

**ALMA MATER STUDIORUM  
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA**

---

**DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE, CHIMICA, AMBIENTALE  
E DEI MATERIALI**

**CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA CIVILE**

**TESI DI LAUREA**

**IN**

**DIAGNOSTICA E SPERIMENTAZIONE DELLE STRUTTURE**

**IDENTIFICAZIONE DINAMICA DELLA VARIAZIONE DI  
RIGIDEZZA FLESSIONALE IN UNA TRAVE METALLICA: INDAGINI  
SPERIMENTALI E ANALISI NUMERICHE**

**CANDIDATO:**

Daniele Scocciolini

**RELATORE:**

Chiar.ma Prof.ssa Cristina Gentilini

**CORRELATORI:**

Prof. Antonio Palermo

Ing. Martina Modesti

Anno accademico 2020/21

Sessione IV



## Indice

1. INTRODUZIONE.....	1
2. TRATTAZIONE TEORICO ANALITICA .....	4
2.1 Trave come sistema continuo.....	4
2.1.1 Equazione del moto forzato.....	4
2.1.2 Oscillazioni libere .....	7
2.1.3 Applicazione alla trave oggetto di studio.....	9
2.2 Trave come sistema discreto .....	13
2.2.1 Vibrazioni libere.....	14
2.2.2 Vibrazioni forzate e smorzate .....	16
2.2.2.1 Smorzamento proporzionale .....	18
2.2.3 Eccitazione generica in un solo punto.....	19
2.3 Identificazione dei parametri del sistema.....	20
2.3.1 Modello delle funzioni di trasferimento.....	20
2.3.2 Scelta del tipo di eccitazione .....	21
2.3.2.1 Eccitazione sinusoidale semplice .....	22
2.3.2.2 Eccitazione impulsiva .....	23
2.3.3 Processo di elaborazione .....	24
2.4 Identificazione delle forme modali per la trave .....	28
2.5 Stima delle funzioni di trasferimento sperimentali .....	29
2.5.1 Stima diretta .....	30
2.5.2 Stima tramite PSD.....	31
2.5.3 Stima tramite CPSD .....	32
2.6 Il metodo delle curvature modali .....	32
3. INDAGINI SPERIMENTALI.....	35
3.1 Set-up di prova .....	35

3.2	Acquisizione dati e modalità di prova.....	47
3.2.1	Parametri di acquisizione .....	48
3.3	Individuazione delle frequenze proprie.....	54
3.4	Identificazione delle forme modali tramite FRF .....	60
3.4.1	Stima diretta .....	62
3.4.2	Stima tramite PSD.....	74
3.4.3	Stima tramite CPSD .....	80
3.5	Stima degli indici di smorzamento modale .....	87
3.6	Set-up di prova, modalità di irrigidimento locale della trave.....	94
3.7	Identificazione sperimentale della variazione di rigidezza .....	96
3.7.1	Indagine 1 .....	102
3.7.2	Indagine 4.....	107
3.7.2.1	Variazione a) Nodi 16-17 .....	108
3.7.2.2	Variazione b) Nodi 11-12.....	112
3.7.2.3	Variazione c) Nodi 8-9.....	116
3.7.3	Indagine 5 .....	120
3.7.3.1	Variazione a) Nodi 16-17 .....	121
3.7.3.2	Variazione b) Nodi 11-12.....	125
3.7.3.3	Variazione c) Nodi 8-9 .....	129
4.	ANALISI NUMERICHE .....	134
4.1	Modellazione della trave .....	134
4.1.1	Condizioni di vincolo .....	134
4.1.2	Caratteristiche geometrico-meccaniche .....	135
4.2	Analisi di convergenza .....	136
4.2.1	Matrice di massa Lumped .....	138
4.2.2	Matrice di massa consistent.....	140
4.3	Scelta del modello .....	142
4.4	Identificazione numerica delle caratteristiche dinamiche .....	144

4.4.1 Simulazione della risposta sperimentale tramite analisi transiente .....	144
4.4.2 Individuazione delle frequenze proprie a seguito di simulazione .....	152
4.4.3 Identificazione delle forme modali tramite FRF a seguito di simulazione .....	154
4.4.3.1 Stima diretta .....	155
4.4.3.2 Stima tramite PSD .....	156
4.4.3.3 Stima tramite CPSD .....	157
4.5 Test algoritmo di identificazione.....	159
4.5.1 Analisi parametrica con forme modali dedotte da analisi modale .....	159
4.5.2 Test con forme modali da FRF.....	163
4.6 Modellazione del danneggiamento.....	169
4.7 Identificazione numerica della variazione di rigidezza.....	171
5. CONCLUSIONE.....	174
BIBLIOGRAFIA.....	178
INDICE DELLE FIGURE .....	180
INDICE DELLE TABELLE.....	182
INDICE DEI GRAFICI.....	183





Un danneggiamento in una struttura altera le sue caratteristiche dinamiche quali frequenze naturali, indici di smorzamento e forme modali associate ad ogni frequenza naturale. In particolare, nel caso di travi una variazione di rigidità flessionale è in generale definibile danneggiamento se corrisponde ad una riduzione della stessa; tuttavia, anche un incremento altera i parametri dinamici della struttura. Il presente elaborato investiga l'applicazione del cambiamento nelle curvature modali per identificare un incremento di rigidità flessionale in una trave metallica semplicemente appoggiata studiata presso laboratorio LISG dell'università di Bologna. Utilizzando un'approssimazione per differenza centrale le curvature modali sono state calcolate dalle forme modali ottenute sperimentalmente. Le modalità di calcolo utilizzate per identificare le forme modali della trave sono accomunate dall'utilizzo delle funzioni di trasferimento sperimentali ricavate sia dal rapporto tra le trasformate di output ed input sia facendo uso della densità di potenza spettrale (PSD e CPSD). A supporto delle indagini sperimentali e per validare le modalità di calcolo utilizzate è stata modellata tramite elementi finiti una trave semplicemente appoggiata che simula la configurazione iniziale e quella irrigidita localmente in un suo tratto. I risultati numerici condotti validano le modalità utilizzate per la determinazione delle forme modali, evidenziando una forte sensibilità delle curvature modali all'irrigidimento locale. Lato sperimentale si ottengono un risultato meno accurato di quanto dedotto dalle esperienze numeriche che conduce ad interessanti considerazioni sia sulle modalità utilizzate per l'identificazione dinamica sia sulle performance dell'algoritmo di identificazione.

## 1. Introduzione

I metodi di identificazione dinamica hanno l'obiettivo di individuare qualitativamente e/o quantitativamente un danneggiamento. Tali metodologie risultano strettamente connesse ai problemi di manutenzione e riparazione di strutture civili, evidenziandosi per la facilità riscontrata nella misurazione dei parametri modali.

Una fessura o un danno localizzato in una struttura riduce la rigidità ed incrementa lo smorzamento, la riduzione di rigidità è associata ad una riduzione delle frequenze proprie ed alla modifica dei modi di vibrazione. Il cambiamento delle frequenze proprie rivela dunque la presenza di un danneggiamento ma non fornisce però informazioni certe sulla sua posizione in quanto i danneggiamenti associati a due posizioni differenti possono condurre ad un'analoga modifica della frequenza.

Sulla base delle esperienze proposte da Pandey *et al.* nel presente elaborato è stato investigato il parametro denominato "curvature mode shape", ovvero la curvatura delle forme modali. Tale parametro, utilizzato nella pubblicazione su dati ottenuti numericamente, si dimostra particolarmente sensibile alle variazioni di rigidità flessionale introdotte in una trave a mensola e in una trave semplicemente appoggiata.



Nel presente elaborato sono state effettuate indagini sperimentali su una trave metallica semplicemente appoggiata all'interno del laboratorio di Ingegneria Strutturale e Geotecnica dell'università di Bologna. Le indagini svolte hanno due principali obiettivi: la caratterizzazione dinamica, quindi l'identificazione delle frequenze proprie, dei modi di vibrare ad esse relative e degli indici di smorzamento modale e l'utilizzo delle forme modali per il calcolo delle curvature ai fini dell'identificazione di una variazione di rigidità introdotta sulla trave.

Il primo obiettivo si è rivelato particolarmente interessante in quanto ha permesso di esplorare numerosi aspetti sia teorici, relativi ai metodi di rielaborazione dati utilizzati per ottenere le forme modali, sia pratici in quanto le acquisizioni in laboratorio hanno richiesto l'utilizzo di strumentazione dedicata alle misure dinamiche sulla semplice configurazione oggetto dello studio. Le metodologie di calcolo approfondite per la determinazione delle forme modali si basano sulle funzioni di trasferimento dedotte a partire dalle acquisizioni, tali funzioni, oltre alla determinazione classica ottenuta delle trasformate di output ed input, sono state determinate utilizzando la densità di potenza spettrale PSD per stimarne il modulo e la densità di potenza spettrale incrociata (tra output ed input) CPSD per stimarne l'effettivo andamento.

A supporto delle elaborazioni effettuate per ottenere le caratteristiche dinamiche è stata modellata tramite software agli elementi finiti una trave in semplice appoggio, ed è stata simulata la procedura di prova svolta numericamente andando a produrre output analoghi a quelli sperimentali.

Con riferimento al secondo obiettivo, i risultati ottenuti ai fini dell'identificazione della variazione di rigidità sulla trave sono fondati sul calcolo delle curvature modali, essendo l'esperienza sperimentale, tale parametro necessita di essere approssimato, per farlo è stata utilizzata un'approssimazione alle differenze centrali del secondo ordine.

In linea con l'esperienza di Pandey *et al.* introdotta, Wahab *et. al* utilizzano le curvature modali applicandole ad uno scenario reale, un ponte in cemento armato precompresso che attraversa l'autostrada tra Berna e Zurigo, situato in Svizzera (esempi di danneggiamento introdotti sono il cedimento di una pila, l'inclinazione di una fondazione, il distacco del calcestruzzo, cedimento dei cavi di post tensione). Relativamente all'applicazione al ponte è stata effettuata una simulazione numerica a supporto dell'esperienza pratica, riproducendo lo schema statico di trave semplicemente appoggiata e trave continua su tre appoggi l'esperienza ha riscontrato nuovamente la forte sensibilità della curvatura modale al danneggiamento. Da tale esperienza è stato dedotto un parametro, rivelatosi determinante per i risultati ricavati nel presente elaborato, che riassume le informazioni fornite delle curvature modali ai fini

dell'individuazione del danneggiamento; il parametro è denominato Curvature Damage Factor (CDF).

La modalità di modifica della configurazione è stata scelta in modo da permettere di valutare le performance sperimentali dell'algoritmo di identificazione; a tale fine si è stabilito di incrementare la rigidezza della trave senza danneggiarla, in tal modo è stato sia possibile simulare una variazione di rigidezza comunque identificabile che reiterare la procedura sperimentale cambiando la posizione della variazione.

Il secondo obiettivo ha previsto una prima fase numerica, mirata alla validazione della modalità di modifica della configurazione pensata; una volta riscontrata la sensibilità delle curvature modali all'incremento di rigidezza introdotto numericamente nella trave si è proceduto allo svolgimento delle indagini di laboratorio.

Al capitolo due del presente elaborato si introducono in termini teorico-analitici le modalità di calcolo utilizzate per poi passare all'applicazione sperimentale nel capitolo tre, nel quale si trattano nello stesso ordine i due obiettivi ora esposti; al capitolo quattro si riporta infine l'analisi numerica che ha seguito in parallelo quella sperimentale.

## 2. TRATTAZIONE TEORICO ANALITICA

### 2.1 Trave come sistema continuo

Il modello che meglio descrive il comportamento del sistema in oggetto è quello di trave come sistema continuo, lo schema di vincolo adottato permette di ricondurre lo studio delle caratteristiche dinamiche al caso notevole di trave continua semplicemente appoggiata sollecitata a flessione. Si introduce di seguito una trattazione analitica che conduce a tali caratteristiche a partire dalle equazioni del moto forzato della trave, tratta dal testo *Viola E., "Fondamenti di dinamica e vibrazione delle strutture" volume secondo, capitolo 3 "vibrazioni flessionali delle travi"*.

#### 2.1.1 Equazione del moto forzato

Lo studio delle vibrazioni flessionali della trave viene sviluppato trascurando la deformabilità tagliante, sotto l'ipotesi di Eulero-Bernouilli e trascurando la presenza di forze assiali.

Si considera una trave lunga  $L$  ad asse rettilineo disposto lungo l'asse  $x$  del sistema di riferimento introdotto con origine in  $O$  posto all'estremo della trave stessa, l'asse  $y$  si considera perpendicolare all'asse della trave e giacente nel piano di flessione della stessa, come rappresentato in fig. 2.1 a).

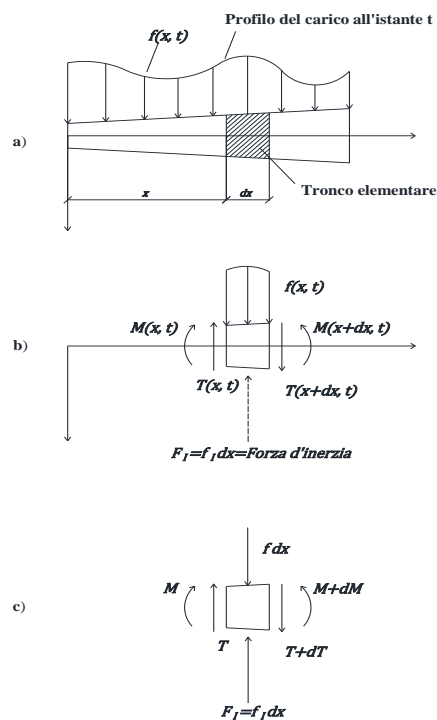


Figura 2.1 a) Trave con massa e carico tagliante  $f(x, t)$  distribuiti, sollecitata a flessione. b, c) Forze interne ed esterne agenti, in condizioni dinamiche, sul tronco di trave di lunghezza infinitesima  $dx$

Si indica con:

$v(x, t)$ : Spostamento trasversale della sezione retta, linea elastica della trave

$f(x, t)$ : Carico trasversale alla trave, distribuito

$E(x)$ : Modulo elastico

$I(x)$ : Momento di inerzia della sezione trasversale

$dm = \rho A(x)dx$ : Massa per unità di lunghezza infinitesima della trave  $dx$

Si ipotizza inoltre che il prodotto  $EI = costante$ .

Considerando un tronco elementare di lunghezza  $dx$  delimitato dalle facce piane ed ortogonali all'asse della trave, sulla faccia di ascissa  $x$  agiscono il taglio  $T(x, t)$  ed il momento flettente  $M(x, t)$ . La presenza del carico distribuito  $f(x, t)$  sul tratto di lunghezza  $dx$ , comporta una variazione di taglio  $dT$  e di momento flettente  $dM$  sulla faccia di ascissa  $x + dx$  del tronco in esame. Su di essa taglio e momento sono forniti da

$$T(x + dx, t) = T + dT = T + \frac{\partial T}{\partial x} dx$$
$$M(x + dx, t) = M + dM = M + \frac{\partial M}{\partial x} dx$$

La forza di inerzia agente sul concio, rappresentata in fig. 2.1 b) risulta

$$F_I = -dm \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Nell'ipotesi di piccoli spostamenti, l'equazione del moto della trave inflessa in direzione  $y$  si ottiene a partire dall'equazione di equilibrio scritta lungo tale direzione:

$$-T + f dx - dm \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + T + dT = 0$$

Si ricava poi

$$-dT + dm \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f dx$$

che, sostituendo,  $dm = \rho A dx$  e  $dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx$  assume l'aspetto seguente:

$$(2.1) \quad -\frac{\partial T}{\partial x} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f(x, t)$$

La sollecitazione della trave sotto le ipotesi introdotte è di flessione retta, dalla teoria della flessione retta di S. Venant, è nota l'equazione differenziale della linea elastica

$$(2.2) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{M}{EI}$$

La (2.2) deriva da:

$$M = EI\chi$$
$$\chi = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

che rispettivamente rappresentano l'equazione di legame elastico e l'equazione di congruenza. Volendo ora ricavare la relazione tra il momento flettente  $M = M(x, t)$  ed il taglio  $T = T(x, t)$  si considera l'equilibrio alla rotazione del tronco elementare di trave rappresentato in fig.2.1c) che conduce alla relazione seguente:

$$(2.3) \quad T = \frac{\partial M}{\partial x}$$

Per la (2.3) la (2.1) diventa

$$(2.4) \quad -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f(x, t)$$

che rappresenta l'equazione indefinita di equilibrio dinamico.

Volendo ora ricavare l'equazione fondamentale occorre esprimere il momento flettente nella (2.4) in termini di spostamenti. Per la (2.2) la (2.4) prende la forma:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \rho A(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f(x, t)$$

che esprime l'equazione del moto forzato della trave ad asse rettilineo e a sezione variabile, vibrante nel piano  $x - y$ , sotto l'azione del carico trasversale  $f(x, t)$ .

Nell'ipotesi di sezione trasversale costante e modulo di elasticità indipendente da  $x$  si ottiene

$$(2.5) \quad EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f(x, t)$$

che risulta essere un'equazione differenziale alle derivate parziali, lineare, del quarto ordine. Lo sforzo assiale, sotto le ipotesi fatte, risulta disaccoppiato rispetto alla quota parte di sollecitazioni flettenti e taglianti, nell'equazione differenziale (2.5) non si tiene conto degli effetti flettenti dovuti alla presenza di forze che possono essere applicate assialmente alla trave. Si aggiunge inoltre che l'equazione risulta approssimata, in quanto viene descritta la vibrazione forzata senza considerare il contributo delle deformazioni taglianti e dell'inerzia rotazionale.

### 2.1.2 Oscillazioni libere

La risoluzione del problema forzato si effettua tramite analisi modale, tale analisi richiede la conoscenza di pulsazioni circolari e forme modali, quantità ottenibili in output dal problema non forzato.

Ponendo nullo il carico distribuito esterno l'equazione differenziale (2.5) prende la forma

$$(2.6) \quad EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

Dove si è posto con

$$\bar{m} = \rho A$$

la massa per unità di lunghezza della trave.

Ponendo la soluzione dell'equazione differenziale delle oscillazioni libere della trave  $v(x, t)$  come prodotto di una funzione  $V(x)$  della sola ascissa  $x$  e di una funzione del tempo  $g(t)$

$$v(x, t) = V(x)g(t)$$

Derivando si ottiene

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \frac{d^4 V(x)}{dx^4} g(t)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = V(x) \frac{d^2 g(t)}{dt^2}$$

La (2.6) può quindi esprimersi come

$$EI \frac{d^4 V(x)}{dx^4} g(t) + \bar{m} V(x) \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = 0$$

Indicando con l'apice la deriva rispetto ad  $x$  e con il punto la derivata rispetto al tempo

$$(2.7) \quad EI V''''(x)g(t) + \bar{m} V(x) \dot{g}(t) = 0$$

Da quest'ultima risulta

$$(2.8) \quad \frac{EI V''''(x)}{m V(x)} = - \frac{\dot{g}(t)}{g(t)}$$

Il primo membro della (2.8) risulta essere una funzione della sola variabile  $x$ , mentre il secondo membro è una funzione del tempo. Affinché l'identità possa sussistere, ciascun termine della precedente espressione deve essere uguale ad una costante che viene denominata  $\omega^2$ .

Si ricavano a tal punto due equazioni differenziali ordinarie:

$$(2.9) \quad \ddot{g}(t) + \omega^2 g(t) = 0$$

$$(2.10) \quad V''''(x) - \lambda^4 V(x) = 0$$

con,

$$(2.11) \quad \lambda^4 = \frac{\bar{m}\omega^2}{EI}.$$

L'equazione (2.9) rappresenta l'equazione dei moti armonici mentre la (2.10) rappresenta l'equazione delle forme modali.

Le soluzioni delle due equazioni possono essere scritte rispettivamente come

$$g(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$V(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x + C_3 \cosh \lambda x + C_4 \sinh \lambda x$$

dove:

- $A, B$  : costanti di integrazione determinate in base alle condizioni iniziali assegnate al sistema al tempo  $t = 0$
- $C_1, C_2, C_3$  : costanti arbitrarie che caratterizzano la forma modale, calcolate in base alle condizioni di vincolo agli estremi della trave, due per ogni sezione terminale, dunque tramite quattro condizioni al contorno

Le condizioni ai limiti permettono di esprimere tre delle costanti in funzione della quarta e di ricavare l'equazione delle frequenze, da cui si deduce il parametro  $\lambda$ .

Si osserva che  $V(x)$  è soddisfatta per infiniti e specifici valori di  $\lambda$ , detti autovalori:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

Al generico autovalore  $\lambda_n$  corrisponde:

- la pulsazione naturale  $\omega_n$  deducibile dalla (2.11)

$$\omega_n = \lambda_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$$

- l'autofunzione  $V_n(x)$  definita a meno di una costante, che definisce la deformata assunta dalla trave in corrispondenza della generica pulsazione propria  $\omega_n$ , ovvero l'n-esimo modo naturale di vibrare del sistema

$$V_n(x) = C_1 \cos \lambda_n x + C_2 \sin \lambda_n x + C_3 \cosh \lambda_n x + C_4 \sinh \lambda_n x$$

Note le pulsazioni circolari è possibile definire, tramite le condizioni al contorno temporali, le funzioni  $g_n(t)$  come

$$g_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t$$

che permettono di ricavare l'integrale particolare n-esimo come

$$(2.12) \quad v_n(x, t) = V_n(x)(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t)$$

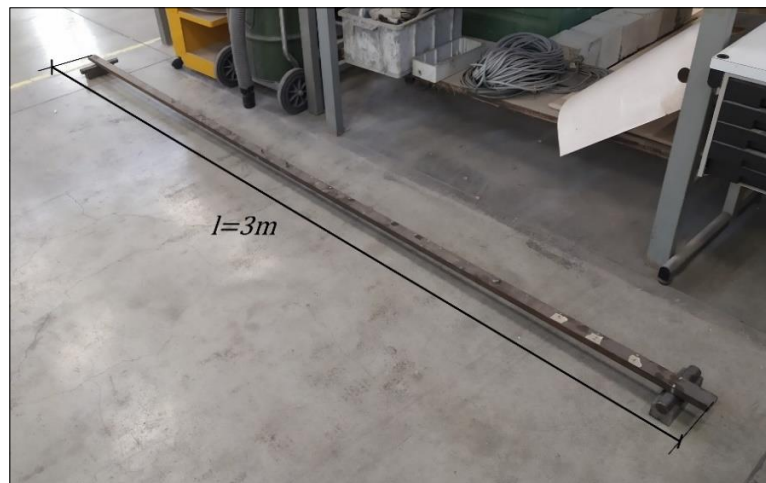
Essendo poi l'equazione delle oscillazioni libere della trave lineare, l'integrale generale è fornito dalla combinazione lineare delle soluzioni (2.12)

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x)(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t)$$

Quest'ultima espressione fornisce la deformata dell'asse geometrico della trave in vibrazione libera.

### 2.1.3 Applicazione alla trave oggetto di studio

Nel presente paragrafo si applica quanto introdotto al precedente 2.1.2 al caso oggetto di studio, ovvero trave a sezione costante appoggiata agli estremi. Si riporta in figura 2.2 un riferimento fotografico alla trave utilizzata in laboratorio



*Figura 2.2 Riferimento fotografico alla trave a sezione costante appoggiata agli estremi utilizzata in laboratorio LISG*

È di interesse in tale contesto la risoluzione del solo problema delle oscillazioni libere per la trave, a tale proposito si introducono le caratteristiche geometriche e meccaniche della trave utilizzata per le indagini sperimentali:

la sezione rettangolare della trave ha dimensioni

$$b = 40,06 \cdot 10^{-3} m$$

$$h = 20,02 \cdot 10^{-3} m$$

per la trave sono state misurate le caratteristiche seguenti

$$l = 3m \text{ lunghezza della trave}$$



$A = b \cdot h = 40,06 \cdot 10^{-3} \cdot 20,02 \cdot 10^{-3} = 8,02 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$  area della sezione trasversale

$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{40,06 \cdot 10^{-3} \cdot (20,02 \cdot 10^{-3})^3}{12} = 2,678 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$  momento di inerzia rispetto all'asse y

$\rho = 7776,289 \text{ Kg}_f/\text{m}^3$  densità di massa

$\bar{m} = \rho \cdot A = 7776,289 \cdot 8,02 \cdot 10^{-4} = 6,237 \text{ Kg}_f/\text{m}$  massa per unità di lunghezza della trave

$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N}/\text{m}^2$  modulo elastico

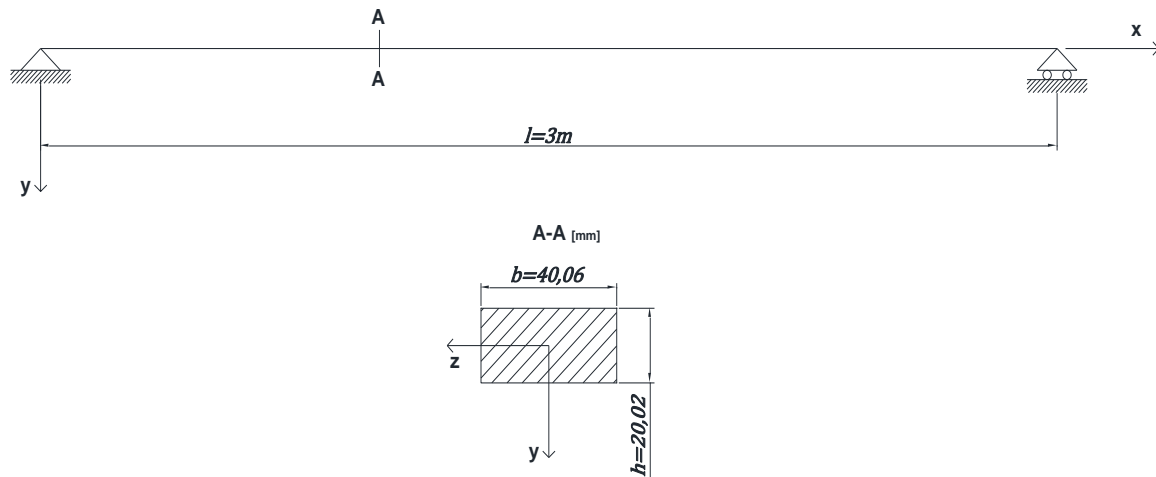


Figura 2.3 Trave appoggio-appoggio a sezione rettangolare

Le condizioni ai limiti per l'appoggio semplice risultano le seguenti:

$$v(0, t) = 0 \quad M(0, t) = 0 \quad \text{in } x = 0$$

$$v(l, t) = 0 \quad M(l, t) = 0 \quad \text{in } x = l$$

Si ottiene rispettivamente

$$V(0) = 0 \quad V''(0) = 0 \quad \text{in } x = 0$$

$$V(l) = 0 \quad V''(l) = 0 \quad \text{in } x = l$$

Essendo  $V(x)$  esprimibile come

$$(2.13) \quad V(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x + C_3 \cosh \lambda x + C_4 \sinh \lambda x$$

Derivando si ottiene

$$(2.14) \quad V''(x) = -\lambda^2 (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x - C_3 \cosh \lambda x - C_4 \sinh \lambda x)$$

Dalle condizioni in  $x = 0$  si ottiene

$$C_1 + C_3 = 0 \quad C_1 - C_3 = 0$$

Che conduce alle prime due costanti di integrazione

$$C_1 = C_2 = 0$$

Le precedenti (2.13) e (2.14) divengono quindi

$$(2.15) \quad V(x) = C_2 \operatorname{sen} \lambda x + C_4 \operatorname{senh} \lambda x$$

$$(2.16) \quad V''(x) = -\lambda^2(C_2 \operatorname{sen} \lambda x - C_4 \operatorname{senh} \lambda x)$$

Considerando ora le condizioni in  $x = l$  dalle due precedenti si ottiene

$$0 = C_2 \operatorname{sen} \lambda l + C_4 \operatorname{senh} \lambda l$$

$$0 = -C_2 \operatorname{sen} \lambda l + C_4 \operatorname{senh} \lambda l$$

Sommando membro a membro

$$2 C_4 \operatorname{senh} \lambda l = 0$$

$\operatorname{senh} \lambda l$  è diverso da zero per qualsiasi valore di  $\lambda l$ , dunque si ottiene che  $C_4$  è anch'essa nulla:

$$C_4 = 0$$

Le precedenti (2.15) e (2.16) prendono ora la forma seguente

$$(2.17) \quad V(x) = C_2 \operatorname{sen} \lambda x$$

$$(2.18) \quad V''(x) = -\lambda^2(C_2 \operatorname{sen} \lambda x)$$

Dalla (2.17), escludendo la soluzione banale  $C_2 = 0$ , dalla (2.17) si ricava l'equazione delle frequenze

$$\operatorname{sen} \lambda l = 0$$

Le cui soluzioni sono del tipo

$$\lambda_n l = n\pi$$

Sostituendo le radici così ottenute nell'espressione che fornisce le pulsazioni naturali si ottiene:

$$(2.19) \quad \omega_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$$

Le prime quattro pulsazioni naturali per la trave in esame, dalla precedente (2.19), risultano:

$$\omega_1 = \left(\frac{1\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}} = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 2,678 \cdot 10^{-8}}{6,237}} = 32,935 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_2 = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}} = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 2,678 \cdot 10^{-8}}{6,237}} = 131,739 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_3 = \left(\frac{3\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}} = \left(\frac{3\pi}{3}\right)^2 \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 2,678 \cdot 10^{-8}}{6,237}} = 296,413 \frac{rad}{s}$$

$$\omega_4 = \left(\frac{4\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}} = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 2,678 \cdot 10^{-8}}{6,237}} = 526,956 \frac{rad}{s}$$

Si riportano nella seguente tabella 2.1 pulsazioni, frequenze e periodi di vibrazione della trave appoggiata in oggetto:

	<b>Primo modo n=1</b>	<b>Secondo modo n=2</b>	<b>Terzo modo n=3</b>	<b>Quarto modo n=4</b>
<b>Pulsazione <math>\omega_n</math></b>	32,93473 rad/s	131,73893 rad/s	296,41259 rad/s	526,95572 rad/s
<b>Frequenza <math>f_n</math></b>	5,24173 Hz	20,96690 Hz	47,17553 Hz	83,86761 Hz
<b>Periodo <math>T_n</math></b>	0,19078 s	0,04769 s	0,02120 s	0,01192 s

*Tabella 2. 1 pulsazioni, frequenze e periodi di vibrazione della trave appoggiata modellata come sistema continuo*

Si osserva che la pulsazione associata all' n-esimo modo di vibrare della trave appoggiata risulta  $n^2$  volte più grande della pulsazione fondamentale, del primo modo di vibrare.

In corrispondenza dell'n-esimo modo di vibrare, caratterizzato dalla pulsazione  $\omega_n$ , la (2.17) consente di scrivere la forma modale come:

$$(2.20) \quad V_n(x) = C_2 \text{sen} \frac{n\pi}{l} x$$

Le prime quattro forme modali per la trave risultano:

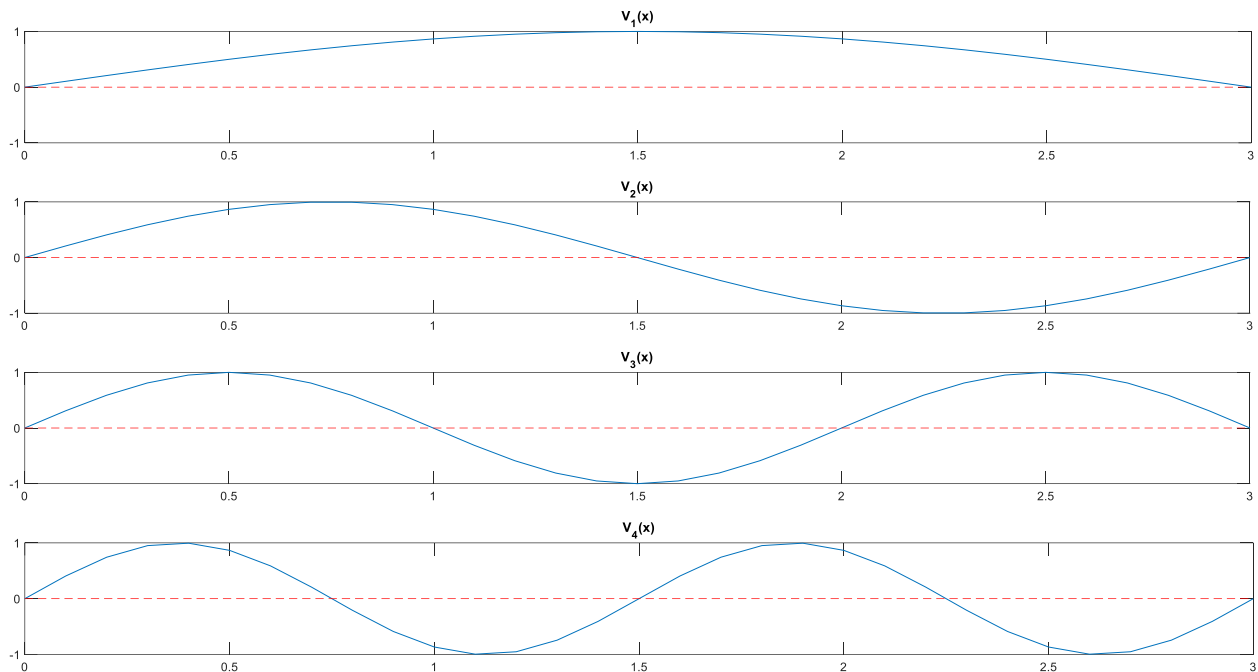
$$V_1(x) = C_2 \text{sen} \frac{\pi}{l} x$$

$$V_2(x) = C_2 \text{sen} \frac{2\pi}{l} x$$

$$V_3(x) = C_2 \text{sen} \frac{3\pi}{l} x$$

$$V_4(x) = C_2 \text{sen} \frac{4\pi}{l} x$$

Si riporta nei grafici 2.1 l'andamento delle deformate modali realizzato tramite MATLAB.



Grafici 2. 1 Forme modali per trave a sezione costante appoggiata agli estremi modellata come sistema continuo

Le autofunzioni ora rappresentate prendono il nome di modi propri di vibrare, questo deriva dal fatto che se le due condizioni al contorno temporali sono fissate in modo tale che la deformata iniziale della trave coincida con una delle forme modali e che la velocità iniziale sia nulla allora il sistema oscillerà con legge armonica senza variare la sua forma.

Una qualsiasi combinazione lineare delle forme modali o autofunzioni è soluzione dell'equazione differenziale (2.10) di seguito riscritta

$$V''''(x) - \lambda^4 V(x) = 0$$

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \text{sen} \frac{n\pi}{l} x \quad \text{con} \quad D_n = \gamma_n C_n$$

Con  $\gamma_n$  si indicano scalari arbitrari. Riprendendo la scrittura (2.12) dell'integrale generale si ottiene in definitiva come:

$$(2.21) \quad v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \text{sen} \frac{n\pi}{l} x (A_n \cos \omega_n t + B_n \text{sen} \omega_n t)$$

## 2.2 Trave come sistema discreto

Si tratta ora il caso in cui il modello adottato per descrivere la trave sia discreto, ad N gradi di libertà. In tal caso la risposta nel tempo del sistema è mappata da un numero finito di coordinate ovvero da N funzioni scalari

$$u_i(t), \text{ con } i = 1, 2, \dots, N$$

mentre nel caso continuo la risposta era descritta da una sola funzione  $v(x, t)$ .

Evidenziando le ulteriori differenze rispetto a quanto trattato al precedente 2.1:

- nel caso continuo il problema dinamico è governato da un'equazione differenziale, nel caso di sistema discreto si ha a che fare con un sistema algebrico.
- Le caratteristiche dinamiche del sistema, frequenze proprie di vibrazione e modi di vibrare, nel caso continuo sono infinite mentre nel caso discreto sono di numerosità pari ad  $N$ , ovvero pari al numero di gradi di libertà

L'equazione del moto di un sistema smorzato ad  $N$  gradi di libertà può scriversi nella forma

$$(2.22) \quad \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{k}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t)$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N1} & \cdots & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \vdots \\ \ddot{u}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_N(t) \end{bmatrix}$$

Nella (2.22)  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{k}$  denotano, nell'ordine, le matrici di massa, smorzamento e rigidità di dimensioni  $N \times N$  mentre  $\ddot{\mathbf{u}}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$ ,  $\mathbf{u}$  rappresentano, rispettivamente, i vettori delle accelerazioni, delle velocità e degli spostamenti nodali mentre il vettore delle forzanti esterne è indicato con  $\mathbf{p}(t)$ , i quattro vettori ora introdotti hanno dimensioni  $N \times 1$ .

Si sottolinea che la caratterizzazione dinamica sperimentale di una struttura richiede l'utilizzo di un modello discreto in quanto è discreto il numero di punti in cui è nota la risposta del sistema ed in cui lo stesso viene forzato; per quanto ora osservato la trattazione riportata nei successivi 2.3 e 2.4 fa riferimento ad una schematizzazione discreta della trave.

Quanto riportato ai successivi 2.2.1 e 2.2.2 fa esplicito riferimento al testo *Viola E. "Fondamenti di dinamica e vibrazione delle strutture" volume primo capitolo 11 "Sistemi ad  $N$  gradi di libertà"*.

### 2.2.1 Vibrazioni libere

A partire dal sistema algebrico delle (2.22), ponendo per ora pari al vettore nullo  $\mathbf{p}(t)$  e trascurando la presenza di smorzamento nel sistema si ottiene

$$(2.23) \quad \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{k}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$$

volendo risolvere il problema delle vibrazioni libere per la trave non smorzata discretizzata con  $N$  gradi di libertà si procede ipotizzando che la soluzione della (2.23) sia scrivibile come

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}g(t)$$

Sostituendo la precedente e le sue derivate temporali nella (2.23) si ottiene

$$(2.24) \quad \ddot{g}(t)\mathbf{m}\mathbf{U} + \dot{g}(t)\mathbf{c}\mathbf{U} + g(t)\mathbf{k}\mathbf{U} = \mathbf{0}$$

Supponendo che le matrici  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{k}$  siano definite positive, ossia per ogni vettore  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  risulti

$$\mathbf{x}^T \mathbf{m} \mathbf{x} > 0; \quad \mathbf{x}^T \mathbf{k} \mathbf{x} > 0$$

La (2.24) può scriversi nella forma

$$(2.25) \quad \mathbf{k}\mathbf{U} = -\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)}\mathbf{m}\mathbf{U}$$

ponendo  $\lambda = -\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)}$  (rapporto che risulta indipendente dal tempo), la (2.25) equivale alle due equazioni seguenti

$$(2.26) \quad \ddot{g}(t) + \lambda g(t) = 0$$

$$(2.27) \quad \mathbf{k}\mathbf{U} = \lambda \mathbf{m}\mathbf{U}$$

Con  $\lambda$  reale e positivo anche nel caso di autovettori  $\mathbf{U}$  complessi.

Ponendo inoltre  $\lambda = \omega^2$  le precedenti (2.26) e (2.27) diventano

$$(2.28) \quad \ddot{g}(t) + \omega^2 g(t) = 0$$

$$(2.29) \quad (\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m})\mathbf{U} = \mathbf{0}$$

La (2.29) rappresenta il sistema lineare e omogeneo di N equazioni, e costituisce il problema agli autovalori, rispetto alle matrici  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{m}$ .

La (2.29) ammette una soluzione non banale

$$\mathbf{U}^{(r)} = \begin{bmatrix} U_1^{(r)} \\ \vdots \\ U_N^{(r)} \end{bmatrix}$$

tale che

$$(\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m})\mathbf{U}_r = \mathbf{0}$$

se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti del sistema è nullo:

$$\det(\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}) = 0$$

L'ultima espressione, denominata equazione caratteristica, esprime un'equazione algebrica di grado N in  $\lambda = \omega^2$ .

Le radici

$$(2.30) \quad \lambda_r = \omega_r^2, \quad r = 1, \dots, N$$

Sono gli autovalori del problema mentre con  $\omega_r$  si indicano le pulsazioni proprie.

Gli autovalori sono ordinati in modo tale che

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N, \text{ quindi}$$

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_N$$

In corrispondenza di ogni autovalore  $\lambda_r = \omega_r^2$ , la soluzione non banale  $\mathbf{U}^{(r)}$  del sistema (2.29) è l'autovettore o modo di vibrare.

Il generico autovettore  $\mathbf{U}^{(r)}$ , come anticipato nel precedente 2.1.2 in merito all'n-esima autofunzione  $V_n(x)$ , non è determinato univocamente ma definito a meno di una costante moltiplicativa; tuttavia, il rapporto tra l'i-esima componente e la j-esima componente dello stesso autovettore è costante, pertanto, esso definisce una forma anche se di ampiezza arbitraria. Nella trattazione si è trascurata la presenza di smorzamento nel sistema in quanto la sua presenza condurrebbe ad un problema agli autovalori quadratico del tipo

$$(\lambda^2 \mathbf{m} + \lambda \mathbf{c} + \mathbf{k})\mathbf{U} = \mathbf{0}$$

Tale problema quadratico di dimensione N è risolvibile riconducendolo ad un problema lineare di dimensione 2N, in tal caso i 2N autovalori in output non saranno più necessariamente reali e distinti.

La nozione modo di vibrare attribuita nel caso di assenza di smorzamento agli autovettori perde quindi di significato nel caso smorzato.

In particolare, si osserva che se il sistema è debolmente smorzato, ovvero le radici sono complesse e coniugate a due a due e con parti reali negative, il valore assunto dalla parte immaginaria di tali radici è molto prossimo a quello delle corrispondenti radici ottenute risolvendo il problema non smorzato.

## 2.2.2 Vibrazioni forzate e smorzate

A partire dall'equazione del moto (2.22) si procede ipotizzando che la soluzione sia scrivibile come

$$(2.31) \quad \mathbf{u}(t) = \sum_{r=1}^N \eta_r(t) \mathbf{U}^{(r)} = \mathbf{X}\boldsymbol{\eta}(t)$$

Si è indicata con  $\mathbf{X}$  la matrice modale

$$\mathbf{X} = [\mathbf{U}^{(1)} \dots \mathbf{U}^{(r)} \dots \mathbf{U}^{(N)}] = \begin{bmatrix} U_1^{(1)} & \dots & U_1^{(r)} & \dots & U_1^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_N^{(1)} & \dots & U_N^{(r)} & \dots & U_N^{(N)} \end{bmatrix}$$

le cui colonne sono gli autovettori  $\mathbf{U}_r$  del sistema libero non smorzato; le quantità  $\eta_r$  rappresentano invece le coordinate nello spazio modale, raccolte nel vettore colonna  $\boldsymbol{\eta}(t)$ .

Sostituendo la (2.31) e le sue derivate temporali nell'equazione del moto (2.22) si ottiene

$$\mathbf{m} \left( \sum_{r=1}^N \ddot{\eta}_r(t) \mathbf{U}^{(r)} \right) + \mathbf{c} \left( \sum_{r=1}^N \dot{\eta}_r(t) \mathbf{U}^{(r)} \right) + \mathbf{k} \left( \sum_{r=1}^N \eta_r(t) \mathbf{U}^{(r)} \right) = \mathbf{p}(t)$$

(si introduce la notazione  $\mathbf{U}_s = \mathbf{U}^{(s)}$ ;  $\mathbf{U}_r = \mathbf{U}^{(r)}$  per indicare i generici modi di vibrare)

Premoltiplicando tutti i termini della precedente per l'autovettore  $\mathbf{U}_s^T$

(2.32)

$$\mathbf{U}_s^T \mathbf{m} \left( \sum_{r=1}^N \ddot{\eta}_r(t) \mathbf{U}_r \right) + \mathbf{U}_s^T \mathbf{c} \left( \sum_{r=1}^N \dot{\eta}_r(t) \mathbf{U}_r \right) + \mathbf{U}_s^T \mathbf{k} \left( \sum_{r=1}^N \eta_r(t) \mathbf{U}_r \right) = \mathbf{U}_s^T \mathbf{p}(t)$$

Ed introducendo le relazioni di ortogonalità tra due autovettori di indice diverso

$$(2.33) \quad \mathbf{U}_r^T \mathbf{m} \mathbf{U}_s = M_r \delta_{rs} = M_s \delta_{rs}$$

$$(2.34) \quad \mathbf{U}_r^T \mathbf{k} \mathbf{U}_s = K_r \delta_{rs} = K_s \delta_{rs}$$

Dove  $M_r, K_r$  denotano massa modale e rigidezza modale relative al generico r-esimo modo di vibrare; il delta di Kroneker risulta  $\delta_{rs} = 1$  per  $r = s$  e  $\delta_{rs} = 0$  per  $r \neq s$ .

Nella (2.32) si annullano i termini che moltiplicano le matrici  $\mathbf{m}, \mathbf{k}$  quando gli indici sono diversi  $r \neq s$ . Scambiando gli indici s ed r nella sommatoria si ottiene

$$\mathbf{U}_r^T \mathbf{m} \mathbf{U}_r \ddot{\eta}_r(t) + \sum_{s=1}^N \mathbf{U}_r^T \mathbf{c} \mathbf{U}_s \dot{\eta}_s(t) + \mathbf{U}_r^T \mathbf{k} \mathbf{U}_r \eta_r(t) = \mathbf{U}_r^T \mathbf{p}(t)$$

Indicando con,

$$C_{rs} = \mathbf{U}_r^T \mathbf{c} \mathbf{U}_s ; P_r(t) = \mathbf{U}_r^T \mathbf{p}(t)$$

dove  $P_r(t)$  è la componente r-esima della forza modale; richiamando le relazioni (2.33) e

(2.34) per  $r = s$ , si ottiene:

$$(2.35) \quad M_r \ddot{\eta}_r(t) + \sum_{s=1}^N C_{rs} \dot{\eta}_s(t) + K_r \eta_r(t) = P_r(t)$$

Dividendo ora i termini della (2.35) per  $M_r$  ed impiegando la definizione di pulsazione circolare  $\omega_r^2 = K_r/M_r$  si ottiene

$$(2.36) \quad \ddot{\eta}_r(t) + \sum_{s=1}^N \frac{C_{rs}}{M_r} \dot{\eta}_s(t) + \omega_r^2 \eta_r(t) = \frac{P_r(t)}{M_r} \quad \text{per } r = 1, \dots, N$$

Le N equazioni normali (2.36) sono accoppiate per la presenza dei coefficienti di smorzamento  $C_{rs} \neq 0$ , per  $r \neq s$ . Per strutture debolmente smorzate, si può trascurare l'influenza di tali termini non diagonali commettendo un errore proporzionale all'entità dei termini azzerati.

Esprimendo le precedenti (2.35) in forma matriciale si ottiene



$$(2.37) \quad \mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathbf{K}\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{P}(t)$$

con:

$$\mathbf{M} = \mathbf{X}^T \mathbf{m} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} M_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & M_N \end{bmatrix} \text{ Matrice che raccoglie le masse modali}$$

$\mathbf{C} = \mathbf{X}^T \mathbf{c} \mathbf{X}$  Matrice di smorzamento modale

$$\mathbf{K} = \mathbf{X}^T \mathbf{k} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} K_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & K_N \end{bmatrix} \text{ Matrice che raccoglie le rigidezze modali}$$

### 2.2.2.1 Smorzamento proporzionale

Al fine di disaccoppiare le N equazioni (2.36) è necessario che la matrice di smorzamento modale  $\mathbf{C}$  sia diagonale; si fa riferimento, per la successiva modellazione numerica della trave, al modello di smorzamento proporzionale introdotto da Rayleigh.

Per far sì che la matrice di smorzamento  $\mathbf{c}$  nello spazio fisico conduca, a seguito dell'operazione  $\mathbf{X}^T \mathbf{c} \mathbf{X} = \mathbf{C}$ , ad una matrice di smorzamento  $\mathbf{C}$  nello spazio modale diagonale il modello assume che  $\mathbf{c}$  sia esprimibile come combinazione lineare della matrice di massa  $\mathbf{m}$  e della matrice di rigidezza  $\mathbf{k}$

$$\mathbf{c} = \alpha \mathbf{m} + \beta \mathbf{k}$$

Con riferimento alle precedenti relazioni a commento della (2.37) si ottiene che il coefficiente di smorzamento r-esimo risulta esprimibile tramite

$$C_r = \alpha M_r + \beta K_r$$

L'indice di smorzamento modale associato all'r-esimo modo di vibrare assume quindi l'aspetto seguente

$$(2.38) \quad \xi_r = \frac{C_r}{2\omega_r M_r} = \frac{\alpha M_r + \beta K_r}{2\omega_r M_r} = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\omega_r} + \beta \omega_r \right)$$

Noti gli indici di smorzamento relativi a due modi di vibrare dalla precedente (2.38) è possibile ricavare  $\alpha$  e  $\beta$  tramite i quali poi ricavare i restanti indici di smorzamento.

La dipendenza dell'indice di smorzamento dalla pulsazione naturale per il generico modo r è rappresentata nel grafico 2.2 dove sono anche riportati i casi particolari in cui  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$ .

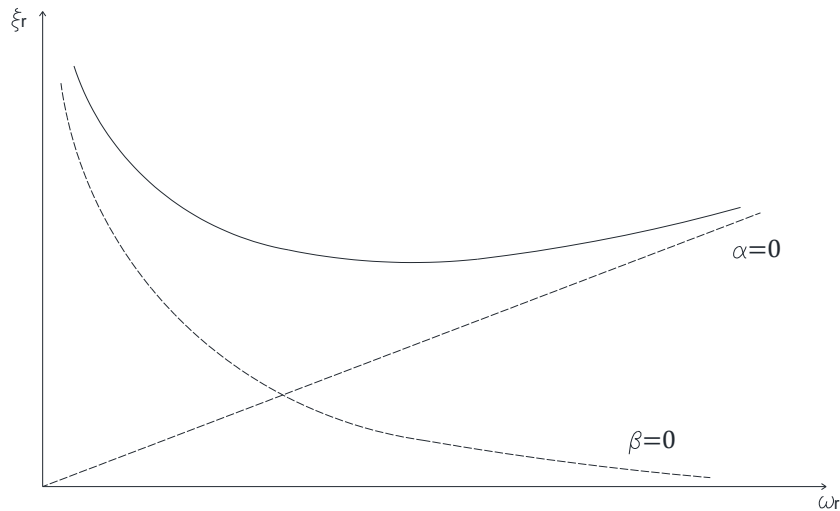


Grafico 2. 2 dipendenza dell'indice di smorzamento dalla pulsazione naturale per il generico modo  $r$ -esimo

Nel caso ora esaminato l'espressione (2.35) relativa all' $r$ -esimo modo di vibrare può riscriversi come

$$(2.39) \quad M_r \ddot{\eta}_r(t) + C_r \dot{\eta}_r(t) + K_r \eta_r(t) = P_r(t)$$

Le  $N$  equazioni normali (2.36) risultano in tal modo disaccoppiate; è possibile riscriverle come segue:

$$(2.40) \quad \ddot{\eta}_r(t) + 2\xi_r \omega_r \dot{\eta}_r(t) + \omega_r^2 \eta_r(t) = \frac{P_r(t)}{M_r} \quad \text{per } r = 1, \dots, N$$

dove si è sostituito  $\frac{C_r}{M_r} = 2\xi_r \omega_r$

### 2.2.3 Eccitazione generica in un solo punto

Supponendo che l'eccitazione esterna presenti una forzante generica diversa da zero solo in corrispondenza del nodo  $s$ -esimo, ossia il vettore  $\mathbf{p}(t)$  dei carichi nodali ammetta la rappresentazione:

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_s(t) \\ \vdots \\ p_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ p_s(t) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

La forza modale  $P_k(t)$  associata al modo di vibrare  $j$ -esimo, richiamando quanto introdotto per la scrittura della (2.35), risulta

$$P_j(t) = \mathbf{U}_j^T \mathbf{p}(t) = \sum_{i=1}^N p_i U_i^{(j)} = p_s(t) U_s^{(j)}$$

La (2.39) può quindi scriversi come (sempre con riferimento al modo di vibrare j-esimo)

$$(2.41) \quad M_j \ddot{\eta}_j(t) + C_j \dot{\eta}_j(t) + K_j \eta_j(t) = p_s(t) U_s^{(j)}$$

Nei successivi §3 e §4 si tratterà tale problema prima sperimentalmente e poi numericamente.

## 2.3 Identificazione dei parametri del sistema

Il presente paragrafo ha l'obiettivo di introdurre alla modalità di identificazione delle caratteristiche dinamiche adottate per le indagini sperimentali e poi replicate nelle analisi numeriche.

In linea con il processo di identificazione dei parametri di un sistema proposto dal testo *Viola E. "Fondamenti di dinamica e vibrazione delle strutture" volume secondo capitolo 6 "Tecniche di identificazione dinamica"* le fasi principali del processo sono:

- 1) Individuazione di un modello di riferimento, in cui risultano definiti i parametri caratteristici del comportamento dinamico del sistema;
- 2) Scelta del tipo di eccitazione, al fine di semplificare la determinazione dei parametri caratteristici;
- 3) processo di elaborazione che, a partire dalla risposta sperimentale, consenta di ricavare i valori dei parametri

I successivi tre paragrafi sono inerenti rispettivamente alle fasi elencate.

### 2.3.1 Modello delle funzioni di trasferimento

In tale paragrafo si va ad introdurre la metodologia adottata per descrivere la relazione tra le variabili di ingresso e di uscita; il modello adottato è il modello delle funzioni di trasferimento, anche denominato modello della risposta in frequenza, basato appunto sulla conoscenza delle funzioni di trasferimento anche denominate funzioni di risposta in frequenza.

La generica componente  $H_{rs}$ , denominata recettanza, è definita dal rapporto:

$$(2.42) \quad H_{rs} = \frac{u_r(t)}{p_s(t)}$$

Dove

$u_r(t)$  è lo spostamento del nodo r e  
 $p_s(t)$  è la forzante applicata al nodo s

Negli sviluppi successivi si farà riferimento all'inertanza, definita come

$$A_{rs} = \frac{a_r(t)}{p_s(t)}$$

Con:

$a_r(t)$  accelerazione del nodo r.

Si farà riferimento all'inertanza in quanto gli strumenti che forniscono le variabili di uscita adottati nelle indagini sperimentali sono accelerometri, dunque, anche la simulazione numerica verrà esposta sulla base delle funzioni di trasferimento in termini di accelerazione.

Il rapporto che sussiste tra recettanza ed inertanza è esprimibile tramite:

$$A(\Omega) = -\Omega^2 H(\Omega)$$

Considerando la trave oggetto di studio come un sistema discreto ad N gradi di libertà, come descritto al precedente 2.2, il modello matematico è definito dalla matrice delle funzioni  $H_{rs} = H_{sr}$  di trasferimento

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1s} & \dots & H_{1N} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2s} & \dots & H_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{r1} & H_{r2} & \dots & H_{rs} & \dots & H_{rN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{N1} & H_{N2} & \dots & H_{Ns} & \dots & H_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_s(t) \\ \vdots \\ p_N(t) \end{bmatrix}$$

### 2.3.2 Scelta del tipo di eccitazione

L'eccitazione viene applicata alla struttura al fine di ricavare le funzioni sperimentali di risposta in frequenza, tale eccitazione può essere

- Artificiale, generata da apposite apparecchiature di eccitazione dinamica
- Naturale, denominata eccitazione ambientale in quanto non richiede la messa in opera di un eccitatore per forzare il sistema

Per le indagini in oggetto è stata adottata un'eccitazione artificiale.

Le apparecchiature di eccitazione dinamica necessarie per imprimere la forzante possono essere in generale distinte come

- Eccitatori fissi, poiché collegati alla struttura durante le operazioni di eccitazione
- Eccitatori non fissi

La tipologia selezionata per le prove sperimentali rientra nella categoria di eccitatori non fissi. In base alle caratteristiche della forza erogata si possono avere svariate tipologie di eccitazione; se ne elencano di seguito solamente due in quanto sono di interesse per esporre il successivo processo di elaborazione dei dati:

1. Eccitazione sinusoidale semplice
2. Eccitazione impulsiva

La tipologia di eccitazione generata dallo strumento selezionato è impulsiva.

I successivi 2.3.2.1 e 2.3.2.2 trattano la metodologia che permette di determinare le funzioni di risposta in frequenza contestualmente alla tipologia di eccitazione scelta.

### 2.3.2.1 Eccitazione sinusoidale semplice

L'eccitazione sinusoidale semplice è costituita dalla forzante armonica

$$(2.43) \quad p_s(t) = P_{0s} e^{i\Omega t}$$

applicata all's-esimo nodo, di ampiezza  $P_{0s}$  e frequenza assegnata  $\Omega$ .

Questo tipo di eccitazione è generato artificialmente da eccitatori fissi, una volta misurata la risposta del sistema nel nodo r-esimo

$$u_{rk}(\Omega)$$

si procede a variare la pulsazione  $\Omega$  della forzante a passi discreti  $\Delta\Omega$  in modo manuale o automatico. Per misurare la risposta

$$u_{rk}(\Omega + \Delta\Omega)$$

una volta nota  $u_{rk}(\Omega)$  è necessario aspettare la scomparsa del transitorio innescato dalla variazione di frequenza  $\Delta\Omega$ .

La metodologia ora descritta consente di infittire i punti di analisi nelle vicinanze delle frequenze proprie  $\omega_n$  della struttura e di diradarli nelle zone lontane da queste, essendo possibile imporre il passo  $\Delta\Omega$ .

La funzione di trasferimento sperimentale definita dalla (2.42) viene in tal modo definita per ogni pulsazione  $\Omega$  della forzante e per ogni punto di misura r sulla struttura, dalla relazione:

$$H_{rs}^* = \frac{u_r}{p_s} = \frac{U_r e^{-i\phi_r} e^{i\Omega t}}{P_{0s} e^{i\Omega t}} = \frac{u_{0r}}{P_{0s}}$$

Dove si è indicato con  $u_{0r} = U_r e^{-i\phi_r}$  con  $\phi_r$  che indica la differenza di fase della risposta rispetto alla forzante.

Con tale metodologia viene quindi eccitato un singolo modo risonante per volta in quanto la funzione di trasferimento viene costruita punto per punto.

### 2.3.2.2 Eccitazione impulsiva

L'eccitazione impulsiva adottata per le indagini svolte è prodotta tramite un martello ad impatto, le specifiche dello strumento utilizzato verranno esposte nel successivo §3 inerente alle indagini sperimentali svolte.

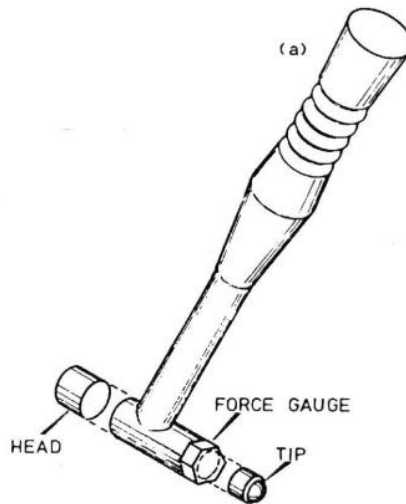


Figura 2. 4 Dettaglio del martello strumentato

Lo strumento, rappresentato in figura 2.4 (tratta dal testo *Ewins D.J. "Modal testing: Theory, practice and application" seconda edizione*) è un comune martello al quale vengono aggiunti un trasduttore di forza ed una punta che può essere di materiale diverso in base all'intervallo di frequenze da indagare.

La rigidità della punta caratterizza il periodo  $T_c$  e quindi la forma dell'impulso (grafico 2.3), in particolare il periodo cresce passando da punte più rigide a punte più deformabili.

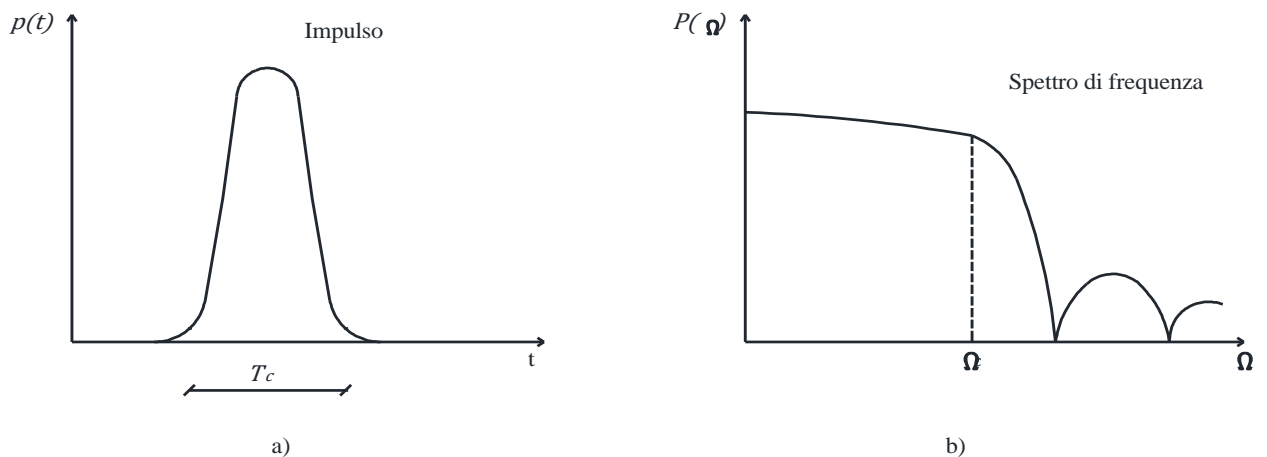


Grafico 2. 3 Tipica forma d'onda prodotta da un impatto a) e relativo spettro di frequenza b)

È importante sottolineare che con una forzante di questo tipo vengono eccitati tutti i modi naturali ricadenti nell'intervallo di frequenze compreso fra 0 ed  $\Omega_c$ , quindi la funzione di risposta in frequenza in tal caso viene ricavata simultaneamente per tutte le pulsazioni della forzante senza la necessità di ripetere la rilevazione nel nodo r-esimo al variare della pulsazione  $\Omega$ .

### 2.3.3 Processo di elaborazione

Con riferimento all'equazione relativa al j-esimo modo di vibrare (2.41) introdotta al paragrafo 2.2.3 relativamente al caso di eccitazione generica in un solo punto si procede alla determinazione della funzione di trasferimento nel caso di forzante sinusoidale del tipo (2.43) applicata al nodo s-esimo, per poi estendere la trattazione al caso di forzante impulsiva.

Considerando l'r-esimo modo di vibrare sostituendo la (2.43) nella (2.41) si ottiene

$$M_r \ddot{\eta}_r(t) + C_r \dot{\eta}_r(t) + K_r \eta_r(t) = P_{0s} e^{i\Omega t} U_s^{(r)}$$

per  $r = 1, \dots, N$ .

Indicando con

$$(2.44) \quad F_{0r} = P_{0s} U_s^{(r)}$$

si ottiene

$$M_r \ddot{\eta}_r(t) + C_r \dot{\eta}_r(t) + K_r \eta_r(t) = F_{0r} e^{i\Omega t}$$

Imponendo una soluzione del tipo

$$\eta_r = A_r e^{i(\Omega t - \phi_r)} = \eta_{0r} e^{i\Omega t}$$

con

$$\eta_{0r} = A_r e^{-i\phi_r} \text{ per } r = 1, \dots, N$$

ampiezza complessa.

Si ricava la risposta dell'oscillatore r-esimo nello spazio modale:

$$\eta_{0r} = \frac{F_{0r}}{K_r - M_r \Omega^2 + i C_r \Omega} = \frac{P_{0s} U_s^{(r)}}{K_r - M_r \Omega^2 + i C_r \Omega}$$

Raccogliendo le ampiezze modali complesse in un vettore:

$$\boldsymbol{\eta}_0 = [\eta_{01} \dots \eta_{0N}]^T$$

ed andando ad esprimere la risposta nello spazio fisico in notazione estesa:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \\ \vdots \\ u_s(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{bmatrix} = \eta_1(t) \begin{bmatrix} U_1^{(1)} \\ \vdots \\ U_r^{(1)} \\ \vdots \\ U_s^{(1)} \\ \vdots \\ U_N^{(1)} \end{bmatrix} + \dots + \eta_N(t) \begin{bmatrix} U_1^{(N)} \\ \vdots \\ U_r^{(N)} \\ \vdots \\ U_s^{(N)} \\ \vdots \\ U_N^{(N)} \end{bmatrix}$$

La componente r-esima del vettore  $\mathbf{u}(t)$  degli spostamenti nodali prende la forma

$$(2.45) \quad u_r(t) = \sum_{j=1}^N \eta_j(t) U_r^{(j)} \quad \text{per } r = 1, \dots, N$$

Ossia la somma dei prodotti delle coordinate modali  $\eta_j(t)$  per le componenti r-esime degli autovettori  $\mathbf{U}^{(1)} \dots \mathbf{U}^{(N)}$ .

Volendo ora ricavare la relazione nello spazio fisico tra lo spostamento del nodo r-esimo e la forza  $p_s$  applicata nel punto s-esimo si procede definendo la funzione di trasferimento nello spazio modale, che è definita analogamente alla (2.42) ma nello spazio modale:

$$(2.46) \quad \bar{H}_{rr}(\Omega) = \bar{H}_r(\Omega) = \frac{1}{K_r - M_r \Omega^2 + i C_r \Omega} = \frac{\eta_{0r}}{F_{0r}}$$

$\bar{H}_r(\Omega)$  prende il nome di autorecettanza r-esima.

Esplicitando  $\eta_{0r}$  e moltiplicando entrambi i membri per  $e^{i\Omega t}$  si ottiene

$$\eta_{0r} e^{i\Omega t} = \bar{H}_{rr}(\Omega) F_{0r} e^{i\Omega t}$$

$$(2.47) \quad \eta_r(t) = \bar{H}_{rr}(\Omega) F_r(t)$$

con  $F_r(t) = F_{0r} e^{i\Omega t}$ .

Richiamando le relazioni (2.43) e (2.44)  $F_r(t)$  può esprimersi anche come

$$F_r(t) = P_{0s} U_s^{(r)} e^{i\Omega t} = p_s(t) U_s^{(r)}$$

Sostituendo la (2.47) nella (2.45) si ricava la relazione tra  $u_r(t)$  e  $p_s(t)$ :

$$u_r(t) = \sum_{j=1}^N \bar{H}_{jj}(\Omega) F_j(t) U_r^{(j)} = \sum_{j=1}^N \bar{H}_{jj}(\Omega) p_s(t) U_s^{(j)} U_r^{(j)}$$

Andando ora a definire le funzioni di trasferimento tramite la (2.42) si ottiene

$$H_{rs}(\Omega) = \frac{u_r(t)}{p_s(t)} = \frac{P_{0s} e^{i\Omega t} \sum_{j=1}^N \bar{H}_{jj}(\Omega) U_s^{(j)} U_r^{(j)}}{P_{0s} e^{i\Omega t}} = \sum_{j=1}^N \bar{H}_{jj}(\Omega) U_s^{(j)} U_r^{(j)}$$



nella quale si sostituisce l'espressione (2.46) dell'autorecettanza j-esima  $\bar{H}_{jj}(\Omega)$  ad ottenere:

$$(2.48) \quad H_{rs}(\Omega) = \sum_{j=1}^N \frac{U_s^{(j)} U_r^{(j)}}{K_j - M_j \Omega^2 + i C_j \Omega}$$

che esprime la risposta del sistema nel punto "r", per una forzante unitaria applicata nel punto "s". Si sottolinea che la funzione di trasferimento (2.48) è definita dal contributo di tutti i modi di vibrare e che  $U_s^{(j)}$  ed  $U_r^{(j)}$  rappresentano le componenti s-esima e r-esima dell'autovalore j-esimo.

Moltiplicando numeratore e denominatore della (2.48), espressione che fornisce il singolo elemento della matrice di trasferimento, per il complesso coniugato del denominatore ( $K_j - M_j \Omega^2 - i C_j \Omega$ ) è possibile ricavare le espressioni della parte reale ed immaginaria della funzione di trasferimento:

$$H_{rs}(\Omega) = \sum_{j=1}^N \frac{U_s^{(j)} U_r^{(j)}}{K_j - M_j \Omega^2 + i C_j \Omega} \cdot \frac{K_j - M_j \Omega^2 - i C_j \Omega}{K_j - M_j \Omega^2 - i C_j \Omega} = \sum_{j=1}^N \frac{U_s^{(j)} U_r^{(j)} (K_j - M_j \Omega^2 - i C_j \Omega)}{(K_j - M_j \Omega^2)^2 + (C_j \Omega)^2} =$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{U_s^{(j)} U_r^{(j)} (K_j - M_j \Omega^2)}{(K_j - M_j \Omega^2)^2 + (C_j \Omega)^2} - i \sum_{j=1}^N \frac{U_s^{(j)} U_r^{(j)} C_j \Omega}{(K_j - M_j \Omega^2)^2 + (C_j \Omega)^2}$$

$$ReH_{rs} = \sum_{j=1}^N \frac{U_s^{(j)} U_r^{(j)} (K_j - M_j \Omega^2)}{(K_j - M_j \Omega^2)^2 + (C_j \Omega)^2}$$

$$ImH_{rs} = \sum_{j=1}^N \frac{-U_s^{(j)} U_r^{(j)} C_j \Omega}{(K_j - M_j \Omega^2)^2 + (C_j \Omega)^2}$$

Al fine di identificare il rapporto tra parte immaginaria della funzione di trasferimento e le forme modali si procede alla riscrittura delle tre espressioni precedenti moltiplicando numeratore e denominatore per  $\frac{1}{M_j}$  ed introducendo le seguenti relazioni

$$\omega_j^2 = \frac{K_j}{M_j} \quad ; \quad \frac{C_j}{M_j} = 2\xi_j \omega_j$$

si ottiene quindi quanto segue:

(2.49)

$$\begin{aligned}
H_{rs}(\Omega) &= \sum_{j=1}^N \frac{U_s^{(j)} U_r^{(j)} (K_j - M_j \Omega^2) \left(\frac{1}{M_j}\right)}{[(K_j - M_j \Omega^2)^2 + (C_j \Omega)^2] \left(\frac{1}{M_j}\right)} - i \sum_{j=1}^N \frac{U_s^{(j)} U_r^{(j)} C_j \Omega \left(\frac{1}{M_j}\right)}{[(K_j - M_j \Omega^2)^2 + (C_j \Omega)^2] \left(\frac{1}{M_j}\right)} = \\
&= \sum_{j=1}^N \frac{U_s^{(j)} U_r^{(j)} (\omega_j^2 - \Omega^2)}{M_j [(\omega_j^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \Omega)^2]} - i \sum_{j=1}^N \frac{U_s^{(j)} U_r^{(j)} 2\xi_j \omega_j \Omega}{M_j [(\omega_j^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \Omega)^2]} = \\
&= \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j U_s^{(j)} U_r^{(j)} (\omega_j^2 - \Omega^2)}{(\omega_j^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \Omega)^2} - i \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j U_s^{(j)} U_r^{(j)} 2\xi_j \omega_j \Omega}{(\omega_j^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \Omega)^2}
\end{aligned}$$

essendo:  $[(K_j - M_j \Omega^2)^2 + (C_j \Omega)^2] \left(\frac{1}{M_j}\right) = M_j [(\omega_j^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \Omega)^2]$

ed avendo posto con:  $\alpha_j = \frac{1}{M_j}$  coefficiente di partecipazione modale.

La precedente scrittura (2.49) di  $H_{rs}$  evidenzia la parte reale ed immaginaria che possono quindi scriversi rispettivamente come:

$$ReH_{rs} = \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j U_s^{(j)} U_r^{(j)} (\omega_j^2 - \Omega^2)}{(\omega_j^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \Omega)^2}$$

$$ImH_{rs} = \sum_{j=1}^N \frac{-\alpha_j U_s^{(j)} U_r^{(j)} 2\xi_j \omega_j \Omega}{(\omega_j^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \Omega)^2}$$

Si riprende a tal punto quanto osservato all'inizio del paragrafo. L'espressione della funzione di risposta in frequenza  $H_{rs}$  nella (2.49) è dedotta a partire da un sistema discreto forzato con forzante sinusoidale nel nodo s-esimo, tale risultato è estendibile al caso di forzante impulsiva in quanto questa eccita la struttura in un fissato intervallo di frequenze come rappresentato in figura 2.7;  $\Omega$  nella precedente espressione potrà quindi assumere valori in tale intervallo a seconda dei parametri adottati per discretizzare il dominio delle frequenze.

Si osserva che in condizioni di risonanza, in corrispondenza del generico j-esimo modo di vibrare  $\Omega = \omega_j$ , se si trascurano i modi adiacenti la (2.49) assume l'aspetto seguente

$$(2.50) \quad H_{rs}(\Omega = \omega_j) \approx -i \frac{\alpha_j U_s^{(j)} U_r^{(j)} 2\xi_j \omega_j \Omega}{(\omega_j^2 - \omega_j^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \Omega)^2} = -i \frac{2\xi_j \omega_j^2 \alpha_j U_s^{(j)} U_r^{(j)}}{(2\xi_j \omega_j^2)^2} = -i \alpha_j \frac{U_s^{(j)} U_r^{(j)}}{2\xi_j \omega_j^2}$$

la vibrazione dovuta al j-esimo modo risonante è puramente immaginaria se si trascurano i contributi dei modi non risonanti.

Il contributo dei modi adiacenti, non risonanti, è trascurabile nel caso in cui lo smorzamento è piccolo ed i modi sono distanziati; sotto tale ipotesi la (2.50) rappresenta la risposta dell'r-esimo grado di libertà, per una forzante applicata nel grado di libertà s-esimo, quando  $\Omega$  (valore di frequenza che ricade nel range eccitato dalla forzante impulsiva) è pari alla frequenza di risonanza del generico j-esimo modo di vibrare.

## 2.4 Identificazione delle forme modali per la trave

Considerando la trave appoggiata oggetto di studio di fig.2.3, per effettuare le indagini sperimentali si è discretizzata inizialmente metà della stessa in 15 punti, uno ogni 10cm, ed in ognuno di tali punti è stato impresso l'input mentre in due di questi si è registrato l'output come schematizzato in fig. 2.5.

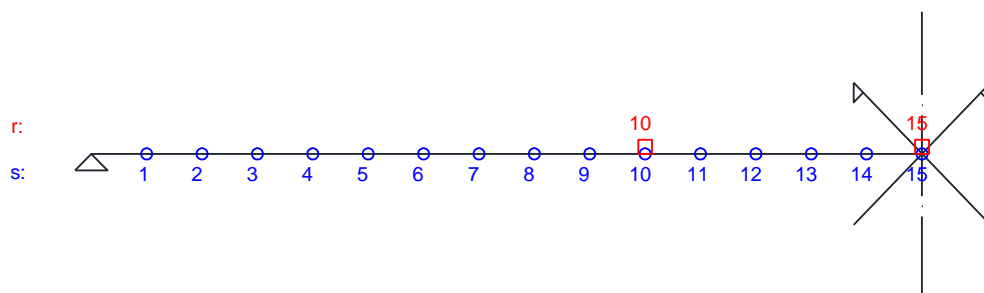


Figura 2. 5 Discretizzazione della trave utilizzata nelle indagini sperimentali. In blu si evidenziano i nodi mentre in rosso gli accelerometri.

La matrice di trasferimento  $\mathbf{H}(\Omega)$ , nel caso si discretizzi la trave con 15 DOF (gradi di libertà traslazionali in direzione y), avrà dimensioni 15x15; valutando per ora un singolo output,  $r = 10$ , ad ogni battuta sarà nota una sola funzione  $H_{10\ s}$  della matrice di trasferimento.

Come già introdotto il generico elemento della matrice di trasferimento  $\mathbf{H}_{rs}$  esprime la risposta del sistema nel punto “r” (indice di riga) per una forzante unitaria applicata nel punto “s” (indice di colonna) è rappresentato concretamente da un vettore con tante componenti quante ne sono state fissate in fase di impostazione della prova sperimentale.

Dall'accelerometro posto nel nodo dieci ( $r = 10$ ) è dunque nota una riga della matrice di trasferimento:

$$[\mathbf{H}_{10\ 1}(\Omega) \ \mathbf{H}_{10\ 2}(\Omega) \ \dots \ \mathbf{H}_{10\ 15}(\Omega)]$$

Focalizzando ora l'attenzione sul primo modo di vibrare della trave, ed andando a valutare l'espressione (2.50) per  $\Omega = \omega_1$ , si ottiene:

$$\begin{aligned}
[H_{10\ 1}(\omega_1) \dots H_{10\ 15}(\omega_1)] &\approx -i\alpha_1 \frac{[U_1^{(1)} U_2^{(1)} U_3^{(1)} U_4^{(1)} \dots U_{15}^{(1)}] U_{10}^{(1)}}{2\xi_1\omega_1^2} \\
&= -i \frac{\alpha_1 U_{10}^{(1)}}{2\xi_1\omega_1^2} [U_1^{(1)} U_2^{(1)} U_3^{(1)} U_4^{(1)} \dots U_{15}^{(1)}]
\end{aligned}$$

Dall'accelerometro posto nel nodo quindici ( $r = 15$ ) sarà invece noto:

$$[H_{15\ 1}(\Omega) H_{15\ 2}(\Omega) \dots H_{15\ 15}(\Omega)]$$

valutando anche in questo caso le 15 FRF ottenute sperimentalmente al valore di frequenza corrispondente al primo modo risonante  $\Omega = \omega_1$  si ottiene

$$\begin{aligned}
[H_{15\ 1}(\omega_1) \dots H_{15\ 15}(\omega_1)] &\approx -\alpha_1 \frac{[U_1^{(1)} U_2^{(1)} U_3^{(1)} U_4^{(1)} \dots U_{15}^{(1)}] U_{15}^{(1)}}{2\xi_1\omega_1^2} \\
&= -i \frac{\alpha_1 U_{15}^{(1)}}{2\xi_1\omega_1^2} [U_1^{(1)} U_2^{(1)} U_3^{(1)} U_4^{(1)} \dots U_{15}^{(1)}]
\end{aligned}$$

è perciò possibile stimare le coordinate modali valutando le FRF in corrispondenza delle frequenze proprie della trave; la modalità di calcolo delle funzioni di trasferimento a partire dalle acquisizioni ottenute in laboratorio sono riportate al successivo 2.5.

Si osserva in conclusione che, con riferimento ai primi quattro modi di vibrare flessionali, la posizione degli accelerometri ricade nei punti di nullo delle deformate modali del terzo e del secondo modo rispettivamente per gli accelerometri posti in corrispondenza del nodo 10 e del nodo 15; dalle FRF sperimentali l'output atteso in termini di modi di vibrare risonanti sarà dunque

- Accelerometro nodo 10: Modo 1, Modo 2, Modo 4
- Accelerometro nodo 15: Modo 1, Modo 3

## 2.5 Stima delle funzioni di trasferimento sperimentali

I dati che caratterizzano le indagini sperimentali descritte al successivo §3 sono:

- Input: andamento nel tempo della forzante impulsiva  $\mathbf{p}_s(t)$  con  $s = 1, \dots, N_{nodi}$
- Output: Andamento nel tempo dell'accelerazione  $\mathbf{a}_r(t)$  con  $r = r_1, r_2$ .

$\mathbf{p}_s(t)$  e  $\mathbf{a}_r(t)$  sono vettori le cui componenti rappresentano rispettivamente la forzante e la risposta, tali componenti sono appunto discrete ed il passo di discretizzazione  $\Delta t$  è uno dei parametri che è necessario stabilire per avviare l'indagine sperimentale.

Non si fa esplicito riferimento alla discretizzazione riportata in fig. 2.8 in merito alla numerazione dei nodi ma si mantiene una notazione generica in quanto nelle indagini sono state adottate diverse modalità di discretizzazione.

### 2.5.1 Stima diretta

La stima diretta della funzione di risposta in frequenza a partire dai dati sopra riportati è stata effettuata nel modo seguente

$$(2.51) \quad \mathbf{A}_{rs}(\Omega) = \frac{F[\mathbf{a}_r(t)]}{F[\mathbf{p}_s(t)]}$$

Si è indicato con

$F[\mathbf{a}_r(t)] = -\Omega^2 \mathbf{U}_r(\Omega)$  la trasformata di Fourier discreta del vettore  $\mathbf{a}_r(t)$

$F[\mathbf{p}_s(t)] = \mathbf{P}_s(\Omega)$  la trasformata di Fourier discreta del vettore  $\mathbf{p}_s(t)$

Tale operazione, come tutte le elaborazioni dei dati effettuate nelle indagini sperimentali, sono realizzate tramite software MATLAB; se  $\mathbf{X}$  è il vettore da trasformare, di lunghezza  $n$ , la trasformata  $\mathbf{Y}$  di tale vettore, anch'essa di lunghezza  $n$ , è definita nel software come segue

$$(2.52) \quad Y_k = \sum_{j=1}^n X_j W_n^{-(j-1)(k-1)}$$

$$W_n = e^{(-2\pi i)/n}$$

La definizione è riconducibile alla definizione di integrale di Fourier:

$$(2.53) \quad Y(\Omega) = \int_0^\infty X(t) e^{-i\Omega t} dt$$

sostituendo nella (2.52) quanto segue

$$Y(\Omega) \rightarrow Y_k \quad X(t) \rightarrow X_j \quad \int \rightarrow \Sigma;$$

$$\infty \rightarrow T;$$

$$\Omega \rightarrow \Omega_j = \frac{j}{T} \quad t \rightarrow k\Delta t = k \frac{T}{n} \quad \Omega t \rightarrow \Omega_k N \Delta t = j \frac{k}{n}$$

L'integrale si riconduce alla definizione discreta (2.52), che riscritta si presenta come

$$Y_k = \sum_{j=1}^n X_j e^{-\frac{2\pi i}{n}(j-1)(k-1)}$$

## 2.5.2 Stima tramite PSD

Si è proceduto inoltre alla stima delle funzioni di risposta in frequenza tramite la densità di potenza spettrale (PSD).

Scrivendo la relazione (2.51) con riferimento però alla FRF in termini di spostamento si ha

$$(2.54) \quad \mathbf{H}(\Omega) = \frac{\mathbf{U}(\Omega)}{\mathbf{P}(\Omega)}$$

Esplicitando  $\mathbf{U}(\Omega)$  dalla (2.54) si ottiene

$$(2.55) \quad \mathbf{U}(\Omega) = \mathbf{H}(\Omega)\mathbf{P}(\Omega)$$

Essendo  $\mathbf{U}^*(\Omega)$  il complesso coniugato di  $\mathbf{U}(\Omega)$  vale la seguente relazione:

$$\mathbf{H}^*(\Omega) = \frac{\mathbf{U}^*(\Omega)}{\mathbf{P}^*(\Omega)}$$

Moltiplicando  $\mathbf{U}(\Omega)$  per la complessa coniugata della stessa, per le precedenti relazioni è possibile scrivere

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\Omega)\mathbf{U}^*(\Omega) &= \mathbf{H}(\Omega)\mathbf{P}(\Omega)\mathbf{H}^*(\Omega)\mathbf{P}^*(\Omega) \\ |\mathbf{U}(\Omega)|^2 &= |\mathbf{H}(\Omega)|^2|\mathbf{P}(\Omega)|^2 \end{aligned}$$

Indicando con:

$\mathbf{S}_u(\Omega) = |\mathbf{U}(\Omega)|^2$  Potenza spettrale dell'output

$\mathbf{S}_p(\Omega) = |\mathbf{P}(\Omega)|^2$  Potenza spettrale dell'input

si ottiene

$$\mathbf{S}_u(\Omega) = |\mathbf{H}(\Omega)|^2\mathbf{S}_p(\Omega)$$

esplicitando poi la funzione di trasferimento,

$$(2.56) \quad |\mathbf{H}(\Omega)|^2 = \frac{\mathbf{S}_u(\Omega)}{\mathbf{S}_p(\Omega)}$$

Sulla base di questa prima equazione è stato possibile stimare il modulo della funzione di trasferimento, le informazioni relative alla fase non sono però presenti.

### 2.5.3 Stima tramite CPSD

Al fine di stimare la funzione di trasferimento si introduce una seconda relazione che sfrutta la correlazione tra forzante e risposta. A partire dalla precedente (2.55) moltiplicando per  $\mathbf{P}^*(\Omega)$ , complessa coniugata della forzante, si ottiene

$$(2.57) \quad \mathbf{U}(\Omega)\mathbf{P}^*(\Omega) = \mathbf{H}(\Omega)\mathbf{P}(\Omega)\mathbf{P}^*(\Omega)$$

Il prodotto

$$\mathbf{S}_{up}(\Omega) = \mathbf{U}(\Omega)\mathbf{P}^*(\Omega)$$

è denominato Cross Power Spectral Density (CPSD). Essendo poi

$$\mathbf{P}(\Omega)\mathbf{P}^*(\Omega) = |\mathbf{P}(\Omega)|^2$$

è possibile riscrivere la (2.57) come

$$(2.58) \quad \mathbf{S}_{up}(\Omega) = \mathbf{H}(\Omega)\mathbf{S}_p(\Omega)$$

Ricavando infine  $\mathbf{H}(\Omega)$  dalla (2.58) si ottiene

$$(2.59) \quad \mathbf{H}(\Omega) = \frac{\mathbf{S}_{up}(\Omega)}{\mathbf{S}_p(\Omega)}$$

## 2.6 Il metodo delle curvature modali

Come introdotto §1 oltre all'identificazione delle caratteristiche dinamiche della trave oggetto di studio il presente elaborato ha l'obiettivo di identificare una variazione di rigidezza flessionale indotta nella trave oggetto di studio.

Il metodo di identificazione utilizzato è stato studiato a partire dalle seguenti pubblicazioni:

*Pandey A.K., Biswas M., Samman M. M., "Damage detection from changes in curvature mode shapes", 1990;*

*Abdel Wahab M. M., De Roeck G., "Damage detection in bridges using modal curvatures: application to a real damage scenario", 1999.*

Per identificare la modifica nella configurazione si adotta il parametro introdotto da Pandey, Biswas, Samman, denominato "curvature mode shape"; la curvatura in un punto della trave è data da

$$(2.6.1) \quad v'' = M/EI$$

Dove:

$v''$  curvatura in una sezione

$M$  momento flettente in una sezione

$E$  modulo elastico

$I$  momento di inerzia della sezione rettangolare

Se una fessura o un altro danneggiamento sono introdotti nella struttura si assisterà ad una riduzione di  $(EI)$  in corrispondenza della sezione danneggiata con conseguente incremento della curvatura nella stessa sezione.

Una riduzione locale di  $(EI)$  conduce dunque ad un aumento nella differenza tra le curvature dedotte dalla struttura danneggiata e non danneggiata, tale incremento viene utilizzato per localizzare il danno.

Nelle indagini sperimentali svolte sulla trave oggetto di studio si è proceduto andando a modificare la configurazione di partenza introducendo un incremento di rigidezza flessionale, che comunque conduce ad un incremento tra le curvature valutate prima e dopo la variazione. Tale scelta deriva sia dalla necessità di non danneggiare la trave studiata in laboratorio che dalla possibilità di variare la posizione della modifica indotta nella trave come verrà poi specificato ai successivi paragrafi 3.6 e 3.7.

Non essendo possibile utilizzare la relazione (2.6.1) a partire dai dati rilevati sperimentalmente ed essendo centrale nella presente trattazione l'indagine sperimentale sulla trave di laboratorio note le forme modali della struttura nella configurazione intatta e modificata, si effettua il calcolo della curvatura modale tramite approssimazione della derivata seconda con differenza centrale del secondo ordine

$$(2.6.2) \quad (v''_i)_n = ((v_{i+1})_n - 2(v_i)_n + (v_{i-1})_n)/h^2$$

Con

$v''_i$  coordinata i-esima del vettore  $(v'')_n$  relativo al modo n-esimo

$h$  lunghezza dell'elemento che discretizza la trave.

$v_i$  coordinata modale i-esima del vettore modale  $(v)_n$

Per il calcolo delle curvature modali si farà riferimento sia nelle indagini sperimentali che nelle analisi numeriche alla precedente relazione (2.6.2).

Per riconoscere nelle formule riportate di seguito la configurazione iniziale da quella variata queste si indicano rispettivamente con pedice "o" e pedice "V".



