

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tesi di Laurea in Storia della Matematica

**CRITICA ALLE FLUSSIONI
NE L'ANALISTA DI BERKELEY**

Relatore:

Chiar.mo Prof.

GUIDO GHERARDI

Correlatore:

Chiar.ma Prof.

MARIA GIULIA LUGARESÌ

Presentata da:

GRAZIA SIBILIO

Sessione Unica
Anno Accademico 2020/2021

*A mia sorella Adriana,
la mia roccia.*

Indice

Introduzione	iii
1 Origini del Calcolo infinitesimale	1
1.1 Il problema delle quadrature	1
1.1.1 Il metodo di esaustione	2
1.1.2 Il metodo di Archimede per la quadratura della parabola	4
1.1.3 La teoria degli indivisibili di Cavalieri	6
1.2 Il problema delle tangenti	11
1.2.1 La tangente a una circonferenza negli <i>Elementi</i> di Euclide	11
1.2.2 Il metodo di René Descartes per trovare la tangente a una curva	15
1.2.3 Aggiustamenti al metodo di Descartes	20
1.2.4 Il metodo dei massimi e dei minimi di Pierre Fermat .	25
1.3 Il metodo dei differenziali di Leibniz	29
1.4 Il metodo delle flussioni di Newton	31
2 Le critiche di Berkeley	41
2.1 Alcune premesse	41
2.2 I propositi de “ <i>L’Analista</i> ”	42
2.3 Inconcepibilità	45
2.4 Infondatezza dei metodi dimostrativi	47
2.5 La compensazione degli errori	51
2.5.1 L’esempio delle tangenti a una parabola	52
2.5.2 L’ordinata dalla conoscenza dell’area	62

2.6	Rifiuto delle flussioni	67
3	Riformulazione dei metodi di Newton	73
3.1	La proposta di B. Robins	74
3.2	La proposta di C.Maclaurin	82
4	Conclusioni	89
	Bibliografia	93

Introduzione

Nella presente dissertazione si procede all'analisi delle critiche alle flussioni, a suo tempo esposte da George Berkeley in *The Analyst* (1734) e rivelatesi tutt'altro che infondate, ove si consideri che trascorsero quasi duecento anni per giungere – grazie a Karl Weierstrass – all'introduzione della definizione rigorosa di limite.

In realtà, Berkeley non era un matematico. Egli non si addentrò nei meandri del calcolo infinitesimale, ma ne considerò soltanto i concetti fondamentali, vale a dire – secondo una moderna terminologia – i concetti di derivata e differenziale, qualche formula nonché alcune semplici applicazioni, come ad esempio la determinazione della tangente a una curva.

Per una migliore comprensione del valore della critica di Berkeley, nel primo capitolo sono esposte alcune preliminari informazioni relative alle origini del Calcolo infinitesimale.

La spinta che condusse alla nascita del Calcolo fu costituita – senza alcun dubbio – dal desiderio dei matematici del XVII secolo di risolvere alcuni problemi sui quali da molto tempo si ragionava diffusamente.

Tra i problemi più celebri che impegnavano i matematici dell'epoca si ricordano il problema delle quadrature, ovvero del calcolo delle aree e dei volumi dei solidi, nonché il problema delle tangenti, consistente nella determinazione della retta tangente al grafico di una curva.

All'inizio della trattazione viene brevemente discusso il primo problema, a partire dal metodo di esaustione utilizzato in particolar modo da Archimede nella risoluzione di questioni riguardanti la quadratura di figure piane, fino

ad arrivare alla presentazione della teoria degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri, formulata molti secoli più tardi.

Successivamente, l'attenzione si concentra sul secondo problema, muovendo – in particolare – dall'esempio della determinazione della tangente a una circonferenza presentata da Euclide negli *Elementi*, in cui si evince che il concetto di curva e di tangente nella matematica greca è strettamente legata alla procedura costruttiva che la determina.

Un progresso fu compiuto soltanto nei primi anni del Seicento con la pubblicazione de *La Géométrie* di Descartes, recante l'introduzione del concetto generale di curva. L'identificazione della curva con la sua equazione rese finalmente possibile l'elaborazione di metodi in grado di consentire il tracciamento di tangenti di curve generiche.

Viene dunque spiegato come Descartes utilizzi la rappresentazione analitica delle curve per determinarne la retta tangente.

Il metodo cartesiano non era tuttavia esente da problemi; infatti, esso richiedeva l'esecuzione di numerosi calcoli e inoltre, nonostante la sua generalità, era applicabile soltanto a curve algebriche.

Tali difficoltà portarono i seguaci di Descartes a cercare di migliorare il metodo senza modificare la struttura di base: al riguardo sono in questa sede evidenziate le versioni di Florimond de Beaune, di Jan Hudde e di René-François de Sluse.

Nel prosieguo, il presente lavoro riporta l'esposizione di un secondo metodo più generale, elaborato da Pierre Fermat in una memoria dal titolo *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*.

Anch'esso utilizza la formulazione analitica delle curve, basandosi – tuttavia – sulla teoria dei massimi e dei minimi che era stata studiata da Viète.

Infine, la trattazione evidenzia il definitivo superamento di questi procedimenti con l'introduzione, da un lato, del concetto di differenziale di una curva da parte di Gottfried Wilhelm Leibniz, e dall'altro, del concetto di flussione di Isaac Newton.

Dopo aver delineato i punti principali toccati dal *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus quæ nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* di Leibniz, considerato l'atto di nascita del calcolo infinitesimale, una particolare attenzione viene qui dedicata ai metodi di Newton, sui quali si concentra maggiormente la critica di Berkeley.

Nel corso degli anni, l'approccio di Newton al Calcolo cambiò in maniera notevole; al riguardo, ne viene ricostruita l'evoluzione del pensiero attraverso le sue opere principali sull'argomento:

- *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas;*
- *Methodus fluxionum et serierum infinitarum;*
- *Tractatus de quadratura curvarum.*

Il secondo capitolo si propone di procedere ad un'analisi dettagliata de *L'Analista* scritto da Berkeley nel 1734 e, soprattutto, di studiare l'effettiva fondatezza delle critiche mosse dall'autore.

Sicuramente, l'opera è un'apologia religiosa; fine ultimo di Berkeley era quello di smontare il prestigio dei matematici dell'epoca indebitamente acquisito anche in materia di Religione.

Per quanto riguarda il contenuto matematico, i punti principali trattati si possono ridurre a tre:

- Inconcepibilità dei concetti fondativi del Calcolo, quali i differenziali e le flussioni;
- errori nella deduzione nei teoremi fondamentali;
- tentativo di spiegazione dei successi come risultato di compensazione di errori.

La forza delle argomentazioni contenute ne *L'Analista* risiede nel fatto che vengano utilizzati strumenti matematici per tentare di dimostrare in

che modo, in alcune delle applicazioni più significative dei nuovi metodi, gli analisti commettersero due errori che si compensavano a vicenda.

Ripercorrendo i passi di Berkeley in ogni esempio proposto, viene qui posta in discussione la correttezza logica delle sue dimostrazioni.

Per concludere, il terzo capitolo contiene qualche cenno in merito alle riformulazioni di Robins e Maclaurin elaborate in risposta alle critiche di Berkeley contro il calcolo newtoniano.

Capitolo 1

Origini del Calcolo infinitesimale

1.1 Il problema delle quadrature

Uno dei primi problemi a far emergere la questione degli infinitesimi, già nell'Antica Grecia, tra il V e il IV secolo a.C., fu quello di calcolare aree di figure piane o volumi di figure solide.

Un implicito richiamo ad un primordiale concetto di limite è ad esempio racchiuso nei tentativi di quadrare il cerchio da parte del matematico Antifonte. Quello della quadratura del cerchio è uno dei grandi problemi classici e consisteva nello stabilire se fosse possibile costruire, con il solo uso della riga e del compasso, un quadrato equivalente a un cerchio dato.

Secondo Antifonte, data una circonferenza, all'aumentare del numero dei lati di un poligono inscritto in questa, ogni lato avvicinandosi sempre più all'arco di circonferenza sotteso, non si sarebbe più distinto dall'arco; di conseguenza da un certo momento in poi l'area compresa tra il poligono e la circonferenza si sarebbe ridotta fino ad assumere una quantità arbitrariamente piccola e il poligono si sarebbe potuto identificare con il cerchio racchiuso dalla circonferenza.

Possiamo quindi dire che Antifonte pensasse alla circonferenza come al

limite dei poligoni che si potevano inscrivere in essa e, a partire da questo ragionamento, egli concludeva che il cerchio poteva essere quadrato.

Qui però Antifonte si sbaglia; sappiamo infatti che l'antico problema della quadratura del cerchio non è risolvibile, fatto che fu dimostrato rigorosamente soltanto nel 1882 a partire dalla prova della trascendenza del π greco.

L'errore di Antifonte consiste nell'attribuire proprietà che valgono per i singoli elementi di una classe di poligoni al loro limite e questo è senz'altro falso.

Detto questo, quindi l'idea di approssimare figure curve inscrivendo e circoscrivendo figure rettilinee attorno ad esse circolava tra i matematici greci già dal V secolo a.C., il problema è che non si sapeva come concludere il ragionamento, come vedremo, a questo ci penserà Archimede con il suo metodo di esaustione, il quale sarà ripreso da Cavalieri secoli dopo.

1.1.1 Il metodo di esaustione

Secondo Archimede, fu Eudosso di Cnido, uno dei più importanti matematici della civiltà greca, a gettare le fondamenta per il metodo di esaustione, il quale è equivalente al calcolo integrale.

Il metodo si basa sull'assioma di Eudosso, che oggi comunemente chiamiamo proprietà archimedea: date due grandezze aventi un certo rapporto, è possibile trovare un multiplo dell'una che superi l'altra.

A partire da questo si può giungere, mediante una *reductio ad absurdum*, al principio di esaustione, tramite cui fu possibile dimostrare, ad esempio, che il volume di una piramide è un terzo del volume di un prisma avente la stessa base e la stessa altezza oppure che il volume di un cono è un terzo del volume del cilindro corrispondente.

Tutte le opere di Eudosso sono state perdute, qui riportiamo dunque la formulazione del principio espressa da Euclide nella proposizione I del X libro degli *Elementi*:

Proposizione 1.1.1 (Proposizione I,X). *Date due grandezze diseguali, se si sottrae dalla maggiore una grandezza maggiore della metà, dalla parte restan-*

te un'altra grandezza maggiore della metà, e così si procede successivamente, rimarrà una grandezza che sarà minore della grandezza minore [inizialmente] assunta.[5]

Per comprendere meglio il metodo dell'esaustione presentiamo dettagliatamente, in termini moderni, la dimostrazione della proposizione II del libro X degli *Elementi*, dove se ne fa uso:

Proposizione 1.1.2. *I cerchi stanno l'uno all'altro come i quadrati dei diametri.*[5]

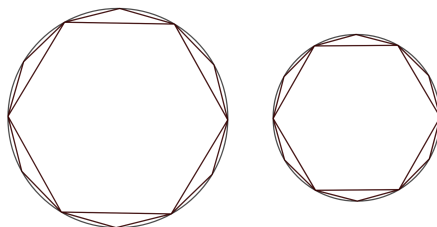


Figura 1.1

Dimostrazione. Siano dati i cerchi c e C , con diametri rispettivamente d e D e aree a e A .

Dobbiamo mostrare che

$$\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}. \quad (1.1)$$

Per farlo, dimostreremo che le disuguaglianze

$$\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2} \quad \text{e} \quad \frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2}. \quad (1.2)$$

portano ad una contraddizione.

Se vale la prima, deve esistere una grandezza $a' < a$ tale che

$$\frac{a'}{A} = \frac{d^2}{D^2} \quad (1.3)$$

Sia $a - a'$ una grandezza preassegnata $\epsilon > 0$.

Costruiamo poligoni regolari simili tra loro di area p_n e P_n con lo stesso numero di lati n inscritti nei cerchi c e C .

Consideriamo ora le aree intermedie che si trovano all'esterno dei poligoni ma all'interno dei cerchi; al raddoppiare dei numeri dei lati dei poligoni, da queste aree intermedie vengono sottratte parti che sono maggiori della loro metà.

Dunque per la proprietà di esaustione, raddoppiando successivamente il numero dei lati dei poligoni, è possibile ridurre le aree intermedie fino a che $a - p_n < \epsilon$.

Allora, ricordando che $a - a' = \epsilon$, abbiamo

$$p_n > a' \quad (1.4)$$

Per una proposizione precedente secondo cui poligoni simili inscritti in cerchi stanno l'uno all'altro come i quadrati dei cerchi, sappiamo che

$$\frac{p_n}{P_n} = \frac{d^2}{D^2}. \quad (1.5)$$

Quindi per la 1.3, si ha

$$\frac{p_n}{P_n} = \frac{a'}{A} \quad (1.6)$$

E da 1.4 e 1.6, concludiamo che

$$P_n > A. \quad (1.7)$$

Poiché P_n è l'area di un poligono inscritto nel cerchio C di area A , la conclusione in 1.7 è falsa e dunque anche la premessa $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$ è falsa.

Analogamente si prova la falsità di $\frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2}$.

Ne consegue che deve valere $\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}$ e quindi la proposizione è dimostrata. \square

1.1.2 Il metodo di Archimede per la quadratura della parabola

Dopo il cerchio, si pose presto il problema della quadratura anche per le sezioni coniche.

Questi problemi furono affrontati brillantemente da Archimede, i cui metodi molti secoli dopo hanno senza dubbio contribuito alla fondazione del Calcolo infinitesimale.

Studiamo ora un metodo presente nel trattato *Quadratura della parabola* per trovare l'area del segmento parabolico.

Per prima cosa Archimede dimostra che è possibile esaurire un segmento parabolico con una serie di triangoli.

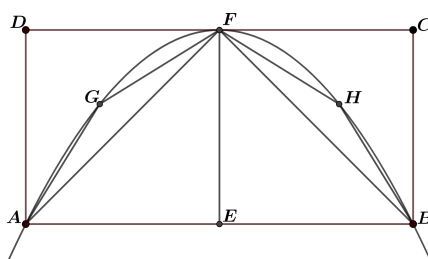


Figura 1.2

In riferimento alla figura 1.2, sia AFB il segmento parabolico e sia FE il segmento che biseca le corde parallele alla base AB in modo che E sia il punto medio della base.

Nella proposizione 18 viene dimostrato che la tangente in F è parallela ad AB . Se inoltre BC e AD sono paralleli a FE , allora l'area del triangolo AFB è la metà del rettangolo $ABCD$ e dato che quest'ultimo è circoscritto al segmento, l'area del triangolo AFB è maggiore della metà del segmento parabolico.

Si può poi costruire il triangolo FHB sul segmento di base FB e si può dimostrare che esso è uguale a un ottavo del triangolo AFB .

Allo stesso modo costruiamo il triangolo AGF su AF , il quale sommato al triangolo FHB è un quarto del triangolo AFB , in più anch'essi riempiono più della metà dei segmenti parabolici nei quali sono costruiti.

Si può ripetere il procedimento n volte e avere pertanto le condizioni sufficienti per applicare la proprietà di esaurimento, cioè possiamo affermare che l'area della figura poligonale ottenuta sommando un numero finito di

nuovi triangoli al triangolo originario AFB ovvero

$$A_{AFB} + \frac{1}{4}A_{AFB} + \frac{1}{16}A_{AFB} + \dots + \frac{1}{4^n}A_{AFB} \quad (1.8)$$

può approssimare quanto si vuole il segmento parabolico, in altre parole, la differenza fra l'area del segmento parabolico e la somma finita 1.8 può essere resa più piccola di qualsiasi entità assegnata.

Detto questo, indicando con $A_0 = A_{AFB}$ e $A_n = \frac{1}{4^n}$, Archimede dimostra che

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n + \frac{1}{3}A_n = \frac{4}{3}A_1. \quad (1.9)$$

E a partire da questo procede con la *reductio ad absurdum* per dimostrare che l'area del segmento parabolico non possa né essere maggiore né minore a $\frac{4}{3}A_0$ e che quindi, se A è l'area del segmento parabolico valga:

$$A = \frac{4}{3}A_0 \quad (1.10)$$

Se $A > \frac{4}{3}A_0$, si potrebbe trovare il poligono S inscritto composto da un numero finito di triangoli tale che

$$A > S > \frac{4}{3}A_0. \quad (1.11)$$

Ma per la 1.9, se ad esempio S è composto da m triangoli, si ha

$$S + \frac{1}{3}A_m = \frac{4}{3}A_0 \quad (1.12)$$

e quindi si arriva ad una contraddizione: $S < \frac{4}{3}A_0$.

Analogamente se $A < \frac{4}{3}A_0$ possiamo scegliere S in modo tale che $\frac{4}{3}A_0 - S > A_m$, cioè $\frac{4}{3}A_0 - (A_0 + A_1 + \dots + A_m) = \frac{1}{3}A_m < A_m$, il che è ancora assurdo.

1.1.3 La teoria degli indivisibili di Cavalieri

Dopo le grandi conquiste raggiunte da Archimede, per trovare risultati altrettanto degni di nota bisogna saltare vari capitoli della storia fino a giungere al Rinascimento.

Nel 1543 la stampa delle opere di Archimede a Basilea accese immediatamente una vivissima attenzione sui problemi che erano stati affrontati secoli prima e condusse ad importanti studi matematici a partire dai quali si aprì una nuova fase dello sviluppo del calcolo.

Inizialmente venivano ripercorsi pedissequamente i metodi classici per giungere però anche a risultati originali; in primis fu riscoperto il metodo di esaustione, del quale ad esempio si servì Federico Commandino in un'opera in cui determinò i centri di gravità di piramidi, coni e paraboloidi di rotazione.

Un importante passo in avanti lo troviamo nei lavori di Luca Valerio, chiamato da Galileo il nuovo Archimede, il quale per la prima volta, nella sua opera maggiore, il *De centro gravitatis solidorum* del 1604, pur seguendo i passi archimedei, introdusse la novità di trattare classi generali di figure, *le figure decrescenti*, al posto di curve o solidi specifici. Ancora però il metodo era fortemente fondato su rappresentazioni grafiche e per una vera e propria generalizzazione bisognerà aspettare, come vedremo, gli studi di Descartes, i quali porteranno ad un'aritmetizzazione delle figure geometriche.

Riportiamo ora la terza proposizione del libro II del *De centro gravitatis solidorum*, la quale rende l'idea di come Valerio interpretasse il metodo di esaustione:

Proposizione 1.1.3 (Proposizione III). *Se una grandezza maggiore o minore di una prima con un'altra maggiore o minore di una seconda, entrambe assieme maggiori o minori per eccesso o per difetto di una quantità minore di una grandezza comunque fissata, avrà un determinato rapporto; allora la prima avrà con la seconda lo stesso determinato rapporto.*

Studi come quelli di Valerio apriranno la strada alla teoria degli indivisibili formulata da Bonaventura Cavalieri nella sua *Geometria degli indivisibili* pubblicata nel 1635.

L'idea di fondo dell'opera di Cavalieri consiste nel considerare che un'area possa essere costituita da un numero indefinito di segmenti paralleli equidistanti aventi dimensione infinitesima, i quali rappresentano gli elementi indi-

visibili, e che analogamente un volume possa essere composto da un numero indefinito di aree piane parallele.

Cavalieri tentò di spiegare le sue argomentazioni in due modi diversi: prima considerò le figure come fluenti generate dal moto (flussione) dei loro indivisibili, dopo si rifece direttamente alla nozione di infinitesimo.

Con queste premesse, Cavalieri presentò un metodo per calcolare aree e volumi che si basava sul cosiddetto principio di Cavalieri, espresso nella proposizione IV del libro II dell'opera:

Proposizione 1.1.4. *Se due figure piane o solide hanno la stessa altezza; se poi, condotte nelle figure piane delle rette parallele e nelle solide dei piani paralleli, si troverà che i segmenti di retta tagliati dalle figure piane, o le superfici piane tagliate dalle figure solide, sono grandezze proporzionali, le due figure stanno tra loro come uno qualsiasi dei segmenti, o nei solidi una delle superfici, tagliati nella prima al corrispondente segmento, o superficie, tagliato nell'altra.*

Ad esempio per calcolare l'area di un'ellisse di asse maggiore $2a$ e asse minore $2b$, si costruisca una circonferenza tangente all'ellisse nei punti estremi dell'asse maggiore A e B .

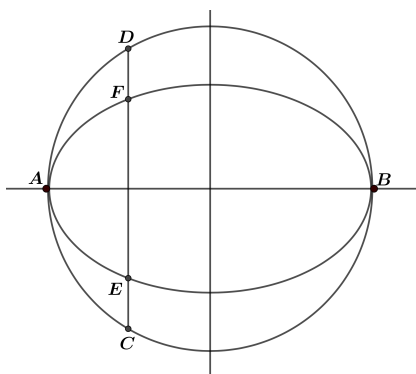


Figura 1.3

Si osservi che ogni retta perpendicolare a tale asse definisce sulla circonferenza un segmento CD e sull'ellisse un segmento EF , che vengono conside-

rati come elementi indivisibili generatori delle due figure comprese nelle due curve.

