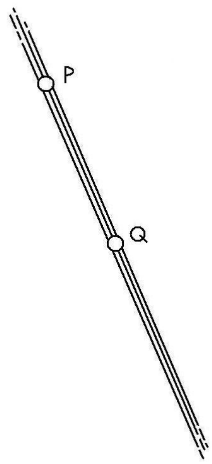

Figura 1.10: Ad esempio $x_1^3 = 0$, $P = [1,0,0]$, $Q = [1,0,1]$

1.2.1 Fasci di cubiche

Definizione 8. Una retta di Λ_3 è detta *fascio* di cubiche, cioè un sistema lineare di curve di Λ_3 1-dimensionale.

Proposizione 7. Ogni conica di $\mathbb{P}^2$ è proiettivamente equivalente ad una ed una sola delle seguenti:

- (non degenere) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$
- (semplicemente degenere, è una coppia di rette distinte) $x_0^2 + x_1^2 = 0$
- (doppiamente degenere, è una retta doppia) $x_0^2 = 0$

Per la dimostrazione si veda il corollario al paragrafo §1.6 del [2].

Osservazione 8. Sia $\mathcal{C} : f = 0$ una conica proiettiva non degenere, quindi proiettivamente equivalente a $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. Questa a sua volta è proiettivamente equivale alla conica di equazione $x_0 x_2 = x_1^2$, quindi ogni conica non degenere di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ è proiettivamente equivalente a $x_0x_2 = x_1^2$. Questa curva è parametrizzata da

$$\Phi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

$$\Phi : [u, v] \longmapsto [u^2, uv, v^2]$$

Lemma 3. Sia $\mathcal{D} \in \Lambda_d$, con $\mathcal{D} : g = 0$, $r : l = 0$ una retta, $\mathcal{C} : f = 0$ una conica non degenere.

1. se $g \equiv 0$ sulla retta r, allora g è divisibile per l'equazione della retta; cioè $g = l{\cdot}g'$, dove $g' \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_{d-1}$
2. se $g \equiv 0$ sulla conica $\mathcal{C}$, allora g è divisibile per l'equazione della conica; cioè $g = f{\cdot}\tilde{g}$, dove $\tilde{g} \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_{d-2}$

Dimostrazione.

1. A meno di un cambiamento di coordinate, si può assumere che la retta r abbia equazione $x_0 = 0$. Per ogni $\mathcal{D} \in \Lambda_d$, con $\mathcal{D} : g = 0$, esistono e sono uniche $g' \in \Lambda_{d-1}$, $h \in \mathbb{C}[x_1, x_2]_d$ tali che $g(x_0, x_1, x_2) = x_0{\cdot}g' + h$: basta infatti raccogliere tutti i monomi che includono x_0 al primo addendo, il rimanente deve essere un polinomio nelle sole variabili x_1 e x_2. Si ha: $g(x_0, x_1, x_2) \equiv 0$ sulla retta r $\Leftrightarrow$ $h \equiv 0$ sulla retta r $\Leftrightarrow$ $gg(x_1, x_2) \equiv 0$. L'ultima doppia implicazione ha un'implicazione ovvia ($\Leftarrow$) e l'altra che si giustifica per assurdo: se $h(x_1, x_2) \neq 0$, allora dovrebbe avere al più d zeri (dato che $h \in \mathbb{C}[x_1, x_2]_d$, vedi definizioni 4 e 5), ma dato che si annulla su tutti i punti della retta, che sono infiniti, allora deve essere $h(x_1, x_2) \equiv 0$.