L'identificazione si concretizza graficando la differenza assoluta tra le curvature modali della configurazione intatta e modificata per i primi modi di vibrare flessionali del sistema

$$(2.6. 3) \quad \mathbf{d}_n = |(\mathbf{v}''_o)_n - (\mathbf{v}''_V)_n|$$

con  $\mathbf{v}''_o, \mathbf{v}''_V$  vettori le cui componenti rappresentano le curvature modali relative al modo  $n$  con riferimento rispettivamente alla configurazione intatta e variata.

Il picco nei grafici realizzati per i modi flessionali rilevati indica la presenza del danneggiamento.

La pubblicazione di Abdel Wahab e De Roeck riprende quanto elaborato da Pandey, Biswas e Samman introducendo un parametro denominato “Curvature Damage Factor” (CDF) che consiste nel mediare, a parità di nodo  $i$ -esimo che discretizza la struttura, le differenze tra le curvature modali (2.4.3)

$$(2.6. 4) \quad CDF_i = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |(\mathbf{v}''_o)_i - (\mathbf{v}''_V)_i|$$

Con

$CDF_i$  “Curvature Damage Factor” relativo al nodo  $i$ -esimo

$N$  numero totale di modi flessionali considerati

$(\mathbf{v}''_o)_i$  componente  $i$ -esima del vettore  $(\mathbf{v}''_o)_n$

$(\mathbf{v}''_V)_i$  componente  $i$ -esima del vettore  $(\mathbf{v}''_V)_n$

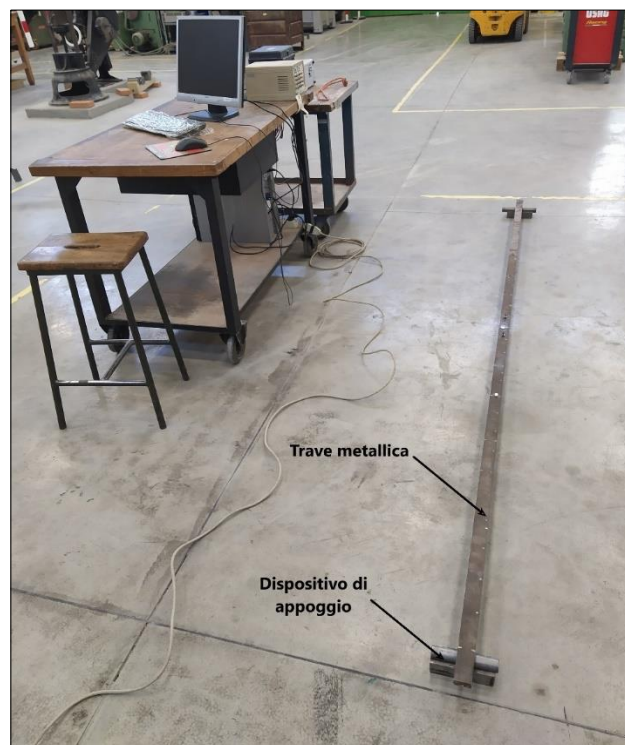
In tal modo le informazioni fornite dagli  $N$  grafici che riportano l'andamento delle differenze assolute  $\mathbf{d}_n$  vengono riassunte da un unico grafico complessivo che riporta in ascisse i nodi ed in ordinate il relativo parametro  $CDF_i$ ; dal grafico in oggetto è possibile identificare la posizione del danneggiamento presente nella struttura studiata nella posizione dove si riscontra il picco.

### 3. INDAGINI SPERIMENTALI

Nel presente capitolo verranno presentati i risultati delle indagini sperimentali svolte presso il laboratorio di Ingegneria Strutturale e Geotecnica (LISG). Si procede inizialmente descrivendo la strumentazione utilizzata ed introducendo le modalità di prova, per poi passare ai risultati ottenuti dalle indagini selezionate come maggiormente significative ai fini dell'identificazione delle caratteristiche dinamiche della trave e dell'identificazione dell'irrigidimento locale tramite metodo delle curvature modali.

#### 3.1 Set-up di prova

La trave oggetto di studio, caratterizzata dalle proprietà geometrico meccaniche riportate al precedente 2.1.3 è riportata in figura 3.1



*Figura 3.1 Trave metallica non strumentata e dispositivi di appoggio*

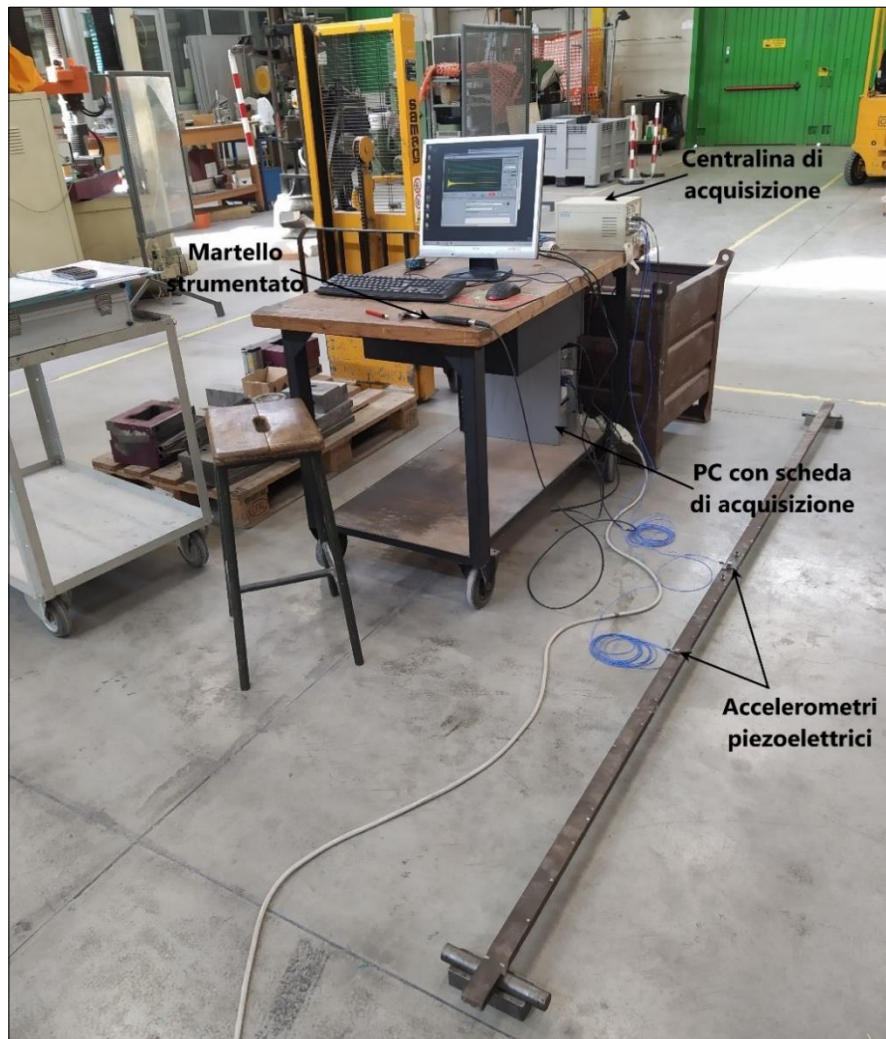
Gli apparecchi che realizzano gli appoggi sono costituiti da un cilindro metallico sul quale poggia la trave, il cilindro a sua volta è posto su una base metallica a contatto col terreno come riportato nella seguente figura 3.2.



*Figura 3.2 vista frontale e laterale del dispositivo di appoggio*

La strumentazione utilizzata per eseguire le prove è la seguente (fig.3.3):

- Computer con scheda di acquisizione dati
- Centralina di acquisizione dati e cavi di collegamento alla scheda di acquisizione
- Martello strumentato e cavo di collegamento alla centralina
- Accelerometri piezoelettrici e cavi di collegamento alla centralina



*Figura 3.3 Descrizione grafica del set-up di prova*

Si descrivono di seguito le componenti ora elencate:

- Computer con scheda di acquisizione

Il computer utilizzato per le acquisizioni è dotato di una scheda a più ingressi che permette il collegamento dello stesso alla centralina.

Si riporta in figura 3.4 il dettaglio del pannello di collegamento della scheda di acquisizione



*Figura 3.4 Pannello di collegamento della scheda di acquisizione*

I canali utilizzati sono tre: Canale 0 (CH0) collegato all'output relativo al martello strumentato mentre gli altri due (CH1 e CH2) sono collegati all'output degli accelerometri piezoelettrici.

Al successivo 3.2 viene descritto in dettaglio il software che permette di elaborare e salvare i dati acquisiti dagli strumenti collegati alla scheda

- Centralina di acquisizione

Si riporta in figura 3.5 una foto del pannello frontale della centralina utilizzata, per le prove sono stati utilizzati tre degli otto canali disponibili; la centralina permette di amplificare il segnale in output con due diversi livelli  $\times 10$   $\times 100$ , per le acquisizioni riportate nel presente elaborato non è stata utilizzata amplificazione.

I cavi collegati nella parte destra del singolo pannello a quattro canali, relativi all'output, sono quelli collegati alla scheda di acquisizione (fig.3.4).

In figura 3.6 si riporta un dettaglio di tale pannello a quattro canali con l'indicazione degli strumenti ad esso collegati.

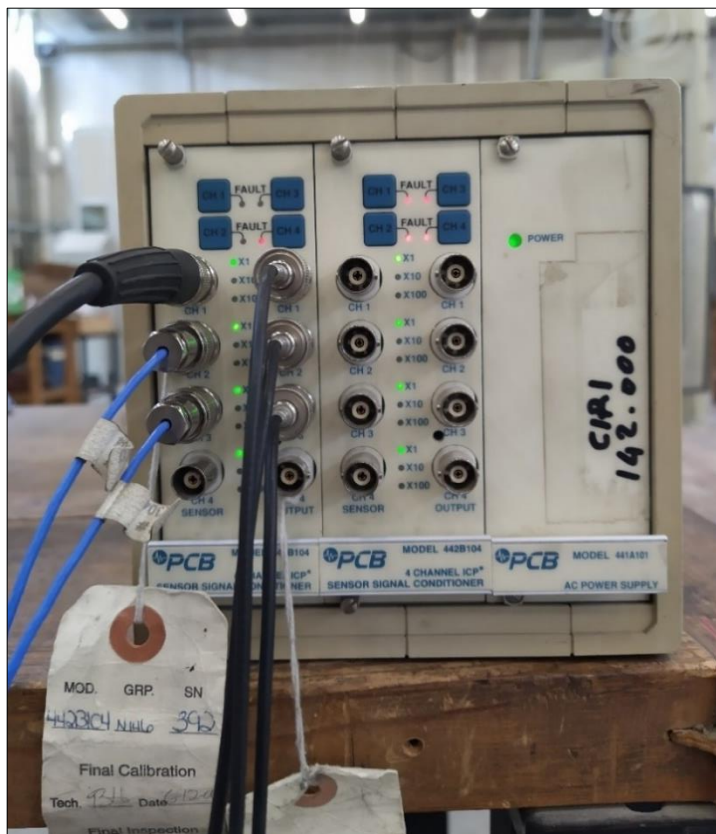


Figura 3. 5 Pannello frontale della centralina di acquisizione

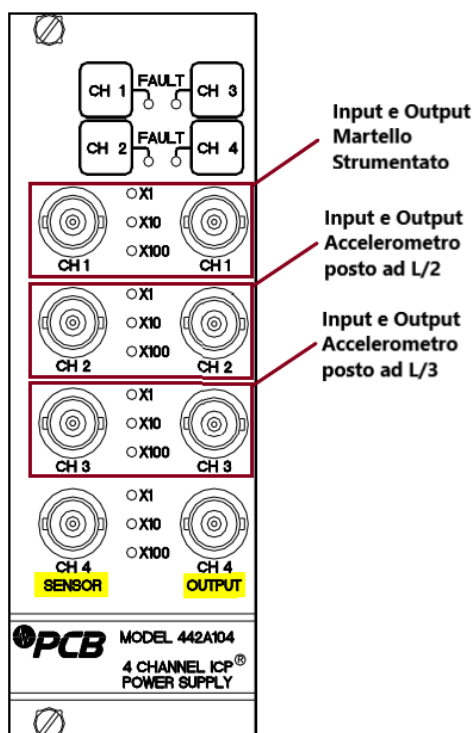


Figure 5.1 Model 442B104 Front Panel

Figura 3.6 Singolo pannello a quattro canali, immagine tratta dal manuale dello strumento

- Martello strumentato

Come introdotto al paragrafo 2.3.2 lo strumento adottato per forzare il sistema è il martello strumentato o martello ad impatto schematizzato nella precedente figura 2.4 e di seguito raffigurato in foto:



Figura 3.7 Dettaglio del martello ad impulso utilizzato per le prove

Per la rielaborazione dei dati il segnale, acquisito in milliVolt mV, è stato convertito in Newton N tramite apposito coefficiente di taratura; tale coefficiente, come riportato nell'estratto del cel certificato di calibrazione in tabella 3.1, varia a seconda della tipologia di punta, plastica o alluminio, e della presenza o meno della massa di regolazione, elemento che può essere aggiunto allo strumento a seconda dell'intensità del segnale richiesta per la prova.

HAMMER SENSITIVITY:				
Tip		Plastic/Vinyl, with tuning mass.	Plastic/Vinyl, with tuning mass.	Plastic/Vinyl
Hammer Configuration		None	Aluminum	None
Extender		None	Aluminum	None
Hammer Sensitivity	mV/lb	55.9	58.1	51.8
	(mV/N)	12.56	13.06	11.65

**Above data is valid for all supplied tips.**

Tabella 3.1 Sensibilità del martello, tabella estratta del certificato di calibrazione dello strumento

Per le elaborazioni effettuate il valore del coefficiente di taratura adottato risulta:

$$K_{martello} = 11,65 \text{ mV/N}$$

definito come il rapporto tra la tensione elettrica in uscita ed il valore della grandezza meccanica in ingresso.

In figura 3.9 si riporta un disegno tratto dal manuale dello strumento che riporta le dimensioni e le tipologie di punte presenti

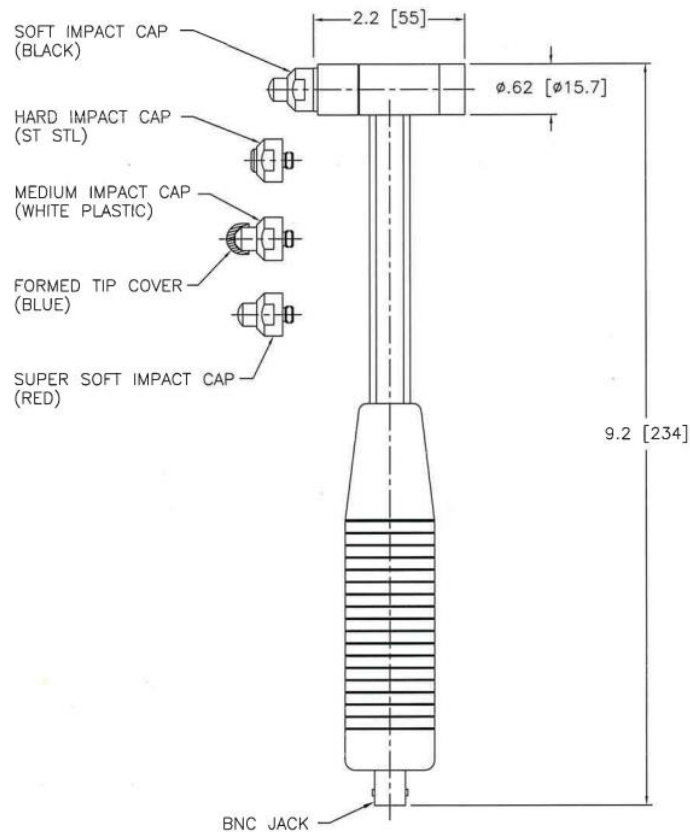
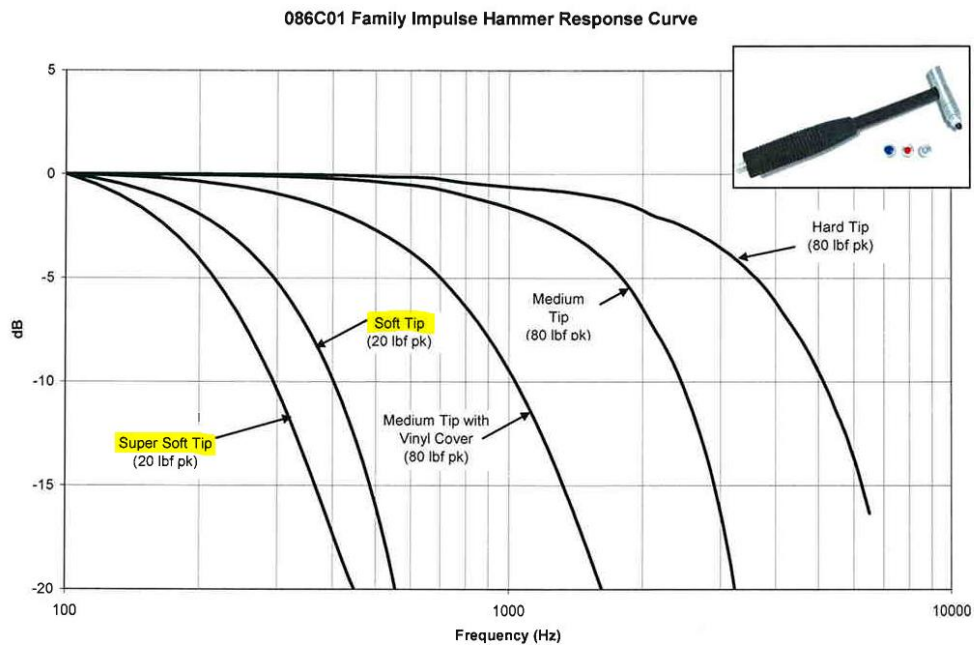


Figura 3.8 Disegno schematico del martello, tratto dal manuale dello strumento

Per le prove la risposta in frequenza di interesse, essendo oggetto di osservazione i primi quattro modi flessionali della trave, risulta compresa tra 0 e 100 Hz, in particolare ai fini della caratterizzazione dei modi di vibrare della trave si è posta attenzione fino all'ottavo modo flessionale ricadente ad un valore di frequenza pari a 335,47Hz come riportato al successivo 3.2.

Le punte adottate, a fronte di tale risposta in frequenza sono le più deformabili, in particolare, con riferimento alla rappresentazione 3.8 sono state utilizzate la punta "soft" in gomma nera e la punta super soft in gomma di colore rosso (fig3.9). Si riporta nel grafico 3.1 la curva di risposta del martello ad impulso al variare della tipologia di punta utilizzata (andamenti confrontabili a quanto riportato nel grafico 2.3 b))



*Grafico 3.1 Curve di risposta del martello in funzione della punta utilizzata*

Al successivo capitolo 4 in merito alla valutazione dei parametri da adottare nelle analisi numeriche si riporta un grafico analogo al 3.1 ma con ascissa lineare, realizzato con riferimento alla punta soft, e si riscontra lo stesso range di frequenze eccitate dal martello (grafico 4.3).



*Figura 3.9 Dettaglio delle punte utilizzate per effettuare le prove*

Il connettore utilizzato per lo strumento è di tipo BNC coassiale sia in ingresso che in uscita, come riportato nella successiva figura 3.10:



*Figura 3.10 Cavi VLC di collegamento per il martello ad impatto*



- Accelerometri piezoelettrici uniassiali



*Figura 3.11 Accelerometri montati e collegati alla trave appoggiata*

Gli strumenti utilizzati per acquisire la risposta della struttura sono accelerometri piezoelettrici uniassiali a compressione, il principio di funzionamento è basato sulla proprietà, manifestata da alcuni cristalli (ad esempio quarzo e tormalina), di generare cariche elettriche proporzionali alle forze ad essi applicate. Il cristallo piezoelettrico è posto al di sotto della massa sismica ed i due elementi sono contenuti nell'involucro che viene poi collegato alla struttura.

Tali strumenti operano in zona quasi statica, ovvero il rapporto di frequenza

$$r = \frac{\Omega}{\omega} \ll 1$$

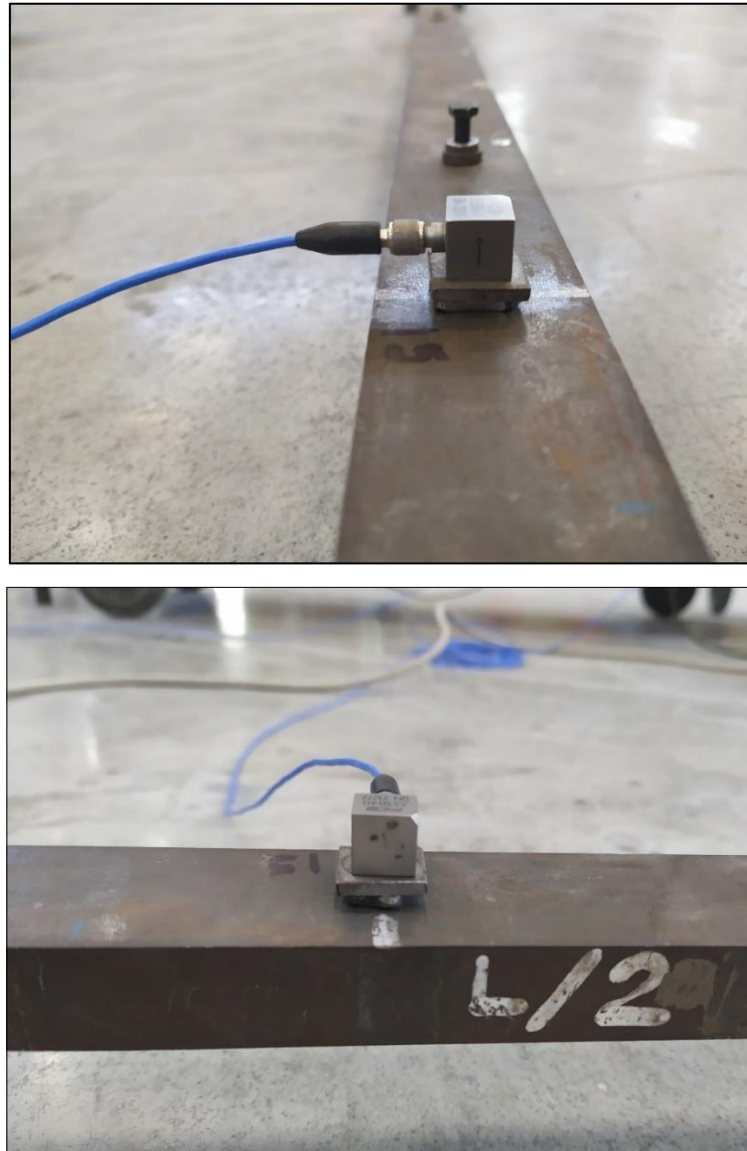
$\Omega$  frequenza di vibrazione della struttura

$\omega$  frequenza propria dell'oscillatore (accelerometro)

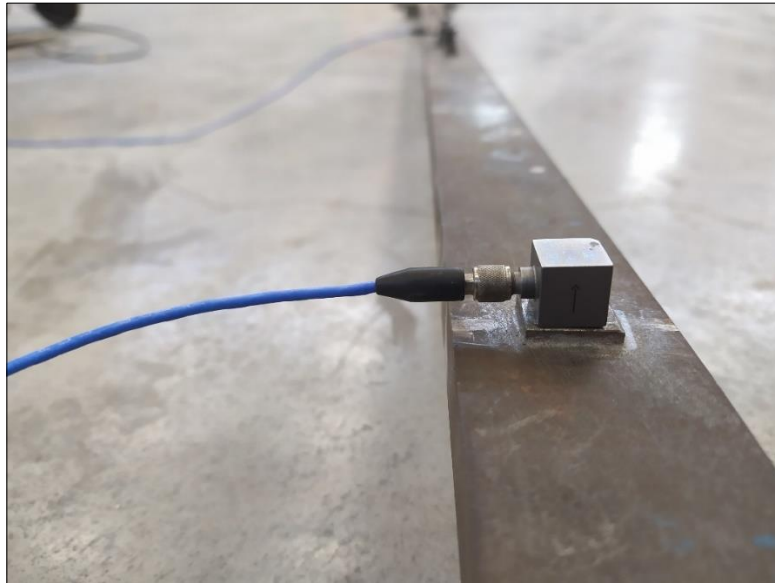
Per tale motivo la massa dell'oscillatore, ovvero la massa sismica contenuta nell'accelerometro, è molto piccola; essendo la pulsazione propria definita tramite

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

se  $m$  è molto piccolo la pulsazione propria dell'oscillatore risulterà elevata e di conseguenza il rapporto  $r$  tra le frequenze della struttura e dello strumento risulterà ridotto. Operando in zona quasi statica lo strumento riesce a seguire la risposta della struttura alla quale è collegato in quanto il coefficiente di amplificazione dinamica risulta circa pari a zero. Nelle foto degli strumenti riportate in figura 3.12 e 3.13 si osserva una freccia che sta ad indicare la direzione lungo la quale viene misurata l'accelerazione



*Figura 3.12 Accelerometro posizionato in mezzeria e fissato con magnete*



*Figura 3.13 Accelerometro posizionato ad L/3 e fissato con perno filettato*

È da sottolineare che per contenere gli errori sulle frequenze misurate, la frequenza di impiego dell'accelerometro non deve superare  $1/3$  della sua frequenza di risonanza; tale frequenza di risonanza è variabile in funzione della tipologia di collegamento utilizzato per collegare lo strumento alla struttura, si riporta nel grafico 3.2 la risposta in frequenza dell'accelerometro in funzione del tipo di collegamento.

Per i due accelerometri sono state adottate due diverse modalità di collegamento, per l'accelerometro collegato al canale CH1, posizionato in mezzeria, il collegamento è stato realizzato tramite un magnete posto a contatto con una base metallica collegata allo strumento tramite vite filettate (fig.3.12); l'accelerometro collegato al secondo

canale CH2, posto ad L/3, è stato invece collegato direttamente tramite perno filettato in quanto in tale posizione era presente un apposita base saldata alla trave (fig.3.13). Si riportano di seguito le specifiche degli strumenti tratte dal manuale degli accelerometri utilizzati,

Performance	ENGLISH	SI	
Sensitivity(± 10 %)	500 mV/g	51.0 mV/(m/s <sup>2</sup> )	
Measurement Range	± 10 g pk	± 98 m/s <sup>2</sup> pk	
Frequency Range(± 5 %)	0.5 to 3000 Hz	0.5 to 3000 Hz	
Resonant Frequency	≥ 20 kHz	≥ 20 kHz	
Phase Response(± 5 °)	2 to 3000 Hz	2 to 3000 Hz	
Broadband Resolution(1 to 10,000 Hz)	0.00005 g rms	0.0005 m/s <sup>2</sup> rms	[1]
Non-Linearity	≤ 1 %	≤ 1 %	[2]
Transverse Sensitivity	≤ 5 %	≤ 5 %	[3]

Si evidenzia il coefficiente di taratura, che risulta pari a

$$K_{accelerometro} = 51 \text{ mV}/(\text{m/s}^2)$$

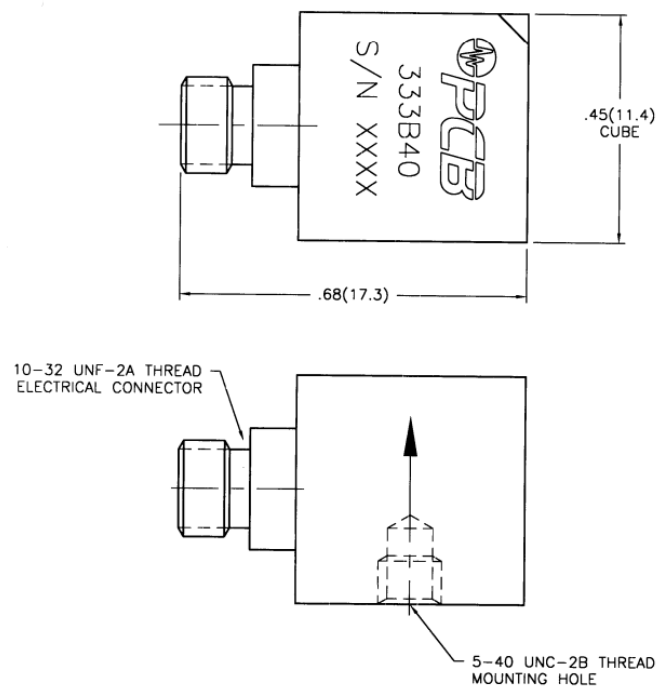
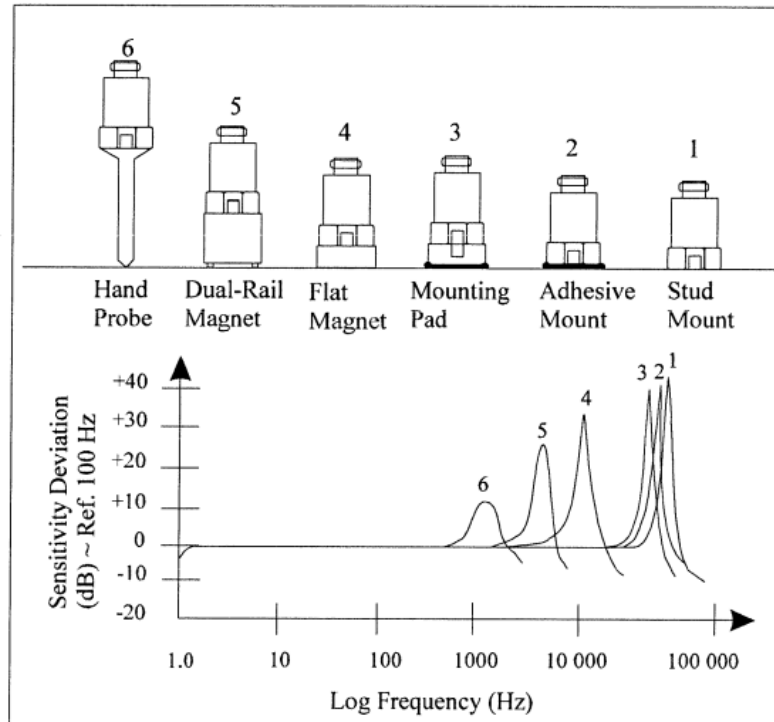


Figura 3. 14 Disegno schematico dell'accelerometro, tratto dal manuale dello strumento



*Grafico 3. 2 Tipologie di configurazioni per il montaggio ed il loro effetto ad alte frequenze*

Osservando il grafico 3.2 si nota che la risposta in frequenza degli accelerometri utilizzati non risulta costante per basse frequenze, l'accelerazione rilevata non risulta costante nel range che si stima essere 0 – 1,2Hz.



*Figura 3. 15 Dettaglio del cavo di collegamento degli accelerometri piezoelettrici*

La tipologia di collegamento è differente rispetto a quanto descritto per il martello ad impatto, in particolare il collegamento del cavo alla centralina è di tipo coassiale VLC mentre è di tipo Thread coassiale filettato come riportato in dettaglio in figura 3.15 per il collegamento del cavo allo strumento (nel disegno in fig. 3.14 è indicata la posizione del connettore Thread sull' accelerometro).

## 3.2 Acquisizione dati e modalità di prova

L'applicazione utilizzata per visualizzare e salvare l'output degli strumenti precedentemente descritti è progettata nel software LabVIEW, installato nel pc dotato di scheda di acquisizione, in figura 3.16 si riporta una schermata tratta dall'applicazione. Si osservano tre sottosezioni principali:

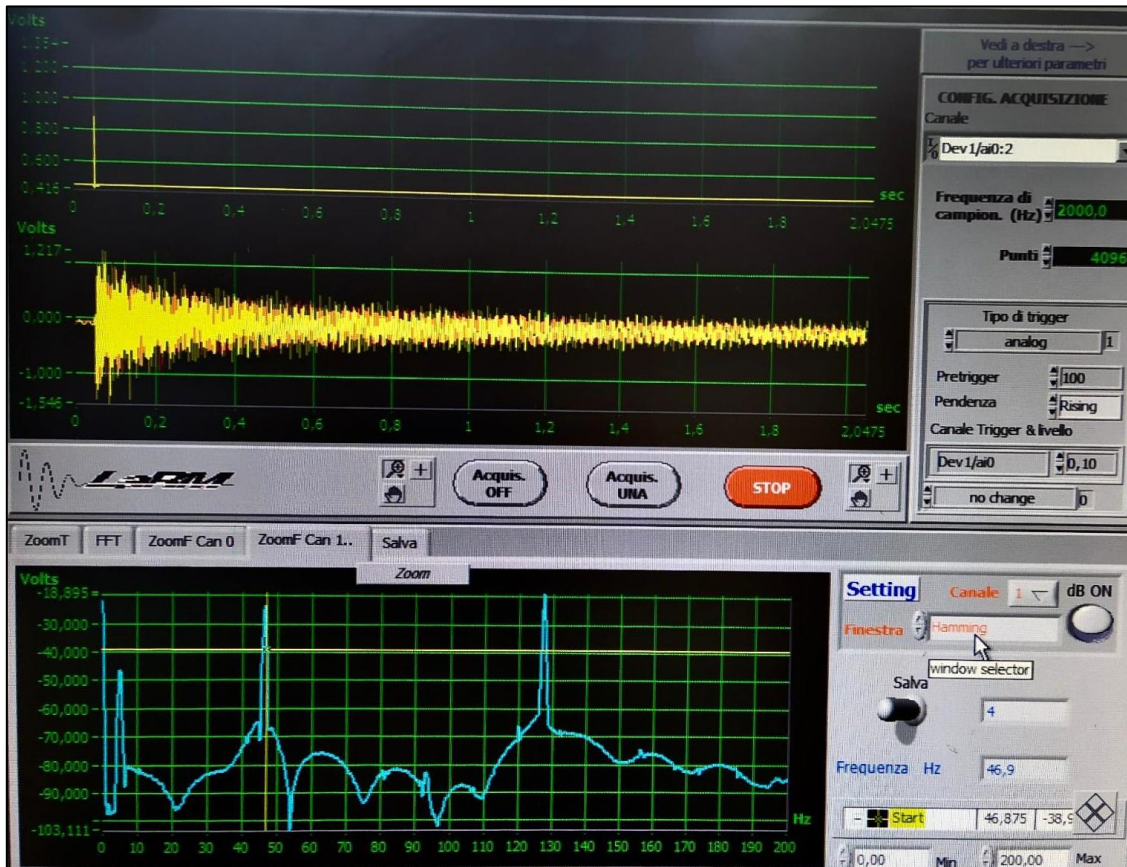


Figura 3.16 Schermata tratta dall'applicazione sviluppata con LabVIEW per l'acquisizione dei dati

1. in alto a sinistra è possibile visualizzare l'output nel dominio del tempo del dispositivo collegato al CH0 ovvero il martello ad impatto, la forma del segnale in giallo corrisponde a quella attesa, riportata nel grafico 2.3 a); immediatamente sotto a questo si visualizzano i canali CH1 e CH2 relativi ai due accelerometri, si distinguono infatti due accelerogrammi (in giallo e in rosso), conseguenti alla battuta impressa con il martello.
2. In alto a destra è possibile settare i parametri necessari ad avviare le varie indagini sperimentali, descritti al successivo 3.2.1
3. In basso, infine, si osserva una sezione dedicata alla manipolazione delle acquisizioni nel dominio della frequenza ed al salvataggio dei segnali rilevati. Si sottolinea che la

manipolazione dei dati è stata effettuata tramite software MATLAB, senza utilizzare i dati rielaborati dall'applicazione, ed i risultati ottenuti sono riportati nei successivi paragrafi. La schermata ora commentata, riportata in figura 3.16, è relativa alla prima indagine effettuata sulla trave oggetto di studio, si osserva come la trasformata dell'accelerogramma relativo all'accelerometro posto in mezzeria (CH1) rilevi, come atteso, il primo modo tra 0 e 10 Hz il terzo modo tra 40 e 50 Hz ed il quinto modo a circa 130Hz.

### 3.2.1 Parametri di acquisizione

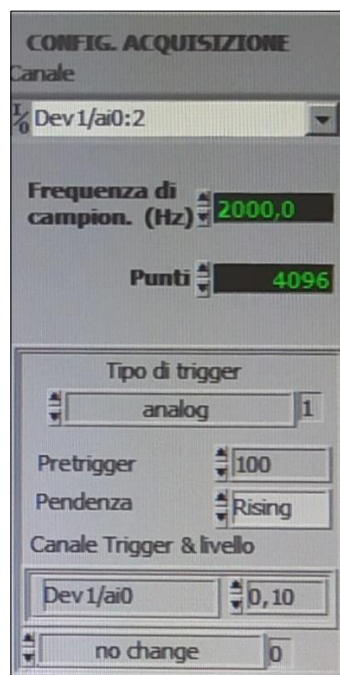


Figura 3.17 Sezione relativa all'inserimento dei parametri di acquisizione, dati utilizzati nell'indagine numero 1

Come introdotto al precedente paragrafo si vuole ora descrivere quali sono i parametri necessari ad effettuare l'acquisizione. In figura 3.17 si riporta in dettaglio la sezione relativa ai parametri estratta dalla precedente figura 3.16, si osserva che è necessario inserire:

- Frequenza di campionamento

La risposta  $\mathbf{a}_r(t)$  relativa alla posizione r-esima dell'accelerometro, come anche l'input fornito dal martello  $\mathbf{p}_s(t)$ , sono acquisiti in forma digitale come sequenza di valori ad istanti di tempo equidistanti; il passo temporale è definito sulla base della frequenza di campionamento  $f_s$  (Sampling frequency) come:

$$(3.1) \quad \Delta t = \frac{1}{f_s}$$

In tal caso risulterà quindi

$$\Delta t = \frac{1}{2000} = 5 \cdot 10^{-4} s$$

In un secondo verranno misurati 2000 valori, sia per  $\mathbf{a}_r(t)$  che per  $\mathbf{p}_s(t)$ .

Si riportano nei successivi grafici gli andamenti dell'impulso  $\mathbf{p}_s(t)$ , per  $s = 5$ , e degli accelerogrammi nel dominio del tempo acquisiti con il set di parametri di figura 3.17:

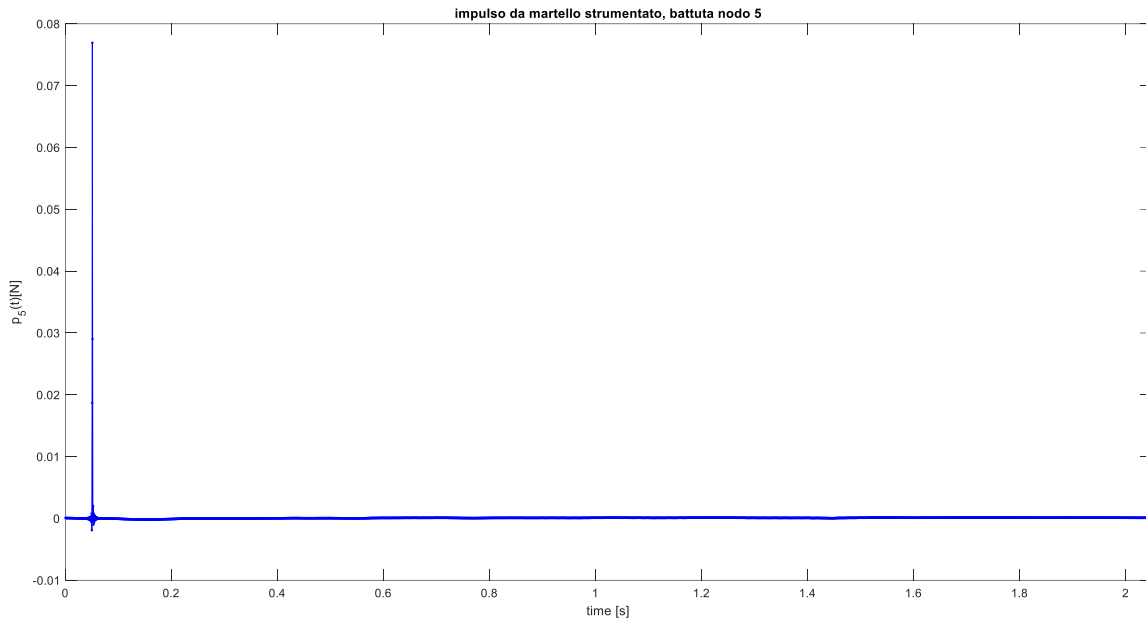
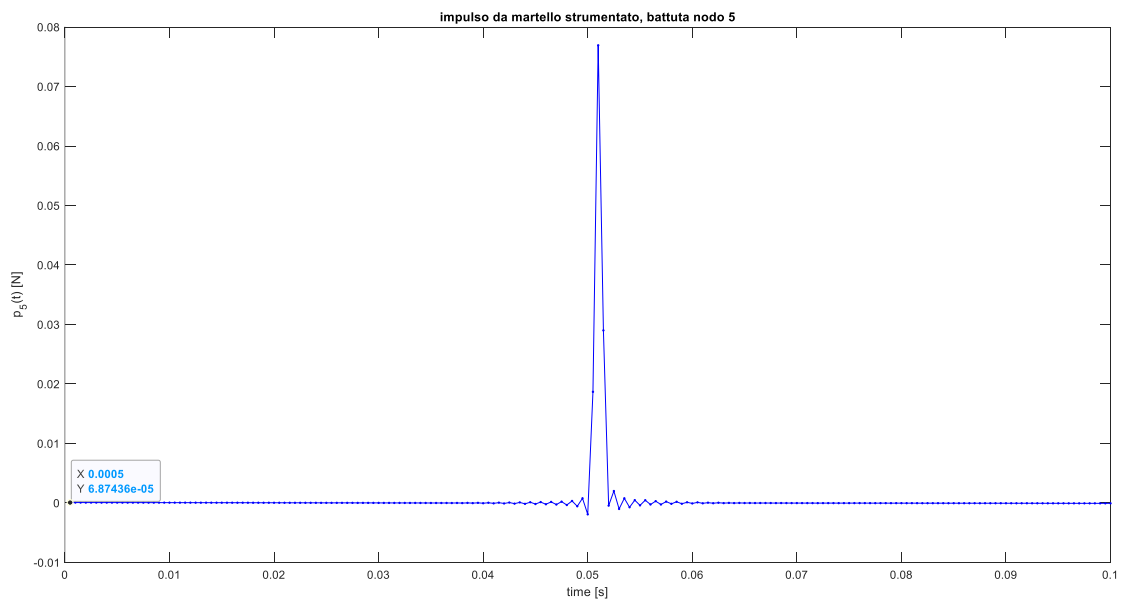


Grafico 3.3 Impulso da martello strumentato, battuta nodo 5

Si riporta di seguito uno zoom del grafico 3.3 in corrispondenza del picco dell'impulso





Gli acelerogrammi discreti acquisiti a seguito della battuta sono i seguenti (grafici 3.4 e 3.5)

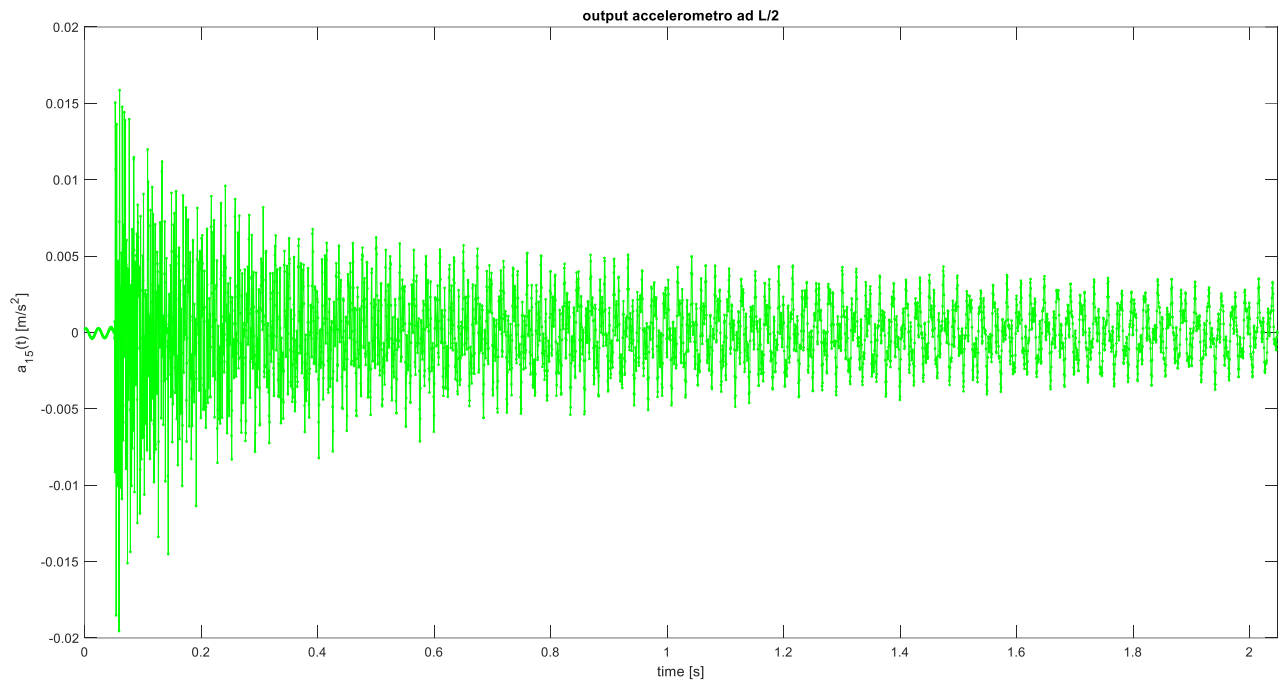


Grafico 3.4 Indagine1 - Accelerogramma acquisito dall'accelerometro posto ad L/2(nodo15)

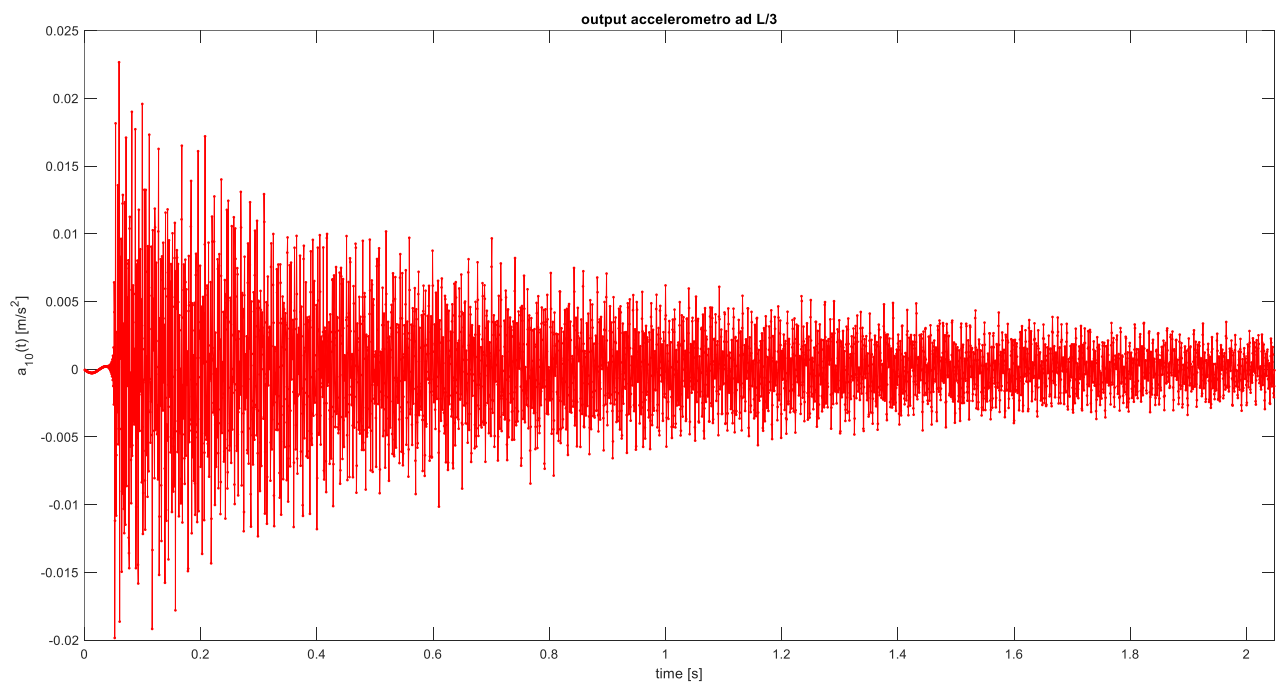


Grafico 3.5 Indagine1 - Accelerogramma acquisito dall'accelerometro posto ad L/3(nodo 10)

Per poter avere una risoluzione adeguata, la frequenza di campionamento deve essere fissata almeno pari a due volte la frequenza massima di interesse

$$f_s \geq 2f_{max}$$

in tal caso facendo riferimento alle formule chiuse per il calcolo delle frequenze proprie di vibrazione introdotte al 2.1.3, se si pone l'attenzione fino all'ottavo modo la frequenza massima  $f_{max}$  deriverà da

$$\omega_8 = \left(\frac{8\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}} = \left(\frac{8\pi}{3}\right)^2 \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 2,678 \cdot 10^{-8}}{6,237}} = 2,11 \cdot 10^3 \frac{rad}{s}$$

$$f_8 = \frac{1}{2\pi} \omega_8 = \frac{1}{2\pi} 2,11 \cdot 10^3 = 335,47 Hz$$

Considerando dunque una frequenza massima di interesse pari a

$$f_{max} = 350 Hz,$$

risulterà necessaria una frequenza di campionamento superiore a 700Hz per ottenere una risoluzione adeguata fino all'ottavo modo di vibrare della trave.

- Numero di punti

Un segnale composto da  $N_p$  campionamenti misurati ad uno stesso passo temporale  $\Delta t$  ha una durata pari a:

$$(3.2) \quad T_{tot} = N_p \Delta t$$

La risoluzione in frequenza è pari al reciproco del tempo di acquisizione  $T_{tot}$

$$(3.3) \quad f_{min} = \frac{1}{T_{tot}} = \frac{1}{N_p \Delta t}$$

Che nel caso riportato in figura 3.17 corrisponde a

$$f_{min} = \frac{1}{4096 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0,488 Hz$$

Il contenuto in frequenza di un segnale ad  $N_p$  campionamenti, campionato a passo  $\Delta t$  risulta:

$$f_{min} \leq f \leq \frac{f_s}{2}$$

$$\frac{1}{N_p \Delta t} \leq f \leq \frac{1}{2\Delta t}$$

- Tipologia di Trigger e canale di riferimento

Come visibile in figura 3.17 per agevolare le prove si è impostato un valore di soglia per il canale relativo al martello strumentato, in tal modo al di sotto di 0,1 Volt il sistema non acquisisce la battuta e quindi non rileva gli accelerogrammi.

Si riporta di seguito una tabella che riassume le indagini selezionate

$N_{DOF}$	Indagini	$f_s$ [Hz]	$N_p$ [/]	$f_{min}$ [Hz]	$T_{tot}$ [s]
<b>15</b>	1	2000	4096	0,488	2,048
	2	2000	8192	0,244	4,096
	3	1000	8192	0,122	8,192
<b>30</b>	4	1000	8192	0,122	8,192
	5	2000	20000	0,100	10,000

Tabella 3. 2 Resoconto delle indagini sperimentali selezionate

Di seguito si riportano i risultati delle indagini svolte e riassunte in tabella 3.2. Le indagini selezionate sono quelle ritenute maggiormente significative ai fini della:

- Corretta identificazione sperimentale delle caratteristiche dinamiche del sistema
- Identificazione nella corretta posizione della variazione di rigidezza flessionale indotta nel sistema

si osserva che la suddivisione delle stesse è riportata sulla base dei parametri precedentemente introdotti.

Il parametro  $N_{DOF}$  distingue le indagini in base al numero di gradi di libertà (Degree Of Freedom) che descrive la risposta della trave nello spazio, in figura 3.18 e 3.19 si riportano due rappresentazioni che schematizzano le discretizzazioni utilizzate

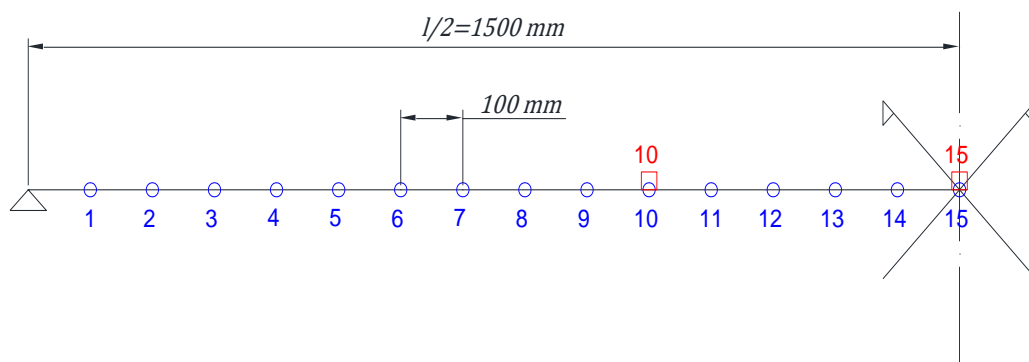


Figura 3. 18 Discretizzazione a 15 DOFs

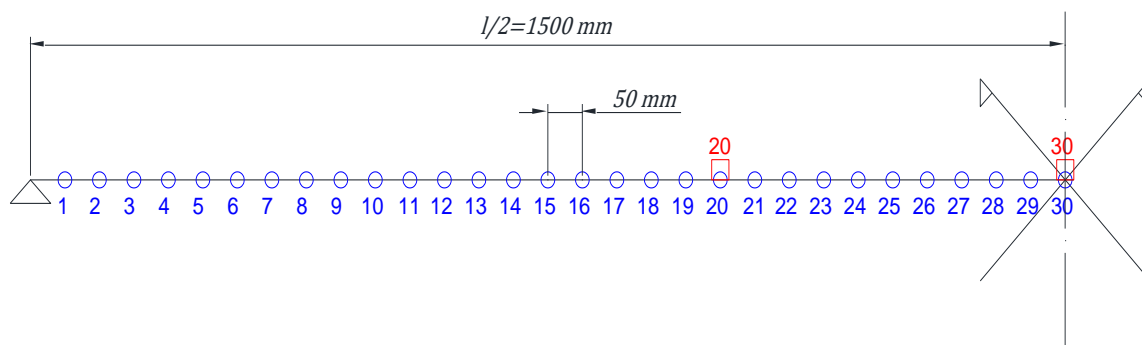


Figura 3. 19 Discretizzazione a 30 DOFs

Nell'ultima colonna della tabella 3.2 si riporta il numero di battute effettuato per ogni nodo che discretizza la trave. Si è scelto inizialmente in fase di rielaborazione dati di mediare l'output delle battute nel dominio della frequenza per valutarne la variabilità a parità di nodo, come mostrato nel grafico 3.6 tuttavia si è notata poca differenza nell'andamento delle trasformate, per tale motivo nelle sperimentazioni successive è stata effettuata una sola battuta per ogni nodo.

L'ordine nel quale vengono presentate le indagini riflette la progressione effettivamente seguita durante la sperimentazione ed anche una diminuzione della frequenza minima  $f_{min}$  definita dalla precedente relazione (3.3).

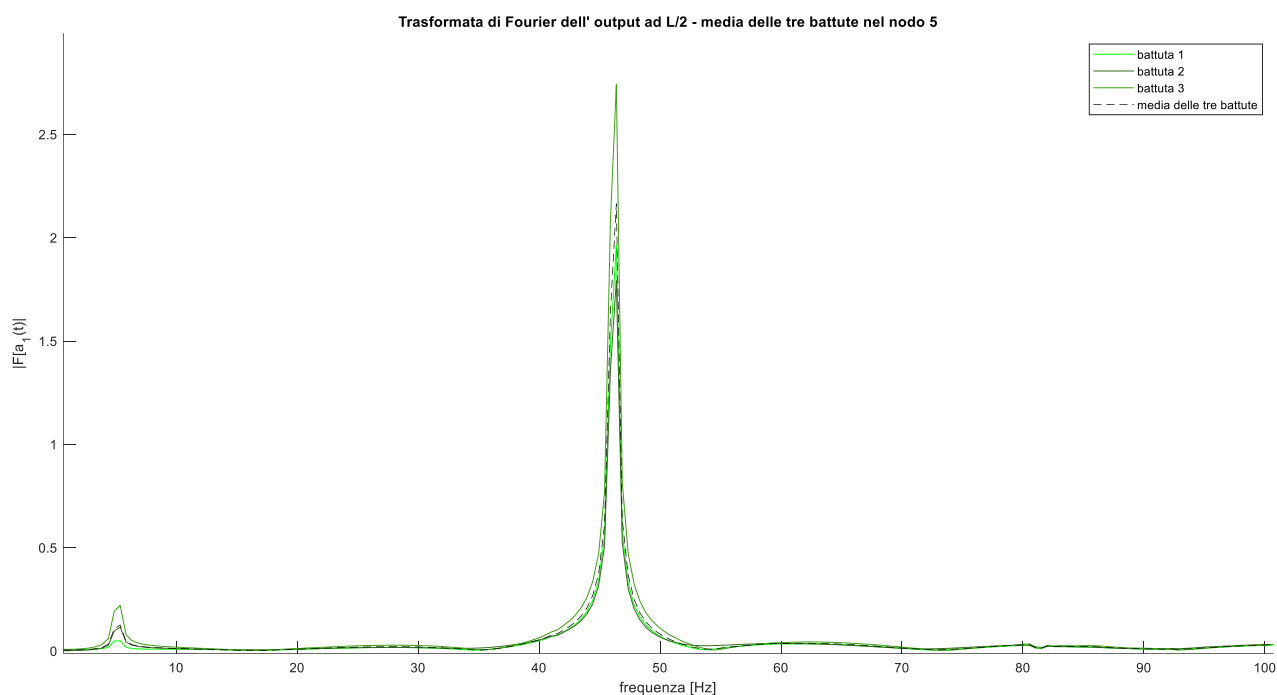


Grafico 3. 6 Andamento medio dell'output a seguito di tre battute sul nodo 5

### 3.3 Individuazione delle frequenze proprie

Le frequenze proprie relative ai primi modi flessionali della struttura sono ricavabili sperimentalmente tramite la trasformata di Fourier dell'output ottenuto dagli accelerometri. Come anticipato al precedente 2.4 l'output atteso in merito ai modi da rilevare risulta:

- Accelerometro in mezzeria: Modo 1, Modo 3
- Accelerometro ad un metro dall'appoggio: Modo 1, Modo 2, Modo 4

L'osservazione era stata fatta in merito alle Funzioni di Risposta in Frequenza ma lo stesso discorso vale anche per la sola trasformata dell'output in quanto come riportato nella relazione (2.51) le FRF di interesse sono ottenute dal rapporto tra la trasformata dell'output e la trasformata dell'input.

I risultati riportati nel presente paragrafo e nei successivi 3.4 e 3.5, relativi all'identificazione sperimentale delle caratteristiche dinamiche del sistema, hanno come obiettivo l'identificazione dei primi otto modi flessionali della trave che ricadono in un range di frequenze tra 0 a 350Hz. Si riportano in tab. 3.3 i valori attesi delle frequenze superiori al quarto modo ricavate tramite le formule chiuse introdotte al precedente 2.1.3:

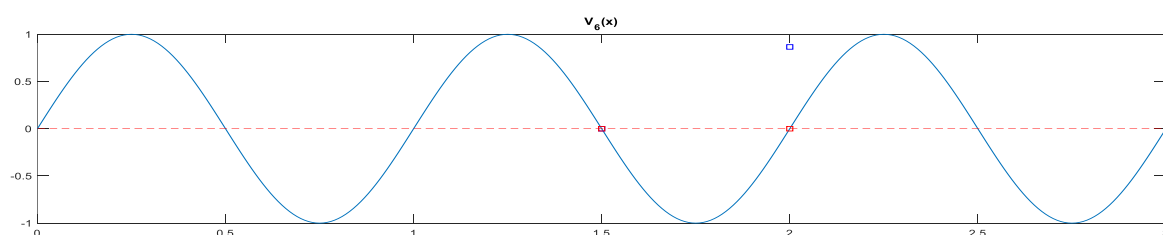
<i>Modo<sub>n</sub></i>			
n=5	n=6	n=7	n=8
131,04314 Hz	188,70212 Hz	256,84455 Hz	335,47043 Hz

*Tabella 3. 3 Frequenze proprie dei modi di vibrare della trave calcolate con le formule chiuse ottenute dalla soluzione del problema continuo per la trave*

Estendendo la precedente considerazione in merito all'output atteso ai primi otto modi di vibrare si ottiene:

- Accelerometro in mezzeria: Modo 1, Modo 3, Modo5, Modo7
- Accelerometro ad un metro dall'appoggio: Modo 1, Modo 2, Modo 4, Modo 5, Modo7 e Modo8

Si osserva che il sesto modo di vibrare non è visibile dai due accelerometri utilizzati in quanto presenta un nodo, inteso come punto di nullo nell'andamento della deformata modale, sia ad L/2 che ad L/3 come schematizzato dal grafico 3.7



*Grafico 3. 7 Sesta forma modale per la trave modellata come sistema continuo*

Il metodo che permette di identificare le frequenze è denominato Peak Picking, il presupposto è che in prossimità della frequenza di risonanza  $i$ -esima il modo  $i$ -esimo sia dominante ed i contributi degli altri modi siano trascurabili.

Si riportano di seguito due grafici per ognuna delle indagini effettuate che rappresentano l'andamento della trasformata dell'output ottenuto dai due accelerometri.

Per individuare le frequenze proprie del sistema è necessaria una singola battuta sulla trave, ogni andamento riportato è quindi riferito ad una sola delle battute effettuate, in particolare quella per  $s = 5$  relativamente alla discretizzazione a quindici nodi (figura 3.20) ed  $s = 10$  con riferimento alla discretizzazione a trenta nodi (figura 3.21).

Per semplicità in ordinate si indica con pedice uno l'output riferito all'accelerometro ad  $L/2$  e con pedice 2 quello riferito all'accelerometro ad  $L/3$ .

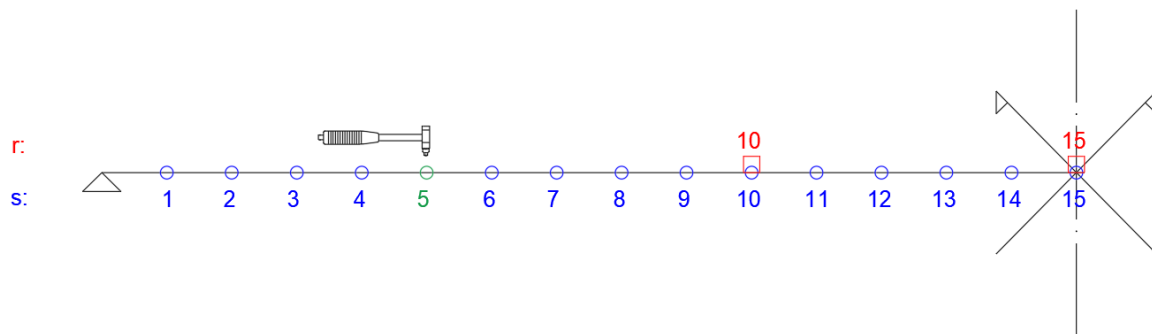


Figura 3. 20 Discretizzazione a 15 nodi – Forzante impulsiva applicata al nodo 5

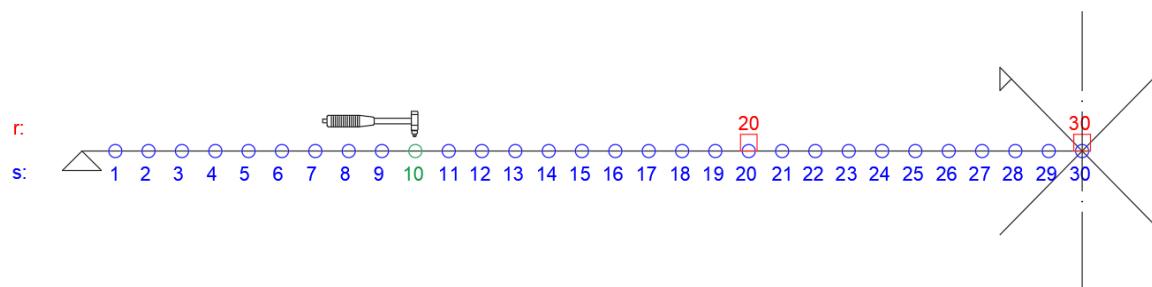


Figura 3. 21 Discretizzazione a 30 nodi – Forzante impulsiva applicata al nodo 10

Si precisa che nel caso di campionamenti a 2KHz si è posta attenzione fino all'ottavo modo mentre con i campionamenti ad 1KHz il modo più alto rilevato è il settimo per ottimizzare l'accuratezza nelle rilevazioni.

## Indagine 1

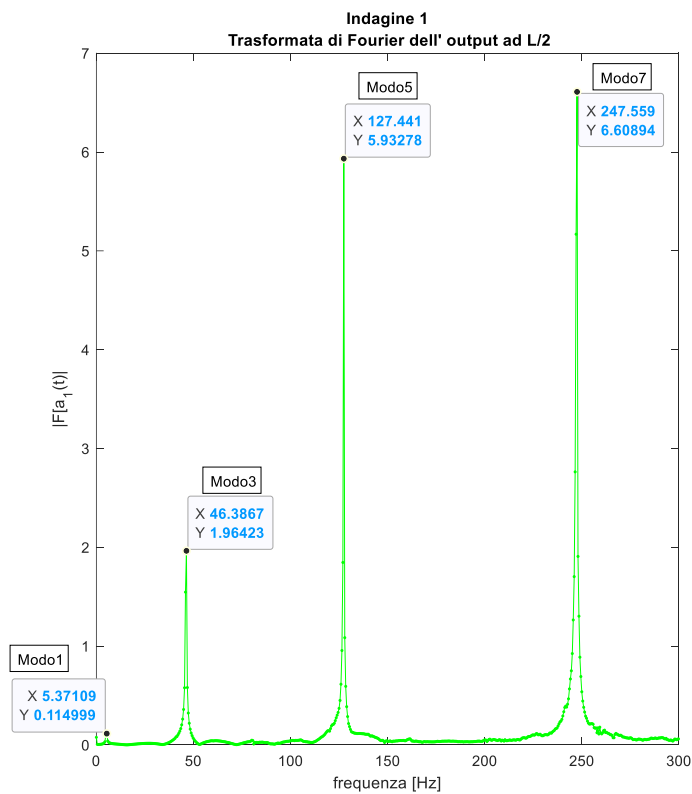


Grafico 3.8 Indagine 1 - Trasformata di Fourier dell' output ad L/2

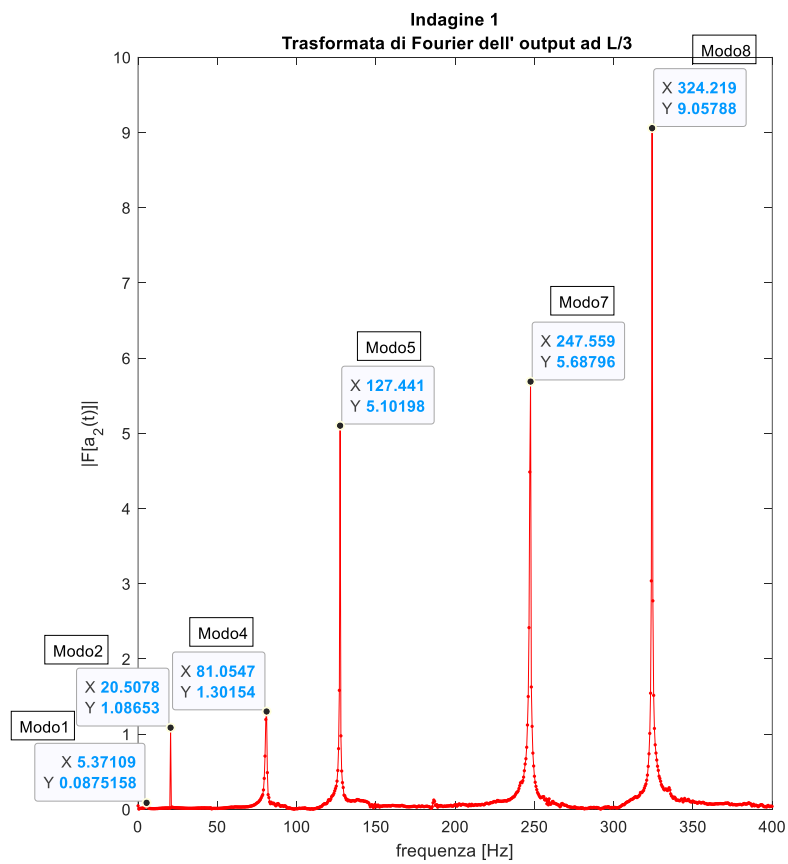


Grafico 3.9 Indagine 1 - Trasformata di Fourier dell' output ad L/3

## Indagine 2

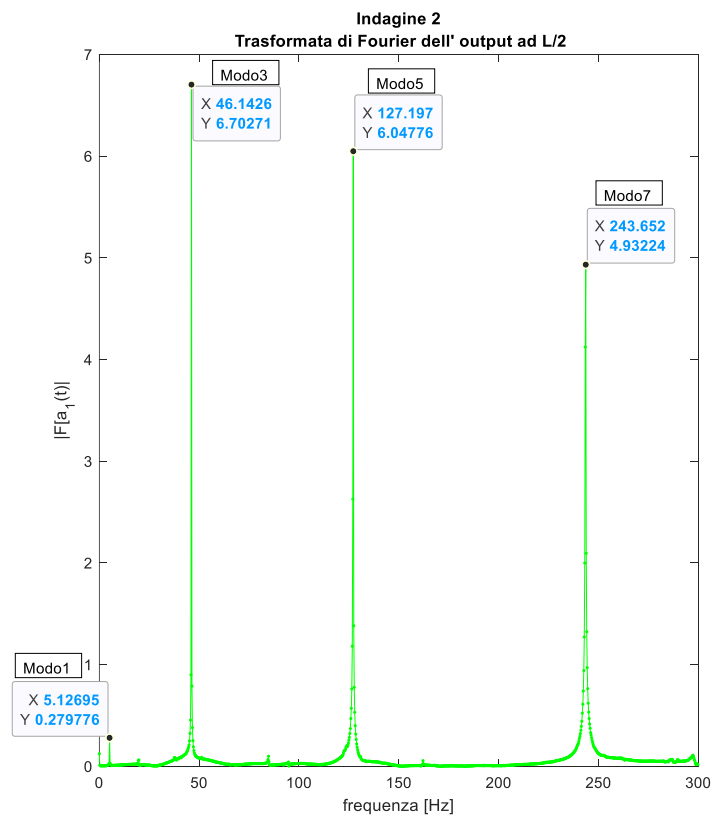


Grafico 3.10 Indagine 2 - Trasformata di Fourier dell'output ad L/2

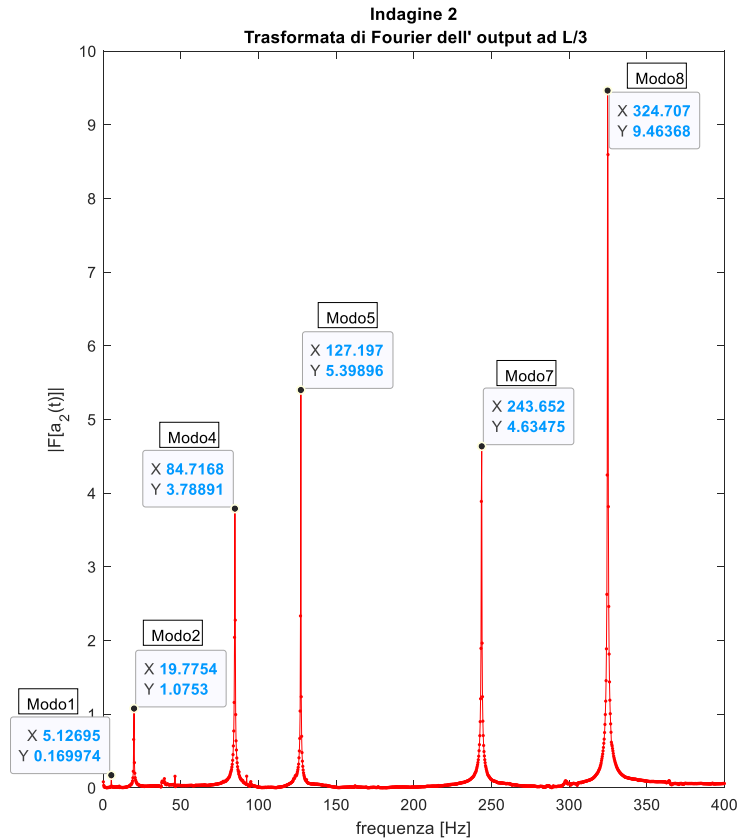


Grafico 3.11 Indagine 2 - Trasformata di Fourier dell'output ad L/3



### Indagine 3

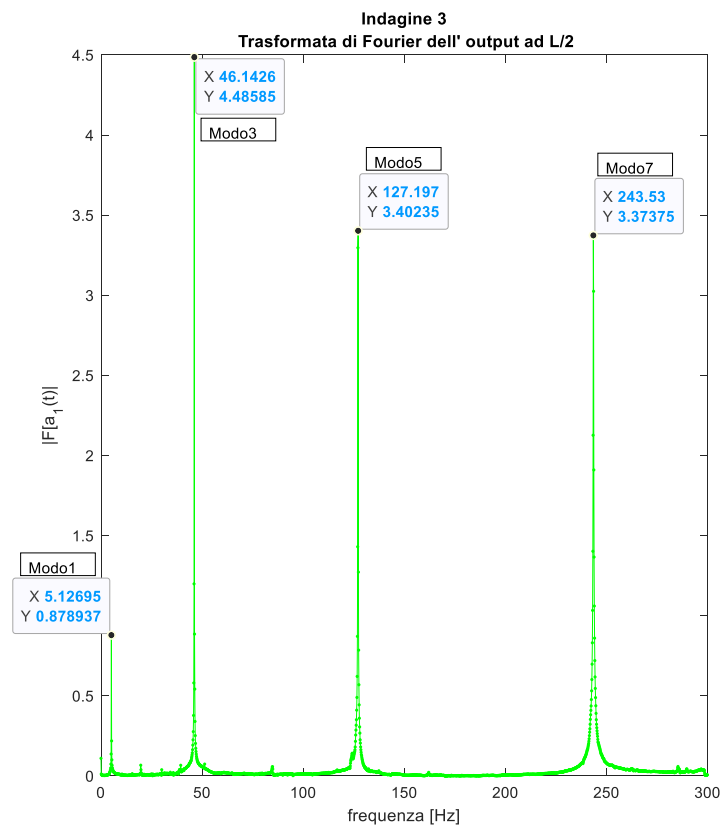


Grafico 3.12 Indagine 3 - Trasformata di Fourier dell' output ad L/2

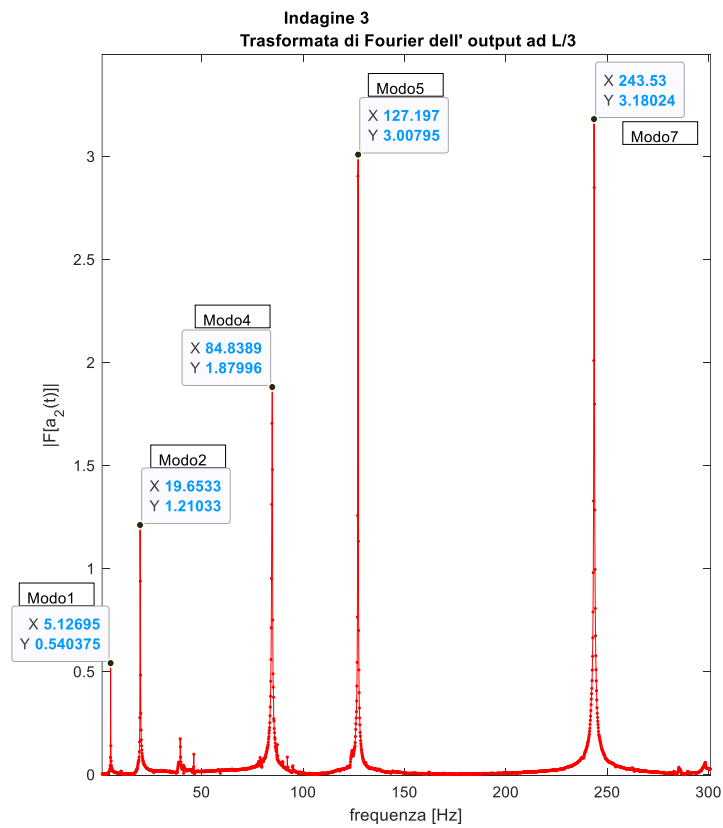


Grafico 3.13 Indagine 3 - Trasformata di Fourier dell' output ad L/3

## Indagine 5

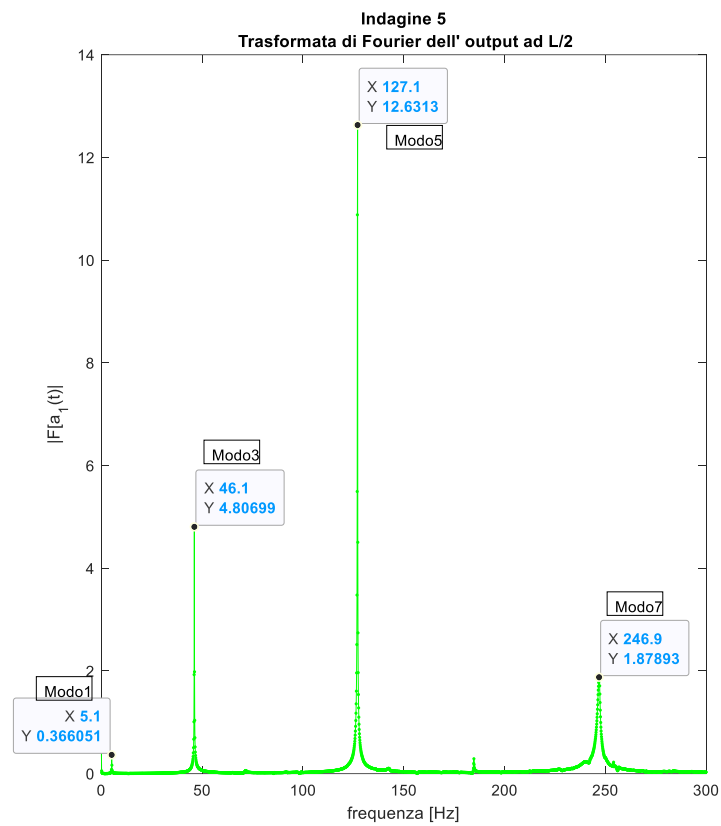


Grafico 3.14 Indagine 5 - Trasformata di Fourier dell' output ad L/2

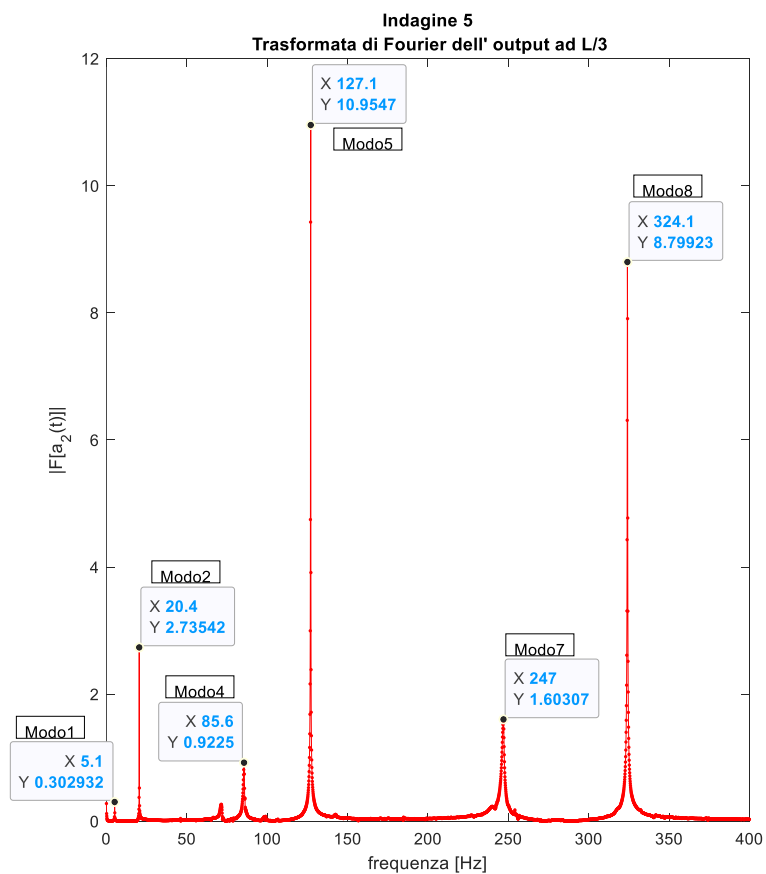


Grafico 3.15 Indagine 5 - Trasformata di Fourier dell' output ad L/3

I risultati ottenuti nelle varie indagini sono influenzati dalla risoluzione in frequenza che per le (3.1) e (3.3) può scriversi come:

$$(3.4) \quad f_{min} = \frac{f_s}{N_p}$$

la numerazione delle indagini, come anticipato, è effettuata seguendo un andamento decrescente di  $f_{min}$ , in tal modo le trasformate sono discretizzate con un numero sempre maggiore di punti; le frequenze proprie della trave, essendo rilevate con una frequenza minima sempre più ridotta, corrisponderanno ad un valore sempre più vicino a quello effettivo in quanto si riduce il margine di errore. Nell'indagine numero 5, che presenta il margine di errore più ridotto, le frequenze sono definite a  $\pm 0,1 Hz$  rispetto al valore rilevato.

Di seguito si riporta una tabella che riassume i risultati ottenuti ai fini dell'identificazione sperimentale delle frequenze proprie dalle indagini effettuate:

Indagine	Modo							
	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8
<b>1</b>	5,37109	20,50780	46,38670	81,05470	127,44100	\	247,55900	324,21900
<b>2</b>	5,12695	19,77540	46,14260	84,71680	127,19700	\	243,65200	324,70700
<b>3</b>	5,12695	19,65330	46,14260	84,83890	127,19700	\	243,53000	\
<b>4</b>	"	"	"	"	"	\	"	\
<b>5</b>	5,10000	20,40000	46,10000	85,60000	127,10000		246,90000	324,10000

*Tabella 3.4 Resoconto delle frequenze proprie individuate sperimentalmente per la trave*

Si osserva che non si è riportata l'identificazione delle frequenze proprie relative all'indagine quattro in quanto il set di parametri coincide con quelli dell'indagine tre, le due si differenziano per il numero di nodi che discretizzano la trave.

### 3.4 Identificazione delle forme modali tramite FRF

Nel presente paragrafo si riportano i risultati ottenuti dalle indagini riassunte in tab. 3.2 relativamente all'identificazione delle forme modali per la trave studiata.

Si sottolinea che, come anticipato, la discretizzazione della trave data la simmetria attesa per le forme modali riguarda solo metà della lunghezza totale, i grafici si riferiscono alle due discretizzazioni utilizzate, riportate in figura 3.18 e 3.19.

Come introdotto al precedente 2.5 la stima delle funzioni di trasferimento, che permettono poi di identificare i modi di vibrare sulla base delle considerazioni riportate al 2.4, è stata effettuata con tre diverse modalità.

Operativamente tramite software MATLAB per la stima diretta delle FRF si è utilizzata la funzione “fft” per calcolare le trasformata di Fourier discreta dei segnali  $\mathbf{a}_r(t)$  e  $\mathbf{p}_s(t)$  acquisiti, mentre la funzione “cpsd”, compresa nella toolbox “signal processing toolbox”, per il calcolo delle densità di potenza spettrali degli stessi segnali che ha condotto alle stime delle FRF con PSD e CPSD.

La definizione della trasformata di Fourier discreta è riportata al precedente 2.5.1, per quanto riguarda la funzione “cpsd” questa richiede due vettori in input e restituisce:

- La potenza spettrale  $\mathbf{S}_{a_r}(\Omega)$  se si forniscono due vettori coincidenti e relativi alla risposta del sistema  $\mathbf{a}_r(t)$  in termini di accelerazione acquisita nel nodo r-esimo.
- La potenza spettrale  $\mathbf{S}_{p_s}(\Omega)$  se si forniscono due vettori coincidenti e relativi alla forzante introdotta nel sistema  $\mathbf{p}_s(t)$  nel nodo s-esimo.
- Lo spettro incrociato  $\mathbf{S}_{a_r p_s}(\Omega)$  se si forniscono  $\mathbf{a}_r(t)$  e  $\mathbf{p}_s(t)$ .

Per la stima del valore assoluto delle FRF tramite PSD si è utilizzata una relazione analoga alla precedente (2.56) ma in termini di accelerazione

$$(3.5) \quad |\mathbf{A}_{rs}(\Omega)|^2 = \frac{\mathbf{S}_{a_r}(\Omega)}{\mathbf{S}_{p_s}(\Omega)}$$

mentre per stimare le FRF tramite CPSD, in analogia alla precedente (2.59), si è utilizzata la seguente relazione

$$(3.6) \quad \mathbf{A}(\Omega) = \frac{\mathbf{S}_{a_r p_s}(\Omega)}{\mathbf{S}_{p_s}(\Omega)}$$

Nei grafici a cascata riportati ai successivi paragrafi 3.4.1, 3.4.2 e 3.4.3 si rappresentano le seguenti grandezze:

- Asse **x**: Frequenza espressa in Hz
- Asse **y**: Gradi di libertà (DOF) che discretizzano la trave nello spazio (vincolo di appoggio a zero e mezzeria al DOF 15)
- Asse **z**: Funzioni di trasferimento relative agli accelerometri posti ad L/2 ed L/3 che coincidono con gli indici 15 o 30 e 10 o 20 a seconda della discretizzazione, per semplicità si utilizza la seguente notazione

$$(3.7) \quad \mathbf{A}_{15s}(\Omega) = \mathbf{A}_1 ; \mathbf{A}_{10s}(\Omega) = \mathbf{A}_2 \text{ nelle indagini a 15 DOFs}$$

$$\mathbf{A}_{30s}(\Omega) = \mathbf{A}_1 ; \mathbf{A}_{20s}(\Omega) = \mathbf{A}_2 \text{ nelle indagini a 30 DOFs}$$

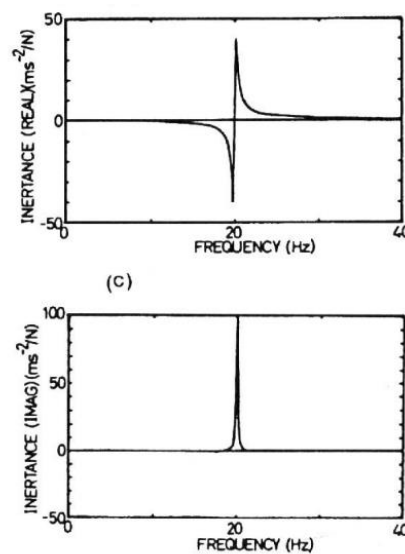
Relativamente alla stima diretta ed alla stima tramite CPSD a seconda della rappresentazione che è di interesse riportare si indica con il pedice “I” la parte immaginaria e con il pedice “R” la parte reale dei vettori discreti.

### 3.4.1 Stima diretta

I grafici di seguito riportati rappresentano, con visualizzazione a cascata, le parti immaginarie delle funzioni di trasferimento, con stima diretta si richiama la relazione (2.51) introdotta al precedente paragrafo 2.5.1. Tale modalità di rappresentazione, che permette di determinare le forme modali, è ripresa dalla pubblicazione

*Avitabile P., "Experimental Modal Analysis – A simple Non-Mathematical Presentation", 2001;*

Si sceglie di rappresentare la parte immaginaria in quanto risulta conveniente, se i modi non risonanti contribuiscono in maniera trascurabile alla risposta (cfr. paragrafo 2.3.3), in quanto riporta informazioni relative sia all'ampiezza che alla fase. Se tale ipotesi si verifica per una certa frequenza propria allora la parte immaginaria della funzione di risposta in frequenza presenterà un picco mentre la parte reale tenderà ad essere nulla. Tale circostanza è evidente nel caso di sistema ad un grado di libertà, per il quale parte reale ed immaginaria sono schematizzabili come riportato nei grafici 3.16 tratti dal testo *Ewins D.J. "Modal testing: Theory, practice and application" seconda edizione*



*Grafico 3. 16 Parte reale ed immaginaria della Funzione di Risposta in Frequenza relativa ad un sistema ad un grado di libertà smorzato, ineranza*

Si riportano di seguito i grafici relativi alle 5 indagini selezionate come maggiormente significative.

