Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Alla scoperta di Pi Greco: introdurre la storia della matematica nella pratica d'aula

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Prof.ssa
Alessia Cattabriga

Correlatore:
Chiar.mo Prof.
Salvatore Coen

Correlatore:
Prof.ssa
Maria Alboni

Presentata da:
Maria Laura Solmi

VI Sessione
Anno Accademico 2020-2021

Alle persone
che si sono perse
per ritrovarsi

Indice

Introduzione

Finito l'esame di maturità il presidente di commissione mi chiese su quale corso di laurea ricadesse la mia scelta ed io piena di entusiasmo risposi: "matematica". Dopo le prime lezioni però mi sono dovuta scontrare con un enorme gigante senza avere le armi giuste per affrontarlo. Forse l'ingenuità dell'età o forse la mia poca informazione su come fosse questo corso di laurea ha fatto sì che mi facessi sopraffare da tutto ciò, portando a galla domande profonde che, prima di quel momento, non mi ero mai posta:

Perché devo studiare matematica?
A cosa serve nella mia vita?
Perché queste inutili costruzioni artificiose?

Senza che nemmeno me ne accorgessi ero arrivata a pormi le stesse domande che si erano posti, prima di me, alcuni miei compagni delle superiori, domande che inizialmente credevo inutili e senza senso: per me la matematica non aveva bisogno di spiegazioni o di ragioni d'essere, era bella così com'era e così com'era mi bastava. Persa questa visione, il non comprendere ed il non avere risposte hanno reso lo studio di questa materia pesante, quasi uno sforzo inutile. Avvilita, ma non sconfitta, ho scelto il percorso magistrale in *Didattica della matematica* e, studiando la storia di questa materia, qualcosa si è risolto in me. Improvvisamente le costruzioni, che credevo inutili ed artificiose, acquistavano un senso; le teorie matematiche avevano perché e ragione d'essere, ma soprattutto io non ero più sola nelle mie difficoltà: grandi matematici erano stati investiti dai miei stessi dubbi, che ora, in parte, vedevo dissolversi. Avevo trovato risposte là dove non avrei mai pensato di cercarle, in una disciplina che non avrei mai pensato mi potesse piacere: la storia. Analizzare il contesto storico, lo sviluppo, la società, le grandi menti dietro alla matematica hanno reso la materia concreta, semplicemente e meravigliosamente umana, umana come me e il lettore di questa tesi. Studiando poi in didattica della matematica il *justification problem*, mi sono sentita meno sola e meno sbagliata: non era solo un problema mio e la mia non era una scelta sbagliata, era soltanto una scelta non giustificata. Ho deciso di prendere le mie difficoltà e farne qualcosa di bello, condividerle affinché altri studenti possano non sentirsi soli e smarriti in un mondo, spesso percepito erroneamente distante e inospitale. Ho progettato un percorso scolastico nel quale i ragazzi che si pongono le mie stesse domande possano trovare alcune risposte; mi è sembrato il modo migliore di far rinascere sotto una nuova luce il mio percorso universitario.

In questa tesi si parlerà di didattica della matematica attraverso la storia della disciplina, perché chi scrive ha provato sulla propria pelle la frustrazione di studiare matematica senza avere delle risposte. Dopo l'idea iniziale, per mettere a punto un progetto sulla storia della matematica, sono subito sorte domande su cui riflettere ed a cui era necessario dare importanza.

Quale storia? Quanta storia? Di che tipo?

La storia non può essere inserita in ogni lezione di matematica delle superiori[1] e deve essere ben contestualizzata e ponderata, altrimenti si rischierebbe di fare una lezione di storia della matematica e non di matematica. L'insegnante che vuole introdurre la dimensione storica nell'insegnamento della matematica non deve però cadere nella trappola di ridurre la storia a semplici aneddoti[2], ma integrarla nel contesto culturale nella quale il concetto si è sviluppato, prestando attenzione a chiarire, a se stesso ed ai suoi alunni, che non bisogna rileggere la storia con i nostri occhi, ma cercare di indagare ed immedesimarsi con il contesto socio-culturale dell'epoca trattata. Ovviamente un totale distacco da una rilettura a posteriori è impossibile.

Così in questa tesi ci si concentrerà sulla storia di un numero, un numero che in matematica sembra apparire ovunque, un numero che fin dall'antichità ha affascinato i più illustri matematici, il numero legato alla forma più familiare all'uomo primitivo: il cerchio e la sua costante Pi Greco. Ingenuamente Pi Greco si studia solo quando si affronta il cerchio alle superiori e poco altro, ma il suo potere e fascino è qualcosa che l'uomo ha rincorso per secoli. Una delle poche costanti matematiche, numero irrazionale e trascendente, la sua essenza sembra quasi essere inafferrabile. Lo stupore nel trovarlo un po' ovunque, anche in formule alle quali non si sarebbe mai pensato, ha dato inizio a questo progetto di tesi.

> Un'altra cosa che mio padre mi disse - e non riesco a spiegarla abbastanza, perché era più un'emozione che una storia - era che il rapporto tra la circonferenza e il diametro di tutti i cerchi era sempre lo stesso indipendentemente dalle dimensioni. Questo non mi sembrava troppo strano, ma il rapporto aveva alcune proprietà eccezionali. Quello era un numero meraviglioso, un numero profondo, pi greco. C'era un mistero in questo numero che non capivo da giovane, ma questa era una cosa grande, e come risultato, ho cercato pi greco dappertutto.[...] Facevo radio e aggeggi. A poco a poco, attraverso libri e manuali, ho iniziato a scoprire che c'erano formule applicabili all'elettricità, che riguardavano correnti elettriche, fili, resistenze, e così via. Un giorno, guardando le formule in un libro o in un altro ho scoperto una formula per la frequenza di un circuito risonante, che era: la frequenza è data dall'inverso di 2 pi greco per radice quadrata di L moltiplicato C, dove L è l'induttanza e C la capacità del circuito. C'era pi greco, ma dove era il cerchio? Ridete se volete, ma ero molto serio allora. Pi greco era una cosa che aveva a che fare con i cerchi, ed ecco adesso che pi greco usciva fuori da un circuito elettrico.

[1] Come si sottolinea nella Sezione 1.2 la storia può suggerire la sequenza degli argomenti all'insegnante e quindi potrebbe entrare di diritto in ogni lezione in modo nascosto, secondo la sensibilità del docente, ma non è questo quello che si vuole indagare e sostenere in questa tesi.

[2] Quest'affermazione non vuole demonizzare l'introduzione di aneddoti durante la lezione, che anzi possono essere un trucco per alleggerire il discorso. Semplicemente lo scopo del progetto di tesi è quello dell'introduzione di tutto il contesto storico e culturale, dunque la semplificazione ad aneddoti non risulta adeguata agli scopi di questa tesi.

> Dove era il cerchio? Quelli di voi che ridevano, sanno mica dirmi perché viene fuori pi greco? [63]

Quindi si è scelto Pi Greco, definito geometricamente come il rapporto tra la lunghezza della circonferenza ed il diametro o come il rapporto tra l'area ed il raggio al quadrato in ogni cerchio, come punto di partenza per un progetto altrettanto arduo e pieno di aspettative. Se anche solo uno dei dubbi di anche solo un ragazzo verrà risolto e giustificato, questa tesi non sarà stata vana, questo lavoro avrà raggiunto il suo scopo.

Se da questa esperienza posso dire di aver capito qualcosa sulla matematica è che questa materia, senza la sua storia, è un magnifico corpo senz'anima.

La tesi è stata divisa in sei capitoli, il cui contenuto è descritto di seguito. Nel primo capitolo si espongono le teorie a supporto dell'introduzione della storia della matematica nella didattica di questa materia, indagando gli argomenti a favore del *perché* introdurre la storia e di *come* introdurla. Nel secondo capitolo, dato che si è scelto Pi Greco come filo conduttore del progetto di tesi, si espone la storia antica di questo numero, mescolando le scoperte riguardanti la costante e la storia generale delle popolazioni arcaiche mondiali prese in considerazione. Nel terzo capitolo si struttura la progettazione teorica del percorso *Alla scoperta di Pi Greco*, mentre nel quarto capitolo se ne descrive la realizzazione in classe. Nel quinto capitolo sono analizzati i questionari, iniziale e finale, sottoposti agli studenti e l'intervista alla docente della classe, traendo conclusioni qualitative sul progetto. Si è poi deciso di inserire un sesto capitolo in cui vengono esposti i possibili sviluppi del progetto.

Capitolo 1

Considerazioni didattiche

La scoperta (inventio) consiste nel mettere colui che deve apprendere nelle stesse condizioni di colui che per primo ha effettuato la costruzione del concetto (scoperta).
Tommaso D'Acquino

In questa tesi si vuole indagare come l'introduzione della storia della matematica nell'insegnamento della materia stessa possa aiutare, si auspica, lo studente ad apprendere più facilmente i concetti matematici. Inoltre grazie alla storia della matematica, come sottolineato anche dalle Indicazioni Nazionali, lo studente può immergersi e constatare l'evoluzione della materia ed il contesto socio-culturale in cui si è sviluppata. La storia deve essere un tramite alla costruzione personale del sapere dello studente, una nuova lente attraverso cui osservare la disciplina, per guardare da un altro punto di vista i concetti, costruirli ed apprenderli. Inizialmente, come sostiene Barbin [25], l'introduzione della storia può creare disorientamento (*dépaysement*) nello studente, che non è abituato a questo tipo di introduzione dei concetti matematici. Questo sentimento, solamente iniziale, permette di mettere in discussione le proprie percezioni sulla materia, rendendo estraneo ciò che è sempre stato familiare. Il superamento di questo stato d'animo avviene mediante il riposizionamento e l'orientamento. La storia permette infatti di riorganizzare e riposizionare le proprie idee e concezioni sulla natura degli oggetti matematici, sull'evoluzione della materia e sui processi costruttivi su cui essa si basa.

In questo primo capitolo si analizzeranno le principali teorie a supporto dell'introduzione della storia della matematica nella pratica d'aula, rispondendo ai *perché* ed ai *come* questo approccio possa essere integrato nella scuola.

1.1 Il punto di partenza: *justification problem*

Quante volte un insegnante sente dai suoi alunni le domande:

> "Perché devo studiare matematica?
> A cosa serve nella mia vita?
> Non andrò mai dal salumiere a chiedere $\sqrt{2}$ etti di prosciutto"

L'alunno, non trovando una giustificazione al dover studiare questa materia, non riesce nemmeno a trovare la motivazione per farlo. Infatti se queste domande non trovano una risposta, che sia da parte dell'insegnante o venga dall'alunno stesso, lo studente non capisce le finalità e l'utilità di quello che deve studiare rendendo più difficile e pesante farlo.