Si vede facilmente che i due segmenti stanno fra loro in un rapporto fisso $\frac{a}{b}$. In termini moderni, lo mostreremmo scrivendo le equazioni delle due curve:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = a^2. \quad (1.13)$$

Intersechiamole con una retta perpendicolare all'asse delle ascisse, quindi di equazione $x = k$, con $k \in \mathbb{R}$ e otteniamo le coordinate dei quattro estremi dei segmenti che la retta definisce sulla circonferenza e sull'ellisse, rispettivamente $(k, \pm\sqrt{a^2 - k^2})$ e $(k, \pm\sqrt{b^2 - \frac{k^2 b^2}{a^2}})$.

Allora le distanze tra i due estremi del segmento sulla circonferenza e di quelli sull'ellisse saranno

$$2\sqrt{a^2 - k^2} \quad \text{e} \quad 2\sqrt{b^2 - \frac{k^2 b^2}{a^2}}. \quad (1.14)$$

Il rapporto tra le due sarà sempre:

$$\frac{2\sqrt{a^2 - k^2}}{2\sqrt{b^2 - \frac{k^2 b^2}{a^2}}} = \frac{2\sqrt{a^2 - k^2}}{2\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - k^2}} = \frac{a}{b}. \quad (1.15)$$

Quindi per il principio di Cavalieri, il rapporto tra questi segmenti è anche il rapporto fra l'area che racchiude la circonferenza e l'area racchiusa dall'ellisse, dal momento che queste due superfici sono costituite dalla somma di tutti i segmenti di questo genere.

Indicando con A l'area dell'ellisse, concludiamo che

$$\frac{\pi a^2}{A} = \frac{a}{b}. \quad (1.16)$$

Ovvero

$$A = \pi ab. \quad (1.17)$$

Nel 1647 Cavalieri pubblicò un'altra opera dal titolo *Exercitationes geometricae sex*, in cui egli utilizza il suo principio per risolvere nuovi problemi

riguardanti le aree, quelli che oggi risolviamo tramite la risoluzione di integrali definiti. In questo modo Cavalieri anticipò un risultato che equivale a risolvere l'integrale che, in linguaggio moderno, si scrive

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}. \quad (1.18)$$

La risoluzione di questo problema ha una formulazione molto diversa da quelle a cui siamo abituati: prima dimostrò il caso $n = 1$, confrontando le potenze dei segmenti di un parallelogramma di base ed altezza uguali ad a , paralleli alla base, con le corrispondenti potenze dei segmenti dell'uno o dell'altro dei due triangoli in cui la diagonale divide il parallelogramma.

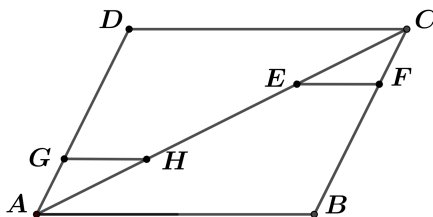


Figura 1.4

Il parallelogramma $ABCD$ sia diviso dalla diagonale AC in due triangoli (figura 1.4), consideriamo un indivisibile EF del triangolo ABC , parallelo alla base AB . Prendendo poi $AG = CF$ e tracciando GH parallela a AB , si dimostra che l'indivisibile GH è uguale a EF . A questo punto, è possibile associare a tutti gli indivisibili contenuti nel triangolo ABC i corrispondenti del triangolo CDA .

Poichè il parallelogramma è l'insieme degli indivisibili contenuti nei due triangoli, l'insieme dei segmenti contenuti in uno dei triangoli componenti è metà dell'insieme dei segmenti contenuti nel parallelogramma, ovvero

$$\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}. \quad (1.19)$$

Infine Cavalieri estese il ragionamento a potenze superiori fino a formulare l'importante generalizzazione che per le potenze n -esime sarà appunto

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}. \quad (1.20)$$

Cavalieri esercitò una grande influenza sui matematici successivi che si occuparono di questioni infinitesimali: Newton riprese da lui i termini fluente e flussione, mentre Leibniz introdusse il simbolo che oggi usiamo per l'integrale, ovvero \int per indicare la somma degli indivisibili secondo Cavalieri.

1.2 Il problema delle tangenti

1.2.1 La tangente a una circonferenza negli *Elementi* di Euclide

Fin dall'antichità sappiamo che il problema delle tangenti era stato affrontato e in molti casi anche risolto.

In tale processo decisivo fu lo sviluppo della civiltà greca e con esso la nascita del pensiero logico-deduttivo, che permise di raggiungere un grado di astrazione tale da rendere possibile trovare metodi per costruire le tangenti al cerchio, alle sezioni coniche, ed a un certo numero di altre curve sia algebriche che trascendenti.

Tuttavia, dato che per i matematici dell'Antica Grecia l'esistenza degli oggetti geometrici seguiva dalla costruibilità degli stessi, solo la conoscenza di un procedimento che consentisse di costruire una curva, permetteva di definirla.

A dimostrazione di quanto detto, richiamiamo qui il concetto di cerchio espresso dalla definizione XV del Libro I degli *Elementi* di Euclide:

Definizione 1.1 (XV,I). Un cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea (che si chiama circonferenza) tale che tutte le linee rette che cadono su di essa, partendo da un punto fra quelli che giacciono dentro la figura, sono uguali tra loro.[5]

Chiaramente, così come non si riusciva a dare la definizione di curva generica, così non si era neanche in grado di giungere ad un metodo generale per determinare la tangente in un punto di una curva; per ognuna ne esisteva uno specifico che sfruttava le caratteristiche peculiari della curva stessa.

Nella seconda definizione del libro III degli *Elementi*, Euclide definisce la tangente a un cerchio in un suo punto come “la retta che, toccando il cerchio e prolungata, non seca il cerchio”[5].

Si nota subito che la definizione appena citata individua certamente le tangenti ad una circonferenza ma non quelle di una curva qualsiasi.

È facile rendersene conto, considerando ad esempio la seguente figura:

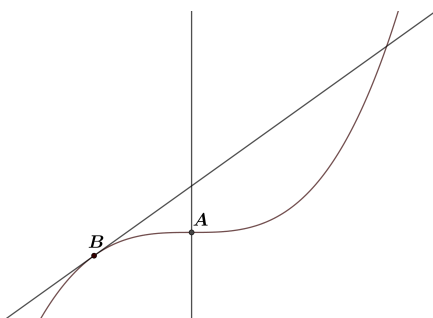


Figura 1.5

La retta passante per il punto A soddisfa la definizione data da Euclide ma non è una retta tangente alla curva.

Al contrario, se consideriamo la retta tangente alla curva nel punto B , essa non interseca la curva in un solo punto ma in due.

A questo punto ricordiamo il procedimento che viene seguito negli *Elementi* di Euclide per trovare la tangente a una circonferenza.

Il problema viene affrontato nel libro III, il quale è interamente dedicato alla trattazione della geometria del cerchio.

È in particolare con i primi due punti della proposizione 16 che viene dimostrato che, dato un punto della circonferenza, la retta perpendicolare al diametro che passa per quel punto è l'unica che soddisfa le condizioni di tangenza, cioè tocca la circonferenza in un solo punto e poi non la interseca più.

Proposizione 1.2.1 (Proposizione XVI,III). *In un cerchio, una retta che sia tracciata perpendicolare al diametro partendo da un estremo di questo*

- *cadrà esternamente al cerchio;*

- *nessun'altra retta potrà interporsi nello spazio tra la retta e la circonferenza;*
- *l'angolo del semicerchio è maggiore, e quello che rimane fra la retta e la circonferenza minore, di ogni angolo acuto rettilineo.[5]*

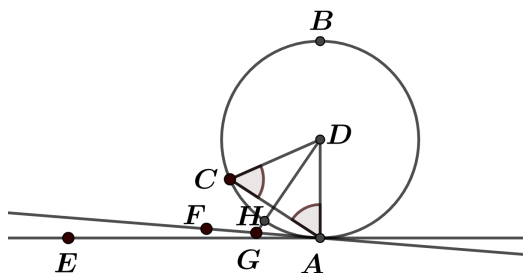


Figura 1.6

Dimostrazione. Sia ABC un cerchio, di centro D e diametro AB; dico che la retta tracciata perpendicolarmente ad AB dal suo estremo A, cadrà esattamente esternamente al cerchio.

Infatti, supponiamo che non sia così, ma, se possibile, la retta cada internamente come fa CA, e si tracci la congiungente DC.

Poiché DA è uguale a DC, anche l'angolo DAC è uguale all'angolo ACD (Prop. I.5). Ma DAC è retto, per cui anche ACD è retto; dunque nel triangolo ACD la somma dei due angoli DAC, ACD sarebbe uguale a due retti: il che è impossibile (Prop. I.17).

Quindi la retta tracciata dal punto A perpendicolarmente a BA non cadrà internamente al cerchio.

Similmente potremo dimostrare che non verrà a cadere neppure sulla circonferenza; dunque cadrà esternamente.

Cada essa come fa AE; dico ora che nessun'altra retta potrà interporsi fra la retta AE e la circonferenza CHA.

Infatti, se fosse possibile, venga un'altra retta ad interporsi, com'è della retta FA, e dal punto D si conduca DG perpendicolare a FA (Prop. I. 12). E poiché l'angolo AGD è retto e l'angolo DAG è minore di un retto, AD è maggiore di DG (Prop. I.19).

Ma DA è uguale a DH; quindi DH è in tal caso maggiore di DG, la retta minore della maggiore: il che è impossibile (Noz. com. 8).

Dunque nello spazio fra la retta e la circonferenza non potrà interporsi nessun'altra retta.

Dico inoltre che l'angolo del semicerchio, ossia quello compreso dalla retta BA e dalla circonferenza CHA, è maggiore di ogni angolo acuto rettilineo, e che l'angolo restante, compreso dalla circonferenza CHA e dalla retta AE, è minore di ogni angolo acuto rettilineo.

Infatti, se potesse esservi un angolo acuto rettilineo maggiore dell'angolo compreso dalla retta BA e dalla circonferenza CHA, e minore invece di quello compreso dalla circonferenza CHA e dalla retta AE, nello spazio fra CHA e la retta AE verrebbe ad interporsi una retta, la quale formerebbe un angolo rettilineo che sarebbe maggiore di quello compreso dalla retta BA e dalla circonferenza CHA, e minore invece dell'angolo compreso dalla circonferenza CHA e dalla retta AE.

Ma nessuna retta può interporsi; non potrà quindi esservi alcun angolo acuto rettilineo che sia maggiore dell'angolo compreso dalla retta BA e dalla circonferenza CHA, né che sia minore dell'angolo compreso dalla circonferenza CHA e dalla retta CE. \square

Subito dopo, nella proposizione 17, Euclide invece fornisce un metodo per costruire la tangente a una circonferenza a partire da un suo punto esterno.

Proposizione 1.2.2 (Proposizione XVII,III). *Condurre da un punto dato una linea retta che sia tangente a un cerchio dato.*[5]

Dimostrazione. Siano A il punto dato, e BCD il cerchio dato; si deve dunque condurre dal punto A una linea retta che sia tangente a un cerchio BCD.

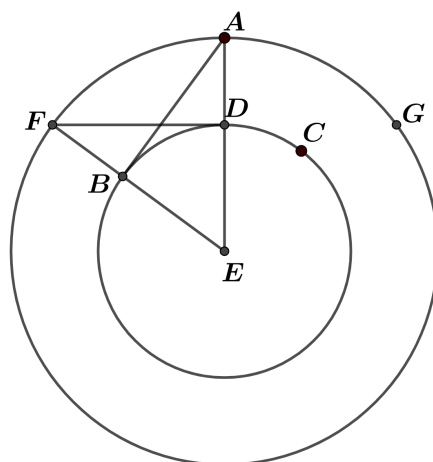


Figura 1.7

Si prenda il centro E del cerchio, si tracci la congiungente AE e con centro E e per raggio EA si descriva il cerchio AFG ; da D si conduca DF perpendicolare ad EA e si traccino le congiungenti EF , AB ; dico che AB è stata condotta dal punto A in modo da essere tangente al cerchio BCD . Poichè difatti E è il centro dei cerchi BCD , AFG , risultano uguali i raggi EA ed EF , ED ed EB ; quindi i due lati AE , EB sono uguali ai due lati FE , ED e comprendono un angolo comune, cioè l'angolo in E ; la base DF è quindi uguale alla base AB , il triangolo DEF è uguale al triangolo BEA , e gli angoli rimanenti del primo sono uguali agli angoli rimanenti del secondo; perciò l'angolo EDF è uguale all'angolo EBA . Ma EDF è retto; quindi anche EBA è retto. Ora, EB è un raggio, e una retta tracciata perpendicolarmente a un diametro da un estremo di esso è tangente al cerchio; la retta AB è perciò tangente al cerchio BCD . Dunque, dal punto dato A è stata condotta la linea retta AB tangente al cerchio dato BCD . \square

1.2.2 Il metodo di René Descartes per trovare la tangente a una curva

È solo la pubblicazione, nel 1637, dell'opera rivoluzionaria di René Descartes, *La Géométrie*, che segnerà un punto di svolta per la matematica

moderna e che sarà di fatto essenziale per la formulazione delle idee che porteranno al Calcolo infinitesimale.

Uno dei grandi meriti di Descartes è stato quello di introdurre la nozione di curva non più come oggetto geometrico con certe caratteristiche ma come luogo di punti le cui coordinate (x, y) soddisfano un'equazione

$$P(x, y) = 0 \quad (1.21)$$

nella quale $P(x, y)$ è un arbitrario polinomio.

Questa formulazione, come abbiamo detto, dà il via ad un nuovo modo di trattare il problema delle tangenti.

Grazie all'identificazione della curva con la sua equazione, il problema non era più tracciare la tangente di questa o quella curva data ma quello di trovare un metodo generale che permettesse di tracciare la tangente ad una generica curva.

Lo stesso Descartes nel secondo libro de *La Géométrie* proponeva una tecnica ideata a questo scopo, basata appunto sulla rappresentazione analitica delle curve.

Prima di tutto egli prende in considerazione una circonferenza tangente alla curva in un dato punto $P_0 = (x_0, y_0)$. L'idea è quella di trovare la tangente prendendo la perpendicolare del raggio della circonferenza.

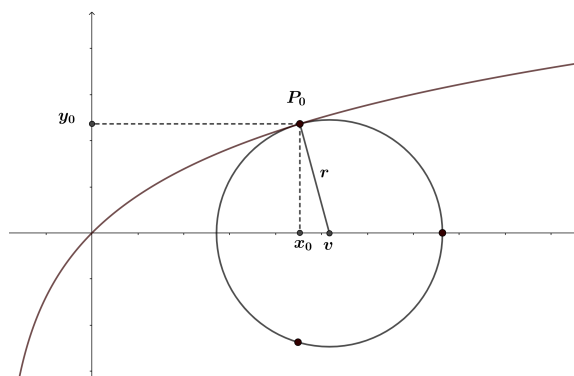


Figura 1.8

Usiamo un linguaggio moderno per descrivere i passaggi fondamentali che segue Descartes.

Consideriamo la circonferenza di centro nel punto v sull'asse delle ascisse e raggio r ; essa quindi avrà equazione

$$(x - v)^2 + y^2 = r^2 \quad (1.22)$$

Detto ciò, imponiamo che essa abbia un'intersezione doppia in P_0 , in quanto tangente alla curva.

Se la curva ha equazione $P(x, y) = 0$, con P polinomio di grado arbitrario, è possibile eliminare una delle due variabili, ad esempio y , e richiedere che il polinomio $Q(x)$, così ottenuto abbia radice doppia in x_0 , ovvero che sia della forma

$$Q(x) = (x - x_0)^2 R(x) \quad (1.23)$$

dove $R(x)$ è da determinare.

Se il polinomio $P(x, y)$ è di grado n , $Q(x)$ è di grado $2n$ e $R(x)$ di grado $2n - 2$.

Uguagliando nella relazione precedente uno a uno i coefficienti dei termini dello stesso grado, si ottengono $2n + 1$ equazioni in $2n + 1$ incognite: i $2n - 1$ coefficienti di $R(x)$ e i due parametri v e r , che ricaviamo risolvendo il sistema e determinano la circonferenza tangente.

Trovata questa, la retta tangente alla curva nel punto P_0 è la retta perpendicolare al raggio passante per P_0 .

Applichiamo ora il metodo per trovare la tangente nel punto $P_0 = (x_0, y_0)$ ad una parabola di equazione

$$y = mx^2. \quad (1.24)$$

Consideriamo la circonferenza di equazione

$$(x - v)^2 + y^2 = r^2. \quad (1.25)$$

Intersecandola con la parabola in questione

$$\begin{cases} (x - v)^2 + y^2 = r^2 \\ y = mx^2, \end{cases} \quad (1.26)$$

otteniamo

$$(x - v)^2 + m^2 x^4 = r^2, \quad (1.27)$$

ovvero

$$m^2 x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - r^2 = 0. \quad (1.28)$$

Imponiamo che il polinomio al primo membro abbia radice doppia in $x = x_0$ e dunque che sia della forma

$$(x - x_0)^2(ax^2 + bx + c), \quad (1.29)$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Sviluppando i calcoli diventa

$$ax^4 + (b - 2ax_0)x^3 + (c - 2bx_0 + ax_0^2)x^2 + (bx_0^2 - 2cx_0)x + cx_0^2 \quad (1.30)$$

Quindi dobbiamo imporre

$$\begin{cases} a = m^2 \\ b - 2ax_0 = 0 \\ c - 2bx_0 + ax_0^2 = 1 \\ bx_0^2 - 2cx_0 = -2v \\ cx_0^2 = v^2 - r^2. \end{cases} \quad (1.31)$$

Da cui possiamo ricavare le incognite a, b, c, v e r

$$\begin{cases} a = m^2 \\ b = 2m^2 x_0 \\ c = 1 - 3m^2 x_0^2 \\ v = x_0 + 2m^2 x_0^2 = x_0 + 2\frac{y_0^2}{x_0} \\ r^2 = m^2 x_0^4 + 4m^4 x_0^6. \end{cases} \quad (1.32)$$

La circonferenza tangente alla parabola nel punto $P_0 = (x_0, y_0)$ ha dunque centro di coordinate $(x_0 + 2\frac{y_0^2}{x_0}, 0)$ e raggio di lunghezza $\sqrt{m^2 x_0^4 + 4m^4 x_0^6}$.

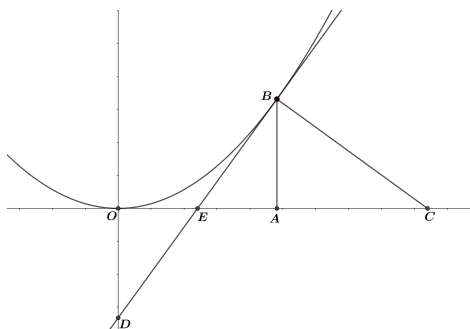


Figura 1.9

Per ritrovare la soluzione di Apollonio, secondo cui la sottotangente è divisa in due parti uguali dal vertice della parabola, è necessario fare qualche altra considerazione.

Nella figura 1.9 si ha $OA = x_0$, $AB = y_0$, $OC = v$, $BC = r$, $AC = v - x_0$ e se chiamiamo $EA = z$, allora $OE = x_0 - z$.

Dal momento che i triangoli ABC e ABE sono simili, vale

$$AC : AB = AB : AE. \quad (1.33)$$

Quindi

$$(v - x_0) : y_0 = y_0 : z. \quad (1.34)$$

Da cui ricaviamo z

$$z = \frac{y_0^2}{(v - x_0)}. \quad (1.35)$$

Ricordando che $v = x_0 + 2\frac{y_0^2}{x_0}$, si giunge al risultato di Apollonio:

$$z = \frac{x_0}{2}. \quad (1.36)$$

A questo punto possiamo notare che il metodo appena utilizzato, nonostante la sua generalità, avesse vari difetti.

In particolare, pur rappresentando una grandissima innovazione, soprattutto per quanto riguardava l'applicazione dell'algebra a problemi trattati fino a quel momento solo come puramente geometrici, non risultava di facile applicazione anche per casi abbastanza semplici, richiedendo quasi sempre lunghi e laboriosi calcoli.

La soluzione di Descartes fu oggetto di molte critiche e analisi, le quali in qualche modo condussero all'elaborazione del Calcolo infinitesimale.

1.2.3 Aggiustamenti al metodo di Descartes

Florimond De Beaune

Come abbiamo fatto notare, il metodo di Descartes richiedeva l'esecuzione di numerosi calcoli, anche nei casi più semplici come quello dell'esempio riportato precedentemente.

Tra l'altro, nonostante la sua generalità, ad esso sfuggivano non solo le curve trascendenti ma anche quelle algebriche contenenti radicali.

Certamente in queste ultime è sempre possibile eliminare i radicali così da poter essere sottoposte al metodo cartesiano ma se il numero e il grado dei radicali era elevato, le difficoltà computazionali aumentavano considerevolmente tanto da diventare in alcuni casi insormontabili.

Queste problematiche portarono a una serie di ricerche atte a migliorare il metodo cartesiano, senza però modificarne la struttura concettuale messa a punto da Descartes.

Nel 1649, nella prima edizione in latino della *Géométrie*, comparve il commento di Florimond de Beaune, che suggeriva di intersecare la curva $F(x, y) = 0$ di grado n -simo con una retta di equazione $y = mx + c$ anziché con una circonferenza, in modo da abbassare il grado del polinomio $Q(x)$ che si ottiene dall'intersezione della curva con la retta.