## Indagine 1

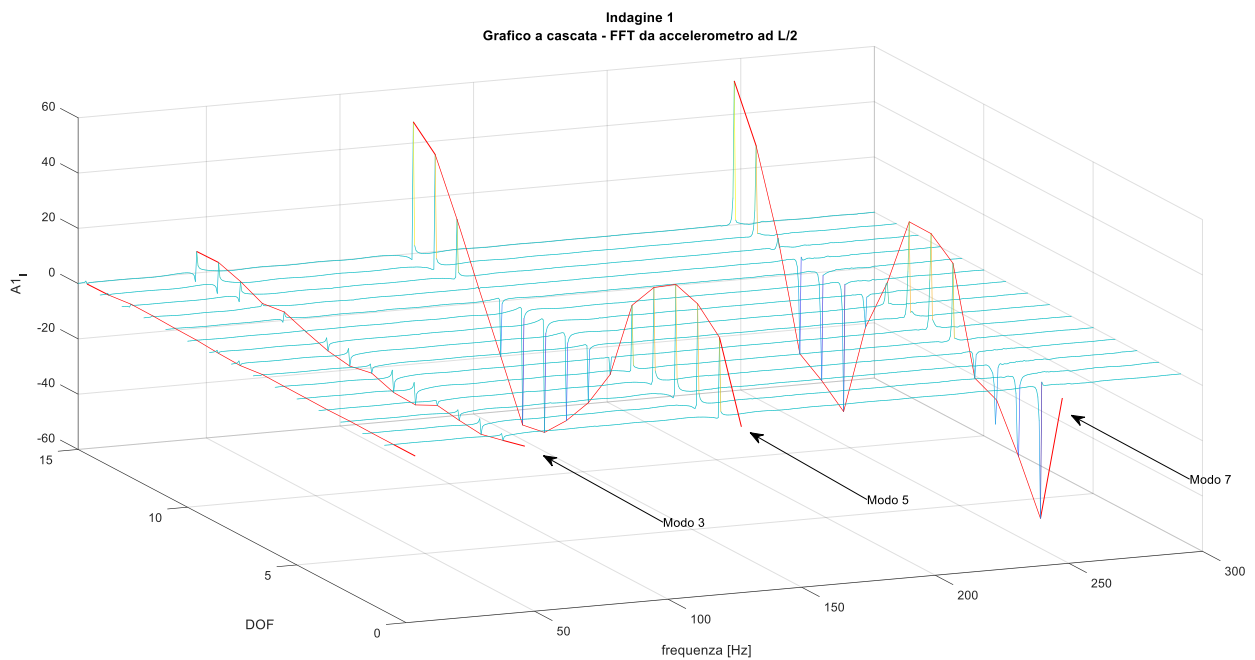


Grafico 3.17 Indagine 1 – stima delle forme modali a partire dalle FRF ottenute dall'accelerometro ad L/2 con discretizzazione di metà trave in 15 DOFs

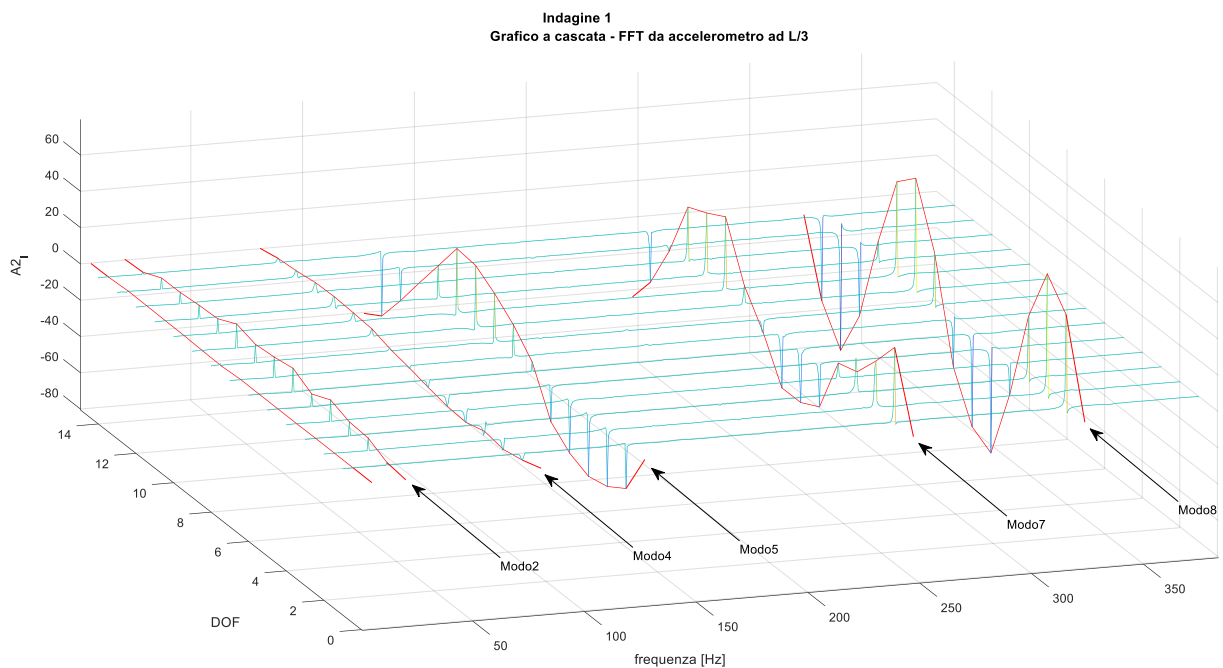
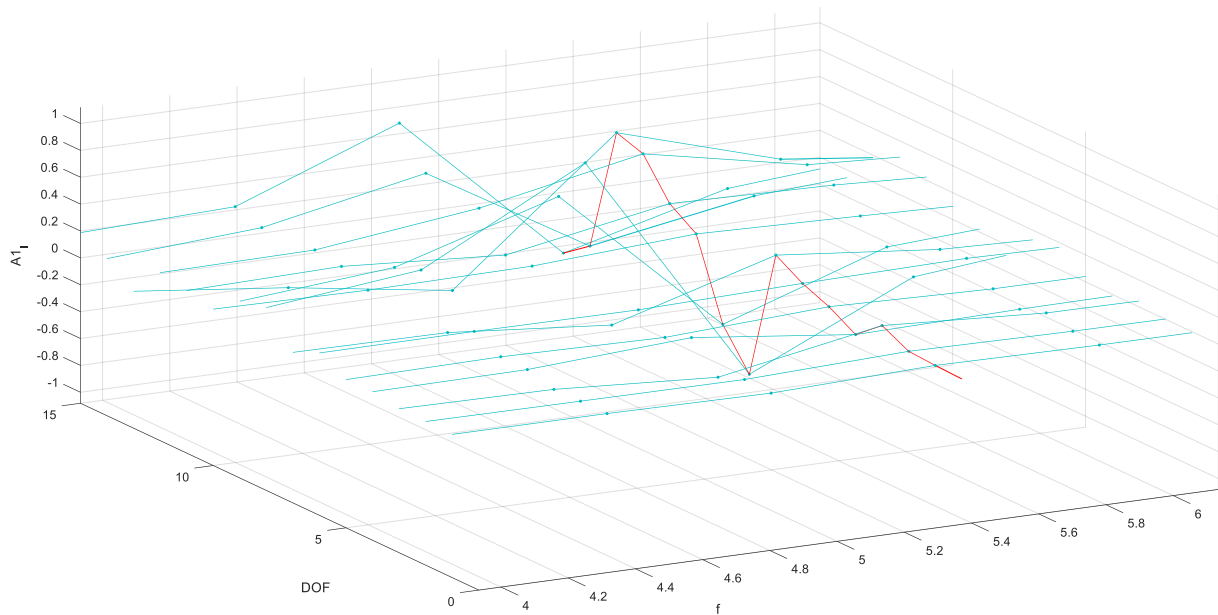
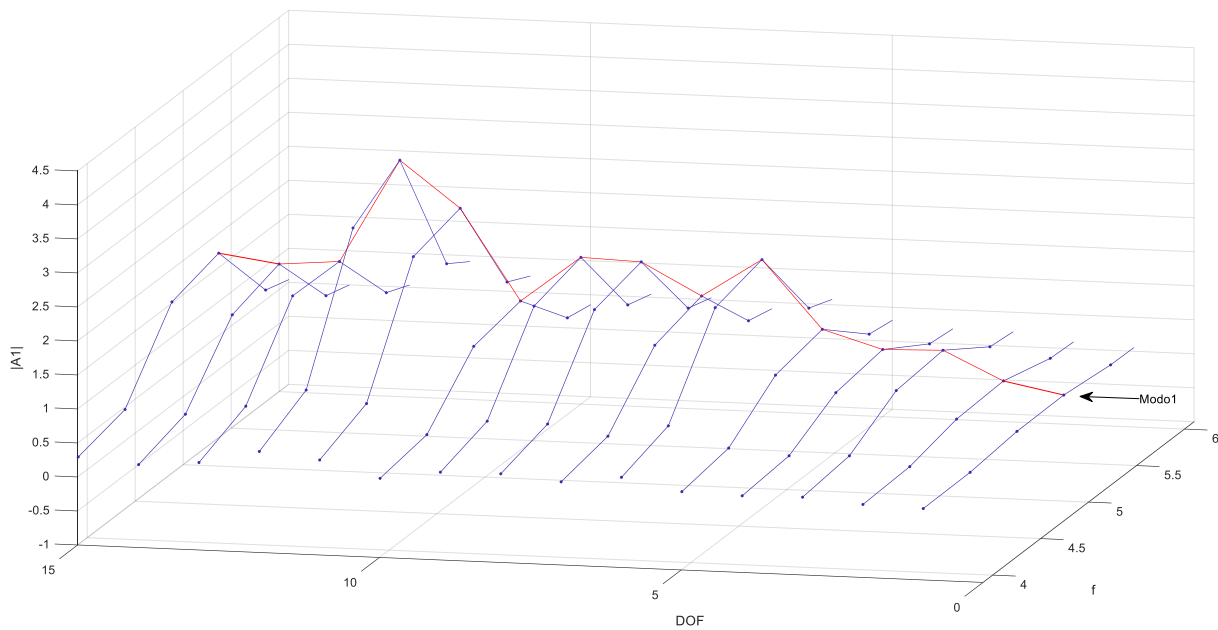


Grafico 3.18 Indagine 1 – stima delle forme modali a partire dalle FRF ottenute dall'accelerometro ad L/3 con discretizzazione di metà trave in 15 DOFs

Si riporta di seguito uno zoom del grafico 3.17 nell'intervallo di frequenze relativo al primo modo:



Come si può notare con tale set di parametri, osservando la parte immaginaria, il primo modo non risulta ben riconoscibile. Rappresentando in un grafico analogo al 3.17 ma che riporta il valore assoluto delle 15 FRF rappresentate a cascata, focalizzando l'attenzione sul primo modo (grafico 3.19), si ottiene un andamento prossimo a quello atteso.



*Grafico 3. 19 Indagine 1 - Andamento del primo modo di vibrare ottenuto osservando il modulo delle FRF ottenute dall'output ad L/2 con discretizzazione di metà trave in 15 DOFs*

## Indagine 2

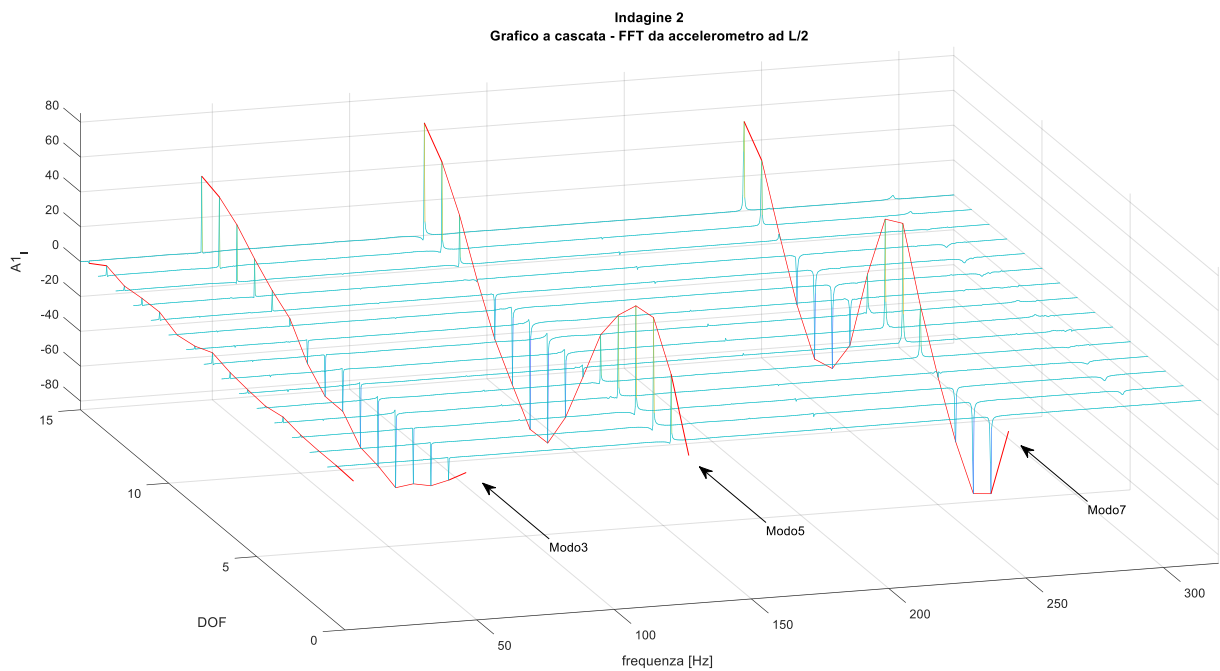


Grafico 3.20 Indagine 2 – stima delle forme modali a partire dalle FRF ottenute dall'accelerometro ad L/2 con discretizzazione di metà trave in 15 DOFs

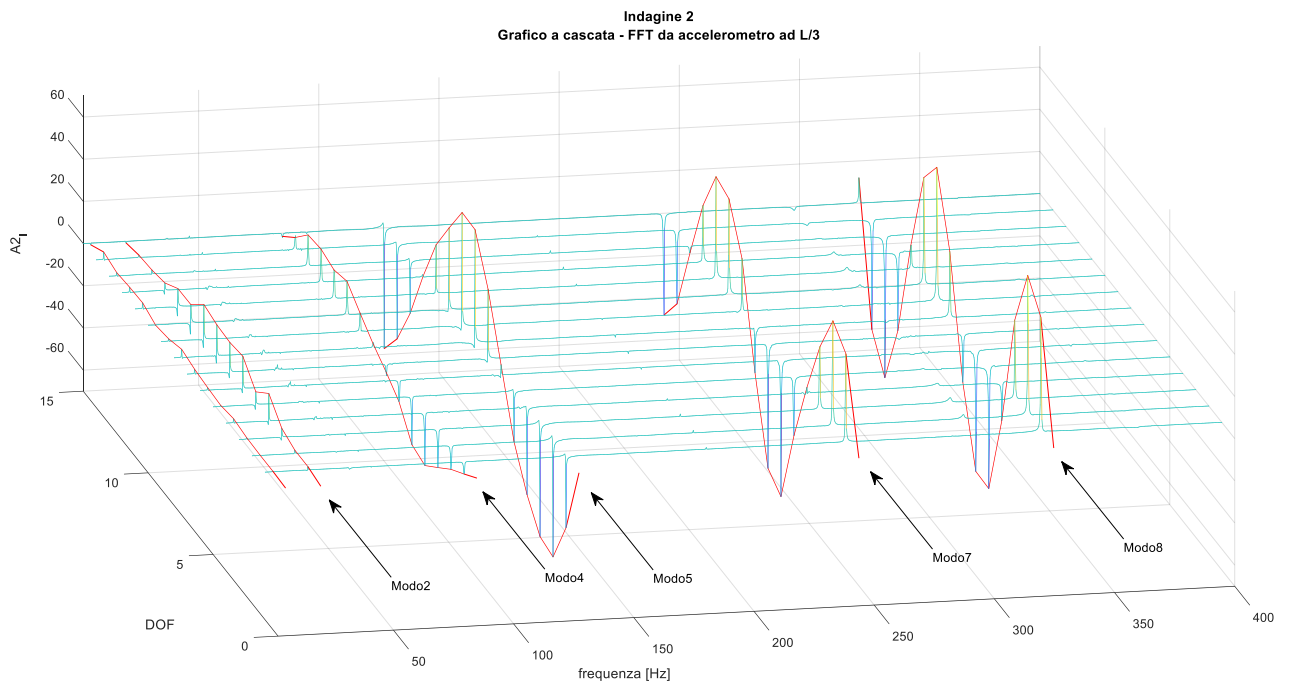
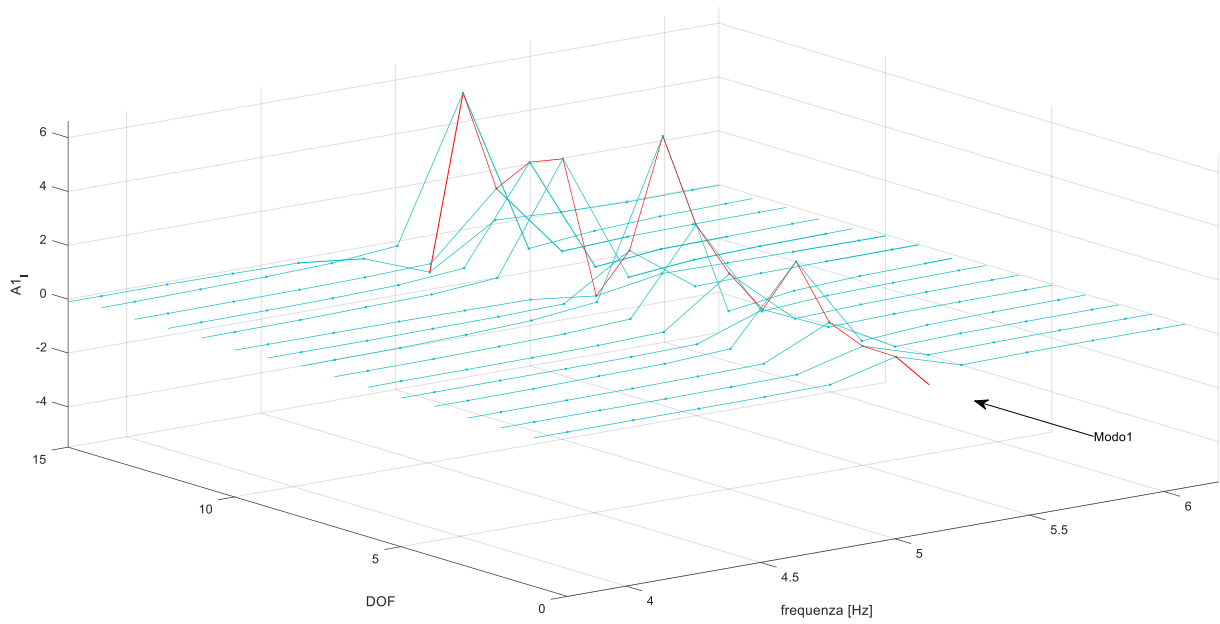


Grafico 3.21 Indagine 2 – stima delle forme modali a partire dalle FRF ottenute dall'accelerometro ad L/3 con discretizzazione di metà trave in 15 DOFs

Dai grafici 3.20 e 3.21 anche in questo caso non è possibile cogliere l'andamento del primo modo, vista l'ampiezza rilevante delle coordinate dei modi superiori, se ne riporta di seguito un dettaglio tratto dal grafico 3.20.





Si osserva che l'andamento è ancora solamente prossimo a quello ideale, rappresentato al precedente grafico 2.1.

### Indagine 3

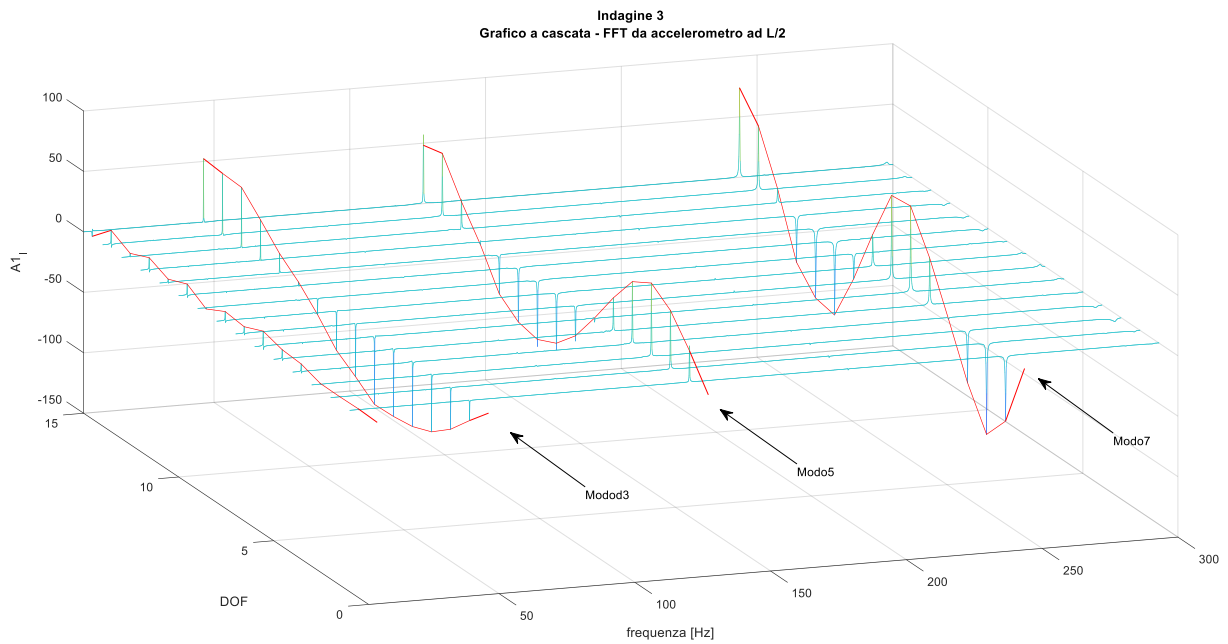
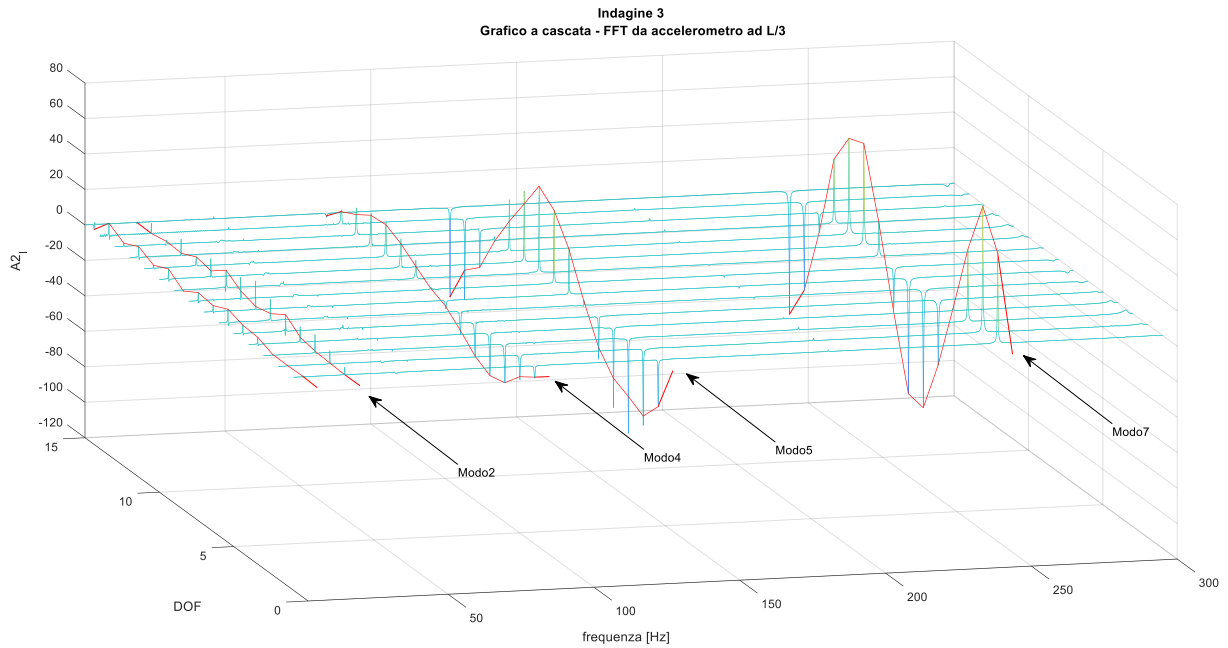
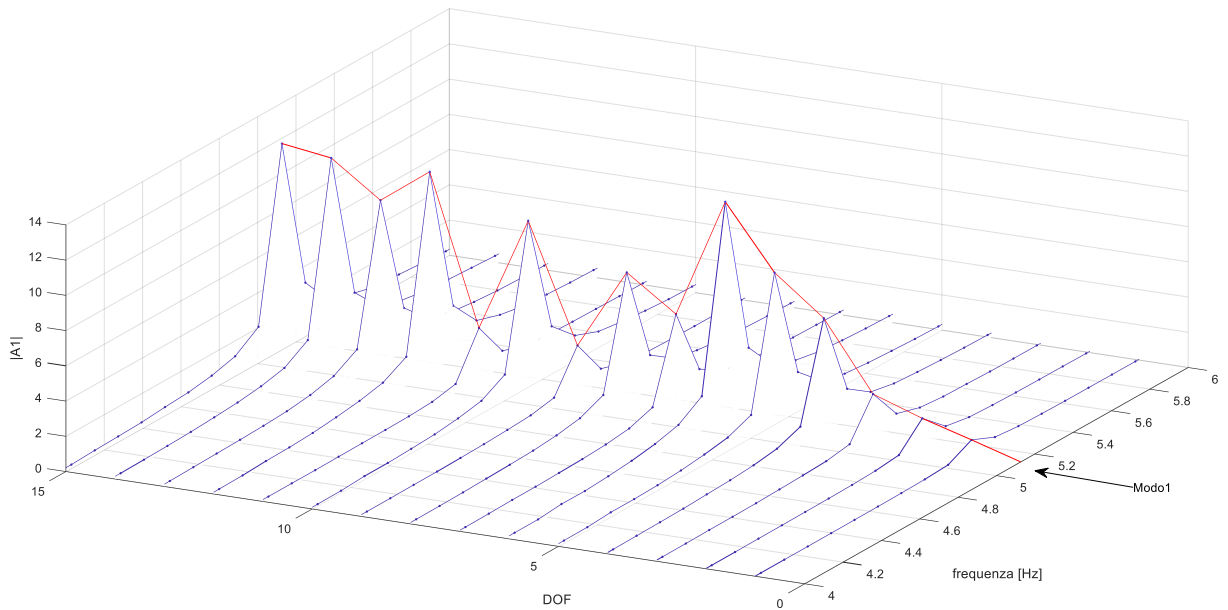


Grafico 3. 22 Indagine 3 – stima delle forme modali a partire dalle FRF ottenute dall'accelerometro ad L/2 con discretizzazione di metà trave in 15 DOFs



*Grafico 3. 23 Indagine 3 – stima delle forme modali a partire dalle FRF ottenute dall'accelerometro ad L/3 con discretizzazione di metà trave in 15 DOFs*

Di seguito si riportano due dettagli relativi al primo (grafico 3.24) e secondo modo (grafico 3.25) ottenuti rispettivamente dal valore assoluto delle FRF riportate nei grafici 3.22 e 3.23



*Grafico 3. 24 Indagine 3 - Andamento del primo modo di vibrare ottenuto osservando il modulo delle FRF ottenute dall'output ad L/2 con discretizzazione di metà trave in 15 DOFs*

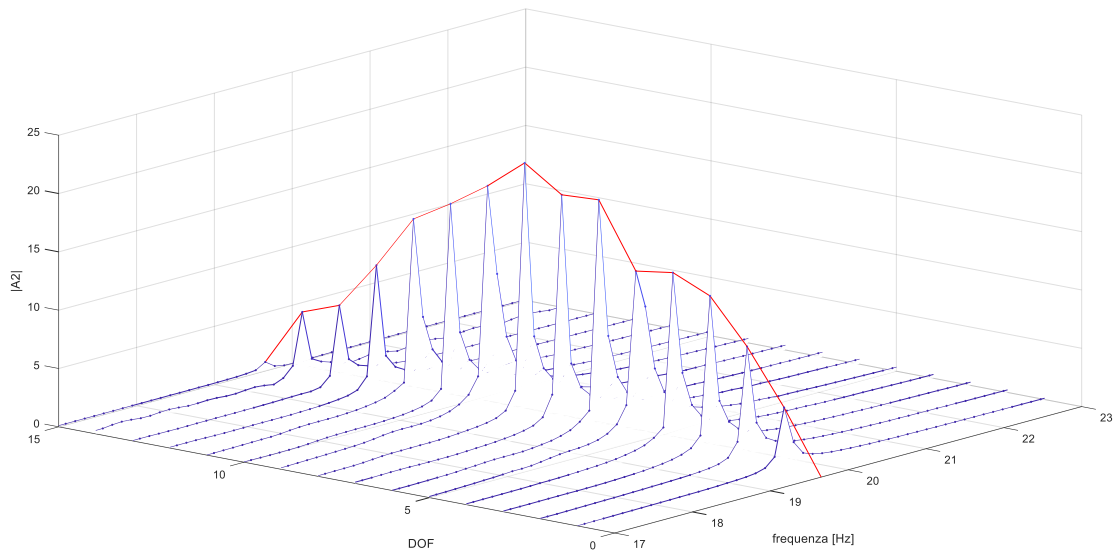


Grafico 3. 25 Indagine 3 - Andamento del secondo modo di vibrare ottenuto osservando il modulo delle FRF ottenute dall'output ad L/2 con discretizzazione di metà trave in 15 DOFs

### Indagine 4

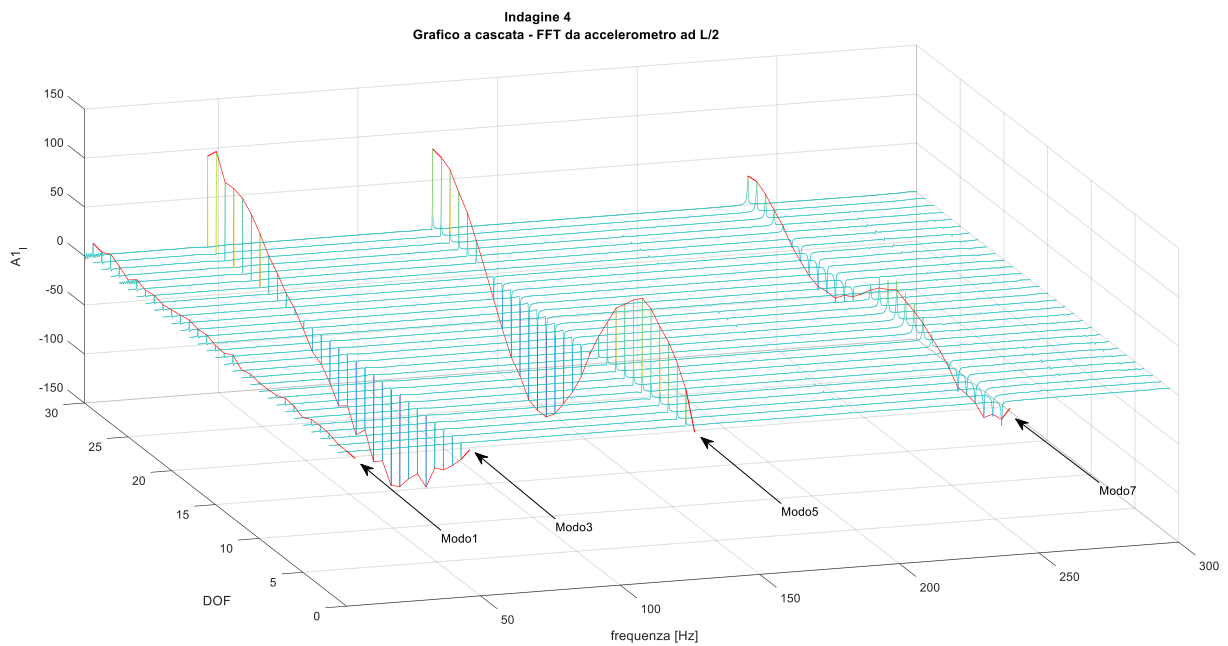
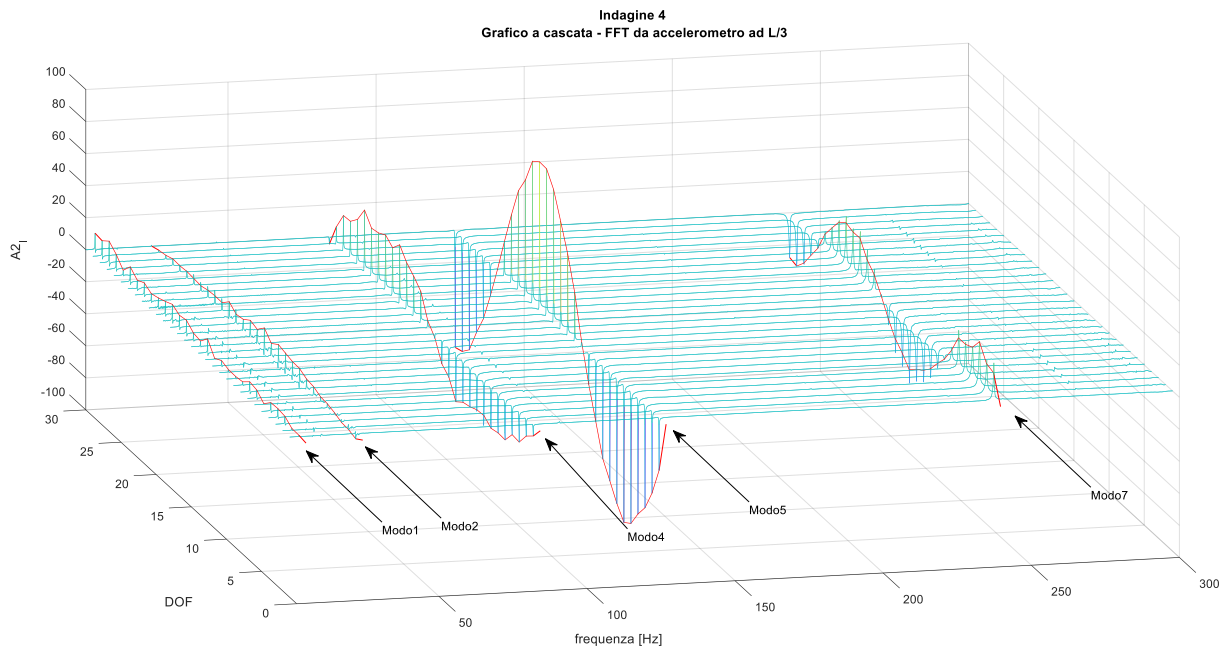
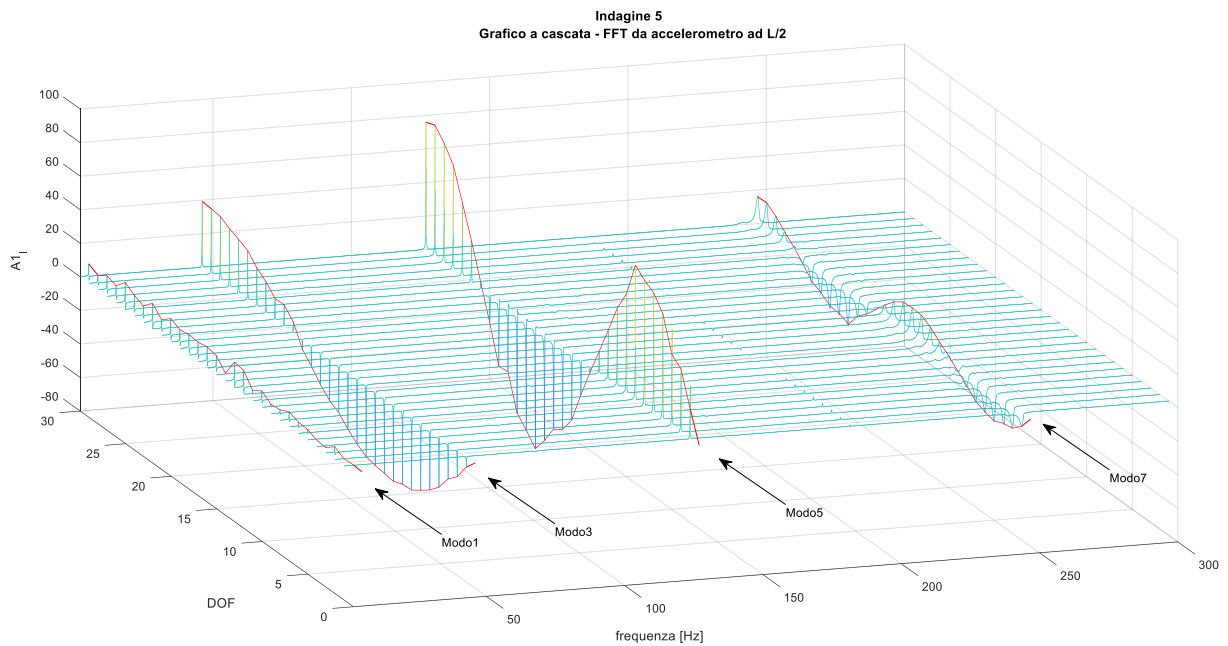


Grafico 3. 26 Indagine 4 – stima delle forme modali a partire dalle FRF ottenute dall'accelerometro ad L/2 con discretizzazione di metà trave in 30 DOFs

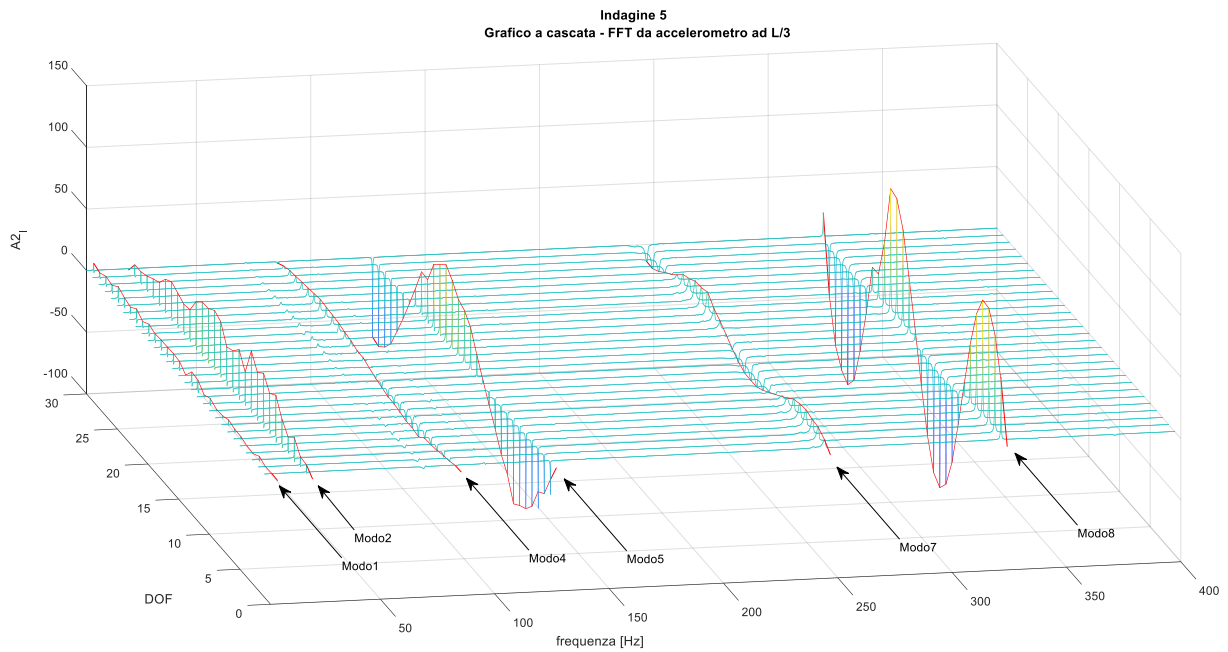


*Grafico 3. 27 Indagine 4 – stima delle forme modali a partire dalle FRF ottenute dall'accelerometro ad L/3 con discretizzazione di metà trave in 30 DOFs*

### Indagine 5



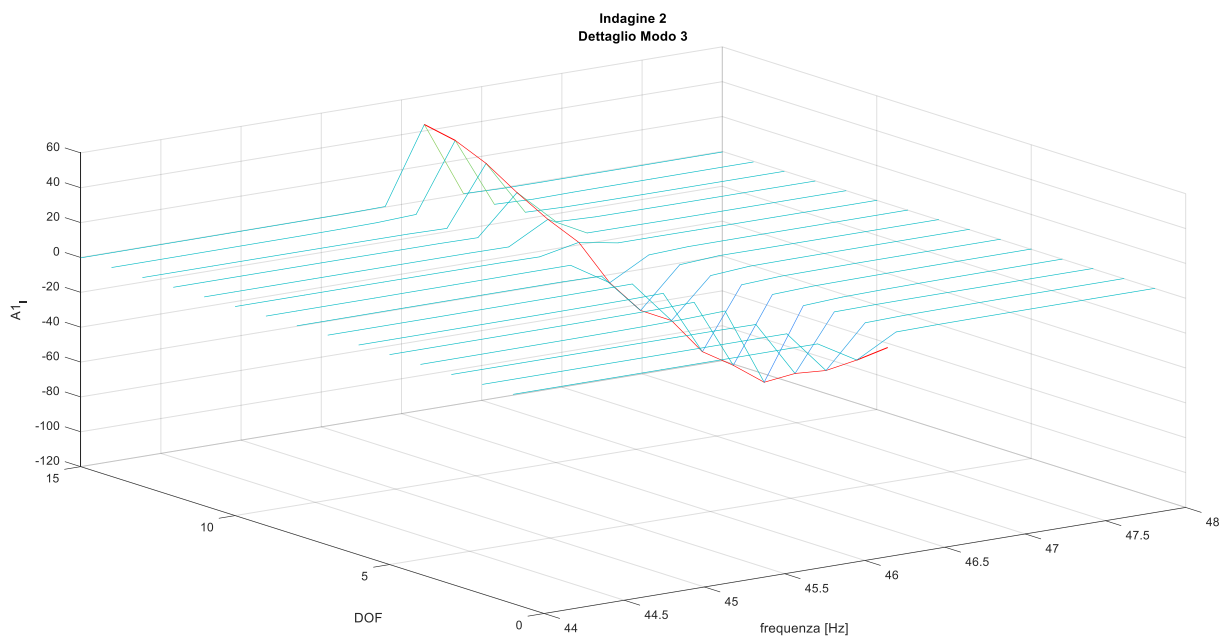
*Grafico 3. 28 Indagine 5 – stima delle forme modali a partire dalle FRF ottenute dall'accelerometro ad L/2 con discretizzazione di metà trave in 30 DOFs*



*Grafico 3. 29 Indagine 5 – stima delle forme modali a partire dalle FRF ottenute dall'accelerometro ad L/3 con discretizzazione di metà trave in 30 DOFs*

### Osservazioni

Relativamente a quanto introdotto in merito alla scelta della parte immaginaria come modalità di rappresentazione si riporta un interessante dettaglio tratto a partire dall'indagine numero 2. Restringendo l'attenzione al solo terzo modo, relativamente al grafico 3.20, si ottiene quanto segue (grafico 3.30 a))



*Grafico 3. 30 a) Indagine 2 Dettaglio modo 3 – Parte Immaginaria FRF*

Osservando ora un'analoga rappresentazione ma che riporta le parti reali delle 30 FRF a cascata si ottiene (grafico 3.30 b))

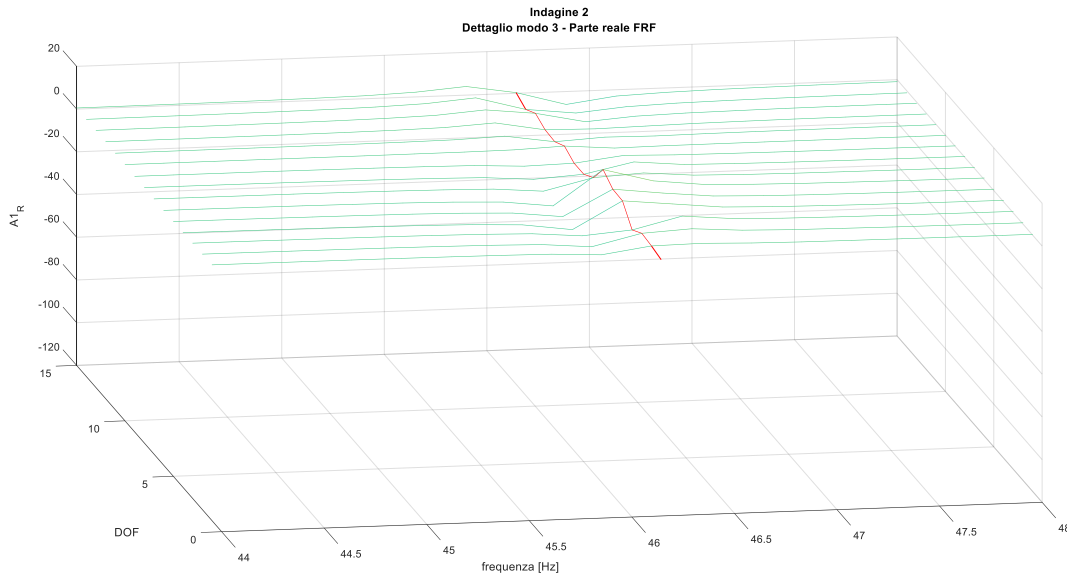


Grafico 3. 30 b) Indagine 2 Dettaglio modo 3 – Parte Reale FRF

Per il caso riportato risulta quindi valida l'ipotesi di trascurabilità dei modi adiacenti, ovvero in corrispondenza della frequenza alla quale si riscontra il picco per il terzo modo le funzioni di trasferimento calcolate presentano, quasi per ogni componente, parte reale trascurabile rispetto a quella immaginaria. Volendo tradurre quanto ora discusso in formule, riprendendo la relazione (2.49) introdotta al precedente 2.3.3 ed esplicitando i termini della sommatoria fino al modo 4 si ottiene, per

$$\begin{aligned}
 r &= 15 ; s = 1, \dots, 15 \\
 H_{15s}(\omega_3) &= \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j U_s^{(j)} U_r^{(j)} (\omega_j^2 - \Omega^2)}{(\omega_j^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \Omega)^2} - i \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j U_s^{(j)} U_r^{(j)} 2\xi_j \omega_j \Omega}{(\omega_j^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \Omega)^2} \\
 &= \left[ \frac{\alpha_1 U_s^{(1)} U_{15}^{(1)} (\omega_1^2 - \omega_3^2)}{(\omega_1^2 - \omega_3^2)^2 + (2\xi_1 \omega_1 \omega_3)^2} + \frac{\alpha_2 U_s^{(2)} U_{15}^{(2)} (\omega_2^2 - \omega_3^2)}{(\omega_2^2 - \omega_3^2)^2 + (2\xi_2 \omega_2 \omega_3)^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha_3 U_s^{(3)} U_{15}^{(3)} (\omega_3^2 - \omega_3^2)}{(\omega_3^2 - \omega_3^2)^2 + (2\xi_3 \omega_3 \omega_3)^2} + \frac{\alpha_4 U_s^{(4)} U_{15}^{(4)} (\omega_4^2 - \omega_3^2)}{(\omega_4^2 - \omega_3^2)^2 + (2\xi_4 \omega_4 \omega_3)^2} + \dots \right] \\
 &\quad - i \left[ \frac{\alpha_1 U_s^{(1)} U_{15}^{(1)} 2\xi_1 \omega_1 \omega_3}{(\omega_1^2 - \omega_3^2)^2 + (2\xi_1 \omega_1 \omega_3)^2} + \frac{\alpha_2 U_s^{(2)} U_{15}^{(2)} 2\xi_2 \omega_2 \omega_3}{(\omega_2^2 - \omega_3^2)^2 + (2\xi_2 \omega_2 \omega_3)^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha_3 U_s^{(3)} U_{15}^{(3)} 2\xi_3 \omega_3 \omega_3}{(\omega_3^2 - \omega_3^2)^2 + (2\xi_3 \omega_3 \omega_3)^2} + \frac{\alpha_4 U_s^{(4)} U_{15}^{(4)} 2\xi_4 \omega_4 \omega_3}{(\omega_4^2 - \omega_3^2)^2 + (2\xi_4 \omega_4 \omega_3)^2} + \dots \right]
 \end{aligned}$$

Dalla precedente il contributo in rosso si elide, in blu si rappresentano i contributi forniti dai modi non risonanti ed in verde il contributo che in tal caso risulta essere prevalente.

Estendendo l'osservazione fatta per l'indagine due alle indagini numero 1 4 e 5 (non si considera l'indagine numero 3 in quanto presenta gli stessi parametri dell'indagine numero 4) si osserva che la parte immaginaria risulta prevalente come ora rilevato anche per l'indagine numero 4 e 5, mentre non si verifica per la numero 1; per tali indagini si riportano grafici analoghi al 3.30

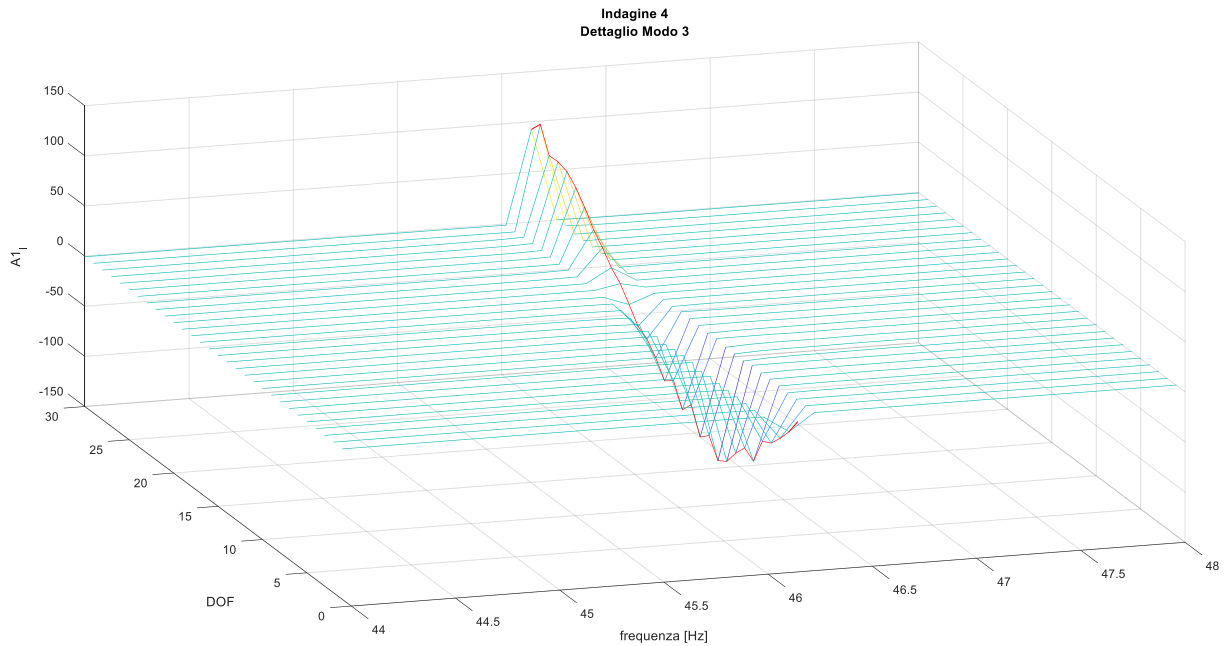


Grafico 3. 31 a) Indagine 4 Dettaglio modo 3 – Parte Immaginaria FRF

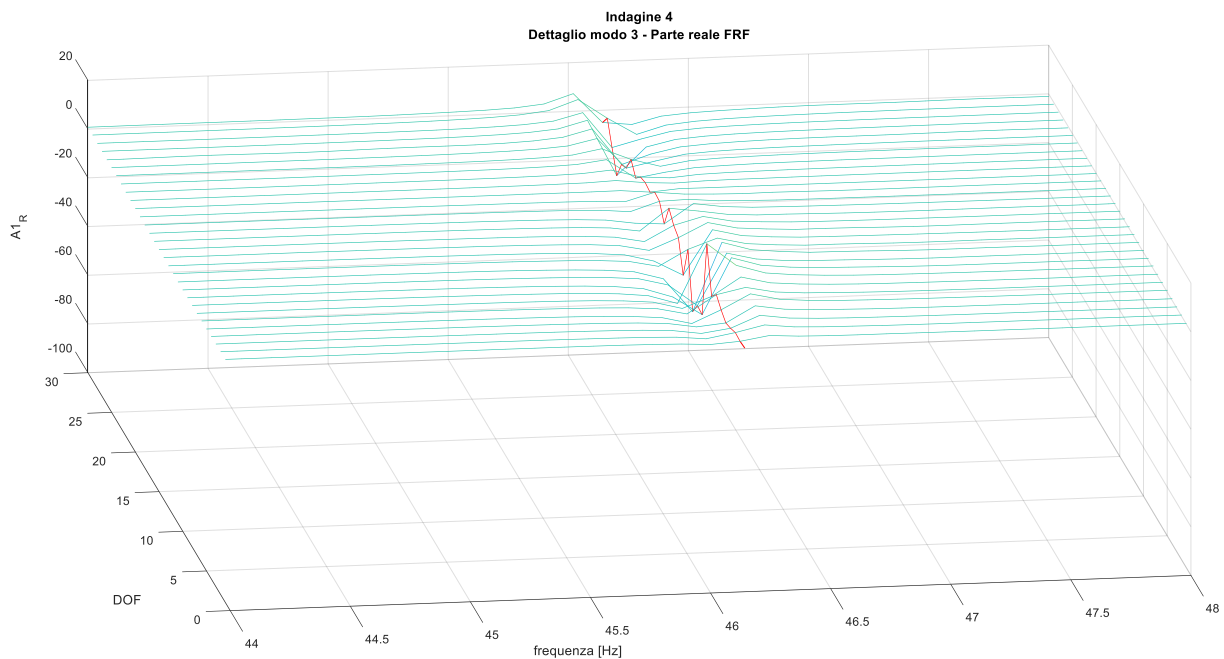
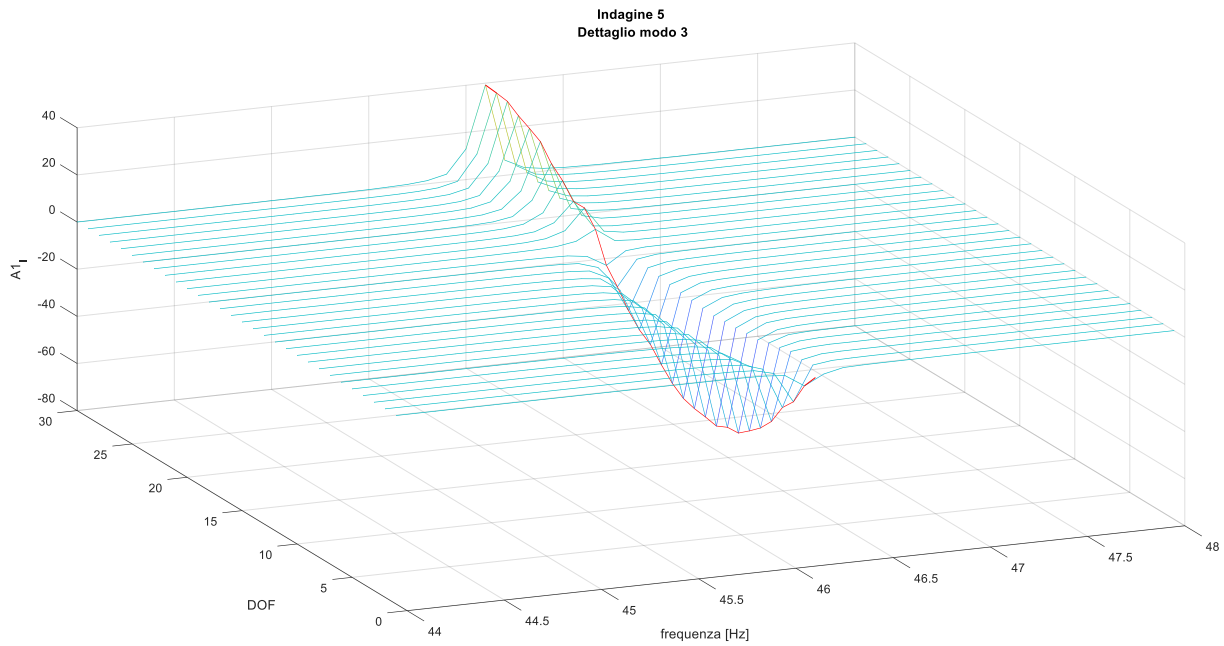
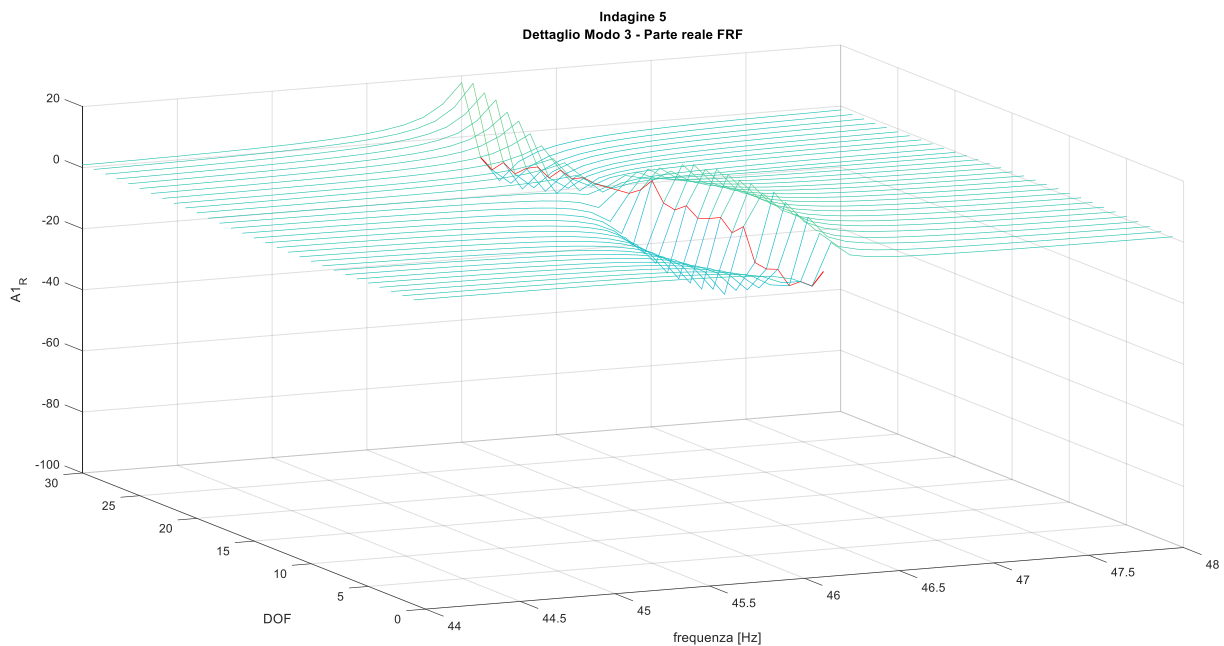


Grafico 3. 31 b) Indagine 4 Dettaglio modo 3 – Parte Reale FRF



*Grafico 3. 32 a) Indagine 5 Dettaglio modo 3 – Parte Immaginaria FRF*



*Grafico 3. 32 b) Indagine 5 Dettaglio modo 3 – Parte Reale FRF*

Le indagini numero 2, 4, 5 per le quali si osserva quanto detto sono accomunate da un valore di frequenza di risonanza per il terzo modo molto simile, come evidenziato alla precedente tabella 3.4, si deduce dunque che:

- Osservando l'andamento delle parti reali ed immaginarie delle funzioni di trasferimento per il terzo modo flessionale della trave si riscontra valida l'ipotesi di trascurabilità dei modi non risonanti;



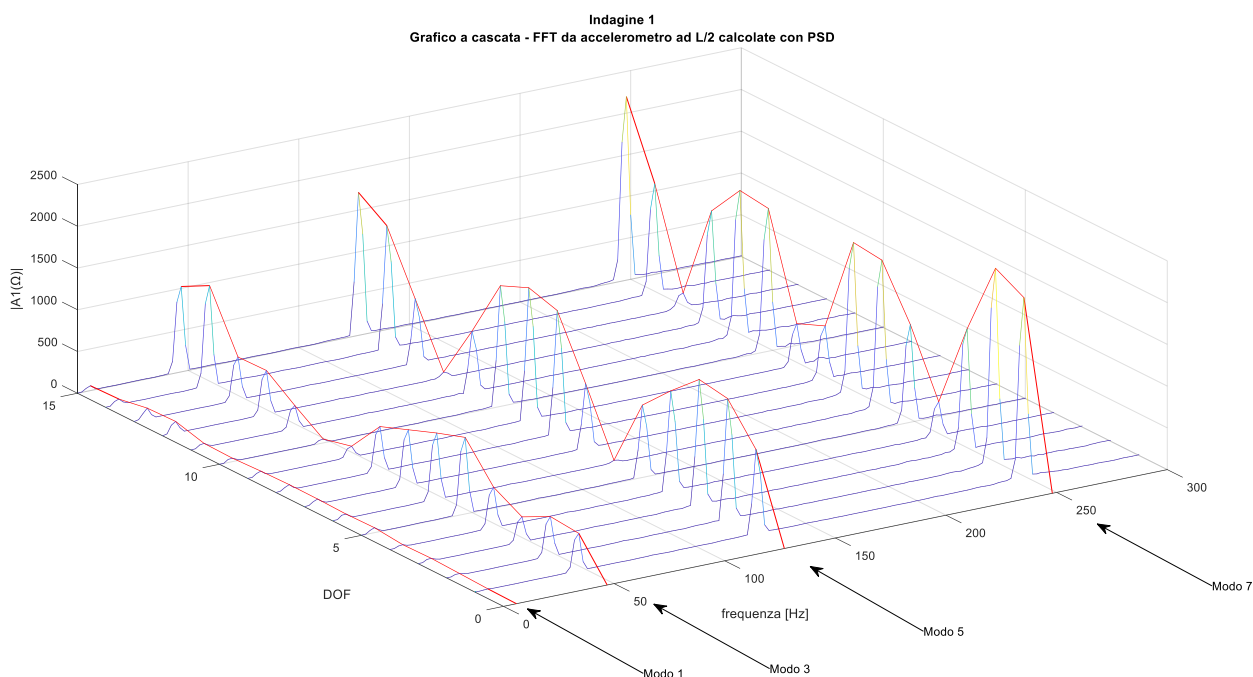
- La frequenza propria rilevata per il terzo modo di vibrare risulta molto prossima a quella effettiva;
- Osservando in sequenza i grafici 3.29 3.30 e 3.31 si evince come l'incremento della risoluzione in frequenza evidenzi che la risposta del singolo modo di vibrare della trave sia sempre più vicina a quella di sistema ad un grado di libertà, riportata nel precedente grafico 3.16.

In conclusione, si osserva che tanto più la discretizzazione permette di avvicinarsi all'effettiva frequenza propria di vibrazione tanto migliore risulterà la rappresentazione del modo di vibrare, come atteso; nei casi in cui è risultato necessario riportare dei dettagli per poter evidenziare una forma non subito visibile la discretizzazione in frequenza non ha permesso di cogliere quello specifico modo.

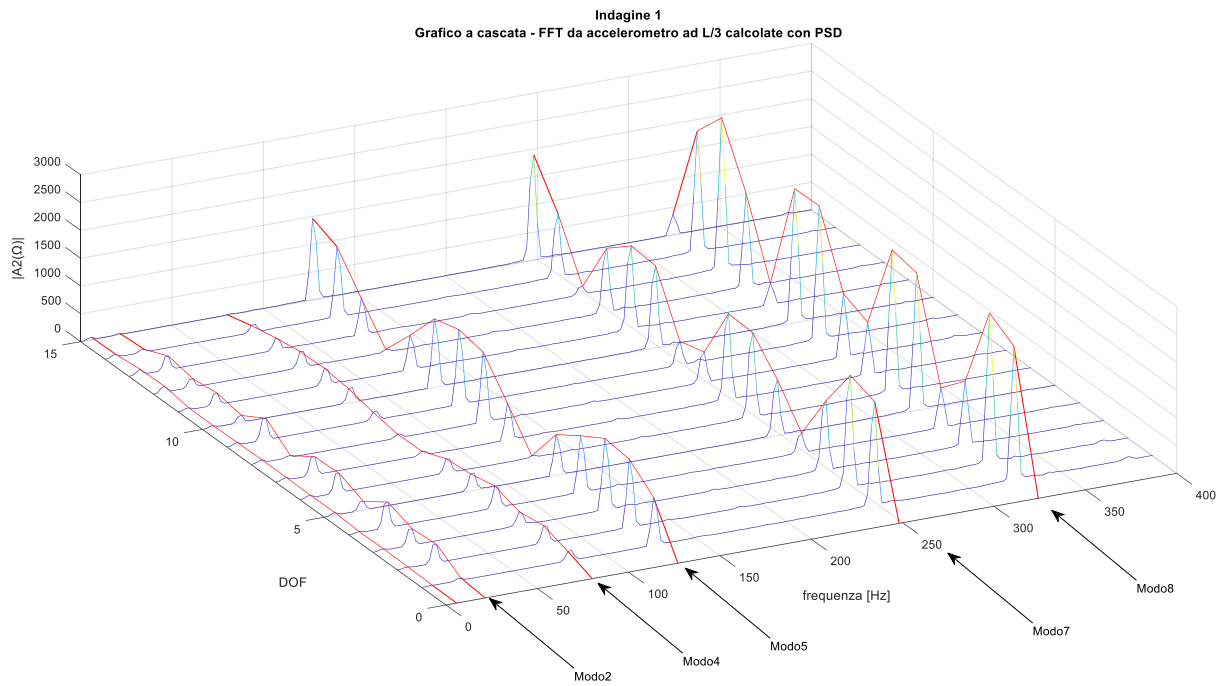
### 3.4.2 Stima tramite PSD

Analogamente a quanto fatto al precedente 3.4.1 nel caso in cui la rappresentazione non permetta di individuare un modo specifico se ne riporta il dettaglio dopo le due rappresentazioni complessive relative ai nodi di output ad L/2 ed L/3.

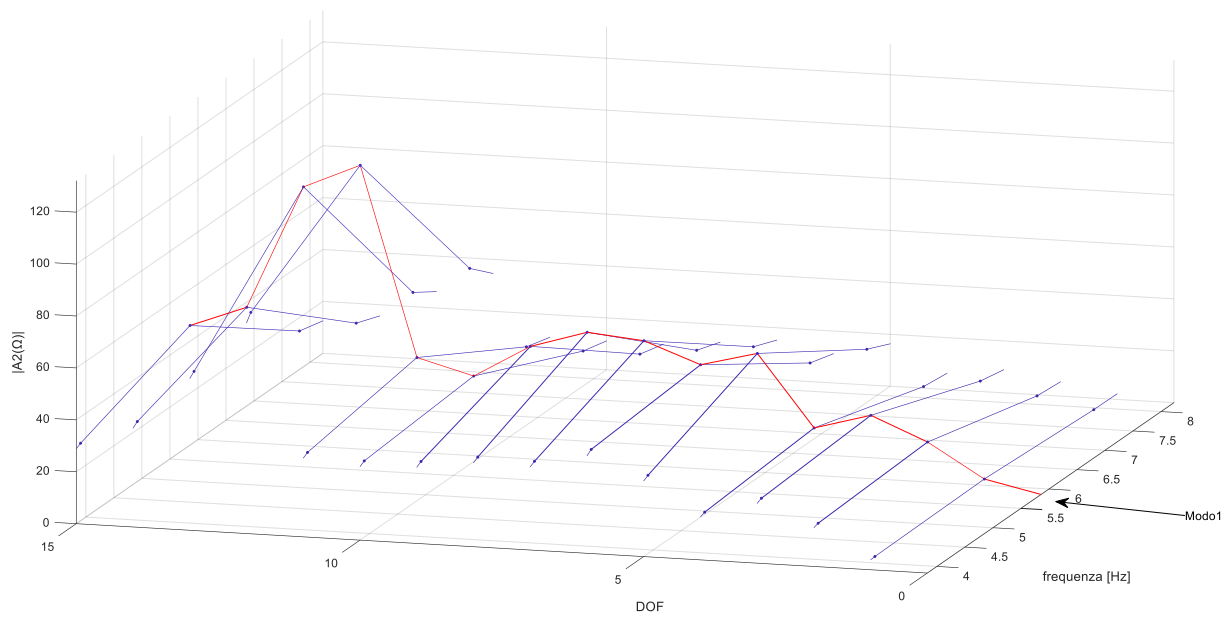
#### Indagine 1



*Grafico 3. 33 Indagine 1 – stima delle forme modali in valore assoluto a partire dalle FRF calcolate con PSD ottenute dall'accelerometro ad L/2 con discretizzazione di metà trave in 15 DOFs*



*Grafico 3. 34 Indagine 1 – stima delle forme modali in valore assoluto a partire dalle FRF calcolate con PSD ottenute dall'accelerometro ad L/3 con discretizzazione di metà trave in 15 DOFs*



## Indagine 2

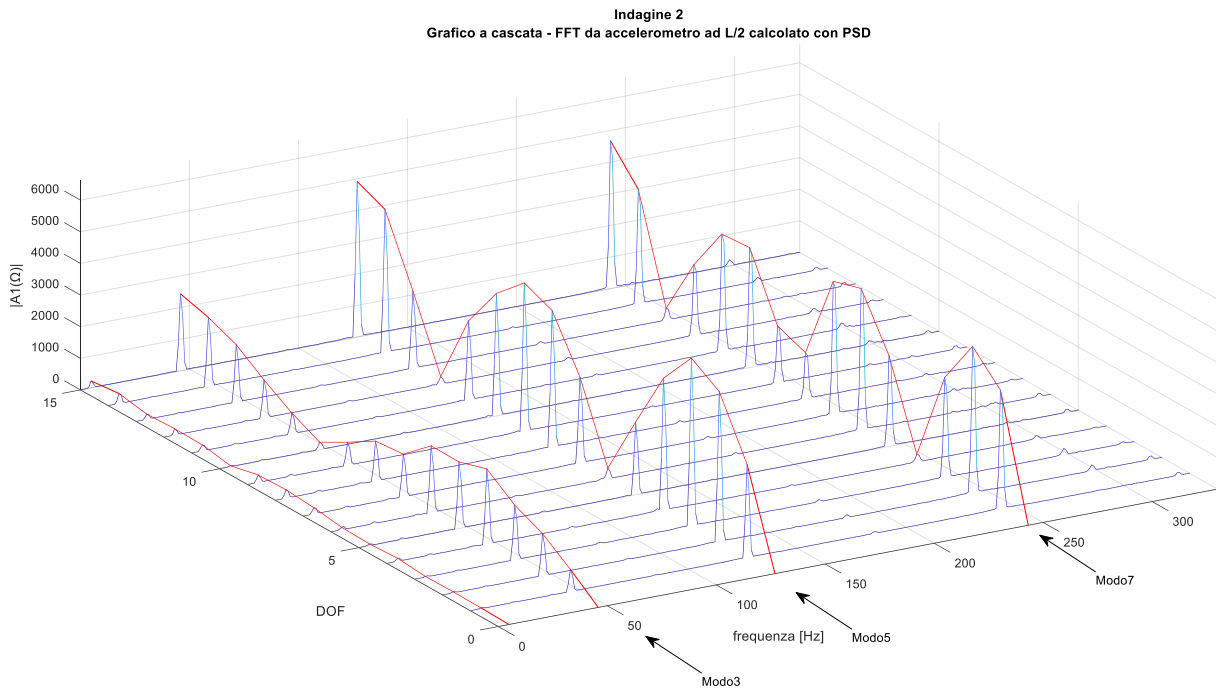


Grafico 3. 35 Indagine 2 – stima delle forme modali in valore assoluto a partire dalle FRF calcolate con PSD ottenute dall'accelerometro ad L/2 con discretizzazione di metà trave in 15 DOFs

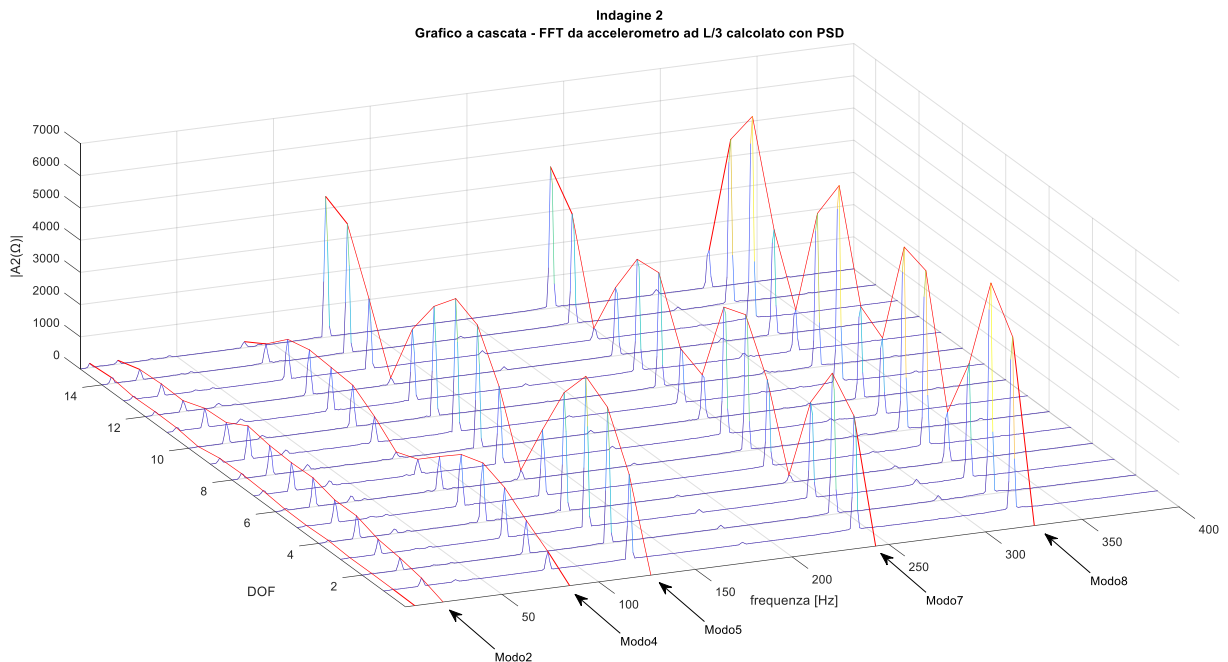
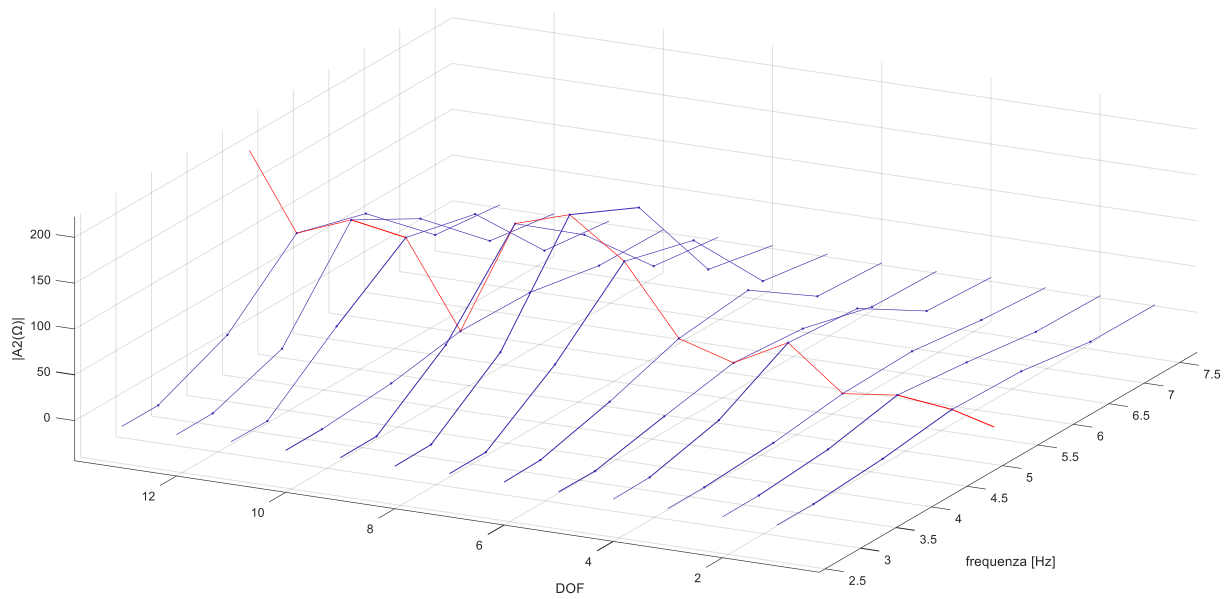
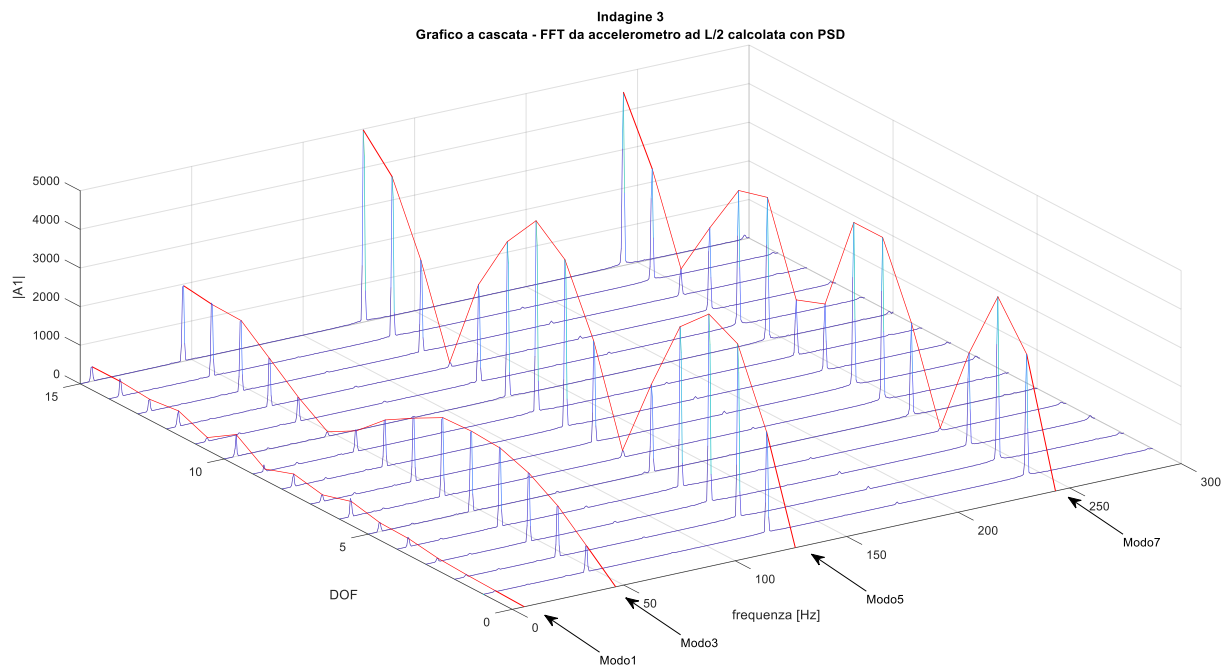


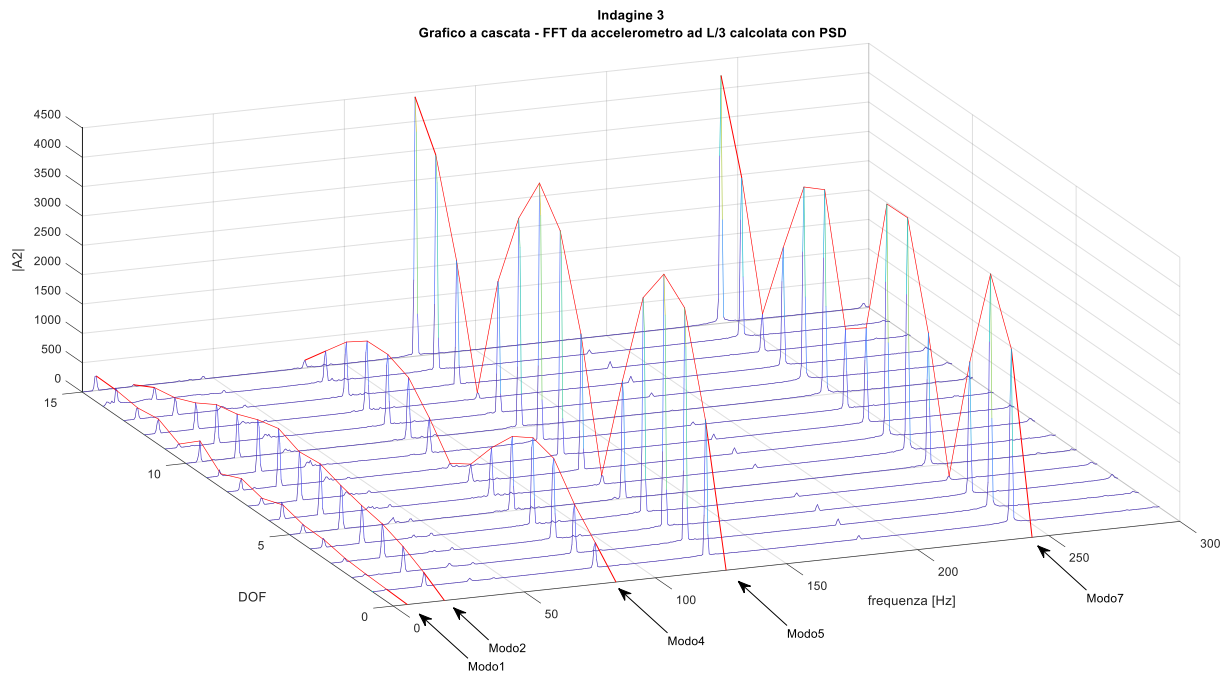
Grafico 3. 36 Indagine 2 – stima delle forme modali in valore assoluto a partire dalle FRF calcolate con PSD ottenute dall'accelerometro ad L/3 con discretizzazione di metà trave in 15 DOFs



### Indagine 3

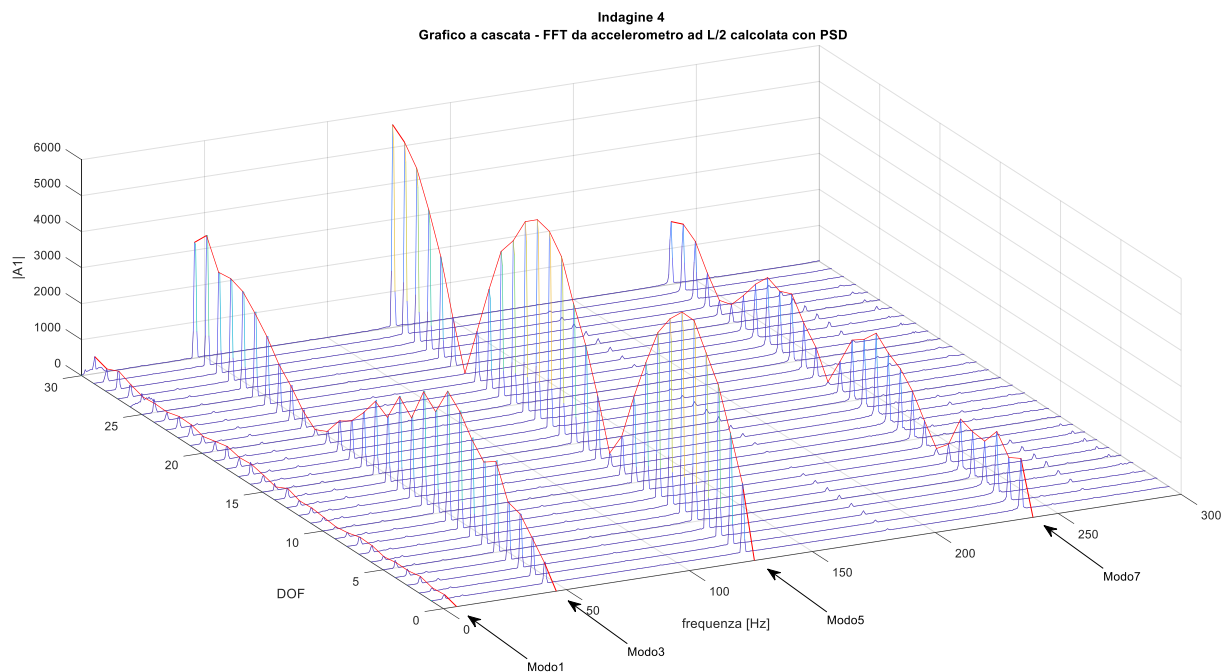


*Grafico 3. 37 Indagine 3 – stima delle forme modali in valore assoluto a partire dalle FRF calcolate con PSD ottenute dall'accelerometro ad L/2 con discretizzazione di metà trave in 15 DOFs*



*Grafico 3. 38 Indagine 3 – stima delle forme modali in valore assoluto a partire dalle FRF calcolate con PSD ottenute dall'accelerometro ad L/3 con discretizzazione di metà trave in 15 DOFs*

### Indagine 4



*Grafico 3. 39 Indagine 4 – stima delle forme modali in valore assoluto a partire dalle FRF calcolate con PSD ottenute dall'accelerometro ad L/2 con discretizzazione di metà trave in 30 DOFs*

Indagine 4  
 Grafico a cascata - FFT da accelerometro ad L/3 calcolata con PSD

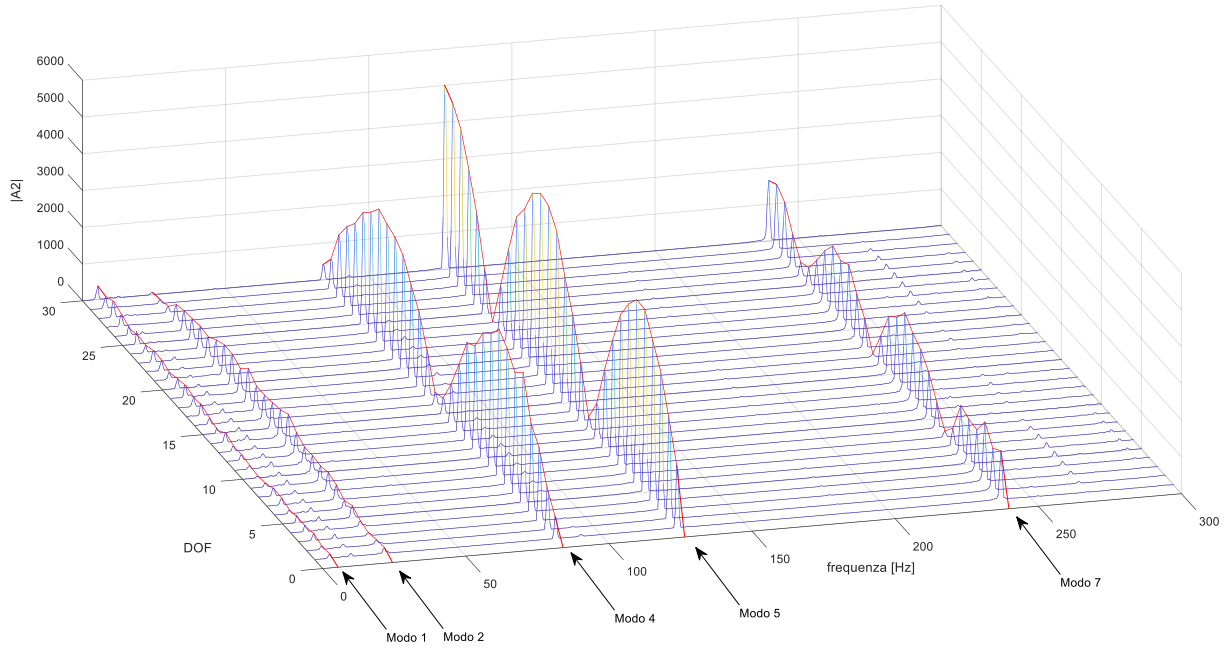


Grafico 3. 40 Indagine 4 – stima delle forme modali in valore assoluto a partire dalle FRF calcolate con PSD ottenute dall'accelerometro ad L/3 con discretizzazione di metà trave in 30 DOFs

Indagine 5

Indagine 5  
 Grafico a cascata - FFT da accelerometro ad L/2 calcolata con PSD

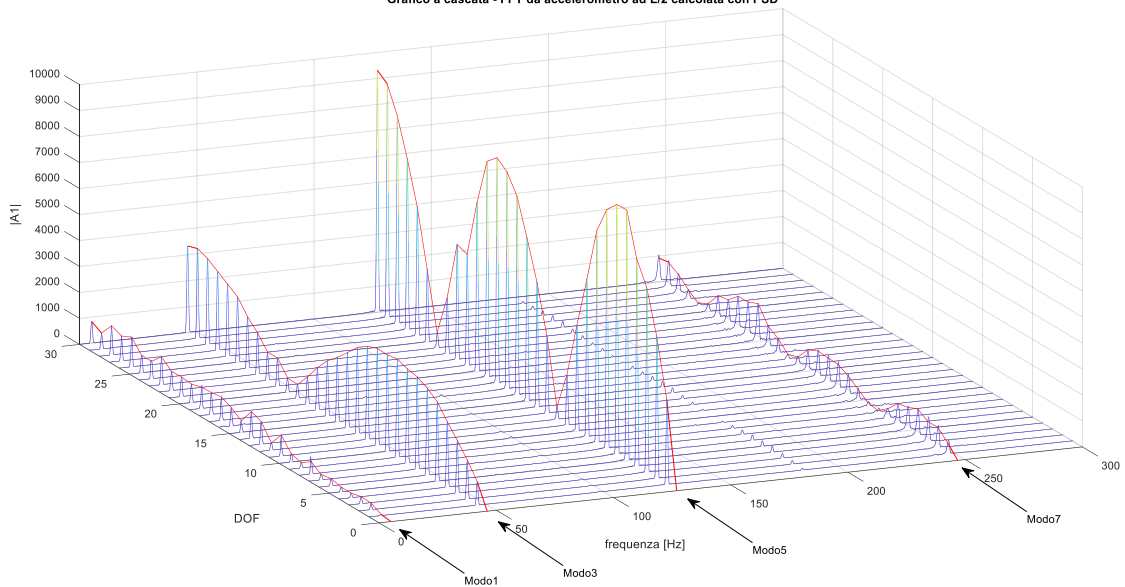
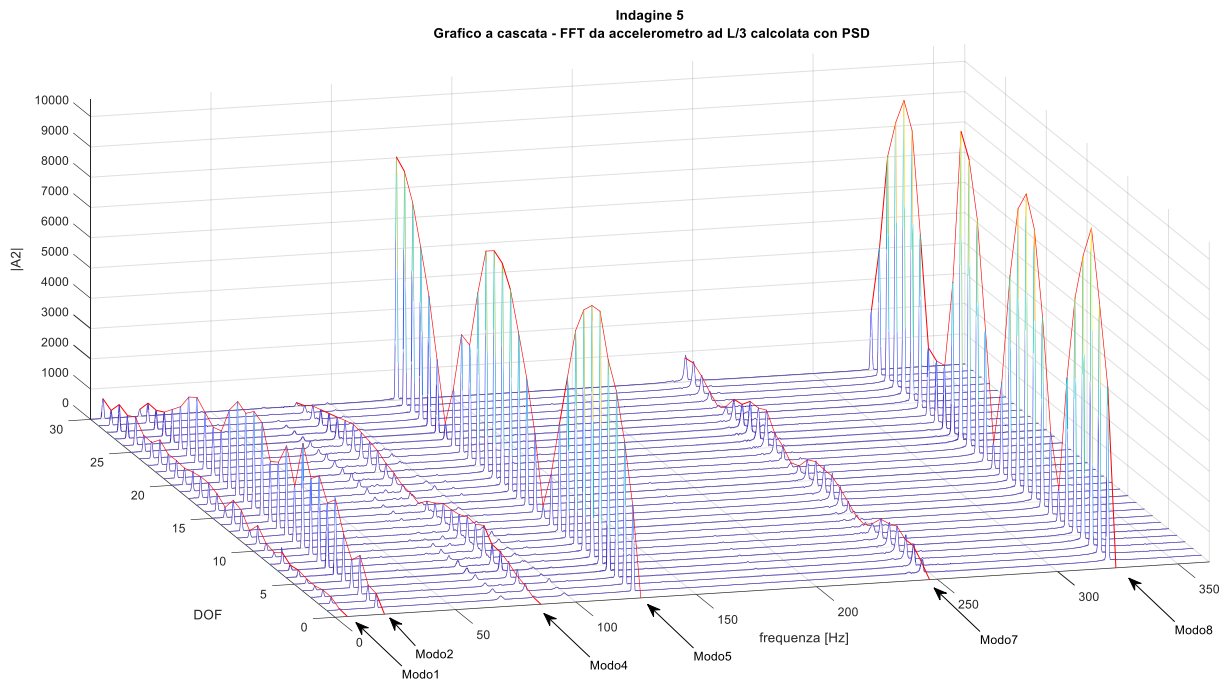


Grafico 3. 41 Indagine 5 – stima delle forme modali in valore assoluto a partire dalle FRF calcolate con PSD ottenute dall'accelerometro ad L/2 con discretizzazione di metà trave in 30 DOFs

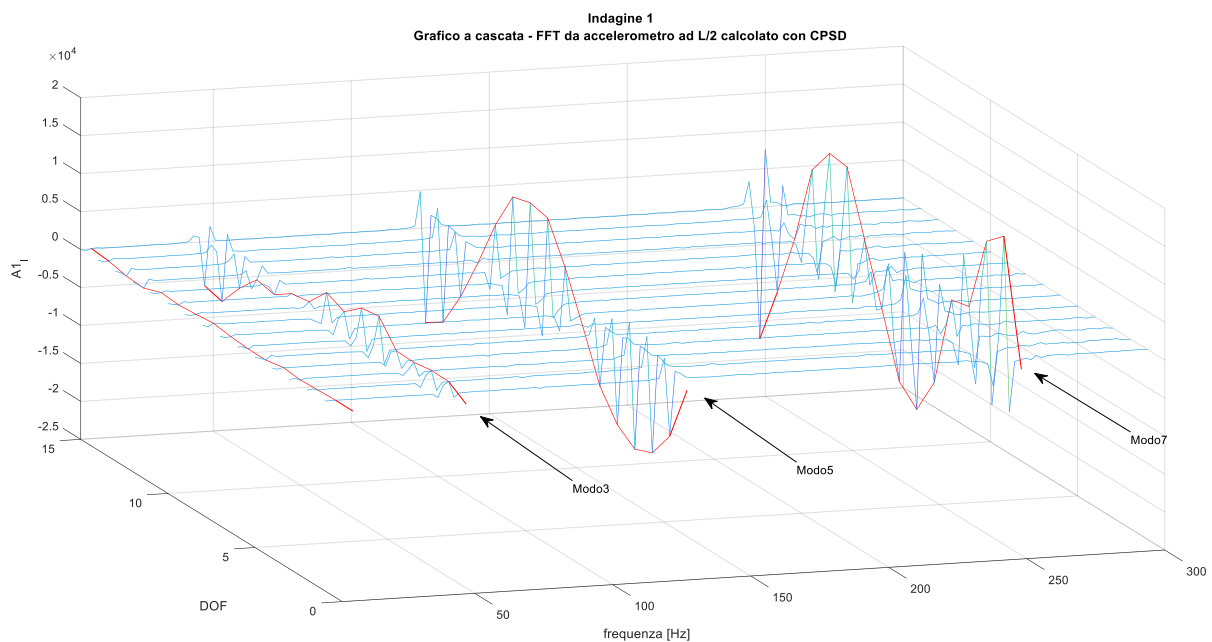


*Grafico 3. 42 Indagine 5 – stima delle forme modali in valore assoluto a partire dalle FRF calcolate con PSD ottenute dall'accelerometro ad L/3 con discretizzazione di metà trave in 30 DOFs*

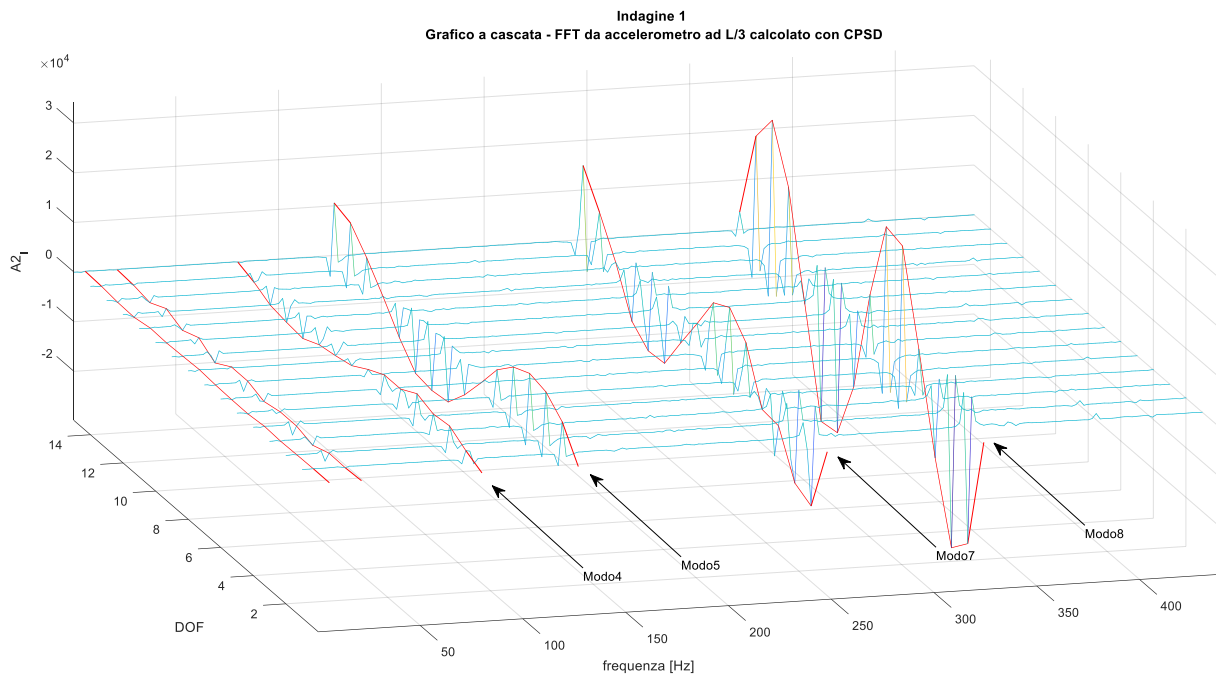
### 3.4.3 Stima tramite CPSD

Come al precedente 3.4.1 si rappresenta lungo z la parte immaginaria delle FRF, stimate in questo caso tramite Cross Power Spectral Density.