Il *justification problem* nasce nel 2000 all'interno del KOM Project (acronimo danese: competenze e apprendimento della matematica) ad opera del ricercatore di *mathematics education*, Morgen Niss. Il progetto, promosso dal Ministero dell'Educazione danese, nasce dall'identificazione di alcune problematiche e sfide educative per l'insegnamento della matematica, in particolare si identifica il *justification problem*, ovvero la necessità di giustificare il senso dell'educazione matematica per tutti. Capire quale sia una possibile risposta al *justification problem* non è affatto semplice. Gli insegnanti solitamente fanno riferimento a due aspetti quando provano a giustificare lo studio della matematica: il fatto che la matematica insegna a ragionare ed il fatto che essa è presente in molti aspetti della vita quotidiana. Il ruolo della matematica nella società di oggi è innegabile, ma a livello di risposta al *justification problem* non basta. Niss sottolinea come la risposta a questo problema debba essere data su due livelli:

- Il primo riguarda il livello sociale giustificando perché la matematica deve essere per tutti e perché la società debba investire per garantirne l'insegnamento.
- Il secondo livello riguarda l'individualità e quindi il giustificare al singolo perché debba studiare matematica in tutto il suo percorso scolastico, indipendentemente dalle proprie aspirazioni future.

Il progetto didattico di questa tesi si concentra maggiormente sulla risposta individuale in accordo con Shlomo Vinner [62], il quale ritiene che il *justification problem* si debba affrontare trattando il livello individuale, spiegando cosa lo studio della matematica può dare al singolo alunno, in quanto la presenza della matematica nella società non può essere una giustificazione sufficientemente convincente. Inoltre risulta importante non soltanto rispondere al *justification problem*, ma anche capire quale sia la strategia migliore per proporre una possibile risposta e quindi interrogarsi su quale didattica scegliere all'atto pratico del processo d'insegnamento/apprendimento. Ovviamente non esistono risposte univoche e definitive a queste domande che gli alunni si pongono. Forse non sarebbe nemmeno giusto cercarne una, visto che ogni individuo è unico ed ha una visione personale del mondo che lo circonda e dell'importanza che può avere la matematica nella sua vita. Infatti le classiche risposte date da molti insegnanti come: "la matematica serve a tutto" oppure "il mondo è matematica" o anche "il computer è matematica", non sono vere e proprie risposte e sembrano alludere che uno studente che non comprenda questa importanza non sia in grado di fare matematica, provocando in lui frustrazione e rifiuto. Quello che si può fare è tentare di presentare strategie differenti di insegnamento, che mettano in luce aspetti diversi della materia agli alunni facendo in modo che in un certo senso trovino la loro personale giustificazione.

Nell'ambito del *justification problem* ha senso parlare di quella che viene definita come competenza matematica. Il termine *competenza* è ormai incluso nella terminologia educativa in tutto il mondo, in particolare in Europa a seguito della strategia Lisbona. Infatti il 23 e 24 Marzo del 2000, stesso anno di nascita del KOM Project, il Consiglio europeo tenne a Lisbona, da cui l'appellativo strategia Lisbona, una sessione dedicata ai temi sociali ed economici dell'Unione Europea per rendere l'Europa:

> l'economia basata sulla conoscenza più competitiva e dinamica del mondo, in grado di realizzare una crescita economica sostenibile con nuovi e migliori posti di lavoro e una maggiore coesione sociale. [2, p.11]

Il raggiungimento di questo risultato richiese la definizione di una strategia globale, riconoscendo il ruolo determinante svolto dall'istruzione. A seguito di ciò l'Unione Europea ha approvato, attraverso diverse sedute, una *Raccomandazione del consiglio relativa alle competenze chiave per l'apprendimento permanente* [21], nella quale vengono individuate le competenze chiave di cittadinanza che tutti i cittadini dovrebbero possedere e che costituiscono la base per l'apprendimento duraturo. Tra le competenze chiave compare la *competenza matematica e competenza in scienze, tecnologie e ingegneria* che nel documento del 2018 viene così descritta:

> La competenza matematica è la capacità di sviluppare e applicare il pensiero e la comprensione matematici per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane. Partendo da una solida padronanza della competenza aritmetico-matematica, l'accento è posto sugli aspetti del processo e dell'attività oltre che sulla conoscenza. La competenza matematica comporta, a differenti livelli, la capacità di usare modelli matematici di pensiero e di presentazione (formule, modelli, costrutti, grafici, diagrammi) e la disponibilità a farlo.
>
> *Conoscenze, abilità e atteggiamenti essenziali legati a tale competenza*
>
> La conoscenza necessaria in campo matematico comprende una solida conoscenza dei numeri, delle misure e delle strutture, delle operazioni fondamentali e delle presentazioni matematiche di base, la comprensione dei termini e dei concetti matematici e la consapevolezza dei quesiti cui la matematica può fornire una risposta. [21, p.C189/9]

Tale formulazione della competenza matematica richiama fortemente quella proposta da Niss nel 2003:

> La competenza matematica (*mathematical literacy*) è l'abilità di capire, giudicare, fare e usare matematica in una varietà di contesti e situazioni (intra ed extra matematici) in cui la matematica gioca o potrebbe giocare un ruolo. Prerequisiti necessari ma non sufficienti per avere competenza matematica sono un certo numero di conoscenze di base e abilità tecniche. [48, p.7]

Il KOM Project inoltre individua otto sotto-competenze matematiche suddivise in due macro gruppi:

1. Porre e rispondere a domande in e con la matematica.
2. Padroneggiare gli strumenti ed il linguaggio matematico.

All'interno del primo gruppo si trovano quattro competenze:

- Pensare matematicamente.
- Problem solving e problem posing.
- Modelizzare.
- Ragionare matematicamente.

Mentre nel secondo gruppo troviamo le seguenti quattro competenze:

- Rappresentare oggetti e situazioni matematiche.
- Maneggiare i simboli ed il formalismo matematico.
- Comunicare in, con e riguardo la matematica.
- Fare uso di strumenti e sussidi.

Secondo Niss, però, il lavoro prodotto all'interno del progetto non può essere considerato una vera e propria risposta. Per questo in questa tesi si cerca di dare una possibile risposta al *justification problem* attraverso l'uso della storia della matematica nella pratica d'aula. Chi scrive pensa che umanizzare la matematica attraverso la sua storia, ripercorrerne i passi evolutivi e gli sviluppi, possa aiutare gli alunni a trovare una giustificazione allo studio di questa materia.

1.2 *Come* e *perché* la storia nella pratica d'aula

La matematica è spesso considerata una raccolta di assiomi, teoremi e dimostrazioni organizzati in una struttura formale e deduttiva. Questa concezione presuppone che la chiarezza logica con cui si presenta tale struttura sia sufficiente per comprendere la materia. In una tale visione, la disciplina sembra svilupparsi attraverso un accumulo più o meno lineare di nuovi risultati, ma ciò è solamente una sfaccettatura della conoscenza matematica. Risulta altrettanto importante sottolineare il processo di fare matematica, soprattutto dal punto di vista didattico. In questo processo si trovano le concezioni sbagliate, la possibilità di commettere errori, l'importanza dei dubbi, la capacità di retrocedere per progredire nello sviluppo e nella comprensione della matematica. La conoscenza matematica non è composta solamente dalle teorie deduttivamente strutturate, ma anche dalle procedure che hanno sviluppato tali teorie portandole ad essere comprese. Imparare matematica non significa solamente acquisire competenza e familiarità con i concetti ed il simbolismo ad essi associato considerando i risultati come prodotti finiti, ma anche comprendere le motivazioni, i problemi, le domande alla base di tali concetti per collegare conoscenze nuove e vecchie ampliando i quadri concettuali preesistenti nell'alunno. L'insegnamento della matematica diventa quindi più di una semplice esposizioni di concetti ben organizzati e l'introduzione della dimensione storica può assolvere questo compito svolgendo un ruolo importante nell'educazione. Matematica e storia sembrano collocarsi ai poli opposti delle conoscenze umane, tant'è che spesso si propone la categorizzazione della materie scolastiche in umanistiche e scientifiche. In questa tesi, come sosteneva anche Vailati [28], si cercherà di ricucire lo strappo creatosi tra le due nel tempo. La scelta di introdurre la storia della matematica deve essere ben contestualizzata e ponderata da parte dell'insegnante. Inoltre, richiede l'assunzione di posizioni epistemologiche importanti ed impegnative. Vista la tesi che si vuole sostenere, cioè che l'introduzione della storia della matematica nella didattica possa rispondere al *justification problem*, risulta necessario che l'insegnante abbia ben chiaro *perché* e *come* introdurre la dimensione storica nella pratica d'aula. L'introduzione della storia comporta la ricerca del raggiungimento anche di altri obbiettivi come: umanizzare la matematica, il superamento della visione di questa materia come a-temporale ed a-storica, la consapevolezza dell'evoluzione della disciplina ed anche il suscitare, per essa, curiosità. In accordo con F. Speranza e L. Grugnetti [34] nella formazione, didattica, storia ed epistemologia della matematica devono costituire un circolo virtuoso nel quale ognuna di esse giustifica e rafforza le altre. Per questo non si può prescindere dal considerare la storia della matematica durante l'insegnamento. La storia offre la possibilità di una riflessione metacognitiva e permette di ottenere un'approfondita conoscenza socio-culturale di un particolare periodo storico.

Leggendo la letteratura riguardante l'utilizzo della storia della matematica nell'insegnamento si trovano vari argomenti a favore del *perché* introdurre la storia e di *come* introdurla. Per rendere l'analisi più ordinata si seguirà la categorizzazione proposta da Jankvist [37], inserendo al suo interno anche altre argomentazioni di altri autori ritenute importanti. L'autore individua tre domande fondamentali alle quali risulta necessario rispondere quando si vuole introdurre la storia della matematica nell'insegnamento/apprendimento:

1. Perché la storia potrebbe o dovrebbe essere utilizzata nell'apprendimento/insegnamento della matematica?

2. Come la storia potrebbe o dovrebbe essere utilizzata nel processo di apprendimento/insegnamento?

3. In che modo gli argomenti per utilizzare la storia e gli approcci per farlo sono collegati?

Jankvist effettua prima l'analisi dei *perché* e dei *come* distinguendoli per poi, attraverso l'ultima domanda, riunirli e considerare le loro connessioni, dato che spesso un come condiziona o presuppone un perché.

Prima di sviscerare gli argomenti a favore dell'introduzione della storia è necessario riassumere le obiezioni, le difficoltà e le perplessità riguardanti questo approccio che sono sorte nel tempo. Gli argomento contro l'introduzione della storia vengono suddivisi da Tzanakis e Arcavi, nel settimo capitolo dello studio dell'ICMI [22], in due categorie di difficoltà: filosofiche e pratiche. Alcune delle obiezioni di tipo filosofico sono:

a. La storia non è matematica. Per poter insegnare la storia è necessaria prima la conoscenza della matematica.

b. La storia può creare confusione invece che agevolare l'apprendimento.

c. Molti studenti non amano la storia, introdurla nella matematica potrebbe essere controproducente.