Nel metodo proposto da De Beaune, bisogna mettere a sistema l'equazione della curva di grado n con quella di una retta passante per il punto $P_0 = (x_0, y_0)$, così eliminando la variabile y , si ottiene un polinomio $Q(x)$ di grado n e non più $2n$. Si seguono poi gli stessi passi di Descartes arrivando però a un sistema più semplice, costituito da $n + 1$ equazioni in $n + 1$ incognite.

Consideriamo ancora una volta il caso della parabola di equazione $y = px^2$

e intersechiamola con la retta di equazione $y = mx + c$

$$\begin{cases} y = px^2 \\ y = mx + c. \end{cases} \quad (1.37)$$

Otteniamo

$$Q(x) = px^2 - mx - c. \quad (1.38)$$

Dal momento che vogliamo determinare l'equazione della retta tangente alla curva in un suo punto $P = (x_0, y_0)$, il polinomio $Q(x)$ deve avere radice doppia nel punto x_0 , pertanto dovrà essere della forma

$$a(x - x_0)^2, \quad (1.39)$$

con $a \in \mathbb{R}$.

Quindi

$$px^2 - mx - c = a(x - x_0)^2, \quad (1.40)$$

ovvero

$$\begin{cases} a = p \\ m = 2ax_0 = 2px_0 \\ c = -ax_0^2 = -px_0^2. \end{cases} \quad (1.41)$$

La retta tangente ha dunque equazione

$$y = 2px_0x - px_0^2. \quad (1.42)$$

Notiamo che se intersechiamo la retta tangente con l'asse x , ponendo $y = 0$, otteniamo

$$2px_0x - px_0^2 = 0. \quad (1.43)$$

Cioè ritroviamo anche questa volta il risultato di Apollonio:

$$x = \frac{x_0}{2}. \quad (1.44)$$

Johannes Hudde

Nella seconda edizione latina della *Gèométrie* (1659-61) erano contenuti anche vari opuscoli aggiuntivi tra cui una lettera di Johannes Hudde nella quale si legge un interessante teorema sulle radici doppie di un polinomio, che permette di semplificare il metodo cartesiano.

Grazie a questo teorema è infatti possibile evitare l'introduzione del polinomio ausiliario $R(x)$, in modo da ridurre le incognite alle sole v e s nella formulazione di Descartes e alla sola m in quella di De Beaune.

"Se un'equazione ha due radici uguali, e si moltiplica tale equazione per una qualsiasi progressione aritmetica – ovvero, il primo termine dell'equazione per il primo termine della progressione, il secondo termine dell'equazione per il secondo termine della progressione, e così via, allora questo prodotto sarà un'equazione che ammette ancora quella radice come radice semplice".

Hudde procede come De Baune nel metodo ma quando arriva al momento in cui deve imporre che il polinomio di grado n , $Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ abbia una radice doppia in x_0 , utilizza il teorema appena citato, secondo cui $Q(x)$ ha una radice doppia in x_0 se e solo se $Q(x_0) = 0$ e $Q_1(x_0) = 0$, dove $Q_1(x)$ rappresenta il polinomio $Q(x)$ i cui termini sono stati ordinatamente moltiplicati per una qualsiasi progressione aritmetica k_0, \dots, k_n : $Q_1(x) = k_0a_0 + k_1a_1x + \dots + k_na_nx^n$.

In particolare, si può prendere la progressione aritmetica $0, 1, 2, \dots, n$ e quindi giungere al sistema

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = 0 \\ a_1x_0 + 2a_2x_0^2 + \dots + na_nx_0^n = 0. \end{cases} \quad (1.45)$$

Consideriamo la parabola di equazione $py = x^2$ e cerchiamo la retta tangente ad un suo punto $P = (x_0, y_0)$.

Intersechiamo la parabola con il fascio di rette passanti per P .

$$\begin{cases} py = x^2 \\ y = y_0 + m(x - x_0) \end{cases} \quad (1.46)$$

Otteniamo

$$Q(x) = p[y_0 + m(x - x_0)] - x^2 = py_0 - pmx_0 + pmx - x^2 \quad (1.47)$$

e

$$Q_1(x) = pmx - 2x^2. \quad (1.48)$$

Dunque

$$Q_1(x_0) = pmx_0 - 2x_0^2 = 0. \quad (1.49)$$

Da cui

$$m = \frac{2x_0}{p}. \quad (1.50)$$

Ne consegue che l'equazione della retta tangente alla parabola nel punto $P = (x_0, y_0)$ sia

$$y = y_0 + \frac{2x_0(x - x_0)}{p}. \quad (1.51)$$

Johannes Hudde e Francois Sluse

Hudde riesce poi anche a trovare una formulazione del metodo cartesiano che opera direttamente sull'equazione della curva e che può essere espresso tramite un algoritmo.

Tale regola viene esposta nel 1659 da Hudde in una lettera indirizzata a Franz van Schooten:

Ordinate tutti i termini dell'equazione che esprime la natura della curva in modo che siano =0 e togliete tutte le frazioni che abbiano x o y nei loro denominatori. Moltiplicate il termine in cui y ha potenza massima per un numero arbitrario, o anche per 0, moltiplicate il termine in cui y ha una dimensione in meno per il numero precedente diminuito di un'unità e continuate in questo modo per tutti gli altri termini dell'equazione. Allo stesso modo, moltiplicate per un numero arbitrario o per 0 il termine in cui x figura alla potenza massima: il termine in cui x figura alla potenza massima diminuita di uno deve essere moltiplicato per il numero precedente diminuito di uno e così di seguito. Quando si divide [la somma] dei primi prodotti

per [la somma] dei secondi, il quoziente, moltiplicato per $-x$ rappresenterà il segmento AC ovvero la sottotangente.

Mediante questo algoritmo è possibile trovare l'equazione della tangente alla curva direttamente dall'equazione della curva stessa tramite un procedimento meccanico.

Ciò è ancora più evidente nella formulazione descritta alcuni anni dopo da François Sluse in una lettera al segretario della Royal Society, Henry Oldenburg.

Sluse dice:

Per trovare AD ovvero t , questa sarà la regola generale:

1. *Espunte dall'equazione le parti nelle quali non compare né x né y , si pongano da un lato tutte quelle in cui c'è x , e dall'altro quelle in cui appare la y con i loro segni $+$ o $-$. Per semplicità chiameremo quest'ultimo lato sinistro e l'altro lato destro.*
2. *Nel lato sinistro, si apponga ad ogni termine l'esponente della potenza che in esso ha la y ; o, che è lo stesso, si moltiplichino per questo esponente.*
3. *Si faccia lo stesso per il lato destro, moltiplicando cioè ogni termine per l'esponente della potenza che in esso ha la x . Ma inoltre in ogni termine si cambi una x in t . Dico che l'equazione così raggiunta fornisce il modo di condurre la tangente in un punto B dato.*

La quantità t che compare nella regola di Sluse è la sottotangente, cioè il segmento che ha come estremi l'ascissa del punto in cui si vuole trovare la tangente e l'ascissa del punto di intersezione tra la retta tangente e l'asse delle ascisse, come si vede nella figura seguente.

Usiamo l'algoritmo di Sluse ancora una volta sulla parabola di equazione $y = px^2$.

Applicando i tre punti contemporaneamente, otteniamo

$$y = 2ptx, \tag{1.52}$$

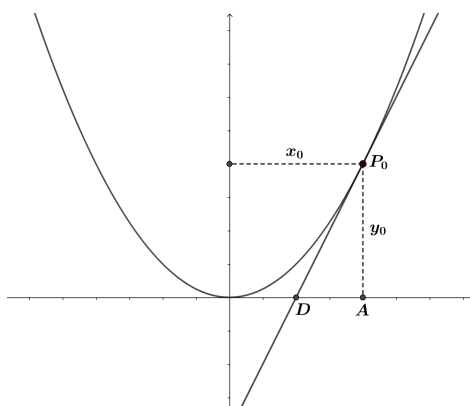


Figura 1.10

quindi

$$t = \frac{y}{2px}. \quad (1.53)$$

Ricordando l'equazione della parabola in esame, abbiamo

$$t = \frac{x}{2}. \quad (1.54)$$

E se il punto di tangenza è (x_0, y_0) , allora

$$t = \frac{x_0}{2}, \quad (1.55)$$

risultato a cui siamo già giunti precedentemente.

1.2.4 Il metodo dei massimi e dei minimi di Pierre Fermat

Poco dopo la pubblicazione di Descartes, un secondo metodo, più generale, fu esposto da Pierre Fermat in una memoria dal titolo *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*.

Anch'esso fondato sulla rappresentazione analitica delle curve, però di diversa ispirazione; Fermat infatti parte dallo studio delle opere del matematico francese François Viète sui massimi e minimi per una certa grandezza variabile.

In termini moderni, l'idea di Fermat è la seguente:

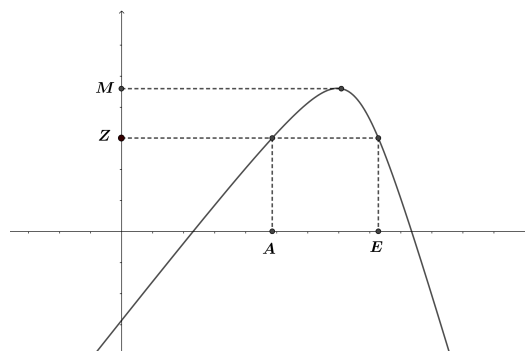


Figura 1.11

Vogliamo trovare, ad esempio, il massimo M di una funzione f .

Dal momento che, se c'è un massimo, la curva sarà crescente fino al massimo e poi decrescerà, se prendiamo un valore Z minore di M , l'equazione $f(x) = Z$ avrà due soluzioni, A ed E , che si troveranno uno a sinistra e uno a destra del punto di massimo, cioè $f(A) = f(E) = Z$, e quindi $f(A) - f(E) = 0$.

Dividiamo per $A - E$ e giungiamo all'espressione

$$\frac{f(A) - f(E)}{A - E} = 0. \quad (1.56)$$

Ora, se si aumenta il valore di Z , i due punti A ed E si avvicineranno sempre più, fino a coincidere quando si raggiunge con Z il valore del massimo M .

Quindi se, dopo aver fatto le opportune semplificazioni, si pone nell'equazione precedente $E = A$, il risultato di A che si ottiene è esattamente quello corrispondente al valore massimo M .

Prima di applicare tale metodo al problema delle tangenti, per evitare calcoli troppo complicati, Fermat invece di indicare le due soluzioni dell'equazione A e E , le indica con A ed $A + E$, in questo caso quindi bisognerà scrivere $f(A + E) - f(A) = 0$ e poi dividere per E

$$\frac{f(A + E) - f(A)}{E} = 0 \quad (1.57)$$

e infine porre $E = 0$.

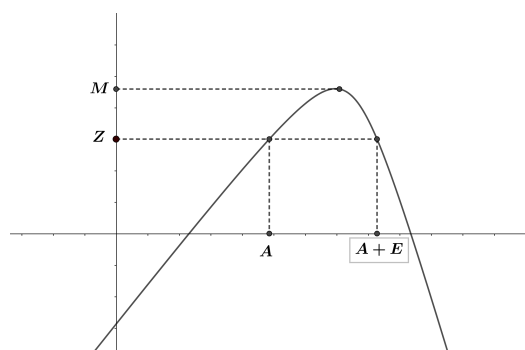


Figura 1.12

Questo cambiamento può sembrare un semplice miglioramento che non cambia la struttura concettuale del metodo, dal momento che non abbiamo fatto altro che cambiare il nome di una variabile.

In realtà, focalizzando l'attenzione sulle quantità A e E , è possibile notare delle piccole differenze sostanziali che di fatto saranno importanti per gli sviluppi successivi del calcolo.

Prima della modifica, come abbiamo spiegato, le quantità A e E , essendo le due soluzioni dell'equazione $F(X) = Z$, erano simmetriche e al variare di Z anch'esse variavano fino a coincidere, quando Z assumeva il valore massimo M .

Ora, invece, prendere $A + E$ al posto di E fa sì che si perda la simmetria che sussisteva tra le due variabili e che A sia fin da subito la posizione del punto di massimo (incognita ma non variabile) mentre E rappresenti la variazione, ovviamente variabile ma non incognita.

Di conseguenza, la relazione $f(A) = f(E)$, che precedentemente era un'equazione vera e propria, nel momento in cui si sostituisce $A + E$ a E diventa un'adequazione, ovvero un'equazione approssimata, la quale si potrà definire equazione solo quando $E = 0$.

A questo punto, sempre usando un linguaggio moderno, presentiamo un esempio che lo stesso Fermat propone per calcolare la tangente a una parabola.

Consideriamo la parabola in figura, di cui si voglia calcolare la tangente

nel punto B .

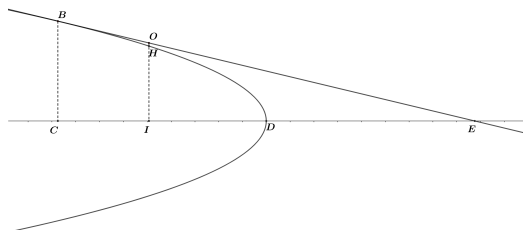


Figura 1.13

Dalla proprietà della parabola abbiamo che le ascisse stanno fra loro come i quadrati delle ordinate:

$$CD : DI = BC^2 : HI^2. \quad (1.58)$$

Ora consideriamo il suo prolungamento fino alla retta tangente, cioè il punto E , dal momento che O è un punto esterno alla parabola, chiaramente $OI > HI$, e quindi anche

$$CD : DI > BC^2 : OI^2. \quad (1.59)$$

Dalla similitudine dei triangoli BCE e OIE , si ha

$$BC^2 : OI^2 = CE^2 : IE^2 \quad (1.60)$$

e quindi

$$CD : DI > CE^2 : IE^2. \quad (1.61)$$

A questo punto Fermat sostituisce la disuguaglianza con un'adequazione:

$$CD : DI \approx CE^2 : IE^2. \quad (1.62)$$

Scriviamo questa adeguazione in termini algebrici, si ponga $CD = d$, $CE = a$, e $CI = e$.

Otteniamo allora

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{(a-e)^2}. \quad (1.63)$$

Sviluppando i quadrati e semplificando, si arriva all'equazione

$$da^2 + de^2 - 2dae \approx a^2d - a^2e. \quad (1.64)$$

Da cui

$$de + a^2 \approx 2da. \quad (1.65)$$

Poniamo $e = 0$, semplifichiamo a e passiamo all'equazione

$$a = 2d. \quad (1.66)$$

Abbiamo trovato il noto fatto che la sottotangente è divisa in due parti uguali dalla parabola.

Il punto delicato consiste nel passaggio dalla 1.57 all'equazione finale.

Prima di porre $E = 0$ occorre infatti semplificare l'equazione 1.57 in modo che scompaia la quantità E al denominatore.

Ora questa semplificazione è possibile sempre quando la funzione $f(x)$ è un polinomio, e talora anche quando essa contiene qualche radicale o addirittura è trascendente, il problema è la sua complessità.

1.3 Il metodo dei differenziali di Leibniz

Quando nella relazione 1.57 si pone $E = 0$, oggi penseremmo a

$$f'(a) = 0. \quad (1.67)$$

E in effetti quello che manca nel metodo di Fermat è per l'appunto la derivazione, e cioè quell'operazione che fa passare da una funzione alla sua derivata.

Una tale operazione non poteva ancora emergere, dal momento che mancava completamente la nozione di funzione, che si affermerà solo nel secolo successivo.

Tuttavia al suo posto, Leibniz introdusse un'operazione, la differenziazione, che operava non sulle funzioni, ma sulle variabili e sulle loro combinazioni,

e che corrispondeva a prendere la differenza tra due valori infinitamente vicini delle variabili.

Anche se già da tempo ci si occupava di questioni legate agli infinitesimi, possiamo affermare che il Calcolo infinitesimale ufficialmente ebbe origine nel 1684 con una memoria di Leibniz, pubblicata sugli *Acta Eruditorum* di Lipsia, dal titolo, *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus quæ nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*.

Leibniz in questa memoria introdusse una simbologia specifica per il suo calcolo, che risulta chiara, sistematica ed efficace, oltre che poter essere applicata in modo del tutto generale.

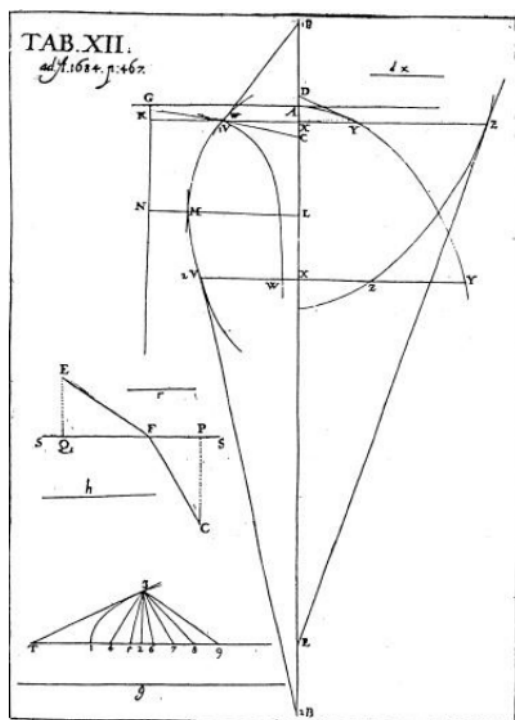


Figura 1.14

Per definire i differenziali usò la tangente, anche se la definì più avanti nel testo:

“Sia dato l’asse AX , e più curve come VV , WW , YY , ZZ e le ordinate di un loro punto, normali all’asse, siano VX , WX , YX , ZX : queste si dicono rispettivamente v, w, y, z ; ed il segmento AX , tagliato sull’asse, sia detto x . Le tangenti siano VB , WC , YD , ZE , le quali incontrano l’asse rispettivamente nei punti B, C, D, E . Ora un segmento, preso ad arbitrio, sia detto dx ed un segmento che sta a dx , come v (o w , o y , o z) sta a BX (o CX , o DX , o EX) sia detto dv (o dw , o dy , o dz) ossia differenza delle stesse v (o delle stesse w , o y , o z).”

Nella formulazione di Leibniz i differenziali non sono a priori infinitesimi, ma acquistano questo carattere dalle regole di differenziazione.

A questo punto, Leibniz enunciò le prime regole del suo calcolo, senza però darne la dimostrazione:

Sia a una quantità costante, allora $da = 0$ e $dax = adx$;

Se $y = v$, allora $dy = dv$;

Se $v = z - y + w + x$, allora $dv = dz - dy + dw + dx$;

Si consideri il prodotto xv , allora $d(xv) = xdv + vdx$, ovvero posto $y = xv$ si ha $dy = xdv + vdx$;

si consideri infine il rapporto $z = \frac{v}{y}$,

si ha

$$dz = \frac{\pm vdy \pm ydv}{y^2}.$$

1.4 Il metodo delle flussioni di Newton

Anche se la nascita del calcolo infinitesimale si fa risalire al 1684, con la pubblicazione della memoria di Leibniz, *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus quæ nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*, un metodo analogo era già stato ideato da Isaac Newton tra il 1665 e il 1666.

Infatti, pur non essendo stato pubblicato nulla di sistematico prima del secolo successivo, è stato possibile a posteriori ricostruire l’evoluzione del pensiero newtoniano grazie a un’enorme quantità di note lasciate dall’autore.

Inoltre molti risultati a cui giunse, ad esempio nei *Principia* (1687) non potevano prescindere dalla conoscenza del calcolo infinitesimale, che quindi almeno nel 1687 doveva già aver teorizzato.

Il corpo delle opere edite sul calcolo di Newton è costituito principalmente da tre trattati:

- *De Analysisi per aequationes numero terminorum infinitas*, composto probabilmente nel 1669 ma pubblicato solo nel 1711;
- *De Methodis serierum et fluxionum*, redatto nel 1671 e pubblicato nel 1742;
- *Tractatus de quadratura curvarum*, che non fu pubblicato fino al 1704.

Lo scopo principale del *De analysisi* è quello di fornire una soluzione più generale possibile al problema delle quadrature, assumendo l'integrazione termine a termine ed elaborando metodi generali per lo sviluppo in serie di potenze.

Tutte le quadrature ricavate sono in ultima analisi dedotte dalla quadratura di curve elementari del tipo $y = ax^{\frac{m}{n}}$, che si ottiene nel seguente modo.

Sia data una curva tale che l'area compresa tra l'ascissa, l'ordinata e la curva stessa sia

$$z = \frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}}, \quad (1.68)$$

con n e m interi.

Denotiamo con o l'incremento infinitesimo sull'asse delle ascisse e con oy l'incremento dell'area sotto alla curva.

Sostituendo x con $x + o$ e z con $z + oy$, abbiamo

$$z + oy = \frac{n}{m+n} a(x + o)^{\frac{m+n}{n}}. \quad (1.69)$$

Applichiamo ora al secondo membro dell'equazione il teorema binomiale, che Newton stesso aveva generalizzato alle serie numeriche:

$$\frac{n}{m+n} a(x + o)^{\frac{m+n}{n}} = \frac{n}{m+n} a(x^{\frac{m+n}{n}} + \frac{n}{m+n} x^{\frac{m}{n}} o + \frac{m(m+n)}{2n^2} x^{\frac{m-n}{n}} o^2 + \dots). \quad (1.70)$$

Da cui

$$z + oy = \frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}} + ax^{\frac{m}{n}} o + \frac{m}{2n} x^{\frac{m-n}{n}} o^2 + \dots \quad (1.71)$$

Sottraendo membro a membro l'equazione dell'area prima che fosse incrementata, otteniamo

$$oy = ax^{\frac{m}{n}} o + \frac{m}{2n} x^{\frac{m-n}{n}} o^2 + \dots \quad (1.72)$$

Dividiamo entrambi i membri per l'incremento o :

$$y = ax^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{2n} x^{\frac{m-n}{n}} o + \dots \quad (1.73)$$

Infine trascurando tutti i membri che contengono o , giungiamo all'equazione

$$y = ax^{\frac{m}{n}}, \quad (1.74)$$

dove n e m sono interi.