2. A meno di un cambiamento di coordinate, si può assumere che la conica abbia equazione $f(x_0, x_1, x_2) = x_0x_2 - x_1^2$. Si dimostra che per ogni $\mathcal{D} \in \Lambda_d$, con $\mathcal{D} : g = 0$, esistono e sono uniche $\tilde{g} \in \Lambda_{d-2}$, $\alpha(x_0, x_2) \in \mathbb{C}[x_0, x_2]_d$, $\beta(x_0, x_2) \in \mathbb{C}[x_0, x_2]_d$ tali che $g(x_0, x_1, x_2) = f(x_0, x_1, x_2){\cdot}\tilde{g}(x_0, x_1, x_2) + \alpha(x_0, x_2) + x_1\beta(x_0, x_2)$; infatti basta che nell'espressione $g(x_0, x_1, x_2)$ ad x_1^2 si sostituisca x_0x_2, quello che si ottiene è un'espressione di grado al più 1 in x_1, cioè del tipo $\alpha(x_0, x_2) + x_1\beta(x_0, x_2)$. Per l'osservazione 8, la parametrizzazione di $\mathcal{C}$ è data da

$x_0 = u^2$, $x_1 = uv$, $x_2 = v^2$, quindi $g(x_0, x_1, x_2) \equiv 0$ sulla conica $\Leftrightarrow$ $\alpha(u^2, v^2) + uv\beta(u^2, v^2) \equiv 0$ sulla conica $\Leftrightarrow$ $\alpha(u^2, v^2) + uv\beta(u^2, v^2) \equiv 0$ in $\mathbb{C}[u, v] \Leftrightarrow$ $\alpha(x_0, x_2) = \beta(x_0, x_2) = 0$.

□

Notazione 5. Denotiamo nel seguito con $W_d(P_1, .., P_t)$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d$ tale che $\Lambda_d(P_1, .., P_t) = \mathbb{P}(W_d(P_1, .., P_t))$.

Corollario 1. Sia $r : l = 0$ una retta, $\mathcal{C} : f = 0$ una conica non degenere; siano dati i punti $P_1, ..P_n \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ e sia d un intero maggiore di zero fissato.

1. se $P_1, ..P_a \in r$,$P_{a+1}, ..P_n \notin r$, $a > d$, allora
$$W_d(P_1, ..P_n) = l{\cdot}W_{d-1}(P_{a+1}, ..P_n).$$

2. se $P_1, ..P_a \in \mathcal{C}$,$P_{a+1}, ..P_n \notin \mathcal{C}$, $a > 2d$, allora
$$W_d(P_1, ..P_n) = f{\cdot}W_{d-2}(P_{a+1}, ..P_n).$$

Dimostrazione.

1. Sia data la curva $\mathcal{D} \in \Lambda_d$, con $\mathcal{D} : g = 0$. Se la curva $\mathcal{D}$ incontra la retta r nei punti $P_1, ..P_a$ con $a > d$, allora $\sum_i i(\mathcal{D}, r, P) = d$ e quindi si ha $r \subset \mathcal{D}$; per il lemma 3 $g = l{\cdot}g'$; dato che $P_{a+1}, ..P_n \notin r$ si ha $g' \in \Lambda_{d-1}(P_{a+1}, ..P_n)$.

2. Sia $\mathcal{C} :\ x_0x_2 - x_1^2 = 0$; i punti dell'intersezione $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ sono dati dalle soluzioni in $\mathbb{P}^1$ dell'equazione omogenea:
$$g(u^2, uv, v^2) = 0$$
dove (u,v) sono i parametri che descrivono $\mathcal{C}$. Questa è un'equazione di grado 2d; poiché per ipotesi ha $a > 2d$ soluzioni, ne segue che $g(u^2, uv, v^2) \equiv 0$, quindi concludiamo come sopra grazie al lemma 3.

□

Proposizione 8. Se $P_1, ..P_5 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono punti distinti tra cui non ce ne sono quattro allineati, allora esiste al più una conica che passa per quei cinque punti. Per la dimostrazione si rimanda al paragrafo §1.10 del [2].

Notazione 6. Si parla di *punti conconici* se giacciono tutti su una conica non degenere.