Mentre tra le obiezioni pratiche si trovano:

d. La mancanza di tempo per introdurre la storia.

e. La mancanza di esperienza da parte dell'insegnate.

f. La mancanza di risorse facilmente reperibili per l'insegnante che vuole introdurre la dimensione storica.

g. La mancanza di una valutazione quantitativa riguardo l'integrazione della storia.

Analizzando i perché relativi all'introduzione della storia nel paragrafo successivo ci si occuperà delle possibili risposte alle obiezioni citate, facendovi riferimento tramite la loro lettera.

1.2.1 *Perché* utilizzare la storia nell'insegnamento

Jankvist [37] per effettuare un'analisi sistematica individua due categorie di argomenti a supporto dell'introduzione della storia. Si è deciso di tenere questa categorizzazione perché significativa, ma si introducono non solo gli argomenti proposti dall'autore.

1. La storia come strumento per facilitare l'apprendimento/insegnamento.

2. La storia come obbiettivo dell'apprendimento/insegnamento.

Gli argomenti a supporto della storia come strumento riguardano sia l'apprendimento degli studenti sia la formazione dei docenti.

Un primo gruppo di argomenti facenti parte di questa categoria riguarda l'apprendimento della matematica [22]. Secondo Tzanakis ed Arcavi la dimensione storica comporta un guadagno per l'alunno e per l'insegnante. Solitamente la matematica viene presentata come un corpus di conoscenze organizzate deduttivamente, ma le questioni ed i problemi che hanno dato origine a tali conoscenze, così come anche gli errori commessi lungo la strada, rimangono nascosti agli occhi degli studenti, che quindi pensano che le teorie siano nate così come vengono presentate. La dimensione storica distrugge la gelida bellezza della matematica assiomaticamente sistemata introducendo il calore umano delle scoperte, degli errori, dei dubbi, delle motivazioni e dei fenomeni che hanno reso necessaria l'introduzione di un particolare concetto matematico. Attraverso la sua storia la matematica diventa un soggetto umano in evoluzione e non più un sistema rigido di argomenti. L'introduzione della componente storica cambia la visione che gli studenti spesso hanno della matematica; non più una materia piovuta dal cielo, ma fatta da uomini che spesso si sono imbattuti in ostacoli ed hanno compiuto errori, magari gli stessi errori e difficoltà che lo studente incontra.
La componente storica porta, sia lo studente che l'insegnante, a non considerare più la matematica come una sequenza di argomenti scollegati, ma come un'attività in continua evoluzione. L'umanità matematica può dare conforto agli studenti sui concetti che loro stessi faticano a comprendere ed aiutare gli insegnanti a considerare in modo diverso il tempo necessario per costruire tali concetti.
Se ci sono voluti secoli per formulare una teoria o un concetto matematico come lo si conosce oggi, non è forse ragionevole che lo studente abbia bisogno di tempo per apprenderlo appieno? [a,b,d].
Attraverso argomenti storici cambia la modalità di presentazione: si sposta l'attenzione dal prodotto al processo. Insegnando solo il prodotto non si riesce a generare nello studente i processi che hanno portato a nuovi concetti. Come sostiene lo psicologo Richard Skemp solitamente si *"insegna il pensiero, non il pensare matematico"* [17, p.11]. Sicuramente non tutti i dubbi sono fruttuosi per gli studenti, così come è necessaria la risistemazione ordinata della matematica affinché si evitino inutili conti tortuosi, ma la presentazione agli studenti di tali problematiche sorte storicamente può essere positiva. Lo studente, constatando i problemi e le difficoltà sorte nel passato, può essere invogliato a non scoraggiarsi ed a non farsi sopraffare dalle difficoltà, constatandole ed apprezzandole come mattoni del lavoro di matematici del passato. La conoscenza delle questioni da cui nascono i concetti matematici potrebbe anche solo suggerire all'insegnante possibili modi di introduzione di tali conoscenze [a,b].

La storia funge da risorsa fornendo un ampio bacino di domande e problemi che possono essere molto utili non solo per l'apprendimento, ma anche in termini di motivazione, interessamento e coinvolgimento degli studenti. Introducendo problemi e domande di ispirazione storica si può catturare l'interesse dello studente rendendo la storia un'affascinante parte integrante della matematica [a,c,d,g].
Inoltre la storia può avere un valore educativo più generale. Gli alunni che intraprendono progetti orientati sulla storia possono sviluppare la crescita personale e di competenze, non necessariamente associate esclusivamente alla matematica. Ad esempio lo studente che lavora in un progetto su documenti storici può sviluppare la lettura, la ricerca di risorse, l'analisi, l'argomentazione e non solo [g].
La storia offre anche un ponte interdisciplinare tra le materie mettendo in evidenza le connessioni tra ambiti che a prima vista non sembrano correlati, offrendo l'opportunità di comprendere che la ricerca in un settore scientifico non è isolata da attività svolte in altri ambiti [e].
Un'altra teoria molto accreditata negli ultimi anni prende spunto dal concetto di ostacolo epistemologico introdotto da Brousseau a partire dagli anni Settanta; *"l'ostacolo epistemologico può interpretarsi alla stregua di una sistematica difficoltà che gli individui incontrano (e a causa della quale compiono errori) nell'affrontare i problemi"* [5, p.52].
La storia può quindi trovare un uso speciale come strumento cognitivo identificando gli ostacoli epistemologici, dato che certe difficoltà che incontrano gli studenti possono essere ritrovate e raggruppate attorno agli ostacoli attestati dalla storia.

> Gli ostacoli di vera origine epistemologica sono quelli ai quali non si può ne si deve sfuggire, per il loro ruolo formativo nella conoscenza che si cerca. Si possono trovare nella storia dei concetti stessi. [37, p.238]

Jankvist [37] introduce negli argomenti a supporto della storia come strumento anche quelli evoluzionistici, i quali affermano che non può esserci apprendimento della matematica senza storia. Uno degli argomenti evoluzionistici viene identificato come ricapitolazione o principio storico-genetico. L'idea si basa sulla legge biogenetica di Ernest Haechel secondo la quale *l'ontogenesi ricapitola la filogenesi* [3], ovvero lo sviluppo del singolo individuo riepiloga la storia dell'evoluzione della specie umana. La ricapitolazione quindi sostiene che per imparare la matematica la mente deve passare attraverso le stesse fasi che la materia ha attraversato durante la sua evoluzione, intesa non solo come evoluzione in senso più ampio ma anche come l'evoluzione di un singolo concetto o di una specifica teoria.

Un secondo gruppo di argomenti a supporto della storia come strumento riguarda la formazione degli insegnanti [22]. Il docente studiando lo sviluppo storico della matematica identifica le motivazione alla base dell'introduzione di nuove conoscenze e concetti matematici da cui può prendere spunto per la loro introduzione in classe. Grazie alla storia l'insegnante prende coscienza delle difficoltà riscontrate da matematici. La consapevolezza delle possibili difficoltà diventa essenziale al docente durante la progettazione delle attività didattiche. L'insegnante grazie allo studio della storia è in grado di arricchire il proprio repertorio didattico di spiegazioni, esempi ed approcci alternativi per introdurre concetti e risolvere problemi [a].

Gli argomenti a supporto della storia come obbiettivo riguardano l'introduzione della storia della matematica come scopo in sé, in quanto separare una materia e la sua storia è controproducente. Considerare la storia come obbiettivo non vuole nemmeno dire insegnare la storia della matematica separatamente da essa, ma dare il giusto spazio ed importanza ad entrambe. Gli argomenti che rientrano in questa categoria fanno principalmente riferimento all'evoluzione della disciplina. Quando si considera la storia come obbiettivo, essa non è più uno strumento primario per il miglioramento dell'apprendimento, ma si può ottenere un tale scopo come sottoprodotto di questo approccio.

Un primo gruppo di argomenti riguarda lo sviluppo di opinioni sulla natura della matematica e dell'attività matematica [22]. Attraverso la storia il contenuto matematico può diventare più chiaro. Le domande ed i problemi storicamente importanti rendono più visibile la natura evolutiva della conoscenza matematica e di metaconcetti come rigore, dimostrazione, errore... [c]

> Considerare la storia della matematica come una specie di *laboratorio epistemologico in cui esplorare lo sviluppo della conoscenza matematica.* [51, p.26]

Non solo l'evoluzione del contenuto viene reso visibile agli studenti, ma anche l'evoluzione della forma della materia. Grazie alla storia si è in grado di sottolineare la diversa terminologia, notazione, metodi e modi di rappresentazione che si sono susseguiti nel tempo. Con l'aiuto di documenti storici sia l'insegnante che l'allievo diventano consapevoli dei vantaggi e/o svantaggi delle moderne notazioni ed introduzioni dei vari concetti [b].

Un secondo gruppo di argomenti prende in considerazione la predisposizione affettiva verso la matematica. Spesso questa materia non è amata dagli studenti, questo è dovuto anche alla mancanza di risposte al *justification problem.* Attraverso la visione storica si può sottolineare il valore di persistere con le proprie idee, di tentare di intraprendere strade di indagine, porre domande scomode e cercare di sviluppare modi creativi di fare matematica [b].
Inoltre si riesce a sottolineare come la matematica sia un sistema in evoluzione e non costituito da rigide verità, lo sforzo umano ed intellettuale richiesto, ed i diversi fattori, sia interni che esterni ad essa, che ne determinano l'evoluzione. In particolare si può mostrare che la matematica non è un dato di Dio che deve essere imparato a memoria.

Un terzo gruppo di elementi sostiene che la storia può far apprezzare la matematica come attività culturale comprendendone il valore. Normalmente dalla presentazione fatta in classe l'alunno non percepisce lo sviluppo della materia. Attraverso la storia e l'immersione culturale la visione della matematica cambia: da concatenazione di concetti in sequenza logica a sforzo culturale umano. La storia spinge l'alunno a vedere la matematica nel contesto tecnologico, culturale, scientifico. Attraverso lo studio dettagliato di esempi storici si può comprendere che la matematica è guidata non solo da ragioni utilitaristiche, ma è stata sviluppata anche per se stessa. Inoltre attraverso la componente storica viene sottolineato il ruolo dei fattori culturali e sociali in cui la disciplina si è sviluppata [e].
Ugualmente Radford [5] nella sua impostazione teorica individua l'importanza della storia sostenendo l'approccio socio-culturale. L'autore sostiene che la conoscenza non si produca nel rapporto selettivo tra l'individuo ed il problema da risolvere, ma che venga influenzata anche dalla società e dalla cultura in cui egli è immerso. La costruzione della conoscenza

diventa un processo dialogico in cui l'allievo apprende la matematica assieme ad altri allievi ed all'insegnante in un preciso ed ampio contesto culturale. In questo modo la storia offre la possibilità di una riflessione metacognitiva e viene interpretata in riferimento alle culture passate fornendo la possibilità di una approfondita conoscenza, anche critica, dei contesti socio-culturali delle epoche tratte. La matematica nella sua forma moderna viene principalmente vista come un prodotto della cultura occidentale, ma la storia insegna altro. Gli aspetti culturali possono aiutare gli insegnanti a rivalutare ed ampliare il patrimonio culturale per promuovere la tolleranza ed il rispetto nei confronti di alunni stranieri [c].