Dunque con questo procedimento Newton non solo fornisce un metodo generale per trovare il tasso di variazione istantaneo di una variabile rispetto ad un'altra, ma dimostra anche che un'espressione per l'area può essere ottenuta invertendo il procedimento di ricerca del tasso di variazione, infatti se a partire dall'equazione dell'area sottesa alla curva 1.68 troviamo l'espressione 1.74, al contrario data una curva $y = ax^{\frac{m}{n}}$, sarà possibile ricavare l'area:

$$z = \frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}} \quad (1.75)$$

A partire dal risultato appena ottenuto, che oggi chiamiamo teorema fondamentale del calcolo integrale, Newton pose alla base del suo metodo di quadratura le seguenti tre regole:

1. L'area sottesa dalla curva di equazione $y = ax^{\frac{m}{n}}$ calcolata da 0 a x è pari a

$$\frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}}. \quad (1.76)$$

2. Se y è somma finita o infinita di altre quantità, $y = y_1 + y_2 + \dots$, l'area sottesa a y è la somma delle aree di tutti i termini y_1, y_2, \dots

3. Se la curva ha equazione $f(x, y) = 0$, si svilupperà y nella forma $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k^a$, dove gli a_k sono razionali. Ad essa si applicheranno le regole 1 e 2.

Ad esempio per integrare $\frac{a^2}{b+x}$, Newton divide a^2 per $b+x$ e ottiene

$$y = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2 x}{b^2} + \frac{a^2 x^2}{b^3} - \frac{a^2 x^3}{b^4} + \dots \quad (1.77)$$

A questo punto integra termine a termine e trova che l'area risulta essere determinata da

$$\frac{a^2 x}{b} - \frac{a^2 x^2}{2b^2} + \frac{a^2 x^3}{3b^3} - \frac{a^2 x^4}{4b^4} + \dots \quad (1.78)$$

Subito dopo, tra il 1670 e il 1671, Newton scrisse il trattato *De Methodis serierum et fluxionum*, una versione più ampia e completa dei suoi studi sui problemi tipici relativi alla geometria delle curve.

In questo testo introduce la terminologia caratteristica dei suoi lavori successivi e i concetti basilari del calcolo delle flussioni.

In un'ottica meccanica, Newton concepiva le curve e più in generale gli enti geometrici come grandezze generate dal fluire del tempo, il cui valore aumentava o diminuiva con continuità: una curva viene generata dai movimenti simultanei combinati dell'ascissa x e dell'ordinata y dei punti sulla curva.

Gli elementi essenziali della teoria di Newton sono tre: le fluenti, che sono le quantità generate tramite un flusso, come ad esempio le coordinate di un punto su una curva, $x = x(t), y = y(t)$, le loro velocità istantanee, chiamate flussioni e denotate con un puntino sulla lettera della quantità fluente corrispondente, \dot{x}, \dot{y} e i momenti delle quantità fluenti, ovvero gli addendi infinitamente piccoli tramite cui quelle quantità crescono durante ciascun intervallo infinitamente piccolo di tempo, che Newton indica con $\dot{x}o, \dot{y}o$ e che per Leibniz sono xdt, ydt .

In *The Method of Fluxions* Newton utilizza queste definizioni di base, insieme al metodo delle serie, per risolvere i vari problemi che emergono quando si vuole studiare una curva, come la determinazione di tangenti e normali, massimi e minimi, raggi di curvatura, quadrature, rettificazioni e

centri di gravità, mostrando come essi potessero essere ridotti al problema fondamentale del calcolo: data una relazione tra le quantità fluenti, stabilire la relazione tra le relative flussioni, e viceversa.

Newton non poteva, ovviamente, risolvere questo problema per tutti i tipi di curve, ma escogitò regole e procedimenti che potevano essere applicati ad ampie famiglie di curve: a partire da quantità fluenti x, y correlate da certe equazioni $P(x, y) = 0$, riusciva a ricavare i rapporti tra le flussioni $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, utili ad esempio per determinare la tangente ad una curva.

Procedendo per esempi, egli enuncia e giustifica i suoi metodi, nei quali sono implicite le regole per il calcolo delle flussioni per la somma $(x + y) = \dot{x} + \dot{y}$, per il prodotto $(xy) = \dot{x}y + x\dot{y}$, e per le potenze $(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}\dot{x}$.

Prima di esporre un esempio proposto dallo stesso Newton, vediamo come Newton ricavò l'algoritmo che permette di trovare le flussioni di un prodotto, da cui si deducono quello per le potenze, le radici e combinazioni più o meno complesse di queste.

Siano allora x e y due grandezze fluenti e siano \dot{x} e \dot{y} le rispettive flussioni.

Per ricavare la flussione del prodotto xy Newton osserva che in un intervallo di tempo infinitesimo o , le variabili x e y diventano rispettivamente $x + o\dot{x}$ e $y + o\dot{y}$.

Di conseguenza la variazione nel tempo della quantità xy sarà

$$(x + o\dot{x})(y + o\dot{y}) - xy = o(\dot{x}y + x\dot{y}) + o^2\dot{x}\dot{y}. \quad (1.79)$$

Dividendo per o ed eliminando il termine infinitesimo $o\dot{x}\dot{y}$, otteniamo

$$(\dot{xy}) = \dot{x}y + x\dot{y}, \quad (1.80)$$

in accordo con la forma leibniziana di differenziazione del prodotto.

In questo procedimento Newton tratta gli incrementi come quantità infinitesime, che in un primo momento vengono considerate come piccole quantità e in un secondo momento vengono trascurate.

Come vedremo nel secondo capitolo, nei *Principia* abbandona tale approccio e giunge al risultato, che abbiamo appena discusso tramite una dimostrazione completamente diversa, che utilizza la geometria.

Egli cambia strada probabilmente perché, rendendosi conto delle difficoltà concettuali che derivano dal giocare con gli infinitesimi, cerca di trovare un fondamento più valido alla sua teoria.

Nel tempo infatti è possibile notare come Newton tenterà di nascondere queste quantità evanescenti dietro una visione della geometria sempre più cinematica, che è ben spiegata nell'incipit del *Tractatus de quadratura curvarum*:

Considero in questo lavoro le grandezze matematiche non come costituite di parti piccole a piacere ma come generate da un moto continuo. Le linee vengono descritte non mediante addizione di parti, ma per moto continuo di punti; le superfici per moto di linee; i solidi per moto di superfici, gli angoli per rotazione dei loro lati; i tempi per flusso continuo e così in altri casi analoghi. Queste generazioni hanno veramente luogo in natura, e si osservano ogni giorno nel movimento dei corpi.

Torniamo ora agli esempi proposti in *The Method of Fluxions* e consideriamo la seguente equazione polinomiale che lega le quantità fluenti x e y

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0. \quad (1.81)$$

Consideriamo un tempo infinitesimo o , dopo il quale x e y saranno divenute rispettivamente $x + o\dot{x}$ e $y + o\dot{y}$, allora avremo

$$(x + o\dot{x})^3 - a(x + o\dot{x})^2 + a(x + o\dot{x})(y + o\dot{y}) - (y + o\dot{y})^3 = 0. \quad (1.82)$$

Sottraendo $x^3 - ax^2 + axy - y^3$, dividendo per o e trascurando i termini in cui compare ancora o , otteniamo

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + a\dot{x}y + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0. \quad (1.83)$$

Da cui

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}. \quad (1.84)$$

Possiamo notare che l'algoritmo per giungere all'equazione che lega le flussioni \dot{x} e \dot{y} è essenzialmente lo stesso di quello proposto da Hudde, di cui abbiamo parlato precedentemente.

Newton poi spiega anche come procedere nel caso in cui l'equazione contenesse radici tramite l'esempio che segue.

Sia data l'equazione

$$y^2 - a^2 - x\sqrt{a^2 - x^2} = 0. \quad (1.85)$$

Newton scrive

$$z = x\sqrt{a^2 - x^2} \quad (1.86)$$

Da cui, ottiene

$$\begin{cases} y^2 - a^2 - z = 0 \\ a^2x^2 - x^4 - z^2 = 0. \end{cases} \quad (1.87)$$

Applicando l'algoritmo a queste due equazioni, trova

$$\begin{cases} 2\dot{y}y - \dot{z} = 0 \\ 2a^2\dot{x}x - 4\dot{x}x^3 - 2\dot{z}z. \end{cases} \quad (1.88)$$

Quindi

$$\begin{cases} 2\dot{y}y - \dot{z} = 0 \\ \dot{z} = \frac{a^2\dot{x}x - 2\dot{x}x^3}{z}. \end{cases} \quad (1.89)$$

Risolvendo per sostituzione, abbiamo

$$2\dot{y}y - \frac{a^2\dot{x}x - 2\dot{x}x^3}{z}. \quad (1.90)$$

Infine sostituendo z , arriviamo all'equazione cercata

$$2\dot{y}y - \frac{a^2\dot{x} - 2\dot{x}x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \quad (1.91)$$

Vediamo ora come il metodo delle flussioni permette di determinare la tangente di una curva in un suo punto.

In riferimento alla 1.15, che è quella utilizzata da Newton stesso per spiegare appunto il suo metodo delle tangenti, sia ED la curva la cui equazione è data in termini di ascissa $x = AB$ e $y = BD$ (come si vede l'angolo ABD non è necessariamente retto).

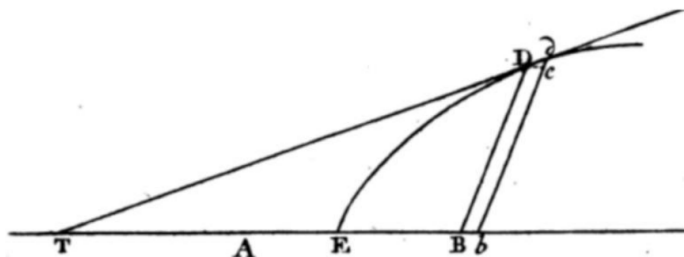


Figura 1.15

Se supponiamo che l'ordinata si muova di uno spazio infinitamente piccolo nella posizione $B\delta$, in modo che aumenti del momento $c\delta$, allora in concomitanza AB cresce del momento Bb , che è uguale a Dc .

Ora se si prolunga la linea $D\delta$ fino ad intersecare l'asse delle ascisse nel punto T , si ottengono i due triangoli simili $Dc\delta$ e TBD .

Dunque

$$\frac{TB}{BD} = \frac{Bb}{c\delta}. \quad (1.92)$$

Il metodo delle flussioni a partire dall'equazione della curva permette di ricavare il rapporto $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$.

Come rapporto dei momenti dell'ascissa e dell'ordinata, si ha

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{Bb}{c\delta}. \quad (1.93)$$

Allora

$$TB = y \frac{\dot{x}}{\dot{y}}. \quad (1.94)$$

Più complesso è il problema inverso, ovvero il problema delle quadrature, che consiste nel passare dall'area alla curva o in altri termini dalle flussioni alle fluenti.

Certamente se leggiamo in senso inverso una tavola che alle fluenti associa le loro flussioni, otteniamo una tavola per le quadrature. Ma la questione è più delicata di così; intanto Newton sapeva che mentre la flussione di una fluente razionale è ancora razionale il contrario non è vero, ad esempio la quadratura di $\frac{1}{(1+x)}$ porta al logaritmo.

E allora la prima questione da risolvere era quella di determinare quali fossero le curve quadrabili.

Detto ciò, Newton sviluppò vari artifici piuttosto raffinati, come quello del cambiamento di variabile, per lo studio della quadratura delle curve, e nel *De quadratura* studiò in generale la possibilità di quadrare curve del tipo

$$y = x^\theta R^x S^\mu T^\nu \quad (1.95)$$

dove R, S, T sono espressioni della forma $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{nk}$.

Successivamente al *De quadratura* Newton scrisse i *Principia Mathematica*, opera dedicata alla meccanica celeste che tratta dei principali problemi di natura fisica che in fin dei conti indussero Newton a sviluppare il suo calcolo.

Nei *Principia* l'approccio al calcolo cambia notevolmente; infatti il calcolo del *De Quadratura* viene riformulato in termini di rapporto delle prime e delle ultime ragioni e le dimostrazioni vengono ripensate su basi geometriche con un ritorno agli antichi.

La sensazione è che non fosse del tutto soddisfatto dei suoi procedimenti e che trattato dopo trattato fosse alla ricerca di una forma rigorosa e inattaccabile.

Capitolo 2

Le critiche di Berkeley

2.1 Alcune premesse

L'importanza dell'invenzione del Calcolo infinitesimale fu compresa fin da subito, sia per le sue immediate applicazioni matematiche sia per le conseguenze che inevitabilmente avrebbe portato in ambito filosofico. Alla divulgazione del calcolo seguirono numerose polemiche soprattutto all'interno della comunità matematica britannica; molti dei suoi esponenti temevano che questa nuova tendenza allontanasse dal rigore ricevuto in eredità dalle opere classiche come quelle di Archimede.

A questa disputa non parteciparono esclusivamente i matematici, tra le contestazioni più significative infatti vi furono quelle mosse dal filosofo, teologo e vescovo anglicano irlandese G. Berkeley.

Berkeley (1685 -1753) è ritenuto uno dei tre grandi empiristi britannici assieme a John Locke e David Hume; benché i suoi studi furono principalmente di natura filosofica, notevole era il suo interesse per problematiche scientifiche e in particolar modo matematiche, fatto che non deve stupire dal momento che tali questioni a lungo sono state oggetto dell'attenzione da parte dei filosofi.

Già in giovane età fu autore di una piccola raccolta di trattati matematici in latino intitolata *Arithmetica et miscellanea mathematica*, negli anni succes-

sivi egli fece una serie di interessanti osservazioni sul calcolo nei *Philosophical Commentaries*, dedicò poi alcune sezioni dei *Principles* a una discussione dei suoi fondamenti, attaccò la dottrina degli infinitesimi in uno scritto del 1709, *Of Infinities*, fino ad arrivare alla pubblicazione, nel 1734, del suo famoso opuscolo, *The Analyst: A Discourse addressed to an Infidel Mathematician*, il quale rappresenta un attacco al calcolo e ai suoi principi, in particolare, alla nozione di flusso o variazione infinitesimale, concetti rispettivamente utilizzati da Newton e Leibniz.

Questo capitolo si propone di studiare proprio *The Analyst* e quanto le sue critiche siano fondate; se anche risulterà che non lo sono, non bisogna pensare che l'opera perda di importanza, per una conoscenza profonda e consapevole non si può infatti prescindere dalla considerazione delle difficoltà, degli errori e delle contraddizioni attraverso cui è possibile il progresso della scienza.

Le difficoltà emerse grazie al lavoro di Berkeley furono del tutto superate quasi duecento anni dopo con l'approccio weierstrassiano degli ϵ e δ , che non prevede l'uso degli infinitesimali. Recentemente, invece fu riformulato rigorosamente il metodo del calcolo infinitesimale da Abraham Robinson nel suo libro *Analisi non-standard* del 1966.

2.2 I propositi de “*L’Analista: Discorso indirizzato ad un matematico infedele*”

“Sebbene io non sia interessato alla vostra persona, tuttavia, o signore, io non posso restare indifferente alla reputazione che voi avete acquistato in quel ramo del sapere che è stato l’oggetto peculiare dei vostri studi; né posso essere indifferente all’autorità che voi usurpate in cose estranee alla vostra professione, ed all’abuso che voi, e molti altri dello stesso genere, fate di tale indebita autorità.”[2, p. 65]

Con queste parole Berkeley inizia il suo discorso indirizzato ad un *matematico infedele*, come compare chiaramente nel sottotitolo.

Se l’opera fosse rivolta ad uno specifico matematico è alquanto incerto, sebbene ci siano prove che Berkeley intendesse riferirsi al matematico, fisico e astronomo Edmond Halley.

Secondo il biografo di Berkeley, Joseph Stock, il medico londinese Samuel Garth sul finire della sua malattia, aveva rifiutato gli ultimi riti religiosi, sulla base del fatto che il suo amico, il dottor Halley appunto, gli avesse assicurato che le dottrine del Cristianesimo fossero inconsistenti e che la religione stessa fosse un’impostura.

Secondo Stock, questo fu l’evento scatenante che portò Berkeley a decidersi a scrivere *l’Analista*, al fine di mostrare che i misteri della fede venivano ingiustamente contestati dai matematici, i quali, a suo avviso, ammettevano misteri ben più grandi.

In definitiva l’identità del matematico infedele non è particolarmente rilevante per l’interpretazione de *L’Analista*; chiunque fosse il destinatario immediato, certamente l’intenzione dell’autore era quella di scagliarsi contro tutti coloro che avessero la pretesa di considerare la propria materia, ovvero la Matematica, la più elevata di tutte, come se tutte le questioni della vita potessero essere trattate come sottocategorie di problemi più astratti, su cui i matematici erano soliti ragionare.

Secondo Berkeley, queste persone, ostentando grandi capacità di padroneggiare la logica e dunque di giungere a conclusioni più accurate degli altri, si arrogavano il diritto di estendere le proprie competenze in campi estranei all’oggetto del loro studio.

E altrettanto feroce è la critica rivolta alla moltitudine di persone che si lasciava affascinare e con deferenza concedeva a costoro la possibilità di decidere lì dove non avevano alcun diritto di sentenziare.

Quando a più riprese sottolinea che non è possibile che l’autorità acquisita in Matematica si trasferisca ad altre materie, si riferisce, come abbiamo inizialmente fatto presente, in particolar modo alla Religione e alla Teologia.

Con *l’Analista*, Berkeley intende impugnare proprio quei principi e soprattutto quei metodi dimostrativi che innalzavano i matematici contempo-

ranei a grandi maestri della ragione, in modo da smontare il loro prestigio di pensatori e destituirli dal ruolo di guide degli altri uomini.

“... io invocherò per me il diritto di comportarmi da libero pensatore e di prendermi la libertà di indagare circa gli oggetti, i principi, ed i metodi di dimostrazione ammessi dai matematici del nostro tempo, con la stessa libertà con la quale voi presumete di trattare i principi ed i misteri della religione.”[2, p. 65]

Il fulcro della sua strategia è quello di mostrare che il Calcolo non fosse di certo meno misterioso della Religione, che tanto veniva messa in discussione.

Secondo Berkeley è ammissibile che la Religione prenda in considerazione misteri che vadano oltre la ragione umana, la Scienza al contrario deve occuparsi soltanto di oggetti evidenti alla ragione.

Nella domanda 62 alla fine de *L'Analista* afferma:

Chiedo se non sia preferibile ammettere i misteri nella fede piuttosto che nella scienza umana.[2, p. 100]

Già in opere precedenti Berkeley si era opposto alla tendenza dei matematici di intromettersi nelle conclusioni teologiche e in particolare aveva rifiutato che i misteri religiosi potessero essere chiariti da prove matematiche.

A questo proposito egli nei *Commentari filosofici* dichiara:

There may be Demonstrations used even in Divinity. I mean in the reveal'd Theology, as contradistinguish'd from natural. for tho' the Principles may be founded in Faith yet this hinders not but that legitimate Demonstrations might be built thereon. Provided still that we define the words we use e never go beyond our Ideas. Hence 'twere no very hard matter for those who hold Episcopacy or Monarchy to be establish'd jure Divino, to demonstrate their Doctrines if they are true. But to pretend to demonstrate or reason any thing about the Trinity is absurd here an implicit Faith becomes us. (Commentaries, 584)[10, p. 180]

Ciò pose Berkeley in opposizione a quegli autori che cercavano di spiegare i misteri della Religione tramite analogie matematiche come quella tra la dottrina della trinità e la tridimensionalità dello spazio, proposta dal matematico

John Wallis.

In posizioni come questa Berkeley riconosceva un enorme pericolo, egli infatti pensava che razionalizzare i misteri al di fuori della Religione rischiasse di aprire la strada all'ateismo.

Detto questo, sebbene sia innegabile il fondamento teologico, *L'Analista* non è unicamente un'apologia della Religione; in quest'opera Berkeley soprattutto spiega chiaramente quale sia il suo modello di dimostrazione rigorosa e solleva rilevanti problemi epistemologici alla base dei metodi della Matematica.

È bene precisare che Berkeley non ha un atteggiamento antiscientifico; certamente è intenzionato a demolire dei presupposti di alcune nuove teorie matematiche ma non condanna la Matematica nel suo complesso.

Anzi, egli stesso nel proseguire del trattato si servirà di quella geometria che, a partire da definizioni chiare e assiomi innegabili, tramite una ben connessa catena di conseguenze, giunge alle proprietà delle figure.

Viene riconosciuto il valore formativo di questo tipo di Matematica e anche che tale arte possa effettivamente contribuire a fortificare il pensiero.