#### Indagine 1

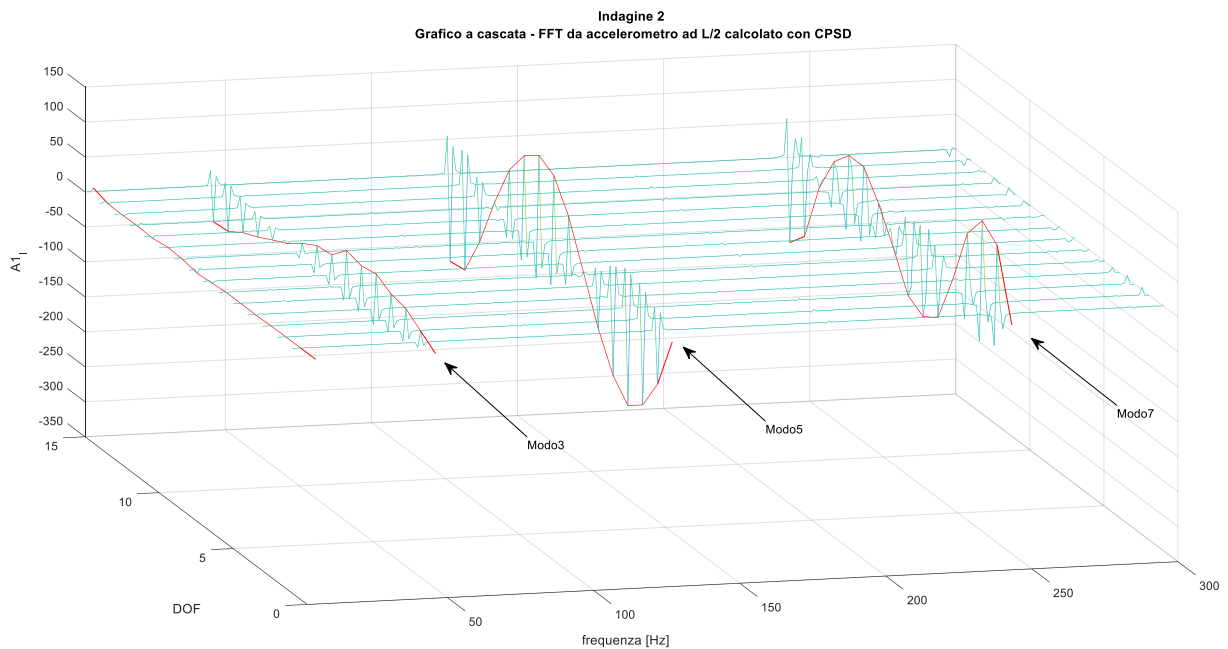


*Grafico 3. 43 Indagine 1 – stima delle forme modali a partire dalle FRF calcolate con CPSD ottenute dall'accelerometro ad L/2 con discretizzazione di metà trave in 15 DOFs*



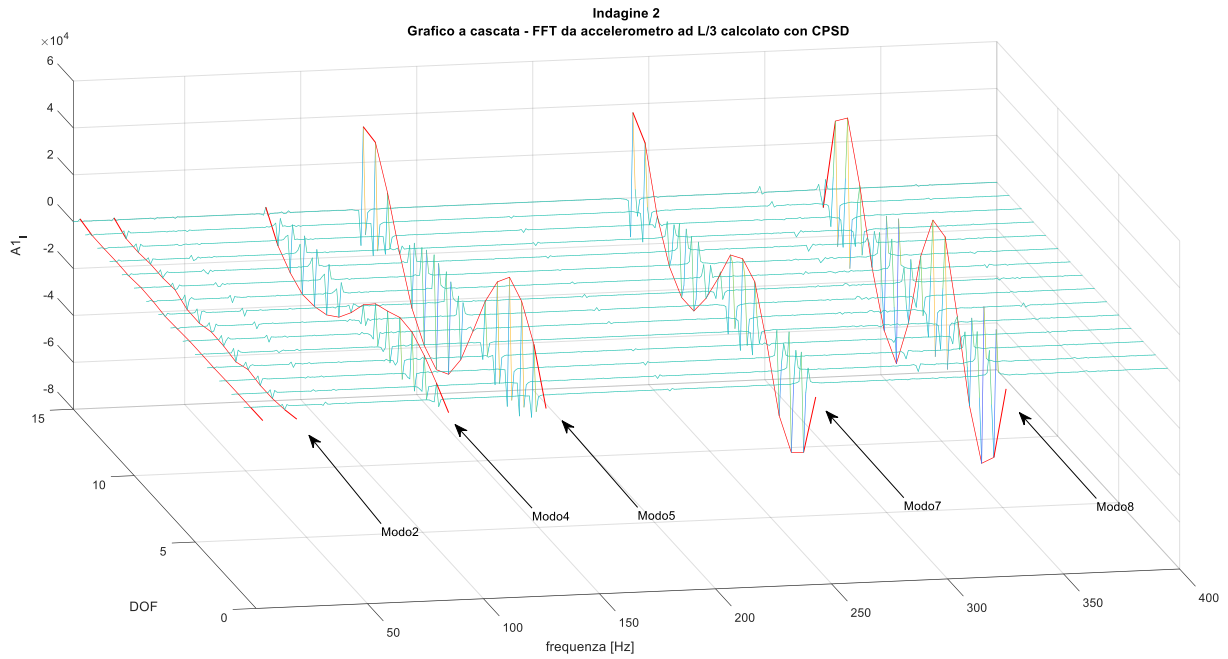
*Grafico 3. 44 Indagine 1 – stima delle forme modali a partire dalle FRF calcolate con CPSD ottenute dall'accelerometro ad L/3 con discretizzazione di metà trave in 15 DOFs*

## Indagine 2



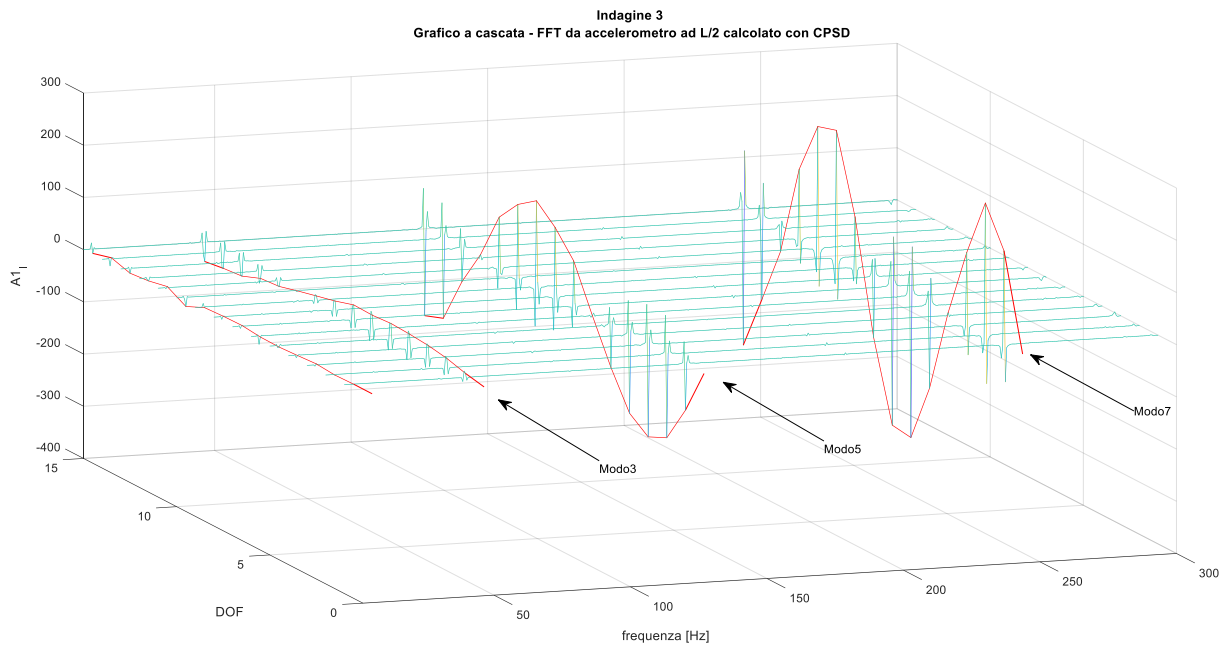
*Grafico 3. 45 Indagine 2 – stima delle forme modali a partire dalle FRF calcolate con CPSD ottenute dall'accelerometro ad L/2 con discretizzazione di metà trave in 15 DOFs*



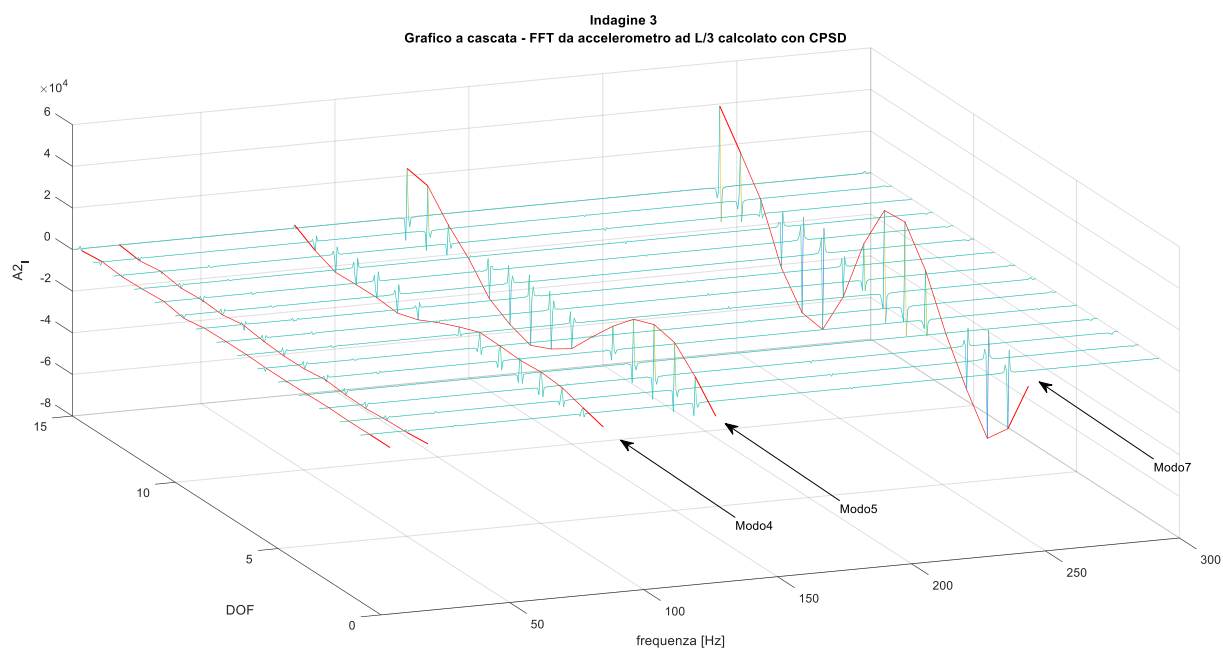


*Grafico 3. 46 Indagine 2 – stima delle forme modali a partire dalle FRF calcolate con CPSD ottenute dall’accelerometro ad L/3 con discretizzazione di metà trave in 15 DOFs*

### Indagine 3

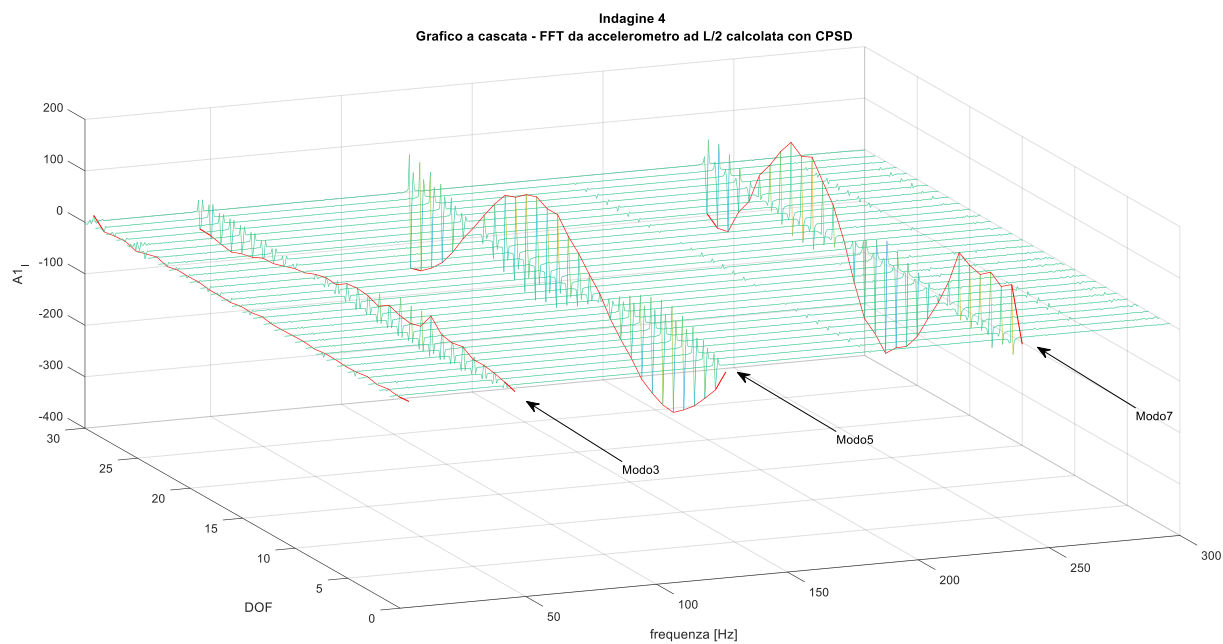


*Grafico 3. 47 Indagine 3 – stima delle forme modali a partire dalle FRF calcolate con CPSD ottenute dall’accelerometro ad L/2 con discretizzazione di metà trave in 15 DOFs*



*Grafico 3. 48 Indagine 3 – stima delle forme modali a partire dalle FRF calcolate con CPSD ottenute dall'accelerometro ad L/3 con discretizzazione di metà trave in 15 DOFs*

#### Indagine 4



*Grafico 3. 49 Indagine 4 – stima delle forme modali a partire dalle FRF calcolate con CPSD ottenute dall'accelerometro ad L/2 con discretizzazione di metà trave in 30 DOFs*

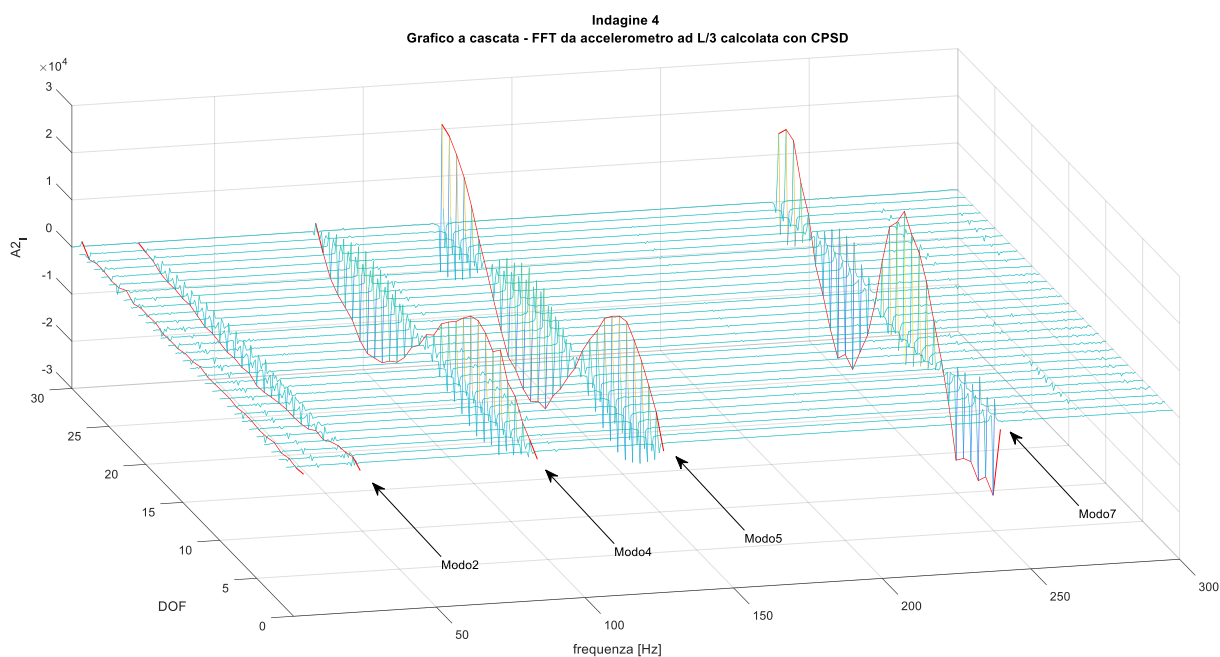


Grafico 3. 50 Indagine 4 – stima delle forme modali a partire dalle FRF calcolate con CPSD ottenute dall'accelerometro ad L/3 con discretizzazione di metà trave in 30 DOFs

### Indagine 5

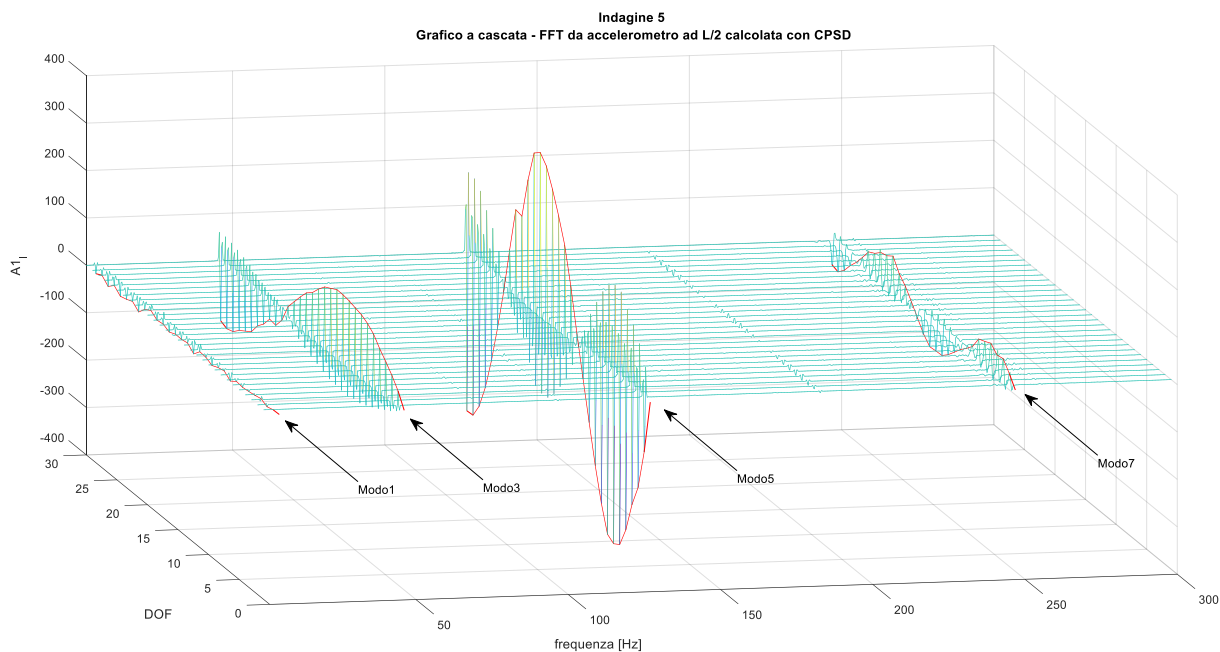


Grafico 3. 51 Indagine 5 – stima delle forme modali a partire dalle FRF calcolate con CPSD ottenute dall'accelerometro ad L/2 con discretizzazione di metà trave in 30 DOFs

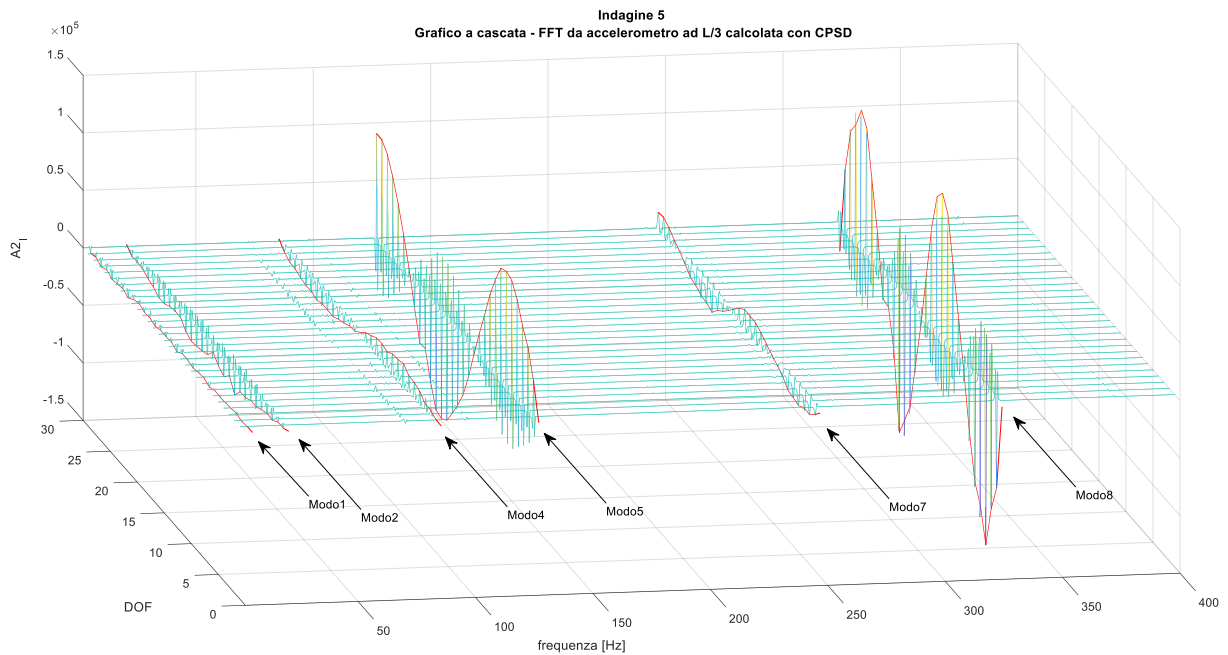


Grafico 3. 52 Indagine 5 – stima delle forme modali a partire dalle FRF calcolate con CPSD ottenute dall’accelerometro ad L/3 con discretizzazione di metà trave in 30 DOFs

Per i dettagli dei modi non visibili si rimanda ai grafici corrispondenti calcolati con PSD; è infatti possibile correlare i risultati ottenuti al 3.4.2 da PSD e quelli qui presentati in quanto valutando il valore assoluto dei vettori complessi ottenuti da CPSD si ritrovano i corrispondenti vettori reali dedotti da PSD.

Si mostra quanto ora affermato nei successivi grafici: con riferimento all’indagine numero 4 focalizzando l’attenzione sul modo 5 e graficando in blu l’andamento del quinto modo a partire dall’ampiezza delle FRF stimate con PSD si ottiene (grafico 3.53)

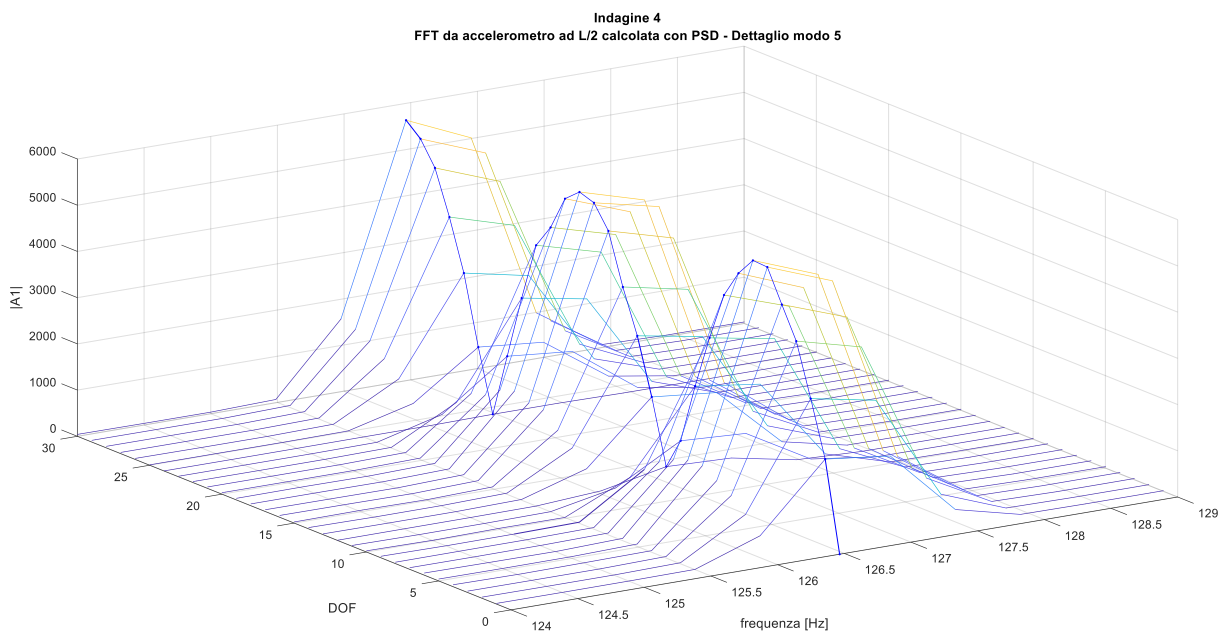


Grafico 3. 53 Indagine 4 – Dettaglio modo 5 (curva blu) stimato con FRF da PSD

Sovrapponendo ora la curva blu del grafico 3.53 all'andamento del modo 5, tracciato in rosso, ottenuto dal valore assoluto delle FRF complesse ricavate con CPSD si ottiene (grafico 3.54)

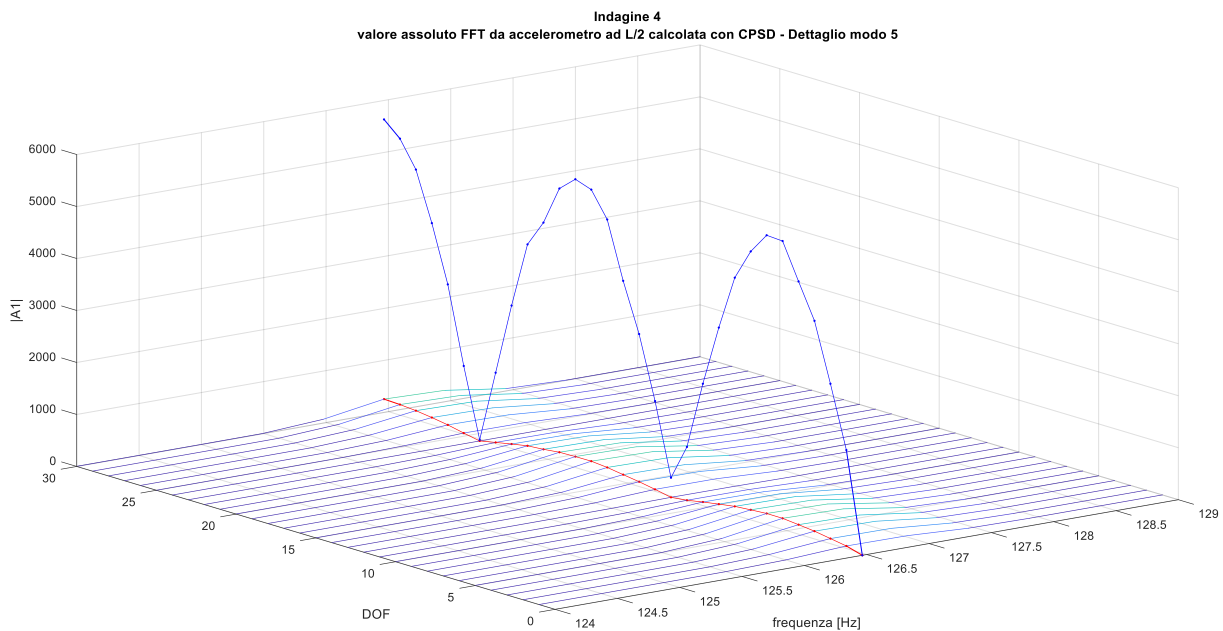


Grafico 3. 54 Indagine 4 – Dettaglio valore assoluto del modo 5 (curva rossa) stimato con FRF da CPSD raffrontato al corrispondente modo dedotto da PSD (curva blu)

Andando ora a normalizzare le due curve rispetto al valore massimo si ottiene (grafico 3.55)

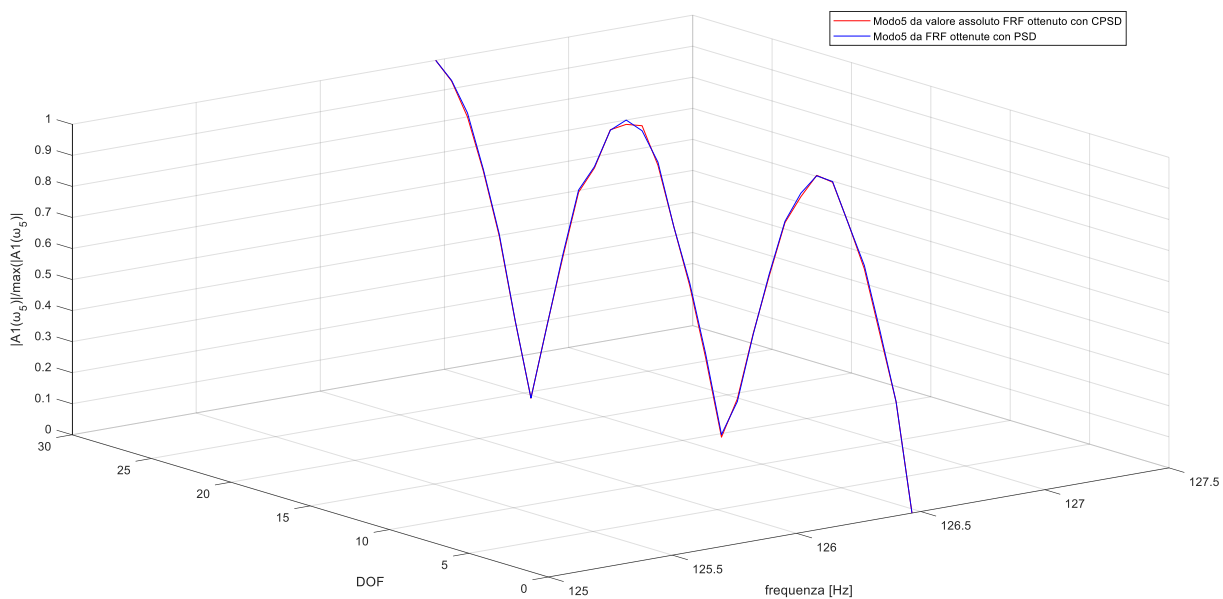


Grafico 3. 55 Indagine 4 – sovrapposizione dei modi normalizzati rispetto al valore massimo, ottenuti da PSD (curva blu) e CPSD (curva rossa)

Il grafico 3.55 valida l'osservazione precedente in quanto le due curve, se normalizzate, presentano andamento coincidente.

### 3.5 Stima degli indici di smorzamento modale

La stima degli indici di smorzamento modale è stata effettuata sulla base dei seguenti parametri

$$sf = 1000\text{Hz}$$

$$N_{punti} = 8192$$

utilizzati per le indagini tre e quattro.

Il criterio adottato per la stima si basa sulla larghezza della banda passante, tale metodologia è efficace nel caso di smorzamento ridotto e modi sufficientemente separati tra loro.

Per banda passante si intende l'intervallo di frequenze compreso tra i punti di metà potenza, definibili a partire dai picchi rilevati osservando il modulo delle funzioni di risposta in frequenza come riportato nel grafico 3.56.

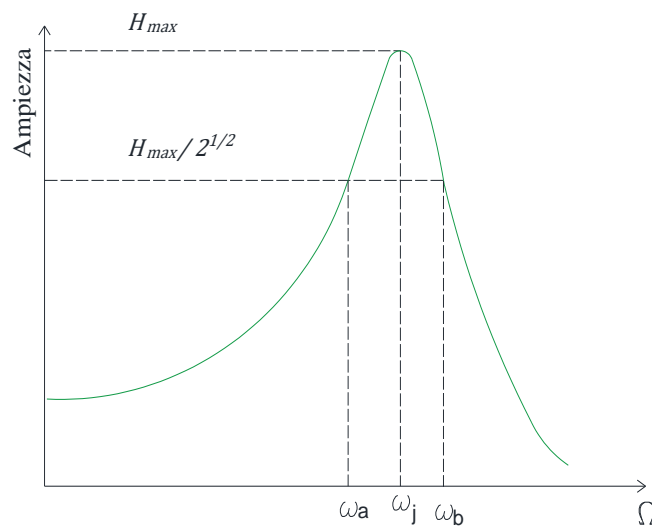


Grafico 3. 56 Individuazione dei punti di metà potenza

Osservando il generico modo  $j$ -esimo si indica con  $H_{max}$  l'ampiezza massima della funzione di risposta in frequenza considerata valutata ad  $\omega_j$

$$(3. 8) \quad |H_{rs}(\omega_j)| = H_{j \max}$$

si definiscono punti di metà potenza quei punti in cui l'ideale smorzatore associato al modo dissipa metà della potenza rispetto a quella massima che si verifica per  $\omega = \omega_j$ , a tali punti corrispondono le pulsazioni  $\omega_a$  e  $\omega_b$  per i quali il valore del modulo della FRF vale

$$(3. 9) \quad |H_{rs}(\omega_a)| = |H_{rs}(\omega_b)| = \frac{H_{j \max}}{\sqrt{2}}$$

Note  $\omega_a$  ed  $\omega_b$  l'indice di smorzamento relativo al modo risulta direttamente proporzionale alla larghezza della banda passante, definita come la distanza tra  $\omega_a$  ed  $\omega_b$ .

La relazione che fornisce l'indice di smorzamento del generico modo j-esimo risulta:

$$(3.10) \quad \xi_j = \frac{\omega_b - \omega_a}{2\omega_j}$$

Con riferimento alle funzioni di trasferimento ricavate con metodo diretto nell'indagine numero 3, esposti al precedente 3.4.1, si riporta il calcolo degli indici di smorzamento dei primi 4 modi.

### Modi 1 e 3

A partire dalla funzione di trasferimento in termini di accelerazione calcolata tramite la relazione (2.51) ed ottenuta a seguito di applicazione della forzante nel nodo  $s = 5$  valutando l'output ottenuto dall'accelerometro posto in mezzaria  $r = 15$  (indici relativi alla discretizzazione a 15 nodi); valutando il valore assoluto del vettore complesso  $\mathbf{A}_{15\ 5}(\Omega)$

$$|\mathbf{A}_{15\ 5}(\Omega)| = \left| \frac{F[\mathbf{a}_{15}(t)]}{F[\mathbf{p}_5(t)]} \right|$$

e identificando i massimi relativi al primo e terzo modo, gli unici dei primi quattro visibili dall'output in mezzaria, si ottiene quanto riportato nel grafico 3.57

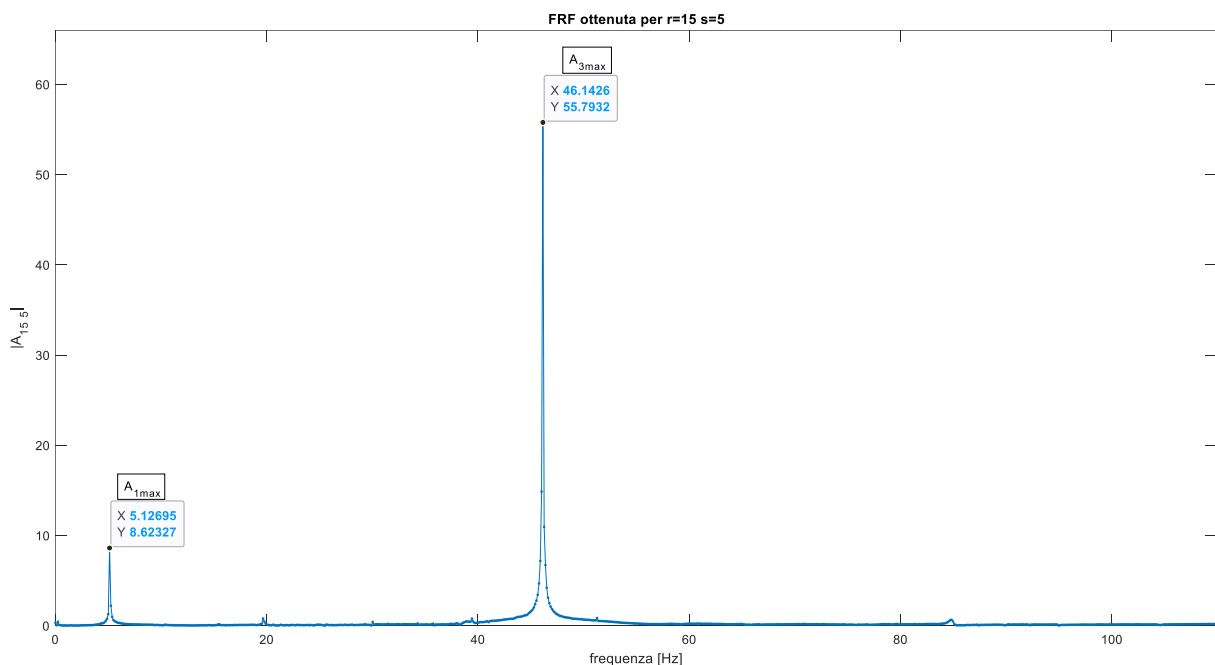


Grafico 3. 57 Indagine 3 - Modulo dell'inertanza  $\mathbf{A}_{15\ 5}(\Omega)$  identificazione dei picchi relativi ai primi modi di vibrare

Dal grafico si osserva, con riferimento alla (3.8), che le ampiezze massime rilevate in corrispondenza delle frequenze di risonanza dei modi visibili dall'accelerometro risultano:

$$|A_{15\ 5}(\omega_1)| = A_{1\ max} = 8,62$$

$$|A_{15\ 5}(\omega_3)| = A_{3\ max} = 55,79$$

Volendo poi ricercare i punti di metà potenza relativi a tali modi, con riferimento alla relazione (3.9), si tracciano due rette che intersecano la curva discreta ai valori di ampiezza:

$$|A_{15\ 5}(\omega_{a_1})| = |A_{15\ 5}(\omega_{b_1})| = \frac{A_{1\ max}}{\sqrt{2}} = \frac{8,62}{\sqrt{2}} = 6,1$$

$$|A_{15\ 5}(\omega_{a_3})| = |A_{15\ 5}(\omega_{b_3})| = \frac{A_{3\ max}}{\sqrt{2}} = \frac{55,79}{\sqrt{2}} = 39,45$$

Come riportato nel grafico 3.58.

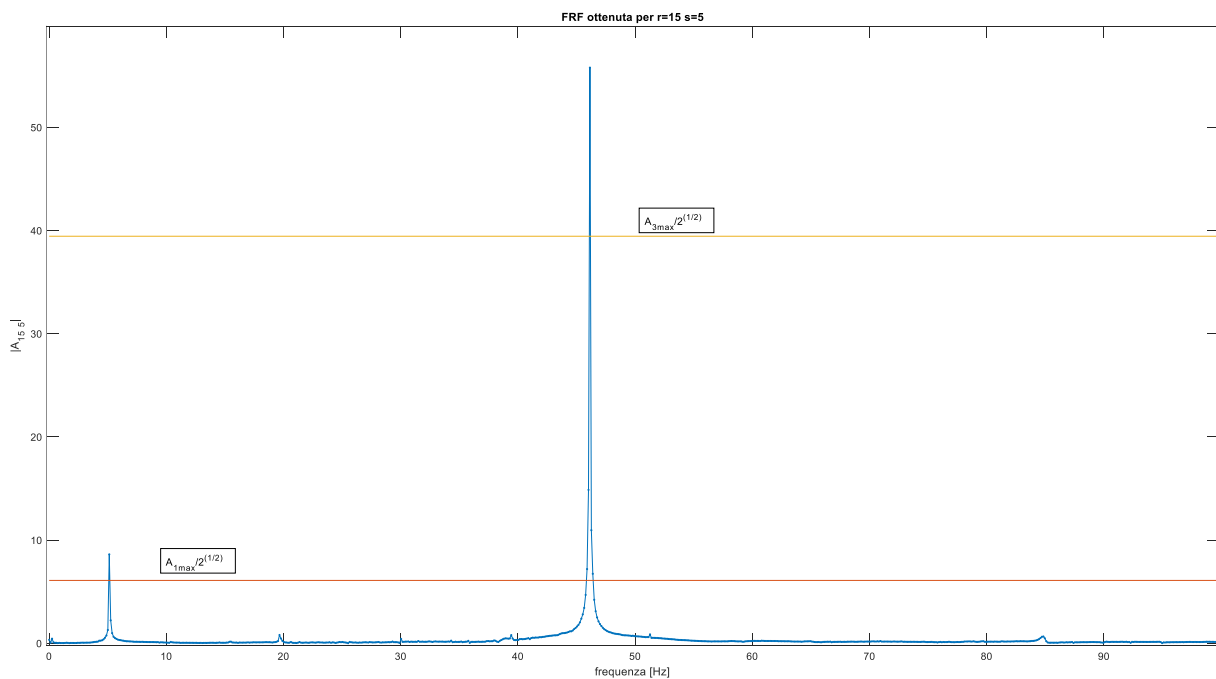
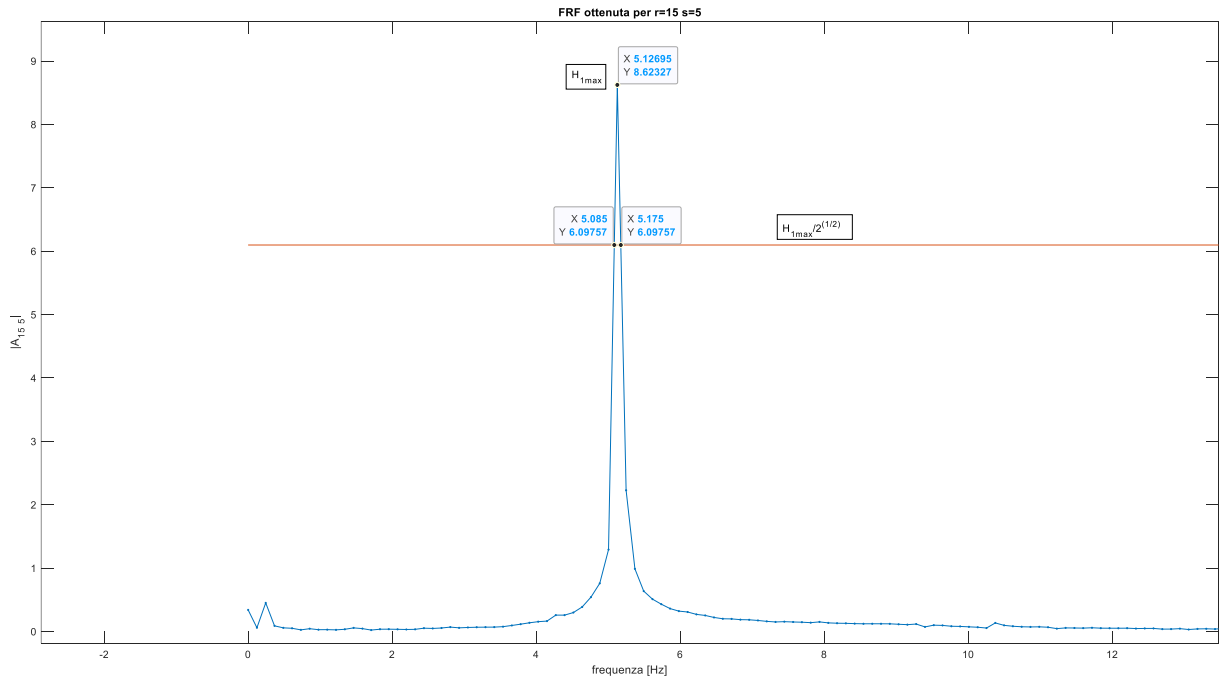


Grafico 3. 58 Punti di metà potenza dei modi 1 e 3

A partire dal grafico 3.55 si procede ad individuare i valori di  $\omega_{a_j}$  e  $\omega_{b_j}$ , con  $j = 1,3$ , corrispondenti alle ascisse dei punti di intersezione tra le rette tracciate e la curva discreta. Di seguito si riportano due zoom del grafico 3.58 che permettono di effettuare il passaggio ora descritto:





*Estratto del grafico 3.58 relativo al modo 1*

Come evidenziato nell'immagine si ottiene

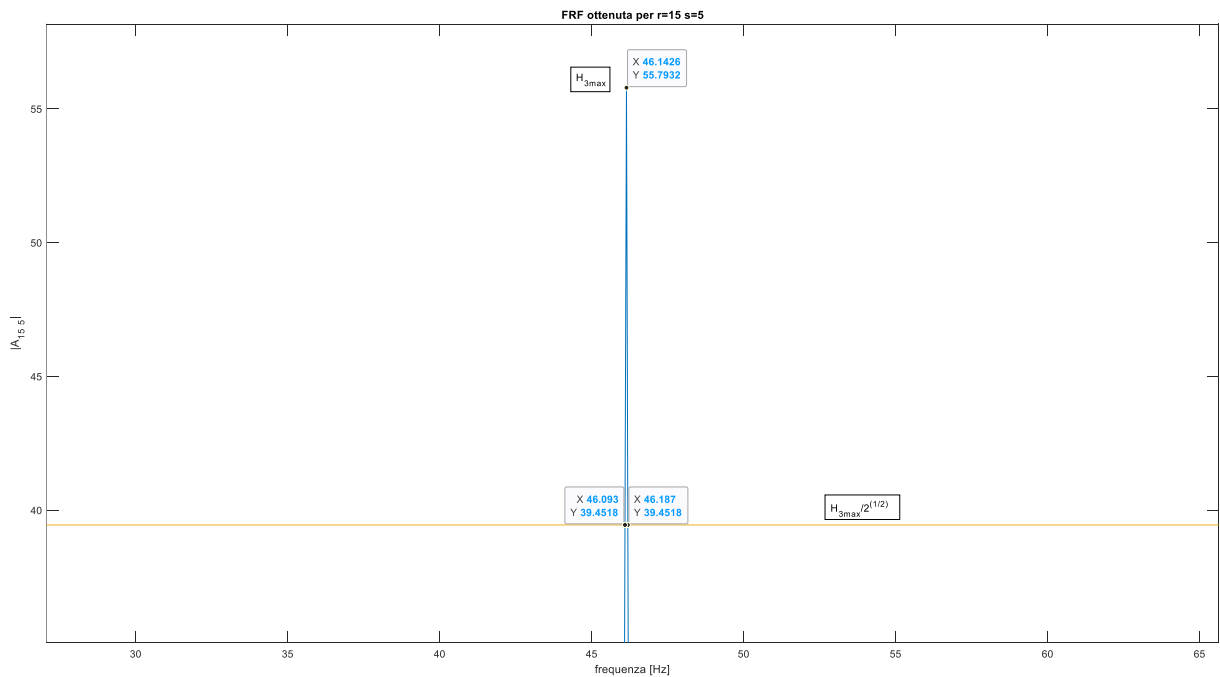
$$\omega_{a_1} = 5,085 \text{ Hz}$$

$$\omega_{b_1} = 5,175 \text{ Hz}$$

Tramite la (3.10) è possibile calcolare l'indice di smorzamento del primo modo  $j = 1$

$$\xi_1 = \frac{\omega_{b_1} - \omega_{a_1}}{2\omega_1} = \frac{5,175 - 5,085}{2 \cdot 5,127} = 0,0088$$

Procedendo analogamente per il terzo modo si ottiene



*Estratto del grafico 3.58 relativo al modo 3*

$$\omega_{a_3} = 5,085\text{Hz}$$

$$\omega_{b_3} = 5,175\text{Hz}$$

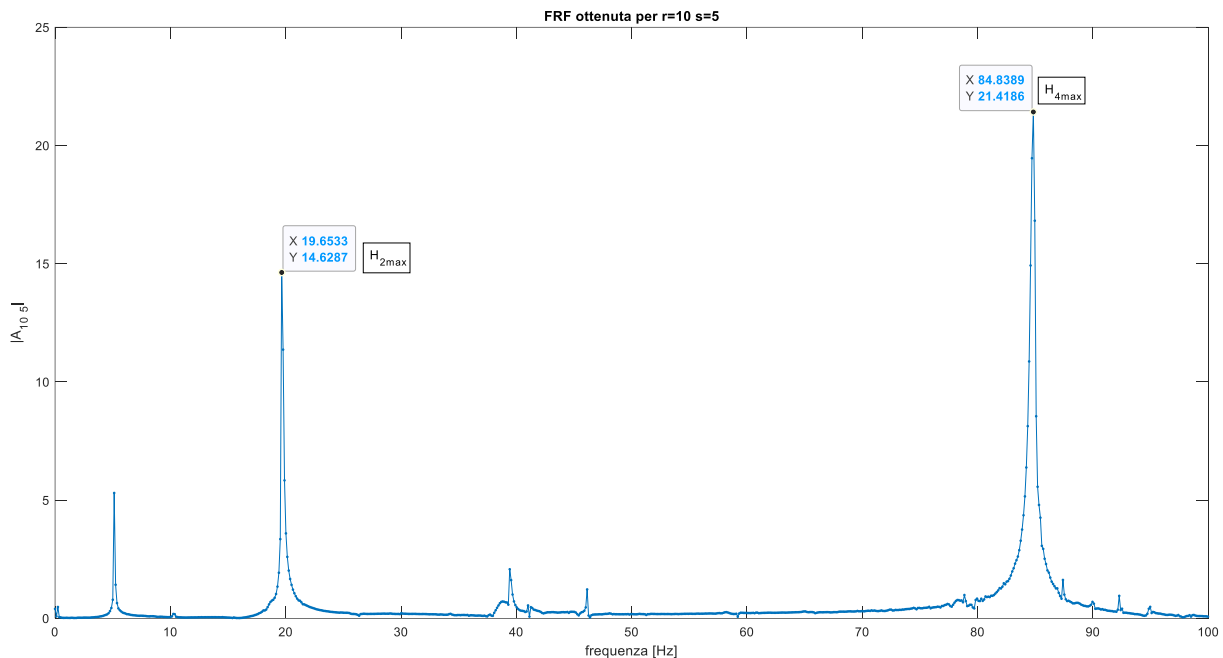
$$\xi_3 = \frac{\omega_{b_3} - \omega_{a_3}}{2\omega_3} = \frac{46,187 - 46,093}{2 \cdot 46,143} = 0,001$$

### Modi 2 e 4

valutando in tal caso il valore assoluto del vettore complesso  $\mathbf{A}_{10\ 5}(\Omega)$ , che permette di identificare i modi di indice pari

$$|\mathbf{A}_{15\ 5}(\Omega)| = \left| \frac{F[\mathbf{a}_{15}(t)]}{F[\mathbf{p}_5(t)]} \right|$$

Seguendo la procedura riportata per i modi 1 e 3 si ottiene



*Grafico 3. 59 Modulo dell'inertanza  $\mathbf{A}_{10\ 5}(\Omega)$  identificazione dei picchi relativi ai primi modi di vibrare*

$$|\mathbf{A}_{10\ 5}(\omega_2)| = A_{2\ max} = 14,63$$

$$|\mathbf{A}_{10\ 5}(\omega_4)| = A_{4\ max} = 21,42$$

I punti di metà potenza saranno collocati in tal caso alle ordinate

$$|\mathbf{A}_{15\ 5}(\omega_{a_2})| = |\mathbf{A}_{15\ 5}(\omega_{b_2})| = \frac{A_{2\ max}}{\sqrt{2}} = \frac{14,63}{\sqrt{2}} = 10,34$$

$$|\mathbf{A}_{15\ 5}(\omega_{a_4})| = |\mathbf{A}_{15\ 5}(\omega_{b_4})| = \frac{A_{4\ max}}{\sqrt{2}} = \frac{21,42}{\sqrt{2}} = 15,15$$

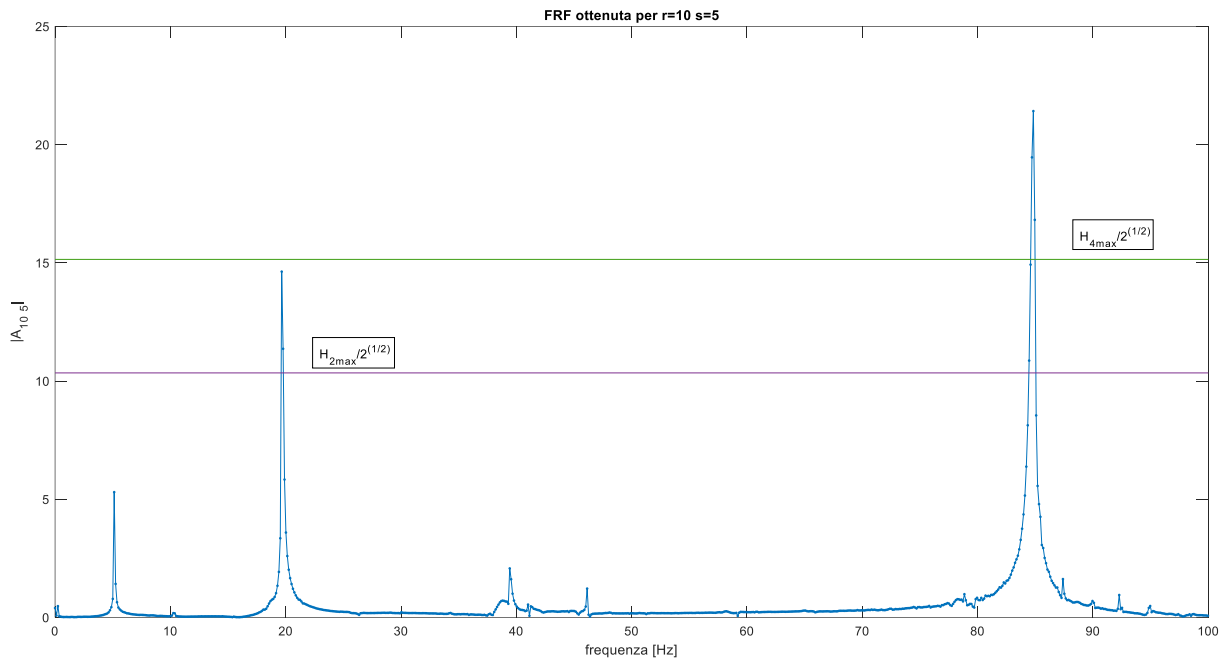
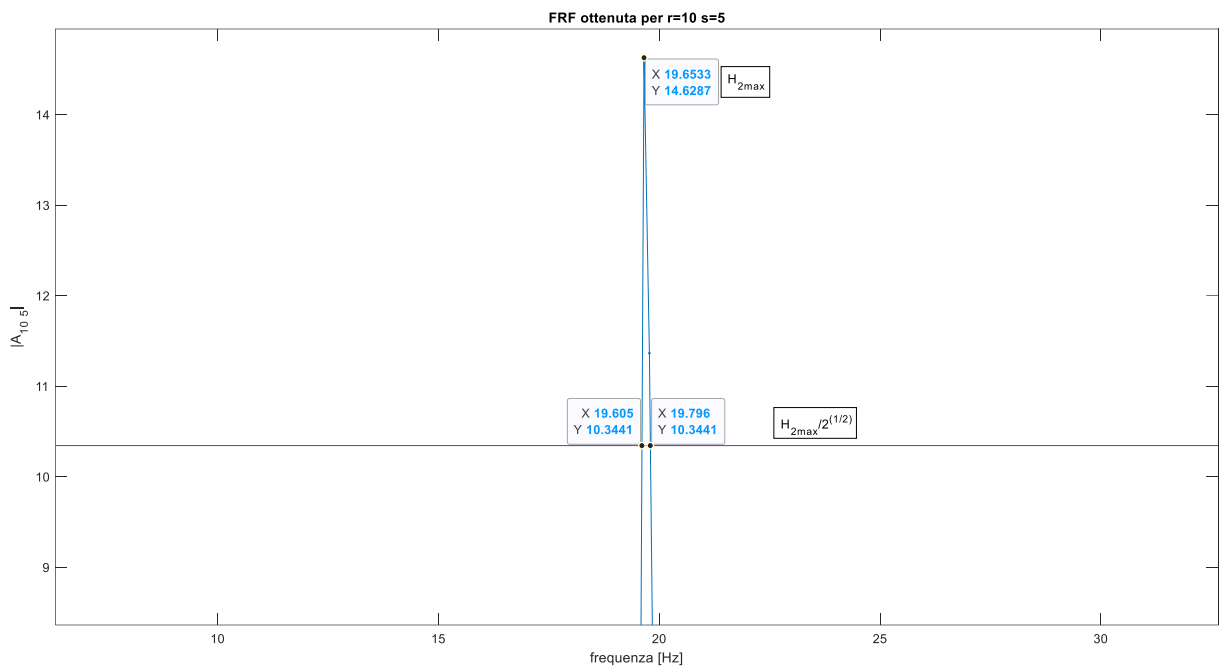


Gráfico 3. 60 Punti di metà potenza dei modi 2 e 4

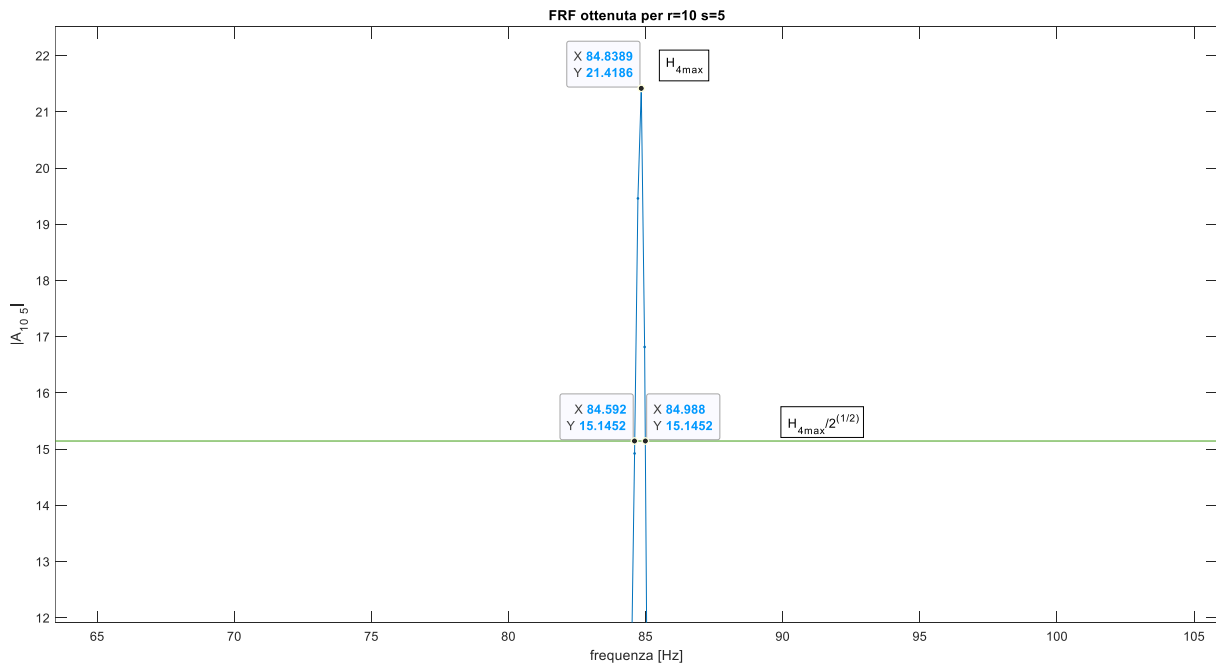


Estratto del gráfico 3.60 relativo al modo 2

$$\omega_{a_2} = 5,085\text{Hz}$$

$$\omega_{b_2} = 5,175\text{Hz}$$

$$\xi_2 = \frac{\omega_{b_2} - \omega_{a_2}}{2\omega_2} = \frac{19,796 - 19,605}{2 \cdot 19,653} = 0,0049$$



Estratto del grafico 3.60 relativo al modo 4

$$\omega_{a_4} = 84,988Hz$$

$$\omega_{b_4} = 84,592Hz$$

$$\xi_4 = \frac{\omega_{b_4} - \omega_{a_4}}{2\omega_4} = \frac{84,988 - 84,592}{2 \cdot 84,839} = 0,0023$$

Riepilogando, gli indici di smorzamento stimati per i primi quattro modi risultano:

$$\xi_1 = 0,0088$$

$$\xi_2 = 0,0049$$

$$\xi_3 = 0,0010$$

$$\xi_4 = 0,0023$$

I risultati ora riportati saranno poi richiamati al successivo §4 relativo alle analisi numeriche effettuate sulla trave per stabilire gli indici di smorzamento da inserire nel modello agli elementi finiti.

### 3.6 Set-up di prova, modalità di irrigidimento locale della trave

L'incremento di rigidità flessionale nella trave è stato realizzato in diverse modalità e non tutte hanno fornito risultati attendibili.

La modalità che ha condotto a risultati sufficientemente soddisfacenti prevede l'applicazione di un magnete alla trave metallica oggetto di studio, in tal modo in una porzione ridotta della trave si va ad incrementare il momento di inerzia della stessa in modo locale con l'obiettivo di identificare, a valle della ricostruzione dei modi per la trave in tale configurazione variata, la posizione corretta dell'irrigidimento.



*Figura 3.22 Applicazione della base magnetica alla trave metallica*

Le dimensioni della base magnetica riportate nella scheda dello strumento in tab.3.5 risultano:

$$b = 40\text{mm}$$

$$l = 48\text{mm}$$

$$h = 52\text{mm}$$

le dimensioni ora elencate si indicano in figura 3.24 sui prospetti fotografici del magnete



Figura 3. 23 Viste prospettive del magnete utilizzato per modificare la configurazione

Si osserva che l'altezza  $h$  riportata nel manuale è riferita all'altezza massima dell'elemento, ai fini del calcolo della variazione di rigidezza introdotta si è valutata un'altezza media pari a

$$h_m = 45mm$$

la base  $b$  è coincidente con quella della trave, l'applicazione del magnete conduce quindi ad una traslazione dell'asse neutro modulata dall'incremento di altezza della sezione, che passa da  $h_t = 20mm$  a  $h_{td} = h_t + h_m = 20 + 45 = 65mm$ .

La base magnetica è comunemente utilizzata per il fissaggio di strumenti per misure di spostamento come riportato in figura 3.25



Figura 3. 24 Comune utilizzo della base magnetica – sostegno per un comparatore meccanico

La superficie magnetica a contatto con la trave risulta aderente in modo continuo alla stessa, il collegamento continuo trave-magnete permette alla configurazione variata trave + magnete di vibrare unitamente se soggetta a forzante

#### Magnetic Bases with Push Button Switch

- Eclipse Magnetics bases can be attached to any ferrous surface to provide a rigid support
- 4 magnetic faces

Product Number	Length mm	Width mm	Height mm	Screw Thread mm	Weight kg	Hold kg
E900WF	48	40	52	M8	0.5	30

Tabella 3. 5 Tabella relativa ai dettagli della base magnetica utilizzata

Dai dati in tabella 3.5 si osserva che il peso dichiarato dal produttore è 500 grammi mentre quello misurato in laboratorio è leggermente superiore, 564 grammi, mentre la tenuta del magnete è pari a 30Kg. Il peso totale della trave, sulla base delle caratteristiche riportate al precedente 2.1.3, risulta pari a:

$$\bar{m} * l = 6,237 * 3 = 18,71 Kg_f$$

il peso della base magnetica corrisponde al 3.01% del peso totale della trave.

Lo strumento ora descritto si è rivelato utile ai fini della validazione sperimentale dell'algoritmo di identificazione in quanto molto versatile, è stato infatti possibile spostare l'irrigidimento simulato in diverse porzioni della trave, cosa che non sarebbe stata possibile se si fosse danneggiata la trave portandola in una configurazione non reversibile.

### **3.7 Identificazione sperimentale della variazione di rigidezza**

Le indagini che hanno condotto ai risultati riportati nel presente paragrafo sono state effettuate in seguito ad un test numerico dell'algoritmo di identificazione realizzato tramite un modello FEM che simula la configurazione variata tramite magnete. La modalità di elaborazione è stata quindi prima validata su dati simulati e poi utilizzata sui dati sperimentali.

Le indagini sperimentali mirate all'identificazione del danno sono riassumibili tramite i seguenti step;

Prima dello svolgimento della prova:

1. Scelta dei parametri tramite i quali acquisire le battute da effettuare sulla configurazione variata
2. Scelta della posizione in cui inserire la variazione di rigidezza

Ad acquisizioni ottenute si correlano i dati ottenuti con quelli ricavati, tramite gli stessi parametri, per la configurazione intatta

3. Stima dei modi di vibrare per la trave modificata, effettuata con le modalità esposte al precedente 3.4
4. Calcolo delle curvature modali per la configurazione intatta e variata stimando la derivata tramite differenze centrali con la relazione (2.6.2) introdotta al precedente paragrafo 2.6 e normalizzazione delle curvature ottenute per ogni modo
5. Calcolo della differenza assoluta tra le curvature intatte e danneggiate per i modi che si intende considerare nella procedura di identificazione dell'irrigidimento come espresso dalla (2.6.3)

## 6. Calcolo del parametro CDF “Curvature Damage Factor” tramite la relazione (2.6.4)

Tramite questi passi è possibile conoscere il parametro sul quale si basa l’algoritmo di identificazione, seguendo la sequenza ora esposta si riportano i risultati ottenuti.

### Step 1 - Scelta dei parametri

Si riporta la tabella 3.2 introdotta al precedente 3.2.1 nella quale si evidenziano i set di parametri selezionati per effettuare l’identificazione sperimentale della variazione di rigidità flessionale

$N_{DOF}$	Indagini	$f_s$ [Hz]	$N_p$ [/]	$f_{min}$ [Hz]	$T_{tot}$ [s]
15	1	2000	4096	0,488	2,048
	2	2000	8192	0,244	4,096
	3	1000	8192	0,122	8,192
30	4	1000	8192	0,122	8,192
	5	2000	20000	0,100	10,000

*Tabella 3. 6 Resoconto delle indagini sperimentali selezionate – in verde si evidenziano i set di parametri utilizzati per l’identificazione dell’irrigidimento locale*

### Step 2 - Scelta della posizione in cui inserire la variazione di rigidità

Come anticipato per poter validare il funzionamento sperimentale dell’algoritmo di identificazione si è scelto di posizionare la base magnetica in diversi campi della trave di laboratorio.

Si osserva che la lunghezza  $l$  della base magnetica risulta circa pari a 5cm, i campi in cui si è suddivisa metà della trave tramite le discretizzazioni a 15 e 30 DOF sono rispettivamente di lunghezza pari a 10 e 5 cm, questo ha agevolato l’esecuzione della prova di laboratorio ed anche la simulazione numerica riportata al successivo §4 in quanto nel primo caso è stato sufficiente posizionare il magnete a metà del campo di interesse mentre nel secondo, riscontrando la coincidenza tra dimensione del campo di trave e lunghezza del magnete, si è posizionato precisamente nel campo di interesse.

Di seguito si riporta uno schema nel quale si indicano le posizioni provate (fig. 3.25, 3.26), per rendere più comoda l’esposizione dei risultati ottenuti e per collegare quanto ora riportato alle simulazioni FEM delle prove di laboratorio nelle schematizzazioni viene introdotta una numerazione che fa esplicito riferimento ai nodi del modello FEM la quale risulta semplicemente scalata in quanto il punto all’appoggio viene considerato. Nelle figure 3.25 e 3.26 si indica campo in verde il magnete ed in rosso gli accelerometri:



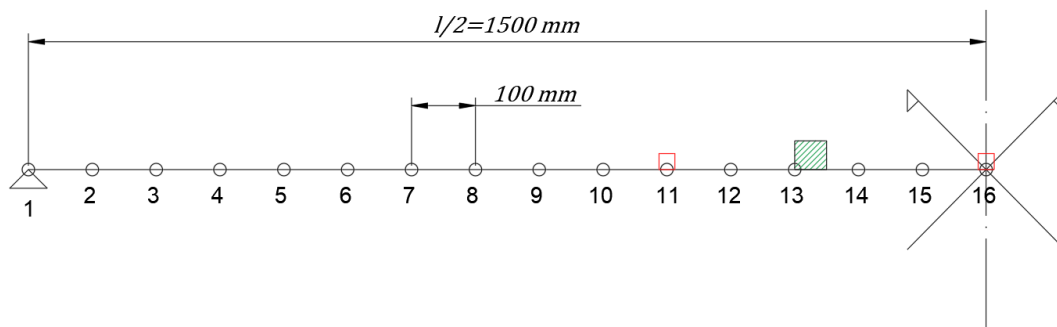


Figura 3. 25 Set-up di prova Indagine1 –configurazione a 15 DOF - irrigidimento inserito tra i nodi 13 e nodo 14

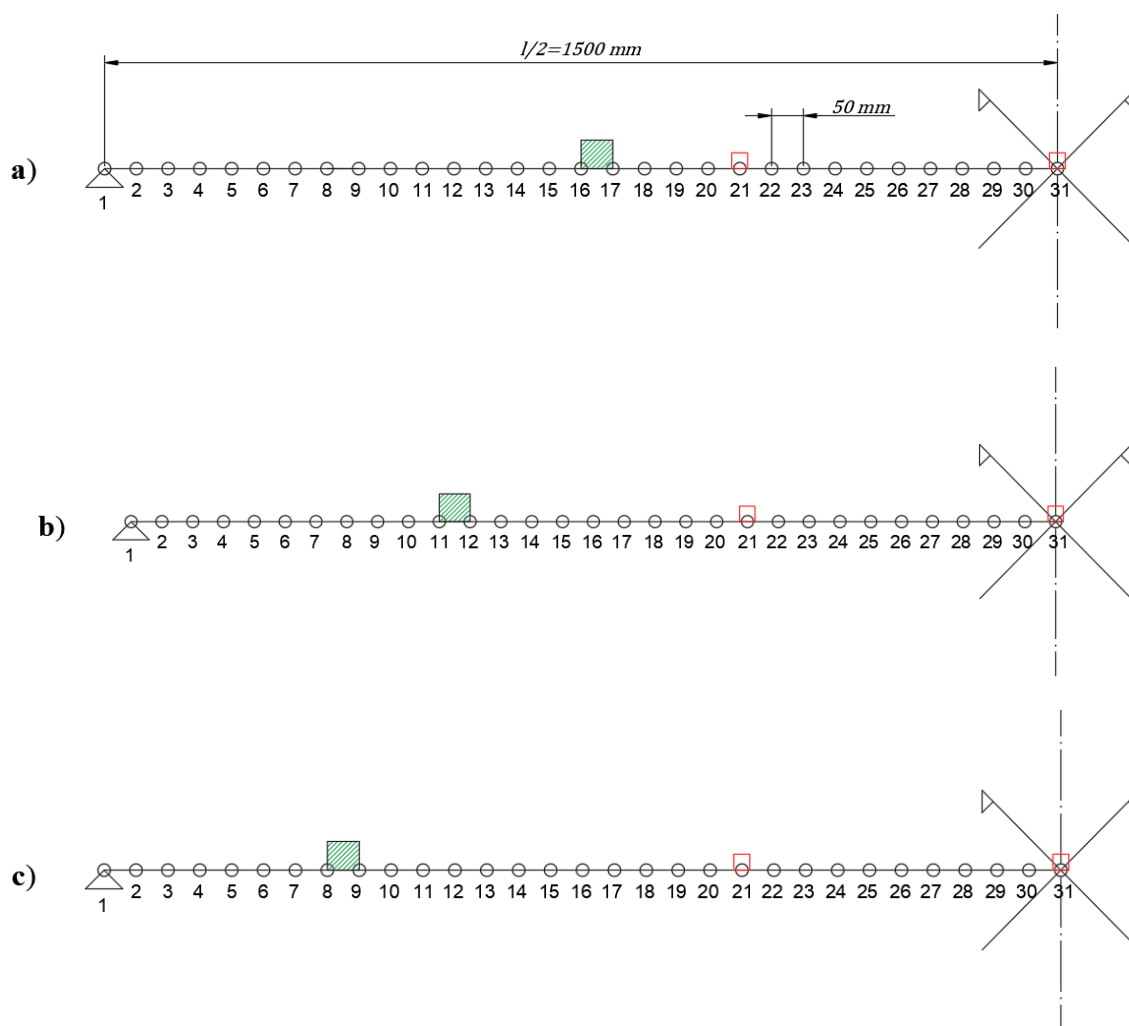


Figura 3. 26 Set-up di prova Indagini 4 e 5 – configurazione a 30 DOF - irrigidimento inserito tra i nodi a) 16-17; b) 11-12; c) 8-9

nella precedente figura 3.22 si può osservare un riferimento fotografico relativo alla schematizzazione di fig.3.25. mentre con riferimento alla schematizzazione 3.26, in ordine analogo, i riferimenti si riportano di seguito (figura 3.27)

a)



b)



c)



*Figura 3. 27 Riferimento fotografico al set-up di prova, Indagini 4 e 5 – configurazione a 30 DOF - irrigidimento inserito tra i nodi a) 16-17; b) 11-12; c) 8-9*

L'algoritmo di identificazione, come introdotto al precedente 2.6, si basa sul calcolo delle curvature dei modi di vibrare rilevati per la configurazione intatta e variata, ne consegue che quanto maggiore è l'accuratezza nella descrizione delle forme modali tanto più l'esito dell'identificazione rispecchierà le attese

Si procede nei successivi 3.7.1 3.7.2 3.7.3 riportando gli step successivi contestualmente ad ognuna delle indagini selezionate (tab.3.6), di seguito si riportano gli step comuni ai passaggi che poi si specializzano per l'esposizione dei risultati.

### Step 3 - Stima dei modi di vibrare per la trave modificata

I grafici che rappresentano le forme modali per la trave vengono graficate nel piano e riportano lungo gli assi le grandezze seguenti:

- Asse **x**: discretizzazione della trave nello spazio, vincolo di appoggio nel nodo 1 e mezzeria nel nodo 16
- Asse **y**: parte immaginaria delle funzioni di risposta in frequenza denominate alla precedente (3.7)  $A1_I$  ed  $A2_I$

Le forme modali per la trave intatta sono quelle già presentate nei grafici a cascata riportati al precedente 3.4.

A fronte dei risultati ottenuti per le varie indagini si evince che considerando fino al settimo modo di vibrare per la trave il risultato in termini di identificazione della variazione di rigidità si degrada, i modi di interesse e considerati nei risultati di seguito riportati sono i primi quattro.

### Step 4 - Calcolo delle curvature modali

Si riporta nuovamente l'espressione (2.6.2) utilizzata per stimare la curvatura tramite differenze centrali del secondo ordine

$$(v''_i)_n = ((v_{i+1})_n - 2(v_i)_n + (v_{i-1})_n)/h^2$$

Si osserva che per stimare la curvatura sono necessarie informazioni al passo precedente e successivo, la curvatura relativa ai nodi estremi alle discretizzazioni con riferimento alle schematizzazioni riportate in figura 3.26 non vengono calcolate.

Le curvature determinate vengono poi normalizzate al fine di pesare alla stessa maniera il contributo fornito dai singoli modi considerati.