Come visto, in questa suddivisione quando la storia viene considerata come strumento si prendono in considerazione i problemi interni alla disciplina, mentre quando la storia viene considerata un obbiettivo ci si focalizza sui meta-problemi.

> [. . .] due livelli di lavoro nell'introduzione della storia nella didattica: uno che potremmo associare a un'immagine "sociale" della matematica e un altro che concerne piuttosto un'immagine "interna" della stessa. Il primo livello si riferisce a quegli interventi mirati a fornire motivazioni allo studio della matematica mediante la contestualizzazione nel sociale . . . Il secondo recupera [. . .] la dimensione culturale della matematica come metodo. [24, p.43]

La divisione non è poi così netta come illustrato, infatti quando i meta-problemi hanno a che fare con lo sviluppo e l'evoluzione la storia diventa non solo un obbiettivo ma anche uno strumento. Per esempio gli argomenti riguardanti la natura della matematica e dell'attività matematica sono stati inseriti in relazione alla storia come obbiettivo, ma se il punto diventa confrontare la matematica antica e quella moderna per guardare come le notazioni antiche fossero prolisse e complicate allora la storia diventa uno strumento per fare ciò. Un altro esempio lo si trova negli argomenti della storia come apprezzamento dello sforzo culturale. Se lo scopo della storia è quello di mostrare agli studenti l'evoluzione della matematica all'interno di diversi contesti culturali la si intende come obbiettivo, mentre se lo scopo della storia è quello di cercare di promuovere negli alunni la comprensione di un concetto facendogli affrontare problemi attraverso diversi approcci, diventa un argomento della storia come strumento. La categorizzazione degli argomenti in questa suddivisione dipende dall'interpretazione con cui si declinano e dalle motivazioni sottostanti alla loro introduzione.

La suddivisione proposta non è la sola che si trova in letteratura e come tale, può essere produttiva per alcuni aspetti, ma non per altri. Un'altra categorizzazione viene proposta da Furinghetti [25] che, partendo dalle esperienze personali realizzate in classe, individua una schema differenziato in base ai materiali utilizzati.

1. Uso della storia per costruire oggetti matematici.

2. Uso della storia per riflettere sulla natura della matematica come processo socio-culturale.

Questa suddivisione può rientrare perfettamente in quella proposta da Jankvist; il primo punto riguarda la storia come strumento mentre il secondo la storia come obbiettivo. Furinghetti sostiene che per la costruzione di oggetti matematici sia molto efficace l'utilizzo di fonti originali, mentre per il secondo punto si possa usare una letteratura più ampia (fonti originali, libri di divulgazione, testi di storia della matematica, fonti secondarie,. . .).

Gli obbiettivi che sono stati scelti per questo progetto di tesi rientrano in entrambe le categorie. Da un lato la storia diventa uno strumento per introdurre concetti matematici come la lunghezza della circonferenza, l'area del cerchio e la costante che li lega, attraverso attività laboratoriali sviluppate su procedimenti basati sulla storia. Inoltre l'introduzione della storia umanizza la matematica e sottolinea le difficoltà riscontrate nei secoli per definire e capire Pi Greco. Dall'altro la storia viene utilizzata come obbiettivo per sottolineare l'evoluzione di contenuto e forma di Pi Greco e come il contesto socio-culturale ha influenzato tale evoluzione, mediante l'utilizzo di documenti storici.

1.2.2 *Come* inserire la storia nell'insegnamento

In accordo con Jankvist [37] la storia può essere integrata sotto varie forme, dalle più piccole alle più grandi in base a quanta storia si vuole introdurre. L'autore individua tre approcci, diversificati dal quantitativo di storia introdotta:

1. Illuminazione
2. Moduli
3. Approcci basati sulla storia

Il primo approccio è quello che viene utilizzato normalmente sia a scuola che nei libri di testo. L'insegnamento viene condito con informazioni storiche in diverse quantità. Si può pensare di introdurre la storia attraverso informazioni di fatti isolati o grazie a frammenti storici. L'insegnante che decide di applicare questo approccio inserirà date, nomi, opere, oppure racconterà aneddoti e storie. Non è questo il caso scelto per questa tesi, in quanto chi scrive è convinta che ridurre la storia ad aneddoti faccia perdere molte delle potenzialità che la storia della matematica può offrire agli studenti, come la possibilità di ricostruzione ed immedesimazione in un contesto storico e culturale passato. Come sottolineato nell'introduzione non si vuole demonizzare l'introduzione della storia della matematica attraverso aneddoti, che possono catturare l'attenzione degli studenti ed alleggerire il discorso, ma non è questo lo scopo riservato alla storia nel progetto di questa tesi.

Nel secondo approccio la storia viene studiata in modo diretto. Si possono strutturare pacchetti storici legati ad un piccolo argomento facente parte del curriculum con relativi materiali, un intero modulo in cui si da spazio anche ad argomenti non strettamente curricolari attraverso libri di testo, fonti originali, progetti degli studenti. . . oppure la storia può costituire l'ossatura del corso. Questo secondo approccio è quello scelto per il progetto di questa tesi. Si è pensato che costituire un modulo fosse il metodo migliore per raggiungere gli obbiettivi che ci si è posti. Inoltre, scegliendo di costituire un modulo si è potuto dedicare tempo all'analisi dei documenti storici che, secondo chi scrive, sono un ottimo modo per far immedesimare e toccare con mano la matematica e la sua storia, facendole interagire per riportarle alla loro unità.

L'ultimo approccio, che si basa sulla storia, riguarda lo studio di questa disciplina in modo indiretto, quindi lo sviluppo storico non è necessariamente discusso apertamente.

La storia suggerisce il modo, sequenza e metodo, per presentare un certo argomento. Un esempio di tale approccio è la genetica indiretta nel senso di Toeplitz [22]. Il metodo genetico indiretto sostiene che non è necessario menzionare esplicitamente i dettagli storici, lo sviluppo storico agisce solamente da linea guida dal quale prendere idee, spunti e suggerimenti per l'introduzione di un concetto matematico. La storia mostra all'insegnante, o all'autore di libri di testi o al progettista di attività, quali aspetti relativi ad un concetto sono stati storicamente riconosciuti e utilizzati prima di altri suggerendo il modo di procedere per l'introduzione di tali concetti rispetto alle moderne riformulazioni deduttive. Scegliendo di introdurre i documenti storici nella pratica d'aula non si è abbracciato questo approccio dato che la storia in questo caso funge da filo conduttore nascosto, più che essere esposta in primo piano agli studenti come è stato fatto nel progetto.

Esattamente come sottolineato nella categorizzazione dei *perché*, anche quella dei *come* non è la sola possibile. Diverse categorizzazioni rispecchiano diverse finalità con cui vengono sottolineati in misura maggiore o minore il tipo di storia utilizzata (fattuale, concettuale, culturale...), la dimensione della storia, i modi in cui gli studenti lavorano con la storia (fogli di lavoro, progetti,...) o i materiali utilizzati (fonti originali, secondarie, libri di storia, ...). Nello studio dell' ICMI [22] vengono individuate tre categorie di *come* introdurre la storia che risultano mescolate ai *perché* e quindi non sono significative come quelle introdotte da Jankvist [37], viene però presentata da Tzanakis e Arcavi una lista di idee ed esempi che si potrebbe considerare una possibile argomentazione sui come.

1. Frammenti storici
2. Progetti di ricerca basati su testi storici
3. Fonti primarie
4. Fogli di lavoro
5. Pacchetti storici
6. Sfruttare gli errori, la concezioni alternative, il cambiamento di prospettiva...
7. Problemi storici
8. Strumenti meccanici
9. Attività matematiche esperienziali
10. Giochi
11. Pellicole ed altri strumenti visivi
12. Esperienze all'aperto
13. Il web

Anche Taznakis ed Arcavi inseriscono tra le idee di implementazione dell'utilizzo della storia in classe le fonti primarie, che in questa tesi verranno discusse ampiamente nel Paragrafo 1.5.

1.2.3 Interrelazione tra i *come* ed i *perché*

Una volta stabiliti gli obbiettivi che si vogliono raggiungere introducendo la storia, *perché*, ed aver analizzato i possibili modi per farlo, *come*, si hanno gli strumenti per analizzare le loro connessioni. Alcune strategie di introduzione della componente storica sono più efficaci quando si ha lo scopo di utilizzare la storia come strumento ed altre quando la si sceglie come obbiettivo. Jankvist individua sei interconnessioni riassunte in Figura 1.1.

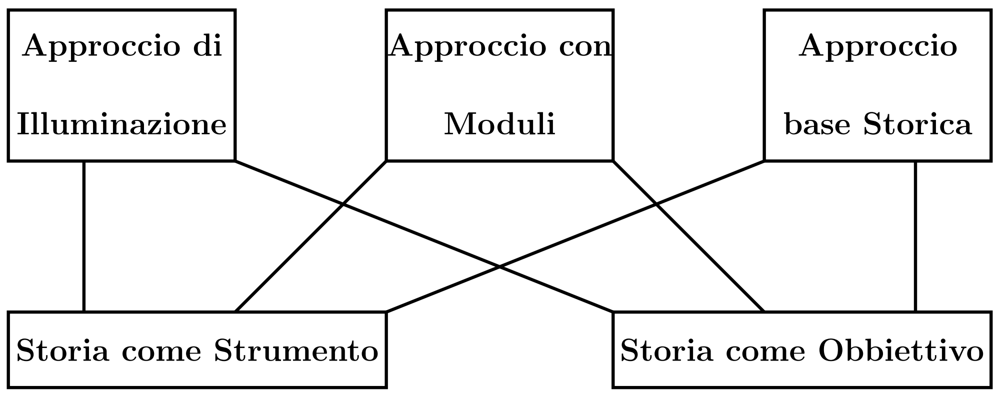


Figura 1.1: Le sei possibili connessioni tra i come ed i perché individuate da Jankvist.