Ad essere sotto accusa sono i matematici del suo tempo che, per mezzo del metodo delle flussioni, da un lato, e delle differenze infinitesime, dall'altro, si sentirebbero più abili degli antichi a *“schiudere i segreti della geometria e, per conseguenza della natura.”*[2, p. 66]

2.3 Inconcepibilità delle flussioni e delle differenze infinitesime

La critica al Calcolo infinitesimale inizia prendendo in considerazione le definizioni dei suoi oggetti fondamentali.

Conviene ricordare a questo punto che nel XVIII secolo i postulati matematici non erano considerati come oggi, espressione di libere convenzioni, ma erano ancora vincolati a dover rispecchiare leggi del mondo reale.

Berkeley, in verità, fin dalle sue prime riflessioni aveva ammesso il formalismo algebrico anche in assenza di idee corrispondenti a ciascun segno; ma la Geometria differiva dall'Algebra e dall'Aritmetica, in quanto si riteneva che essa dovesse riferirsi all'estensione percepibile di un ben determinato oggetto fenomenico della realtà.[13]

È in questo contesto che Berkeley riteneva che sia le flussioni di Newton che le differenze infinitesime di Leibniz dovessero essere rifiutate, perché una teoria fondata su definizioni inconcepibili, su cui era impossibile costruire immagini mentali, era da considerare inaccettabile.

In particolare, si riferisce ai concetti fondamentali del calcolo newtoniano, ovvero all'idea di momento e alla sua definizione di flussione, intesa come velocità con cui viene prodotta una grandezza geometrica (i punti muovendosi generano linee, le linee a loro volta generano piani e così i piani producono spazi).

Osserva che i momenti newtoniani non sono concepiti come particelle finite, ma piuttosto come *“principi nascenti di quantità finite”*; le flussioni invece non sono velocità medie rilevate in un dato tempo, ma velocità istantanee, definite come i rapporti di incrementi evanescenti di tempi e distanze.

Ancora più assurdo e misterioso doveva essere speculare poi su flussioni seconde, ovvero flussioni di flussioni, e allo stesso modo di parti infinitesime di parti infinitesime.

Con queste premesse, allora, si chiede come fosse possibile osare rifiutare i misteri della fede, quando venivano tranquillamente ammessi questi oscuri principi del calcolo infinitesimale.

“Ma quelli che possono digerire la seconda e la terza flussione, la seconda e la terza differenza, non hanno bisogno, a mio avviso, di storcere la bocca circa qualche proposizione teologica.”[2, p. 68]

Più grave sarebbe se i matematici moderni non considerassero le precedenti osservazioni come misteri, perché avrebbe significato che essi avevano la presunzione di comprendere non solo l'infinito ma anche l'infinito dell'infinito.

È chiaro che nella visione de *L'analista* coloro che ammettevano gli infi-

nesimi non li deducevano da principi evidenti tramite una catena di ragionamenti, ma li ammettevano per intuizione.

Insomma, a Berkeley sembrava che i matematici credessero di vederli questi infinitesimi e dunque che basassero le loro definizioni su dati sensoriali.

Egli, però, riteneva che i sensi non potessero penetrare al di sotto di una certa soglia, che egli chiamava *Minimo sensibile*.

In breve, stando a ciò che dice l'autore, per grazia divina, possiamo intravedere componenti più sottili della materia, ma i limiti della nostra natura umana ci rendono impossibile individuarli con precisione.

Ma la critica di Berkeley va anche oltre i concetti centrali dell'Analisi matematica.

Egli si interroga più in generale sulla legittimità dell'infinito attuale in Matematica, questione già presente nel suo trattato, *Of Infinites*, scritto tra il 1707 e il 1708.

2.4 Infondatezza dei metodi dimostrativi

Berkeley non si limita a mettere in discussione gli oggetti del nuovo calcolo ma soprattutto critica i metodi dimostrativi, tramite cui si derivavano regole fondamentali e teoremi.

Prima di tutto, analizza la dimostrazione della regola per trovare la flussione del prodotto di due variabili, che si trova nel lemma II del libro secondo, sezione seconda, dei *"Philosophiae naturalis principia mathematica"* di Newton.

Newton considera il rettangolo AB come il prodotto dei lati A e B .

Se supponiamo che il rettangolo AB cresca in modo continuo e che gli incrementi momentanei di A e B siano rispettivamente a e b , l'incremento del prodotto sarà

$$(A + a)(B + b) - AB = Ab + Ba + ab \quad (2.1)$$

Rimane anche quel termine ab , che se consideriamo a e b infinitesimi, è ragionevole trascurare.

Newton però per ottenere esattamente $Ab + Ba$ segue un ragionamento che in effetti Berkeley ha ragione a contestare.

Newton, invece di confrontare il rettangolo di partenza AB con il rettangolo $(A + a)(B + b)$, confronta il rettangolo che si ottiene dal rettangolo originario diminuendo i lati A e B rispettivamente di $\frac{a}{2}$ e $\frac{b}{2}$ e quello che si ottiene aumentando i due lati delle stesse quantità.

Quando i due lati sono diminuiti della metà dei rispettivi momenti, il rettangolo diventa

$$\left(A - \frac{a}{2}\right)\left(B - \frac{b}{2}\right) = AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab \quad (2.2)$$

Ma se i due lati sono accresciuti della metà dei loro momenti, il rettangolo sarà

$$\left(A + \frac{a}{2}\right)\left(B + \frac{b}{2}\right) = AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab \quad (2.3)$$

Sottraendo da questo il primo, si ottiene

$$aB + bA \quad (2.4)$$

Questa formula dovrebbe esprimere l'incremento complessivo del rettangolo, poiché ovviamente $\left(A + \frac{a}{2}\right) - \left(A - \frac{a}{2}\right)$ e $\left(B + \frac{b}{2}\right) - \left(B - \frac{b}{2}\right)$ esprimono rispettivamente l'incremento a e l'incremento b .

Berkeley chiaramente giudica illegittimo il modo in cui procede Newton.

In effetti, è possibile notare che il risultato di Newton dipende dalla scelta del coefficiente $\frac{1}{2}$.

Se i lati fossero, ad esempio, diminuiti prima di $\frac{1}{3}$ e poi accresciuti di $\frac{2}{3}$, non si otterrebbe lo stesso, seppur anche in questo caso si ha che

$$\left(A + \frac{2}{3}a\right) - \left(A - \frac{1}{3}a\right) = a \quad (2.5)$$

e

$$\left(B + \frac{2}{3}b\right) - \left(B - \frac{1}{3}b\right) = b \quad (2.6)$$

Infatti, quando i due lati sono diminuiti di $\frac{1}{3}$ dei loro momenti si ottiene

$$\left(A - \frac{1}{3}a\right)\left(B - \frac{1}{3}b\right) = AB - \frac{1}{3}Ab - \frac{1}{3}Ba + \frac{1}{9}ab \quad (2.7)$$

Se invece i due lati sono aumentati di $\frac{2}{3}$ dei loro momenti, il rettangolo diviene

$$\left(A + \frac{2}{3}a\right)\left(B + \frac{2}{3}b\right) = AB + \frac{2}{3}Ab + \frac{2}{3}Ba + \frac{4}{9}ab \quad (2.8)$$

Sottraendo da questa formula la precedente, otteniamo

$$Ab + Ba + \frac{1}{3}ab \quad (2.9)$$

In questo caso, il termine ab non si elide.

Egli poi si cimenta a dimostrare la scorrettezza della formula generale per trovare la flussione di ogni potenza di una quantità fluente, così come era stata ricavata da Newton in *De quadratura curvarum*.

È utile ricordare che il *De quadratura* contiene considerazioni sul calcolo più complete rispetto a quelle che si trovano nei *Principia* e utilizza metodi dimostrativi significativamente diversi.

Su tale base Berkeley insinuava che l'oscurità delle dimostrazioni dei *Principia* avesse l'intento di mascherare l'uso degli infinitesimi e ne deduce che Newton doveva "aver avuto qualche sospetto circa la correttezza delle sue dimostrazioni, che non era abbastanza soddisfatto da aderire stabilmente alle sue opinioni." [2, p. 74]

Allo scopo di confutare la dimostrazione della formula per la flussione di una potenza, innanzitutto premette il lemma:

"Se per dimostrare una certa proposizione, si suppone qualche punto in virtù del quale sono dedotti altri punti, e successivamente il punto supposto è distrutto o respinto da una contraria supposizione; in questo caso tutte le proposizioni dedotte per suo mezzo devono essere invalidate e rifiutate, come se mai fosse stato introdotto nella dimostrazione." [2, p.71]

Essenzialmente tale lemma asserisce il principio secondo cui premesse contraddittorie non sono ammesse in una dimostrazione.

Vediamo ora in che modo secondo Berkeley il principio appena esposto venga violato da Newton.

Prendiamo l'equazione

$$y = x^n \quad (2.10)$$

Newton deduce da essa la flussione di x^n :

$$\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x} \quad (2.11)$$

Berkeley critica il processo deduttivo di Newton, che egli espone nel modo seguente.

Si dia alla variabile x un piccolo incremento, che indichiamo con o .

Allo stesso tempo in cui x diventa $x + o$, così x^n diventa $(x + o)^n$, quindi sviluppando con il teorema del binomio, si ha

$$x^n + nx^{n-1}o + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}o^2 + \dots \quad (2.12)$$

Da cui, sottraendo x^n , otteniamo

$$(x + o)^n - x^n = nx^{n-1}o + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}o^2 + \dots \quad (2.13)$$

Ed infine dividendo tutto per o , giungiamo alla seguente equazione

$$\frac{(x + o)^n - x^n}{o} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}o + \dots \quad (2.14)$$

Il primo membro è quello che oggi chiamiamo rapporto incrementale della funzione x^n , e fin qui Berkeley non ha nulla da eccepire; ciò che non accetta è il successivo passaggio al limite, o meglio non riesce proprio a vedere che si tratta di un passaggio al limite.

A questo punto infatti egli ricostruisce il pensiero newtoniano supponendo che l'incremento o sia 0, allora il secondo membro si riduce al suo primo termine nx^{n-1} , che dunque rappresenta la flussione di x^n .

Berkeley sostiene che in questa dimostrazione il lemma iniziale non venga rispettato, mettendo in evidenza come in un primo momento le flussioni e gli infinitesimi vengano considerati come quantità finite, seppur piccole, e successivamente come quantità nulle.

Vale la pena riportare il discorso di Berkeley stesso, con cui critica il ragionamento appena esposto, che egli giudica un "manifesto sofisma":

"Fin qui ho supposto che x fluisca, che x abbia il reale incremento o , che o sia qualche cosa. Ed io sono andato avanti sempre basandomi su tale supposizione, senza la quale io non avrei potuto fare alcun passo. E' precisamente partendo da questa supposizione che io sono pervenuto a calcolare l'incremento di x^n , che ho potuto confrontare con l'incremento di x , e che ho potuto calcolare il rapporto dei due incrementi. Ed ora io mi permetto di fare una supposizione contraria alla prima, ossia io suppongo che non vi sia alcun incremento di x , che o è niente; la quale seconda supposizione distrugge la prima ed è inconsistente con essa, e, per conseguenza, con tutto quello che mediante essa si deduce. E tuttavia io mi permetto di ritenere il termine nx^{n-1} , che è un'espressione ottenuta in virtù della prima supposizione, che necessariamente presupponeva tale supposizione e che non poteva essere ottenuta senza di essa. Questo sembra essere un modo di argomentare molto inconsistente e che non sarebbe ammesso in teologia."[2, p. 72]

2.5 La compensazione degli errori

Berkeley riconosceva che tramite il metodo delle flussioni di Newton e il calcolo di Leibniz si ottenessero risultati corretti; ciò che egli contestava erano i principi su cui si basava il calcolo infinitesimale.

Egli denunciava che i matematici dell'epoca validassero una teoria soltanto perché le conseguenze risultavano vere:

"Contro questa conclusione qualcuno obietterà che le conclusioni sono vere ed esatte, e perciò il metodo degli infinitesimi, col quale esse sono dedotte, deve essere altrettanto irreprensibile. Ma questo metodo inverso di dimostrare i vostri principi mediante le vostre conclusioni, è tanto contrario alla logica, quanto è conforme ai vostri gusti. La verità di una conclusione mai potrà provare che la materia o la forma del sillogismo sia vera; in quanto l'illazione potrebbe essere scorretta o le premesse false e tuttavia la conclusione potrebbe

essere vera, sebbene non in virtù di tale illazione o di tali premesse. Io vi dirò che in ogni altra scienza l'uomo prova le sue conclusioni mediante i suoi principi, e non i principi mediante le conclusioni."[2, p. 75]

Ma è necessario che Berkeley spieghi come risultati corretti possano essere ottenuti da ragionamenti errati. Egli lo fa; la forza delle sue argomentazioni sta proprio nel fatto che utilizza strumenti matematici per tentare di dimostrare in che modo, in alcune delle applicazioni più significative dei nuovi metodi, i leibniziani commettessero due errori che si compensavano a vicenda. Afferma che i primi errori si producono dall'applicazione delle regole del Calcolo alle espressioni analitiche delle curve e che questi errori analitici vengano compensati da errori di tipo geometrico.

La tesi della compensazione degli errori di Berkeley ha una certa somiglianza con quella che propose L. Carnot alla fine del XVIII secolo.

Anche Carnot considerava che il successo dei metodi infinitesimali dipendesse da una compensazione degli errori. C'è però un'importante differenza: secondo Carnot tale compensazione è prevedibile fin dall'inizio ed è intrinsecamente associata alla natura del calcolo. Il metodo quindi secondo lui è accettabile perchè a priori si è sicuri che gli errori si compenseranno.[1]

Invece l'argomentazione di Berkeley si limita a considerare soltanto alcuni esempi, che egli utilizza per smontare in generale i metodi utilizzati dagli analisti.

Tramite ogni esempio cercheremo di ricostruire la tesi berkeleyana e valutarne la correttezza logica.

2.5.1 L'esempio delle tangenti a una parabola

Seguiamo ora i passi che percorse Berkeley per discutere il metodo di Leibniz per determinare le tangenti a una parabola.

Il problema delle tangenti a una parabola era già stato risolto da Apollonio, il quale era giunto a conclusioni conformi a quelle di Leibniz, esse quindi certamente non potevano essere contestate.

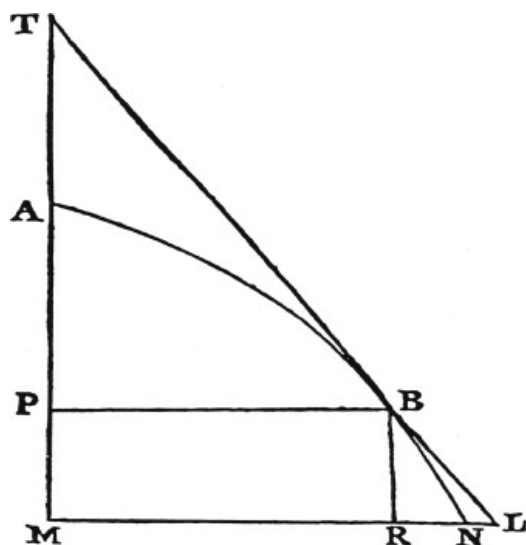


Figura 2.1

Esponiamo il ragionamento di Berkeley, con l'ausilio della figura 2.1, che egli stesso prese come riferimento.

Sia ABN un arco di parabola di equazione

$$y^2 = px, \quad (2.15)$$

dove p è una costante e x e y sono variabili.

Si consideri un suo punto B con coordinate $x = AP$ e $y = PB$.

Si tracci la tangente TB alla curva nel punto B , dove T è il punto in cui la tangente interseca l'asse delle ascisse.

Il metodo di Leibniz porta ad un'espressione in termini di x e y per la cosiddetta sottotangente, ovvero il segmento TP ; nota questa, il coefficiente angolare della tangente è esprimibile come rapporto tra l'ordinata del punto e la misura della sottotangente.

L'idea di Leibniz consiste nell'introdurre un incremento infinitesimo $dx = PM$ all'ascissa x e un incremento $dy = RN$ all'ordinata y .

Se gli incrementi dx e dy sono infinitesimi, allora il triangolo mistilineo BNR è assimilabile al triangolo BRL .

Quindi il triangolo infinitesimo BNR è simile al triangolo TPB .

Deve allora valere

$$\frac{dx}{dy} = \frac{PT}{y} \quad (2.16)$$

Risolvendo l'equazione precedente rispetto a PT , otteniamo

$$PT = y \frac{dx}{dy} \quad (2.17)$$

Applichiamo la regola delle differenze di Leibniz all'equazione della curva presa in esame, ovvero, assumendo che gli infinitesimi obbediscano alle regole aritmetiche dei numeri reali, incrementiamo di un infinitesimo sia la x che la y e applichiamo la regola del quadrato di binomio:

$$y^2 + 2ydy + dy^2 = p(x + dx) \quad (2.18)$$

Ricordando che $y^2 = px$, si possono eliminare i primi termini:

$$2ydy + dy^2 = pdx \quad (2.19)$$

Dato che dy^2 è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a dy , lo trascuriamo e otteniamo:

$$2ydy = pdx \quad (2.20)$$

Da cui, risolvendo rispetto a dy , si ha:

$$dy = \frac{pdx}{2y} \quad (2.21)$$

Sostituiamo in 2.17 e ricordando l'equazione della parabola, abbiamo

$$PT = \frac{(y/dx)}{pdx/2y} = \frac{2y^2}{p} = 2x \quad (2.22)$$

Risulta quindi che la sottotangente è il doppio dell'ascissa, risultato che Berkeley non osa rifiutare perché concorde a quello di Apollonio, espresso nella trentaseesima proposizione del Libro I delle Coniche.

Tuttavia, il successo ottenuto, secondo Berkeley consiste, come abbiamo detto, in una compensazione degli errori commessa durante il procedimento appena esposto.

Egli, per dimostrarlo, ragiona nel seguente modo.

Il primo errore risiederebbe nel confondere il triangolo mistilineo BNR con il triangolo BLR .

Ne consegue che è il triangolo BLR in verità ad essere simile al triangolo TPB .

Indicando con z la differenza tra LR e NR , invece di 2.16, sarebbe quindi più corretto scrivere

$$\frac{dx}{dy + z} = \frac{PT}{y} \quad (2.23)$$

Risolvendo rispetto a PT , giungiamo all'espressione

$$PT = \frac{ydx}{dy + z} \quad (2.24)$$

Nella 2.17 si è commesso un errore di approssimazione in difetto nel porre dy al denominatore, che consiste nell'aver trascurato z .

Il secondo errore proviene dal calcolo errato di dy .

Infatti, valutando 2.15 nelle quantità incrementate, si ha

$$(y + dy)^2 = p(x + dx). \quad (2.25)$$

Svolgendo i calcoli, otteniamo

$$y^2 + (dy)^2 + 2ydy = px + pdx. \quad (2.26)$$

Sapendo che $y^2 = px$, abbiamo

$$2ydy + (dy)^2 = pdx. \quad (2.27)$$

Da cui

$$dy = \frac{pdx}{2y} - \frac{(dy)^2}{2y} \quad (2.28)$$

Si deduce che nella 2.21 si commette un errore per eccesso che vale $\frac{(dy)^2}{2y}$.

Trovati i due errori, Berkeley, a questo punto, si occupa di dimostrare che essi sono uguali, ovvero che

$$\frac{(dy)^2}{2y} = z \quad (2.29)$$

Per far ciò, è a questo punto che egli ricorre alla proposizione trentatreesima del libro primo delle Coniche di Apollonio.

Come sappiamo, essa afferma che la sottotangente è divisa in due parti uguali dalla parabola, ovvero $PT = 2x$.

Allora ponendo $dx = m$ e $dy = n$, per la similitudine dei triangoli TPB e BRL , si ha

$$\frac{2x}{y} = \frac{m}{n+z} \quad (2.30)$$

Quindi

$$n+z = \frac{my}{2x} \quad (2.31)$$

Ora, applicando l'equazione della parabola alle quantità incrementate, otteniamo:

$$(y+n)^2 = p(x+m), \quad (2.32)$$

ovvero

$$y^2 + 2ny + n^2 = px + pm. \quad (2.33)$$

Essendo $y^2 = px$, possiamo sottrarre e ottenere

$$2ny + n^2 = pm. \quad (2.34)$$

Da cui dividendo per p

$$m = \frac{2ny + n^2}{p}. \quad (2.35)$$

Ora per l'equazione della parabola abbiamo $x = \frac{y^2}{p}$.

Sostituendo m e x in 2.31, possiamo scrivere

$$n+z = \frac{my}{2x} = \frac{\frac{(2ny+n^2)y}{p}}{\frac{2y^2}{p}} = \frac{n(2y+n)}{2y}. \quad (2.36)$$

Quindi possiamo trovare un'espressione per z

$$z = \frac{n(2y+n)}{2y} - n = \frac{n(2y+n) - n2y}{2y} = \frac{n^2}{2y}. \quad (2.37)$$

Siamo dunque giunti a dimostrare quanto desideravamo:

$$z = \frac{dy^2}{2y} \quad (2.38)$$

In definitiva, Berkeley critica il trattamento incoerente di dy e mostra che il problema può essere risolto senza uso di infinitesimi.

Per chiarezza se interpretiamo come fa Berkeley dx e dy come incrementi finiti, chiamandoli Δx e Δy allora il valore della sottotangente è data correttamente dall'equazione 2.22.