Si riportano di seguito le relazioni già introdotte al precedente capitolo 2.6 relativamente al calcolo dei parametri che permettono di identificare la variazione di rigidità introdotta nella configurazione:

#### Step 5 - Calcolo della differenza assoluta tra le curvature

$$d_n = |(v''_o)_n - (v''_V)_n|$$

#### Step 6 - Calcolo del parametro CDF "Curvature Damage Factor"

$$CDF_i = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |(v''_o)_n - (v''_V)_n|$$

L'esposizione dei risultati ai fini dell'identificazione dell'irrigidimento per le indagini trattate si concretizza con:

- Rappresentazione della *differenza assoluta tra le curvature modali* per la configurazione intatta e variata ottenute allo Step 5 per i modi di vibrare considerati, esposta con:
  - Grafico a cascata che riporta lungo gli assi:
    - Asse **x**: indici di modo;
    - Asse **y**: discretizzazione della trave nello spazio, vincolo di appoggio nel nodo 1 e mezzeria nel nodo 16;
    - Asse **z**: differenze assolute  $d_n$  tra le curvature modali normalizzate, anche denominate MC ad indicare Modal Curvatures, calcolate per trave in configurazione iniziale e variata.
  - Rappresentazione nel piano xy
    - Asse **x**: discretizzazione della trave nello spazio, vincolo di appoggio nel nodo 1 e mezzeria nel nodo 16;
    - Asse **y**: differenze assolute  $d_n$ .
- Rappresentazione del parametro *Curvature Damage Factor CDF* graficato nel piano xy
  - Asse **x**: discretizzazione della trave nello spazio, vincolo di appoggio nel nodo 1 e mezzeria nel nodo 16;
  - Asse **y**: media delle differenze assolute estesa ai modi indagati a parità di nodo che discretizza la trave, CDF.

Per quanto osservato in precedenza lungo l'asse x delle rappresentazioni ora elencate si esclude il nodo 16, relativamente al quale non si hanno sufficienti informazioni per il calcolo della curvatura.

### 3.7.1 Indagine 1

#### Risultati ricavati da forme modali ottenute tramite stima diretta delle FRF

Le forme modali per la trave intatta si riportano nel grafico 3.7.1 mentre nel grafico 3.7.2 si riportano le forme modali per la trave in configurazione variata a seguito dell'applicazione del magnete tra i nodi 13 e 14 come precedentemente schematizzato in figura 3.25.

#### Forme modali rilevate per la configurazione iniziale e variata

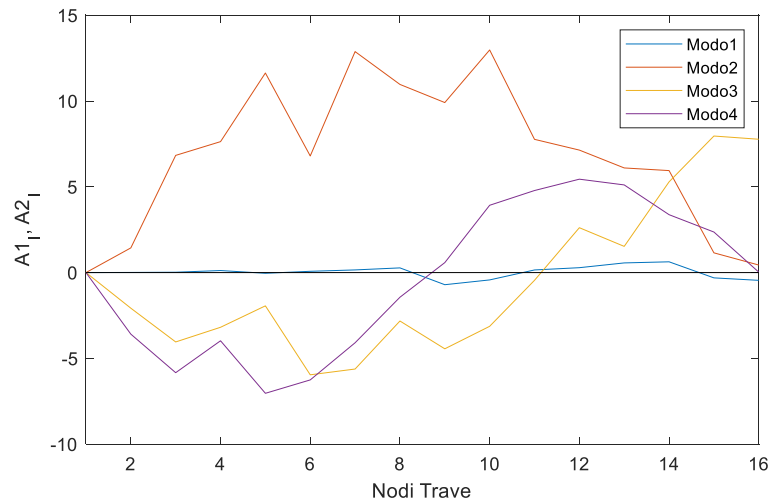


Grafico 3.7. 1 Indagine 1 -\_Forme modali relative a metà trave rilevate con stima diretta delle FRF per la configurazione iniziale - discretizzazione a 15 DOFs

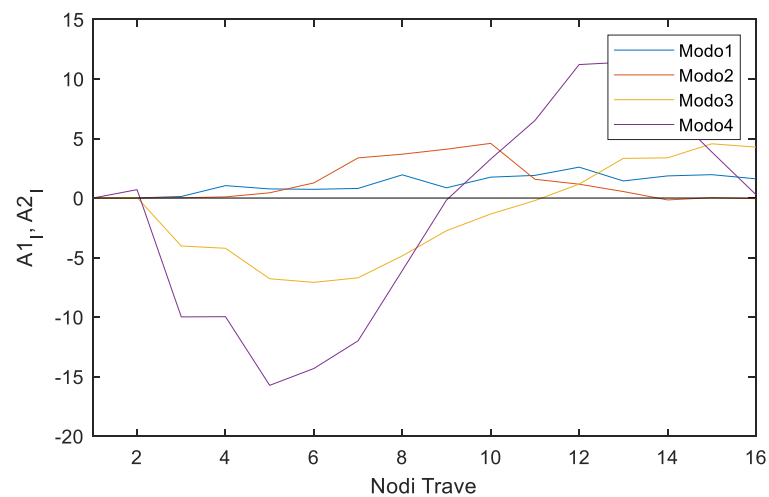


Grafico 3.7. 2 Indagine 1 -\_Forme modali relative a metà trave rilevate con stima diretta delle FRF per la configurazione variata - discretizzazione a 15 DOFs – variazione tra i nodi 13-14

## Differenza assoluta tra le curvatures

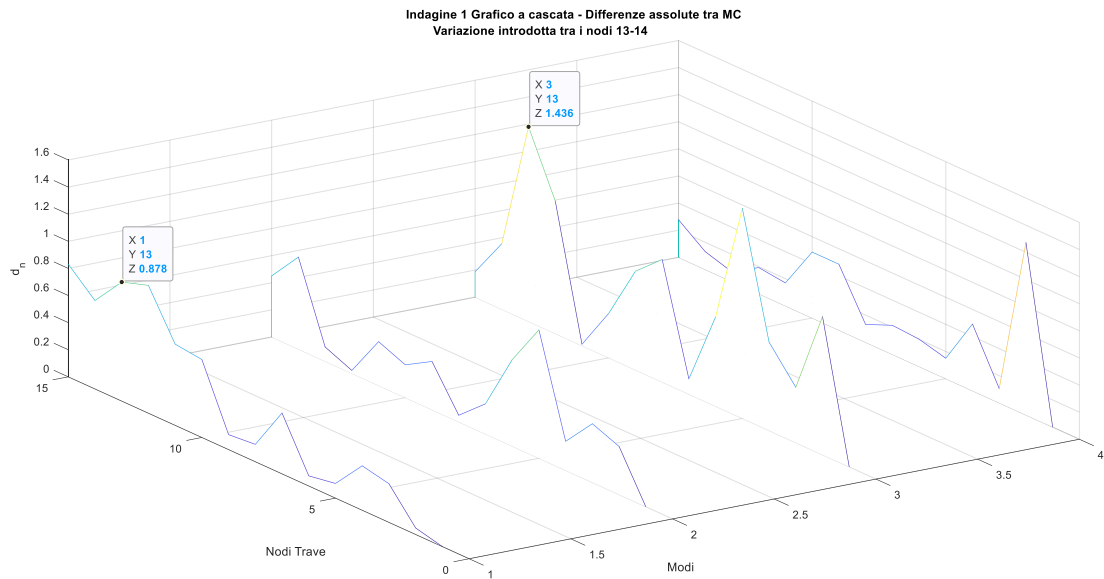
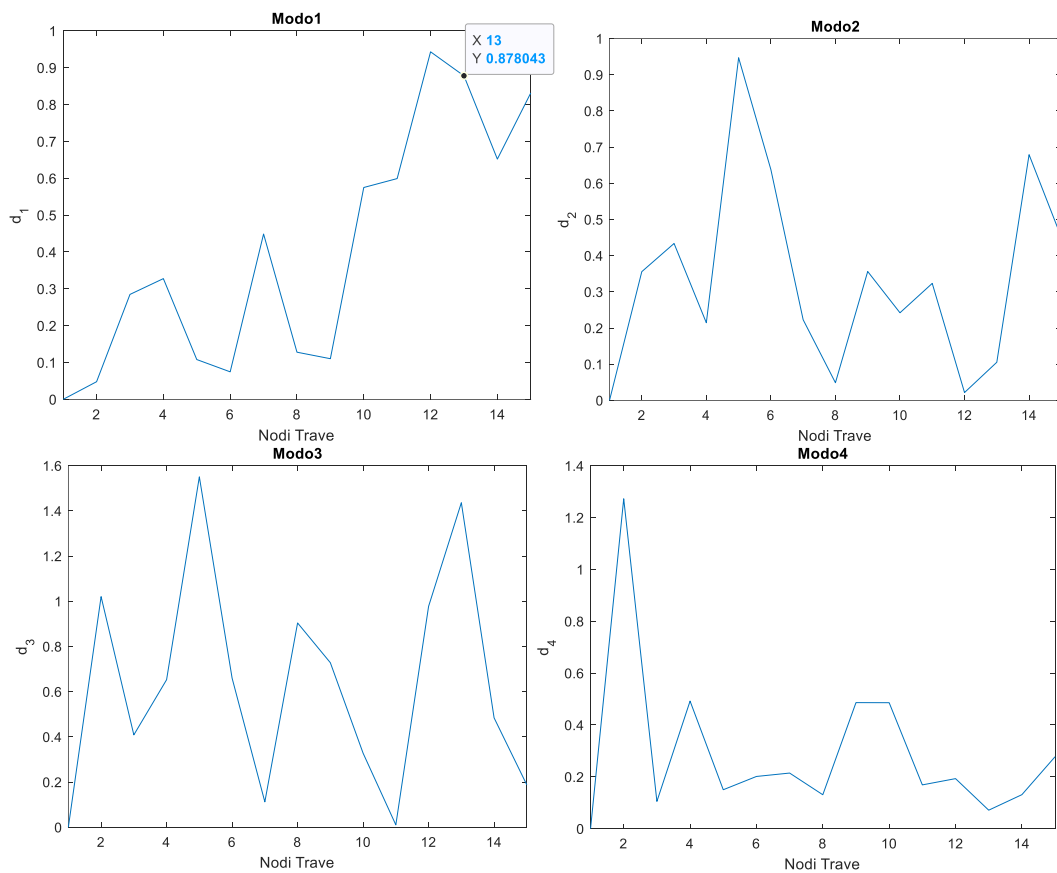


Grafico 3.7. 3 Indagine 1 -Differenze assolute tra le curvatures modali di metà trave valutate in configurazione iniziale e variata con stima diretta delle FRF, discretizzazione a 15 DOFs – variazione tra i nodi 13-14



Grafici 3.7. 4 Indagine 1 -dettaglio del grafico 3.7.3 - Differenze assolute tra le curvatures modali di metà trave in configurazione iniziale e variata con stima diretta delle FRF, discretizzazione a 15 DOFs – variazione tra i nodi 13-14

### Curvature Damage Factor

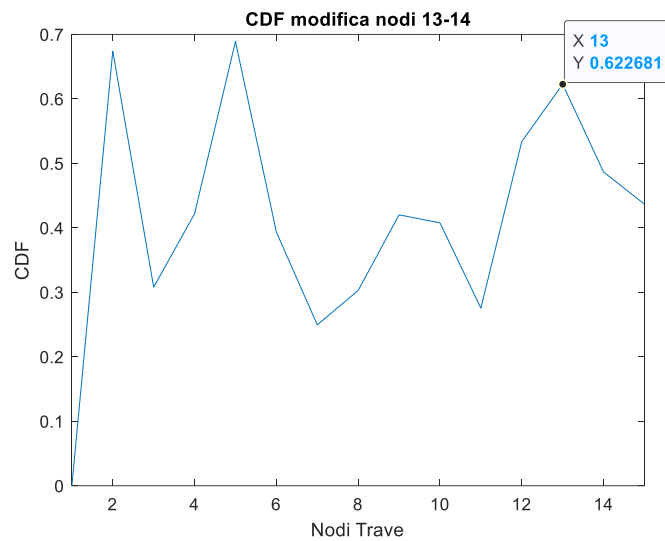


Grafico 3.7. 5 Indagine 1 – Curvature Damage Factor (CDF) per metà trave discretizzata con 15 DOFs - stima diretta delle FRF - variazione tra i nodi 13-14

### **Risultati ricavati da forme modali ottenute tramite stima delle FRF con CPSD**

#### Forme modali rilevate per la configurazione iniziale e variata

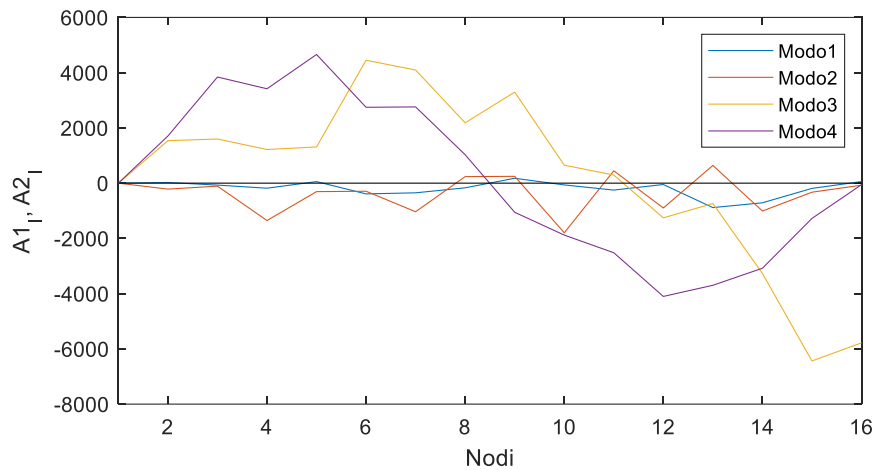


Grafico 3.7. 6 Indagine 1 -\_Forme modali relative a metà trave rilevate con stima delle FRF tramite CPSD per la configurazione iniziale - discretizzazione a 15 DOFs – variazione tra i nodi 13-14

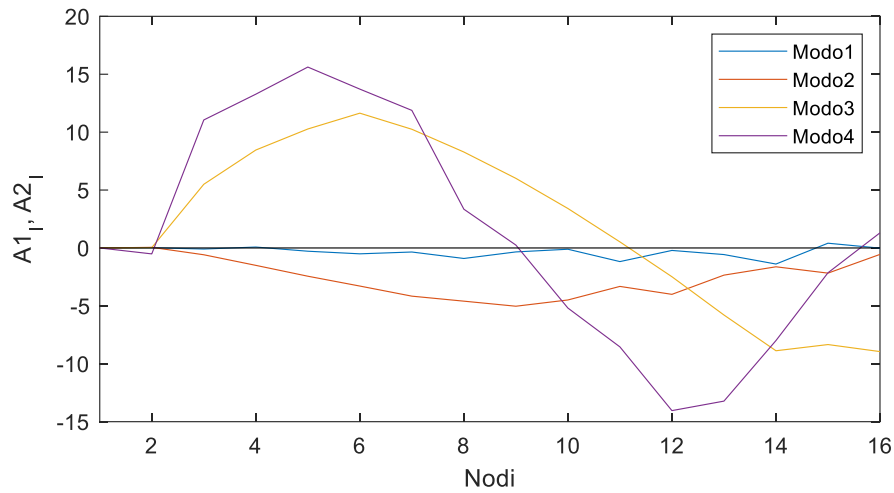


Grafico 3.7. 7 Indagine 1 -\_Forme modali relative a metà trave rilevate con stima delle FRF tramite CPSD per la configurazione variata - discretizzazione a 15 DOFs – variazione tra i nodi 13-14

Differenza assoluta tra le curvature

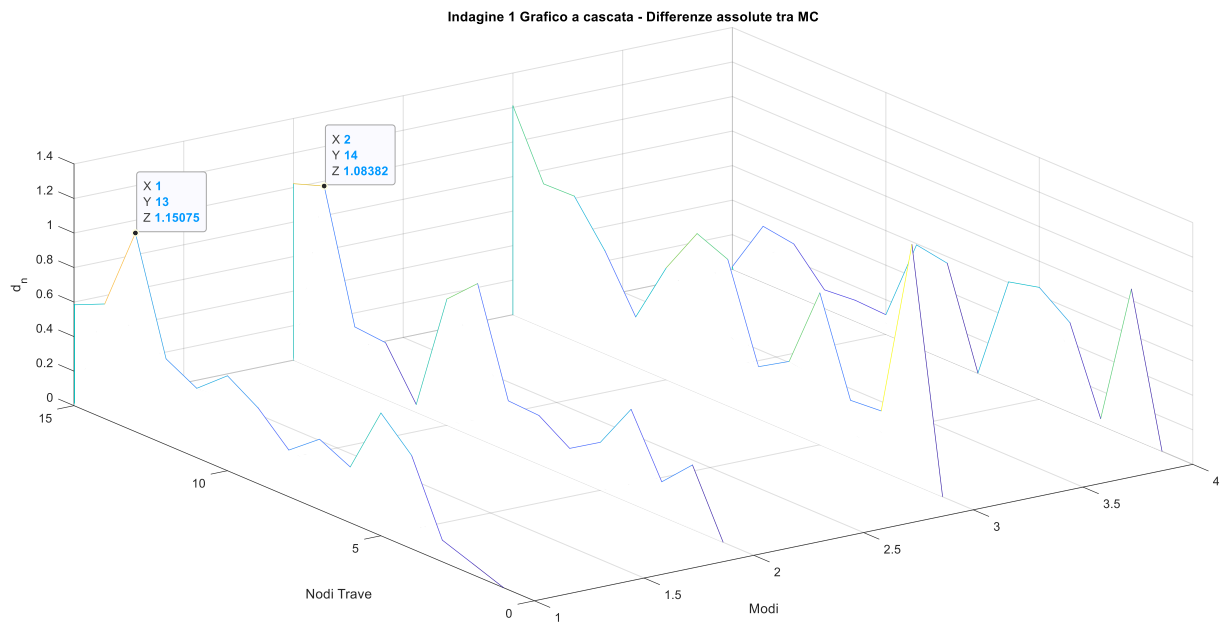


Grafico 3.7. 8 Indagine 1 -\_Differenze assolute tra le curvature modali di metà trave valutate in configurazione iniziale e variata con stima delle FRF tramite CPSD, discretizzazione a 15 DOFs – variazione tra i nodi 13-14



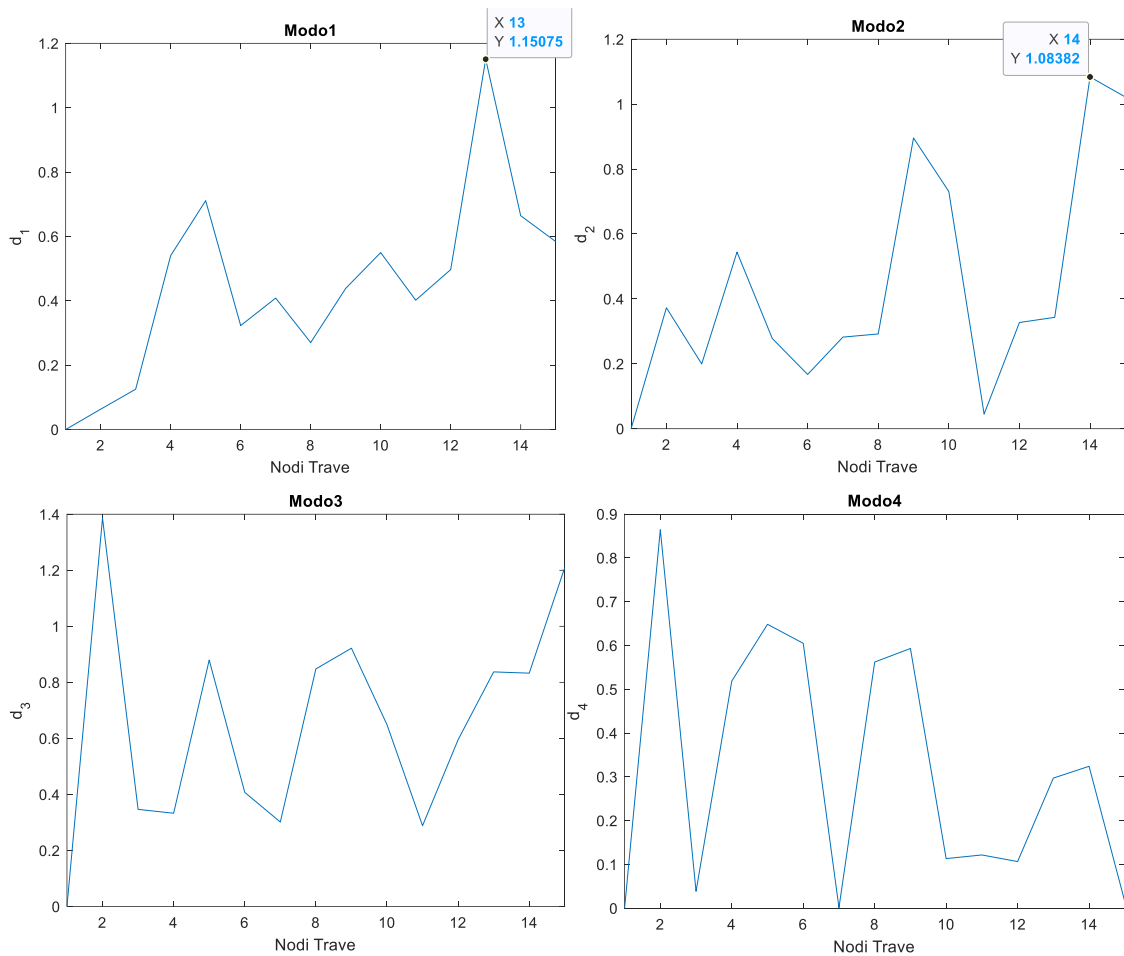


Grafico 3.7. 9 Indagine 1 – Dettaglio del grafico 3.7.8 -Differenze assolute tra le curvatures modali di metà trave valutate in configurazione iniziale e variata con stima delle FRF tramite CPSD, discretizzazione a 15 DOFs – variazione tra i nodi 13-14

### Curvature Damage Factor

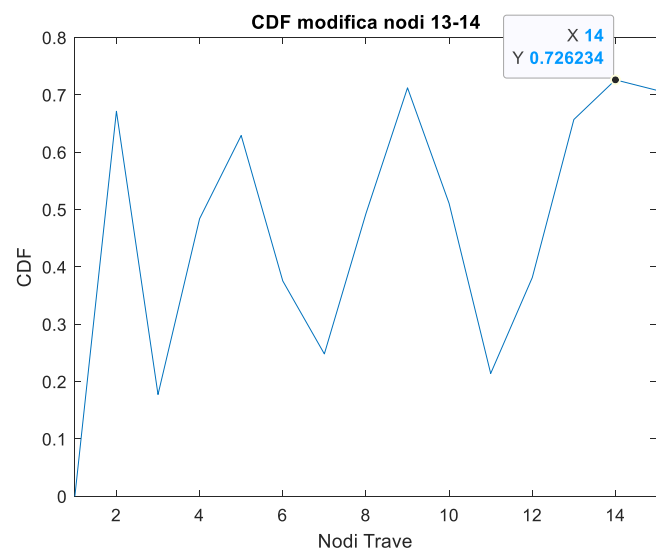
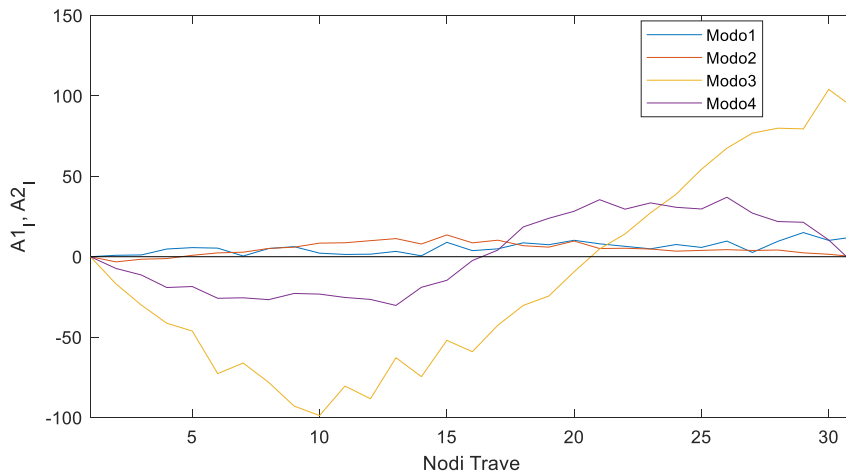


Grafico 3.7. 10 Indagine 1 – Curvature Damage Factor (CDF) per metà trave discretizzata con 15 DOFs - stima delle FRF con CPSD - variazione tra i nodi 13-14

### 3.7.2 Indagine 4

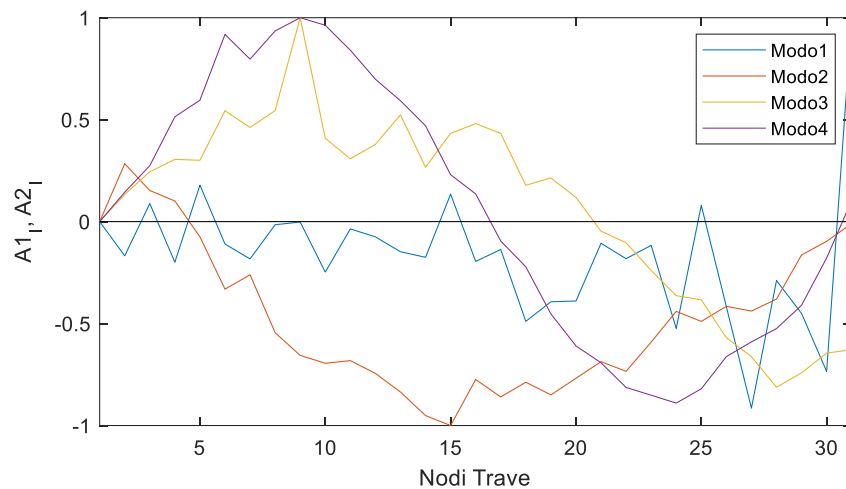
Forme modali rilevate per la configurazione iniziale:

**tramite stima diretta delle FRF**



*Grafico 3.7. 11 Indagine 4 -\_Forme modali relative a metà trave rilevate con stima delle FRF per la configurazione iniziale con discretizzazione a 30 DOFs*

**tramite stima delle FRF con CPSD**



*Grafico 3.7. 12 Indagine 4 -\_Forme modali relative a metà trave rilevate con stima delle FRF tramite CPSD per la configurazione iniziale con discretizzazione a 30 DOFs*

Nel grafico 3.7.12 è risultato necessario rappresentare le forme modali normalizzate al fine di riconoscerne graficamente gli andamenti.

### 3.7.2.1 Variazione a) Nodi 16-17

Risultati ricavati da forme modali ottenute tramite stima diretta delle FRF

Forme modali rilevate per la configurazione variata

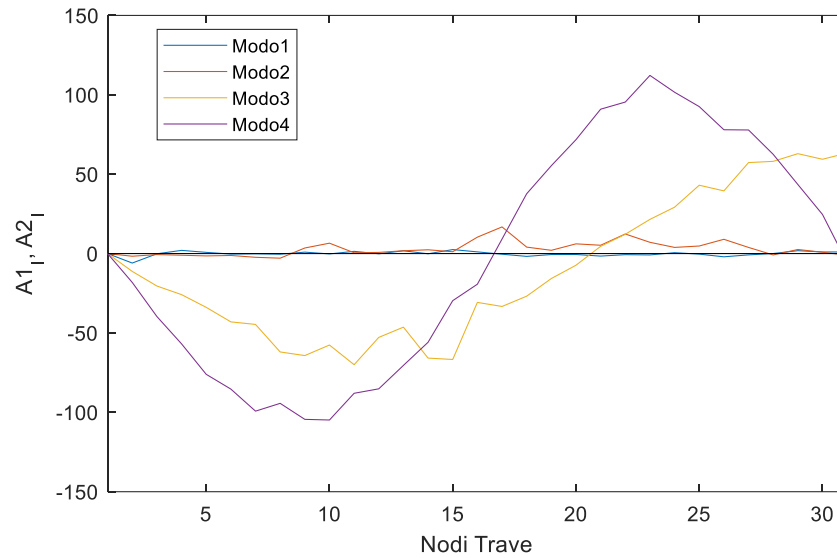


Grafico 3.7. 13 Indagine 4 - *Forme modali relative a metà trave rilevate con stima diretta delle FRF per la configurazione variata - discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 16-17*

Differenza assoluta tra le curvature

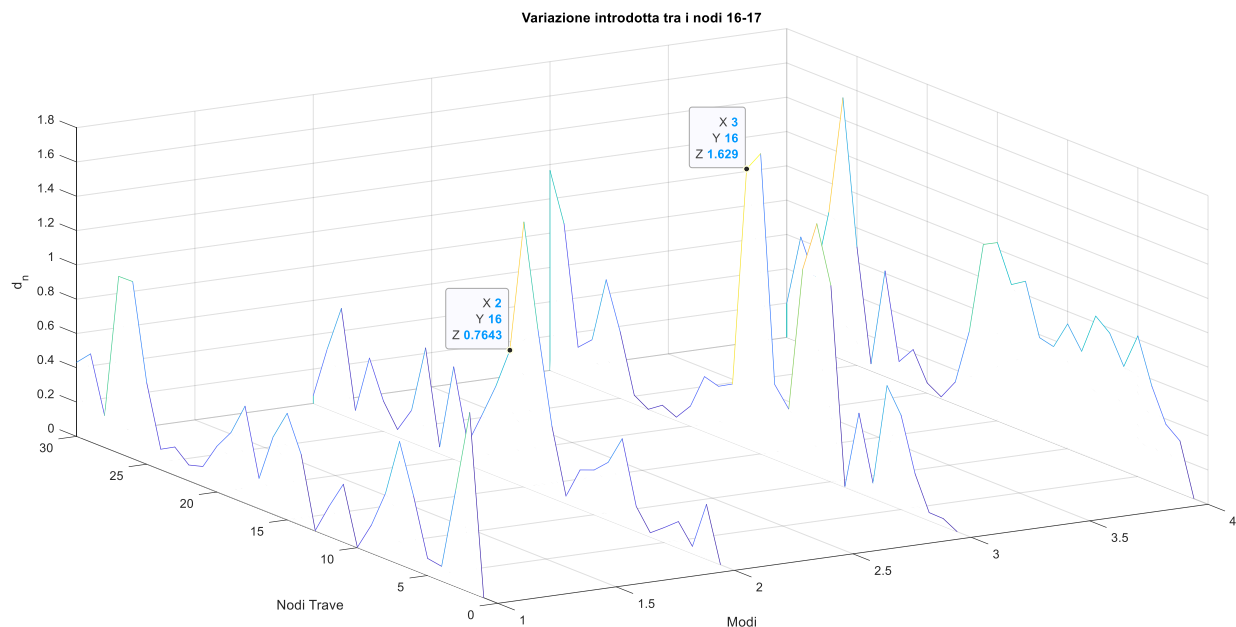


Grafico 3.7. 14 Indagine 4 - *Differenze assolute tra le curvature modali di metà trave valutate in configurazione iniziale e variata con stima diretta delle FRF, discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 16-17*

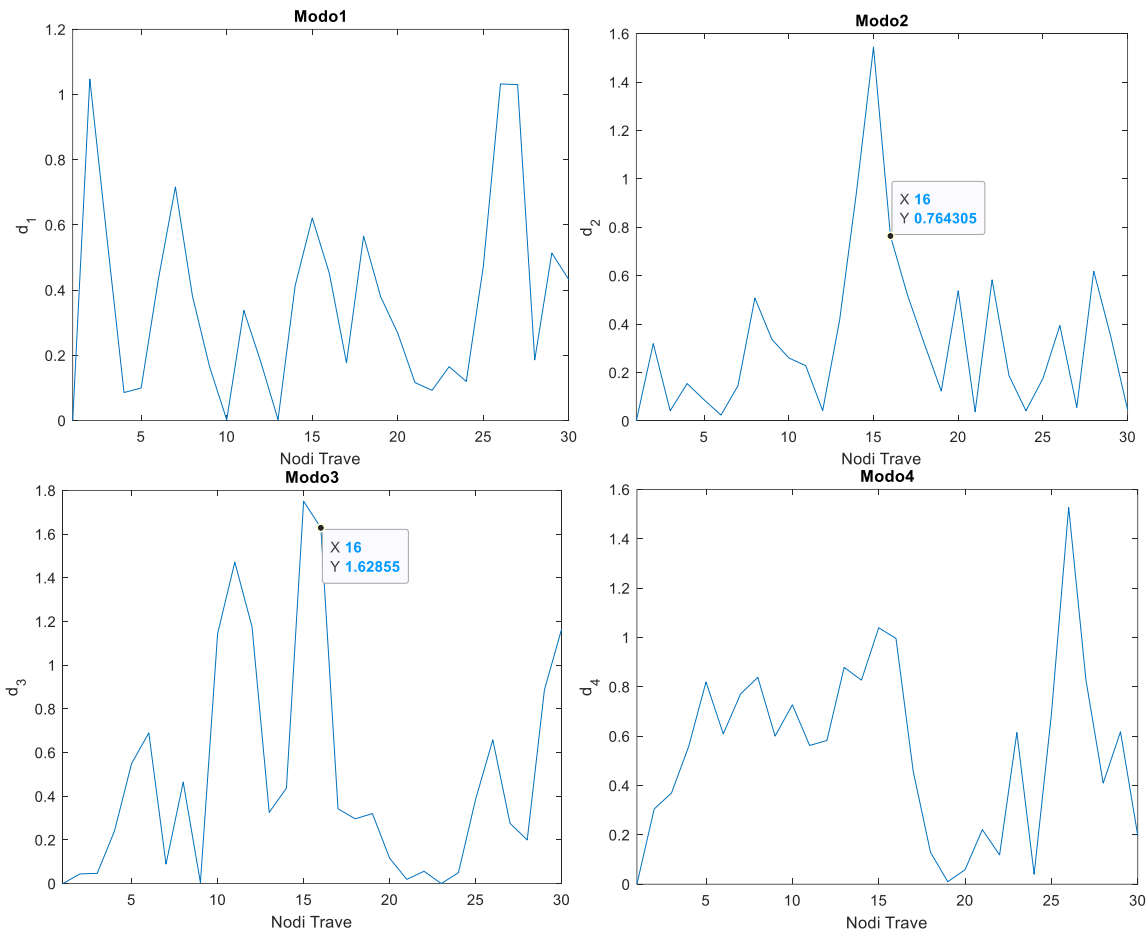


Grafico 3.7. 15 Indagine 4 -dettaglio del grafico 3.7.14 - Differenze assolute tra le curvature modali di metà trave in configurazione iniziale e variata con stima diretta delle FRF, discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 16-17

### Curvature Damage Factor

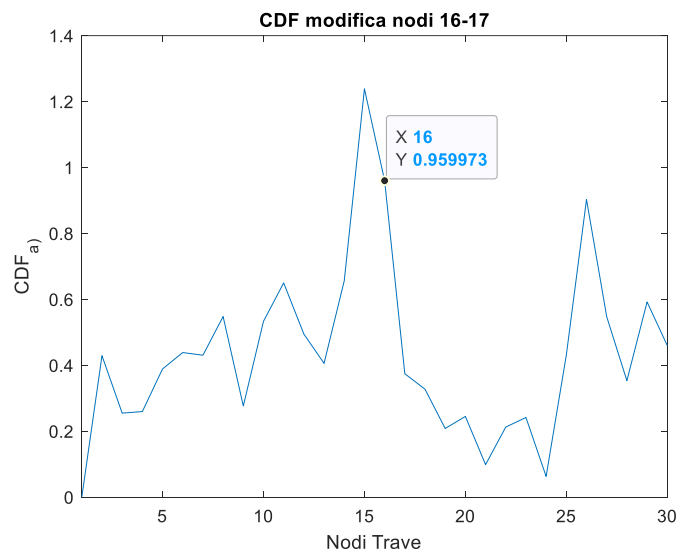


Grafico 3.7. 16 Indagine 4 – Curvature Damage Factor (CDF) per metà trave discretizzata con 30 DOFs - stima diretta delle FRF - variazione tra i nodi 16-17

## Risultati ricavati da forme modali ottenute tramite stima delle FRF con CPSD

### Forme modali rilevate per la configurazione iniziale e variata

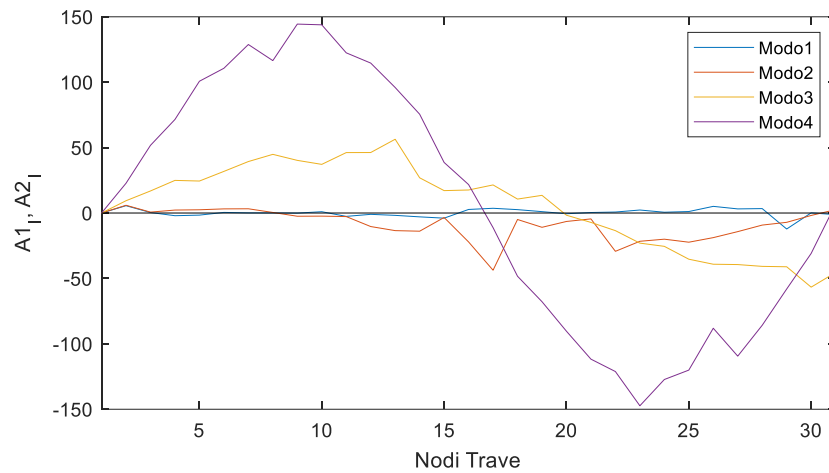


Grafico 3.7. 17 Indagine 4 - Forme modali relative a metà trave rilevate con stima delle FRF tramite CPSD per la configurazione variata - discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 16-17

### Differenza assoluta tra le curvature

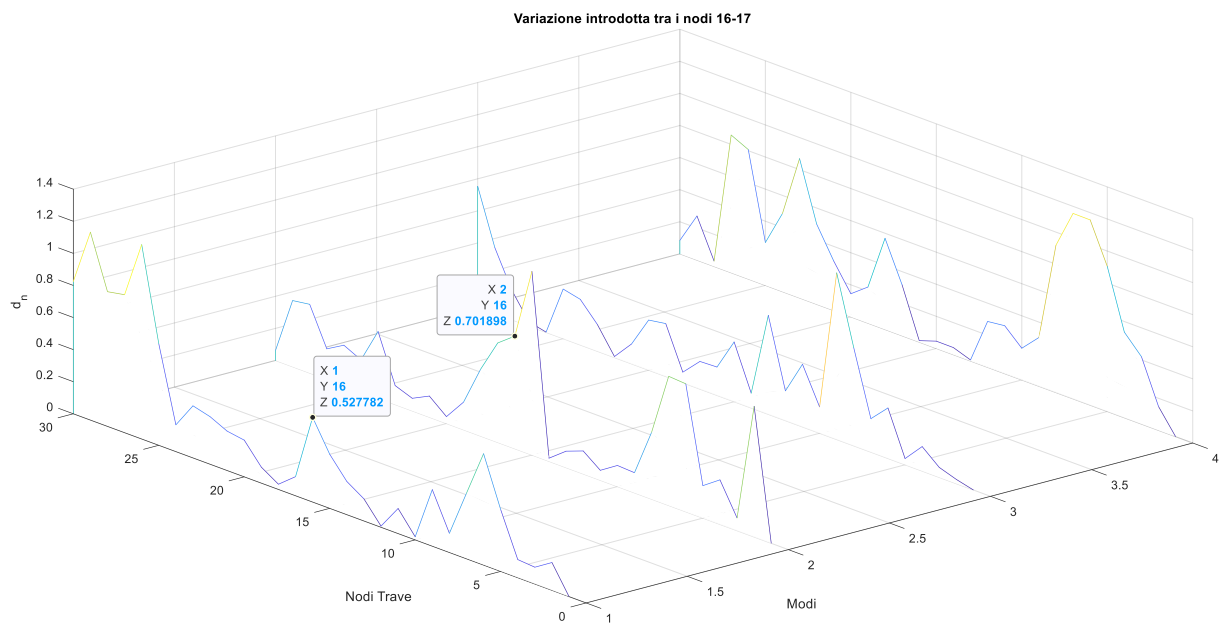


Grafico 3.7. 18 Indagine 4 - Differenze assolute tra le curvature modali di metà trave valutate in configurazione iniziale e variata con stima delle FRF tramite CPSD, discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 16-17

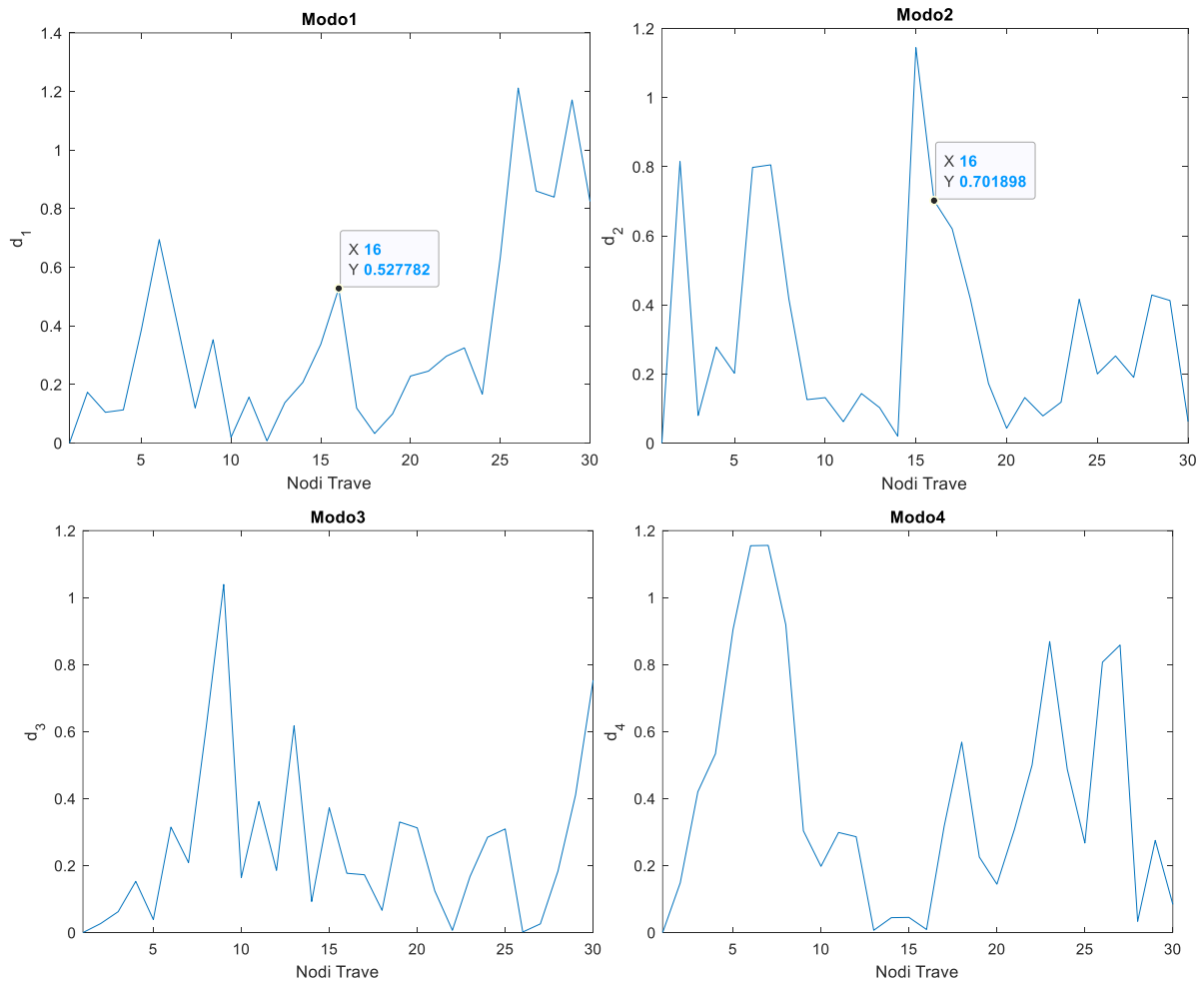


Grafico 3.7. 19 Indagine 4 – Dettaglio grafico 3.7.18 - Differenze assolute tra le curvatures modali di metà trave valutate in configurazione iniziale e variata con stima delle FRF tramite CPSD, discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 16-17

### Curvature Damage Factor

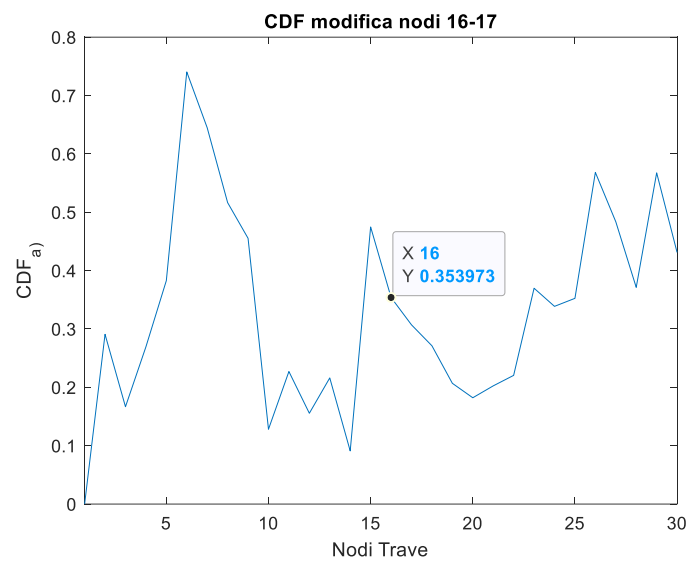


Grafico 3.7. 20 Indagine 4 – Curvature Damage Factor (CDF) per metà trave discretizzata con 30 DOFs - stima delle FRF con CPSD - variazione tra i nodi 16-17

### 3.7.2.2 Variazione b) Nodi 11-12

Risultati ricavati da forme modali ottenute tramite stima diretta delle FRF

#### Forme modali rilevate per la configurazione variata

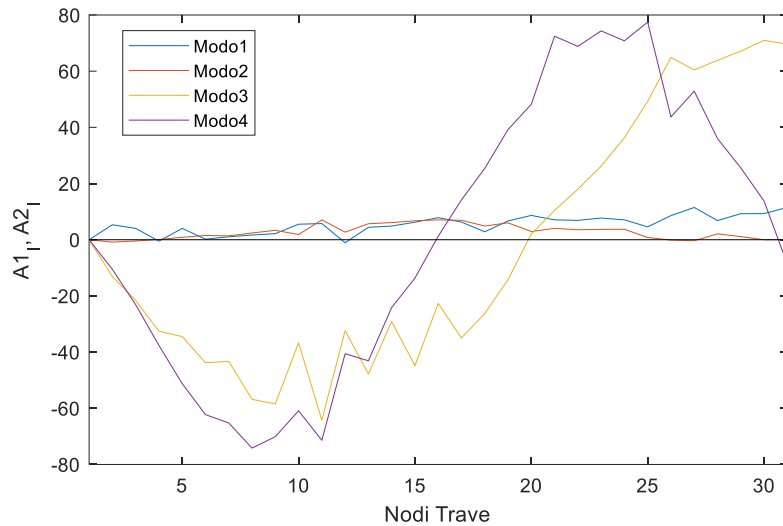


Grafico 3.7. 21 Indagine 4 -\_Forme modali relative a metà trave rilevate con stima diretta delle FRF per la configurazione variata - discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 11-12

#### Differenza assoluta tra le curvature

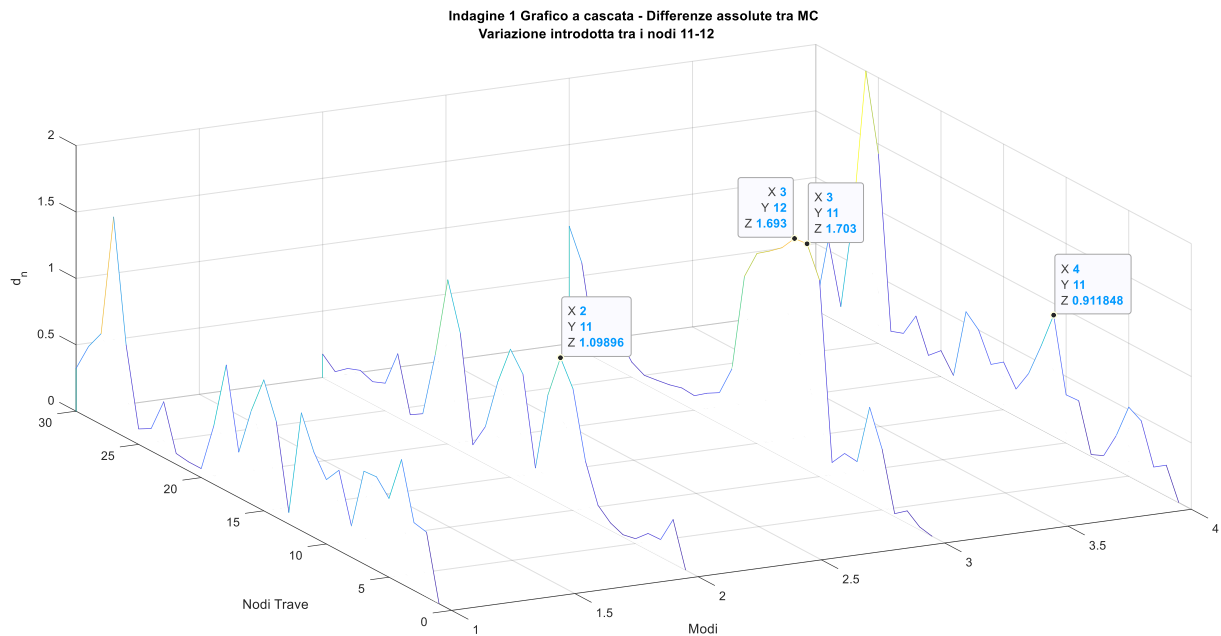


Grafico 3.7. 22 Indagine 4 -\_Differenze assolute tra le curvature modali di metà trave valutate in configurazione iniziale e variata con stima diretta delle FRF, discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 11-12

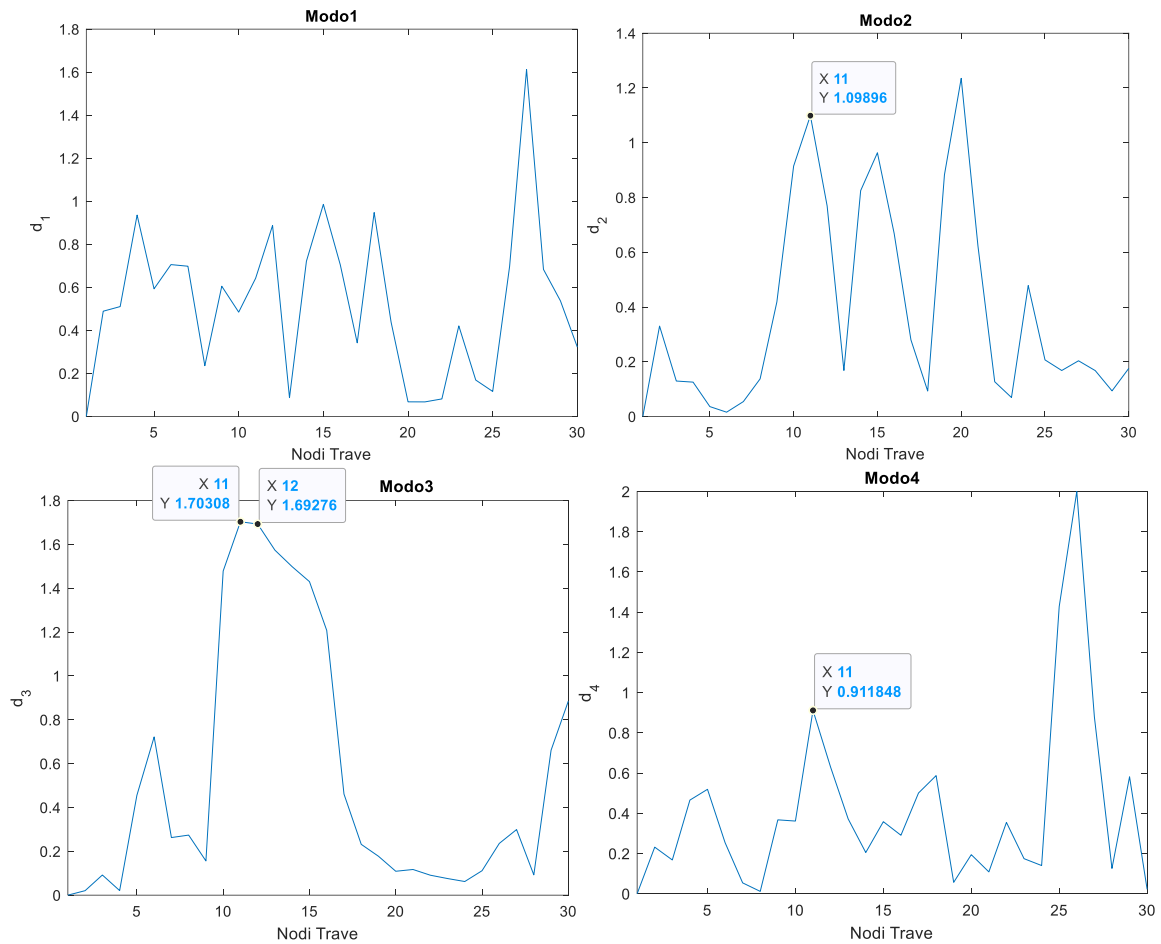


Grafico 3.7. 23 Indagine 4 -dettaglio del grafico 3.7.22 - Differenze assolute tra le curvatures modali di metà trave in configurazione iniziale e variata con stima diretta delle FRF, discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 11-12

### Curvature Damage Factor

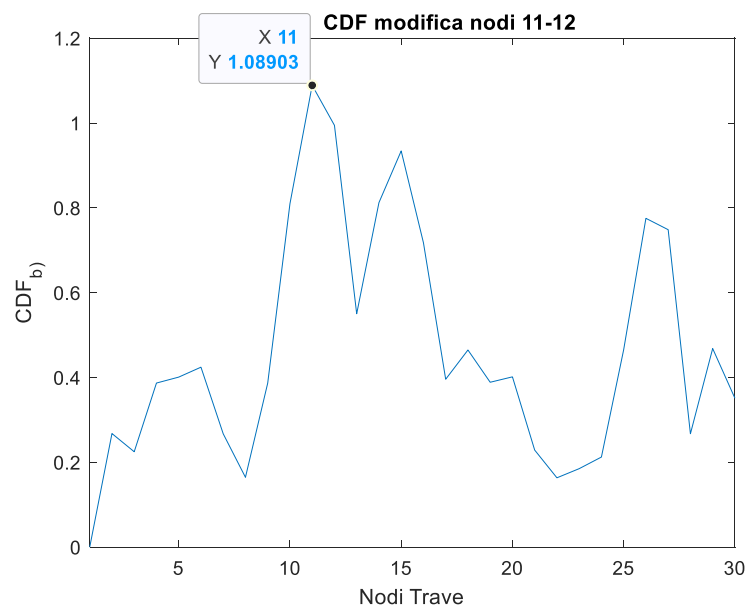


Grafico 3.7. 24 Indagine 4 – Curvature Damage Factor (CDF) per metà trave discretizzata con 30 DOFs - stima diretta delle FRF - variazione tra i nodi 11-12



## Risultati ricavati da forme modali ottenute tramite stima delle FRF con CPSD

### Forme modali rilevate per la configurazione variata

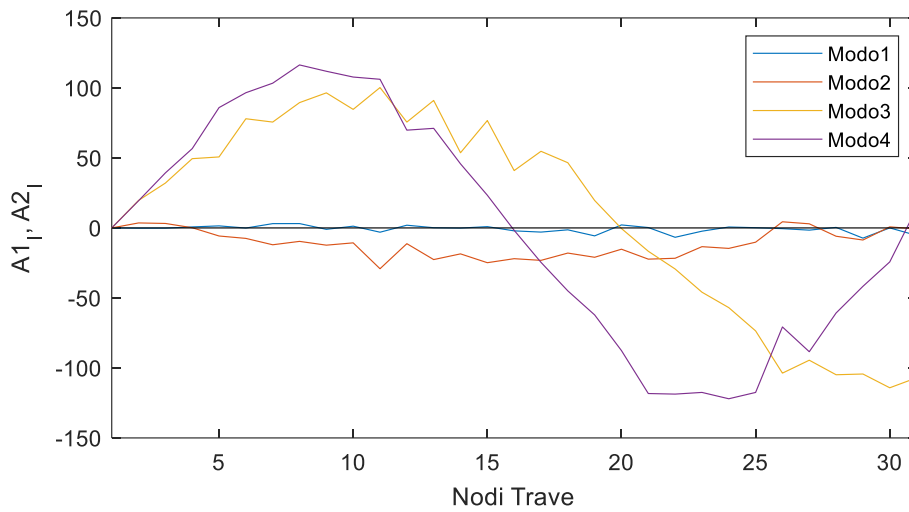


Grafico 3.7. 25 Indagine 4 - Forme modali relative a metà trave rilevate con stima delle FRF tramite CPSD per la configurazione variata - discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 11-12

### Differenza assoluta tra le curvatures

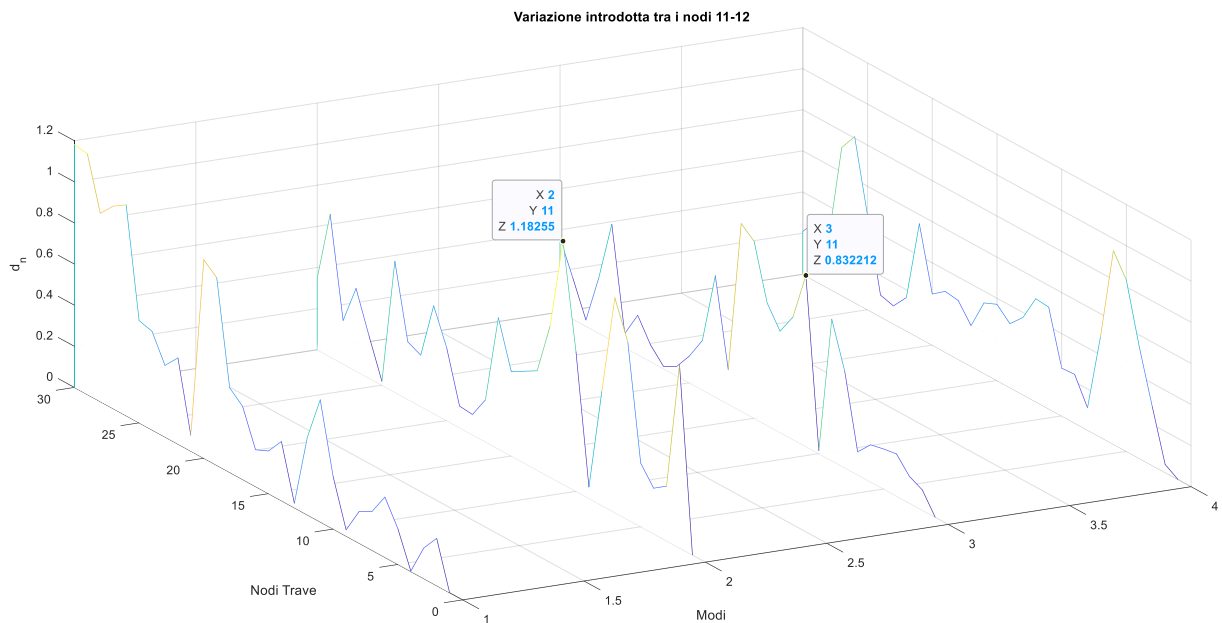


Grafico 3.7. 26 Indagine 4 - Differenze assolute tra le curvatures modali di metà trave valutate in configurazione iniziale e variata con stima delle FRF tramite CPSD, discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 11-12

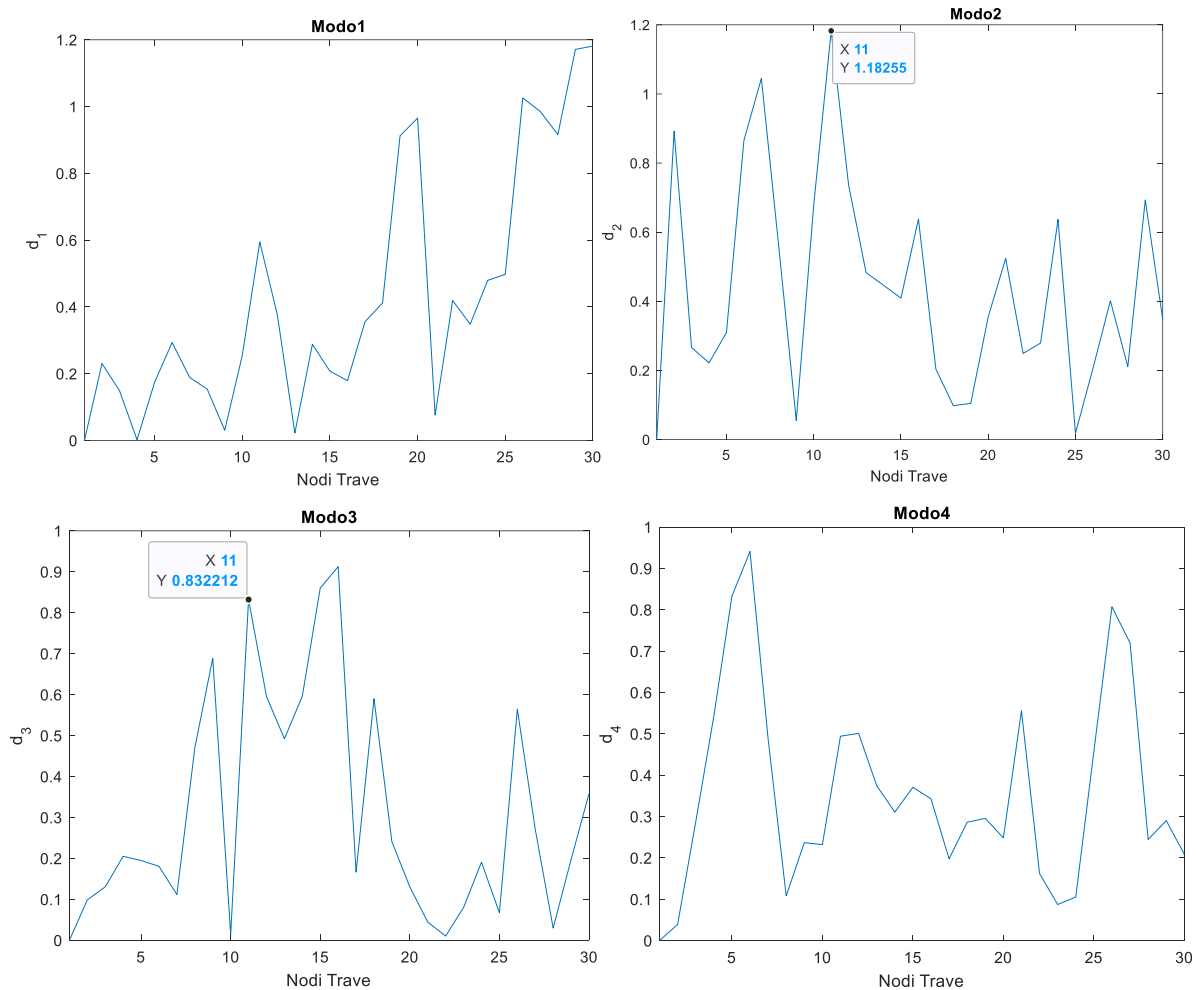


Grafico 3.7. 27 Indagine 4 – Dettaglio grafico 3.7.26 -\_Differenze assolute tra le curvatures modali di metà trave valutate in configurazione iniziale e variata con stima delle FRF tramite CPSD, discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 11-12

**Curvature Damage Factor**

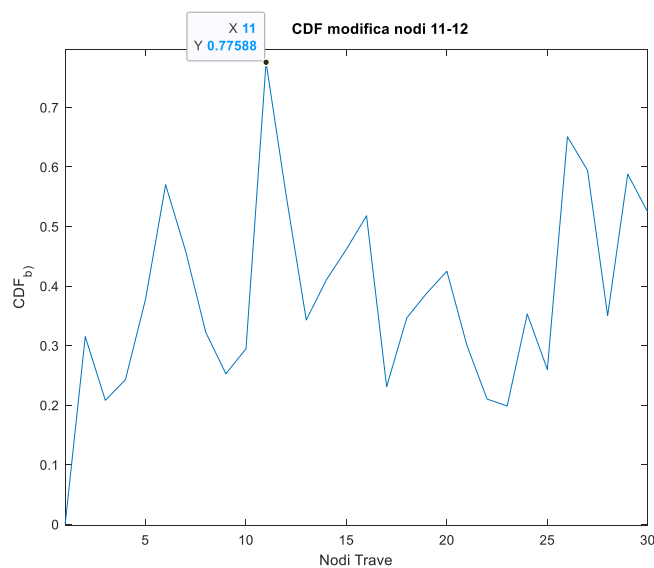


Grafico 3.7. 28 Indagine 4 – Curvature Damage Factor (CDF) per metà trave discretizzata con 30 DOFs - stima delle FRF con CPSD - variazione tra i nodi 11-12

### 3.7.2.3 Variazione c) Nodi 8-9

Risultati ricavati da forme modali ottenute tramite stima diretta delle FRF

#### Forme modali rilevate per la configurazione variata

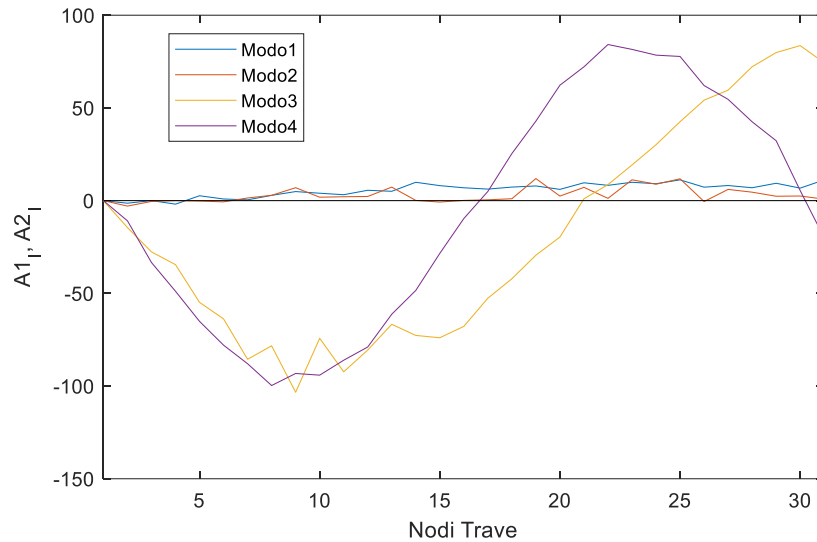


Grafico 3.7. 29 Indagine 4 -\_Forme modali relative a metà trave rilevate con stima diretta delle FRF per la configurazione variata - discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 8-9

#### Differenza assoluta tra le curvature

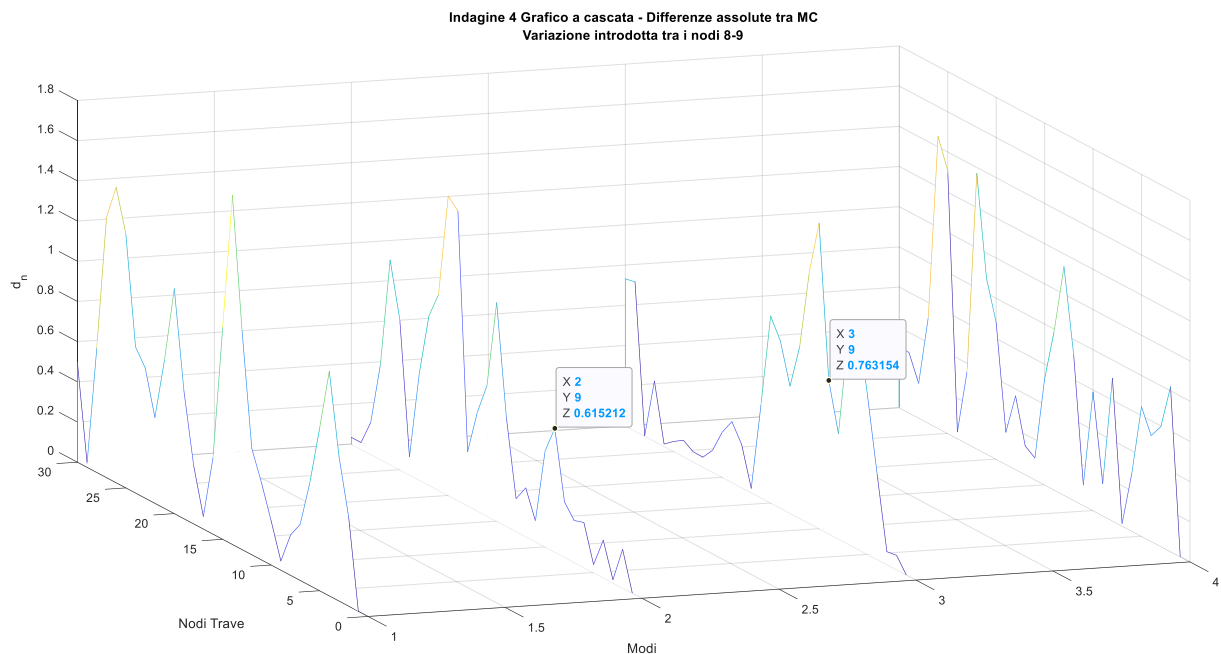


Grafico 3.7. 30 Indagine 4 -\_Differenze assolute tra le curvature modali di metà trave valutate in configurazione iniziale e variata con stima diretta delle FRF, discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 8-9

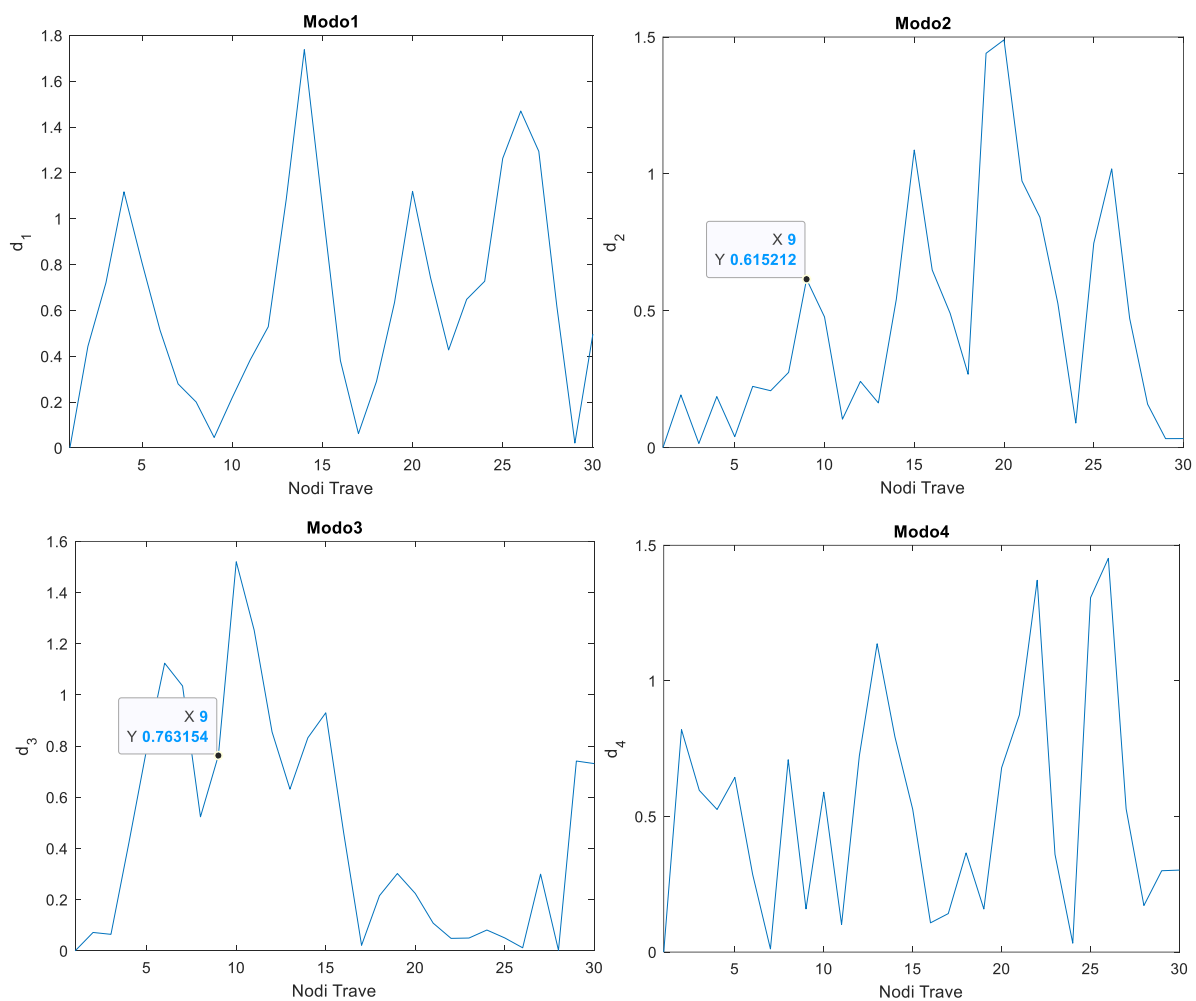


Grafico 3.7. 31 Indagine 4 -dettaglio del grafico 3.7.30 - Differenze assolute tra le curvatures modali di metà trave in configurazione iniziale e variata con stima diretta delle FRF, discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 8-9

### Curvature Damage Factor

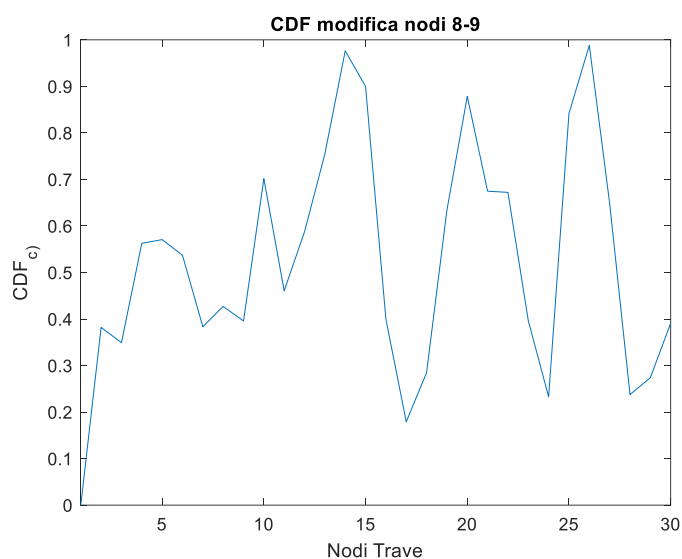


Grafico 3.7. 32 Indagine 4 – Curvature Damage Factor (CDF) per metà trave discretizzata con 30 DOFs - stima diretta delle FRF - variazione tra i nodi 8-9

## Risultati ricavati da forme modali ottenute tramite stima delle FRF con CPSD

### Forme modali rilevate per la configurazione variata

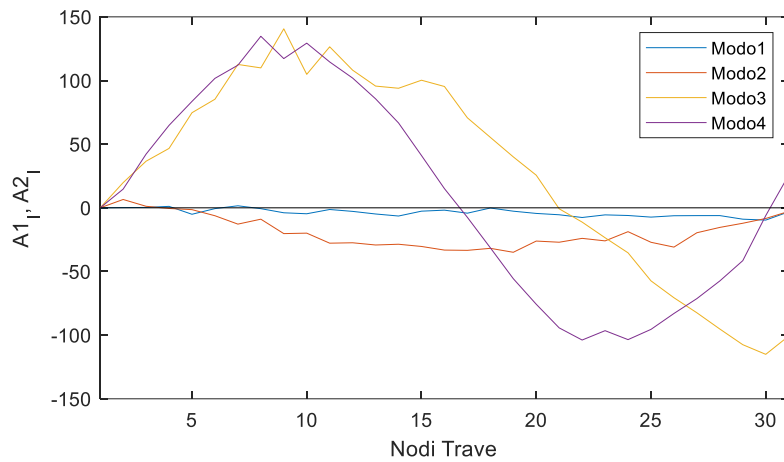


Grafico 3.7. 33 Indagine 4 - Forme modali relative a metà trave rilevate con stima delle FRF tramite CPSD per la configurazione variata - discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 8-9

### Differenza assoluta tra le curvature

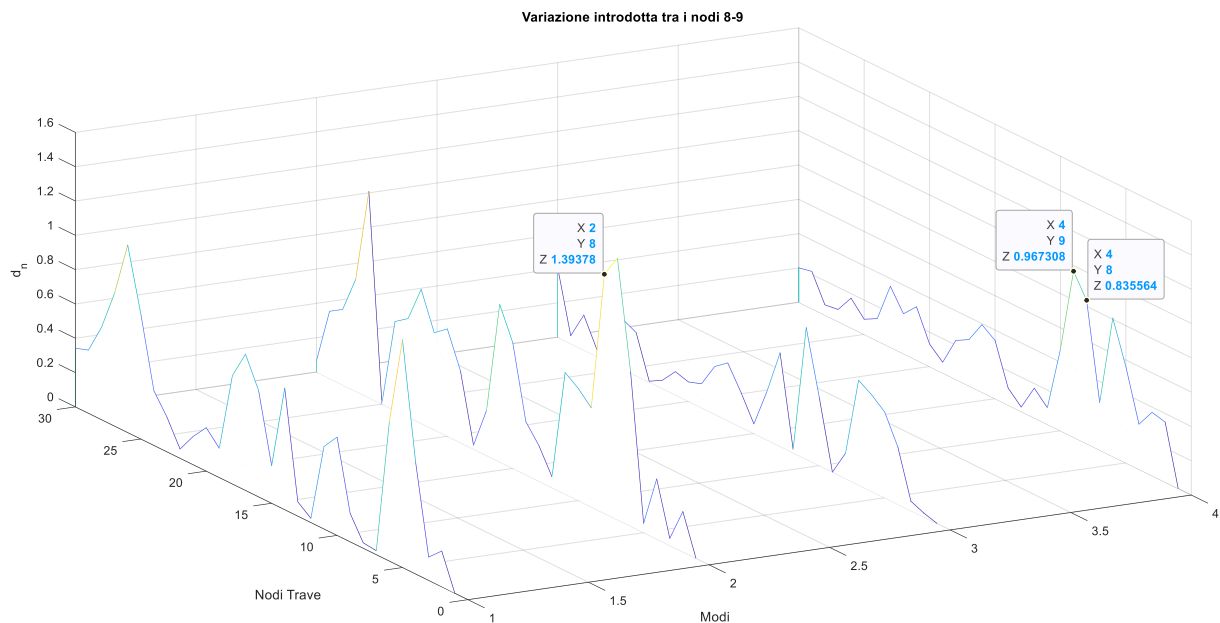


Grafico 3.7. 34 Indagine 4 - Differenze assolute tra le curvature modali di metà trave valutate in configurazione iniziale e variata con stima delle FRF tramite CPSD, discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 8-9

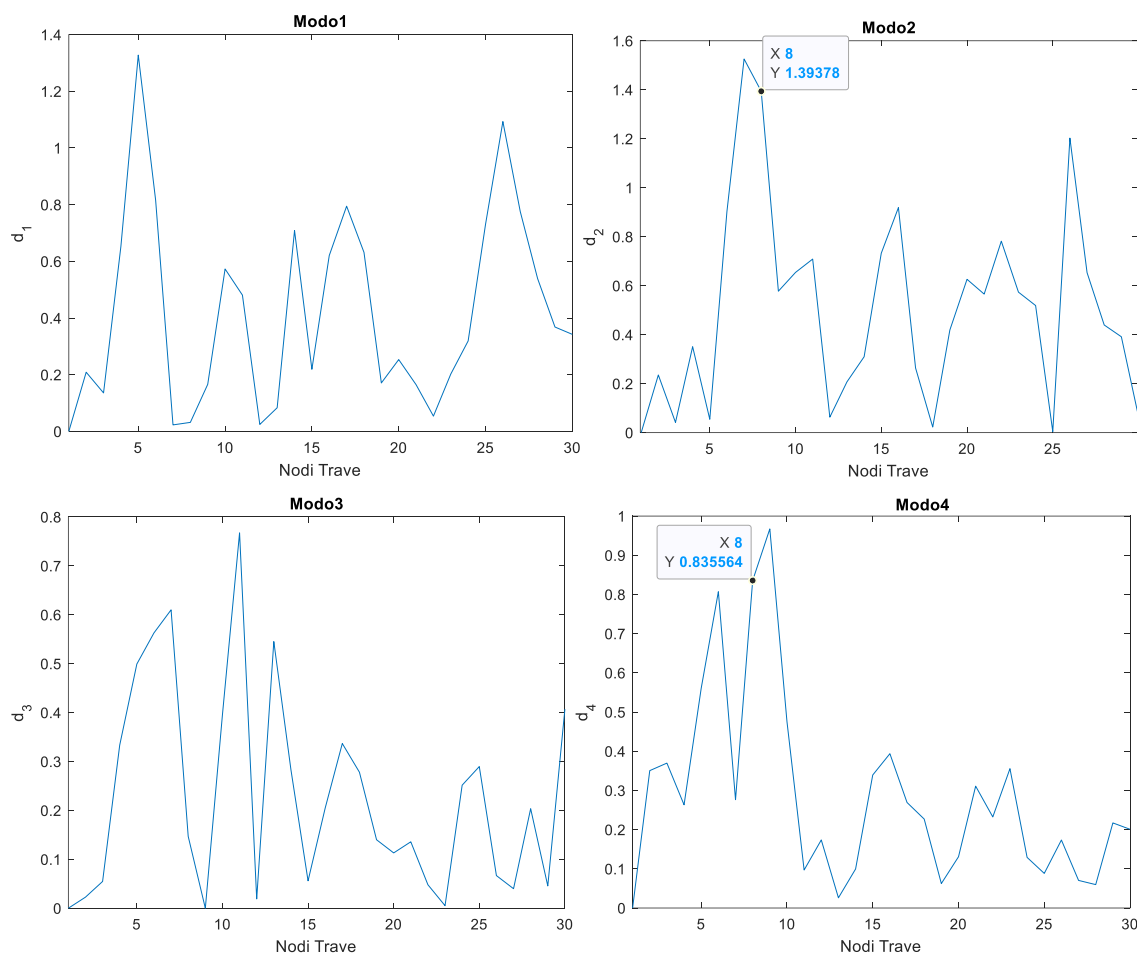


Grafico 3.7. 35 Indagine 4 – Dettaglio grafico 3.7.34 - Differenze assolute tra le curvatures modali di metà trave valutate in configurazione iniziale e variata con stima delle FRF tramite CPSD, discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 8-9

**Curvature Damage Factor**

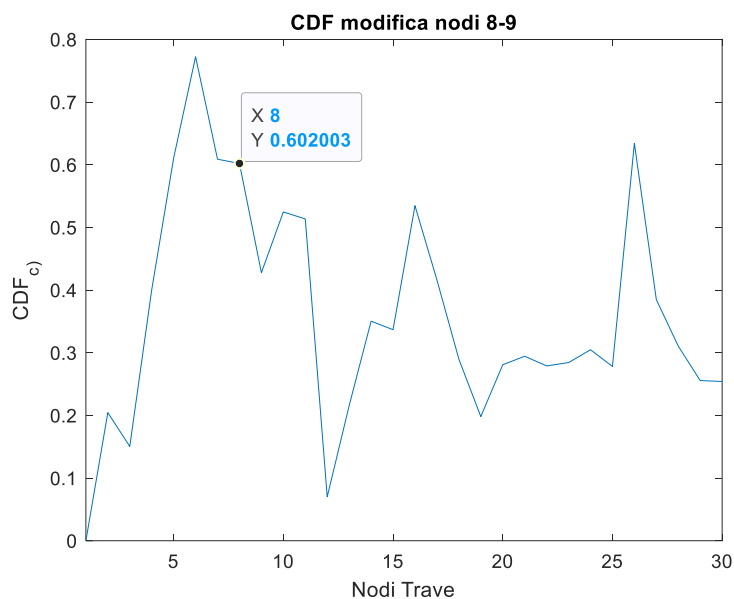


Grafico 3.7. 36 Indagine 4 – Curvature Damage Factor (CDF) per metà trave discretizzata con 30 DOFs - stima delle FRF con CPSD - variazione tra i nodi 8-9

### 3.7.3 Indagine 5

Forme modali rilevate per la configurazione iniziale:

**tramite stima diretta delle FRF**

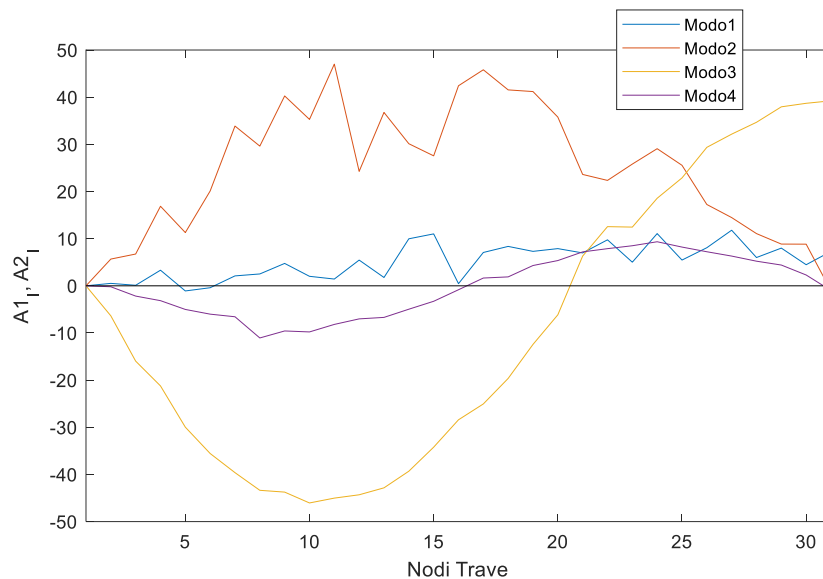


Grafico 3.7. 37 Indagine 5 -\_Forme modali relative a metà trave rilevate con stima diretta delle FRF per la configurazione iniziale - discretizzazione a 30 DOFs

**tramite stima delle FRF con CPSD**

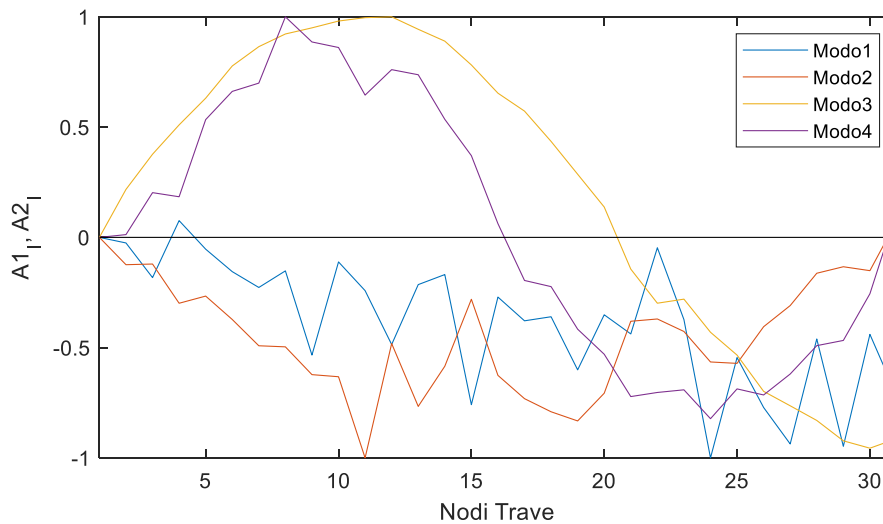


Grafico 3.7. 38 Indagine 5 -\_Forme modali relative a metà trave rilevate con stima delle FRF tramite CPSD per la configurazione iniziale - discretizzazione a 30 DOFs

Nel grafico 3.7.38 è risultato necessario rappresentare le forme modali normalizzate al fine di riconoscerne graficamente gli andamenti.