Si analizzano solamente le connessioni tra gli approcci scelti, cioè l'utilizzo di moduli per introdurre la storia che è stata considerata sia uno strumento che un obbiettivo. L'approccio dei moduli permette di dare alla storia un ampio raggio di azione durante la lezione in classe, questo consente di utilizzarla come strumento e come obbiettivo. Secondo Jankvist [37] l'approccio dei moduli risulta efficace quando si vuole sostenere argomenti riguardanti la storia come strumento cognitivo. Negli approcci a moduli, riservando un maggiore tempo da dedicare alla storia, si possono sottolineare sia gli aspetti interni della disciplina, storia come strumento, sia i meta-problemi e le meta-questioni, storia come obbiettivo. I moduli permettono di studiare ed approfondire parti della matematica che non fanno parte del curriculum scolastico aprendo la discussione su meta-problemi della matematica. Secondo Jankvist [37] l'approccio a moduli raggiunge l'apice dell'efficacia quando si decide di lavorare attraverso i documenti storici. In questo approccio le fonti originali svolgono un ruolo centrale sia come modo di realizzare la storia cognitiva come uno strumento, sia per gli argomenti della storia come obiettivo. Il ruolo della fonti storiche viene descritto da Jahnke [37] attraverso tre idee generali che ritiene più adatte a descrivere gli effetti speciali di questo particolare uso ed introduzione della storia, concetti similmente introdotti da Barbin [25] e nel capitolo nove dello studio dell'ICMI [22]:

1. Sostituzione
2. Riorientamento
3. Comprensione culturale

La prima idea riguarda la sostituzione dell'opinione riguardante la matematica familiare a molti, come corpus di conoscenze e tecniche, con qualcosa di diverso, complesso e completo, permettendo di vederla come un'attività intellettuale. La seconda idea riguarda la sostituzione di concezioni preesistenti familiari che vengono rese non familiari dalla storia della matematica, provocando un riorientamento delle convinzioni e delle opinioni. I concetti non appaiono più allo studente come fossero già esistenti e nemmeno nella stessa forma in cui è abituato a manipolarli. La terza idea permette di collocare la matematica, il suo sviluppo e l'educazione matematica in un contesto scientifico, tecnologico e sociale, in un dato luogo e tempo. La lettura di fonti originali può produrre nello studente uno shock con cui sperimentare la sostituzione e il riorientamento.

1.3 Il punto di vista di alcuni matematici

L'introduzione della storia della matematica nella didattica, oltre ad essere esplicitata nelle Indicazioni Nazionali, è sostenuta da matematici del passato che ne hanno usufruito personalmente o hanno dato pareri favorevoli al suo utilizzo nell'insegnamento scolastico.

Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) in *Lezioni elementari sulle matematiche: date alla Scuola Normale di Francia l'anno 1795* [42], nelle lezioni di aritmetica ed algebra introduce riferimenti storici ed accenni a risultati della ricerca. L'introduzione della dimensione storica serve a Lagrange per rendere meno astratti gli sviluppi della teoria, esplicitare le problematiche che entrano in gioco e mostrare il percorso svolto dai matematici per la risoluzione di tali problemi. Queste motivazioni sono molto attuali anche oggi per giustificare l'introduzione della storia della matematica nell'insegnamento in classe.

Tra i matematici che hanno supportato l'introduzione della storia della matematica nella pratica d'aula si trova anche Felix Klein (1849 – 1925) [40] che a partire dagli anni Novanta del XIX secolo cominciò ad elaborare il programma di riforma dell'insegnamento di questa materia. Klein fu anche il primo presidente della Commissione Internazionale per l'Insegnamento Matematico poi ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) fondata a Roma nel 1908 durante il IV Congresso Internazionale dei Matematici. Secondo Klein uno degli assunti metodologici dell'insegnamento è quello di considerare il percorso storico della matematica attraverso il *metodo genetico*; la presentazione di una teoria matematica deve seguire il modo in cui si è sviluppata storicamente e non solo la sua formulazione finale. Klein riconosceva il ruolo della storia della matematica sia nella formazione degli insegnanti che nella creazione di unità didattiche.

Per l'Italia i delegati dell'ICMI furono Guido Castelnuovo, Federigo Enriques e Giovanni Vailati. Giovanni Vailati (1863 – 1909) [28] fu un matematico, filosofo, educatore e membro della scuola di Peano. Egli sosteneva che si dovesse offrire agli allievi una visione unitaria della matematica e del sapere stabilendo un dialogo fra cultura umanistica e cultura scientifica. Questo obiettivo poteva essere raggiunto, a suo parere, attraverso il metodo storico. Tale metodo applicato alle scienze aveva in primo luogo, secondo Vailati, la funzione di *"spedantizzare la loro forma di esposizione"* [59, p.187] rendendola più piacevole ed efficace.

> A nessuno che abbia avuto occasione di trattare in iscuola, davanti a dei giovani, qualunque soggetto che si riferisca alle parti astratte e teoriche della matematica, può essere sfuggito il rapido cambiamento di tono che subisce l'attenzione e l'interessamento degli studenti ogni qualvolta l'esposizione [...] lascia luogo a delle considerazioni di indole storica [...]. Di questo appetito sano e caratteristico delle menti giovai [...] è certamente desiderabile trar-

> re il maggior partito possibile. Utilizzarlo intelligentemente vuol dire rendere l'insegnamento più proficuo e nello stesso tempo più gradevole, più efficace e insieme più attraente. [60, pp.12-13]

In secondo luogo la storia, non solo della matematica, ma più in generale della scienza per Vailati ha un valore educativo e formativo come antidoto contro ogni forma di dogmatismo.

Federigo Enriques (1871 − 1946) [27], in un'epoca in cui il pensiero scientifico ed umanistico erano nettamente separati, sosteneva che gli sviluppi scientifici acquistino significato solamente nella loro concatenazione storica. Questa visione dinamica della scienza porta la storia a diventare parte integrante di essa. L'insegnate, secondo Enriques, doveva presentare agli allievi *"le origini, le connessioni, il divenire, non un qualsiasi assetto statico"* [20, p.10] della teoria studiata. Questa posizione nei riguardi della storia della scienza in relazione alla didattica è di grande attualità.

Anche il matematico Francesco Severi (1879 − 1961) [55], quale insegnante e scrittore di manuali scolastici, era convinto che l'origine storica di certi concetti matematici potesse facilitarne la comprensione e rispondesse alle necessità pedagogiche.

> Occorre ispirarsi al principio che nell'apprendimento di nozioni nuove l'intelletto tende a seguire un processo analogo a quello con cui si è storicamente sviluppata la scienza. [56, p.IX]

> [. . .]la genesi storica delle idee è quella che, nella maggior parte dei casi, risponde alle necessità pedagogiche [55, p.366]

Le parole di Severi ed il metodo genetico proposto da Klein preannunciano il principio genetico di Polya (1887 − 1985) [50], il quale sostiene che insegnando una teoria o un concetto l'insegnante dovrebbe fare in modo che il giovane ripeta le grandi tappe dell'evoluzione mentale dell'umanità senza fargli commettere i mille errori del passato.

Anche matematici di tempi più recenti sostengono l'introduzione della storia della matematica nell'insegnamento, si citano Tullio Viola (1904 − 1985) [29] e Pascal Dupont (1923 − 2010) [27]. Il primo sosteneva l'importanza della storia della matematica nella formazione dei futuri insegnanti, tenendo anche un corso estivo. Il secondo riteneva che la storia dovesse essere al servizio della didattica. La costruzione didattica a sfondo storico aveva lo scopo di rendere agli occhi degli studenti la matematica una *"gioiosa conquista invece che un odioso sforzo"* [27, p.15].

Gli esempi riportati in questa sezione sottolineano che la pratica di utilizzare la storia della matematica come facilitatore dell'apprendimento/insegnamento non è un'idea dei giorni nostri. Quelli citati sono solo alcuni dei grandi matematici che hanno sostenuto l'introduzione della storia nella didattica. Le teorie didattiche, esposte precedentemente, a supporto dell'introduzione della componente storica non erano ancora state sviluppate dai ricercatori in didattica quando alcuni dei matematici citati vissero ed utilizzarono la storia nell'insegnamento, questo testimonia la naturalezza e l'importanza che la storia della matematica può avere per aiutare i ragazzi ad apprendere la materia.

1.4 La storia della matematica nelle Indicazioni Nazionali

Il progetto di questa tesi riguarda i Licei, quindi di seguito si analizzano le Indicazioni Nazionali, che sono il punto di partenza per la progettazione delle attività scolastiche. Nelle Indicazioni Nazionali del 15 Marzo 2010 [45] sono definiti gli *obbiettivi specifici di apprendimento* tenendo conto anche delle otto competenze chiave della Strategia Lisbona in cui si trova la *competenza matematica e competenze di base in scienza e tecnologia* (si veda Sezione 1.1). Il documento è costituito in una prima parte dai decreti legislativi per poi suddividersi in allegati. L'allegato A costituisce la nota introduttiva in cui vengono specificati, tra le altre cose, gli obbiettivi e le competenze attese. I successivi allegati, da B a G, riguardano i 6 tipi di Licei a loro volta suddivisi in sotto-indirizzi ed è in questi allegati che si trovano le *linee generali e competenze* per materia e gli *obbiettivi specifici di apprendimento* che sono declinati per periodi e per ambiti.

Già nell'Allegato A delle Indicazioni Nazionali si parla dello studio delle discipline ad ampio raggio, introducendo anche la visione storico-critica legata ad esse. Visionando gli allegati da B a G si è notato che le *linee generali e competenze* riguardanti la matematica sono molto simili, seppur non identiche, per i vari indirizzi. Nelle *linee generali e competenze* si trova la storia della matematica sia come declinazione culturale ed interculturale sia come visione critica della matematica delle epoche passate.

> Egli saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale. [45, p.22]

> Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. [45, p.22]

Inoltre, nelle *linee generali e competenze* vengono individuati gruppi di concetti riguardanti la matematica, sottolineando il valore che essi devono svolgere in collegamento con altre discipline tra cui la storia. Nel documento si trova poi una parte specifica per ogni indirizzo in cui la matematica viene declinata dandole un contesto in accordo con l'indirizzo stesso.

Gli *obbiettivi specifici di apprendimento* sono divisi per periodi: primo biennio, secondo biennio e quinto anno. In ogni periodo gli obbiettivi vengono declinati nei quattro ambiti: aritmetica e algebra, geometria, relazioni e funzioni ed infine dati e previsioni. Anche in questa sezione viene sottolineato per alcuni argomenti l'importanza del valore storico che hanno avuto nella disciplina. Di seguito alcuni esempi.

> Verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione, con particolare riguardo al fatto che, a partire dagli Elementi di Euclide, essi hanno permeato lo sviluppo della matematica occidentale. In coerenza con il modo con cui si è presentato storicamente, l'approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica. [45, p.23]

> La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e il compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea)[. . .]. [45, p.24]

Anche se gli esempi riportati dalle Indicazioni Nazionali riguardano l'ambito geometrico, non solo in questo ramo può essere utile un approccio storico. Il progetto esposto in questa tesi (si veda Capitolo 3) prende in considerazione per il primo biennio l'ambito geometrico, ma nel Capitolo 6 se ne propongono possibili sviluppi in cui nel secondo biennio viene considerato l'ambito aritmetica ed algebre, mentre nel quinto anno l'ambito dati e previsioni. Pi Greco verrà utilizzato come filo conduttore attraverso cui toccare molte epoche matematiche differenti, dall'antichità fino ai giorni nostri. Nelle Indicazioni Nazionali, riguardo a Pi Greco, si trova nell'ambito geometria del primo biennio:

> Lo studente acquisirà la conoscenza delle principali trasformazioni geometriche [. . .]. Inoltre studierà le proprietà fondamentali della circonferenza. [45, p.339]

Per quanto riguarda l'ambito aritmetica ed algebra del secondo biennio, invece:

> Lo studio della circonferenza e del cerchio, del numero π, [. . .], permetteranno di approfondire la conoscenza dei numeri reali, con riguardo alla tematica dei numeri trascendenti. Attraverso una prima conoscenza del problema della formalizzazione dei numeri reali lo studente si introdurrà alla problematica dell'infinito matematico e delle sue connessioni con il pensiero filosofico. [45, p.25]

Nelle Indicazioni Nazionali, inoltre, si evidenzia:

> L'indicazione principale è: pochi concetti e metodi fondamentali, acquisiti in profondità. [45, p.23]

L'acquisizione in profondità di concetti potrebbe essere facilitata dall'utilizzo della storia della matematica all'interno della didattica.

1.5 L'utilizzo di documenti storici

Un documento storico in più,
un esercizio ripetitivo in meno.
Adriano Demattè

Dopo aver deciso di voler sostenere l'introduzione della storia della matematica nella pratica d'aula ed averne studiato i *perché* ed i *come*, si è pensato di farlo utilizzando i documenti storici, visto l'efficacia sostenuta da alcuni autori per l'approccio dei moduli.

> Nella storia della scienza il rapporto con il "testo" è stato per secoli un rapporto diretto, sia da parte degli studiosi, sia da parte delle persone che si affacciavano a un nuovo sapere. [17, p.19]

> I ragazzi di oggi vivono intensamente il presente, ma faticano a dare valore al passato; hanno, quindi, bisogno di storia per costruire la propria identità culturale e per ricercare un senso al proprio fare matematica. Inserendo nella didattica alcuni documenti tratti dalla storia della disciplina si potrebbe far scoprire loro l'origine e il valore di procedure e conoscenze che vengono proposte. [18, p.54]

Quando si parla di documenti storici relativi alla matematica ci si riferisce non solo a libri o manuali, ma anche a raffigurazioni, iscrizioni ed oggetti. Grazie ai documenti storici si ha un quadro delle modalità di trasmissione e dell'utilizzo della matematica delle epoche nel quale è stato prodotto il documento. Dai documenti storici si può ricavare sia il contenuto matematico che l'autore voleva trasmettere, sia delle indicazioni extra disciplinari riguardanti il periodo storico in cui è stato prodotto il documento come: aspetti linguistici, aspetti storici, aspetti filosofici, aspetti tecnologici e non solo.

Vi sono immagini, dipinti, incisioni e bassorilievi di epoche passate che raffigurano persone impegnate in attività riguardanti la matematica. Questi documenti storici hanno un forte valore cognitivo per lo studente, in quanto possono suggerire una storia, suscitare suggestioni e spingerlo a formulare congetture. La cultura matematica in questo approccio diventa parte della cultura in senso più ampio. Le immagini hanno un forte potere comunicativo, inoltre a differenza dei testi matematici presentano molti più elementi riguardanti non solo la matematica ma il contesto socio-culturale dell'epoca. Spesso nelle immagini la matematica viene rappresentata in un contesto concreto nel quale i personaggi la utilizzano per uno scopo. Queste rappresentazioni possono fornire allo studente elementi di immedesimazione con i personaggi. In secondo luogo le immagini presentano i segni tutti assieme, non sequenzialmente come nei testi, questo permette all'osservatore di scegliere quali privilegiare ed in quale ordine.

I testi, che spesso accompagnano anche le immagini, mettono in risalto aspetti più interni della matematica. Infatti mentre nell'immagine la matematica può essere raffigurata mediante formule, disegni geometrici oppure attraverso personaggi del passato impegnati in attività di carattere matematico, in un testo si entra in contatto con la teoria o il concetto matematico di una certa epoca. Dai testi, oltre alle conoscenze matematiche dell'epoca, si può apprezzare per esempio la differenza di linguaggio o di scrittura della disciplina. Leggendo e trattando in classe testi matematici l'alunno si immerge in un contesto diverso da quello conosciuto, la materia risulta estranea in quanto scritta con un linguaggio diverso. Le difficoltà di immedesimazione nel contesto socio-culturale e nel cercare di interpretare la matematica attraverso un nuovo linguaggio possono portare l'alunno ad apprezzare il formalismo simbolico matematico odierno, che viene spesso percepito come ostacolo. Lo studente, infatti, si trova a dover cambiare paradigmi per riuscire a comprendere il documento. La mancanza di un formalismo familiare richiede un maggiore sforzo di interpretazione, portando l'alunno a riconsiderare la propria opinione sulla simbologia matematica che, pur essendo complessa, rende la lettura della matematica molto semplice. Dai testi inoltre è possibile apprezzare le diverse impostazioni di pensiero o di organizzazione del discorso. Se un matematico moderno riscrivesse un testo matematico antico userebbe non soltanto un linguaggio diverso, ma anche una impostazione diversa, cercando efficacia comunicativa e rigore espositivo.

L'introduzione di documenti storici richiede alcune considerazioni metodologiche e didattiche da parte dell'insegnante. Demattè [16, p.12] sostiene che:

> L'analisi di un documento storico richiede allo studente di recuperare le proprie competenze matematiche, mettendole alla prova e quindi cercando le premesse per il loro consolidamento e per il loro ampliamento.

La scelta di utilizzare un documento originale permette all'alunno di fare matematica in un modo insolito, esplorando, congetturando e migliorando le proprie competenze, senza la necessità di memorizzare dati o formule. Inoltre per una piena comprensione del contenuto del documento è necessario che la riflessione diventi un'analisi multidisciplinare, introducendo la storia, la geografia, la filosofia e non solo. Lo studente ha quindi l'occasione di cogliere nella sua interezza la matematica, non più come disciplina a-temporale ed a-storica, ma come prodotto dell'intelligenza umana. Attraverso i documenti storici la storia della matematica non viene più solo raccontata, ma vissuta in prima persona dall'alunno. Maneggiare un documento storico porta lo studente a dover effettuare un cambiamento di prospettiva, egli può scoprire concetti nuovi o anche ritrovare quanto già conosce, in una forma diversa. La diversa forma del concetto matematico richiede un riorientamento del modo di intendere l'oggetto matematico, come sostiene Barbin [25] diventa necessario, dopo la sensazione di spaesamento iniziale, operare il riposizionamento e l'orientamento. Il documento storico nella sua totalità contiene elementi significativi riguardanti il periodo storico, come: la fase della disciplina in quel momento, gli scopi dell'opera, le caratteristiche del momento storico. . . .

Una volta motivata la scelta dell'introduzione di documenti storici, bisogna utilizzare criteri di scelta di tali documenti, in quanto non tutti i documenti matematici sono adatti a tutti gli scopi o a tutte le età scolastiche. Il criterio principale di scelta, per l'introduzione di un documento storico, deve riguardare le finalità di apprendimento/insegnamento che l'insegnante vuole raggiungere attraverso di esso. Risulta quindi importante valutare l'accessibilità del documento da parte dello studente e mediarne la comprensione del testo senza distorcerne l'importanza storica ed il significato matematico. Per questi motivi gli adattamenti devono essere ridotti al minimo, anche se a volte risulta necessario riscrivere il contenuto con caratteri tipografici diversi o tradurre le trascrizioni nella nostra lingua. L'importante, facendo queste modifiche, è sottolineare agli alunni che degli adattamenti sono stati fatti per facilitarli e spiegare come fosse il documenti in origine, così da non perdere parte importante di quello che il documento deve passare oltre al contenuto matematico. Attraverso, l'inquadramento storico dato dall'insegnante, l'alunno può essere stimolato nella riflessione e nel congetturare. L'alunno opera in un certo senso una vera e propria indagine storica, guidato anche dall'insegnate, in cui il reale e l'ipotetico si trovano, in un certo senso, a coesistere. L'insegnante che sceglie di introdurre fonti storiche primarie deve considerare il rapporto concreto tra il testo, il contesto ed il lettore, perché in base agli obbiettivi bisogna trovare un equilibrio tra l'analisi della fonte ed il contesto storico in cui è stata prodotta. Gli studenti non sono abituati ad informarsi sul contesto nel quale è stato prodotto un documento che stanno leggendo, in un certo senso sono educati a non considerarlo. Risulta, quindi, fondamentale che l'insegnante faccia nascere in loro la necessità di conoscere il contesto socio-culturale prima di analizzare una fonte primaria, così da interpretare adeguatamente tutte le sfaccettature della natura del testo e quindi della matematica.

Nello studio dell'ICMI [22] vengono suggerite alcune strategie per l'introduzione della lettura della fonti in classe, visto che non vi è ad oggi un approccio elaborato ed accettato in generale per la lettura delle fonti.

- Introduzione di una fonte. Secondo gli autori per l'introduzione di materiale originale esistono due tipi di strategia: la strategia diretta in cui la fonte viene introdotta senza alcuna preparazione precedente a cui si contrappone quella indiretta in cui la fonte viene consultata dopo attività introduttive precedenti.

- Analisi di una fonte e dibattiti cognitivi. In questo approccio visto la difficoltà dell'attività gli autori sostengono la necessità di lasciare il giusto spazio ai dibattiti cognitivi. Durante queste discussioni gli studenti sono chiamati a formulare ed esprimere le proprie opinioni riguardo la validità e l'efficacia di un concetto o di un metodo letto, motivando la risposta.

- Costruzione di strumenti di misura. Attraverso lo studio della storia gli studenti analizzano i propri ragionamenti e possono essere incoraggiati a costruire personali strumenti di misura.

- Verbalizzazione. Rende gli studenti attenti ai pensieri originali e li aiuta ad evitare di attribuire ai matematici cose che non hanno mai detto. L'insegnante può aiutarli durante questa attività sottolineando la differenza tra cosa viene derivato dal testo e cosa è un'interpretazione di quest'ultimo, sottolineando le difficoltà incontrate quando non si ragiona con un sistema formale.

- Traduzione. Tradurre estratti di testi storici aiuta gli studenti a conoscere ragionamenti e concetti matematici. Le traduzioni possono consistere nella traduzione dal linguaggio matematico antico a quello odierno oppure da una lingua all'altra. nel primo caso viene ricostruito un argomento matematico mentre nel secondo si padroneggia un linguaggio e l'analisi concettuale.