Infatti, prima Leibniz confrontando il triangolo TPB con il triangolo BRL invece che con BNR , ragiona su un dy che secondo l'approccio di Berkeley è in realtà $\Delta y + z$; successivamente nel calcolare dy , trascura gli infinitesimi di ordine superiore e commette un errore in difetto, cioè $dy = \Delta y - z$.

In tal modo gli errori si compensano e si ottiene esattamente il risultato di Apollonio.

Ovvero se

$$PT = \frac{ydx}{\Delta y + z} \quad \text{e} \quad \Delta y = \frac{pdx}{2y} - z, \quad (2.39)$$

allora

$$PT = \frac{(ydx)}{pdx/2y - z + z} = \frac{(ydx)}{pdx/2y} = 2x. \quad (2.40)$$

La dimostrazione di Berkeley è circolare?

Un punto di vista interessante è quello dello Storico della Matematica, Kirsti Andersen, il quale, nell'articolo "Uno degli argomenti di Berkeley sulla compensazione degli errori nel calcolo", mette in discussione l'argomentazione proposta da Berkeley nell'esempio appena esposto.

L'articolo prima di tutto discute brevemente come Berkeley interpretasse i differenziali leibniziani.

Su questo punto, gli storici e i filosofi della matematica hanno espresso opinioni diverse; alcuni credono che li trattasse come infinitesimali, mentre altri pensano che li considerasse finiti.

La posizione di Andersen è chiara; secondo lui, Berkeley fingeva di lavorare con quantità infinitesimali ma le trattava come quantità finite.

In realtà Berkeley non aveva affatto intenzione di lavorare con gli infinitesimi, che infatti vuole criticare.

Non crediamo che finga di lavorare con alcuna quantità infinitesimale; egli chiaramente cerca di ricondurre tutta l'impostazione di Leibniz ad una spiegazione che fa uso solo di quantità finite.

Nell'articolo si legge che sebbene Berkeley affermasse di avere a che fare con i differenziali di Leibniz, nell'esempio per determinare la tangente a una parabola, non accettò le regole di Leibniz per il calcolo con i differenziali.

In particolare, non ha accettato la regola $x + dx = x$, che è fondamentale per il trattamento dei differenziali di primo ordine.

È proprio così, Berkeley non potrebbe fare altrimenti, dal momento che come abbiamo ribadito a suo avviso non si poteva maneggiare l'infinito.

Invece di seguire le regole di Leibniz, Berkeley introdusse le sue, le quali, sono di un tipo che suggerisce che egli concepì i differenziali come molto piccoli piuttosto che infinitamente piccoli.

Ciò sarebbe conforme alla sua dichiarazione:

"... concepire una Quantità infinitamente piccola, cioè infinitamente inferiore a qualsiasi quantità sensibile o immaginabile è, lo confesso, al di sopra delle mie capacità." [2, p. 67]

Esponiamo ora la sezione in cui l'autore entra nel vivo dell'analisi del metodo proposto da Berkeley.

Il suo scopo è quello di illustrare come Berkeley avesse confuso i suoi lettori e probabilmente anche se stesso.

Berkeley parte dal presupposto che

$$\frac{y}{PT}dx \neq dy$$

$$\frac{p}{2y}dx \neq dy$$

Dunque, sebbene non fosse il modo di Berkeley di definire gli errori, ripercorrendo i suoi conti, è possibile affermare che esistono due quantità z e r tali che

$$z = \frac{y}{PT}dx - dy \quad (2.41)$$

$$r = \frac{p}{2y}dx - dy \quad (2.42)$$

Dove chiamiamo z il primo errore e r il secondo errore, che Berkeley aveva definito rispettivamente $z = NL$ e $r = \frac{dy^2}{2y}$.

Le relazioni 2.41 e 2.42 mostrano che nel caso della parabola di Berkeley, l'equazione

$$r = z \quad (2.43)$$

si realizza proprio quando

$$\frac{y}{PT} = \frac{p}{2y} \quad (2.44)$$

Berkeley doveva dimostrare che $z = r$ per ottenere

$$\frac{y}{PT} = \frac{p}{2y} \quad (2.45)$$

Si può però capovolgere il ragionamento, infatti se assumiamo $\frac{y}{PT} = \frac{p}{2y}$ o un risultato equivalente, otteniamo automaticamente $z = r$.

Ed è proprio questo che fa Berkeley perchè assume il risultato di Apollonio $PT = 2x$, che è effettivamente equivalente ad assumere che $\frac{y}{PT} = \frac{p}{2y}$, infatti, ricordando che $y^2 = px$ si ha:

$$\frac{y}{PT} = \frac{p}{2y} \text{ se e solo se } \frac{y}{PT} = \frac{py}{2px} \text{ se e solo se } \frac{y}{PT} = \frac{y}{2x} \text{ se e solo se } PT = 2x.$$

Quindi Berkeley esegue calcoli che in realtà soltanto apparentemente dimostrano che i due errori z e r sono uguali.

Definendo errori come differenze e applicando $PT = 2x$, z e r non avevano nessun ruolo nella sua argomentazione; in ogni caso, indipendentemente dai calcoli, avrebbe ottenuto la compensazione degli errori, $z = r$.

La generalizzazione di Grattan-Guinness

Degno di attenzione è l'esercizio compiuto dallo storico della matematica e della logica, Ivor Grattan-Guinness, il quale in chiave moderna generalizza l'argomentazione di Berkeley a tutte le funzioni che si possono sviluppare con le serie di Taylor.

Sia data una funzione sviluppabile in serie di Taylor

$$y = f(x) \quad (2.46)$$

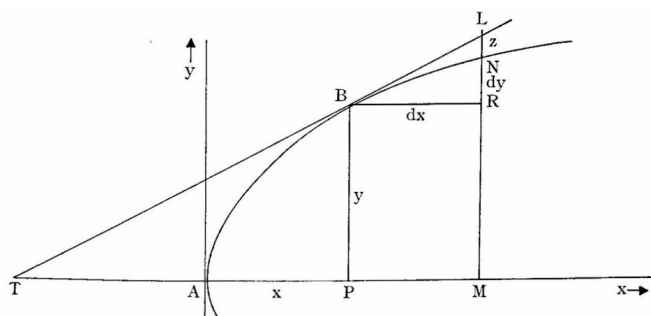


Figura 2.2

Per prima cosa, allo stesso modo di Berkeley considera che il primo errore sia di tipo geometrico e, data la figura 2.2, sia commesso nel considerare il triangolo BRN al posto del triangolo BRL :

$$errore_1 = LR - NR = z \quad (2.47)$$

Il secondo errore invece proviene dall'applicazione delle regole del Calcolo. Per il Calcolo differenziale infatti si ha

$$dy = f'(x)dx \quad (2.48)$$

Sostituendo

$$y + dy = f(x + dx) \quad (2.49)$$

Per il Teorema di Taylor, otteniamo

$$f(x + dx) = f(x) + f'(x)dx + \frac{f''(x)(dx)^2}{2!} + \dots \quad (2.50)$$

Da cui

$$dy = f'(x)dx + \frac{f''(x)(dx)^2}{2!} + \dots \quad (2.51)$$

Quindi da 2.48 e da 2.51, abbiamo

$$errore_2 = \frac{f''(x)(dx)^2}{2!} + \dots \quad (2.52)$$

Ora dimostriamo che i due errori sono in valore assoluto uguali. Possiamo scrivere l' $errore_1$ nel modo seguente:

$$z = LR - NR. \quad (2.53)$$

Quindi poiché il coefficiente angolare della retta $\frac{LR}{dx} = f'(x)$, si ha anche che

$$z = f'(x)dx - dy \quad (2.54)$$

$$= f'(x)dx - \left(f'(x)dx + \frac{f''(x)(dx)^2}{2!} + \dots \right) \quad (2.55)$$

$$= -\left(\frac{1}{2!} f''(x)dx^2 + \dots \right) \quad (2.56)$$

Dunque $z = -\text{errore}_2$, ma anche $z = \text{errore}_1$ e concludiamo

$$\text{errore}_1 + \text{errore}_2 = 0 \quad (2.57)$$

Consideriamo il caso particolare della parabola.

Se inseriamo l'equazione $y^2 = px$ in 2.56, risulta

$$z = -\left(\frac{\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}}{2!} p^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} (dx)^2 + \frac{\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2}}{3!} p^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{5}{2}} (dx)^3 + \dots \right) \quad (2.58)$$

$$= -p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}}{2!} \left(\frac{dx}{x} \right)^2 + \frac{\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2}}{3!} \left(\frac{dx}{x} \right)^3 + \dots \right) \quad (2.59)$$

Ora ricordando l'equazione della parabola e che per x che tende a 0 abbiamo

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{6} + \dots \quad (2.60)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dalla 2.59 troviamo

$$z = -y \left(\left(1 + \frac{dx}{x} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{\frac{1}{2}dx}{x} \right) \quad (2.61)$$

Richiamando ancora una volta l'equazione della parabola, abbiamo

$$y + dy = p^{\frac{1}{2}}(x + dx)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.62)$$

Raccogliendo, otteniamo

$$y + dy = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{dx}{x} \right)^{\frac{1}{2}} = y \left(1 + \frac{dx}{x} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.63)$$

Da cui

$$\left(1 + \frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{y + dy}{y}. \quad (2.64)$$

Quindi, sostituendo, la 2.61 si riduce a

$$z = -y \left[\left(\frac{y + dy}{y} - 1 - \frac{\frac{1}{2}dx}{x} \right) \right] = \frac{\frac{1}{2}ydx}{x} - dy \quad (2.65)$$

Da cui, tramite semplici passaggi algebrici, otteniamo il risultato a cui era giunto anche Berkeley

$$\frac{2x}{y} = \frac{dx}{dy + z} \quad (2.66)$$

2.5.2 L'ordinata dalla conoscenza dell'area

Dal paragrafo 26 al paragrafo 29 dell'Analista è discusso il problema della ricerca dell'ordinata, data un'espressione per l'area, un altro esempio in cui secondo Berkeley nonostante la falsità delle premesse si consegue un risultato corretto.

Probabilmente in questa sezione si riferisce a un caso semplice di una questione più generale affrontata da Newton nel *De analysi*.

Supponiamo di conoscere l'espressione che determina l'area di una superficie delimitata dalla curva e dagli assi delle ascisse e delle ordinate di un punto, in funzione dell'ordinata.

E in particolare l'area sia espressa da x^n .

A partire da questa, Leibniz e Newton trovano che l'equazione tra ordinata e ascissa è

$$y = nx^{n-1}. \quad (2.67)$$

Berkeley come nell'esempio precedente accetta questo risultato, che evidentemente è il caso di un problema inverso a quello dell'integrazione. Ciò che ancora una volta viene rifiutato è il metodo con il quale è determinato.

Per dimostrare che la verità delle conclusioni degli analisti non dipende dall'introduzione degli infinitesimi o delle flussioni, parte ad analizzare

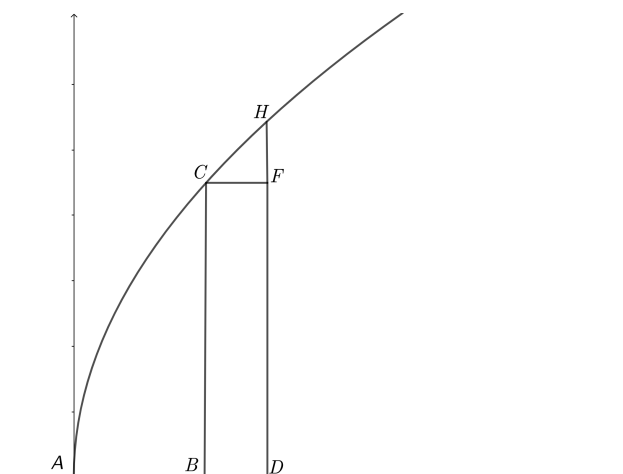


Figura 2.3

un esempio specifico in cui $n = 2$ e successivamente considera il problema generale. Possiamo notare che in entrambi i casi le considerazioni sono sostanzialmente le stesse.

Gli analisti per dire che se l'area della curva è x^2 , allora l'ordinata (in termini moderni diremmo la sua derivata) sarà $2x$, procedono nel modo seguente.

In riferimento alla figura 2.3, si supponga $AB = x$, $BC = y$, $BD = o$ e che x^2 sia uguale all'area ABC , vogliamo mostrare che $y = 2x$.

Si dia all'ascissa x l'incremento o , in modo che diventi $x + o$.

Ne consegue che l'area x^2 diventi

$$(x + o)^2 = xx + 2xo + oo. \quad (2.68)$$

Quindi sottraendo dall'espressione precedente l'area originaria x^2 , otteniamo il valore dell'incremento:

$$2xo + oo. \quad (2.69)$$

Esso d'altra parte è esprimibile come somma dell'area del rettangolo $BDFC$ e della superficie curvilinea FCH .

Ma sapendo che l'area del rettangolo è yo e supponendo di esprimere l'area della superficie curvilinea con la formula qo^2 , dove q è un coefficiente

da determinare, abbiamo

$$yo + qo^2 = 2xo + oo \quad (2.70)$$

Infine dividendo tutto per o e trascurando le quantità in cui compare la quantità infinitesima o , otteniamo

$$y = 2x. \quad (2.71)$$

Berkeley ribatte che in realtà in questo caso è possibile eliminare o non in quanto infinitesimo ma perché si ha $q = 1$.

Egli tuttavia non spiega il motivo di tale relazione anche se Neri osserva che è vero che l'area curvilinea in questione vale la stessa equazione che in generale esprime l'area come quadrato dell'ascissa; dunque l'area di FCH è uguale a o^2 . [13]

Noi crediamo che per affermare che $q = 1$ e dunque che l'area di FCH sia o^2 , Berkeley sia in verità partito dalla conclusione degli analisti ovvero dall'equazione 2.71.

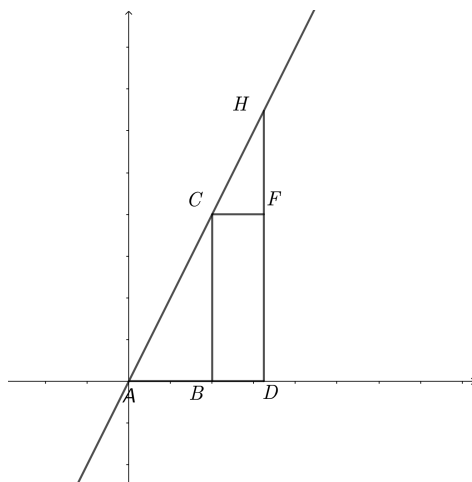


Figura 2.4

In questo caso, in riferimento alla figura 2.4, l'area del triangolo CFH è uguale a

$$CFH = \frac{CF \cdot FH}{2} \quad (2.72)$$

e dal momento che $CF = o$ e $FH = 2(x + o) - y$

$$CFH = \frac{[2(x + o) - y]o}{2}. \quad (2.73)$$

Ricordando che $y = 2x$, si ha infine

$$CFH = \frac{2o^2}{2} = o^2. \quad (2.74)$$

Nei paragrafi 28 e 29 Berkeley invece cerca di mostrare come in generale il procedimento che dall'area x^n porta all'ordinata $y = nx^{n-1}$ funzioni non perché ad un certo punto si trascurano quantità infinitesime, come credono gli analisti, ma perché semplicemente si applica il noto assioma: se da due grandezze uguali togliamo due grandezze uguali, anche i residui saranno uguali.

Egli ragiona nel modo seguente.

Come prima, si dia all'ascissa l'incremento o , così che l'area diventi

$$(x + o)^n = x^n + nx^{n-1}o + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}o^2 + \dots \quad (2.75)$$

Cioè

$$ABC + BDFC + FCH = x^n + nx^{n-1}o + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}o^2 + \dots \quad (2.76)$$

L'incremento d'area sarà quindi

$$nx^{n-1}o + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}o^2 + \dots \quad (2.77)$$

D'altra parte l'aumento dell'area è la somma del rettangolo $BDFC$ e del triangolo mistilineo FCH .

Quindi possiamo scrivere

$$BDFC + FCH = nx^{n-1}o + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}o^2 + \dots \quad (2.78)$$

Berkeley dice che di fatto il primo termine del secondo membro rappresenta proprio l'area del rettangolo $BDFC$, ovvero che

$$BDFC = nx^{n-1}o. \quad (2.79)$$

A questo punto dividiamo a destra e sinistra dell'uguale per $CF = o$ e concludiamo che

$$BC = nx^{n-1}, \quad (2.80)$$

ovvero

$$y = nx^{n-1}. \quad (2.81)$$

Egli però aggiunge che questo risultato non deriva dal fatto che vengono trascurati i termini in cui compaiono infinitesimi di ordine superiore a o nella formula 2.78 ma dal fatto che qualunque sia il valore dell'incremento o , piccolo o grande che sia, è anche vero che

$$FCH = \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}o^2 + \dots \quad (2.82)$$

“Quelle quantità che per l'analista sono trascurate o fatte sparire in realtà sono sottratte”[2, p. 84]

Anche in questo caso però il ragionamento è logicamente sbagliato perché ancora una volta utilizza le conclusioni degli analisti per smontare il ragionamento che li ha condotti fin lì.

Il problema è che Berkeley non sa dimostrare a priori che la 2.82 sia vera, cosa che gli avrebbe fatto concludere a ragione che vale la 2.79.

Un indizio che potrebbe averlo guidato a supporre vera l'uguaglianza 2.82 è l'osservazione del fatto che per $n = 2$, la 2.82 diviene

$$FCH = \frac{2(2-1)}{2}x^{2-2}o^2 = o^2 \quad (2.83)$$

Ovvero il coefficiente $q = 1$ del caso con $n = 2$ studiato in precedenza è un caso particolare della 2.82.

Dalla lettura dei paragrafi de *L'Analista* dedicati a questo problema sembra comunque che egli creda semplicemente che sia naturale associare delle quantità algebriche a certe quantità geometriche corrispondenti.

Questo ragionamento per analogia evince nel paragrafo 29, in cui in riferimento alla 2.76 , Barkeley dice:

“Perciò, qualunque sia la potenza, voi avete da una parte una espressione algebrica, dall'altra una quantità geometrica, ciascuna delle quali si divide naturalmente in altre tre parti. La prima parte dell'espressione algebrica o flussionale non contiene né l'espressione dell'ncremento dell'ascissa né le potenze, la seconda invece contiene l'espressione dell'incremento, e la terza le potenze dell'incremento. Anche la quantità geometrica, ossia l'area incrementata, consiste di tre parti, la prima delle quali è l'area data, la seconda il rettangolo avente per dati l'ordinata e l'incremento dell'ascissa, la terza è lo spazio curvilineo. E confrontando le parti corrispondenti di entrambi i membri noi troviamo che il secondo termine rappresenta il rettangolo, che è il secondo termine dell'espressione algebrica, ed il terzo termine, contenete le potenze dell'incremento, rappresenta lo spazio curvilineo, che è il terzo termine dell'espressione algebrica.”[2, p. 84]

2.6 Rifiuto di ogni formulazione del calcolo delle flussioni

Nelle ultime sezioni dell'Analista Berkeley elabora delle argomentazioni che possano confutare le possibili diverse risposte alla sua critica del calcolo infinitesimale.

In questi paragrafi l'oggetto principale dell'attacco di Berkeley è la presentazione delle flussioni come velocità.

Egli sostiene:

“Ma noi non abbiamo nessuna nozione per concepire o misurare i vari gradi di velocità, se non lo spazio ed il tempo, o, quando i tempi sono dati, lo spazio. Ma non possiamo avere nessuna nozione di velocità prescindendo dallo spazio e dal tempo. Quando perciò si suppone che un punto si muova in dati intervalli di tempo, noi non abbiamo alcuna nozione di maggiore o minore velocità, o di rapporti tra le velocità, ma soltanto di linee più lunghe o

più corte e dei rapporti tra tali linee generate in uguali intervalli di tempo."[2, p. 85]

Secondo Berkeley definire la velocità come un rapporto ultimo di grandezze evanescenti contrasta questo principio, poiché richiede di astrarre l'idea di velocità dalle idee di spazio e tempo. Questo ritiene sia impossibile, e conclude che le definizioni newtoniane sulle velocità istantanee o sulle proporzioni tra tali velocità sono semplicemente incomprensibili.

Berkeley considera varie presentazioni del calcolo delle flussioni, ad esempio, indaga su quella dell'introduzione del *De quadratura* secondo cui le flussioni possono essere espresse tramite segmenti ad esse proporzionali.

Tale concezione delle flussioni, in caso di successo, è un espediente che sembrerebbe eludere la critica di Berkeley, dato che i segmenti e le proporzioni tra essi sono facilmente concepibili.

Berkeley però non si accontenta e si chiede se la teoria newtoniana possa lecitamente ammettere questi segmenti in un modo epistemologicamente accettabile.

Il discorso di Newton è il seguente.

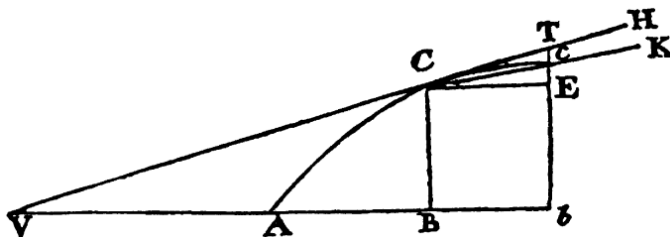


Figura 2.5

Sia ACc una curva, un suo punto C abbia ascissa AB , ordinata BC , e sia VCH tangente al punto C (fig. 2.5).