### 3.7.3.1 Variazione a) Nodi 16-17

Risultati ricavati da forme modali ottenute tramite stima diretta delle FRF

Forme modali rilevate per la configurazione variata

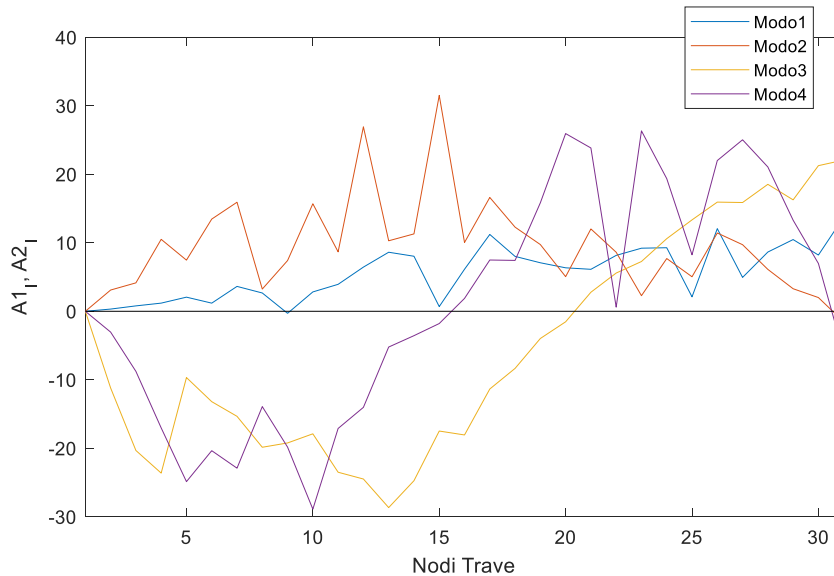


Grafico 3.7. 39 Indagine 5 -\_Forme modali relative a metà trave rilevate con stima diretta delle FRF per la configurazione variata - discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 16-17

Differenza assoluta tra le curvature

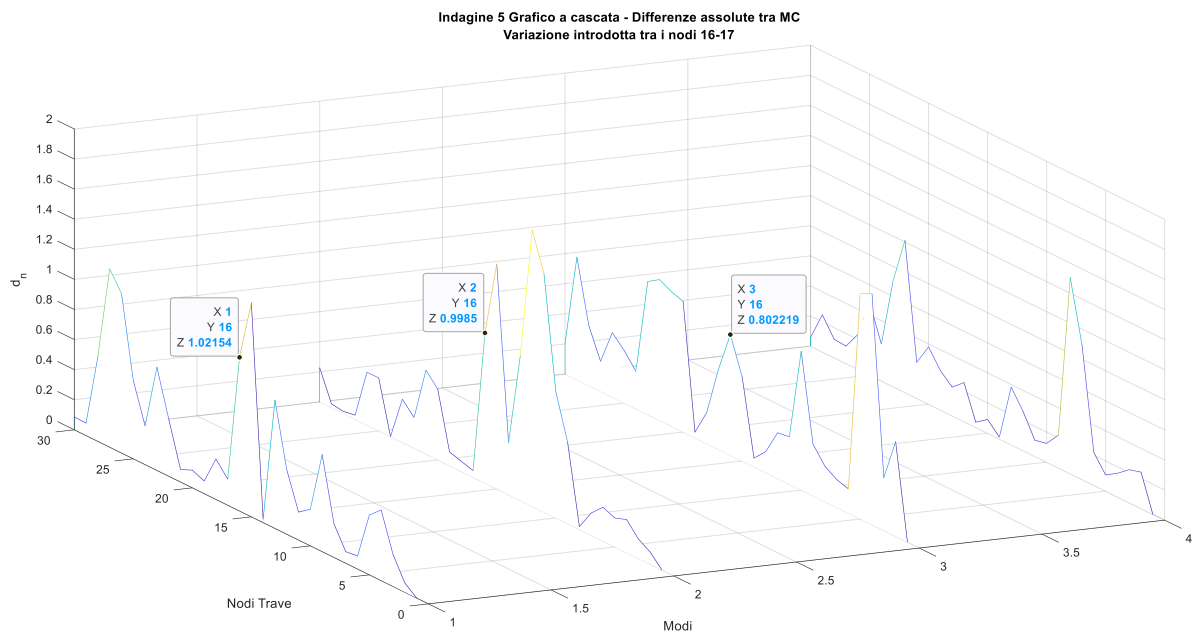


Grafico 3.7. 40 Indagine 5 -\_Differenze assolute tra le curvature modali di metà trave valutate con stima diretta delle FRF in configurazione iniziale e variata, discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 16-17



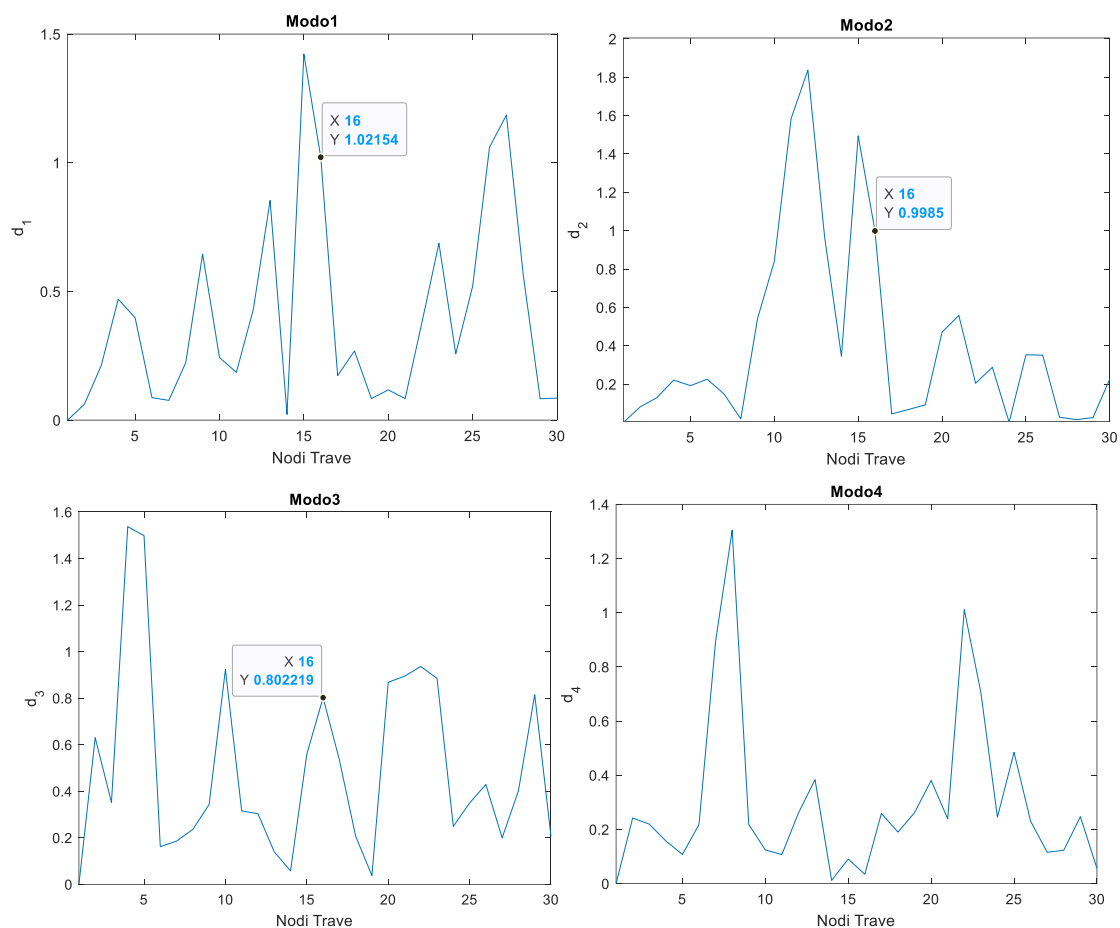


Grafico 3.7. 41 Indagine 5 - dettaglio del grafico 3.7.40 - Differenze assolute tra le curvatures modali di metà trave in configurazione iniziale e variata con stima diretta delle FRF, discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 16-17

### Curvature Damage Factor

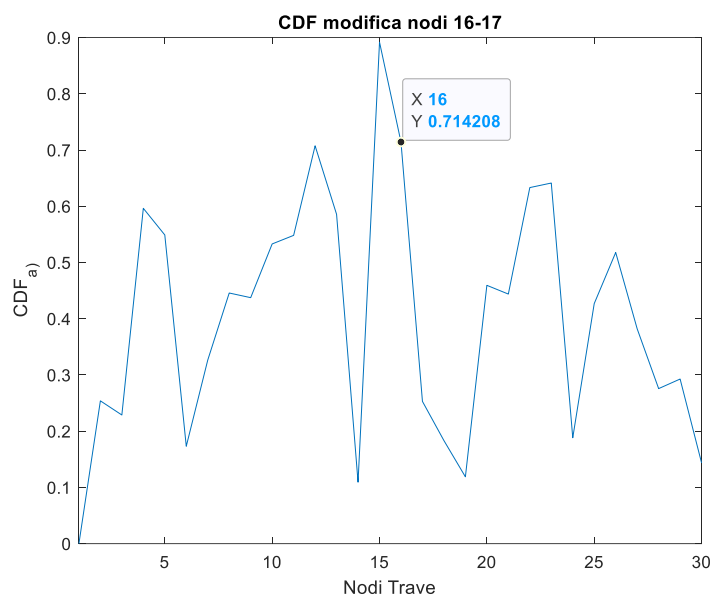


Grafico 3.7. 42 Indagine 5 – Curvature Damage Factor (CDF) per metà trave discretizzata con 30 DOFs - stima diretta delle FRF -variazione tra i nodi 16-17

## Risultati ricavati da forme modali ottenute tramite stima delle FRF con CPSD

### Forme modali rilevate per la configurazione variata

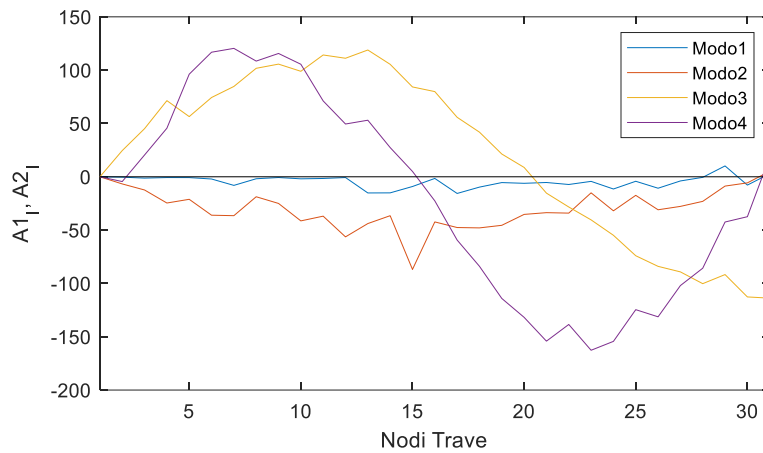


Grafico 3.7. 43 Indagine 5 - Forme modali relative a metà trave rilevate con stima delle FRF tramite CPSD per la configurazione variata - discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 16-17

### Differenza assoluta tra le curvature

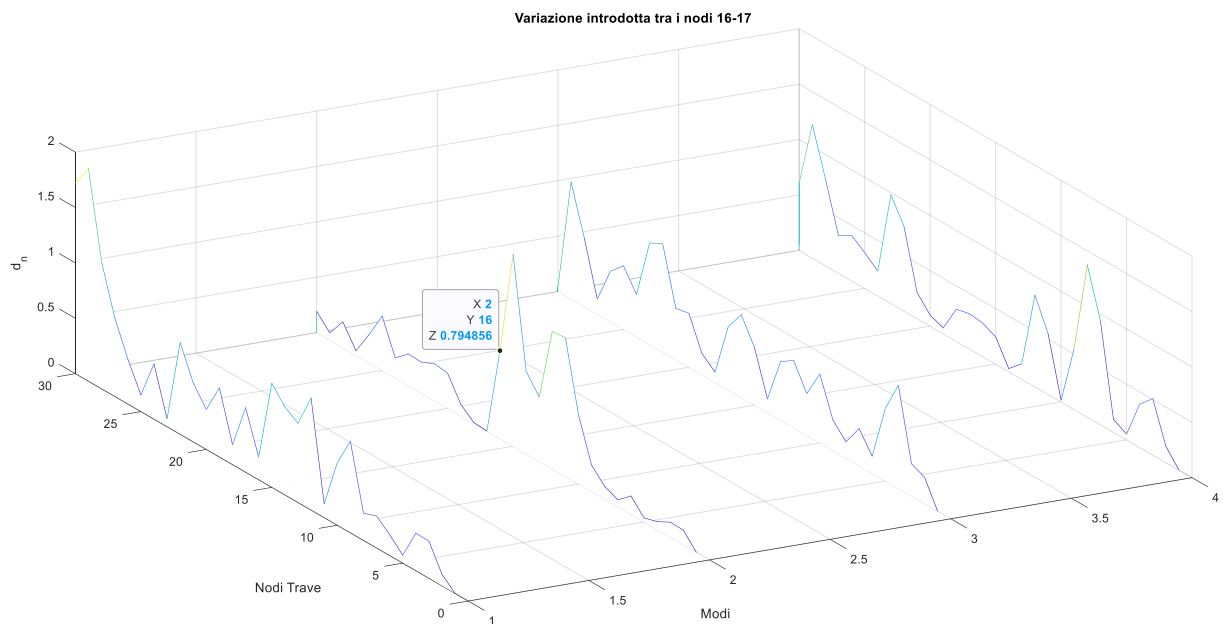


Grafico 3.7. 44 Indagine 5 - Differenze assolute tra le curvature modali di metà trave valutate in configurazione iniziale e variata con stima delle FRF tramite CPSD, discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 16-17

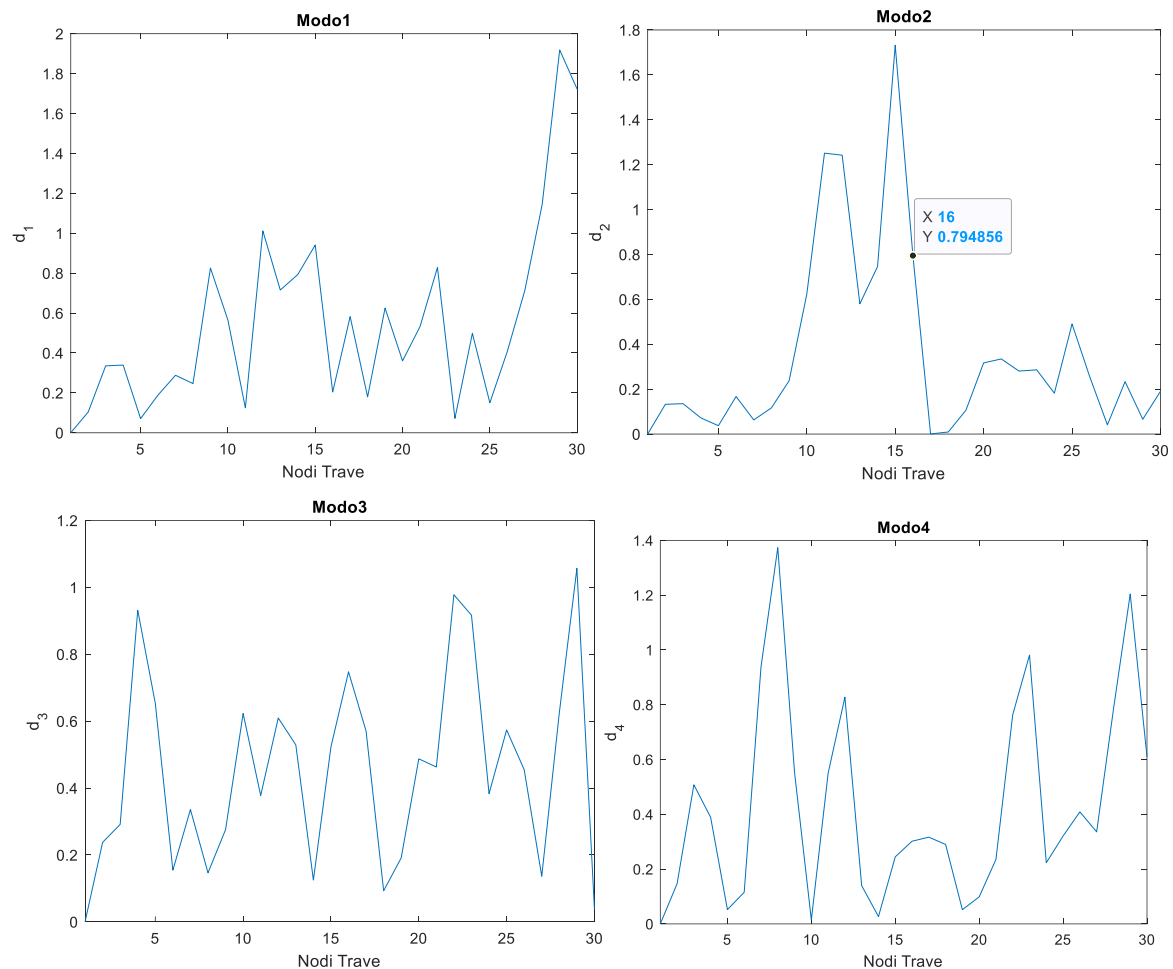


Grafico 3.7. 45 Indagine 5 – Dettaglio grafico 3.7.44 - Differenze assolute tra le curvatures modali di metà trave valutate in configurazione iniziale e variata con stima delle FRF tramite CPSD, discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 16-17

### Curvature Damage Factor

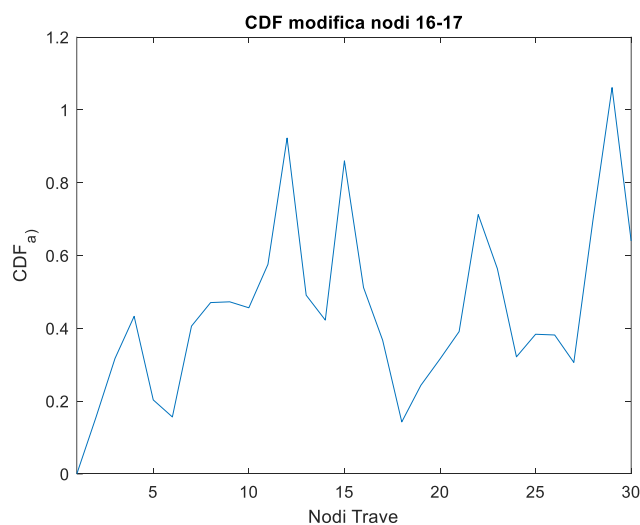


Grafico 3.7. 46 Indagine 5 – Curvature Damage Factor (CDF) per metà trave discretizzata con 30 DOFs - stima delle FRF tramite CPSD -variazione tra i nodi 16-17

### 3.7.3.2 Variazione b) Nodi 11-12

Risultati ricavati da forme modali ottenute tramite stima diretta delle FRF

#### Forme modali rilevate per la configurazione variata

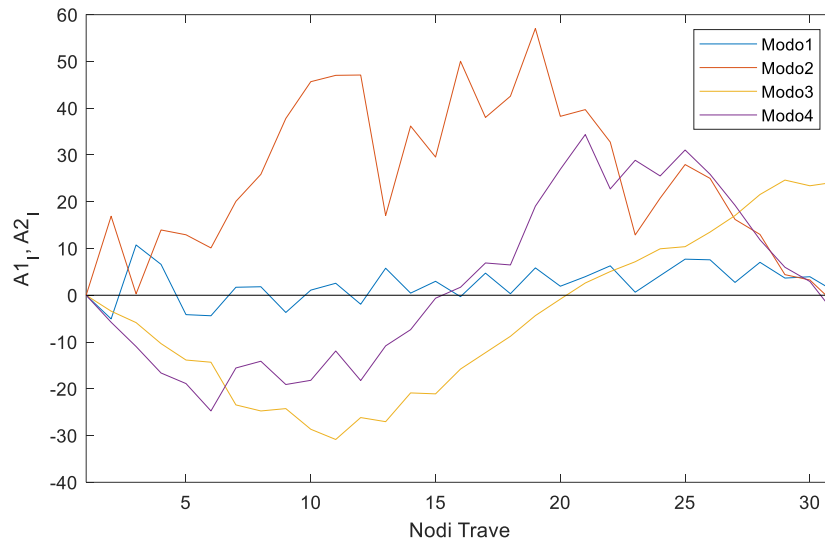


Grafico 3.7. 47 Indagine 5 -\_Forme modali relative a metà trave rilevate con stima diretta delle FRF per la configurazione variata - discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 11-12

#### Differenza assoluta tra le curvature

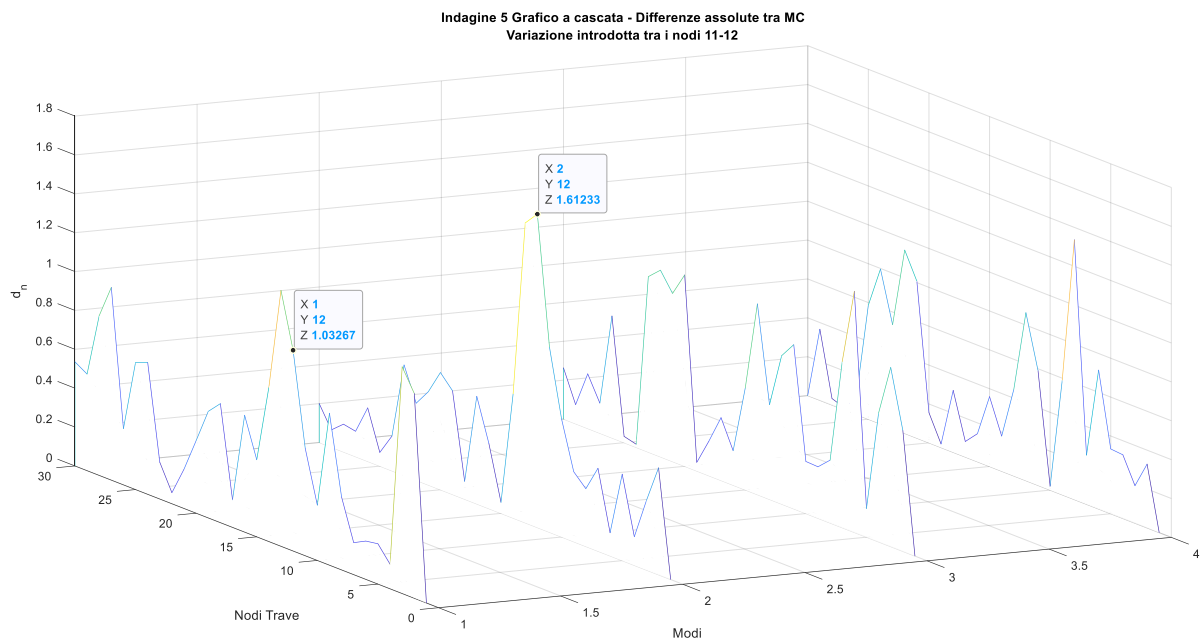


Grafico 3.7. 48 Indagine 5 -\_Differenze assolute tra le curvature modali di metà trave valutate in configurazione iniziale e variata con stima diretta delle FRF, discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 11-12

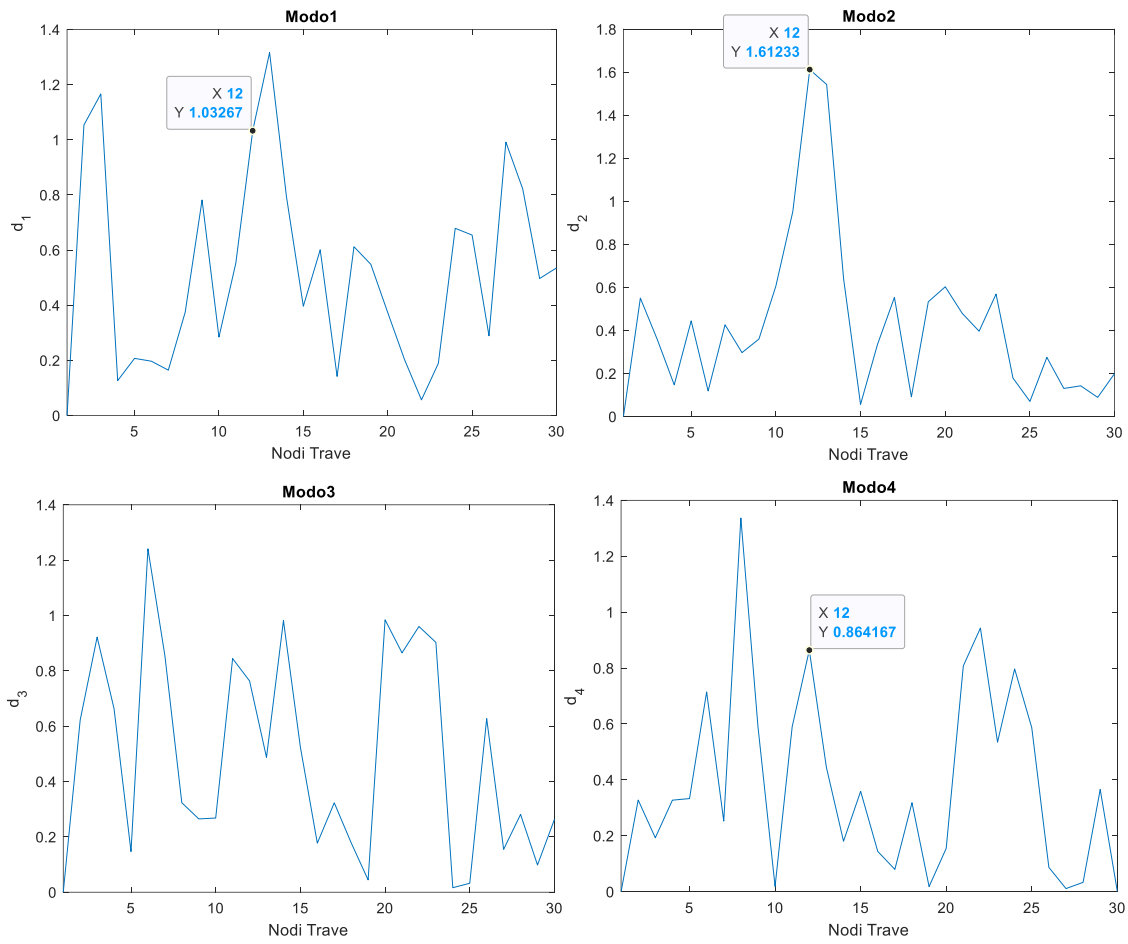


Grafico 3.7. 49 Indagine 5 -dettaglio del grafico 3.7.48 - Differenze assolute tra le curvatures modali di metà trave in configurazione iniziale e variata con stima diretta delle FRF, discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 11-12

### Curvature Damage Factor

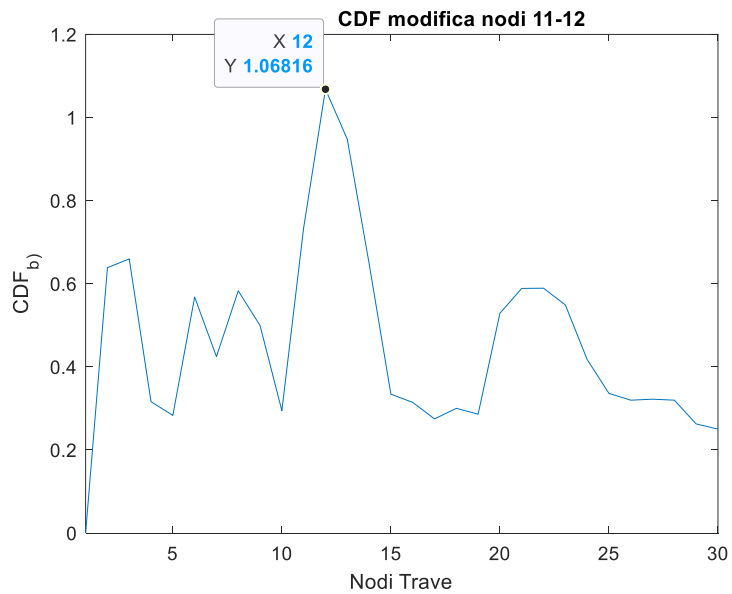


Grafico 3.7. 50 Indagine 5 – Curvature Damage Factor (CDF) per metà trave discretizzata con 30 DOFs - stima diretta delle FRF - variazione tra i nodi 11-12

## Risultati ricavati da forme modali ottenute tramite stima delle FRF con CPSD

### Forme modali rilevate per la configurazione variata

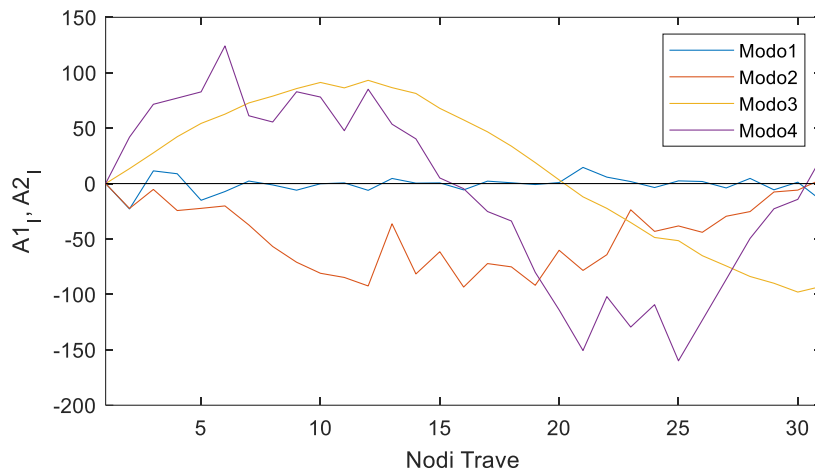


Grafico 3.7. 51 Indagine 5 - Forme modali relative a metà trave rilevate con stima delle FRF tramite CPSD per la configurazione variata - discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 11-12

### Differenza assoluta tra le curvature

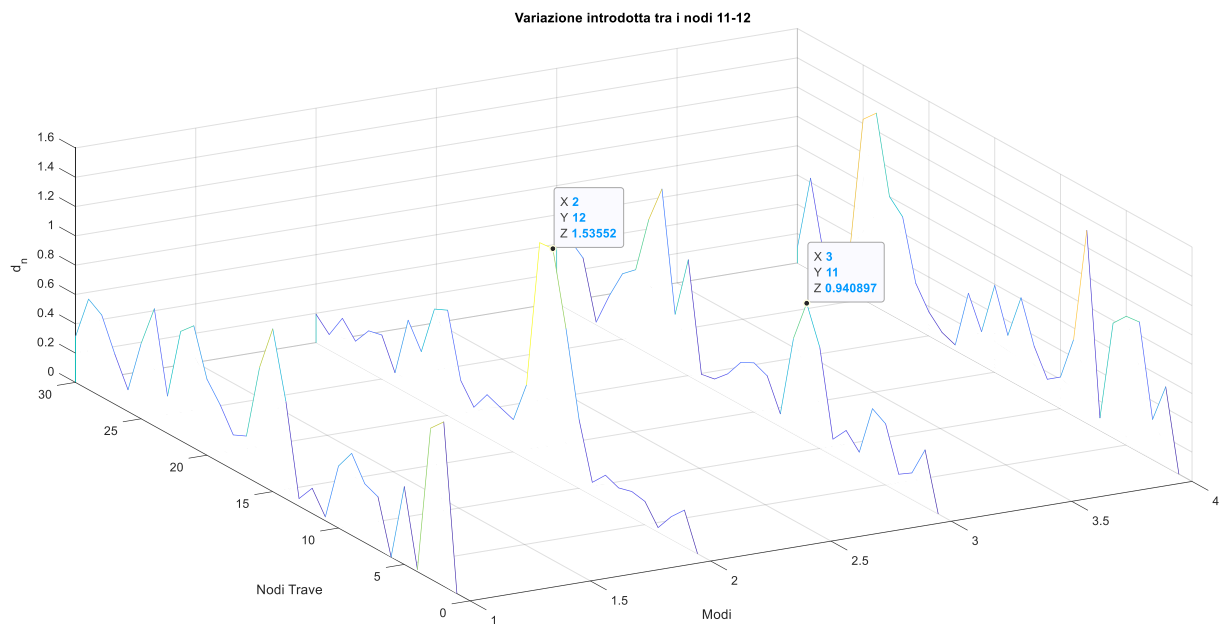


Grafico 3.7. 52 Indagine 5 - Differenze assolute tra le curvature modali di metà trave valutate in configurazione iniziale e variata con stima delle FRF tramite CPSD, discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 11-12

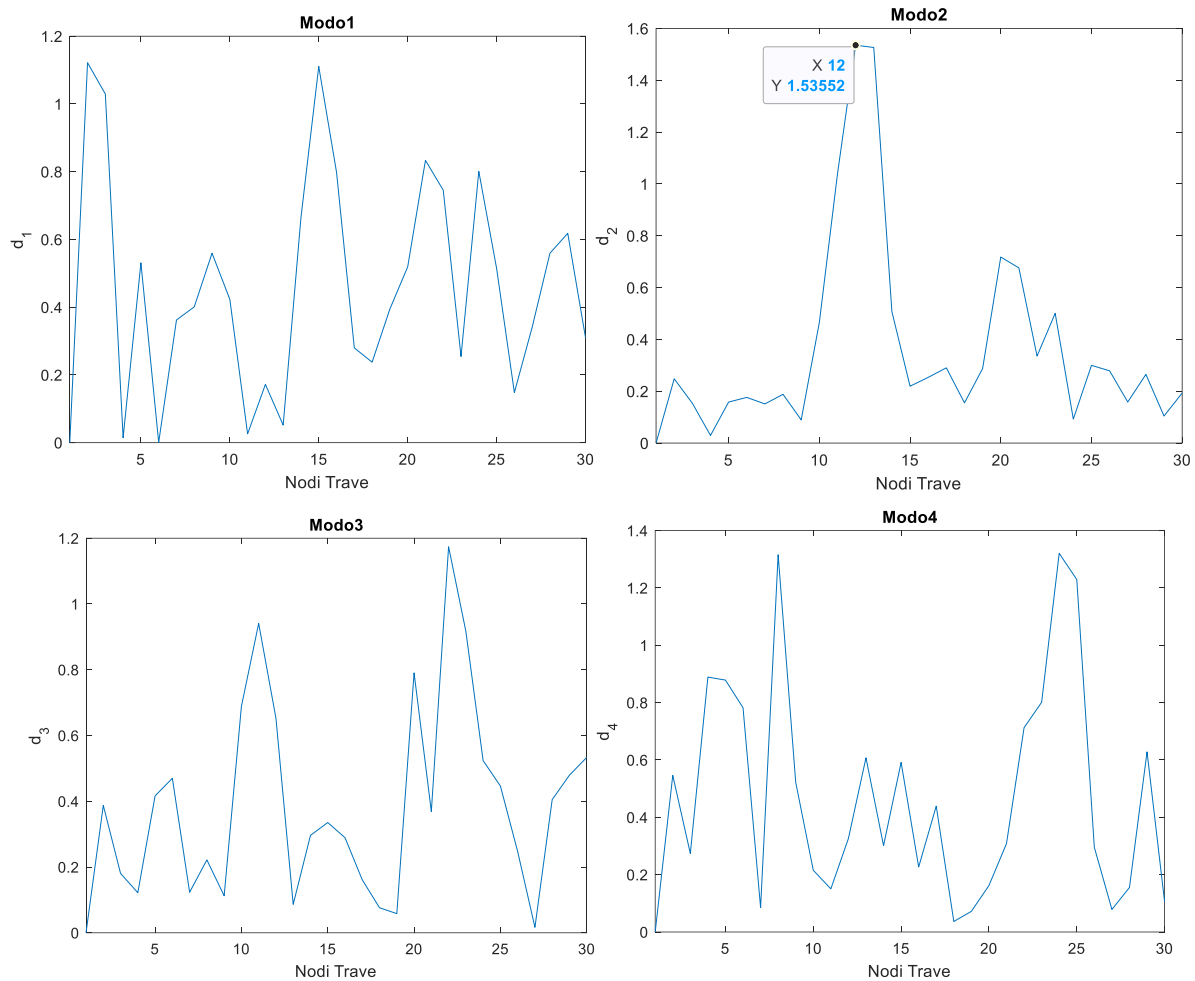


Grafico 3.7. 53 Indagine 5 – Dettaglio grafico 3.7.52 -\_Differenze assolute tra le curvatures modali di metà trave valutate in configurazione iniziale e variata con stima delle FRF tramite CPSD, discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 11-12

### Curvature Damage Factor

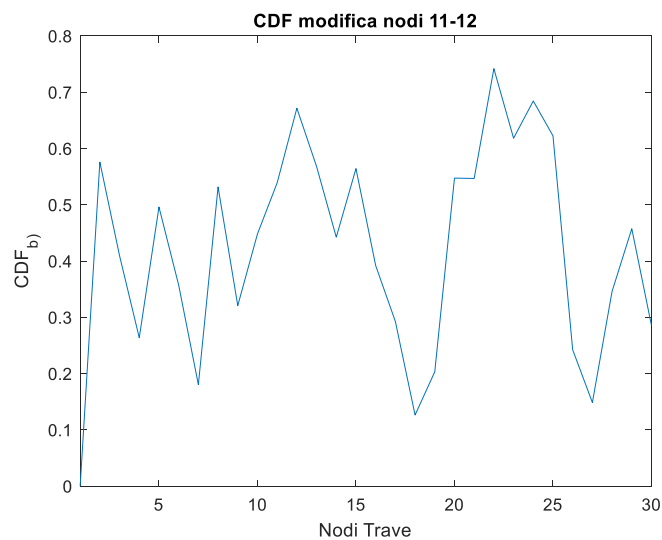


Grafico 3.7. 54 Indagine 4 – Curvature Damage Factor (CDF) per metà trave discretizzata con 30 DOFs - stima delle FRF con CPSD - variazione tra i nodi 11-12

### 3.7.3.3 Variazione c) Nodi 8-9

Risultati ricavati da forme modali ottenute tramite stima diretta delle FRF

Forme modali rilevate per la configurazione variata

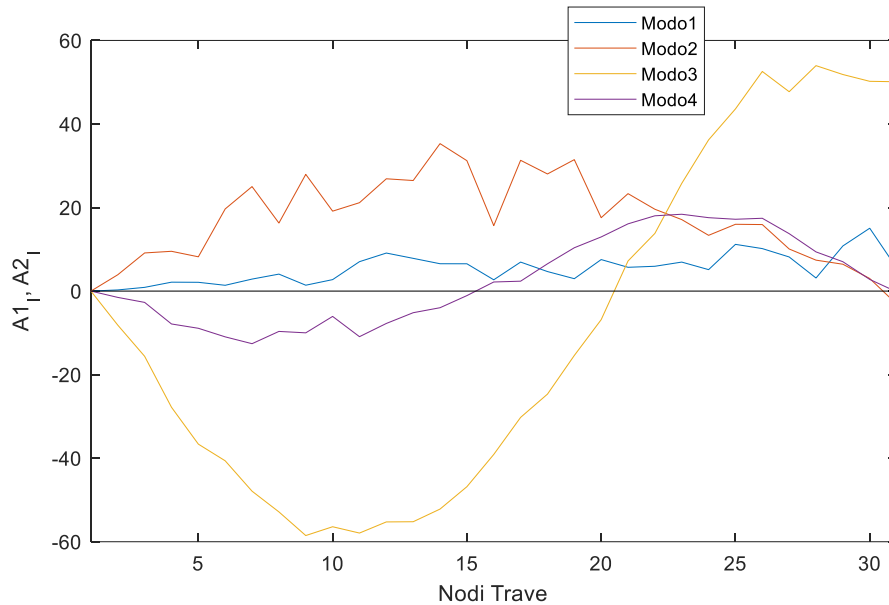


Grafico 3.7. 55 Indagine 5 –\_Forme modali relative a metà trave rilevate con stima diretta delle FRF per la configurazione variata – discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 8-9

Differenza assoluta tra le curvature

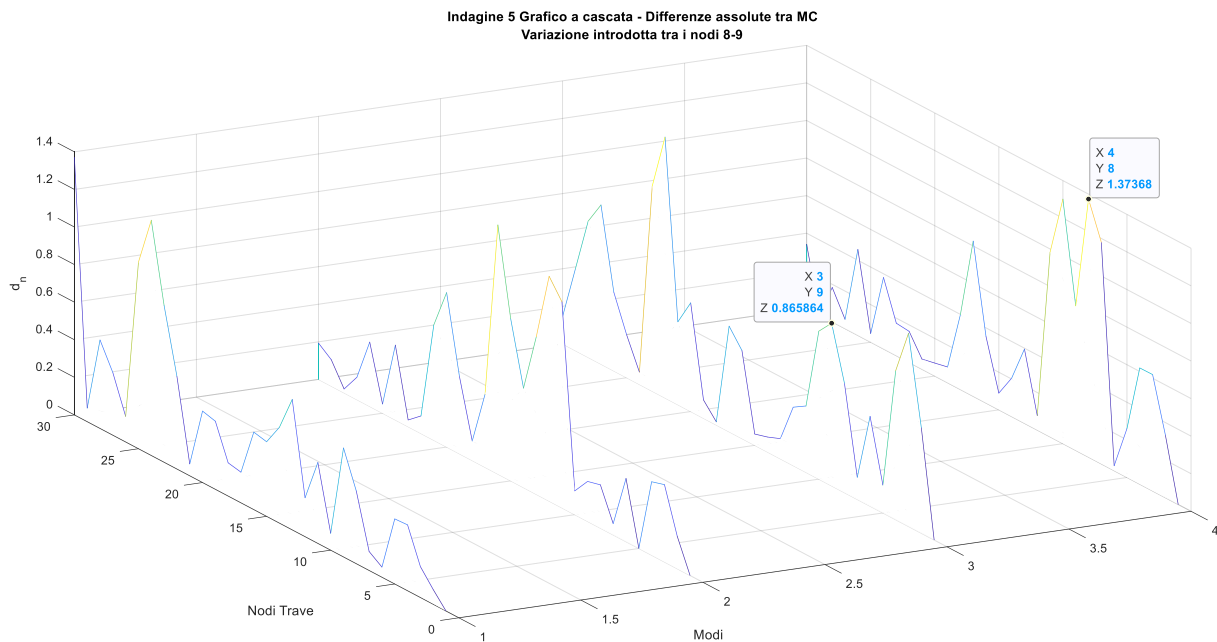


Grafico 3.7. 56 Indagine 5 –\_Differenze assolute tra le curvature modali di metà trave valutate in configurazione iniziale e variata con stima diretta delle FRF, discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 8-9



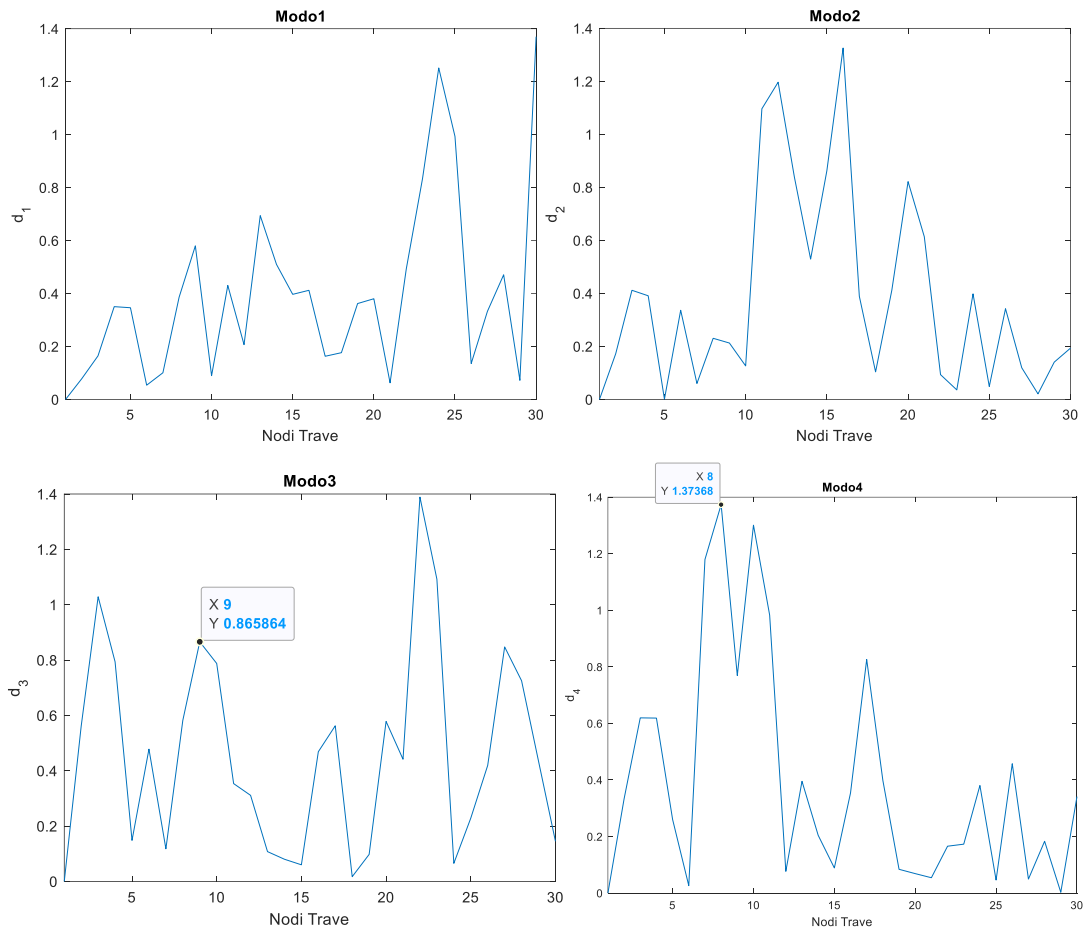


Grafico 3.7. 57 Indagine 5 – dettaglio del grafico 3.7.56 – Differenze assolute tra le curvatures modali di metà trave in configurazione iniziale e variata con stima diretta delle FRF, discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 8-9

### Curvature Damage Factor

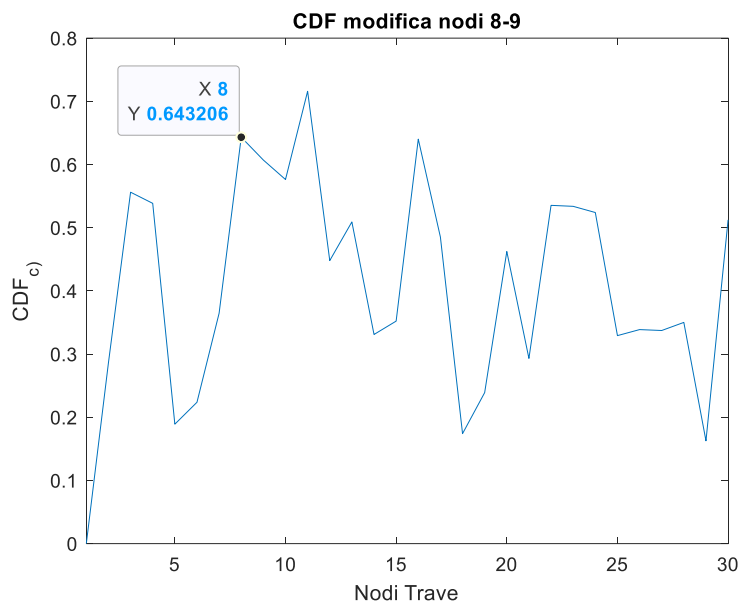


Grafico 3.7. 58 Indagine 5 – Curvature Damage Factor (CDF) per metà trave discretizzata con 30 DOFs – stima diretta delle FRF – variazione tra i nodi 8-9

## Risultati ricavati da forme modali ottenute tramite stima delle FRF con CPSD

### Forme modali rilevate per la configurazione variata

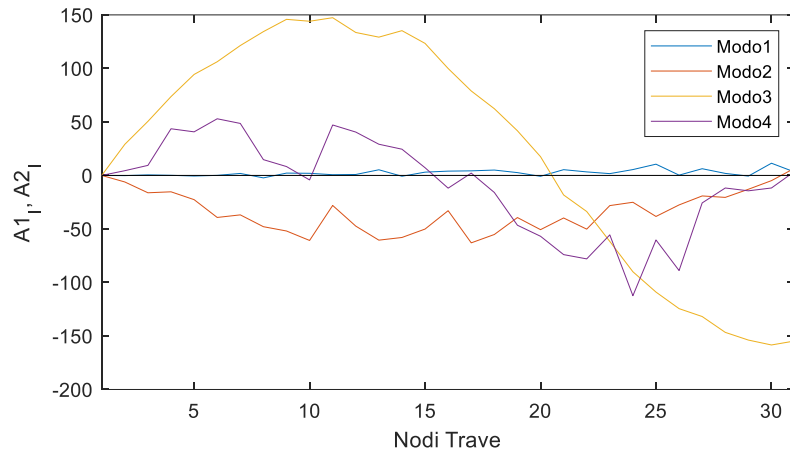


Grafico 3.7. 59 Indagine 4 – Forme modali relative a metà trave rilevate con stima delle FRF tramite CPSD per la configurazione variata – discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 8-9

### Differenza assoluta tra le curvatures

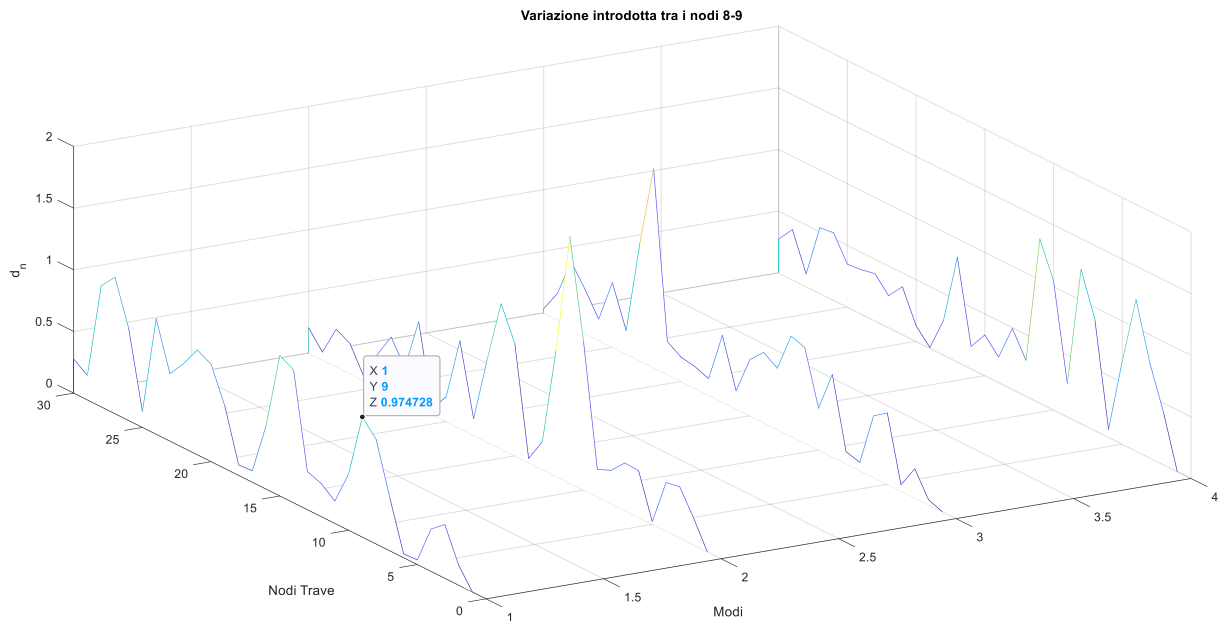


Grafico 3.7. 60 Indagine 5 – Differenze assolute tra le curvature modali di metà trave valutate in configurazione iniziale e variata con stima delle FRF tramite CPSD, discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 8-9

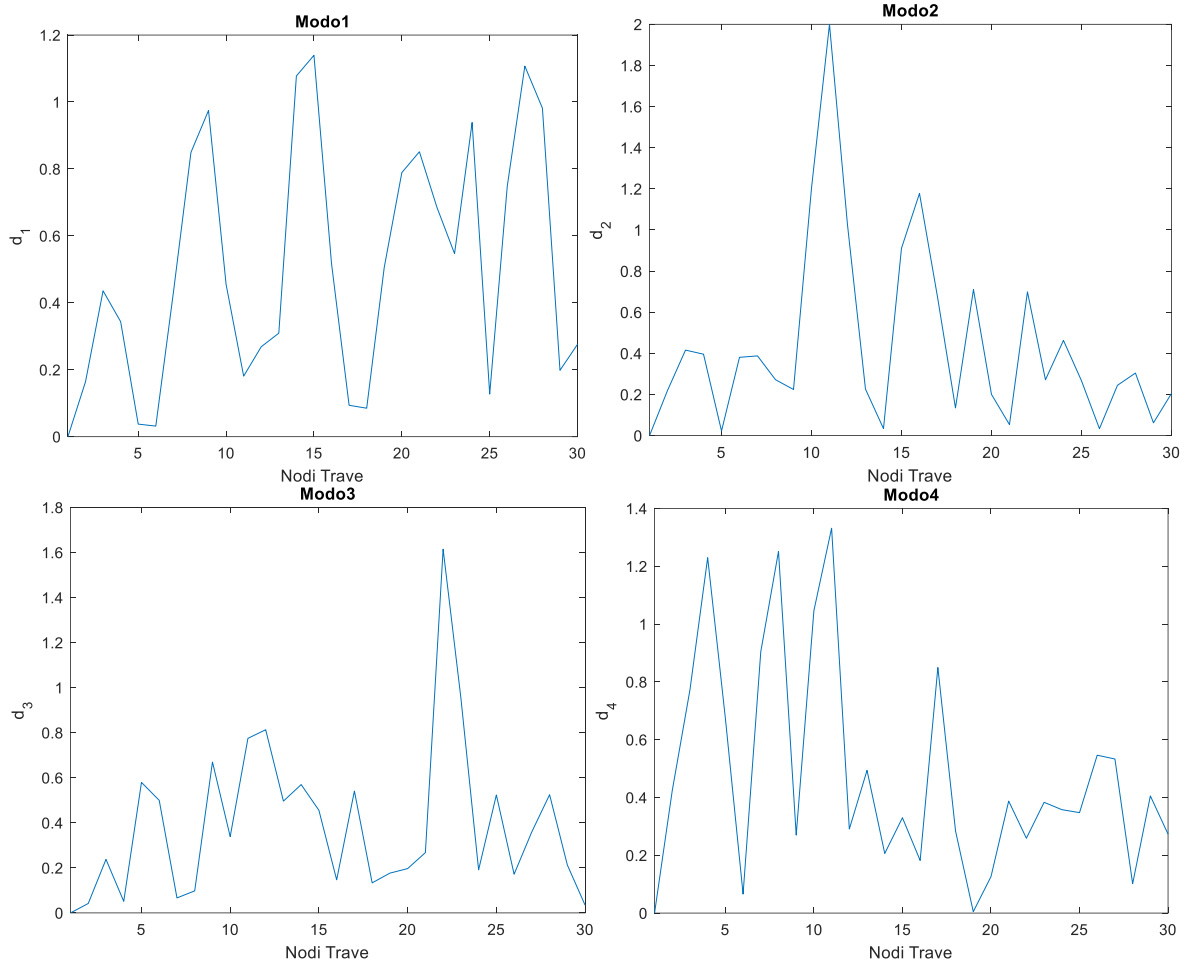


Grafico 3.7. 61 Indagine 5 – Dettaglio grafico 3.7.60 – Differenze assolute tra le curvatures modali di metà trave valutate in configurazione iniziale e variata con stima delle FRF tramite CPSD, discretizzazione a 30 DOFs – variazione tra i nodi 8-9

### Curvature Damage Factor

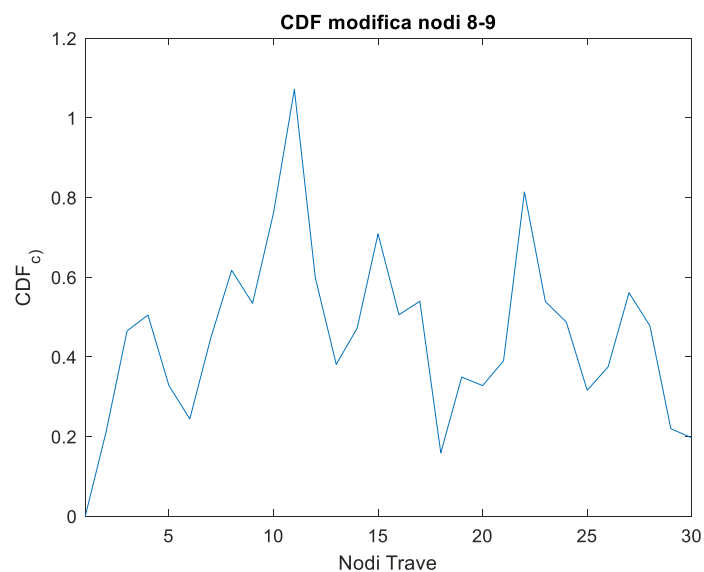


Grafico 3.7. 62 Indagine 4 – Curvature Damage Factor (CDF) per metà trave discretizzata con 30 DOFs – stima delle FRF con CPSD – variazione tra i nodi 8-9

Dai risultati riportati si evince che l'algoritmo di identificazione non riesce a identificare in ogni caso studiato la variazione di rigidità flessionale introdotta. Si osserva relativamente all'insieme delle rilevazioni che la posizione corretta della variazione viene individuata con maggiore frequenza nei casi studiati con maggior numero di punti che discretizzano la trave (indagini 4 e 5) e con maggiore accuratezza se si forniscono in input al calcolo delle curvature coordinate modali dedotte da stima diretta delle funzioni di trasferimento. Questa ultima circostanza è dovuta principalmente alla modalità di calcolo della densità di potenza spettrale ai fini della rappresentazione delle funzioni di trasferimento, queste infatti risultano discretizzate con un numero più ridotto di punti nel dominio della frequenza se paragonate alle analoghe (a parità di set di parametri) ottenute da stima diretta; questo incide sulla risoluzione in frequenza e si ripercuote sulle coordinate modali come osservato al precedente paragrafo 3.4. La problematica comune riscontrata sia dai grafici che riportano le differenze assolute dei singoli modi che dai grafici delle CDF è la presenza di più picchi adiacenti a quello che dovrebbe rilevare la variazione con conseguente incertezza sull'effettiva posizione cercata. Il parametro Curvature Damage Factor si rivela determinante nella quasi totalità dei casi aventi esito positivo, in quanto, con riferimento ad un singolo caso di studio, non accade mai che la corretta posizione venga individuata da tutti e quattro i modi studiati.

## **4. ANALISI NUMERICHE**

Le conclusioni tratte dalle fasi di sperimentazione pianificate sulla trave oggetto di studio sono supportate da analisi numeriche tramite software agli elementi finiti Straus 7.

Nei successivi 4.1, 4.2 e 4.3 si introduce alla modellazione FEM della trave.

Per quanto riguarda l'identificazione delle caratteristiche dinamiche il software è stato utilizzato principalmente per validare la modalità di rielaborazione dati implementata in MATLAB, validazione effettuata utilizzando passaggi analoghi sempre in MATLAB ma a partire da set di dati simulati nel modello FEM come verrà esposto di seguito (paragrafo 4.4).

Con riferimento invece all'identificazione della variazione di rigidità della trave, come introdotto al paragrafo 3.7, le analisi numeriche hanno anticipato le prove sperimentali permettendo di testare l'algoritmo di identificazione e quindi calibrare la variazione di rigidità flessionale da inserire (paragrafo 4.5); con riferimento al set-up di prova introdotto al paragrafo 3.6 si è poi validata la modalità di irrigidimento della trave tramite software (paragrafi 4.6, 4.7).

### **4.1 Modellazione della trave**

La trave oggetto di studio è stata modellata tramite elementi Beam2, come introdotto nel precedente §2 per descrivere analiticamente il comportamento dinamico della trave si fa riferimento al modello di trave alla Eulero Bernoulli, per gli elementi che costituiscono il modello si è quindi trascurata l'influenza della deformabilità tagliante.

In un modello agli elementi finiti la massa può solamente essere discretizzata nei nodi della mesh, nel successivo paragrafo 4.2 verrà trattata l'analisi di convergenza effettuata con due diversi approcci per la formulazione della matrice di massa dell'elemento Beam (per la trattazione seguente si fa riferimento a *Theoretical manual del software Straus7*).

#### **4.1.1 Condizioni di vincolo**

Lo schema statico della trave della trave è appoggio-appoggio come schematizzato nella precedente figura 2.3., la trave essendo forzata in direzione ortogonale al suo asse geometrico (comportamento assiale non rilevante nella risposta dinamica) è già stata schematizzata per le indagini sperimentali con discretizzazioni a 15 e 30 DOFs, ognuno dei quali è riferito a traslazione in direzione  $y$  rispetto al sistema di riferimento introdotto nel §2, visto che per la presente trattazione sono di interesse i soli modi flessionali della trave nel piano di flessione  $xy$ .

Nel software agli elementi finiti il modello utilizzato vede la struttura bloccata nel piano xy, i gradi di libertà possibili per i nodi sono dunque traslazione lungo x ed y e rotazione attorno all'asse z (fig.4.1).

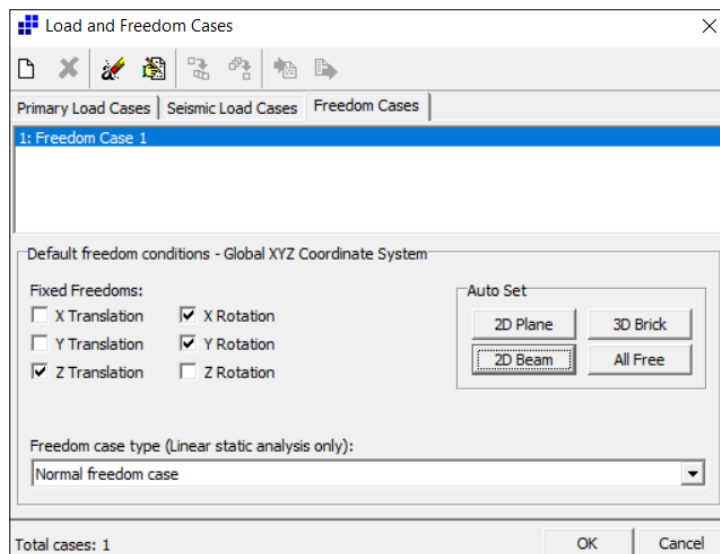
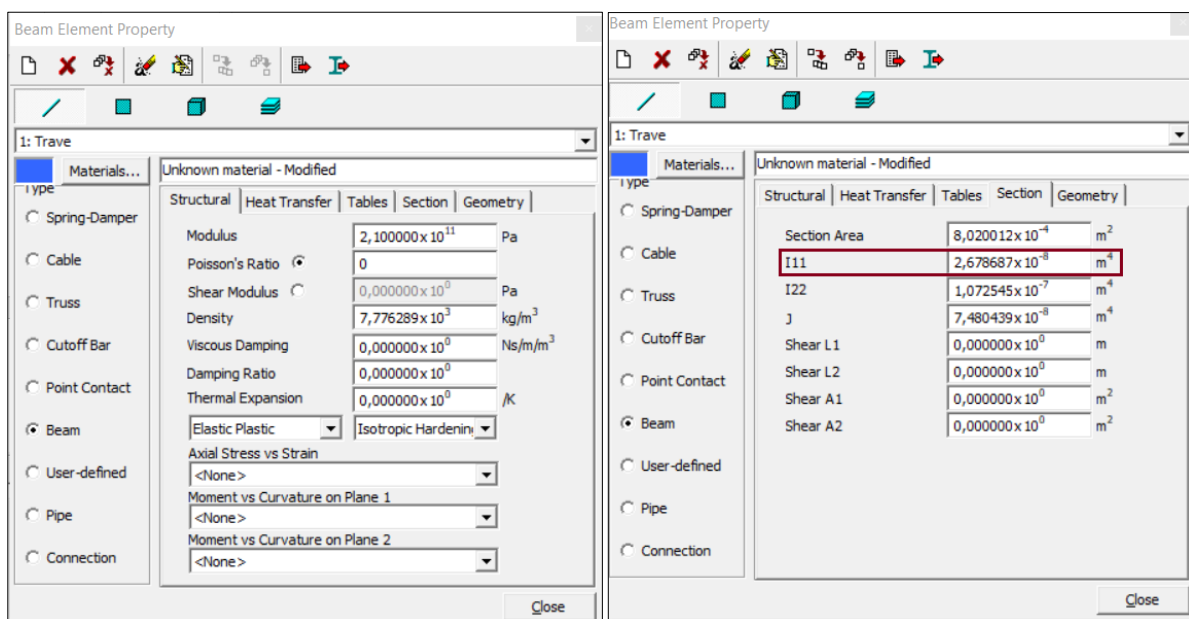


Figura 4. 1 Straus7 – settaggio dei gradi di libertà per i nodi del modello

In corrispondenza dei vincoli è stato poi bloccata la traslazione lungo x ed y ad un estremo e la traslazione lungo y all'altro estremo per realizzare lo schema statico in doppio appoggio.

#### 4.1.2 Caratteristiche geometrico-meccaniche

Le caratteristiche geometriche e meccaniche sono state misurate in laboratorio sulla trave oggetto di studio e coincidono con quelle riportate al precedente 2.1.3. (fig 4.2).



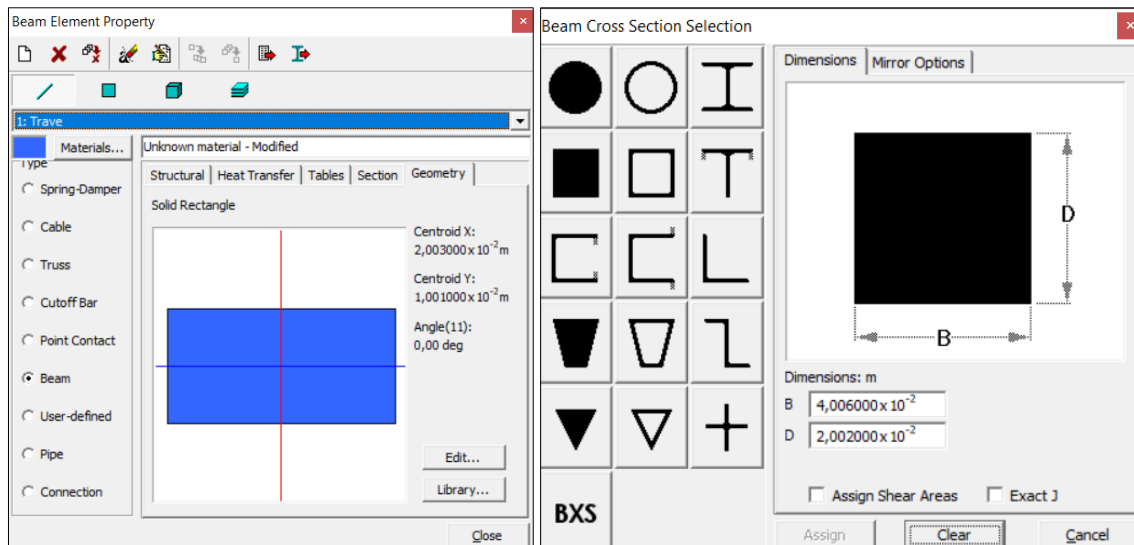


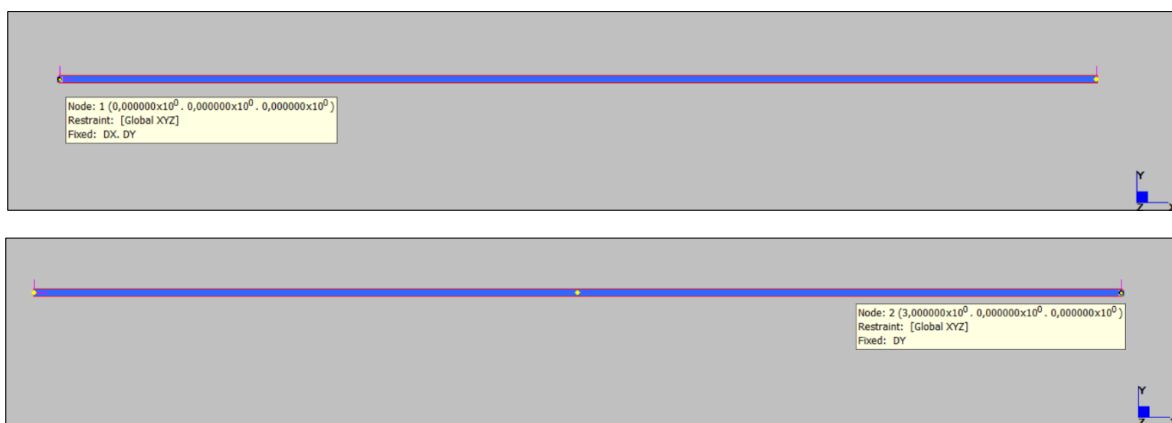
Figura 4.2 Caratteristiche geometrico-meccaniche inserite nel software di calcolo

Si osserva che non si è calcolata l'area di taglio e quindi, come anticipato, si è trascurata la deformabilità tagliante e che il momento di inerzia di interesse per la schematizzazione piana descritta è  $I_{11}$  come evidenziato in figura.

## 4.2 Analisi di convergenza

Al fine di stabilire il numero di elementi Beam da utilizzare per modellare il corretto comportamento dinamico della trave è stata effettuata un'analisi di convergenza. I parametri di riferimento adottati per l'analisi sono le frequenze proprie di vibrazione dei primi quattro modi di vibrare.

La mesh di riferimento vede la trave modellata da un solo elemento Beam2 dalla quale poi si raffittisce con un procedimento di bisezione, suddividendo l'elemento in due parti ad ogni passo. Nella seguente figura 4.2 si riportano i successivi raffittimenti utilizzati per l'analisi di convergenza.



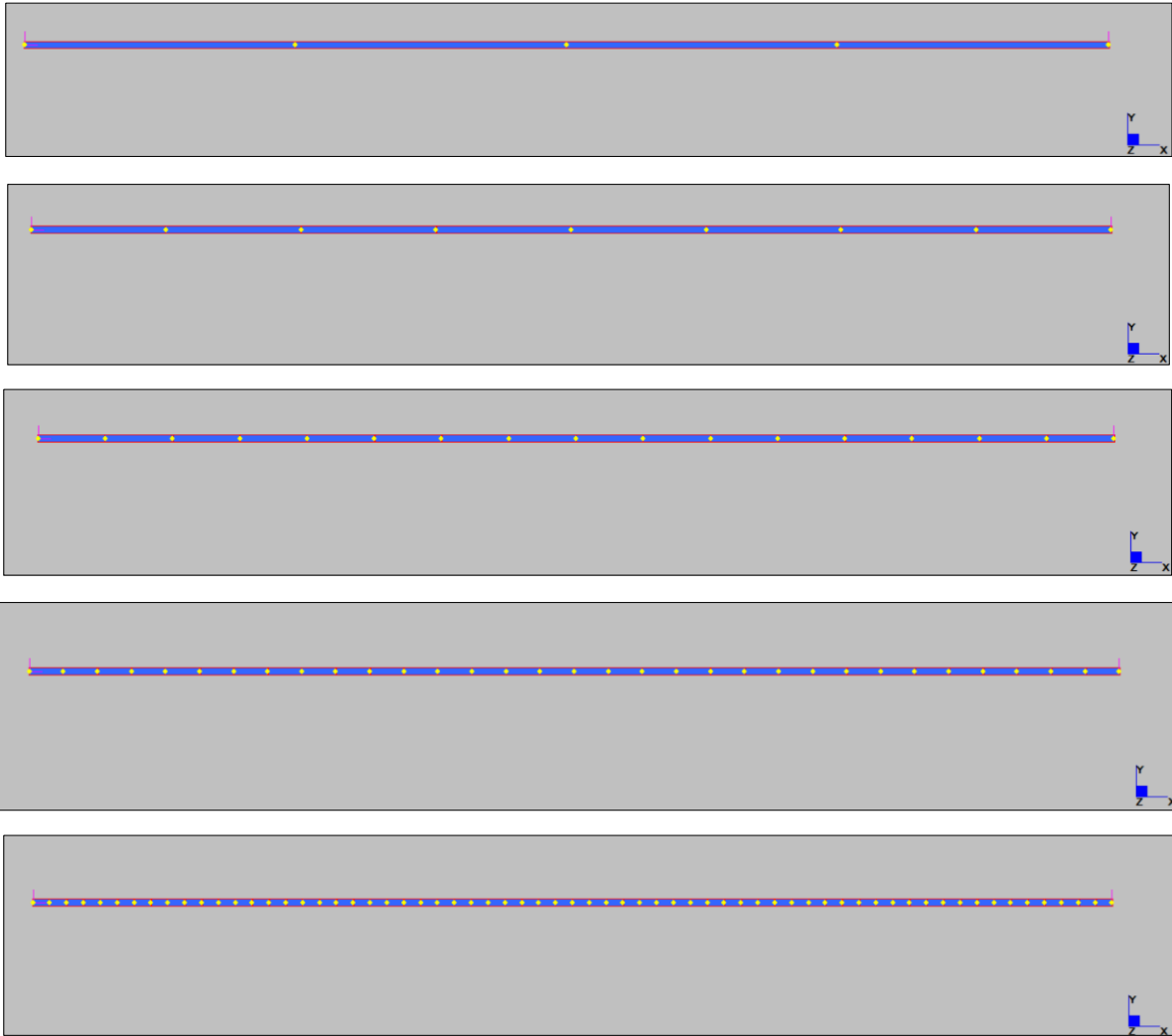


Figura 4.3 Straus7 - raffittimenti successivi del modello realizzati rispettivamente con 1,2,4,8,16,32 e 64 elementi Beam

Si osserva che modellando la trave con un numero finito di elementi nel modello numerico, come in quello sperimentale, si va a considerare non più un sistema continuo ad infiniti gradi di libertà ma un sistema discreto con  $n$  gradi di libertà; il numero di modi di vibrare che è possibile determinare con le modellazioni precedentemente riportate in fig. 4.2 si ottiene da:

$$n_f = n - n_v$$

Con:

$n_f$  : numero di modi di vibrare individuabili dal calcolatore

$n$  : numero di gradi di libertà complessivo

$n_v$  : numero di gradi di libertà vincolati

Come introdotto al 4.1.1 le condizioni di vincolo imposte implicano che per ogni nodo del modello vanno conteggiati 3 gradi di libertà,  $n$  nel caso trattato si otterrà quindi da

$$n = N_{nodi} \cdot 3$$



I modi di vibrare, trattandosi di sistema discreto, vengono calcolati a partire dal problema agli autovalori

$$(\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$$

Relazione coincidente alla (2.29) riportata al 2.2.1; in tal caso si indica con:

$\mathbf{k}$  : matrice di rigidezza del modello FEM;

$\mathbf{m}$ : matrice di massa del modello FEM,

matrici aventi dimensione  $n \times n$ , con righe e colonne relative agli  $n_v$  gradi di libertà vincolati nulle; tale problema ammette quindi  $n_f$  soluzioni, pari al rango delle matrici coinvolte.

In figura 4.4 si riporta la schermata tratta da software per il settaggio dell'analisi modale.

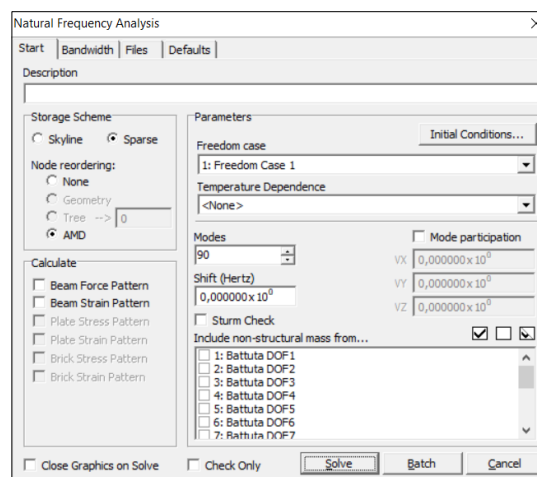


Figura 4. 4 Straus 7 – Settaggio dell'analisi modale

#### 4.2.1 Matrice di massa Lumped

Con esplicito riferimento alla definizione di matrice di massa lumped fornita dal Theoretical manual di Straus7:

L'approccio a massa lumped rappresenta la massa distribuita in modo tale che la massa all'interno di ogni elemento è distribuita su ciascuno dei nodi e la somma delle masse nodali associate ai gradi di libertà traslazionali per ogni direzione globale è uguale alla massa totale dell'elemento. Non c'è inerzia rotazionale e nessun accoppiamento di massa tra i diversi gradi di libertà. Per accoppiamento tra gradi di libertà si intende che i carichi inerziali che agiscono nella direzione di un grado di libertà producono un effetto in grado di libertà differente. Tale accoppiamento si manifesta in una matrice con la presenza di termini fuori diagonale.

Con l'approccio a massa lumped, la matrice di massa dell'elemento risultante è una matrice diagonale.

Le frequenze naturali dei primi quattro modi di vibrare al variare del numero di elementi sono riportate nella seguente tabella 4.1 a):

N°EL. BEAM	$n_f$ (Lumped)	Frequenze [Hz] modo:			
		1	2	3	4
<b>1</b>	1	389,886	/	/	/
<b>2</b>	3	5,22408	424,62155	984,24461	/
<b>4</b>	7	5,24013	20,8147	44,1941	430,277
<b>8</b>	15	5,24164	20,9605	47,089	83,2588
<b>16</b>	31	5,24172	20,9665	47,1712	83,842
<b>32</b>	63	5,24173	20,9669	47,1753	83,8662
<b>64</b>	127	5,24173	20,9669	47,1755	83,8675
	$f_{ref}$	5,241725	20,966902	47,175529	83,867607

Tabella 4.1 a) Frequenze proprie dei primi quattro modi di vibrare al variare del numero di elementi che discretizzano il modello FEM - matrice di massa lumped

Nella riga in basso si riportano le frequenze proprie per la trave  $f_{ref}$  ottenute dalla risoluzione del problema continuo trattato al precedente paragrafo 2.1.3.

Si riportano in verde le frequenze relative a modi flessionali mentre in arancione quelle relative a modi assiali, la configurazione ad un elemento beam non permette di individuare alcun modo flessionale in quanto non presenta gradi di libertà traslazionali in direzione y tra gli appoggi, mentre per la discretizzazione a due elementi l'unico modo visibile tra i primi quattro, come atteso, risulta il primo.

Andando a calcolare lo scarto relativo alle frequenze di due successive modellazioni tramite la seguente relazione:

$$s(f_i) = \left| \frac{f_{iNel} - f_{i2xNel}}{f_{i2xNel}} \right| \cdot 100 \quad ; \quad i = 1,2,3,4$$

si ottiene quanto riportato in tabella 4.2 a)

N°EL. BEAM	$s(f_1)$	$s(f_2)$	$s(f_3)$	$s(f_4)$
<b>1</b>	/	/	/	/
<b>2</b>	/	/	/	/
<b>4</b>	0,3072	/	/	/
<b>8</b>	0,0288	0,7005	6,5504	/
<b>16</b>	0,0015	0,0286	0,1746	0,7005
<b>32</b>	0,0002	0,0019	0,0087	0,0289
<b>64</b>	0,0000	0,0000	0,0004	0,0016

Tabella 4.2 a) Scarto percentuale tra le frequenze di due modellazioni successive - matrice di massa lumped

I risultati ottenuti si presentano tramite dei grafici che riportano lungo gli assi le grandezze di seguito descritte:

- Asse **x**: numero di elementi che discretizza il modello
- Asse **y**: scarto percentuale fra le frequenze  $s(f_i)$

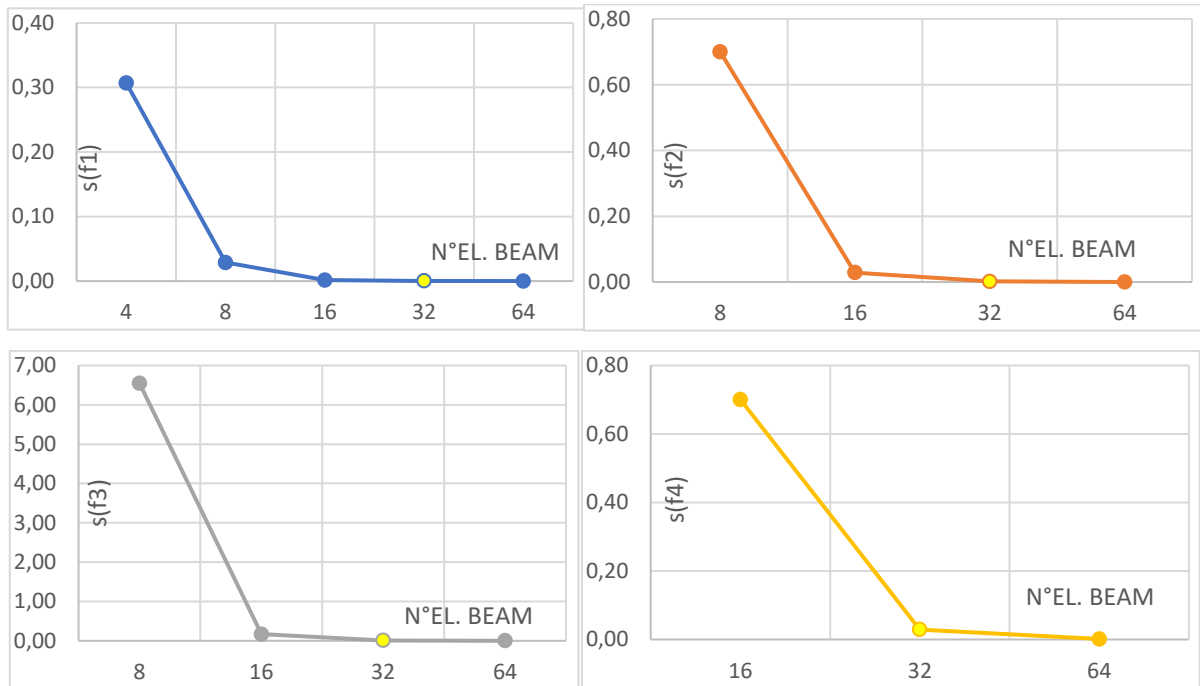


Grafico 4.1 a) Andamenti degli scarti percentuali tra frequenze di vibrazione riportati nell'ordine dei primi quattro modi di vibrare - matrice di massa lumped

Gli andamenti riportati nel plot 2.1 evidenziano che con un numero prossimo a 32 elementi si raggiunge convergenza.

#### 4.2.2 Matrice di massa consistent

Nel presente paragrafo si riportano risultati analoghi a quelli presentati al 4.2.1, in tal caso la matrice di massa adottata per la risoluzione del problema agli autovalori è consistente; il termine consistente si riferisce al fatto che le funzioni di forma usate per calcolare la matrice di massa dell'elemento sono le stesse usate per calcolare la matrice di rigidezza.

La matrice consistente a differenza della matrice lumped presenta termini non nulli fuori dalla diagonale principale e considera le inerzie rotazionali.

Analogamente al caso di massa lumped si presentano nei grafici 4.1 b) i risultati dell'analisi di convergenza:

N°EL. BEAM	$n_f$ (Consistent)	Frequenze [Hz] modo:			
		1	2	3	4
1	3	5,81778	26,65882	477,51054	/
2	6	5,26364	23,30996	58,23323	108,33622
4	12	5,24299	21,04811	48,0296	93,05854
8	24	5,24172	20,97081	47,22844	84,17395
16	48	5,24163	20,96571	47,17166	83,86481
32	96	5,24163	20,96539	47,168	83,84442
64	192	5,24163	20,96537	47,16777	83,84313
	$f_{ref}$	5,241725	20,966902	47,175529	83,867607

Tabella 4.2 b) Frequenze proprie dei primi quattro modi di vibrare al variare del numero di elementi che discretizzano il modello FEM - matrice di massa consistent

N°EL. BEAM	e(f1)	e(f2)	e(f3)	e(f4)
1	10,98979	/	/	/
2	9,5249	12,5619	/	/
4	0,3923	9,7034	17,5220	14,1021
8	0,0242	0,3673	1,6681	9,5473
16	0,0017	0,0243	0,1202	0,3673
32	0,0000	0,0015	0,0078	0,0243
64	0,0000	0,0001	0,0005	0,0015

Tabella 4.3 b) Scarto percentuale tra le frequenze di due modellazioni successive - matrice di massa consistent

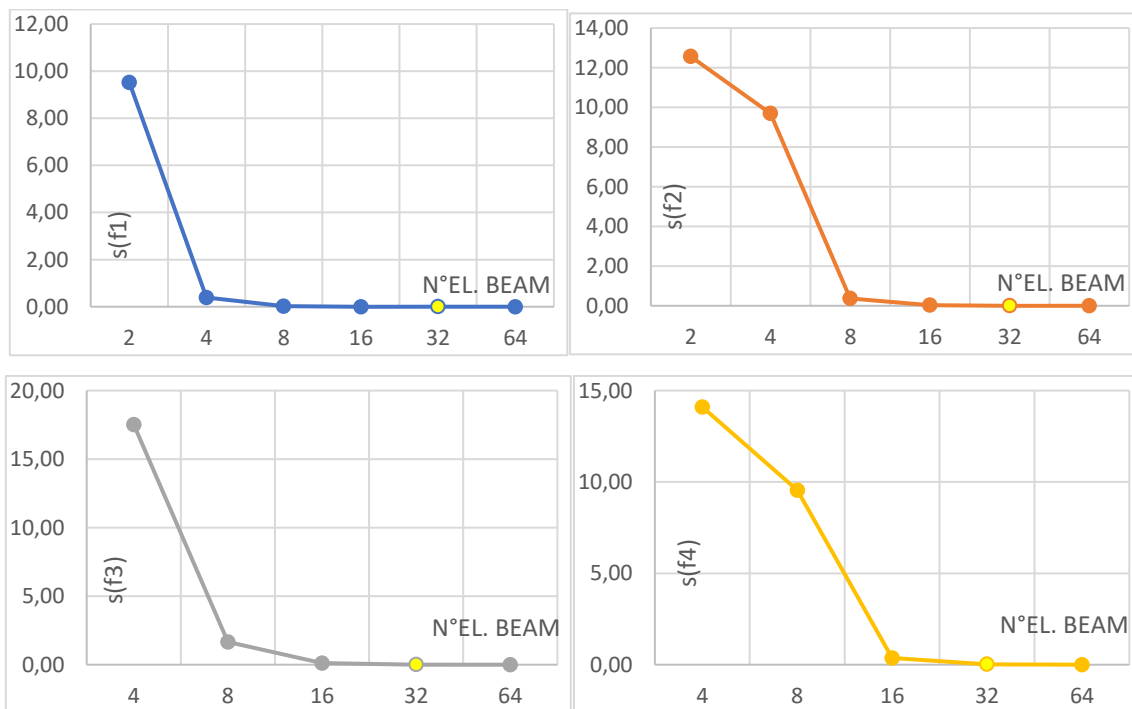


Grafico 4.1 b) Andamenti degli scarti percentuali tra frequenze di vibrazione riportati nell'ordine dei primi quattro modi di vibrare - matrice di massa consistent

Si osserva in questo caso che si raggiunge convergenza più rapidamente rispetto a quanto avviene con matrice lumped.

### 4.3 Scelta del modello

A seguito dell'analisi di convergenza, per agevolare il confronto dei risultati numerici con quelli sperimentali, presentati al §3, si è scelto di utilizzare 30 elementi Beam con matrice di massa consistente (figura 4.4). Come visibile dai grafici 4.1 b) il numero di elementi scelto permette di ottenere risultati soddisfacenti in termini di caratteristiche dinamiche per trave oggetto di studio.