- Convalida di ragionamenti. L'insegnante può chiedere di convalidare i ragionamenti trovati sulle fonti originali per dimostrare agli studenti quanto siano fondati i metodi usati nella storia alla luce delle conoscenze matematiche odierne. I metodi antichi hanno spesso il vantaggio di essere alla portata degli alunni fornendo interessanti spunti per l'insegnamento.

- Confronto. Secondo gli autori anche il confronto tra fonti originali sia della stessa epoca che di epoche diverse permette agli studenti di rendersi conto di come la notazione ed i simboli della matematica si siano evoluti, aiutando gli studenti a focalizzarsi sull'essenziale.

- Sintesi. Per gli autori queste attività devono essere svolte al di fuori dei corsi in preparazione per attività future. Il lavoro di sintesi può sfruttare le strategie sopra descritte e programmato alla fine del corso.

Demattè [16] sottolinea che lavorando attraverso i documenti storici è indubbio che l'alunno debba compiere uno sforzo maggiore, questo però lo porta a riconsiderare la materia all'interno del contesto storico, a consolidare le proprie conoscenze ed a mettere in atto strategie differenti, seppur matematiche. Lo studente quindi mette in campo conoscenze ed abilità specifiche in altre situazioni, consapevole o ignaro di ciò, questo può portare a dare una risposta al *justification problem*. Inoltre l'alunno può immedesimarsi e provare emozioni nuove nei confronti della matematica, essendo coinvolto in prima persona. Il documento storico può portare a galla domande importanti riguardanti il concetto, quello che prima l'alunno pensava di aver compreso potrebbe non risultare tale oppure il contrario. Attraverso la lettura del documento possono nascere riflessioni profonde riguardo alla disciplina e creare nuove situazioni problematiche che devono essere risolte. I documenti storici possono anche aiutare l'insegnate ad affrontare nodi epistemologici della disciplina e quindi lo studente ad apprenderli.

Alcuni insegnanti ritengono che l'introduzione del lavoro su documenti storici porti ad una perdita di tempo, questo invece permette di poter operare su obbiettivi didattici e matematici di alto livello, sempre con lo scopo di formare cittadini del futuro che posseggano competenze matematiche.

Capitolo 2

C'era una volta un numero

Historia testis temporum,
lux veritatis,
vita memoriae,
magistra vitae,
nuntia vetustatis.
La storia è testimonianza del passato,
luce di verità,
vita della memoria,
maestra di vita,
annunciatrice dei tempi antichi.
Marco Tullio Cicerone

È difficile pensare che in mondo come quello di oggi, in cui si è in possesso di strumenti ad alta tecnologia, non si è in grado di risolvere un problema così semplice come la divisione della lunghezza della circonferenza di un cerchio per il suo diametro. Questo valore è stato un rompicapo per i matematici per quasi quattromila anni, generando interesse, impegno intellettuale, tentativi abortiti e teorie più di qualsiasi altro numero nella storia. Da una parte si è sempre cercato di determinarne il valore esatto. Basta avere un cilindro ed un filo per accorgersi che la circonferenza di un cerchio è poco più di tre volte il suo diametro. Se poi si utilizza un buon righello si possono trovare valori ben approssimati di tale numero. Sono stati poi scoperti metodi per calcolare questo valore in modo sempre più preciso, ma per quanto grande sia l'impegno e per quanto bravi si possa essere nell'escogitare nuove strategie non si troverà mai un valore esatto di Pi Greco. Dall'altra parte i matematici hanno sempre cercato di indagare la natura di questa costante, cercando di capire come mai un rapporto apparentemente semplice dovrebbe dare origine a tante complicazioni. Nella ricerca della natura e del valore di questo numero storicamente si trovano aspetti mistici, profondi e frivoli. Pi Greco offre preziosi insegnamenti sui limiti della nostra comprensione, delimitando il confine tra finito ed infinito. È innegabile che se si comprendesse meglio la natura di questa costante, se si trovasse una regolarità nelle sue cifre o si capisse come mai appare in molte formule apparentemente scollegate dalla sua natura geometrica e tra loro, si potrebbe capire più approfonditamente la matematica e la fisica del nostro universo. *"Ma il pi greco è sempre stato come un giocatore che tiene le sue carte ben coperte, non concedendo agli altri giocatori la minima opportunità di sbirciare."* [9, p.4]. Dato che il progetto di questa tesi verte tutto sulla storia e l'evoluzione di un numero che ha affascinato l'uomo per millenni, non si può prescindere dall'introdurre il concetto di numero nella storia dell'umanità. La matematica riveste un ruolo fondamentale nella storia dell'uomo, basti pensare che forse, per motivi pratici, il concetto di numero precede quello di lettera. Cercare di capire quando sono nati i numeri o quando gli esseri umani hanno cominciato a fare matematica è un'impresa utopica, anche perché per gli uomini primitivi i numeri avevano un carattere qualitativo e non quantitativo, mancavano di astrazione numerica. L'aritmetica vera e propria cominciò con l'introduzione di simboli su cui operare in maniera astratta indipendentemente dagli oggetti.

Si sviscererà in questo capitolo la storia antica di Pi Greco e delle civiltà che ne hanno fatto oggetto di ricerca, sottolineando i modi in cui esso si è insinuato nella vita dell'umanità e nella cultura popolare. Grazie allo sviluppo di questa costante si vedrà come nei millenni anche la dimostrazioni di risultati relativi ad essa sia cambiata radicalmente. In particolare si prenderà in considerazione il periodo storico che va dal 3000 a.C. circa fino al 600 d.C. circa. In questo arco di tempo i progressi riguardanti questa costante sono stati molteplici, per questo sono state effettuate delle scelte sulle popolazioni, i matematici e le scoperte esposte. Per dare una visione più completa dei progressi su Pi Greco si è realizzata una linea del tempo con le scoperte e le successive approssimazioni di questa costante matematica nel periodo storico considerato (Figura 2.1). Si riportano in grassetto, nella linea del tempo, i periodi attorno ai quali sono state costruite le attività didattiche che saranno descritte nel Capitolo 3. I riferimenti per questo capitolo sono [1, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 19, 23, 30, 33, 38, 39, 43, 49].

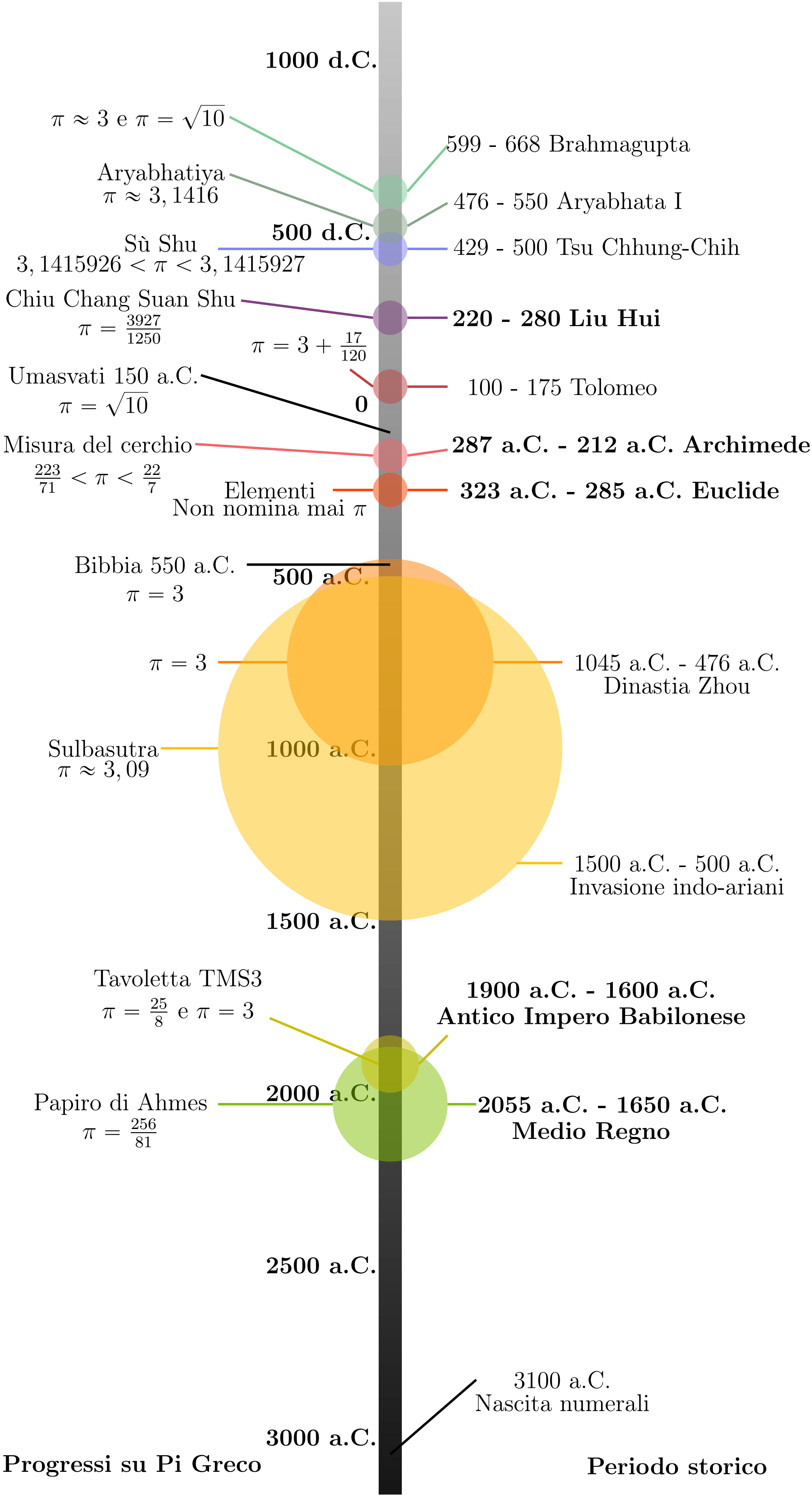


Figura 2.1: Linea del tempo.

La fertilità del terreno fu uno dei fattori principali che permise il formarsi di comunità stabili di individui e quindi la nascita di civiltà, non a caso grandi civiltà del passato fiorirono in corrispondenza di grandi fiumi, come il Tigri e l'Eufrate, il Nilo, il fiume Giallo e l'Indo. Nel Neolitico (10000 a.C. - 8000 a.C.) con l'introduzione dell'agricoltura l'uomo era diventato coltivatore e lo straripamento naturale di questi fiumi fertilizzando il terreno circostante, lo rendeva adatto alla agricoltura.