Prendiamo Bb come incremento finito dell'ascissa e costruiamo la nuova ordinata bc , prolungandola fino a che essa intersechi VCH in un punto T della tangente.

Newton suppone che l'ordinata bc si avvicini all'ordinata BC , fino a che il punto c coincida col il punto C , conseguentemente CK si avvicinerà alla

tangente fino a coincidere, a quel punto il triangolo mistilineo evanescente CEc diventerà simile al triangolo CET , e i suoi lati evanescenti CE , Ec , e Cc diventeranno proporzionali ai lati del triangolo CET , CE , ET e CT . E dunque si conclude che le flussioni dei segmenti AB , BC e AC saranno proporzionali a CE , ET e CT .

Berkeley usa le parole di Newton con grande retorica e si oppone al suo ragionamento, sostenendo che esso richieda l'incomprensibile tesi che un triangolo sia un punto:

“Il grande autore ha notato insistentemente che i punti C e c non devono essere distanti l'uno dall'altro di qualsivoglia minimo intervallo, ma che, in ordine al trovare i rapporti ultimi delle linee CE , Ec e Cc (ossia i rapporti delle flussioni o delle velocità) espresse dai lati finali del triangolo VBC , e i punti C e c devono essere accuratamente coincidenti, ossia devono essere la stessa cosa. A questo modo il punto è considerato un triangolo, ovvero si suppone che i triangoli si contraggano in un punto. Questo è assolutamente inconcepibile. Eppure vi sono alcuni i quali, mentre esprimono disappunto all'enunciazione di qualsiasi mistero, per quanto li concerne non fanno alcuna difficoltà, capaci di scolare un moscerino e di inghiottire un cammello.”[2, p. 87]

Il problema di fondo qui riguarda ancora una volta l'astrazione. Affinché la presentazione di Newton funzioni, dovremmo ammettere i rapporti solo in astratto, cioè slegati dalle quantità che li formano.

In altri termini, Newton suppone che i rapporti determinati dai lati di un triangolo rimangano anche dopo che il triangolo sia svanito e diventi un punto.

Berkeley conclude che, sebbene sia possibile concepire distintamente i segmenti e cosa significhi che stiano in una data proporzione, non possiamo pensare che la teoria delle flussioni divenga plausibile semplicemente dichiarando che le flussioni sono espresse da proporzioni tra linee finite, in particolare quando la procedura per trovare le linee finite richieste e la loro proporzione richieda di presumere che si possa vedere una figura in un punto.

Successivamente Berkeley prende in considerazione un'altra formulazione del calcolo delle flussioni. Questo passaggio è interessante perché mostra che Berkeley era contrario ad un fondamento puramente formalistico del calcolo, in base al quale argomentazioni puramente algebriche vengono utilizzate per giustificare i metodi senza considerazioni geometriche.

Se supponiamo che x e z rappresentino due ascisse di una curva e prendiamo x^3 e z^3 per le aree corrispondenti, possiamo denotare l'incremento di l'ascissa come $z - x$ e l'incremento dell'area come $z^3 - x^3$.

Dividendo l'incremento dell'area per l'incremento dell'ascissa, $\frac{(z^3-x^3)}{(z-x)}$, otteniamo $z^2 + zx + x^2$ come quoziente.

Data questa espressione per il rapporto dei due incrementi possiamo ora assumere che $z = x$ e sostituendo x con z nell'espressione per il rapporto degli incrementi, giungiamo a $3x^2$ come ordinata della curva, risultato che sembra sia stato trovato senza l'uso di flussioni, incrementi evanescenti, o infinitesimi.

Berkeley risponde giustamente che il calcolo iniziale degli incrementi e la divisione per $z - x$ presuma tacitamente che z e x siano diversi; altrimenti risulterebbe una divisione per zero.

Questa ipotesi è poi contraddetta dall'assunzione che $z = x$, quindi anche questa presunta rivendicazione del calcolo è considerata altrettanto difettosa come una qualsiasi delle precedenti.

Osserva che *“spesso gli uomini si comportano come se essi stessi e gli altri sapessero concepire e comprendere le cose espresse dai segni, mentre in verità non ne hanno la minima idea, fatta eccezione dei segni stessi”*. [2, p. 88]

Berkeley, in questo caso esplicitamente contrario al formalismo, richiede che l'oggetto di studio della geometria venga compreso e si oppone all'idea di sostituire quantità geometriche con insiemi di segni o simboli algebrici dissociati dalle idee geometriche e dedurre da essi le flussioni in modo puramente algebrico.

Questo passaggio introduce le considerazioni di Berkeley riguardo diversi

tentativi di giustificare il Calcolo introducendo una retta finita e simboli algebrici destinati a denotare le velocità con cui viene prodotta la linea dal moto uniformemente accelerato di un punto.

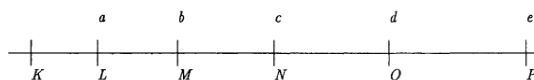


Figura 2.6

Se immaginiamo che la linea KP (fig. 2.6) sia descritta dal moto di un punto continuamente accelerato, otteniamo che in uguali parti di tempo vengono generati gli intervalli disuguali KL , LM , MN , NO e OP .

Inoltre, a , b , c , d ed e denotino le velocità del punto generatore in L , M , N , O e P .

Possiamo quindi trattare la velocità crescente come una quantità che scorre e studiare il tasso di aumento della velocità confrontando le differenze delle rispettive velocità.

Ciò si traduce in una sequenza di espressioni

$$a, (b - a), (c - 2b + a), (d - 3c + 3b - a), (e - 4d + 6c - 4b + a), \dots$$

Questi termini successivi possono essere chiamati prima, seconda, terza quarta flussione.

Tale sequenza di espressioni algebriche è abbastanza chiara, ma Berkeley insiste sul fatto che non è una corretta spiegazione della dottrina delle flussioni:

“Niente è più facile che assegnare nomi, segni o espressioni a tali flussioni: e non è difficile operare e computare per mezzo di tali segni. Ma è molto più difficile omettere quei segni e tuttavia ritenere in mente quello che tali segni dovrebbero significare. Considerare i termini, siano essi geometrici, algebrici o flussionali, non è tanto difficile. Ma formarsi un’idea precisa della terza velocità per esempio, in se stessa e per se stessa, hoc opus, hic labor. Non è facile formarsi un’idea chiara e distinta della velocità soltanto, prescindendo da ogni intervallo di tempo e di spazio, con qualunque simbolo la si voglia esprimere. Questo, se io devo giudicare gli altri da quello che sento

accadere in me stesso, è impossibile. A me sembra evidente che le misure e i disegni sono assolutamente necessari per concepire le velocità e ragionarci sopra: che, per conseguenza, quando noi pensiamo di concepire le velocità semplicemente in se stesse, siamo ingannati da vane astrazioni.”[2, p. 89]

Qui ritorna sulla solita critica: i fautori del calcolo hanno trascurato il vero oggetto della geometria, costruendo invece un sistema notazionale che non può essere interpretato in termini di proprietà di estensione percepibile ma solo in termini di tali “vana astrazione”.

Come abbiamo già ribadito le teorie algebriche e aritmetiche sono legittime, secondo Berkeley, proprio perché sono scienze “puramente nominali” che si occupano solo della manipolazione dei simboli. I loro simboli denotano idee astratte di numero o quantità; le loro verità dipendono dalla nostra scelta arbitraria di notazioni e regole di calcolo.

Ma la geometria ha una distinta estensione percepibile all’oggetto dunque una teoria geometrica può essere trattata algebricamente solo nella misura in cui i simboli algebrici corrispondono a un oggetto geometrico distintamente concepito. La dottrina delle flussioni, per conto di Berkeley, deve essere respinta perché introduce astrazioni impossibili come oggetto della geometria usando la notazione a cui non possono corrispondere idee propriamente geometriche.

Capitolo 3

Riformulazione dei metodi di Newton in risposta alle critiche di Berkeley

La pubblicazione de *L'Analista* di Berkeley provocò la reazione di numerosi matematici britannici, i quali si posero in difesa delle teorie del Calcolo newtoniano contro la critica berkeleyana.

Le risposte più significative possono essere essenzialmente raggruppate in due categorie, da un lato quelle che hanno ricevuto una replica da parte di Berkeley e dall'altro quelle che sono rimaste senza risposta.

Un'altra cruciale differenza sta nel fatto che alcuni autori hanno semplicemente riaffermato la correttezza delle argomentazioni newtoniane, mentre altri hanno cercato, a partire dalle sue accuse, di riformulare gli argomenti di Newton.

Le prime risposte arrivarono dai matematici J. Jurin e J. Wolton, le quali provocarono degli scambi con Berkeley da cui egli risultò facilmente vincitore.

Jurin, sotto lo pseudonimo di *philanthes contabrigies*, quasi immediatamente dopo la pubblicazione de *L'Analista*, scrisse un opuscolo intitolato *Geometry no friend to infidelity*, a cui Berkeley rispose con la sua “*Defence of Free-thinking in Mathematics*”, aggiungendo un'appendice diretta contro

la rivendicazione da parte di Walton dei principi delle flussioni di sir Isaac Newton.

Le argomentazioni di entrambi questi autori furono generalmente inadeguate e spesso si limitarono all'invettiva.

Oltre ai lavori a cui Berkeley ha risposto, vi sono numerose altre pubblicazioni volte a contrastare la sua critica al Calcolo infinitesimale.

In particolare, ci concentreremo su alcune riflessioni di Benjamin Robins e Colin Maclaurin, autori che in modo ingegnoso furono in grado di offrire proposte matematicamente valide al fine di rendere il Calcolo rigoroso.

3.1 La proposta di B. Robins

Una figura chiave a difesa della teoria delle flussioni di Newton fu Benjamin Robins (1707-51), matematico noto in particolar modo per importanti contributi per la balistica.

Di grande interesse per analizzare la polemica scaturita dall'*Analista* di Berkeley è il *Discourse Concerning the Nature of Certainty of Sir Isaac Newton's Methods of Fluxions and of Prime and Ultimate Rations*, pubblicato da Robins nel 1735.

Tale trattato ha l'intento di validare le teorie di Newton, mostrando che esse sono "conformi alla Geometria degli Antichi".

Robins non è semplicemente interessato a mostrare che le tesi newtoniane fossero rigorose; la novità del suo lavoro sta nella ricerca di un metodo per rifondare il calcolo delle flussioni in termini geometrici e utilizzando nelle dimostrazioni il metodo di Esaustione e in generale la *reductio ad absurdum*.

Come fa notare Marco Panza, in ultima analisi quindi viene mostrato come in realtà l'infinitesimalismo di Newton non sia una componente necessaria della sua teoria.

Per prima cosa, partendo dalla concezione cinematica delle grandezze geometriche di Newton, di cui in particolare si legge nel *De Quadratura*,

Robins definisce la flussione di una grandezza come la velocità con cui essa viene prodotta.

Egli sottolinea che il fulcro della dottrina delle flussioni si debba trovare nelle loro proporzioni:

And as different fluents may be understood to be described together in such manner, as constantly to preserve some one known relation to each other; the doctrine of fluxions teaches, how to assign at all times the proportion between the velocities, wherewith homogeneous magnitudes, varying thus together, augment or diminish. [16]

Ciò conduce Robins al suo primo teorema fondamentale:

Teorema 3.1.1. *That the proportion between the fluxions of magnitudes is assignable from the relation known between the magnitudes themselves* [16]

Analizziamo ora la sua dimostrazione per esaurimento di tale teorema e osserviamo come questo approccio differisca nettamente da quello di Newton.

Date due linee AB e CD (figura 3.1) generate contemporaneamente dal moto di due punti, si supponga che il primo punto si muova con una velocità costante e che il secondo sia invece accelerato.

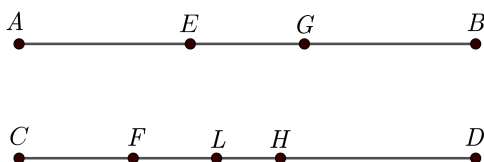


Figura 3.1

Gli spazi AE e CF siano coperti nel medesimo intervallo di tempo e si ponga

$$AE = x \tag{3.1}$$

e

$$CF = x^n. \tag{3.2}$$

Robins vuole mostrare che il rapporto tra la velocità del punto che si muove su CD e quella del punto su AB è sempre assegnabile.

A questo scopo considera degli incrementi su entrambe le linee: siano G e H le posizioni dei due punti al passare di un ulteriore dato intervallo di tempo e indichiamo EG con ϵ .

Allora per ipotesi

$$CH = (x + \epsilon)^n, \quad (3.3)$$

che per il teorema binomiale, scriviamo

$$CH = x^n + nx^{(n-1)}\epsilon + \frac{n(n-1)}{2}x^{(n-2)}\epsilon^2 + \dots \quad (3.4)$$

Sottraendo da entrambi i membri dell'equazione i termini uguali CF e x^n , otteniamo l'incremento

$$FH = nx^{(n-1)}\epsilon + \frac{n(n-1)}{2}x^{(n-2)}\epsilon^2 + \dots \quad (3.5)$$

Assumiamo che $n > 1$, caso in cui il punto che descrive CF è uniformemente accelerato.

Robins enuncia il seguente teorema

Teorema 3.1.2. *Nessuna linea diversa da quella rappresentata dal secondo termine della serie (3.4) che è lo sviluppo di CH ha con la linea denotata da ϵ lo stesso rapporto che la velocità in F del punto che si muove su CD ha con la velocità uniforme del punto che si muove su AB (ovvero con la velocità istantanea di tale punto E); la velocità in F sta quindi alla velocità in E come ϵnx^{n-1} sta a ϵ . [14]*

In altri termini, la velocità di x^n è nx^{n-1} .

Per dimostrarlo, Robins invece di seguire la strategia di Newton che consiste, come abbiamo visto, nel dividere per l'incremento per poi trascurare i termini che lo contengono, utilizza il metodo di esaustione, mostrando di aver inteso chiaramente le critiche di Berkeley.

Egli dunque procede facendo ricorso alla *reductio ad absurdum*.

Supponiamo che il rapporto tra la velocità in F e in E sia $\frac{p}{q}$.

Dobbiamo mostrare che la disuguaglianza

$$\frac{p}{q} > \frac{nx^{(n-1)}}{1} \quad (3.6)$$

conduce ad una contraddizione.

Robins osserva che nell'equazione 3.4, per ognuno dei termini della serie è possibile scegliere un valore abbastanza piccolo dell'incremento ϵ , in modo tale che qualsiasi termine della serie risulti maggiore della somma di tutti i termini successivi.

Cioè per ogni termine τ_i esiste un ϵ sufficientemente piccola tale che

$$\tau_i > \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{i+n}. \quad (3.7)$$

Se sommiamo τ_i ad entrambi i membri dell'equazione precedente otteniamo

$$2\tau_i > \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{i+n}. \quad (3.8)$$

Inoltre, per ϵ sufficientemente piccolo il rapporto tra il secondo termine e il doppio del terzo termine della serie (3.4) sarà arbitrariamente grande perché al diminuire di ϵ , tale rapporto ovvero $\frac{nx^{n-1}\epsilon}{n(n-1)x^{n-2}\epsilon^2}$ cresce senza limiti.

Oggi diremmo che al tendere di ϵ a 0, il rapporto tende a ∞ .

Tuttavia la disuguaglianza 3.8 assicura che esiste un valore di ϵ abbastanza piccolo tale che il doppio del terzo termine della serie in 3.4 sia maggiore della somma di tutti i termini che seguono il secondo, cioè

$$n(n-1)x^{(n-2)}\epsilon^2 > \left(\frac{n(n-1)}{2}x^{(n-2)}\epsilon^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^{(n-3)}\epsilon^3 + \dots\right) \quad (3.9)$$

Dal momento che ϵ è positivo, possiamo anche affermare che vale

$$nx^{(n-1)}\epsilon + n(n-1)x^{(n-2)}\epsilon^2 > nx^{(n-1)}\epsilon. \quad (3.10)$$

Dividendo entrambi i membri dell'equazione per ϵ , otteniamo

$$\frac{nx^{(n-1)}\epsilon + n(n-1)x^{(n-2)}\epsilon^2}{\epsilon} > \frac{nx^{(n-1)}\epsilon}{\epsilon}. \quad (3.11)$$

Ma quando ϵ è abbastanza piccolo da soddisfare sia 3.9 che 3.11, l'ipotesi implica che

$$\frac{p}{q} > \frac{nx^{(n-1)}\epsilon + n(n-1)x^{(n-2)}\epsilon^2}{\epsilon} > \frac{nx^{(n-1)}\epsilon}{\epsilon}. \quad (3.12)$$

Ora sommando il termine nx^{n-1} ad entrambi i membri della disuguaglianza 3.9, otteniamo

$$\begin{aligned} & nx^{(n-1)}\epsilon + n(n-1)x^{(n-2)}\epsilon^2 > \\ & > nx^{(n-1)}\epsilon + \left(\frac{n(n-1)}{2}x^{(n-2)}\epsilon^2 + \right. \\ & \left. \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^{(n-3)}\epsilon^3 + \dots \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dividiamo per ϵ :

$$\begin{aligned} & \frac{nx^{(n-1)}\epsilon + n(n-1)x^{(n-2)}\epsilon^2}{\epsilon} > \\ & (nx^{(n-1)}\epsilon + \frac{n(n-1)}{2}x^{(n-2)}\epsilon^2 \\ & + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^{(n-3)}\epsilon^3 + \dots) : \epsilon. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Allora da 3.13 e 3.14 si ha

$$\begin{aligned} & \frac{p}{q} > \\ & (nx^{(n-1)}\epsilon + \left(\frac{n(n-1)}{2}x^{(n-2)}\epsilon^2 + \right. \\ & \left. \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^{(n-3)}\epsilon^3 + \dots\right) : \epsilon). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Quindi il rapporto $\frac{p}{q}$ supera $\frac{FH}{EG}$, il che è assurdo poichè essendo il moto del punto che genera CD un moto uniformemente accelerato, il rapporto tra FH e EG deve essere maggiore rispetto al rapporto tra la velocità del punto in F e quella del punto in E .

In modo analogo si dimostra che anche l'ipotesi opposta per cui

$$\frac{p}{q} < \frac{nx^{(n-1)}}{1} \quad (3.16)$$

conduce ad una contraddizione.

Concludiamo dunque che l'unica possibilità risulta essere

$$\frac{p}{q} = \frac{nx^{(n-1)}}{1}. \quad (3.17)$$

Dalla dimostrazione appena esposta si evince chiaramente come Robins fosse abile nel destreggiare la tecnica delle disuguaglianze, ciò, come fa notare Marco Panza, non era affatto scontato per un matematico dell'epoca, poiché questo modo di ragionare si diffonderà soltanto dopo la pubblicazione della *Théorie des fonctions analytiques* di Lagrange.

Inoltre notiamo come appaia in modo del tutto naturale anche l'utilizzo della quantificazione dei parametri, tanto che la traduzione in un linguaggio post-weierstrassiano non è affatto forzata.

Vediamo come ad esempio senza difficoltà Panza utilizza un simbolismo moderno per ricostruire il procedimento di Robins [14]:

Se poniamo

$$CH = f_1(x) + f_2(x)\epsilon + f_3(x)\epsilon^2 + \dots, \quad (3.18)$$

la 3.7 in sostanza diventa

$$\forall n \quad \exists \quad \epsilon_0 \quad \text{t.c.} \quad \epsilon < \epsilon_0 \quad \Rightarrow \quad f_n(x)\epsilon^{n-1} > f_{n+1}(x)\epsilon^n + f_{n+2}(x)\epsilon^{n+1} + \dots \quad (3.19)$$

Quindi

$$\forall n \quad \exists \quad \epsilon_0 \quad \text{t.c.} \quad \epsilon < \epsilon_0 \quad \Rightarrow \quad 2f_n(x)\epsilon^{n-1} > f_n(x)\epsilon^{n-1} + f_{n+1}(x)\epsilon^n + \dots \quad (3.20)$$

Da cui segue la disuguaglianza corrispondente alla 3.9:

$$\exists \quad \epsilon_0 \quad \text{t.c.} \quad \epsilon < \epsilon_0 \quad \Rightarrow \quad 2f_3(x)\epsilon^2 > f_3(x)\epsilon^2 + f_4(x)\epsilon^3 + \dots \quad (3.21)$$

Inoltre

$$\forall R \quad \exists \quad \epsilon_0 \quad \text{t.c.} \quad \epsilon < \epsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f_2(x)\epsilon}{2f_3(x)\epsilon^2} > R \quad (3.22)$$

Da cui ponendo $R = \frac{f_2(x)}{\zeta}$, otteniamo

$$\exists \quad \epsilon_0 \quad \text{t. c.} \quad \epsilon < \epsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2f_3(x)\epsilon}{f_2(x)} < \frac{\zeta}{f_2(x)} \quad (3.23)$$

Ovvero

$$\forall \zeta \exists \epsilon_0 \text{ t.c. } \epsilon < \epsilon_0 \Rightarrow 2f_3(x)\epsilon < \zeta \quad (3.24)$$

Da cui segue la disuguaglianza corrispondente alla 3.11:

$$\forall \zeta \exists \epsilon_0 \text{ t.c. } \epsilon < \epsilon_0 \Rightarrow \frac{f_2(x)\epsilon + 2f_3(x)\epsilon^2}{\epsilon} - \frac{f_2(x)\epsilon}{\epsilon} < \zeta \quad (3.25)$$

Il piano di Robins per difendere Newton va oltre la dimostrazione che queste flussioni possano essere definite e determinate utilizzando tecniche di esaustione.