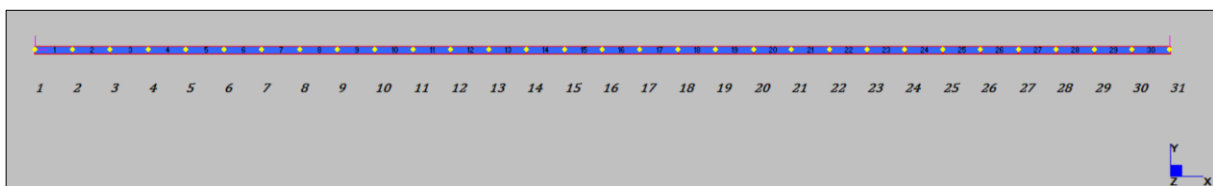


Figura 4.5 Straus7 - Modello FEM utilizzato per le analisi

Il numero di gradi di libertà risulta

$$n = N_{nodi} \cdot 3 = 31 \cdot 3 = 93$$

essendo tre i gradi di libertà vincolati il numero di modi individuabili risulta

$$n_f = n - n_v = 93 - 3 = 90$$

Le frequenze proprie ottenute da software tramite soluzione del problema agli autovalori mediante analisi “natural frequency” (figura 4.4) per i primi quattro modi di vibrare della trave modellata con 30 elementi sono le seguenti:

$$f_1 = 5,2416 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 20,9654 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 47,1681 \text{ Hz}$$

$$f_4 = 83,8448 \text{ Hz}$$

FINAL FREQUENCY RESULTS			
Mode	Eigenvalue	Frequency (rad/s)	Frequency (Hertz)
1	1.08465705E+03	3.29341320E+01	5.24162990E+00
2	1.73526496E+04	1.31729456E+02	2.09653941E+01
3	8.78326561E+04	2.96365747E+02	4.71680736E+01
4	2.77531500E+05	5.26812585E+02	8.38448270E+01

Tabella 4. 4 Straus7 – log file analisi natural frequency, frequenze proprie dei primi quattro modi di vibrare per la trave

Gli autovettori corrispondenti hanno l'andamento riportato in figura 4.6.

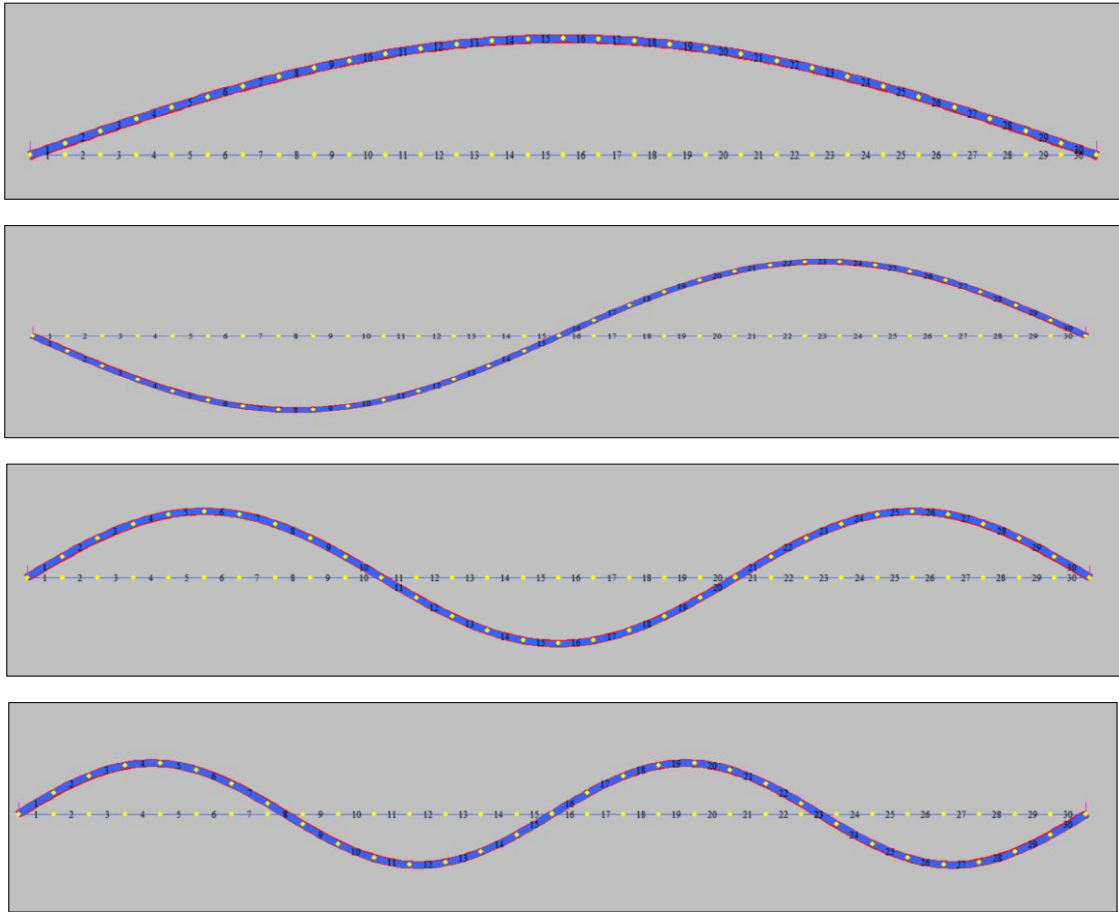


Figura 4.6 Modi di vibrare dedotti dalla risoluzione del problema agli autovalori

Gli autovettori normalizzati rispetto alla massa, ottenuti da software, vengono di seguito riportati all'interno della matrice modale, per ogni autovettore si riportano le componenti fino al nodo 16 in mezzera.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 0,0342 & -0,068 & 0,101 & 0,1329 & \\
 0,068 & -0,133 & 0,1921 & 0,2429 & \\
 0,101 & -0,1922 & 0,2645 & 0,3109 & \\
 0,133 & -0,243 & 0,3109 & 0,3251 & \\
 0,1635 & -0,2831 & 0,3269 & 0,2831 & \\
 0,1922 & -0,3109 & 0,3109 & 0,1921 & \\
 0,2188 & -0,3251 & 0,2645 & 0,068 & \\
 0,243 & -0,3251 & 0,1921 & -0,068 & \\
 0,2645 & -0,3109 & 0,101 & -0,1921 & \\
 0,2831 & -0,2831 & 0 & -0,2831 & \\
 0,2987 & -0,243 & -0,101 & -0,3251 & \\
 0,3109 & -0,1922 & -0,1921 & -0,3109 & \\
 0,3198 & -0,133 & -0,2645 & -0,2429 & \\
 0,3252 & -0,068 & -0,3109 & -0,1329 & \\
 0,3269 & 0 & -0,3269 & 0 & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & 
 \end{bmatrix}$$

## 4.4 Identificazione numerica delle caratteristiche dinamiche

Il problema della determinazione dei parametri dinamici per la trave viene affrontato numericamente con approccio analogo a quello esposto in termini analitici ai 2.3, 2.4 e 2.5, approccio che ha poi condotto ai risultati sperimentali ai 3.3, 3.4 e 3.5.

La differenza tra quanto riportato al precedente §3 e quanto ora trattato sta nella modalità tramite la quale si determina la risposta della trave alla forzante impulsiva applicata nel nodo s-esimo: nel caso sperimentale è stata fornita dagli accelerometri posti sulla trave mentre in questo caso viene simulata a partire dai risultati di analisi transienti.

In particolare, con riferimento alla figura 3.18 che riporta la discretizzazione a 15DOFs adottata nelle indagini sperimentali, avendo utilizzato una discretizzazione con numero di nodi coincidente risulta possibile estrarre la risposta in termini di accelerazione dalle stesse posizioni dei nodi di output di laboratorio.

### 4.4.1 Simulazione della risposta sperimentale tramite analisi transiente

La tipologia di analisi adottata rientra nei metodi di integrazione delle equazioni del moto, integrazione che viene effettuata numericamente. Lo schema adottato è implicito, in quanto la risposta al passo è calcolata in funzione di uno o più valori calcolati allo stesso step (essendo il sistema in oggetto lineare lo schema diviene esplicito, come commentato di seguito).

L'equazione del moto da integrare è la seguente

$$(4.1) \quad \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{k}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t)$$

Con

$\mathbf{m}$  matrice di massa globale

$\mathbf{c}$  matrice di smorzamento globale

$\mathbf{k}$  matrice di rigidezza globale

$\mathbf{p}(t)$  vettore dei carichi applicato

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_s(t) \\ \vdots \\ p_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ p_s(t) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{u}(t)$  vettore degli spostamenti incogniti

$\dot{\mathbf{u}}(t)$  derivata temporale prima di  $\mathbf{u}(t)$

$\ddot{\mathbf{u}}(t)$  derivata temporale seconda di  $\mathbf{u}(t)$

Il metodo adottato per la risoluzione della (4.1), analoga alla precedente (2.22), è il metodo di Newmark. Tramite software la scelta del metodo si effettua come riportato al punto 1 evidenziato in figura 4.8 dove si riporta la finestra di Straus7 per il settaggio dell'analisi.

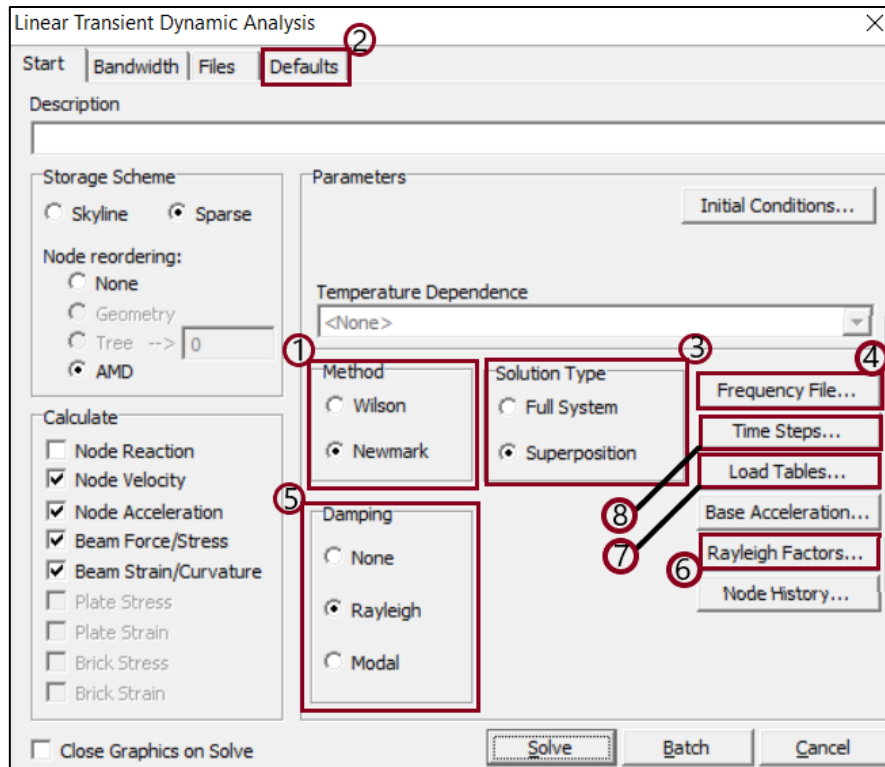


Figura 4. 7 Straus7 - Settaggio dell'analisi transiente lineare 7 – numerazione dei dettagli che descrivono l'analisi

Con riferimento alla descrizione proposta dal Theoretical manual del software il metodo è basato sull'assunzione di una variazione lineare dell'accelerazione all'interno di ogni passo temporale. Questo metodo è usato in Straus7 per analisi dinamiche transitorie lineari e non lineari, nel caso in esame si utilizza per analisi lineari.

Newmark sfrutta lo sviluppo in serie di Taylor dello spostamento e della velocità per determinare le incognite al passo  $i + 1$  note esse al passo  $i$ -esimo

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{u}_i \Delta t^2$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \ddot{u}_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \dddot{u}_i \Delta t^2$$

Dove si è indicato con

$$u_{i+1} = u(t_i + \Delta t) \quad ; \quad \dot{u}_{i+1} = \dot{u}(t_i + \Delta t)$$

$$u_i = u(t_i) \quad ; \quad \dot{u}_i = \dot{u}(t_i)$$



Newmark ha troncato lo sviluppo in serie e rappresentato le espressioni precedenti per le velocità e gli spostamenti alla fine di ogni passo temporale come di seguito:

$$(4.2) \quad u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \Delta t^2 \right] \ddot{u}_i + \alpha \Delta t^2 \ddot{u}_{i+1}$$

$$(4.3) \quad \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \ddot{u}_i [(1 - \beta) \Delta t] + \beta \Delta t \ddot{u}_i$$

con  $\alpha$  e  $\beta$  parametri di integrazione.

Il valore dei coefficienti  $\alpha$  e  $\beta$  adottati per svolgere le analisi è:

$$\alpha = 0,25 ; \beta = 0,5$$

Che corrispondono ai valori di default del software straus7 (fig.4.8)

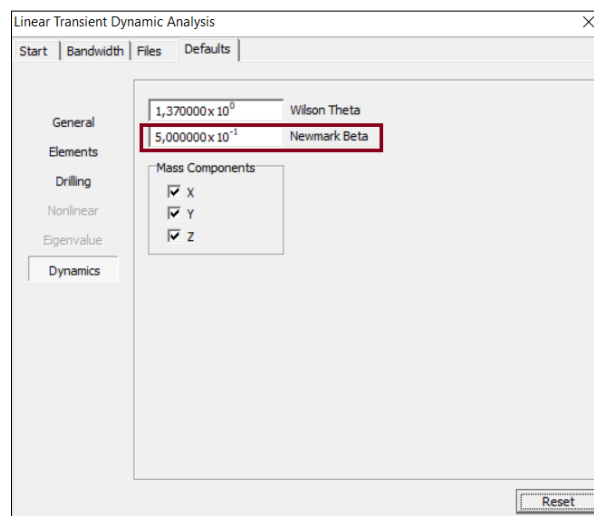


Figura 4.8 Straus7 – dettaglio 2 di figura 4.7 - settaggio del parametro di integrazione  $\beta$  per il metodo di Newmark

Il valore di  $\alpha$  è dedotto dalla seguente espressione:

$$\alpha = 0,25(0,5 + \beta)^2 = 0,25(0,5 + 0,5)^2 = 0,25$$

La coppia di coefficienti conduce alla regola del trapezio, la quale assume che durante gli step temporali l'accelerazione è costante ed uguale alla media tra  $\ddot{u}_i$  e  $\ddot{u}_{i+1}$ .

Osservando le relazioni (4.2) e (4.3) si nota che per determinare le quantità al passo  $i + 1$  è necessario avere note quantità sia al passo  $i$  che al passo  $i + 1$ , questo implica che all'interno di ogni passo è necessario un metodo iterativo che permetta la determinazione di tali dati.

Nel caso esaminato il sistema è lineare ed il metodo di Newmark, come accennato in precedenza, esplicito. Tale conclusione si ottiene sostituendo le (4.2) e (4.3) nell'equazione del moto (4.1): relativamente al passo  $i + 1$

$$m\ddot{u}_{i+1} + c[\dot{u}_i + \ddot{u}_i[(1 - \beta)\Delta t] + \beta \Delta t \ddot{u}_i] + k[u_i + \dot{u}_i \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \Delta t^2 \right] \ddot{u}_i + \alpha \Delta t^2 \ddot{u}_{i+1}] = p_{i+1}$$

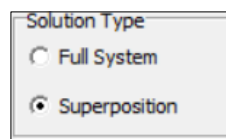
che riarrangiata conduce a

(4.4)

$$[m + c\beta\Delta t + k\alpha\Delta t^2]\ddot{u}_{i+1} = p_{i+1} - c[\dot{u}_i + \ddot{u}_i[(1 - \beta)\Delta t]] - k[u_i + \dot{u}_i\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\Delta t^2\right]\ddot{u}_i]$$

Dalla (4.4) si osserva che la risposta  $\ddot{u}_{i+1}$  al passo  $i + 1$  dipende solo da quantità al passo  $i$ -esimo. Noto  $\ddot{u}_{i+1}$  dalle (4.2) e (4.3) è possibile calcolare la velocità e lo spostamento al passo  $i + 1$ .

Il tipo di soluzione fornita sfrutta il metodo della sovrapposizione modale, metodo descritto al precedente paragrafo 2.2.2, è selezionato tramite il punto 3 della schermata in figura 4.7



tale metodo risulta sufficientemente appropriato al caso in esame essendo possibile, vista la semplicità della configurazione, includere anche i modi alti nella sovrapposizione, modi che possono giocare un ruolo nella risposta a fronte della tipologia di forzante utilizzata.

L'utilizzo del "mode superposition method" implica che prima di risolvere l'analisi transiente deve essere effettuata per la struttura modellata un'analisi modale, descritta al precedente 2.2.1. (figura 4.4).

Tramite software, con riferimento al tasto riportato al punto 4 evidenziato in figura 4.6 si inserisce il file relativo all'analisi natural frequency includendo i modi da considerare come di seguito riportato (fig.4.9)

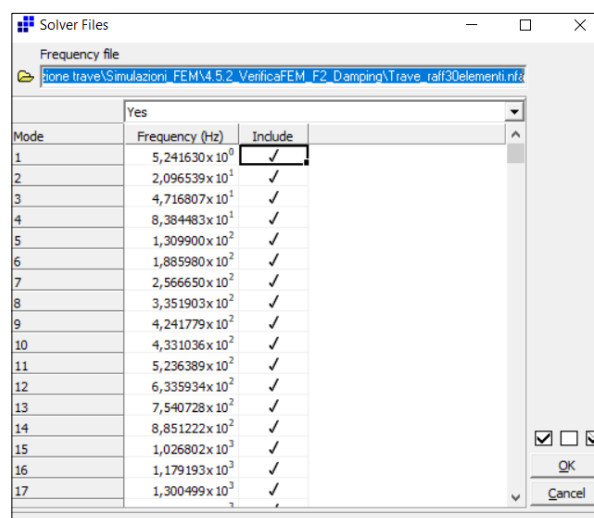


Figura 4. 9 Straus7 – dettaglio 4 di figura 4.7 - inserimento dei modi da considerare per la risoluzione dell'analisi transiente

Un importante vantaggio del metodo della sovrapposizione modale è che può essere utilizzato lo smorzamento modale. Come indicato al punto 5 di figura 4.7 si utilizza per calcolare la risposta della trave il modello di smorzamento proporzionale, denominato Rayleigh damping, introdotto al paragrafo 2.2.2.1.

Con riferimento alle misure sperimentali del damping modale effettuate al paragrafo 3.5 si fissano gli indici di smorzamento del primo e quarto modo pari a

$$\xi_1 = \xi_4 = 0,01$$

Inseriti con riferimento al punto 6 di figura 4.7 (fi.4.10)

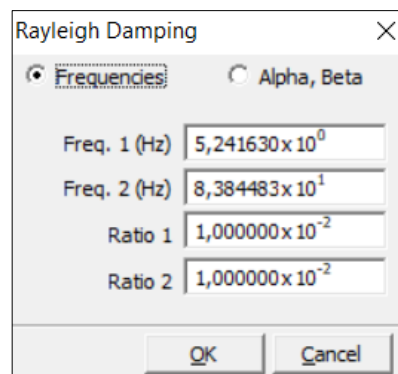


Figura 4. 10 Straus7 – dettaglio 6 di figura 4.7 – inserimento degli indici di smorzamento modale da utilizzare per il modello Rayleigh damping

Per cogliere numericamente una risposta quanto più possibile vicina a quella sperimentale si è adottato nel software uno degli impulsi rilevati in laboratorio; si riporta nel successivo grafico 2.2 l'andamento dell'impulso inserito nella table del software straus7:

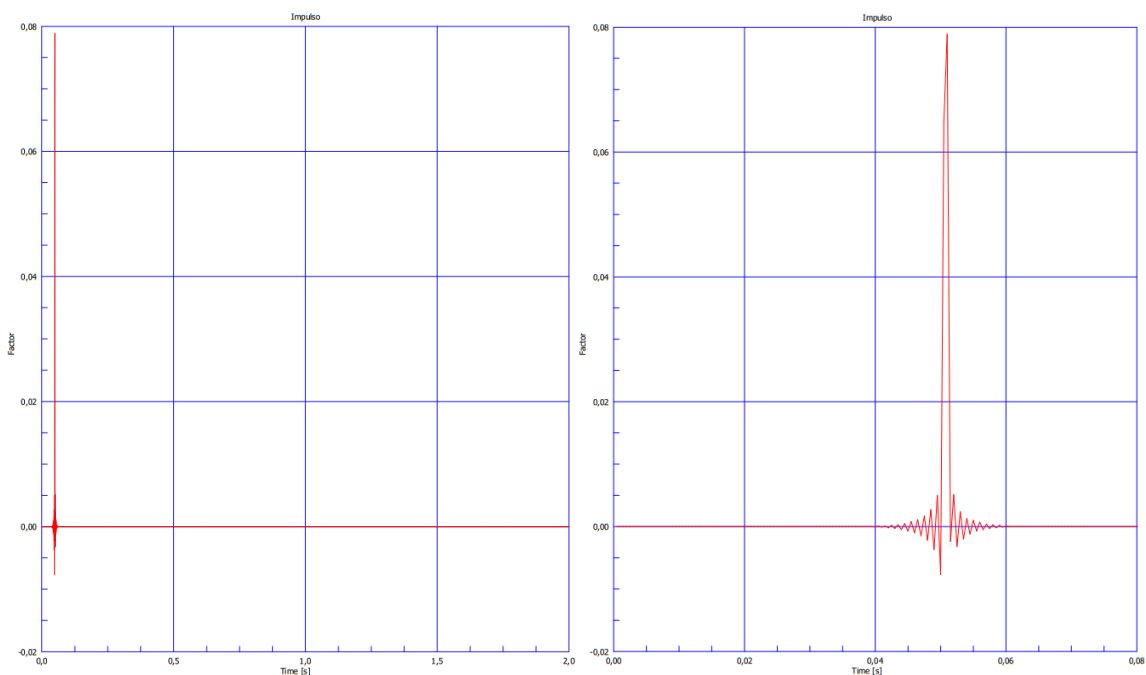


Grafico 4.2 Straus7 – Time Table relativa all'impulso simulato numericamente

Volendo simulare un'indagine di laboratorio con discretizzazione a 15 DOFs nel software, a seguito dell'inserimento della table factor vs time per la descrizione dell'impulso, sono stati creati 15 casi di carico corrispondenti alle quindici battute simulate (un esempio si riporta in figura 4.11).

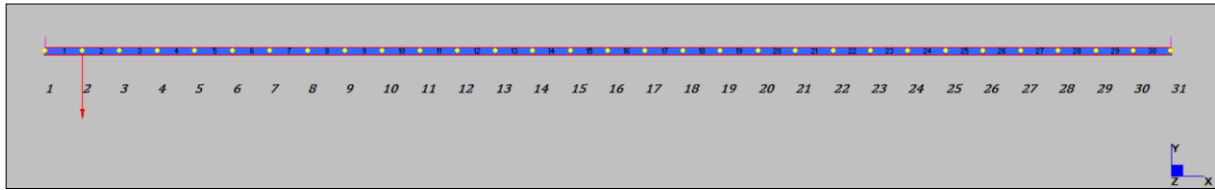


Figura 4. 11 Straus7 – caso di carico 1 “Battuta DOF1” – simulazione indagine di laboratorio a 15DOFs

Tramite il punto 7 di figura 4.7 è possibile correlare l'andamento della Time Table relativa all'impulso con il grado di libertà che si vuole forzare (fig.4.12)

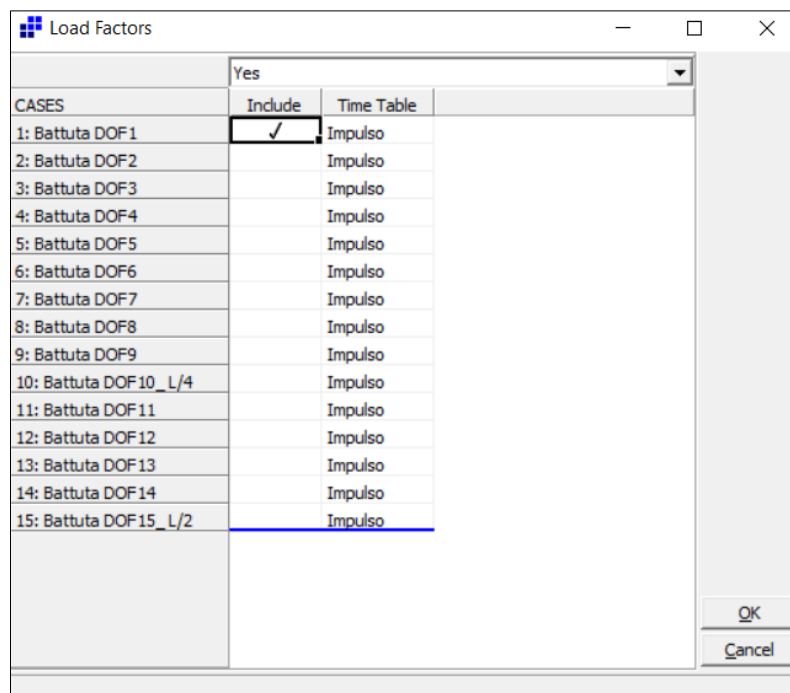


Figura 4. 12 Straus7– dettaglio 7 di figura 4.7- inserimento della forzante nell'analisi transiente

Gli ultimi parametri dell'analisi, necessari per risolvere l'equazione del moto (4.1), si inseriscono al punto 8 evidenziato in figura 4.7 e sono:

*Steps*: numero di passi che discretizzano la risposta nel tempo

*Timesteps*: ampiezza di ogni step in secondi [s]

*Save every*: tramite il quale si sceglie ogni quanti passi salvare la risposta

Parametro fondamentale per il corretto funzionamento dei metodi di integrazione delle equazioni del moto è il *Timesteps*  $\Delta t$ , sulla base di questo si definisce la stabilità e l'accuratezza del metodo.

Per il metodo dell'accelerazione media adottato per le analisi il timestep critico  $\Delta t_{cr}$ , oltre al quale il metodo risulta instabile, risulta pari ad infinito

$$\Delta t_{cr} = \frac{T_n}{\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta - 2\alpha}}$$

essendo  $\frac{1}{\sqrt{\beta - 2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{0,5 - 2 \cdot 0,25}} = \infty$

con:

$T_n$  periodo proprio di riferimento per la struttura, periodo del primo modo di vibrare;  
 $\alpha, \beta$  parametri di integrazione di Newmark;

la stabilità non risulta quindi vincolante per la scelta del  $\Delta t$ .

Per quanto riguarda invece l'accuratezza si è fatto riferimento a due criteri e si è valutato il timestep minimo tra i due

$$\Delta t = \min\left(\frac{1}{2 \cdot f_{max}}; \frac{T_n}{10}\right) = \min\left(\frac{1}{2 \cdot 500}; \frac{1/5,24163}{10}\right) = 10^{-3}s$$

Si indica con  $f_{max}$  il massimo contenuto in frequenza della forzante. Osservando la trasformata del segnale inserito nella time table riportata al grafico 4.2 si riscontra che  $f_{max} = 500Hz$  come atteso dal manuale dello strumento. (grafico 4.3 cfr. grafico3.1)

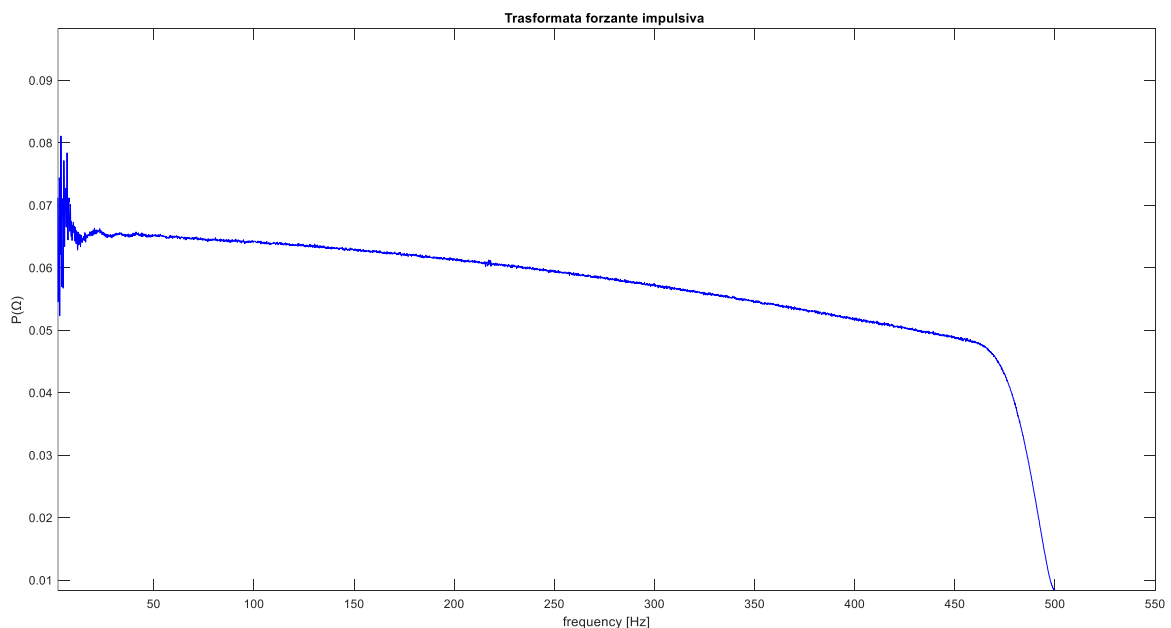


Grafico 4. 3 Trasformata del segnale acquisito in laboratorio ed inserito nella table di Straus7

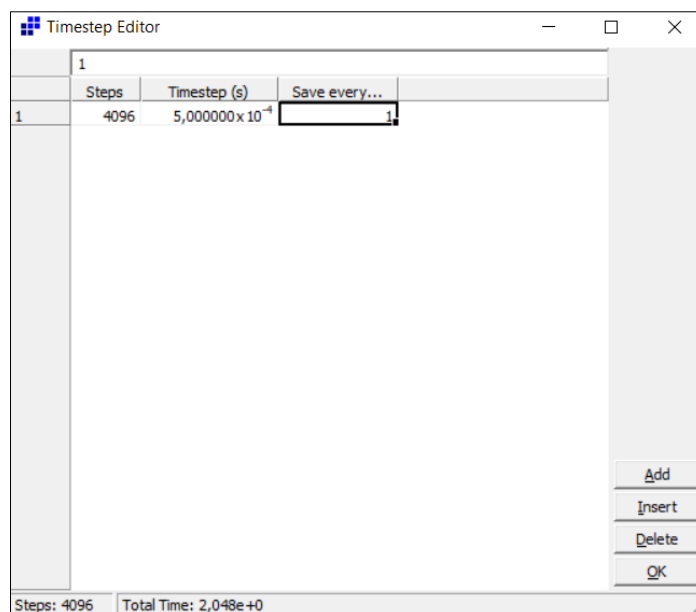


Figura 4. 13 Straus7 – dettaglio 8 di figura 4.7 – inserimento dei parametri per il salvataggio della risposta della trave alla forzante impulsiva

I parametri stabiliti per la prima analisi numerica prendono le mosse del set di parametri della prima indagine sperimentale:

$$Steps = 4096$$

$$Timesteps = 5 \cdot 10^{-4}s < 10^{-3}s$$

$$Save\ every: 1$$

si riporta in tab.4.5 un estratto della precedente tabella 3.2.

$N_{DOF}$	Indagini	$f_s[Hz]$	$N_p [I]$	$f_{min} [Hz]$	$T_{tot} [s]$
15	1	2000	4096	0,488	2,048

Tabella 4. 5 Estratto della tabella 3.2 – set di parametri utilizzato per l'analisi sperimentale

Stabiliti i parametri è possibile simulare la prova di laboratorio effettuando 15 diverse analisi transienti, eseguite cambiando volta per volta il caso di carico nella schermata riportata alla precedente figura 4.12.

La soluzione ottenuta dalle analisi è ovviamente molto più ricca di informazioni rispetto all'analogia acquisizione effettuata in laboratorio, ai fini della validazione della rielaborazione sperimentale dei dati si pone interesse al solo output in termini di accelerazione in direzione y ottenuto in corrispondenza dei nodi 11 e 16 del modello FEM. Quanto ora descritto conduce ad output formalmente analoghi a quelli sperimentali mentre differisce nell'input, in quanto questo risulta lo stesso per ogni nodo.

#### 4.4.2 Individuazione delle frequenze proprie a seguito di simulazione

Note le 15 time history dedotte dalle 15 analisi transienti per ognuno dei due nodi di interesse si procede a presentare l'identificazione delle frequenze proprie come fatto al paragrafo 3.3 tramite peak picking a partire dagli andamenti delle trasformate relative alla battuta simulata nel DOF5 (grafici 4.4 e 4.5). In ordinate si indica con pedice 1 l'output riferito al nodo 16 ad L/2 e con pedice 2 quello riferito al nodo 11 ad L/3.

L'obiettivo principale di tale analisi è la validazione della procedura sperimentale seguita per l'identificazione delle caratteristiche dinamiche, di conseguenza si sceglie in tal caso di porre attenzione ai soli primi quattro modi flessionali per la trave.

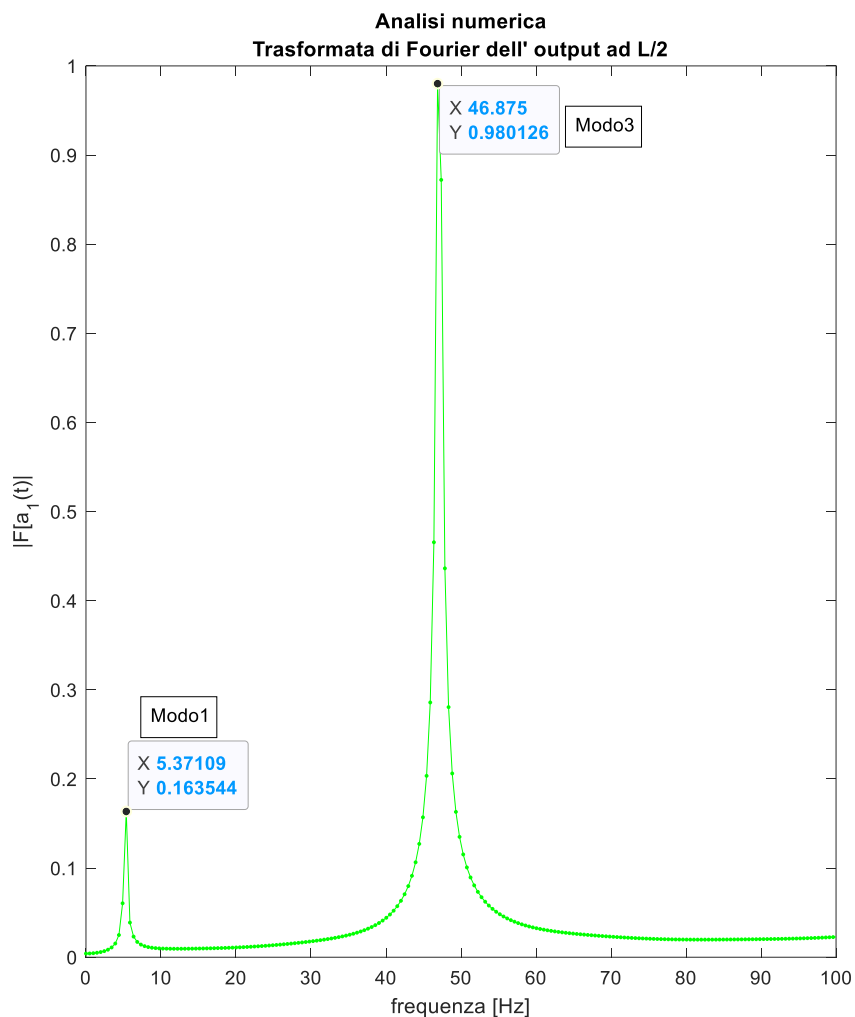


Grafico 4. 4 Simulazione numerica indagine 1 - Trasformata di Fourier dell'output ad L/2

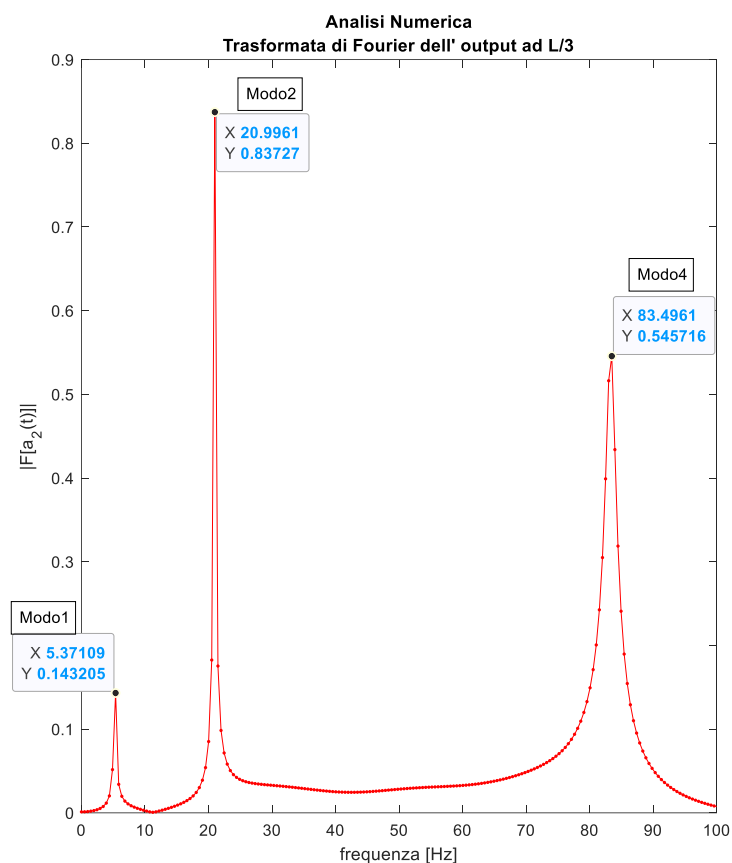


Grafico 4. 5 Simulazione numerica indagine 1 - Trasformata di Fourier dell'output ad L/3

Le frequenze proprie rilevate si riportano in tabella 4.7 a confronto con quelle ottenute da analisi modale già presentate al precedente 4.3 (Tab 4.4)

Modi	Frequenze proprie	
	Ottenute da analisi modale	Ottenute da simulazione tramite analisi transiente
1	5,24163 Hz	5,3711 Hz
2	20,96539 Hz	20,9961 Hz
3	47,16807 Hz	46,875 Hz
4	83,84483 Hz	83,4961 Hz

Tabella 4. 6 Confronto tra frequenze proprie ottenute nel modello FEM da analisi modale e da simulazione tramite analisi transiente

Dai risultati riportati in tabella si osserva il degrado nell'accuratezza delle frequenze proprie rilevate dalle trasformate delle timehistory rispetto a quelle di analisi modale al crescere dell'indice di modo.



#### 4.4.3 Identificazione delle forme modali tramite FRF a seguito di simulazione

Procedendo alla determinazione numerica delle forme modali, a partire dai risultati delle analisi nel dominio del tempo nei due nodi di interesse si procede al calcolo delle FRF con le tre modalità introdotte al 2.5.

- Stima diretta FRF, relazione (2.51)

$$\mathbf{A}_{rs}(\Omega) = \frac{F[\mathbf{a}_r(t)]}{F[\mathbf{p}_s(t)]}$$

- Stima del valore assoluto delle FRF tramite PSD, relazione (3.5)

$$|\mathbf{A}_{rs}(\Omega)|^2 = \frac{\mathbf{S}_{a_r}(\Omega)}{\mathbf{S}_{p_s}(\Omega)}$$

- Stima delle FRF tramite CPSD, relazione (3.6)

$$\mathbf{A}(\Omega) = \frac{\mathbf{S}_{a_r p_s}(\Omega)}{\mathbf{S}_{p_s}(\Omega)}$$

Con  $\mathbf{p}_s(t)$  (grafico 4.2) avente analogo andamento per ogni analisi.

Nei grafici a cascata riportati ai successivi paragrafi 4.4.3.1, 4.4.3.2 e 4.4.3.3 si rappresentano le seguenti grandezze:

- Asse **x**: Frequenza espressa in Hz
- Asse **y**: Gradi di libertà (DOF) che discretizzano la trave nello spazio (vincolo di appoggio a zero e mezzeria al DOF 15)
- Asse **z**: Funzioni di trasferimento relative ai nodi 11 e 16 in cui si è estratta la risposta

### 4.4.3.1 Stima diretta

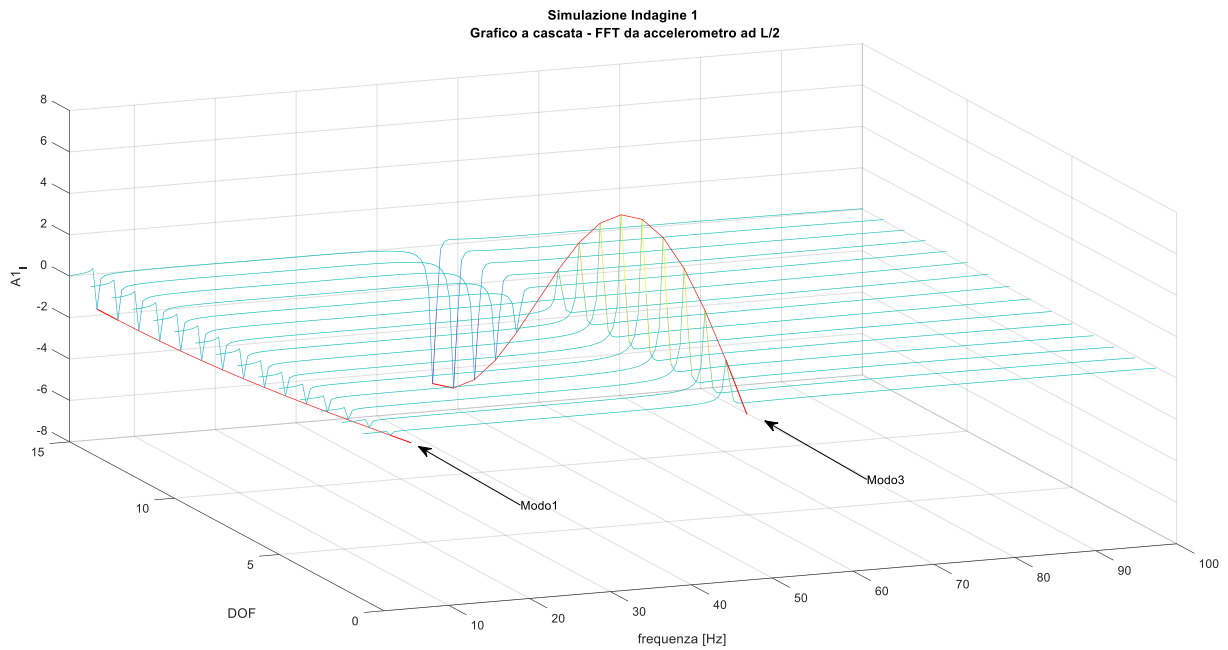


Grafico 4. 6 Simulazione numerica Indagine 1 – stima delle forme modali di metà trave (15 DOFs) a partire dalle FRF ottenute dall'output nel nodo ad L/2

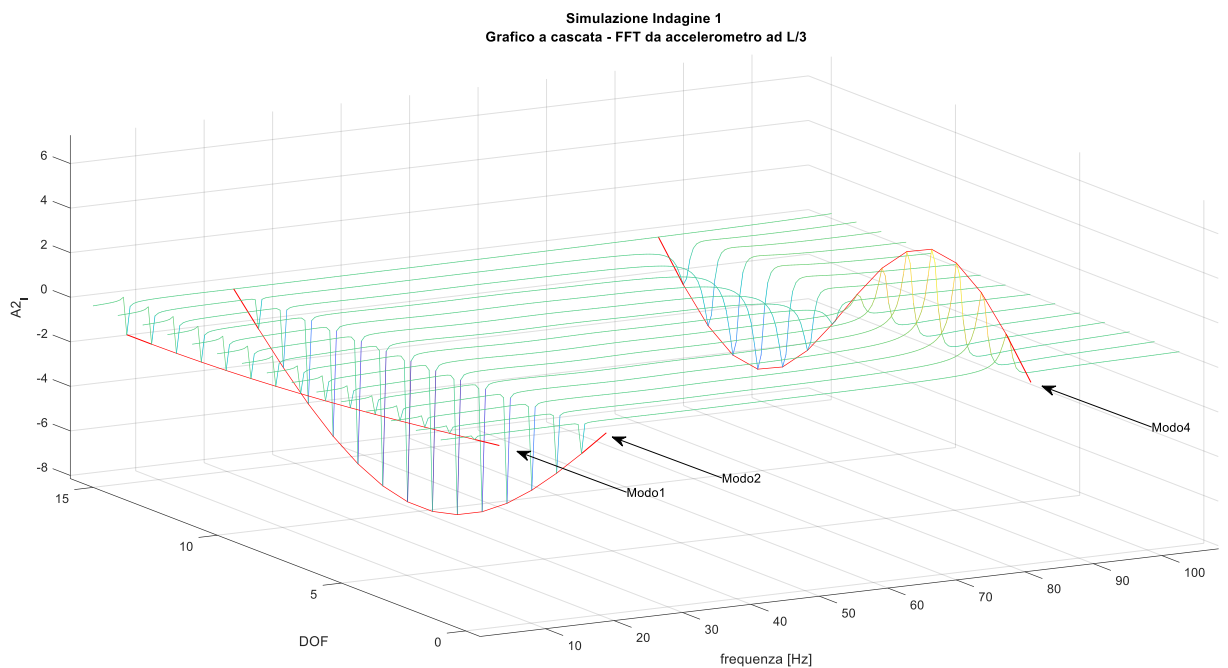


Grafico 4. 7 Simulazione numerica Indagine 1 – stima delle forme modali di metà trave (15 DOFs) a partire dalle FRF ottenute dall'output nel nodo ad L/3

### 4.4.3.2 Stima tramite PSD

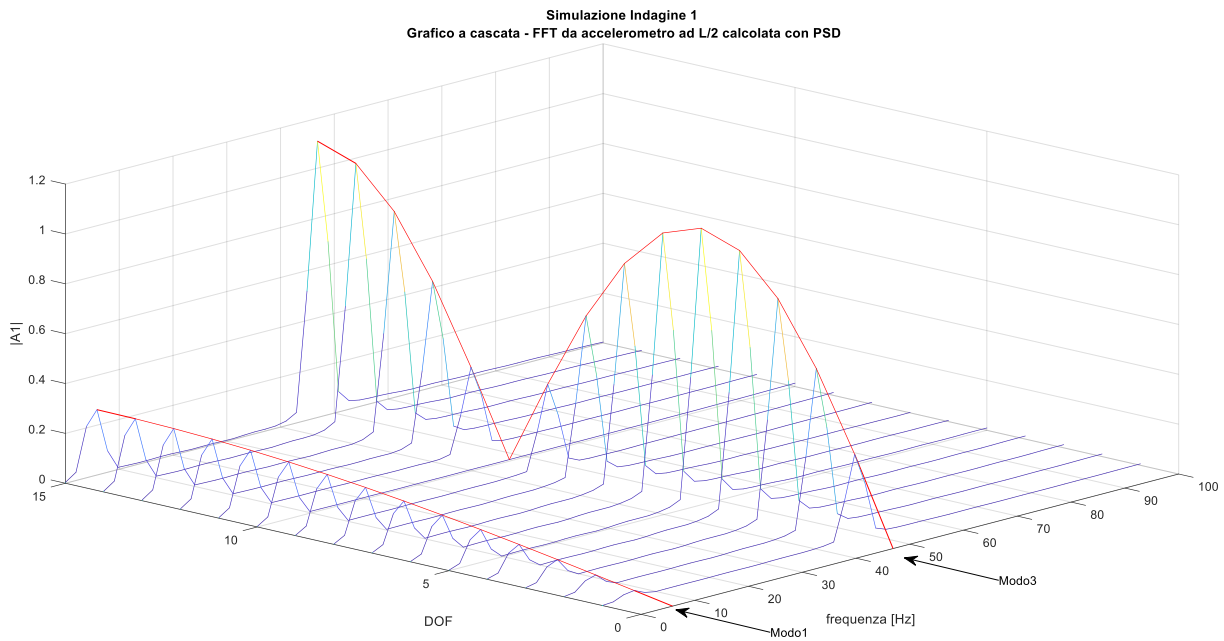


Grafico 4. 8 Simulazione numerica Indagine 1 – stima delle forme modali in valore assoluto di metà trave (15DOFs) a partire dalle FRF calcolate con PSD dall'output nel nodo ad L/2

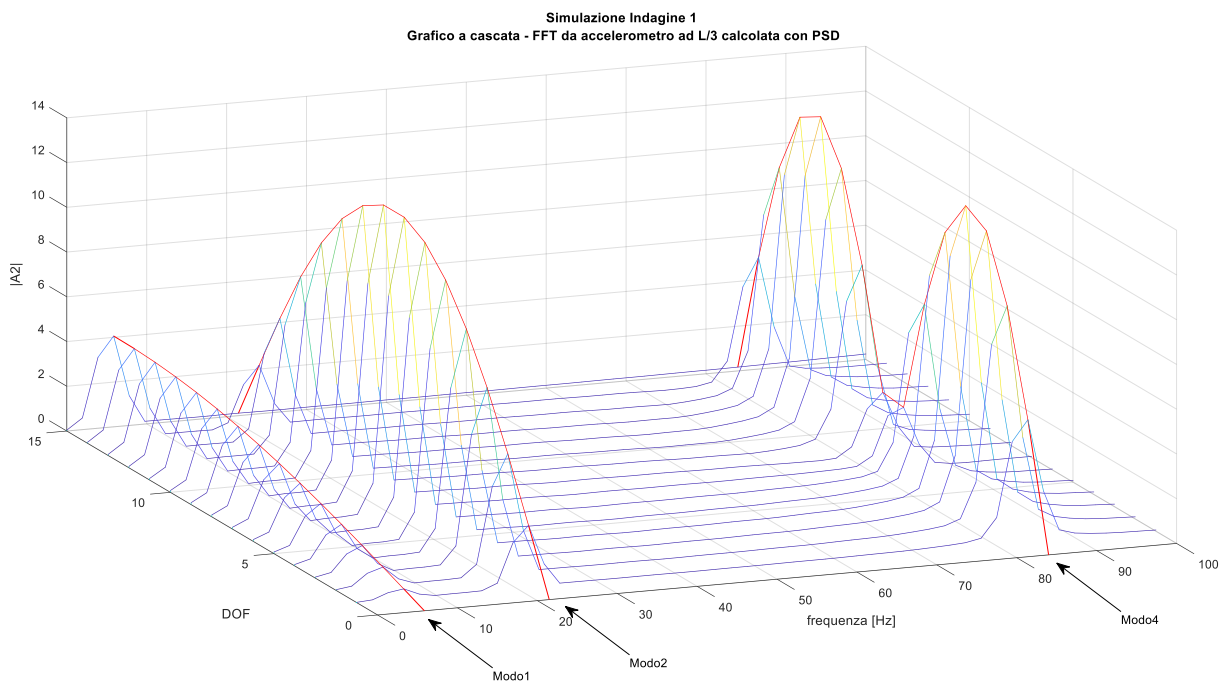


Grafico 4. 9 Simulazione numerica Indagine 1 – stima delle forme modali in valore assoluto di metà trave (15DOFs) a partire dalle FRF calcolate con PSD dall'output nel nodo ad L/3

### 4.4.3.3 Stima tramite CPSD

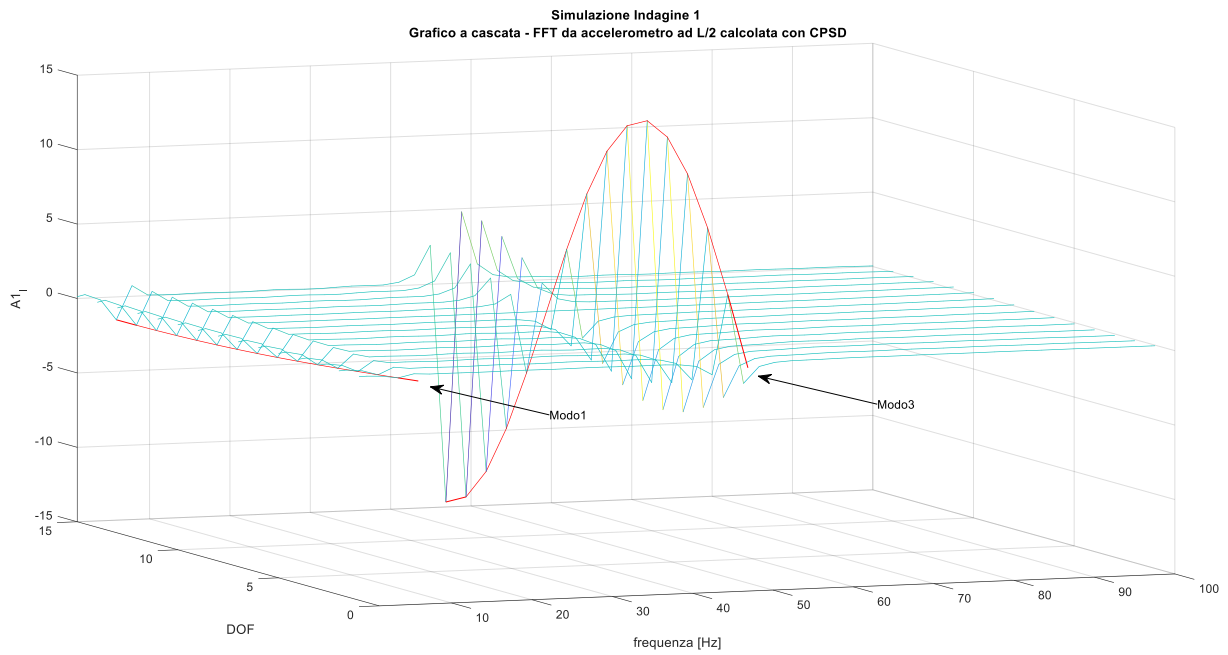


Grafico 4. 10 Simulazione numerica Indagine 1 – stima delle forme modali in valore assoluto di metà trave (15DOFs) a partire dalle FRF calcolate con CPSD dall'output nel nodo ad L/2

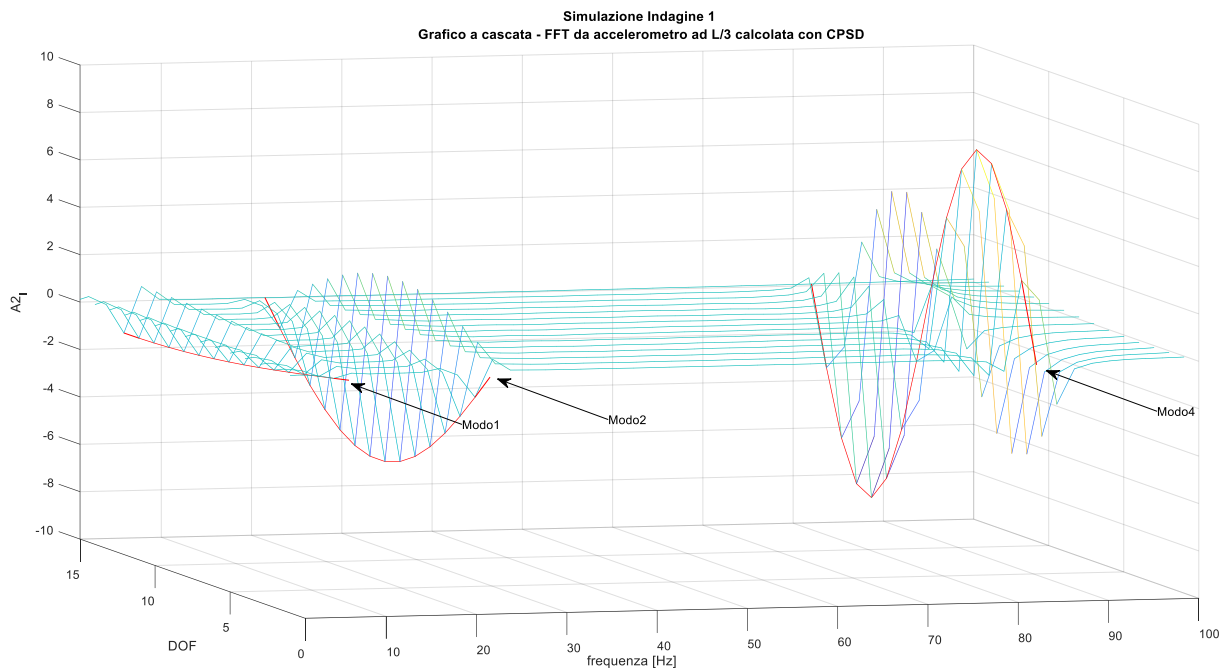


Grafico 4. 11 Simulazione numerica Indagine 1 – stima delle forme modali in valore assoluto di metà trave (15DOFs) a partire dalle FRF calcolate con CPSD dall'output nel nodo ad L/3

I risultati ottenuti dalle analisi numeriche validano la procedura adottata per la determinazione delle forme modali in quanto queste sono ben riconoscibili dai grafici presentati ai paragrafi precedenti.

Si osserva inoltre che quanto introdotto a commento del precedente 3.4 relativamente alla parte immaginaria prevalente rispetto a quella reale non risulta verificata nella simulazione numerica dell'indagine 1, come accadeva anche per l'indagine sperimentale, vista l'elevata frequenza minima che discretizza le funzioni di trasferimento. Tale circostanza è anche validata dalla tabella 4.7 mostrata al precedente 4.4.2 che mostra uno shift tra le frequenze crescente dal primo al quarto modo e che risulta già pari a 0,13Hz per il primo modo. Estraevo dalla tabella 4.7 ora richiamata la riga relativa al terzo modo

Modi	Frequenze proprie	
	Ottenute da analisi modale	Ottenute da simulazione tramite analisi transiente
3	47,16807 Hz	46,875 Hz

ed andando a graficare la parte reale delle FRF riportate nel grafico 4.6,

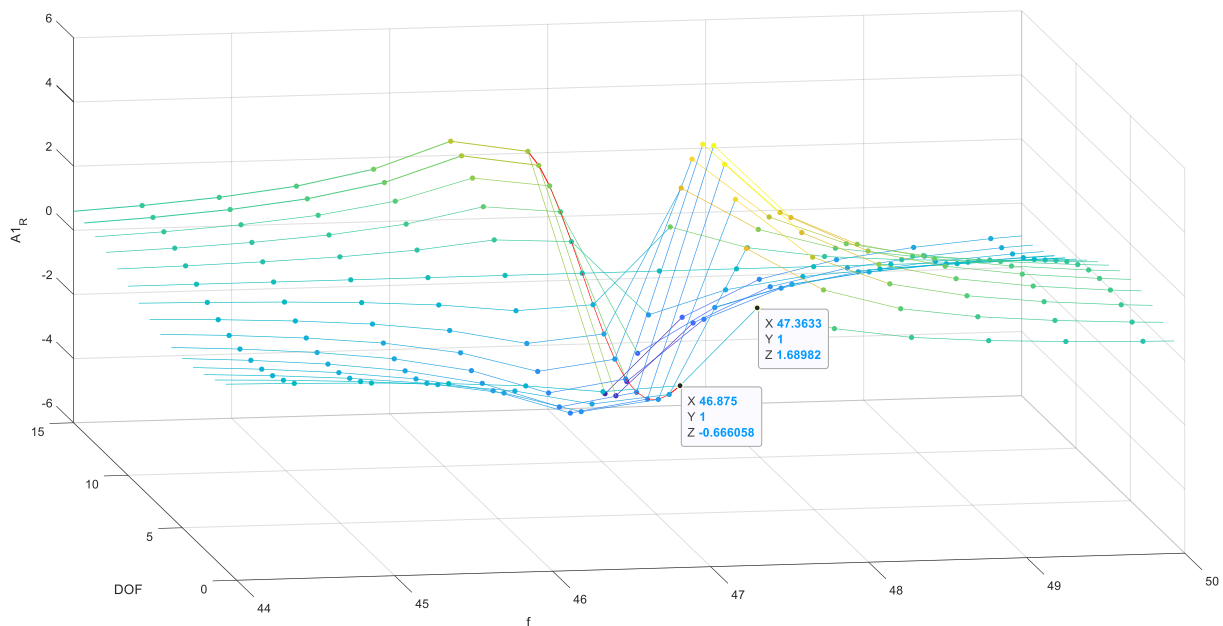


Grafico 4. 12 Simulazione numerica Indagine 1 - Dettaglio del grafico 4.6, modo 3 – andamento della Parte reale delle FRF ottenute tramite stima diretta

si nota che se fosse presente un punto tra i due evidenziati allora la parte reale risulterebbe circa nulla, come rilevato per le indagini sperimentali 2 4 e 5, intervallo entro il quale ricade la frequenza calcolata da analisi modale:

$$47,3633\text{Hz} < 47,16807\text{Hz} < 46,875\text{Hz}$$

## 4.5 Test algoritmo di identificazione

Nel presente paragrafo, come anticipato nell'introduzione al capitolo, si procede al test dell'algoritmo di identificazione tramite analisi numeriche.

I test che si riportano ai successivi 4.5.1 e 4.5.2 consistono rispettivamente in:

- Identificazione dell'incremento di rigidezza introdotto nel modello FEM, presentato al 4.3, andando a variare la rigidezza flessionale di un elemento Beam a step successivi al fine di calibrare l'irrigidimento da inserire sperimentalmente.

L'identificazione si basa in questo primo test sulle forme modali dedotte dal problema agli autovalori risolto per i vari modelli con software Straus 7 (Cfr. figure 4.4 e 4.6). Si osserva che in tal caso essendo note tutte le coordinate modali si procederà all'identificazione sull'intero modello della trave.

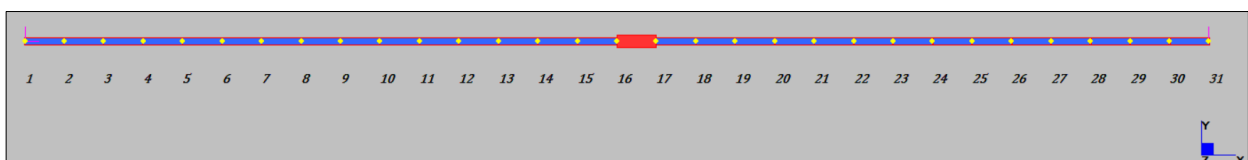
- Fissata una modalità di irrigidimento si procede alla sua identificazione in base alle forme modali dedotte da FRF simulate numericamente, come fatto al 4.4.3. Del test ora descritto i risultati saranno riportati seguendo la modalità di esposizione del precedente paragrafo 3.7.

### 4.5.1 Analisi parametrica con forme modali dedotte da analisi modale

Come anticipato l'identificazione degli irrigidimenti inseriti nei modelli generati per effettuare il test verrà identificata con riferimento ai nodi del modello riportati in figura 4.13 e sarà effettuata in questo caso su tutta la lunghezza della trave visto che sono note ai vari step le coordinate modali di tutti i modi

#### Modalità di irrigidimento

Nei vari step di irrigidimento si va a modificare sempre lo stesso elemento beam, che ricade tra i nodi 16 e 17 del modello, come riportato in figura 4.13



*Grafico 4. 13 Straus7 – irrigidimento locale introdotto nel modello FEM – test algoritmo di identificazione con forme modali dedotte da analisi modale*

Come noto il parametro di rigidezza di interesse per l'identificazione è la rigidezza flessionale, in tal caso si va a modificare il parametro nella porzione di trave discreta e di lunghezza pari a

10cm intervenendo sul momento di inerzia, denominato nel software  $I_{11}$ , tramite incremento dell'altezza per la sezione trasversale.

Si riportano in tab.4.7 i valori del momento di inerzia ottenuti per l'elemento tra i nodi 16 e 17 nei quattro modelli realizzati per il test (figura 4.14); si ricorda che il valore di riferimento per trave intatta, riportato in figura 4.2, vale:

$$I_{11_0} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{[40,06 \cdot 10^{-3} \cdot (20,02 \cdot 10^{-3})^3]}{12} = 2,678 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

Modifica n.	$I_{11}$ [ $\text{m}^4$ ]	$I_{11}/I_{11_0}$
1	9,04E-08	3,38
2	6,59E-08	2,46
3	4,63E-08	1,73
4	3,57E-08	1,33

Tabella 4. 7 Valori del momento di inerzia utilizzati per l'elemento tra i nodi 16 e 17 nei quattro modelli realizzati per il test con forme modali da analisi natural frequency

Come evidenziato nell'ultima colonna di tab. 4.7 l'incremento del momento di inerzia, e di conseguenza di rigidezza flessionale, della porzione interessata dalla modifica è decrescente al crescere dell'indice di modifica.

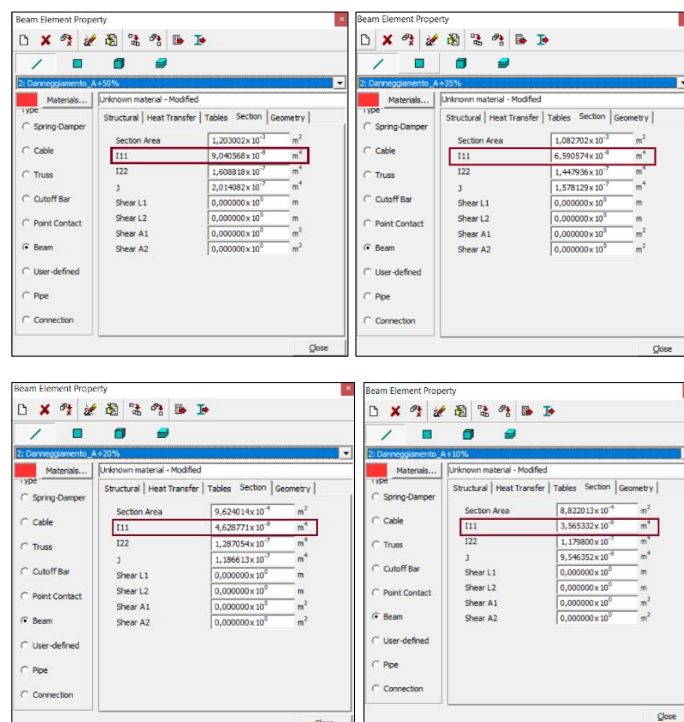


Figura 4. 14 Straus7 – dettaglio delle variazioni al momento di inerzia per i quattro modelli realizzati, test con forme modali da analisi natural frequency

In tal modo è possibile stabilire l'entità dell'incremento che può essere colta dall'algoritmo.

### Modalità di elaborazione dati

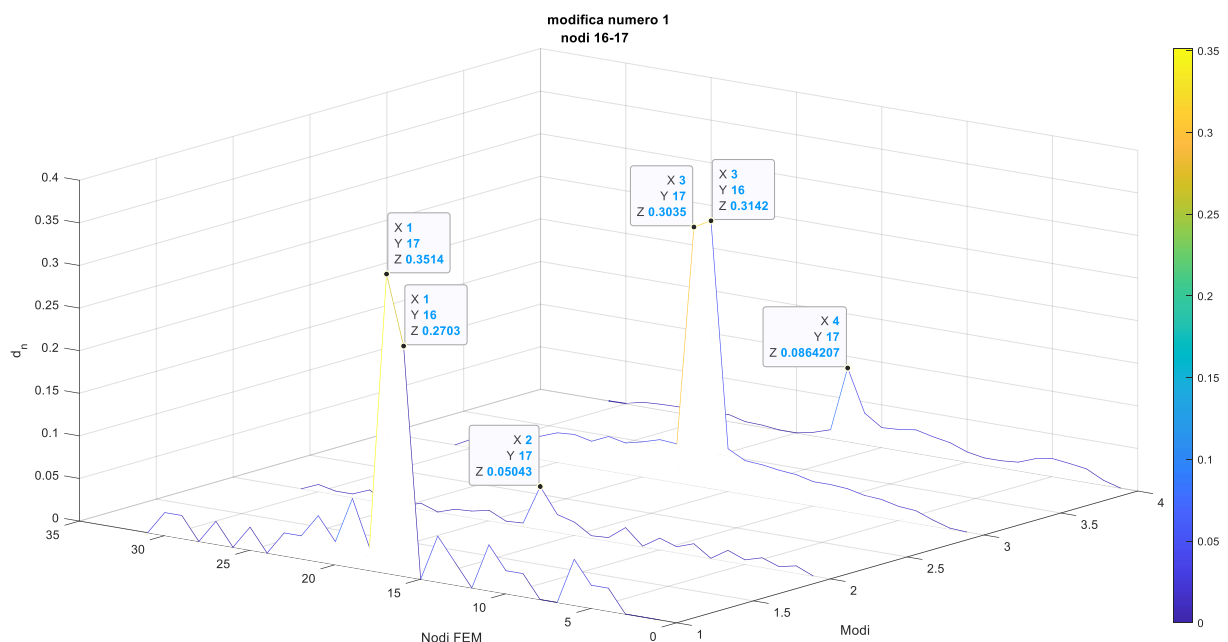
Dai quattro modelli FEM ora descritti sono state estratte le coordinate modali relative ai primi quattro modi di vibrare, ottenute come anticipato dall'output dell'analisi natural frequency, ed analogamente si è fatto per il modello iniziale.

Note le forme modali per l'intera trave modellata è stata calcolata la curvatura modale e la differenza assoluta tra le curvatures come descritto in dettaglio agli step 4 e 5 esposti nel paragrafo 3.7.

### Risultati dell'identificazione numerica

La modalità tramite la quale si espongono i risultati è la rappresentazione a cascata delle differenze assolute tra le curvatures, si riporta lungo gli assi:

- Asse **x**: indici di modo;
- Asse **y**: discretizzazione della trave nello spazio, vincolo di appoggio nel nodo 1 e mezzeria nel nodo 16;
- Asse **z**: differenze assolute  $d_n$  tra le curvatures modali normalizzate calcolate per trave in configurazione iniziale e variata.



*Grafico 4. 14 Modifica 1 - Differenze assolute tra le curvatures modali valutate in configurazione iniziale e variata calcolate tramite analisi numerica, test con forme modali da analisi natural frequency – variazione tra i nodi 16-17*



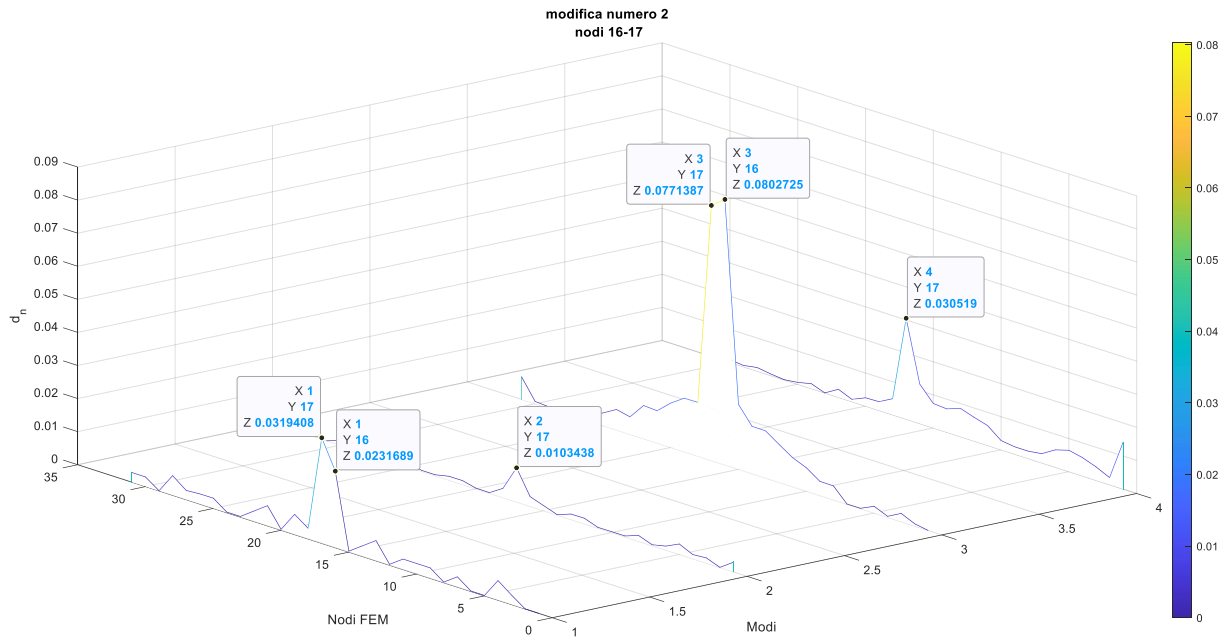


Grafico 4. 15 Modifica 2 - Differenze assolute tra le curvatures modali valutate in configurazione iniziale e variata calcolate tramite analisi numerica, test con forme modali da analisi natural frequency – variazione tra i nodi 16-17

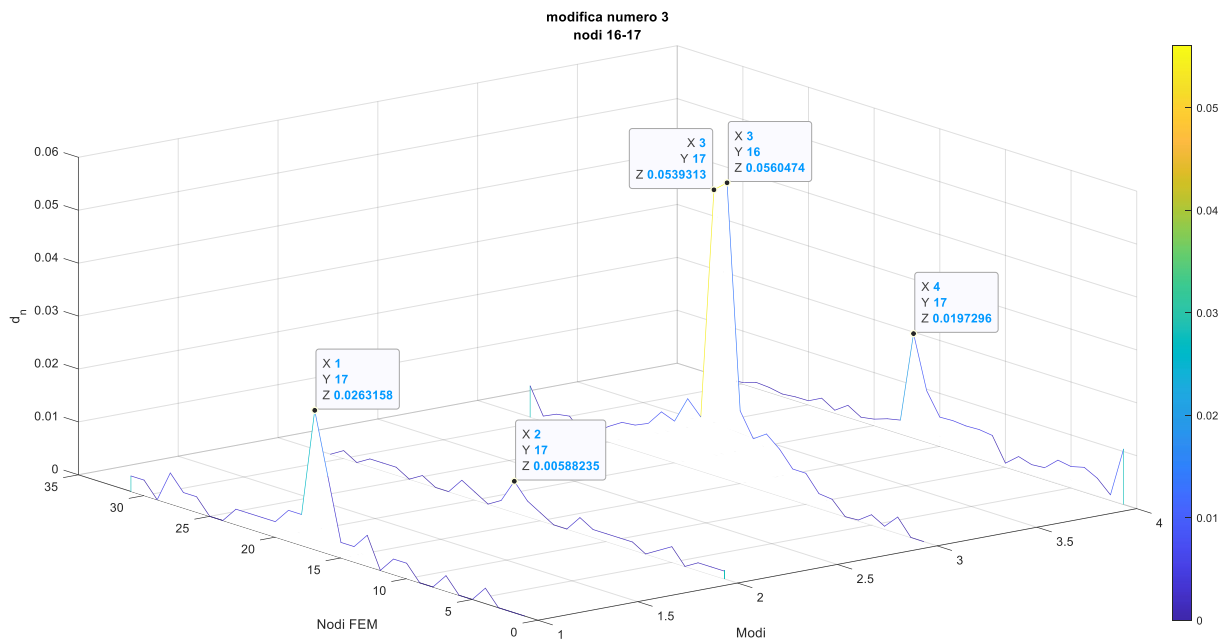
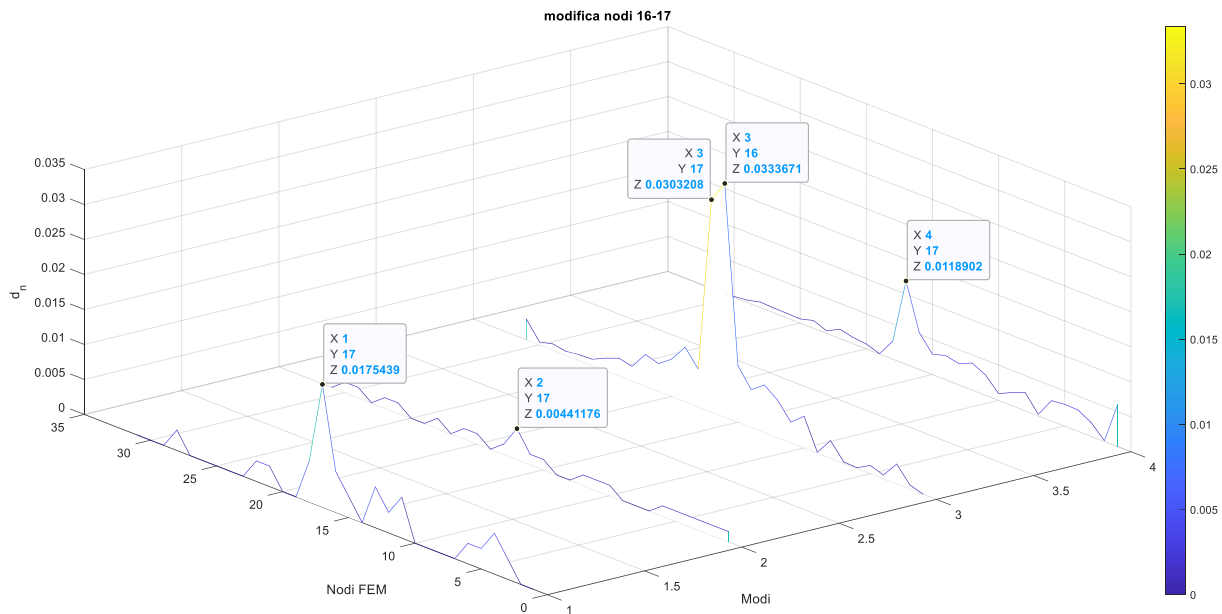


Grafico 4. 16 Modifica 3 - Differenze assolute tra le curvatures modali valutate in configurazione iniziale e variata calcolate tramite analisi numerica, test con forme modali da analisi natural frequency – variazione tra i nodi 16-17



*Grafico 4. 17 Modifica 4 - Differenze assolute tra le curvatures modali valutate in configurazione iniziale e variata calcolate tramite analisi numerica, test con forme modali da analisi natural frequency – variazione tra i nodi 16-17*

Si osserva che l’algoritmo risulta prestante in tutti i casi di danneggiamento, la modifica viene correttamente identificata da tutti e quattro i modi considerati, non si riportano i grafici del Curvature Damage Factor relativi a quelli ora rappresentati in quanto da questi ultimi risulta già evidente l’esito positivo dell’identificazione numerica.

Si osserva che al decrescere dell’incremento di rigidità, quindi passando dalla prima verso la quarta modifica, l’ordine di grandezza delle differenze tra le curvatures cala progressivamente, come evidenziato dalla colorbar allegata a ciascun grafico.

Dal test si traggono le conclusioni seguenti:

- L’introduzione di un incremento di rigidità flessionale nella configurazione, non descrivibile come un danneggiamento vero e proprio, risulta rilevante ai fini della validazione dell’algoritmo di identificazione.
- Il cambiamento nelle curvatures modali aumenta all’aumentare della variazione di rigidità inserita nel modello

#### **4.5.2 Test con forme modali da FRF**

Con riferimento all’incremento di rigidità numero 5 (tab 4.7) introdotto al precedente paragrafo 4.5.1 si procede a ricavare le forme modali di metà trave per la configurazione variata, la modalità utilizzata è analoga a quella esposta al 4.4.3 per la configurazione iniziale.

Per poter identificare graficamente il danno dal plot waterfall, visto che con la procedura introdotta si calcolano le coordinate modali di metà trave, si posiziona in questo caso la modifica tra i nodi 13 e 14 del modello come di seguito riportato in figura 4.15

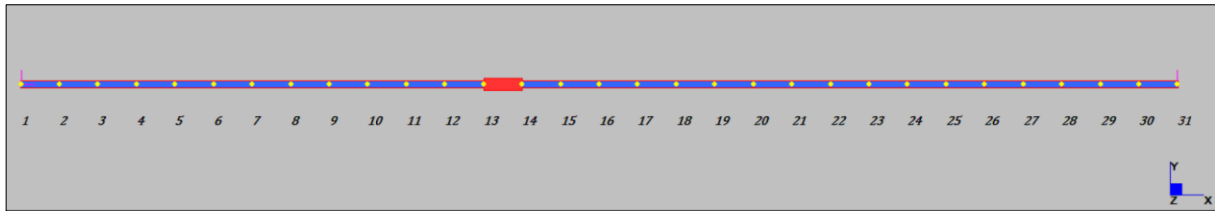


Figura 4. 15 Straus7 – irrigidimento locale introdotto nel modello FEM – test algoritmo di identificazione con forme modali stimate tramite analisi transienti

A partire dalle forme modali stimate sulla base delle FRF calcolate tramite Cross Power Spectral Density per le due configurazioni (grafici 4.18 e 4.19)

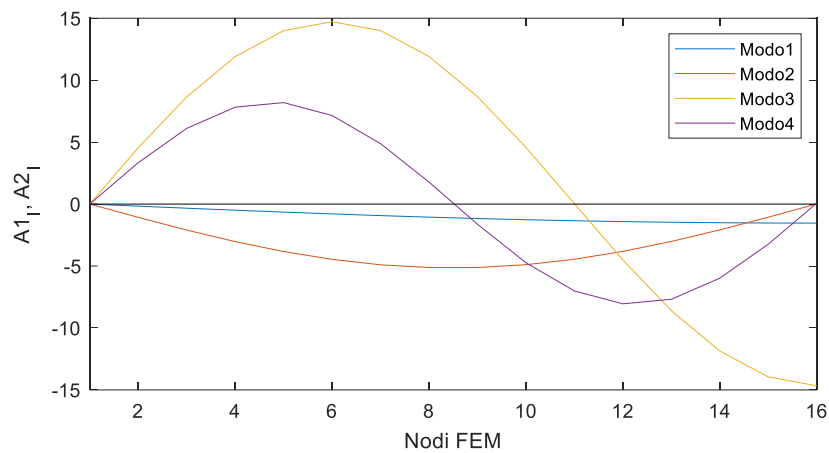


Grafico 4. 18 Forme modali relative a metà trave (15DOFs) stimate a partire da FRF calcolate con CPSD per la configurazione iniziale

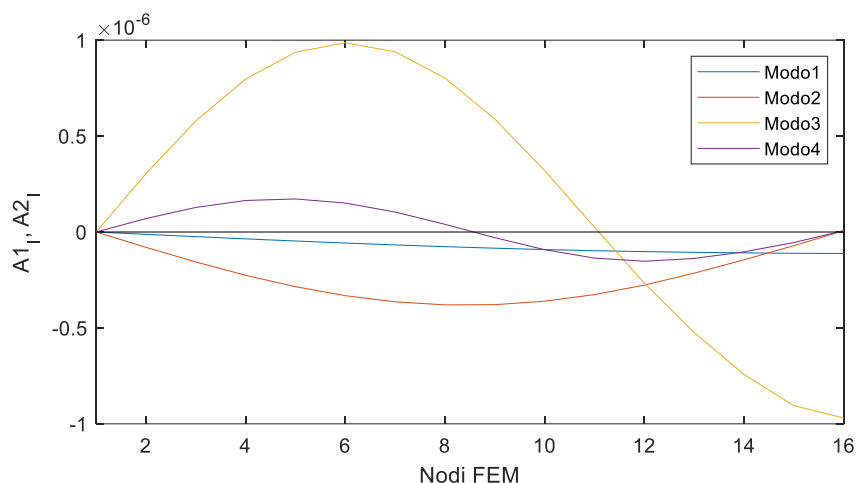


Grafico 4. 19 Forme modali relative a metà trave (15DOFs) stimate a partire da FRF calcolate con CPSD per la configurazione variata - variazione tra i nodi 13-14

si procede all'identificazione del danneggiamento i cui risultati sono riportati in modo analogo a quanto fatto al precedente 3.7:

- Rappresentazione della *differenza assoluta tra le curvatures modali* per la configurazione intatta e variata esposta con:
  - Grafico a cascata (grafico 4.20) che riporta lungo gli assi:
    - Asse **x**: indici di modo;
    - Asse **y**: discretizzazione della trave nello spazio, vincolo di appoggio nel nodo 1 e mezzeria nel nodo 16;
    - Asse **z**: differenze assolute  $d_n$  tra le curvatures modali normalizzate calcolate per trave in configurazione iniziale e variata.
  - Rappresentazione nel piano xy (grafici 4.21)
    - Asse **x**: discretizzazione della trave nello spazio, vincolo di appoggio nel nodo 1 e mezzeria nel nodo 16;
    - Asse **y**: differenze assolute  $d_n$ .
  
- Rappresentazione del parametro *Curvature Damage Factor CDF* graficato nel piano xy (grafico 4.22)
  - Asse **x**: discretizzazione della trave nello spazio, vincolo di appoggio nel nodo 1 e mezzeria nel nodo 16;
  - Asse **y**: media delle differenze assolute estesa ai modi indagati a parità di nodo che discretizza la trave, CDF.

lungo l'asse x delle rappresentazioni ora elencate si esclude il nodo 16, relativamente al quale non si hanno sufficienti informazioni per il calcolo della curvatura.