Proposizione 9. Siano $P_1, ..P_8 \in \mathbb{P}^2$ punti distinti. Se quattro qualsiasi di questi non sono allineati e sette qualsiasi non sono conconici, allora la dimensione di $W_3(P_1, ..P_8)$ è pari a 2. Quindi il sistema lineare $\Lambda_3(P_1, ..P_8)$ è un fascio di cubiche.

Dimostrazione. **I caso: Non ci sono 3 punti allineati e non ce ne sono 6 conconici** Per assurdo $dimW_3(P_1, ..P_8) \geqslant 3$; siano P_9, P_{10} punti distinti della retta $r : l = 0$ generata da P_1 e P_2. Quindi

$$dimW_3(P_1, ..P_{10}) \geqslant dimW_3(P_1, ..P_8) - 2 \geqslant 1.$$

Allora esiste $0 \neq g \in W_3(P_1, ..P_{10})$; per il corollario del lemmma 3 $g = l{\cdot}g'$, con $g' \in W_2(P_3, ..P_8)$. Ma se $\mathcal{C} : g' = 0$ è una conica non degenere i punti $P_3, ..P_8$ sono conconici, mentre se $\mathcal{C}$ è una coppia di rette o una retta doppia, almeno tre di loro sono allineati.

II caso: Esistono 3 punti allineati, siano P_1, P_2, P_3 Sia $r : l = 0$ la retta a cui appartengono e sia P_9 un quarto punto sulla retta r. Per il corollario del lemma 3

$$W_3(P_1, ..P_9) = l{\cdot}W_2(P_4, ..P_8).$$

Dato che non ci sono quattro punti allineati tra $P_1, ..P_8$, per la proposizione 8 $dimW_2(P_4, ..P_8) = 1$ e quindi $dimW_3(P_1, ..P_9) = 1$ che implica $dimW_3(P_1, ..P_8) \leqslant 2$.

III caso: Esistono 6 punti conconici, siano $P_1, ..P_6$ Sia $\mathcal{C} : f = 0$ la conica non degenere a cui appartengono e sia P_9 un punto della conica distinto dagli altri sei. Per il corollario del lemma 3

$$W_3(P_1, ..P_9) = f{\cdot}W_1(P_7, ..P_8).$$

La retta $r : l = 0$ generata da P_7 e P_8 è unica, quindi $W_3(P_1, ..P_9)$ è lo spazio unidimensionale generato da fl, così $dimW_3(P_1, ..P_8) \leqslant 2$.

□

Corollario 2. Siano $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ due curve cubiche la cui intersezione consiste di nove punti distinti, $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{P_1, ..P_9\}$. Allora una cubica $\mathcal{D}$ che passa per $P_1, ..P_8$, deve passare anche per P_9.

Dimostrazione. Se quattro dei punti $P_1, ..P_8$ appartengono alla retta $r : l = 0$, allora sia $\mathcal{C}_1 : f_1 = 0$ che $\mathcal{C}_2 : f_2 = 0$ incontrano r in un numero di punti $\geqslant 4$, quindi contengono r; questo però contraddice l'ipotesi $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{P_1, ..P_9\}$. Per la stessa ragione, non possono esserci 7 punti conconici. Per la proposizione 9 $dimW_3(P_1, ..P_8) = 2$; questo significa che i polinomi f_1, f_2 formano una base per $W_3(P_1, ..P_8)$ e così la cubica $\mathcal{D} : g = 0$ è data da $g = \lambda f_1 + \mu f_2$. Dato che f_1 ed f_2 passano per P_9, anche g ci passa. $\square$

Bibliografia

[1] M. Idà, *Appunti di geometria proiettiva*, a.a. 2010/2011

[2] M. Reid, *Undergraduate algebraic geometry*, Cambridge University Press, 1988

[3] M. Trozzo, *Sistemi lineari di ipersuperfici proiettive*, Tesi di laurea, Bologna, a.a. 2007/2008

[4] E. Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, Torino, 2000