Dal momento che i metodi newtoniani delle flussioni e delle prime e ultime ragioni semplificano considerevolmente le dimostrazioni che altrimenti richiederebbero complicate prove di Esaustione, egli vuole dimostrare la loro correttezza, affermando che essi sono ritenuti oscuri soltanto a causa del modo sintetico di esprimersi di Newton e che non sono altro che un'abbreviazione di una procedura classica; nell'introduzione del suo discorso Robins dichiara infatti che il calcolo newtoniano non è in alcun modo oscuro o inaffidabile, d'altra parte però ammette che il modo sintetico in cui Newton si esprime necessita di una spiegazione più estesa:

The concise form, into which Sir Isaac Newton has cast his demonstrations, may very possibly create a difficulty of apprehension in the minds of some unexercised in these subjects. But otherwise his method of demonstrating by the prime and ultimate ratios of varying magnitudes is not only just, and free from any defect in itself; but easily to be comprehended, at least by those who have made these subjects familiar to them by reading the ancients.
.[16]

Nella seconda parte del Discorso di Robins viene chiarita la nozione di limite di Newton in modo da mostrare come i risultati raggiunti nella prima parte possano essere dimostrati più facilmente tramite l'uso di una forma sintetica di ragionamento, ovvero il passaggio a limite.

Principalmente il compito che si prefigge Robins è quello di dimostrare che non c'è alcuna contraddizione nell'introdurre prima un incremento finito

e poi scartarlo quando il rapporto finale è calcolato, approccio fortemente criticato da Berkeley.

A tal fine Robins enuncia una serie di definizioni e lemmi.

È sorprendente quanto essi siano affini alla moderna teoria dei limiti, anche se sarebbe azzardato attribuire a Robins il merito di aver anticipato i tempi soddisfacendo gli standard di rigore per il Calcolo raggiunti solamente nei secoli successivi.

Robins introduce così la nozione di limite: *Any fix'd quantity, which some varying quantity, by a continual augmentation or diminution, shall perpetually approach, but never pass, is considered as the quantity, to which the varying quantity will at last or ultimately become equal; provided the varying quantity can be made in its approach to the other to differ from it by less than by any quantity how minute soever, that can be assigned.*[16]

In altri termini, A è il limite di $a(x)$ se per ogni quantità ϵ , $a(x)$ può essere resa tale che $|A - a(x)| < \epsilon$. [14]

La definizione fondamentale nel resoconto di Robins del calcolo è quella del termine "grandezza ultima":

In primo luogo definiremo una grandezza ultima come il limite entro il quale può avvicinarsi una grandezza variabile qualsiasi grado di vicinanza, anche se non può mai essere reso assolutamente uguale ad esso. [16]

Oggi potremmo scrivere x tende a B quando B è la grandezza ultima della quantità variabile x .

Si noti che la definizione di Robins si discosta dalla moderna definizione di limite: insiste che una variabile non raggiunge mai il suo limite, mentre come sappiamo la moderna teoria dei limiti ammette variabili che raggiungono i propri limiti.

Probabilmente questo si spiega perché Robins prende il suo modello delle grandezze ultime dalla teoria dell'Esauzione, in cui quantità variabili non raggiungono mai i loro limiti.

Ad esempio, il cerchio è la grandezza ultima di una sequenza di poligoni circoscritti ma nessuno di questi poligoni ha area uguale a quella del cerchio.

E in generale, quando una figura curvilinea è "esaurita" da sequenze di figure rettilinee, le approssimazioni non saranno mai alla fine uguali alla figura curvilinea a cui si avvicinano.

La definizione di grandezze ultime lo porta a dimostrare per assurdo la proposizione fondamentale secondo cui quando delle grandezze variabili rimangono in un rapporto costante tra loro, le loro grandezze ultime saranno nello stesso rapporto.

Oggi esprimeremmo tale proposizione come segue: Se $x \rightarrow B$ e $y \rightarrow C$ e $\frac{x}{y} = k$, con k costante, allora $\frac{B}{C} = k$.

3.2 La proposta di C.Maclaurin

Colin Maclaurin (1698-1746) era il più importante matematico britannico tra gli anni 1730 e 1740.

Tra le risposte all'Analista di Berkeley, il suo *Treatise of Fluxions* è sicuramente l'opera matematica più sofisticata.

Certamente la motivazione iniziale di Maclaurin nello scrivere il Trattato era quella di contestare le accuse di Berkeley, come egli stesso ammette all'inizio della Prefazione:

"A Letter published in the Year 1734, under the title of the Analyst, first gave Occasion to the ensuing Treatise".[12]

Tuttavia Maclaurin non risponde semplicemente a Berkeley, ma estende anche il Calcolo col fine di risolvere nuovi problemi.

Similmente a Robins, riferendosi ancora una volta al *De Quadratura*, Maclaurin prende in considerazione la concezione cinematica delle grandezze e cerca di ricondurre i metodi newtoniani al metodo classico dell'Esaustione, di cui nell'introduzione fa un'approfondita analisi.

In primo luogo, Maclaurin considera il problema dei concetti fondanti del Calcolo:

"The mathematical sciences treat of the relations of quantities to each other, and of all their affections that can be subjected to rule or measure [...]."

We enquire into the relations of things, rather than their inward essences, in these sciences. Because we may have a clear conception of that which is the foundation of a relation, without having a perfect or adequate idea of the thing it is attributed to, our ideas of relations are often clearer and more distinct than of the things to which they belong; and to this we may ascribe in some measure the peculiar evidence of the mathematics.”[12]

Riassumendo, Maclaurin afferma che le scienze matematiche non trattano tanto dell'essenza degli oggetti quanto piuttosto delle relazioni tra essi; in tale modo egli getta le basi del suo proposito di riformulare le argomentazioni newtoniane, aggirando le critiche berkeleyane sui concetti basilari del Calcolo.

Il problema, dunque, si sposta dal dover dare una definizione di velocità istantanea, che per quanto dice non è una questione matematica quanto filosofica, a quello di studiare le relazioni fra misure della velocità stessa, esprimibili geometricamente tramite segmenti o superfici.

La velocità istantanea di un corpo in moto uniforme è misurata dalla distanza che esso percorre in un'unità di tempo dato.

Invece, secondo Maclaurin, se il corpo ha un moto non uniforme, la sua velocità istantanea può essere misurata soltanto in relazione a un ulteriore movimento uniforme.

Quando si ha a che fare con un moto non uniforme è necessario quindi trovare un altro moto che sia invece uniforme, la cui velocità costante corrisponda alla velocità istantanea del movimento non uniforme in questione:

”In these cases Will the velocity at any term of the time is accurately measured by the Space that would be described in a giveg, time, if the motion was to be continued uniformly from that term. ”[12]

Dal punto di vista di Maclaurin questa non è una definizione di velocità istantanea, piuttosto è una proposta per associare operativamente la misura di una velocità costante di un moto uniforme a quella istantanea di un moto non uniforme. [14]

Ciò sarà sufficiente per gli scopi di Maclaurin poiché egli non avrà mai bisogno di misurare indipendentemente le velocità istantanee.

Con queste premesse, Maclaurin presenta quattro assiomi intuitivamente evidenti riguardanti il moto accelerato e ritardato, a partire dai quali dimostrerà i suoi risultati:

- A.1 : Lo spazio descritto da un moto accelerato, in un dato tempo, è maggiore di quello che, nello stesso tempo, sarebbe stato descritto da un moto che fosse continuato uniformemente come nell'istante iniziale.
- A.2 : Lo spazio descritto da un moto accelerato, in un dato tempo, è minore di quello che, nello stesso tempo, sarebbe stato descritto da un moto uniforme, uguale a quello dell'istante finale.
- A.3 : Lo spazio descritto da un moto ritardato, in un dato tempo, è minore di quello che, nello stesso tempo, sarebbe stato descritto da un moto che fosse continuato uniformemente come nell'istante iniziale.
- A.4: Lo spazio descritto da un moto ritardato, in un dato tempo, è maggiore di quello che, nello stesso tempo, sarebbe stato descritto da un moto uniforme uguale a quello dell'istante finale.

Per dare un'idea dei procedimenti utilizzati da Maclaurin, ci occuperemo del problema di determinare, preso un punto che si muove di moto uniforme, la misura della velocità istantanea (flussione) di un altro punto il cui moto è in una qualche relazione geometrica con il movimento del primo punto.

In particolare studiamo la dimostrazione della seguente proposizione:

Proposizione 3.2.1. *In riferimento alla figura 3.2, sia tET la tangente alla curva FES in E . Le flussioni dell'ascissa AD , dell'ordinata DE e della curva FE saranno misurate rispettivamente dai segmenti DG , IT e ET .*

Dimostrazione. Assunto che il moto dell'ascissa si muova di moto uniforme, la prima affermazione, ovvero che la flussione di AD sia misurata da DG , fissa semplicemente il rapporto che sussiste tra spazio percorso e tempo impiegato a percorrerlo.

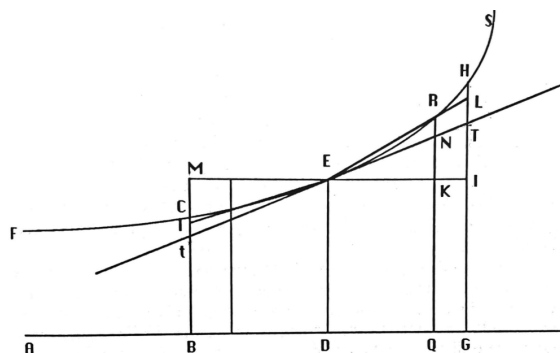


Figura 3.2

Ciò che dunque bisogna dimostrare è che se DG è la misura della flussione dell'ascissa AD , allora IT e ET misurano rispettivamente la flussione dell'ordinata DE e della curva FE .

Dimostreremo soltanto la prima implicazione poiché la seconda deriva dagli assiomi in modo del tutto simile alla prima.

Maclaurin divide la dimostrazione in due parti:

- la curva CEH sia convessa;
- la curva CEH sia concava.

Anche questa volta prenderemo in esame solo il primo dei due casi dato che la dimostrazione del secondo è analoga.

Prima di procedere, premettiamo il seguente lemma che è il settimo dell'opera di Maclaurin:

Lemma 3.2.2 (VII). *Se l'arco di curva è convesso e l'ascissa cresce uniformemente allora l'ordinata cresce di moto accelerato.*

Dimostrazione. Riferiamoci ancora alla figura 3.2.

Assumendo che $BD=DG$ siano segmenti descritti in tempi uguali e successivi dal moto uniforme che descrive l'ascissa, allora $Mt = IT$ da cui segue, per definizione di convessità, che $IH > MC$. Cosa che dimostra il lemma, infatti siamo giunti a dire che gli incrementi dell'ordinata generati in due

tempi uguali successivi sono diversi tra loro e in particolare il primo è minore del secondo, quindi il movimento è accelerato. \square

Proseguiamo ora con la nostra dimostrazione, considerando un punto che si muova sulla curva.

Immaginando, in primo luogo, che il movimento compiuto dall'ordinata del punto nel tempo in cui l'ascissa copre lo spazio DG sia uniforme di velocità uguale alla velocità che il moto accelerato effettivo ha nell'istante iniziale di quel tempo. Allora per l'assioma A_1 l'incremento descritto dal moto uniforme ipotetico appena descritto sarà minore di quello realmente effettuato, cioè

$$IT < IH. \quad (3.26)$$

Immaginiamo poi che il movimento compiuto dall'ordinata nel tempo in cui l'ascissa del punto copre la distanza BD sia uniforme di velocità uguale a quella che l'ordinata che si muove di moto accelerato ha effettivamente nell'istante finale di quel tempo. Di conseguenza, per l'assioma A_2 l'incremento acquisito dal moto ipotetico sarà maggiore da quello effettuato realmente, cioè

$$Mt > CM. \quad (3.27)$$

Tutto questo potremmo tradurlo in questi termini:

Sia $P(x(t), y(t))$ il punto che si muove sulla curva in funzione del tempo.

L'ascissa è determinata dalla legge del moto uniforme:

$$x(t) = v(t) \cdot t \quad (3.28)$$

L'ordinata invece seguirà la seguente legge del moto uniformemente accelerato:

$$\begin{cases} y(t) = y(t_0) + v(t_0) \cdot t + \frac{1}{2}a(t) \cdot t^2 \\ v = v(t_0) + a(t) \cdot t, \end{cases} \quad (3.29)$$

dove t_0 rappresenta l'istante iniziale del moto.

Sia nel primo che nel secondo caso immaginiamo che sull'ordinata avvenga un moto uniforme descritto dalla seguente legge

$$y_1(t) = [a(t_D) \cdot t_D] \cdot t. \quad (3.30)$$

Allora per A_1

$$IT = |y_1(t_G) - y_1(t_D)| < |y(t_G) - y(t_D)| = IH, \quad (3.31)$$

da A_2

$$Mt = |y_1(t_D) - y_1(t_B)| > |y(t_D) - y(t_B)| = CM. \quad (3.32)$$

A questo punto poichè gli intervalli di tempo che abbiamo considerato sono uguali e successivi, gli spazi IT e Mt , i quali sarebbero descritti da movimenti uniformi, sono uguali tra loro e, per quanto detto sulla concezione di Maclaurin di velocità di un moto non uniforme, misurano entrambe la velocità istantanea del moto accelerato effettivo che descrive l'ordinata.

Denotando con x questa quantità, abbiamo trovato che

$$CM < x < IH \quad (3.33)$$

Vogliamo mostrare che $x = IT (= Mt)$ facendo vedere che sia l'ipotesi

$$x > IT \quad (3.34)$$

che quella

$$x < IT \quad (3.35)$$

conducono ad una contraddizione.

Supponiamo che valga la disuguaglianza 3.34

Allora $IT < x < IH$.

Sia $x = IL$, con L un punto tra T e H .

Si congiunga E con L .

Dalla definizione classica di tangente (retta per cui tra essa e la curva non passa nessun'altra retta) e dalla convessità della curva segue che EL taglia la curva in un punto R compreso tra E e H .

Poichè i triangoli EIL e EKR sono simili tra loro, se il movimento dell'ordinata del punto nel tempo in cui l'ascissa acquista l'incremento DQ fosse uniforme, l'incremento sull'ordinata sarebbe KR .

Ma KR è anche l'incremento effettivo acquisito dall'ordinata secondo il moto accelerato che la descrive durante quel tempo.

Dunque da A_1

$$KR > KR, \tag{3.36}$$

il che è assurdo.

Analogamente si deduce che la seconda disuguaglianza porta ad una contraddizione. \square

Notiamo che questa dimostrazione non utilizza gli infinitesimi ma soltanto i quattro assiomi e la definizione di concavità di una curva e di tangente data dagli antichi.

Capitolo 4

Conclusioni

Nel titolo abbiamo voluto sottolineare che ad essere sotto accusa è la definizione di flussione, o meglio, le definizioni di flussione.

Sembra infatti che Newton non si desse pace. Dal 1669 al 1687 il suo approccio al Calcolo infinitesimale cambia continuamente. Come abbiamo mostrato, a partire dal *De Analysis*, passando per il *De Methodis*, fino al *De Quadratura*, Newton abbandona l'idea di considerare le grandezze matematiche come costituite da parti infinitesime per avvicinarsi a un'idea più cinematica, secondo cui esse vengono generate da un moto continuo, fino a giungere alla teoria delle prime e ultime ragioni nei *Principia*. Non a caso egli decide di non pubblicare nulla di sistematico sulla teoria delle flussioni fino al 1704, quasi fosse alla ricerca di quel rigore che permette di avere la certezza di non ingannarsi.

Seppur Berkeley avesse ammesso il formalismo algebrico anche in assenza di idee corrispondenti a ciascun segno, egli era un filosofo empirista e riteneva che la Geometria dovesse riferirsi ad oggetti della realtà.

Sebbene oggi la visione della matematica sia cambiata radicalmente, nell'immaginario collettivo sembra essere ancora vincolata a dover descrivere le leggi del mondo reale. E' probabile che ciò sia dovuto all'approccio scolastico alla materia, che sembra essere rimasto nostalgicamente ancorato al passato. Per questo crediamo sia semplice identificarsi nelle parole di Berkeley. Quan-

te volte a noi, da studenti, è capitato di voler associare le definizioni a certe immagini sensibili?

L'intuizione a cui siamo tanto legati però può ingannare. A questo proposito risultano efficacissime le parole di Poincaré:

“Siamo in una classe quarta; il professore detta: “la circonferenza è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto interno detto centro”. L'alunno diligente scrive questa frase sul quaderno, quello negligente disegna pupazzetti, ma né l'uno né l'altro l'hanno capito. Il professore prende allora il gesso e traccia una circonferenza sulla lavagna. “Ah-pensano i ragazzi-perché non l'ha detto subito; una circonferenza è un tondo, avremmo capito”. È il professore ad avere ragione, con tutta probabilità. La definizione dei suoi studenti non sarebbe servita a niente, perché non avrebbe potuto essere utile in nessuna dimostrazione e soprattutto perché non avrebbe potuto esercitarli alla sana abitudine di analizzare le proprie idee. Ma sarebbe anche necessario convincerli che essi non capiscono ciò che invece credono di capire, indurli a rendersi conto della rozzezza del loro concetto primitivo e a desiderare da soli che venga perfezionato e dirozzato.”[15, pp.104-105]

Nel corso della tesi abbiamo poi mostrato che molti ragionamenti de *L'Analista* siano infondati. Ma la forza del lavoro di Berkeley non risiede tanto nelle risposte che tenta di dare, quanto nelle domande che pone; il fatto che non riesca sempre a rispondere adeguatamente, non priva le domande della loro importanza.

Anzi, proprio questo fallimento crediamo sia interessante: le sue teorie della compensazione degli errori inizialmente affascinano e convincono; rivelare la circolarità delle sue dimostrazioni è particolarmente istruttivo perché ci fanno comprendere quanto sia semplice cadere in inganno.

Sarebbe utile per chi si avvicina allo studio dell'analisi, al fine di raggiungerne una conoscenza profonda, riattraversare le difficoltà che tormentavano coloro che riflettevano sui fondamenti del calcolo infinitesimale, in modo da creargli l'esigenza di perfezionare la sua idea iniziale.

Solo in questo modo possiamo sperare che si faccia pace con definizioni

controintuitive, e apprezzare come, ad esempio, “*l’idea vaga di continuità che ci deriva dall’intuizione si è risolta in un complicato sistema di disuguaglianze che riguardano numeri interi*”. [15, p.106]

Bibliografia

- [1] Kirsti Andersen, *One of Berkeley's arguments on compensating errors in the calculus*, *Historia Mathematica* 38, 2011, n. 2, 219–231.
- [2] George Berkeley, *The Analyst Or a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician*, Londra, J. Tonson in the Strand, 1734. Nella tesi si è fatto riferimento alla traduzione italiana dell'opera: George Berkeley, *L'Analista: discorso indirizzato ad un matematico infedele*, con commento e traduzione di Mario G. Galli, Firenze, Fondazione Ronchi, 1971.
- [3] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Trento, Mondadori, 2015.
- [4] Guido Castelnuovo, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*, Milano, Feltrinelli, 1962.
- [5] Euclide, *Gli Elementi*, a cura di A. Frajese e L. Maccioni, Torino, UTET, 1970.
- [6] Mariano Giaquinta, *Il calcolo da Leibniz e Newton a Eulero e Lagrange e un po' oltre*, Roma, Edizioni di storia e letteratura, 2014.
- [7] Enrico Giusti, *Dalla Géométrie al Calcolo: il problema delle tangenti e le origini del calcolo infinitesimale*, «*Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*», s. 1,1, 2016, n.3, pp.209-239.
- [8] Enrico Giusti, *Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'antichità al novecento*, Istituti editoriali e poligrafici internazionali, 2007.

- [9] Ivor Grattan-Guinness, *Berkeley's criticism of the calculus as a study in the theory of limits*, Janus 56, 1969, 215-227.
- [10] Douglas M. Jesseph, *Berkeley's philosophy of mathematics*, Chicago, The University of Chicago Press, 1993.
- [11] Morris Kline, *Storia del pensiero matematico. Dall'antichità al Settecento*, Torino, Einaudi Editore, 1999.
- [12] Colin Maclaurin, *A Treatise of Fluxions*, Edimburgo, W. and T. Ruddimans, 1742.
- [13] Luigi Neri, *George Berkeley: filosofia e critica dei linguaggi scientifici*, Bologna, CLUEB, 1991.
- [14] Marco Panza, *La statua di Fidia. Analisi filosofica di una teoria matematica: il calcolo delle flussioni*, Milano, Edizioni unicopli, 1989.
- [15] Jules-Henri Poincaré, *Scienza e metodo*, Torino, Einaudi, 1999.
- [16] Benjamin Robins, *A Discourse Concerning the Nature and Certainty of Sir Isaac Newton's Method of Fluxions and Prime and Ultimate Ratios*, Londra, W. Innys and M. Mamby, 1735.