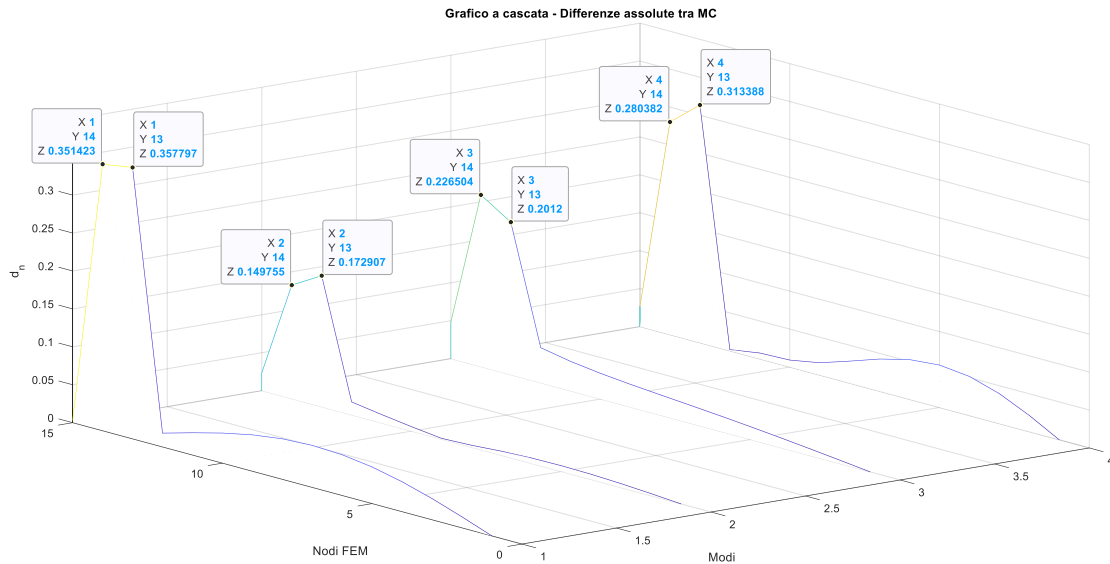


Grafico 4. 20 Differenze assolute tra le curvature modali di metà trave (15DOFs) valutate in configurazione iniziale e variata calcolate tramite analisi numerica – variazione tra i nodi 13-14

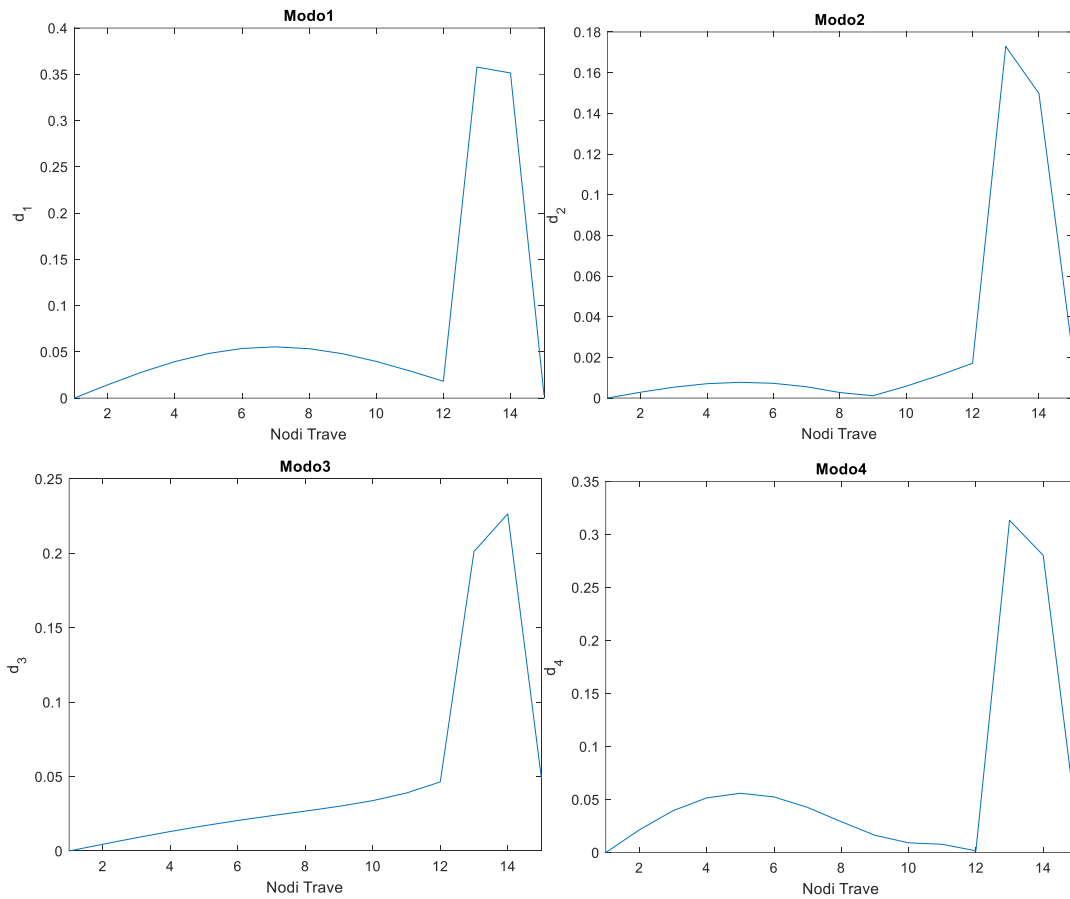
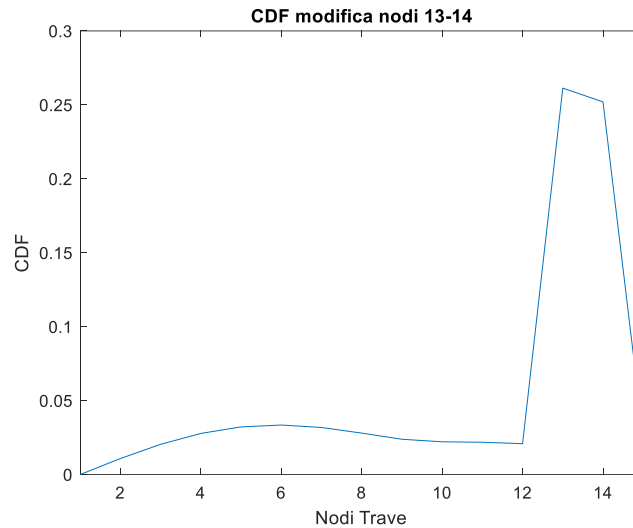


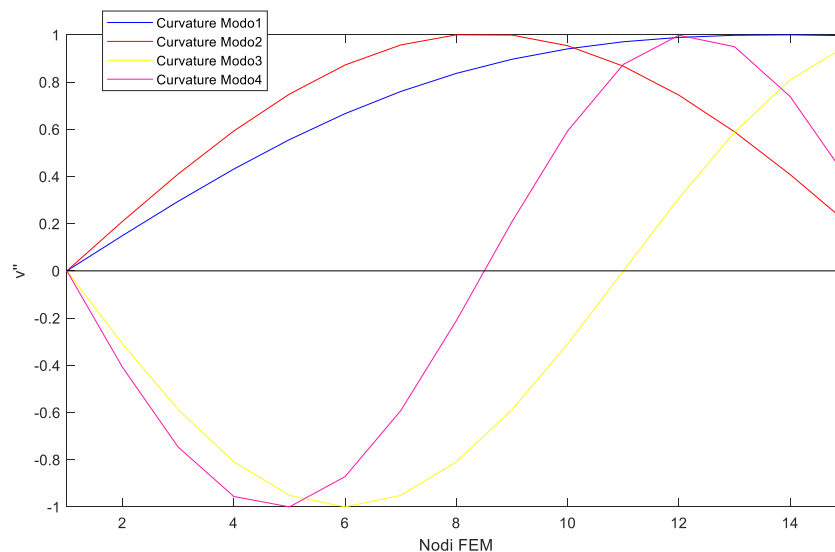
Grafico 4. 21 Dettaglio del grafico 4.20 - Differenze assolute tra le curvature modali di metà trave (15DOFs) in configurazione iniziale e variata calcolate tramite analisi numerica – variazione tra i nodi 13-14



*Grafico 4. 22 Curvature Damage Factor (CDF) per metà trave (15DOFs) calcolato tramite analisi numerica - variazione tra i nodi 13-14*

Si osserva che l'analisi numerica effettuata ai fini dell'identificazione del danno fornisce dei risultati perfettamente aderenti alle attese, la modifica viene colta con precisione sia tramite differenza assoluta tra curvatures che tramite Curvature Damage Factor.

Osservando ora l'andamento delle curvatures normalizzate per la trave intatta riportate nel grafico 4.23



*Grafico 4. 23 Andamento delle curvatures modali (MC) di metà trave calcolate a partire da dati numerici per i primi quattro modi di vibrare della trave*

si nota che la forma riscontrata per le MC corrisponde alla forma dei modi di vibrare, come atteso, vista la condizione di vincolo in doppio appoggio.

Andando ora a sovrapporre le curvatures per configurazione intatta e variata per i quattro modi (grafico 4.24)

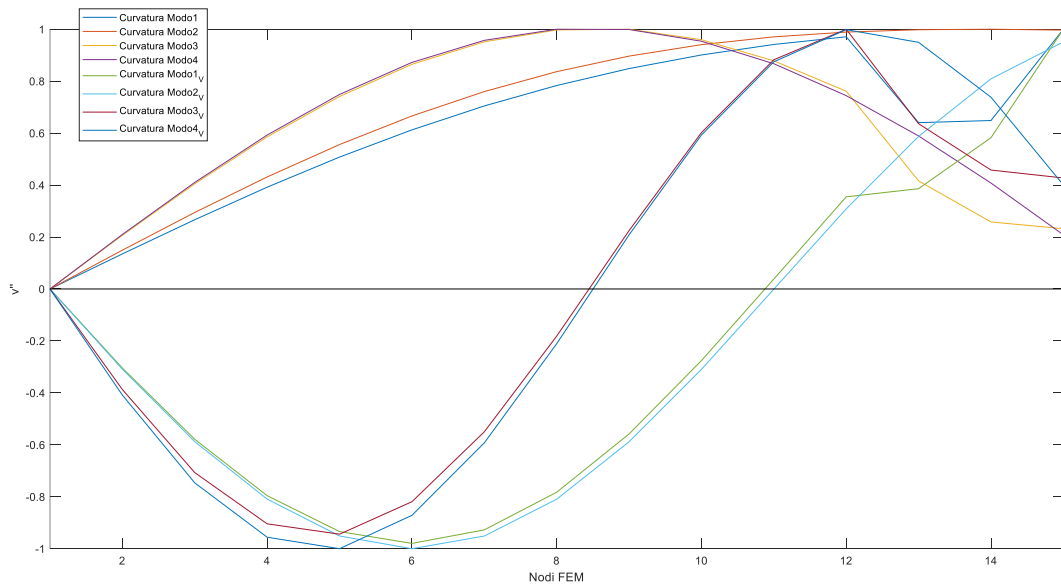


Grafico 4. 24 Sovrapposizione degli andamenti delle curvatures modali di metà trave dei primi quattro modi per configurazione intatta e variata calcolate a partire da dati numerici - variazione tra i nodi 13-14

selezionando ad esempio il modo tre (grafico 4.25) risulta evidente la differenza tra le curve delle due configurazioni.

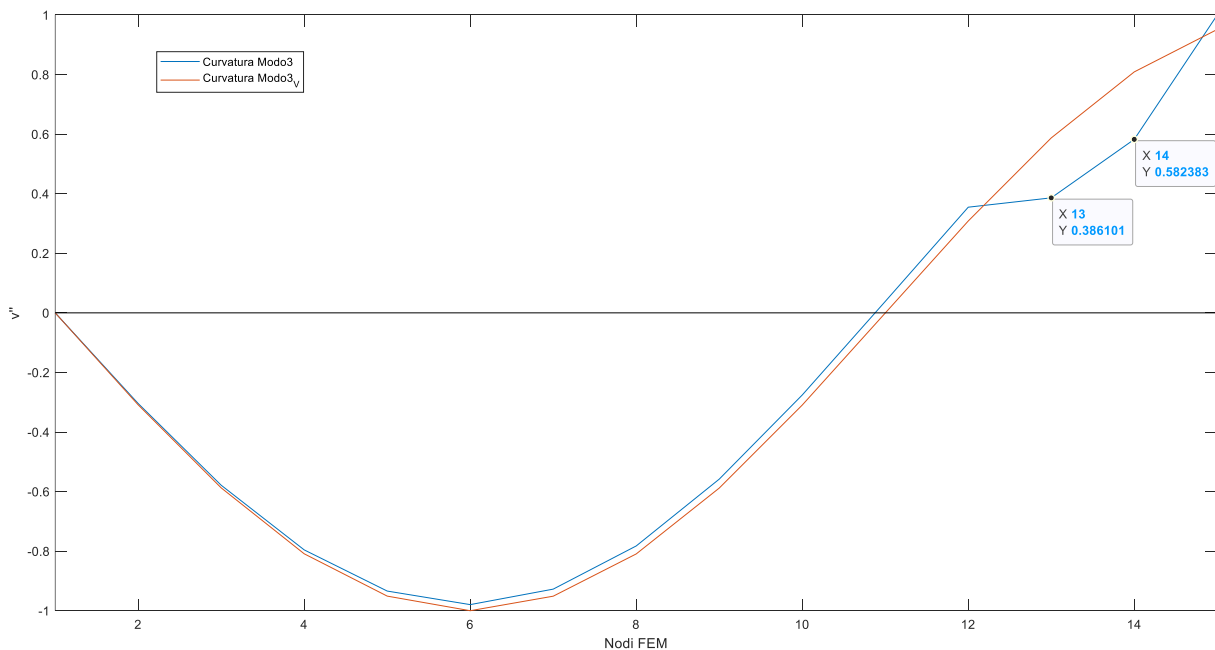


Grafico 4. 25 Dettaglio grafico 4.24 - Sovrapposizione degli andamenti delle curvatures modali di metà trave del terzo modo per configurazione intatta e variata calcolate a partire da dati numerici - variazione tra i nodi 13-14

Tramite questo secondo test si evince che l'algoritmo di identificazione funziona, numericamente, anche a partire da forme modali stimate sulla base delle funzioni di trasferimento.

## 4.6 Modellazione del danneggiamento

Validata la procedura di identificazione numerica della variazione di rigidità si procede nel presente paragrafo a modellare tramite software FEM la variazione di rigidità introdotta al 3.6 tramite magnete applicato alla trave.

Il modello realizzato, riportato in figura 4.16, è stato realizzato implementando una nuova tipologia di elemento Beam2, come fatto ai precedenti 4.5.1 4.5.2, andando a modificare in questo caso non solo il momento di inerzia variando l'altezza della sezione trasversale ma anche modulando la densità di massa sulla base di quella misurata in laboratorio.

Si riportano le misure già introdotte al paragrafo 3.6 relative alla base magnetica ed il valore della densità di massa per essa calcolato

$l$	48	$mm$
$b$	40	$mm$
$h_m$	45	$mm$
$V_M$	86400	$mm^3$
$\rho_M$	6,53E-06	$Kg/mm^3$

Tabella 4. 8 Modellazione FEM -della base magnetica – caratteristiche geometriche

La densità di massa per la porzione interessata dall'irrigidimento è stata calcolata tramite media tra quella del magnete e quella della trave pesata rispetto ai volumi, per la trave si è considerato quindi il volume della porzione di lunghezza 5cm che ricade al di sotto del magnete, si ottiene:

$$\rho_{medio} = \frac{[(\rho_M \cdot V_M) + (\rho_T \cdot V_T)]}{V_M + V_T} = 6,92 \cdot 10^{-6} \text{ Kg/mm}^3$$

Si riportano in figura 4.7 le caratteristiche geometrico meccaniche per la trave in corrispondenza dell'irrigidimento.

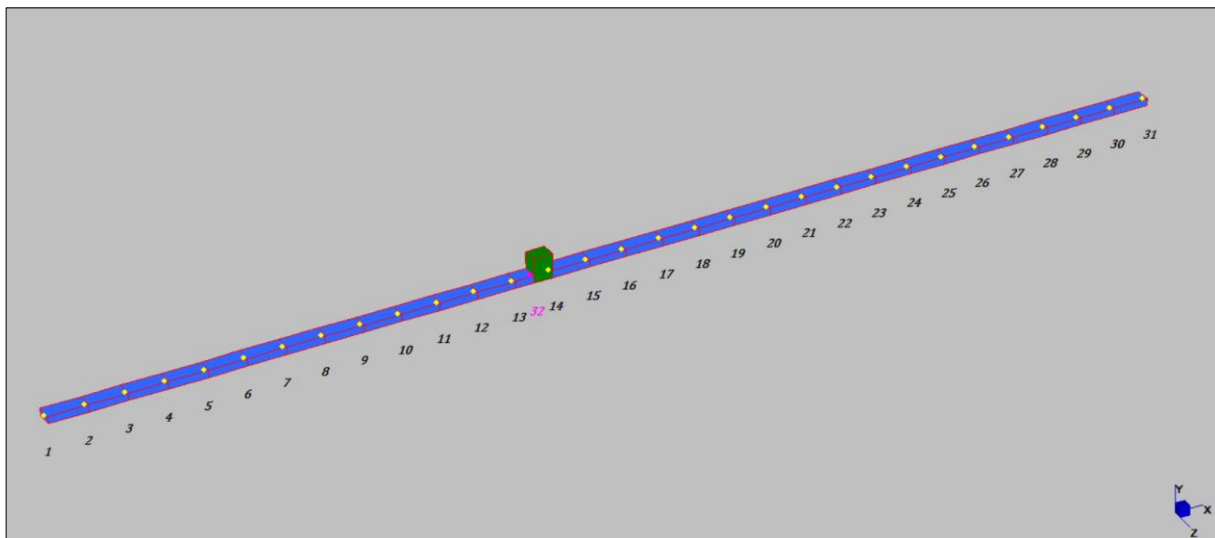


Figura 4. 16 Straus7 – Modello FEM della configurazione variata tramite base magnetica



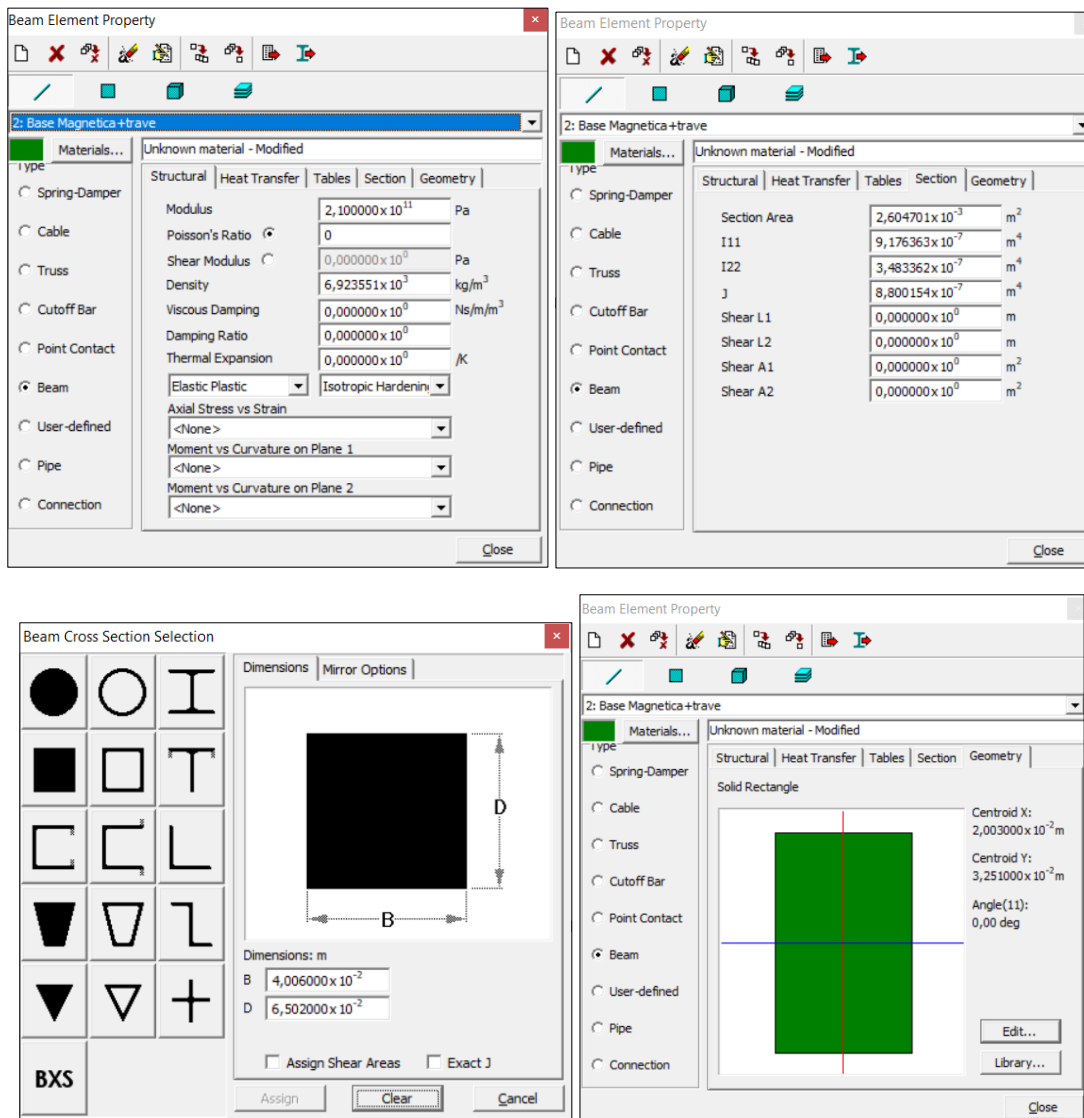


Figura 4. 17 Straus7 – caratteristiche geometrico meccaniche per la trave irrigidita da base magnetica

Osservando la figura 4.16 si nota che per l'elemento variato è stato traslato l'asse, traslazione effettuata tramite offset di 2,25cm rispetto all'asse della trave per poter simulare al meglio il comportamento della configurazione reale (figure 3.22 e 3.27).

La dimensione dell'elemento variato risulta pari alla metà dell'elemento base che discretizza la configurazione iniziale di figura 4.5, come per l'indagine sperimentale di laboratorio si sceglie di posizionare l'irrigidimento verso il nodo 14.

## 4.7 Identificazione numerica della variazione di rigidezza

Nel presente paragrafo si descrive la simulazione delle prove di laboratorio riportate al paragrafo 3.7 dal quale si riprende la modalità di esposizione dei risultati; in particolare si fa riferimento, come per l'identificazione numerica delle caratteristiche dinamiche, all'indagine numero 1.

Le forme modali sulle quali si basa l'identificazione sono ottenute tramite FRF calcolate con CPSD come fatto al precedente 4.5.2.

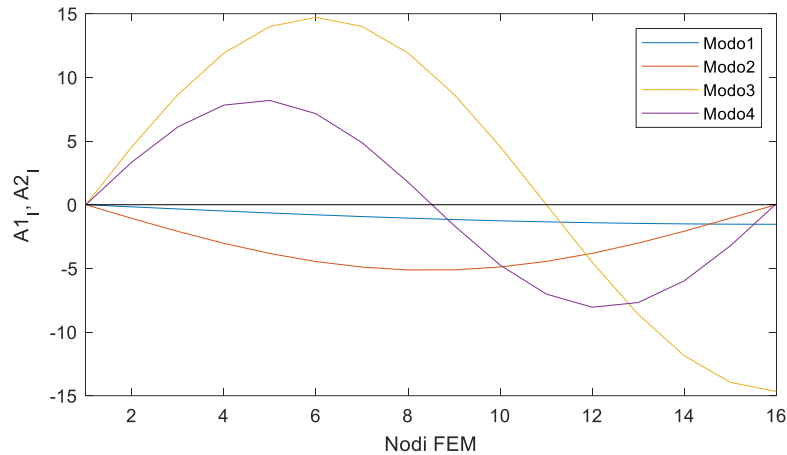


Grafico 4. 26 Simulazione numerica Indagine1 - Forme modali relative a metà trave (15DOFs) stimate a partire da FRF calcolate con CPSD per la configurazione iniziale

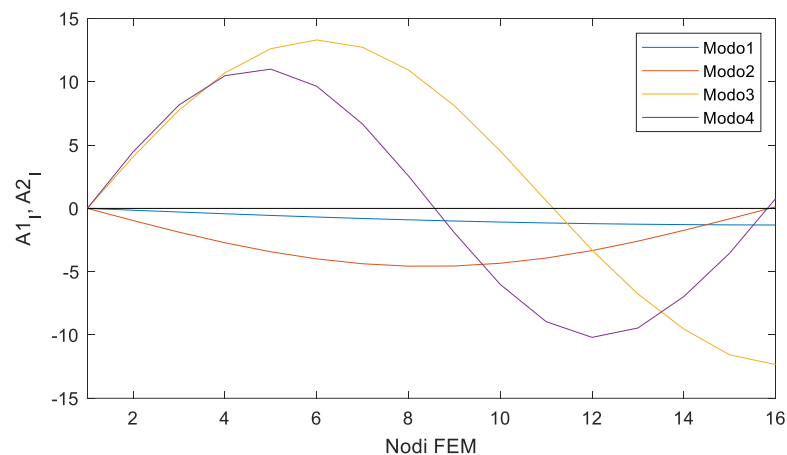


Grafico 4. 27 Simulazione numerica Indagine1 - Forme modali relative a metà trave (15DOFs) stimate a partire da FRF calcolate con CPSD per la configurazione variata - variazione tra i nodi 13-14

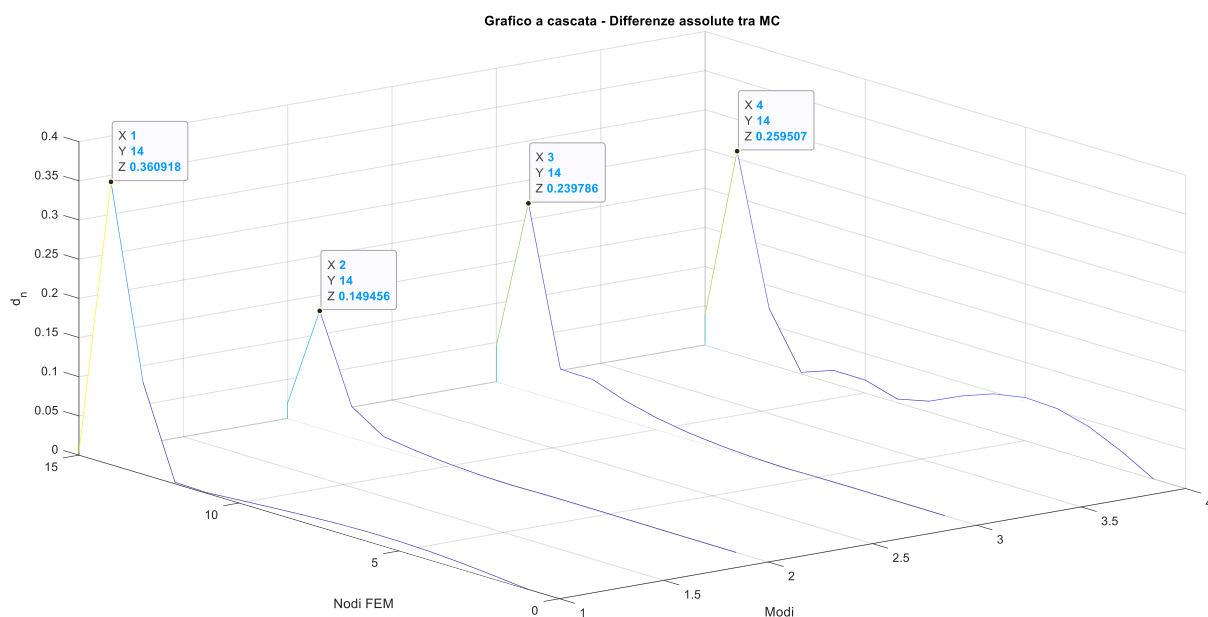


Grafico 4. 28 Simulazione numerica Indagine 1 - Differenze assolute tra le curvature modali di metà trave (15DOFs) valutate in configurazione iniziale e variata – variazione tra i nodi 13-14

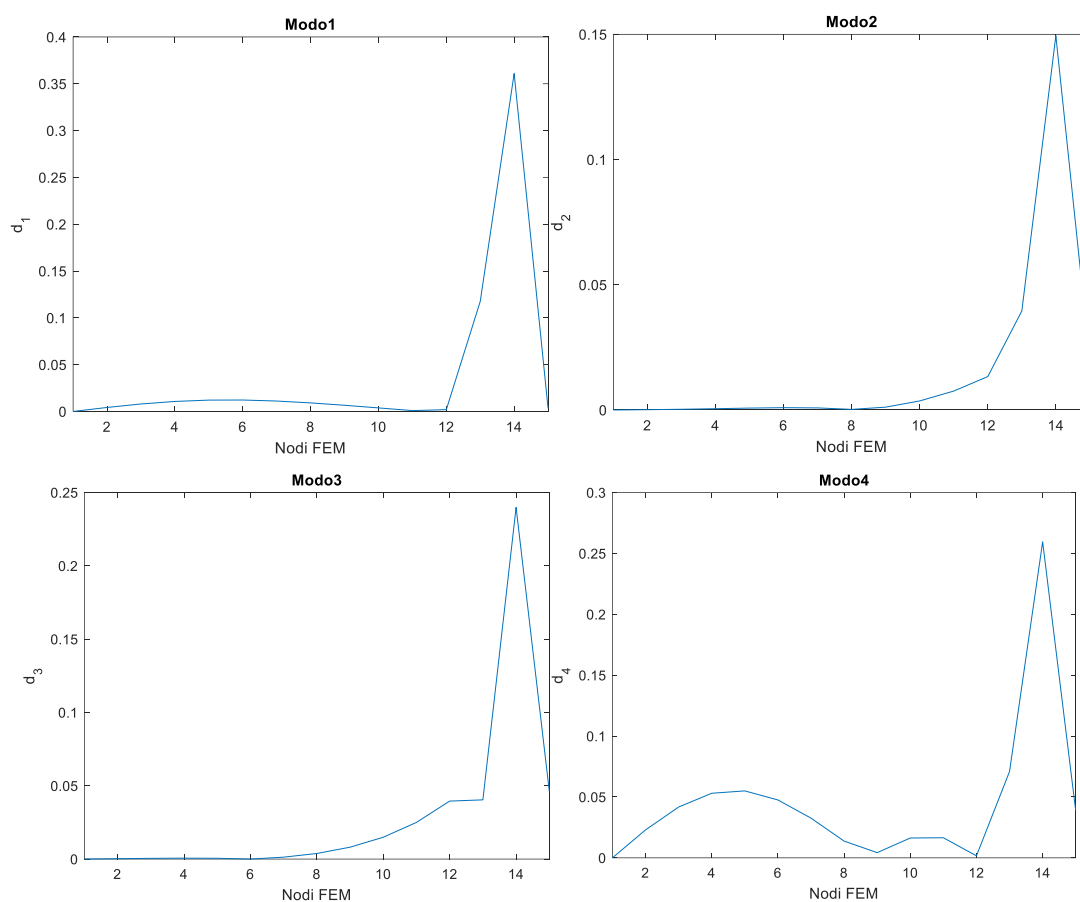
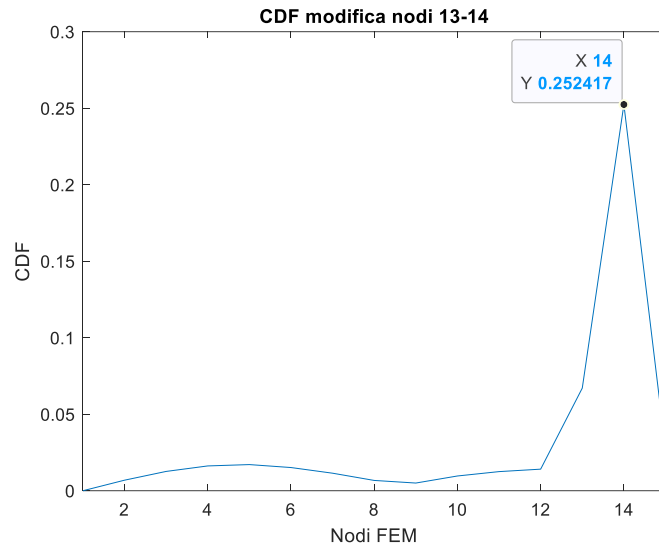


Grafico 4. 29 Simulazione numerica Indagine 1 - Dettaglio del grafico 4.20 - Differenze assolute tra le curvature modali di metà trave (15DOFs) in configurazione iniziale e variata – variazione tra i nodi 13-14



*Grafico 4. 30 Simulazione numerica Indagine 1 - Curvature Damage Factor (CDF) per metà trave (15DOFs) - variazione tra i nodi 13-14*

Si conclude che la procedura di identificazione numerica della variazione introdotta da esito positivo anche per il modello che simula la configurazione di laboratorio; osservando i grafici ottenuti si nota che il picco negli andamenti si trova in corrispondenza del nodo 14, questo rispecchia quanto introdotto nel modello di figura 4.16 in quanto l'irrigidimento risulta posizionato tra il punto medio del campo 13-14 ed il nodo 14.

## 5. Conclusione

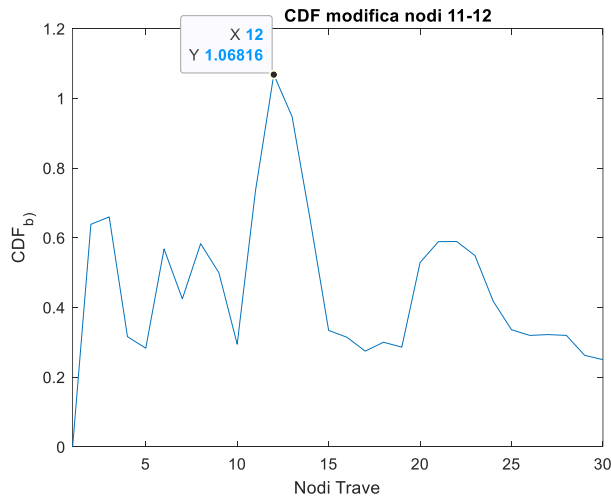
Dalla trattazione esposta nel presente lavoro di tesi si conclude che:

La modalità di determinazione sperimentale delle forme modali a partire dalle funzioni di trasferimento si è riscontrata particolarmente efficace per gli scopi della trattazione, in particolare reiterando la procedura con diversi set di parametri è emersa l'importanza di una pianificazione studiata del numero di punti che discretizza i segnali acquisiti. Si è infatti osservato come la risoluzione in frequenza risulti determinante per la determinazione degli autovalori associati ai modi e di conseguenza per un andamento corretto delle forme modali. In questo caso di studio è stato possibile avere un preciso riferimento sia analitico che numerico ai parametri cercati mentre in casi di studio più complessi spesso non è possibile e risulta ancor di più centrale la programmazione corretta dei parametri di prova.

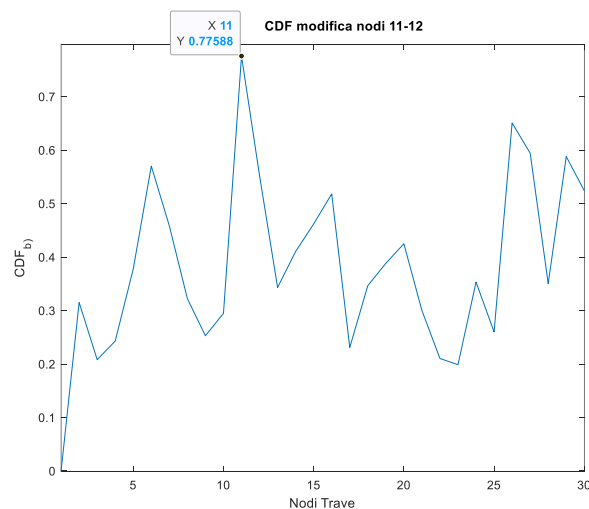
Le analisi numeriche effettuate ai fini dell'identificazione dinamica hanno validato le metodologie utilizzate per elaborare i dati sperimentali.

L'utilizzo della densità di potenza spettrale per la stima delle funzioni di trasferimento si è rivelato un metodo veloce ed efficace, le forme modali ottenute sulla base del parametro hanno permesso di stimare l'andamento atteso, confrontando quanto da esse ottenuto con i risultati dedotti da stima diretta delle FRF si può concludere che, a parità di dati input-output, hanno permesso di stimare i modi di vibrare con un livello di dettaglio confrontabile a quanto ottenuto da FRF definite direttamente dai dati acquisiti tramite rapporto della trasformata dell'output e dell'input.

Relativamente all'identificazione della variazione di rigidità, la modalità di modifica della configurazione si è mostrata in parte soddisfacente ai fini della validazione dell'algoritmo di identificazione. Il metodo delle curvature modali ha permesso, non in tutti i casi di modifica della configurazione, di identificare l'irrigidimento apportato alla trave come emerge ad esempio dal grafico 3.7.50 riportato di seguito



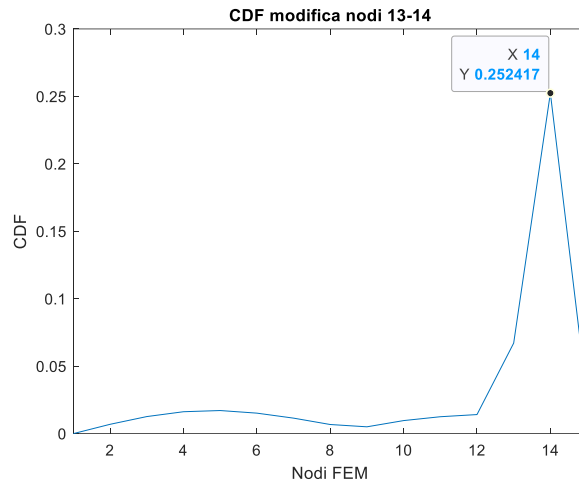
Quanto precedentemente commentato relativamente alla densità di potenza spettrale si riscontra anche osservando l'identificazione sperimentale dell'irrigidimento, le forme modali ottenute tramite tale parametro hanno infatti permesso di evidenziare il danneggiamento nella corretta posizione, come riscontrato nel grafico 3.7.28,



nonostante presentino una risoluzione in frequenza più ridotta rispetto al caso di modi ottenuti a partire da stima diretta delle FRF.

Dall'insieme dei risultati sperimentali però non si riscontra in modo rigoroso l'identificazione di quanto introdotto nella configurazione iniziale, tale circostanza si imputa alla modalità tramite la quale si stima il parametro fondamentale utilizzato, la curvatura modale, approssimata tramite differenze centrali del secondo ordine nonché alla qualità delle coordinate modali utilizzate per il calcolo della stessa; coordinate che nelle esperienze riportate risultano affette dall'errore insito nella scelta dei parametri di acquisizione.

Le analisi numeriche finalizzate all'identificazione della variazione di rigidità hanno evidenziato, come atteso, un'elevata sensibilità delle curvature modali alla variazione introdotta come si deduce dal grafico 4.30



Da un rapido confronto del risultato numerico riportato sopra con quelli sperimentali richiamati in precedenza, si evince l'elevata sensibilità del modello all'irrigidimento. Numericamente il metodo si riscontra rigoroso ai fini dell'identificazione, come deducibile dai test dell'algoritmo riportati al paragrafo 4.5.

In conclusione, la distanza riscontrata tra i risultati numerici e quelli sperimentali è segnata dalla variazione irregolare delle curvature conseguente ad un andamento frastagliato delle deformate modali. Questo problema potrebbe essere superato, come proposto da Abdel Wahab M. M. e De Roeck G., tramite "curve fitting analysis" effettuata con polinomi di grado elevato.





## Bibliografia

- Viola E., “*Fondamenti di dinamica e vibrazione delle strutture Volume Primo: Sistemi Discreti*”
- Viola E., “*Fondamenti di dinamica e vibrazione delle strutture Volume Secondo: Sistemi Continui*”
- Ewins D.J. “*Modal testing: Theory, practice and application*” seconda edizione
- Limongelli M.G. “*Basics of signal processing*” Politecnico di Milano
- Limongelli M.G. “*Operational Modal Analysis*” Politecnico di Milano
- Avitabile P. “*Basics of Modal Analysis*” Modal Analysis & Controls Laboratory University of Massachusetts Lowell
- Avitabile P. “*Experimental Modal Analysis - A simple Non-Mathematical Presentation*”, 2001, University of Massachusetts Lowell, Lowell, Massachusetts
- Pandey A.K., Biswas M., Samman M. M., “*Damage detection from changes in curvature mode shapes*”, 1990, Transportation and Infrastructure Research Center, School of Engineering, Duke University, Durham, North Carolina 27706, U.S.A.
- Abdel Wahab M. M., De Roeck G., “*Damage detection in bridges using modal curvatures: application to a real damage scenario*”, 1999 School of Mechanical & Materials Engineering, University of Surrey, Guildford G;25XH, ;:K
- Amara C., Prasanta K. S. “*Experimental determination of mode shapes of beams by roving impact test*” The National Institute of Engineering, 2019, Manandavadi Road, Mysuru 570008, India
- Walunj Prashant S.a, V.N.Chouguleb , Anirban C. Mitrac “*Investigation on modal parameters of rectangular cantilever beam using Experimental modal analysis*” cM.E.S College of Engineering, V.K Joag Path, Wadia College Campus,Pune-411 001, India

- Sharma J.K. “Theoretical and Experimental Modal Analysis of Beam” (2019), Engineering Vibration, Communication and Information Processing, Vol. 478, LNEE, Springer (pp.177-186)
  
- Piana G., Lofrano E., Carpinteri A., Paolone A, Ruta G. “Experimental modal analysis of straight and curved slender beams by piezoelectrics transducers” (2016), Nonlinear dynamics, identification and monitoring of structures

## Indice delle figure

FIGURA 2.1 A) TRAVE CON MASSA E CARICO TAGLIANTE $F(x, t)$ DISTRIBUITI, SOLLECITATA A FLESSIONE. B, C) FORZE INTERNE ED ESTERNE AGENTI, IN CONDIZIONI DINAMICHE, SUL TRONCO DI TRAVE DI LUNGHEZZA INFINITESIMA $dx$ .....	4
FIGURA 2.2 RIFERIMENTO FOTOGRAFICO ALLA TRAVE A SEZIONE COSTANTE APPOGGIATA AGLI ESTREMI UTILIZZATA IN LABORATORIO LISG .....	9
FIGURA 2.3 TRAVE APPOGGIO-APPOGGIO A SEZIONE RETTANGOLARE.....	10
FIGURA 2.4 DETTAGLIO DEL MARTELLO STRUMENTATO .....	23
FIGURA 2.5 DISCRETIZZAZIONE DELLA TRAVE UTILIZZATA NELLE INDAGINI SPERIMENTALI. IN BLU SI EVIDENZIANO I NODI MENTRE IN ROSSO GLI ACCELEROMETRI.....	28
FIGURA 3.1 TRAVE METALLICA NON STRUMENTATA E DISPOSITIVI DI APPOGGIO.....	35
FIGURA 3.2 VISTA FRONTALE E LATERALE DEL DISPOSITIVO DI APPOGGIO .....	36
FIGURA 3.3 DESCRIZIONE GRAFICA DEL SET-UP DI PROVA .....	36
FIGURA 3.4 PANNELLO DI COLLEGAMENTO DELLA SCHEDA DI ACQUISIZIONE.....	37
FIGURA 3.5 PANNELLO FRONTALE DELLA CENTRALINA DI ACQUISIZIONE .....	38
FIGURA 3.6 SINGOLO PANNELLO A QUATTRO CANALI, IMMAGINE TRATTA DAL MANUALE DELLO STRUMENTO .....	38
FIGURA 3.7 DETTAGLIO DEL MARTELLO AD IMPULSO UTILIZZATO PER LE PROVE .....	39
FIGURA 3.8 DISEGNO SCHEMATICO DEL MARTELLO, TRATTO DAL MANUALE DELLO STRUMENTO.....	40
FIGURA 3.9 DETTAGLIO DELLE PUNTE UTILIZZATE PER EFFETTUARE LE PROVE .....	41
FIGURA 3.10 CAVI VLC DI COLLEGAMENTO PER IL MARTELLO AD IMPATTO .....	41
FIGURA 3.11 ACCELEROMETRI MONTATI E COLLEGATI ALLA TRAVE APPOGGIATA .....	42
FIGURA 3.12 ACCELEROMETRO POSIZIONATO IN MEZZERIA E FISSATO CON MAGNETE .....	43
FIGURA 3.13 ACCELEROMETRO POSIZIONATO AD $L/3$ E FISSATO CON PERNO FILETTATO.....	44
FIGURA 3.14 DISEGNO SCHEMATICO DELL'ACCELEROMETRO, TRATTO DAL MANUALE DELLO STRUMENTO .....	45
FIGURA 3.15 DETTAGLIO DEL CAVO DI COLLEGAMENTO DEGLI ACCELEROMETRI PIEZOELETTRICI ...	46
FIGURA 3.16 SCHERMATA TRATTA DALL'APPLICAZIONE SVILUPPATA CON LABVIEW PER L'ACQUISIZIONE DEI DATI.....	47
FIGURA 3.17 SEZIONE RELATIVA ALL'INSERIMENTO DEI PARAMETRI DI ACQUISIZIONE, DATI UTILIZZATI NELL'INDAGINE NUMERO 1 .....	48
FIGURA 3.18 DISCRETIZZAZIONE A 15 DOFS .....	52
FIGURA 3.19 DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFS .....	53
FIGURA 3.20 DISCRETIZZAZIONE A 15 NODI – FORZANTE IMPULSIVA APPLICATA AL NODO 5 .....	55
FIGURA 3.21 DISCRETIZZAZIONE A 30 NODI – FORZANTE IMPULSIVA APPLICATA AL NODO 10.....	55

FIGURA 3.22 APPLICAZIONE DELLA BASE MAGNETICA ALLA TRAVE METALLICA.....	94
FIGURA 3. 23 VISTE PROSPETTICHE DEL MAGNETE UTILIZZATO PER MODIFICARE LA CONFIGURAZIONE .....	95
FIGURA 3. 24 COMUNE UTILIZZO DELLA BASE MAGNETICA – SOSTEGNO PER UN COMPARATORE MECCANICO.....	95
FIGURA 3. 25 SET-UP DI PROVA INDAGINE1 –CONFIGURAZIONE A 15 DOF - IRRIGIDIMENTO INSERITO TRA I NODI 13 E NODO 14 .....	98
FIGURA 3. 26 SET-UP DI PROVA INDAGINI 4 E 5 – CONFIGURAZIONE A 30 DOF - IRRIGIDIMENTO INSERITO TRA I NODI A) 16-17; B) 11-12; C) 8-9 .....	98
FIGURA 3. 27 RIFERIMENTO FOTOGRAFICO AL SET-UP DI PROVA, INDAGINI 4 E 5 – CONFIGURAZIONE A 30 DOF - IRRIGIDIMENTO INSERITO TRA I NODI A) 16-17; B) 11-12; C) 8-9.....	99
FIGURA 4. 1 STRAUS7 – SETTAGGIO DEI GRADI DI LIBERTÀ PER I NODI DEL MODELLO .....	135
FIGURA 4.2 CARATTERISTICHE GEOMETRICO-MECCANICHE INSERITE NEL SOFTWARE DI CALCOLO .	136
FIGURA 4.3 STRAUS7 - RAFFITTIMENTI SUCCESSIVI DEL MODELLO REALIZZATI RISPETTIVAMENTE CON 1,2,4,8,16,32 E 64 ELEMENTI BEAM.....	137
FIGURA 4. 4 STRAUS 7 – SETTAGGIO DELL’ANALISI MODALE.....	138
FIGURA 4.5 STRAUS7 - MODELLO FEM UTILIZZATO PER LE ANALISI.....	142
FIGURA 4.6 MODI DI VIBRARE DEDOTTI DALLA RISOLUZIONE DEL PROBLEMA AGLI AUTOVALORI ...	143
FIGURA 4. 7 STRAUS7 - SETTAGGIO DELL’ANALISI TRANSIENTE LINEARE 7 – NUMERAZIONE DEI DETTAGLI CHE DESCRIVONO L’ANALISI.....	145
FIGURA 4.8 STRAUS7 – DETTAGLIO 2 DI FIGURA 4.7 - SETTAGGIO DEL PARAMETRO DI INTEGRAZIONE $\beta$ PER IL METODO DI NEWMARK.....	146
FIGURA 4. 9 STRAUS7 – DETTAGLIO 4 DI FIGURA 4.7 - INSERIMENTO DEI MODI DA CONSIDERARE PER LA RISOLUZIONE DELL’ANALISI TRANSIENTE.....	147
FIGURA 4. 10 STRAUS7 – DETTAGLIO 6 DI FIGURA 4.7 – INSERIMENTO DEGLI INDICI DI SMORZAMENTO MODALE DA UTILIZZARE PER IL MODELLO RAYLEIGH DAMPING .....	148
FIGURA 4. 11 STRAUS7 – CASO DI CARICO 1 “BATTUTA DOF1” – SIMULAZIONE INDAGINE DI LABORATORIO A 15DOFS .....	149
FIGURA 4. 12 STRAUS7– DETTAGLIO 7 DI FIGURA 4.7- INSERIMENTO DELLA FORZANTE NELL’ANALISI TRANSIENTE .....	149
FIGURA 4. 13 STRAUS7 – DETTAGLIO 8 DI FIGURA 4.7 – INSERIMENTO DEI PARAMETRI PER IL SALVATAGGIO DELLA RISPOSTA DELLA TRAVE ALLA FORZANTE IMPULSIVA .....	151
FIGURA 4. 14 STRAUS7 – DETTAGLIO DELLE VARIAZIONI AL MOMENTO DI INERZIA PER I QUATTRO MODELLI REALIZZATI, TEST CON FORME MODALI DA ANALISI NATURAL FREQUENCY .....	160

FIGURA 4. 15 STRAUS7 – IRRIGIDIMENTO LOCALE INTRODOTTO NEL MODELLO FEM – TEST ALGORITMO DI IDENTIFICAZIONE CON FORME MODALI STIMATE TRAMITE ANALISI TRANSIENTI .....	164
FIGURA 4. 16 STRAUS7 – MODELLO FEM DELLA CONFIGURAZIONE VARIATA TRAMITE BASE MAGNETICA.....	169
FIGURA 4. 17 STRAUS7 – CARATTERISTICHE GEOMETRICO MECCANICHE PER LA TRAVE IRRIGIDITA DA BASE MAGNETICA .....	170

## Indice delle tabelle

TABELLA 2. 1 PULSAZIONI, FREQUENZE E PERIODI DI VIBRAZIONE DELLA TRAVE APOGGIATA MODELLATA COME SISTEMA CONTINUO .....	12
TABELLA 3. 1 SENSIBILITÀ DEL MARTELLO, TABELLA ESTRATTA DEL CERTIFICATO DI CALIBRAZIONE DELLO STRUMENTO.....	39
TABELLA 3. 2 RESOCONTO DELLE INDAGINI SPERIMENTALI SELEZIONATE .....	52
TABELLA 3. 3 FREQUENZE PROPRIE DEI MODI DI VIBRARE DELLA TRAVE CALCOLATE CON LE FORMULE CHIUSE OTTENUTE DALLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA CONTINUO PER LA TRAVE .....	54
TABELLA 3.4 RESOCONTO DELLE FREQUENZE PROPRIE INDIVIDUATE SPERIMENTALMENTE PER LA TRAVE .....	60
TABELLA 3. 5 TABELLA RELATIVA AI DETTAGLI DELLA BASE MAGNETICA UTILIZZATA .....	95
TABELLA 3. 6 RESOCONTO DELLE INDAGINI SPERIMENTALI SELEZIONATE – IN VERDE SI EVIDENZIANO I SET DI PARAMETRI UTILIZZATI PER L'IDENTIFICAZIONE DELL'IRRIGIDIMENTO LOCALE .....	97
TABELLA 4.1 A) FREQUENZE PROPRIE DEI PRIMI QUATTRO MODI DI VIBRARE AL VARIARE DEL NUMERO DI ELEMENTI CHE DISCRETIZZANO IL MODELLO FEM - MATRICE DI MASSA LUMPED.....	139
TABELLA 4.2 A) SCARTO PERCENTUALE TRA LE FREQUENZE DI DUE MODELLAZIONI SUCCESSIVE - MATRICE DI MASSA LUMPED.....	139
TABELLA 4.3 B) SCARTO PERCENTUALE TRA LE FREQUENZE DI DUE MODELLAZIONI SUCCESSIVE - MATRICE DI MASSA CONSISTENT .....	141
TABELLA 4. 4 STRAUS7 – LOG FILE ANALISI NATURAL FREQUENCY, FREQUENZE PROPRIE DEI PRIMI QUATTRO MODI DI VIBRARE PER LA TRAVE .....	142
TABELLA 4. 5 ESTRATTO DELLA TABELLA 3.2 – SET DI PARAMETRI UTILIZZATO PER L'ANALISI SPERIMENTALE.....	151
TABELLA 4. 6 CONFRONTO TRA FREQUENZE PROPRIE OTTENUTE NEL MODELLO FEM DA ANALISI MODALE E DA SIMULAZIONE TRAMITE ANALISI TRANSIENTE.....	153

TABELLA 4. 7 VALORI DEL MOMENTO DI INERZIA UTILIZZATI PER L'ELEMENTO TRA I NODI 16 E 17 NEI QUATTRO MODELLI REALIZZATI PER IL TEST CON FORME MODALI DA ANALISI NATURAL FREQUENCY.....	160
TABELLA 4. 8 MODELLAZIONE FEM -DELLA BASE MAGNETICA – CARATTERISTICHE GEOMETRICHE	169
TABELLA 4.1 A) FREQUENZE PROPRIE DEI PRIMI QUATTRO MODI DI VIBRARE AL VARIARE DEL NUMERO DI ELEMENTI CHE DISCRETIZZANO IL MODELLO FEM - MATRICE DI MASSA LUMPED .....	139
TABELLA 4.2 A) SCARTO PERCENTUALE TRA LE FREQUENZE DI DUE MODELLAZIONI SUCCESSIVE - MATRICE DI MASSA LUMPED .....	139
TABELLA 4.3 B) SCARTO PERCENTUALE TRA LE FREQUENZE DI DUE MODELLAZIONI SUCCESSIVE - MATRICE DI MASSA CONSISTENT .....	141
TABELLA 4. 4 STRAUS7 – LOG FILE ANALISI NATURAL FREQUENCY, FREQUENZE PROPRIE DEI PRIMI QUATTRO MODI DI VIBRARE PER LA TRAVE .....	142
TABELLA 4. 5 ESTRATTO DELLA TABELLA 3.2 – SET DI PARAMETRI UTILIZZATO PER L'ANALISI SPERIMENTALE.....	151
TABELLA 4. 6 CONFRONTO TRA FREQUENZE PROPRIE OTTENUTE NEL MODELLO FEM DA ANALISI MODALE E DA SIMULAZIONE TRAMITE ANALISI TRANSIENTE.....	153
TABELLA 4. 7 VALORI DEL MOMENTO DI INERZIA UTILIZZATI PER L'ELEMENTO TRA I NODI 16 E 17 NEI QUATTRO MODELLI REALIZZATI PER IL TEST CON FORME MODALI DA ANALISI NATURAL FREQUENCY.....	160
TABELLA 4. 8 MODELLAZIONE FEM -DELLA BASE MAGNETICA – CARATTERISTICHE GEOMETRICHE	169

## Indice dei grafici

GRAFICI 2. 1 FORME MODALI PER TRAVE A SEZIONE COSTANTE APPOGGIATA AGLI ESTREMI MODELLATA COME SISTEMA CONTINUO .....	13
GRAFICO 2. 2 DIPENDENZA DELL'INDICE DI SMORZAMENTO DALLA PULSAZIONE NATURALE PER IL GENERICO MODO R-ESIMO .....	19
GRAFICO 2. 3 TIPICA FORMA D'ONDA PRODOTTA DA UN IMPATTO A) E RELATIVO SPETTRO DI FREQUENZA B) .....	23
GRAFICO 3.1 CURVE DI RISPOSTA DEL MARTELLO IN FUNZIONE DELLA PUNTA UTILIZZATA .....	41
GRAFICO 3. 2 TIPOLOGIE DI CONFIGURAZIONI PER IL MONTAGGIO ED IL LORO EFFETTO AD ALTE FREQUENZE .....	46
GRAFICO 3.3 IMPULSO DA MARTELLO STRUMENTATO, BATTUTA NODO 5.....	49

GRAFICO 3.4 INDAGINE1 - ACCELEROGRAMMA ACQUISITO DALL'ACCELEROMETRO POSTO AD L/2(NODO15).....	50
GRAFICO 3.5 INDAGINE1 - ACCELEROGRAMMA ACQUISITO DALL'ACCELEROMETRO POSTO AD L/3(NODO 10).....	50
GRAFICO 3. 6 ANDAMENTO MEDIO DELL'OUTPUT A SEGUITO DI TRE BATTUTE SUL NODO 5 .....	53
GRAFICO 3. 7 SESTA FORMA MODALI PER LA TRAVE MODELLATA COME SISTEMA CONTINUO .....	54
GRAFICO 3.8 INDAGINE 1 - TRASFORMATA DI FOURIER DELL'OUTPUT AD L/2 .....	56
GRAFICO 3.9 INDAGINE 1 - TRASFORMATA DI FOURIER DELL'OUTPUT AD L/3 .....	56
GRAFICO 3.10 INDAGINE 2 - TRASFORMATA DI FOURIER DELL'OUTPUT AD L/2 .....	57
GRAFICO 3.11 INDAGINE 2 - TRASFORMATA DI FOURIER DELL'OUTPUT AD L/3 .....	57
GRAFICO 3.12 INDAGINE 3 - TRASFORMATA DI FOURIER DELL'OUTPUT AD L/2 .....	58
GRAFICO 3.13 INDAGINE 3 - TRASFORMATA DI FOURIER DELL'OUTPUT AD L/3 .....	58
GRAFICO 3.14 INDAGINE 5 - TRASFORMATA DI FOURIER DELL'OUTPUT AD L/2 .....	59
GRAFICO 3.15 INDAGINE 5 - TRASFORMATA DI FOURIER DELL'OUTPUT AD L/3 .....	59
GRAFICO 3. 16 PARTE REALE ED IMMAGINARIA DELLA FUNZIONE DI RISPOSTA IN FREQUENZA RELATIVA AD UN SISTEMA AD UN GRADO DI LIBERTÀ SMORZATO, INERTANZA .....	62
GRAFICO 3.17 INDAGINE 1 – STIMA DELLE FORME MODALI A PARTIRE DALLE FRF OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/2 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 15 DOFS.....	63
GRAFICO 3.18 INDAGINE 1 – STIMA DELLE FORME MODALI A PARTIRE DALLE FRF OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/3 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 15 DOFS.....	63
GRAFICO 3. 19 INDAGINE 1 - ANDAMENTO DEL PRIMO MODO DI VIBRARE OTTENUTO OSSERVANDO IL MODULO DELLE FRF OTTENUTE DALL'OUTPUT AD L/2 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 15 DOFS .....	64
GRAFICO 3.20 INDAGINE 2 – STIMA DELLE FORME MODALI A PARTIRE DALLE FRF OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/2 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 15 DOFS.....	65
GRAFICO 3.21 INDAGINE 2 – STIMA DELLE FORME MODALI A PARTIRE DALLE FRF OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/3 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 15 DOFS.....	65
GRAFICO 3. 22 INDAGINE 3 – STIMA DELLE FORME MODALI A PARTIRE DALLE FRF OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/2 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 15 DOFS.....	66
GRAFICO 3. 23 INDAGINE 3 – STIMA DELLE FORME MODALI A PARTIRE DALLE FRF OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/3 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 15 DOFS.....	67
GRAFICO 3. 24 INDAGINE 3 - ANDAMENTO DEL PRIMO MODO DI VIBRARE OTTENUTO OSSERVANDO IL MODULO DELLE FRF OTTENUTE DALL'OUTPUT AD L/2 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 15 DOFS .....	67
GRAFICO 3. 25 INDAGINE 3 - ANDAMENTO DEL SECONDO MODO DI VIBRARE OTTENUTO OSSERVANDO IL MODULO DELLE FRF OTTENUTE DALL'OUTPUT AD L/2 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 15 DOFS.....	68

GRAFICO 3. 26 INDAGINE 4 – STIMA DELLE FORME MODALI A PARTIRE DALLE FRF OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/2 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 30 DOFs.....	68
GRAFICO 3. 27 INDAGINE 4 – STIMA DELLE FORME MODALI A PARTIRE DALLE FRF OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/3 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 30 DOFs.....	69
GRAFICO 3. 28 INDAGINE 5 – STIMA DELLE FORME MODALI A PARTIRE DALLE FRF OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/2 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 30 DOFs.....	69
GRAFICO 3. 29 INDAGINE 5 – STIMA DELLE FORME MODALI A PARTIRE DALLE FRF OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/3 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 30 DOFs.....	70
GRAFICO 3. 30 A) INDAGINE 2 DETTAGLIO MODO 3 – PARTE IMMAGINARIA FRF .....	70
GRAFICO 3. 31 A) INDAGINE 4 DETTAGLIO MODO 3 – PARTE IMMAGINARIA FRF .....	72
GRAFICO 3. 32 A) INDAGINE 5 DETTAGLIO MODO 3 – PARTE IMMAGINARIA FRF .....	73
GRAFICO 3. 33 INDAGINE 1 – STIMA DELLE FORME MODALI IN VALORE ASSOLUTO A PARTIRE DALLE FRF CALCOLATE CON PSD OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/2 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 15 DOFs .....	74
GRAFICO 3. 34 INDAGINE 1 – STIMA DELLE FORME MODALI IN VALORE ASSOLUTO A PARTIRE DALLE FRF CALCOLATE CON PSD OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/3 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 15 DOFs .....	75
GRAFICO 3. 35 INDAGINE 2 – STIMA DELLE FORME MODALI IN VALORE ASSOLUTO A PARTIRE DALLE FRF CALCOLATE CON PSD OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/2 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 15 DOFs .....	76
GRAFICO 3. 36 INDAGINE 2 – STIMA DELLE FORME MODALI IN VALORE ASSOLUTO A PARTIRE DALLE FRF CALCOLATE CON PSD OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/3 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 15 DOFs .....	76
GRAFICO 3. 37 INDAGINE 3 – STIMA DELLE FORME MODALI IN VALORE ASSOLUTO A PARTIRE DALLE FRF CALCOLATE CON PSD OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/2 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 15 DOFs .....	77
GRAFICO 3. 38 INDAGINE 3 – STIMA DELLE FORME MODALI IN VALORE ASSOLUTO A PARTIRE DALLE FRF CALCOLATE CON PSD OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/3 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 15 DOFs .....	78
GRAFICO 3. 39 INDAGINE 4 – STIMA DELLE FORME MODALI IN VALORE ASSOLUTO A PARTIRE DALLE FRF CALCOLATE CON PSD OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/2 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 30 DOFs .....	78
GRAFICO 3. 40 INDAGINE 4 – STIMA DELLE FORME MODALI IN VALORE ASSOLUTO A PARTIRE DALLE FRF CALCOLATE CON PSD OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/3 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 30 DOFs .....	79



GRAFICO 3. 41 INDAGINE 5 – STIMA DELLE FORME MODALI IN VALORE ASSOLUTO A PARTIRE DALLE FRF CALCOLATE CON PSD OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/2 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 30 DOFS .....	79
GRAFICO 3. 42 INDAGINE 5 – STIMA DELLE FORME MODALI IN VALORE ASSOLUTO A PARTIRE DALLE FRF CALCOLATE CON PSD OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/3 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 30 DOFS .....	80
GRAFICO 3. 43 INDAGINE 1 – STIMA DELLE FORME MODALI A PARTIRE DALLE FRF CALCOLATE CON CPSD OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/2 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 15 DOFS .....	80
GRAFICO 3. 44 INDAGINE 1 – STIMA DELLE FORME MODALI A PARTIRE DALLE FRF CALCOLATE CON CPSD OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/3 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 15 DOFS .....	81
GRAFICO 3. 45 INDAGINE 2 – STIMA DELLE FORME MODALI A PARTIRE DALLE FRF CALCOLATE CON CPSD OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/2 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 15 DOFS .....	81
GRAFICO 3. 46 INDAGINE 2 – STIMA DELLE FORME MODALI A PARTIRE DALLE FRF CALCOLATE CON CPSD OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/3 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 15 DOFS .....	82
GRAFICO 3. 47 INDAGINE 3 – STIMA DELLE FORME MODALI A PARTIRE DALLE FRF CALCOLATE CON CPSD OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/2 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 15 DOFS .....	82
GRAFICO 3. 48 INDAGINE 3 – STIMA DELLE FORME MODALI A PARTIRE DALLE FRF CALCOLATE CON CPSD OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/3 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 15 DOFS .....	83
GRAFICO 3. 49 INDAGINE 4 – STIMA DELLE FORME MODALI A PARTIRE DALLE FRF CALCOLATE CON CPSD OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/2 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 30 DOFS .....	83
GRAFICO 3. 50 INDAGINE 4 – STIMA DELLE FORME MODALI A PARTIRE DALLE FRF CALCOLATE CON CPSD OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/3 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 30 DOFS .....	84
GRAFICO 3. 51 INDAGINE 5 – STIMA DELLE FORME MODALI A PARTIRE DALLE FRF CALCOLATE CON CPSD OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/2 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 30 DOFS .....	84
GRAFICO 3. 52 INDAGINE 5 – STIMA DELLE FORME MODALI A PARTIRE DALLE FRF CALCOLATE CON CPSD OTTENUTE DALL'ACCELEROMETRO AD L/3 CON DISCRETIZZAZIONE DI METÀ TRAVE IN 30 DOFS .....	85
GRAFICO 3. 53 INDAGINE 4 – DETTAGLIO MODO 5 (CURVA BLU) STIMATO CON FRF DA PSD.....	85

GRAFICO 3. 54 INDAGINE 4 – DETTAGLIO VALORE ASSOLUTO DEL MODO 5 (CURVA ROSSA) STIMATO CON FRF DA CPSD RAFFRONTATO AL CORRISPONDENTE MODO DEDOTTO DA PSD (CURVA BLU) .....	86
GRAFICO 3. 55 INDAGINE 4 – SOVRAPPOSIZIONE DEI MODI NORMALIZZATI RISPETTO AL VALORE MASSIMO, OTTENUTI DA PSD (CURVA BLU) E CPSD (CURVA ROSSA) .....	86
GRAFICO 3. 56 INDIVIDUAZIONE DEI PUNTI DI METÀ POTENZA.....	87
GRAFICO 3. 57 INDAGINE 3 - MODULO DELL'INERTANZA $A_{15} 5\Omega$ IDENTIFICAZIONE DEI PICCHI RELATIVI AI PRIMI MODI DI VIBRARE .....	88
GRAFICO 3. 58 PUNTI DI METÀ POTENZA DEI MODI 1 E 3 .....	89
GRAFICO 3. 59 MODULO DELL'INERTANZA $A_{10} 5\Omega$ IDENTIFICAZIONE DEI PICCHI RELATIVI AI PRIMI MODI DI VIBRARE .....	91
GRAFICO 3. 60 PUNTI DI METÀ POTENZA DEI MODI 2 E 4 .....	92
GRAFICO 3.7. 1 INDAGINE 1 - FORME MODALI RELATIVE A METÀ TRAVE RILEVATE CON STIMA DIRETTA DELLE FRF PER LA CONFIGURAZIONE INIZIALE - DISCRETIZZAZIONE A 15 DOFs .....	102
GRAFICO 3.7. 2 INDAGINE 1 - FORME MODALI RELATIVE A METÀ TRAVE RILEVATE CON STIMA DIRETTA DELLE FRF PER LA CONFIGURAZIONE VARIATA - DISCRETIZZAZIONE A 15 DOFs – VARIAZIONE TRA I NODI 13-14.....	102
GRAFICO 3.7. 3 INDAGINE 1 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE VALUTATE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON STIMA DIRETTA DELLE FRF, DISCRETIZZAZIONE A 15 DOFs – VARIAZIONE TRA I NODI 13-14.....	103
GRAFICI 3.7. 4 INDAGINE 1 - DETTAGLIO DEL GRAFICO 3.7.3 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON STIMA DIRETTA DELLE FRF, DISCRETIZZAZIONE A 15 DOFs – VARIAZIONE TRA I NODI 13-14.....	103
GRAFICO 3.7. 5 INDAGINE 1 – CURVATURE DAMAGE FACTOR (CDF) PER METÀ TRAVE DISCRETIZZATA CON 15 DOFs - STIMA DIRETTA DELLE FRF - VARIAZIONE TRA I NODI 13-14.....	104
GRAFICO 3.7. 6 INDAGINE 1 - FORME MODALI RELATIVE A METÀ TRAVE RILEVATE CON STIMA DELLE FRF TRAMITE CPSD PER LA CONFIGURAZIONE INIZIALE - DISCRETIZZAZIONE A 15 DOFs – VARIAZIONE TRA I NODI 13-14.....	104
GRAFICO 3.7. 7 INDAGINE 1 - FORME MODALI RELATIVE A METÀ TRAVE RILEVATE CON STIMA DELLE FRF TRAMITE CPSD PER LA CONFIGURAZIONE VARIATA - DISCRETIZZAZIONE A 15 DOFs – VARIAZIONE TRA I NODI 13-14.....	105
GRAFICO 3.7. 8 INDAGINE 1 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE VALUTATE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON STIMA DELLE FRF TRAMITE CPSD, DISCRETIZZAZIONE A 15 DOFs – VARIAZIONE TRA I NODI 13-14.....	105
GRAFICO 3.7. 9 INDAGINE 1 – DETTAGLIO DEL GRAFICO 3.7.8 -DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE VALUTATE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON	

STIMA DELLE FRF TRAMITE CPSD, DISCRETIZZAZIONE A 15 DOFS – VARIAZIONE TRA I NODI 13-14.....	106
GRAFICO 3.7. 10 INDAGINE 1 – CURVATURE DAMAGE FACTOR (CDF) PER METÀ TRAVE DISCRETIZZATA CON 15 DOFS - STIMA DELLE FRF CON CPSD - VARIAZIONE TRA I NODI 13-14 .....	106
GRAFICO 3.7. 11 INDAGINE 4 - FORME MODALI RELATIVE A METÀ TRAVE RILEVATE CON STIMA DELLE FRF PER LA CONFIGURAZIONE INIZIALE CON DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFS.....	107
GRAFICO 3.7. 12 INDAGINE 4 - FORME MODALI RELATIVE A METÀ TRAVE RILEVATE CON STIMA DELLE FRF TRAMITE CPSD PER LA CONFIGURAZIONE INIZIALE CON DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFS.	107
GRAFICO 3.7. 13 INDAGINE 4 - FORME MODALI RELATIVE A METÀ TRAVE RILEVATE CON STIMA DIRETTA DELLE FRF PER LA CONFIGURAZIONE VARIATA - DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFS – VARIAZIONE TRA I NODI 16-17.....	108
GRAFICO 3.7. 14 INDAGINE 4 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE VALUTATE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON STIMA DIRETTA DELLE FRF, DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFS – VARIAZIONE TRA I NODI 16-17.....	108
GRAFICO 3.7. 15 INDAGINE 4 - DETTAGLIO DEL GRAFICO 3.7.14 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON STIMA DIRETTA DELLE FRF, DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFS – VARIAZIONE TRA I NODI 16-17.....	109
GRAFICO 3.7. 16 INDAGINE 4 – CURVATURE DAMAGE FACTOR (CDF) PER METÀ TRAVE DISCRETIZZATA CON 30 DOFS - STIMA DIRETTA DELLE FRF - VARIAZIONE TRA I NODI 16-17 .	109
GRAFICO 3.7. 17 INDAGINE 4 - FORME MODALI RELATIVE A METÀ TRAVE RILEVATE CON STIMA DELLE FRF TRAMITE CPSD PER LA CONFIGURAZIONE VARIATA - DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFS – VARIAZIONE TRA I NODI 16-17.....	110
GRAFICO 3.7. 18 INDAGINE 4 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE VALUTATE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON STIMA DELLE FRF TRAMITE CPSD, DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFS – VARIAZIONE TRA I NODI 16-17.....	110
GRAFICO 3.7. 19 INDAGINE 4 – DETTAGLIO GRAFICO 3.7.18 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE VALUTATE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON STIMA DELLE FRF TRAMITE CPSD, DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFS – VARIAZIONE TRA I NODI 16- 17.....	111
GRAFICO 3.7. 20 INDAGINE 4 – CURVATURE DAMAGE FACTOR (CDF) PER METÀ TRAVE DISCRETIZZATA CON 30 DOFS - STIMA DELLE FRF CON CPSD - VARIAZIONE TRA I NODI 16-17 .....	111
GRAFICO 3.7. 21 INDAGINE 4 - FORME MODALI RELATIVE A METÀ TRAVE RILEVATE CON STIMA DIRETTA DELLE FRF PER LA CONFIGURAZIONE VARIATA - DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFS – VARIAZIONE TRA I NODI 11-12.....	112

GRAFICO 3.7. 22 INDAGINE 4 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE VALUTATE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON STIMA DIRETTA DELLE FRF, DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFs – VARIAZIONE TRA I NODI 11-12.....	112
GRAFICO 3.7. 23 INDAGINE 4 - DETTAGLIO DEL GRAFICO 3.7.22 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON STIMA DIRETTA DELLE FRF, DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFs – VARIAZIONE TRA I NODI 11-12.....	113
GRAFICO 3.7. 24 INDAGINE 4 – CURVATURE DAMAGE FACTOR (CDF) PER METÀ TRAVE DISCRETIZZATA CON 30 DOFs - STIMA DIRETTA DELLE FRF - VARIAZIONE TRA I NODI 11-12 .	113
GRAFICO 3.7. 25 INDAGINE 4 - FORME MODALI RELATIVE A METÀ TRAVE RILEVATE CON STIMA DELLE FRF TRAMITE CPSD PER LA CONFIGURAZIONE VARIATA - DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFs – VARIAZIONE TRA I NODI 11-12.....	114
GRAFICO 3.7. 26 INDAGINE 4 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE VALUTATE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON STIMA DELLE FRF TRAMITE CPSD, DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFs – VARIAZIONE TRA I NODI 11-12.....	114
GRAFICO 3.7. 27 INDAGINE 4 – DETTAGLIO GRAFICO 3.7.26 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE VALUTATE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON STIMA DELLE FRF TRAMITE CPSD, DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFs – VARIAZIONE TRA I NODI 11-12.....	115
GRAFICO 3.7. 28 INDAGINE 4 – CURVATURE DAMAGE FACTOR (CDF) PER METÀ TRAVE DISCRETIZZATA CON 30 DOFs - STIMA DELLE FRF CON CPSD - VARIAZIONE TRA I NODI 11-12.....	115
GRAFICO 3.7. 29 INDAGINE 4 - FORME MODALI RELATIVE A METÀ TRAVE RILEVATE CON STIMA DIRETTA DELLE FRF PER LA CONFIGURAZIONE VARIATA - DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFs – VARIAZIONE TRA I NODI 8-9.....	116
GRAFICO 3.7. 30 INDAGINE 4 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE VALUTATE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON STIMA DIRETTA DELLE FRF, DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFs – VARIAZIONE TRA I NODI 8-9.....	116
GRAFICO 3.7. 31 INDAGINE 4 - DETTAGLIO DEL GRAFICO 3.7.30 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON STIMA DIRETTA DELLE FRF, DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFs – VARIAZIONE TRA I NODI 8-9.....	117
GRAFICO 3.7. 32 INDAGINE 4 – CURVATURE DAMAGE FACTOR (CDF) PER METÀ TRAVE DISCRETIZZATA CON 30 DOFs - STIMA DIRETTA DELLE FRF - VARIAZIONE TRA I NODI 8-9 .....	117
GRAFICO 3.7. 33 INDAGINE 4 - FORME MODALI RELATIVE A METÀ TRAVE RILEVATE CON STIMA DELLE FRF TRAMITE CPSD PER LA CONFIGURAZIONE VARIATA - DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFs – VARIAZIONE TRA I NODI 8-9.....	118

GRAFICO 3.7. 34 INDAGINE 4 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE VALUTATE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON STIMA DELLE FRF TRAMITE CPSD, DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFs – VARIAZIONE TRA I NODI 8-9.....	118
GRAFICO 3.7. 35 INDAGINE 4 – DETTAGLIO GRAFICO 3.7.34 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE VALUTATE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON STIMA DELLE FRF TRAMITE CPSD, DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFs – VARIAZIONE TRA I NODI 8-9 .....	119
GRAFICO 3.7. 36 INDAGINE 4 – CURVATURE DAMAGE FACTOR (CDF) PER METÀ TRAVE DISCRETIZZATA CON 30 DOFs - STIMA DELLE FRF CON CPSD - VARIAZIONE TRA I NODI 8-9..	119
GRAFICO 3.7. 37 INDAGINE 5 - FORME MODALI RELATIVE A METÀ TRAVE RILEVATE CON STIMA DIRETTA DELLE FRF PER LA CONFIGURAZIONE INIZIALE - DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFs .....	120
GRAFICO 3.7. 38 INDAGINE 5 - FORME MODALI RELATIVE A METÀ TRAVE RILEVATE CON STIMA DELLE FRF TRAMITE CPSD PER LA CONFIGURAZIONE INIZIALE - DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFs .....	120
GRAFICO 3.7. 39 INDAGINE 5 - FORME MODALI RELATIVE A METÀ TRAVE RILEVATE CON STIMA DIRETTA DELLE FRF PER LA CONFIGURAZIONE VARIATA - DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFs – VARIAZIONE TRA I NODI 16-17.....	121
GRAFICO 3.7. 40 INDAGINE 5 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE VALUTATE CON STIMA DIRETTA DELLE FRF IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA, DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFs – VARIAZIONE TRA I NODI 16-17.....	121
GRAFICO 3.7. 41 INDAGINE 5 - DETTAGLIO DEL GRAFICO 3.7.40 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON STIMA DIRETTA DELLE FRF, DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFs – VARIAZIONE TRA I NODI 16-17.....	122
GRAFICO 3.7. 42 INDAGINE 5 – CURVATURE DAMAGE FACTOR (CDF) PER METÀ TRAVE DISCRETIZZATA CON 30 DOFs - STIMA DIRETTA DELLE FRF -VARIAZIONE TRA I NODI 16-17 ..	122
GRAFICO 3.7. 43 INDAGINE 5 - FORME MODALI RELATIVE A METÀ TRAVE RILEVATE CON STIMA DELLE FRF TRAMITE CPSD PER LA CONFIGURAZIONE VARIATA - DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFs – VARIAZIONE TRA I NODI 16-17.....	123
GRAFICO 3.7. 44 INDAGINE 5 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE VALUTATE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON STIMA DELLE FRF TRAMITE CPSD, DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFs – VARIAZIONE TRA I NODI 16-17.....	123
GRAFICO 3.7. 45 INDAGINE 5 – DETTAGLIO GRAFICO 3.7.44 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE VALUTATE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON STIMA DELLE FRF TRAMITE CPSD, DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFs – VARIAZIONE TRA I NODI 16-17 .....	124
GRAFICO 3.7. 46 INDAGINE 5 – CURVATURE DAMAGE FACTOR (CDF) PER METÀ TRAVE DISCRETIZZATA CON 30 DOFs - STIMA DELLE FRF TRAMITE CPSD -VARIAZIONE TRA I NODI 16-17 .....	124

GRAFICO 3.7. 47 INDAGINE 5 - FORME MODALI RELATIVE A METÀ TRAVE RILEVATE CON STIMA DIRETTA DELLE FRF PER LA CONFIGURAZIONE VARIATA - DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFS – VARIAZIONE TRA I NODI 11-12.....	125
GRAFICO 3.7. 48 INDAGINE 5 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE VALUTATE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON STIMA DIRETTA DELLE FRF, DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFS – VARIAZIONE TRA I NODI 11-12.....	125
GRAFICO 3.7. 49 INDAGINE 5 - DETTAGLIO DEL GRAFICO 3.7.48 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON STIMA DIRETTA DELLE FRF, DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFS – VARIAZIONE TRA I NODI 11-12.....	126
GRAFICO 3.7. 50 INDAGINE 5 – CURVATURE DAMAGE FACTOR (CDF) PER METÀ TRAVE DISCRETIZZATA CON 30 DOFS - STIMA DIRETTA DELLE FRF - VARIAZIONE TRA I NODI 11-12 .	126
GRAFICO 3.7. 51 INDAGINE 5 - FORME MODALI RELATIVE A METÀ TRAVE RILEVATE CON STIMA DELLE FRF TRAMITE CPSD PER LA CONFIGURAZIONE VARIATA - DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFS – VARIAZIONE TRA I NODI 11-12.....	127
GRAFICO 3.7. 52 INDAGINE 5 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE VALUTATE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON STIMA DELLE FRF TRAMITE CPSD, DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFS – VARIAZIONE TRA I NODI 11-12.....	127
GRAFICO 3.7. 53 INDAGINE 5 – DETTAGLIO GRAFICO 3.7.52 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE VALUTATE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON STIMA DELLE FRF TRAMITE CPSD, DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFS – VARIAZIONE TRA I NODI 11-12.....	128
GRAFICO 3.7. 54 INDAGINE 4 – CURVATURE DAMAGE FACTOR (CDF) PER METÀ TRAVE DISCRETIZZATA CON 30 DOFS - STIMA DELLE FRF CON CPSD - VARIAZIONE TRA I NODI 11-12.....	128
GRAFICO 3.7. 55 INDAGINE 5 - FORME MODALI RELATIVE A METÀ TRAVE RILEVATE CON STIMA DIRETTA DELLE FRF PER LA CONFIGURAZIONE VARIATA - DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFS – VARIAZIONE TRA I NODI 8-9.....	129
GRAFICO 3.7. 56 INDAGINE 5 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE VALUTATE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON STIMA DIRETTA DELLE FRF, DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFS – VARIAZIONE TRA I NODI 8-9.....	129
GRAFICO 3.7. 57 INDAGINE 5 - DETTAGLIO DEL GRAFICO 3.7.56 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON STIMA DIRETTA DELLE FRF, DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFS – VARIAZIONE TRA I NODI 8-9.....	130
GRAFICO 3.7. 58 INDAGINE 5 – CURVATURE DAMAGE FACTOR (CDF) PER METÀ TRAVE DISCRETIZZATA CON 30 DOFS - STIMA DIRETTA DELLE FRF - VARIAZIONE TRA I NODI 8-9 .....	130

GRAFICO 3.7. 59 INDAGINE 4 - FORME MODALI RELATIVE A METÀ TRAVE RILEVATE CON STIMA DELLE FRF TRAMITE CPSD PER LA CONFIGURAZIONE VARIATA - DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFS – VARIAZIONE TRA I NODI 8-9.....	131
GRAFICO 3.7. 60 INDAGINE 5 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE VALUTATE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON STIMA DELLE FRF TRAMITE CPSD, DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFS – VARIAZIONE TRA I NODI 8-9.....	131
GRAFICO 3.7. 61 INDAGINE 5 – DETTAGLIO GRAFICO 3.7.60 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE VALUTATE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CON STIMA DELLE FRF TRAMITE CPSD, DISCRETIZZAZIONE A 30 DOFS – VARIAZIONE TRA I NODI 8-9 .....	132
GRAFICO 3.7. 62 INDAGINE 4 – CURVATURE DAMAGE FACTOR (CDF) PER METÀ TRAVE DISCRETIZZATA CON 30 DOFS - STIMA DELLE FRF CON CPSD - VARIAZIONE TRA I NODI 8-9..	132
GRAFICO 4.1 A) ANDAMENTI DEGLI SCARTI PERCENTUALI TRA FREQUENZE DI VIBRAZIONE RIPORTATI NELL’ ORDINE DEI PRIMI QUATTRO MODI DI VIBRARE - MATRICE DI MASSA LUMPED.....	140
GRAFICO 4.2 STRAUS7 – TIME TABLE RELATIVA ALL’IMPULSO SIMULATO NUMERICAMENTE.....	148
GRAFICO 4. 3 TRASFORMATA DEL SEGNALE ACQUISITO IN LABORATORIO ED INSERITO NELLA TABLE DI STRAUS7.....	150
GRAFICO 4. 4 SIMULAZIONE NUMERICA INDAGINE 1 - TRASFORMATA DI FOURIER DELL’OUTPUT AD L/2.....	152
GRAFICO 4. 5 SIMULAZIONE NUMERICA INDAGINE 1 - TRASFORMATA DI FOURIER DELL’OUTPUT AD L/3.....	153
GRAFICO 4. 6 SIMULAZIONE NUMERICA INDAGINE 1 – STIMA DELLE FORME MODALI DI METÀ TRAVE (15 DOFS) A PARTIRE DALLE FRF OTTENUTE DALL’OUTPUT NEL NODO AD L/2.....	155
GRAFICO 4. 7 SIMULAZIONE NUMERICA INDAGINE 1 – STIMA DELLE FORME MODALI DI METÀ TRAVE (15 DOFS) A PARTIRE DALLE FRF OTTENUTE DALL’OUTPUT NEL NODO AD L/3.....	155
GRAFICO 4. 8 SIMULAZIONE NUMERICA INDAGINE 1 – STIMA DELLE FORME MODALI IN VALORE ASSOLUTO DI METÀ TRAVE (15DOFS) A PARTIRE DALLE FRF CALCOLATE CON PSD DALL’OUTPUT NEL NODO AD L/2.....	156
GRAFICO 4. 9 SIMULAZIONE NUMERICA INDAGINE 1 – STIMA DELLE FORME MODALI IN VALORE ASSOLUTO DI METÀ TRAVE (15DOFS) A PARTIRE DALLE FRF CALCOLATE CON PSD DALL’OUTPUT NEL NODO AD L/3.....	156
GRAFICO 4. 10 SIMULAZIONE NUMERICA INDAGINE 1 – STIMA DELLE FORME MODALI IN VALORE ASSOLUTO DI METÀ TRAVE (15DOFS) A PARTIRE DALLE FRF CALCOLATE CON CPSD DALL’OUTPUT NEL NODO AD L/2.....	157

GRAFICO 4. 11 SIMULAZIONE NUMERICA INDAGINE 1 – STIMA DELLE FORME MODALI IN VALORE ASSOLUTO DI METÀ TRAVE (15DOFs) A PARTIRE DALLE FRF CALCOLATE CON CPSD DALL’OUTPUT NEL NODO AD L/3 .....	157
GRAFICO 4. 12 SIMULAZIONE NUMERICA INDAGINE 1 - DETTAGLIO DEL GRAFICO 4.6, MODO 3 – ANDAMENTO DELLA PARTE REALE DELLE FRF OTTENUTE TRAMITE STIMA DIRETTA .....	158
GRAFICO 4. 13 STRAUS7 – IRRIGIDIMENTO LOCALE INTRODOTTO NEL MODELLO FEM – TEST ALGORITMO DI IDENTIFICAZIONE CON FORME MODALI DEDOTTE DA ANALISI MODALE .....	159
GRAFICO 4. 14 MODIFICA 1 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI VALUTATE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CALCOLATE TRAMITE ANALISI NUMERICA, TEST CON FORME MODALI DA ANALISI NATURAL FREQUENCY – VARIAZIONE TRA I NODI 16-17 .....	161
GRAFICO 4. 15 MODIFICA 2 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI VALUTATE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CALCOLATE TRAMITE ANALISI NUMERICA, TEST CON FORME MODALI DA ANALISI NATURAL FREQUENCY – VARIAZIONE TRA I NODI 16-17 .....	162
GRAFICO 4. 16 MODIFICA 3 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI VALUTATE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CALCOLATE TRAMITE ANALISI NUMERICA, TEST CON FORME MODALI DA ANALISI NATURAL FREQUENCY – VARIAZIONE TRA I NODI 16-17 .....	162
GRAFICO 4. 17 MODIFICA 4 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI VALUTATE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CALCOLATE TRAMITE ANALISI NUMERICA, TEST CON FORME MODALI DA ANALISI NATURAL FREQUENCY – VARIAZIONE TRA I NODI 16-17 .....	163
GRAFICO 4. 18 FORME MODALI RELATIVE A METÀ TRAVE (15DOFs) STIMATE A PARTIRE DA FRF CALCOLATE CON CPSD PER LA CONFIGURAZIONE INIZIALE .....	164
GRAFICO 4. 19 FORME MODALI RELATIVE A METÀ TRAVE (15DOFs) STIMATE A PARTIRE DA FRF CALCOLATE CON CPSD PER LA CONFIGURAZIONE VARIATA - VARIAZIONE TRA I NODI 13-14..	164
GRAFICO 4. 20 DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE (15DOFs) VALUTATE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CALCOLATE TRAMITE ANALISI NUMERICA – VARIAZIONE TRA I NODI 13-14.....	166
GRAFICO 4. 21 DETTAGLIO DEL GRAFICO 4.20 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE (15DOFs) IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA CALCOLATE TRAMITE ANALISI NUMERICA – VARIAZIONE TRA I NODI 13-14.....	166
GRAFICO 4. 22 CURVATURE DAMAGE FACTOR (CDF) PER METÀ TRAVE (15DOFs) CALCOLATO TRAMITE ANALISI NUMERICA - VARIAZIONE TRA I NODI 13-14 .....	167
GRAFICO 4. 23 ANDAMENTO DELLE CURVATURE MODALI (MC) DI METÀ TRAVE CALCOLATE A PARTIRE DA DATI NUMERICI PER I PRIMI QUATTRO MODI DI VIBRARE DELLA TRAVE .....	167
GRAFICO 4. 24 SOVRAPPOSIZIONE DEGLI ANDAMENTI DELLE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE DEI PRIMI QUATTRO MODI PER CONFIGURAZIONE INTATTA E VARIATA CALCOLATE A PARTIRE DA DATI NUMERICI- VARIAZIONE TRA I NODI 13-14.....	168



GRAFICO 4. 25 DETTAGLIO GRAFICO 4.24 - SOVRAPPOSIZIONE DEGLI ANDAMENTI DELLE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE DEL TERZO MODO PER CONFIGURAZIONE INTATTA E VARIATA CALCOLATE A PARTIRE DA DATI NUMERICI - VARIAZIONE TRA I NODI 13-14.....	168
GRAFICO 4. 26 SIMULAZIONE NUMERICA INDAGINE1 - FORME MODALI RELATIVE A METÀ TRAVE (15DOFs) STIMATE A PARTIRE DA FRF CALCOLATE CON CPSD PER LA CONFIGURAZIONE INIZIALE .....	171
GRAFICO 4. 27 SIMULAZIONE NUMERICA INDAGINE1 - FORME MODALI RELATIVE A METÀ TRAVE (15DOFs) STIMATE A PARTIRE DA FRF CALCOLATE CON CPSD PER LA CONFIGURAZIONE VARIATA - VARIAZIONE TRA I NODI 13-14 .....	171
GRAFICO 4. 28 SIMULAZIONE NUMERICA INDAGINE 1 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE (15DOFs) VALUTATE IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA – VARIAZIONE TRA I NODI 13-14.....	172
GRAFICO 4. 29 SIMULAZIONE NUMERICA INDAGINE 1 - DETTAGLIO DEL GRAFICO 4.20 - DIFFERENZE ASSOLUTE TRA LE CURVATURE MODALI DI METÀ TRAVE (15DOFs) IN CONFIGURAZIONE INIZIALE E VARIATA – VARIAZIONE TRA I NODI 13-14.....	172
GRAFICO 4. 30 SIMULAZIONE NUMERICA INDAGINE 1 - CURVATURE DAMAGE FACTOR (CDF) PER METÀ TRAVE (15DOFs) - VARIAZIONE TRA I NODI 13-14.....	173