2.1 La Mesopotamia

Il termine Mesopotamia deriva dal greco e significa *terra tra i due fiumi*: il Tigri e l'Eufrate, parte della mezza luna fertile. Le caratteristiche ambientali di questa pianura influirono sullo spirito della civiltà mesopotamica. Le piene dei fiumi non sempre erano benefiche dato che erano imprevedibili. L'uomo mesopotamico doveva lottare contro la furia della natura incanalando ed arginando lo straripamento dei fiumi. Per questi motivi l'atteggiamento di questa civiltà era scettico nei confronti del potere dell'uomo.

L'umanità conta i suoi giorni
e qualunque cosa faccia è vento
Epopea di Gilgamesh, tavola II

In questa regione poco protetta da barriere naturali si susseguirono diverse popolazioni spesso in continua lotta tra di loro. I Sumeri furono tra i primi abitanti della Mesopotamia

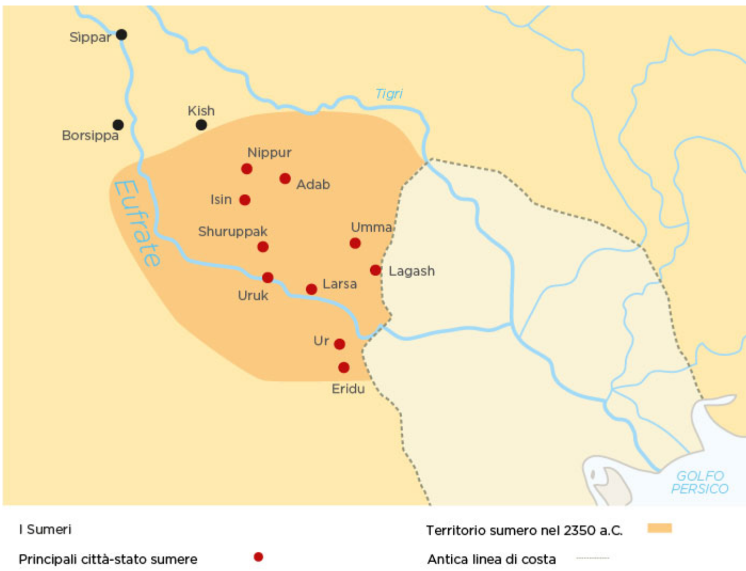


Figura 2.2: Impero Sumero [68].

ed una delle prime popolazioni sedentarie del mondo. La loro origine risulta tutt'ora un problema aperto. Si insediarono già nel IV millennio a.C. nella regione meridionale della Mesopotamia chiamata successivamente Babilonia, mentre nella parte settentrionale esistevano già delle comunità probabilmente di origine semitica: gli Accadi. Inizialmente i Sumeri erano una popolazione nomade, le zone in cui viaggiavano erano aride e scavando non trovavano acqua, ma petrolio, così arrivati nella mezzaluna fertile decisero di stanziarsi lungo il corso dei due fiumi per avere accesso costante ad una risorsa idrica. Riuscirono infatti a creare bacini artificiali per convogliare l'acqua in modo da incrementare e facilitare l'agricoltura. La disponibilità di cibo dovuta all'agricoltura, oltre a creare ricchezza e commercio, fece emergere la necessità di conservare e difendere i raccolti di orzo e grano dagli animali e dagli invasori. Nacquero i magazzini difesi da persone armate: custodi nominati dagli dei. Vista la loro importante funzione i custodi erano le persone che detenevano il potere. La conservazione dei raccolti nei magazzini ed il commercio resero necessario il controllo della correttezza degli scambi.

Sono state ritrovate nel 1959 da Leo Oppenheim delle sfere di argilla cotta con all'interno degli oggettini di varie forme che corrispondevano biunivocamente alle incisioni sulla sfera. La studiosa di arte antica Schmandt-Besserat classifica questi oggetti chiamandoli *tokens*. Li divide in due categorie in base alla loro complessità: tokens semplici (8000 a.C. - 3500 a.C.) e tokens complessi (3500 a.C. in poi). I tokens servivano per contare, avevano infatti il ruolo di contrassegni, e venivano conservati in buste di cuoio inizialmente e poi in sfere d'argilla chiamate *bullae* o *buste*. Per evitare di spaccare tutte le volte le bullae, si incominciò ad imprimere i tokens sulla sfera, le incisioni così risultavano in corrispondenza biunivoca con i tokens al suo interno. Successivamente oltre ai tokens si imprimevano anche altre informazioni come ad esempio le tipologie di oggetti.

Si attribuisce ai Sumeri la nascita della civiltà palaziale, ove compaiono già uffici, magazzini e palazzi reali. Prima dei Sumeri erano già presenti insediamenti di persone che coltivavano la terra, ma non erano organizzati o difesi. La nascita delle prime città-stato si ebbe con lo sviluppo urbanistico di strade e piazze con al centro il palazzo che era il centro del potere. Da un punto di vista politico questa prima forma di stato può essere considerata una primitiva democrazia, con un vero e proprio nucleo statale. Le più importanti città-stato, furono Eridu, Ur, Uruk, Lagash, Kish, Nippur, spesso in lotta fra loro, anche se unite dalla comune cultura e dalla lingua.

In questo periodo le bullae vennero sostituite dalle tavolette che costituivano un supporto più semplice ed eliminavano il problema della perdita di informazioni. Inizialmente le tavolette venivano ancora impresse usando i tokens, successivamente le impressioni vennero sostituite da incisioni più dettagliate. Con la sparizione delle impressioni e l'avvento delle incisioni nacque il sistema di numerazione ed attorno al 3100 a.C. si ha la nascita dei numerali. Il sistema di numerazione era utilizzato principalmente in ambito amministrativo ed economico per registrazioni e conteggi di scambi di provviste o salari. Spesso le tavolette da un lato presentavano gli oggetti dello scambio e dall'altro i numeri che ne rappresentavano le quantità. Le incisioni venivano fatte su tavolette di argilla fresca attraverso degli stilo di canna o di avorio. In principio il sistema usato era sia decimale che sessagesimale con valore posizionale. I Sumeri introdussero i numeri concreti legati ai beni, il processo di astrazione del numero fu un processo graduale. I simboli per i numerali erano i seguenti:

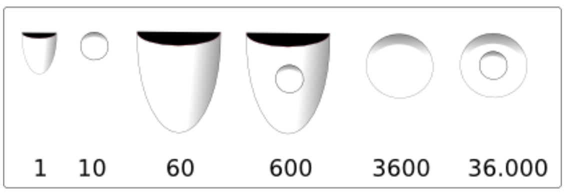


Figura 2.3: Primi numerali [41].

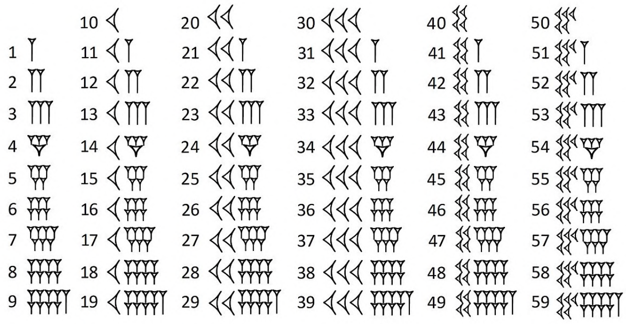
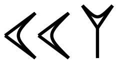


Figura 2.4: Numeri cuneiformi [64].

Quasi contemporaneamente si sviluppò la scrittura sumerica. Inizialmente il modo più naturale per indicare qualcosa era disegnarlo in modo stilizzato, infatti la scrittura in una prima fase era composta da pittogrammi (3200 a.C.). La scrittura pittografica veniva utilizzata principalmente in documenti amministrativi e commerciali. Il continuo sviluppo dell'attività nelle città, rese necessario un maggior utilizzo della scrittura. Si svilupparono sistemi più pratici e veloci per scrivere le informazioni. Inizialmente i simboli vennero ruotati di novanta gradi, successivamente con un enorme salto di astrazione si passò agli ideogrammi. I simboli non rappresentavano più solo cose materiali, ma azioni, idee e concetti. Le parole si stavano separando dall'oggetto rappresentato ed assumevano sempre più un significato puramente sillabico. Nacquero i fonogrammi, disegni che suggerivano un suono. Alla scrittura per incisione fu sostituita quella per impressione mediante delle cannucce: scrittura cuneiforme 2400 a.C.. A seconda di come veniva impugnata la cannuccia si ottenevano triangoli isosceli più o meno grandi. I disegni perdettero di immediatezza diventando più geometrici e schematizzati, questo influenzò in modo determinante anche lo sviluppo dell'aritmetica. In questo periodo il sistema decimale era quasi del tutto sparito. Gli stilo usati per imprimere i numerali vennero sostituiti dalle cannucce usate per la scrittura, delineando un sistema di numerazione puramente astratto. Si utilizzavano solo due simboli (che indica una unità) e (che indica una decina) con cui si riuscivano a scrivere tutti i numeri da uno a cinquantanove Figura 2.4. Inoltre in base alla posizione dei numeri, così scritti, il valore era diverso. Il sistema di numerazione era quindi sessagesimale e posizionale. Molti storici si sono interrogati sull'utilizzo di queste popolazioni antiche della base sessanta. Teone d'Alessandria (350 d.C.) esperto matematico, che sistemò anche gli Elementi di Euclide, si accorse che il sessanta è il più piccolo numero tra uno e cento col più alto numero di divisori di cui molti sono primi. Lo storico della matematica Moritz Cantor suppose che potesse dipendere dal numero di giorni dell'anno. I motivi reali di tale scelta non sono noti, ma sicuramente questa base ebbe un'importanza elevata tanto da essere rimasta fino ai giorni nostri per le misurazioni temporali e radiali.

Con l'utilizzo di soli due simboli era possibile rappresentare un'infinità numerabile di numeri. La scelta di una base alta aveva anche il vantaggio di permettere di scrivere numeri molto grandi con l'utilizzo di pochi simboli. Lo svantaggio di questa matematica, che troveremo in molte delle popolazioni primitive, è la mancanza dello zero e della virgola. I Sumeri e tutte le popolazioni successive della Mesopotamia non avevano il concetto di zero in quanto il numero rappresentava quantità reali di beni. Invece nonostante la mancanza di un simbolo, come è per noi oggi la virgola, erano presenti le potenze negative e conoscevano le frazioni con unità. L'assenza della virgola rende solo più difficile l'interpretazione di questi numeri.

Esempio 1. il numero  potrebbe indicare sia l'unità che il numero sessanta o anche la frazione un sessantesimo.
Il valore di questi numeri solitamente si intuisce dal contesto della tavoletta. Per rappresentarli con le nostre cifre ci sono vari modi.

Esempio 2. 

21 : indica il numero 21

$21'$: indica il numero $\frac{21}{60}$, cioè la prima posizione dopo la virgola

$21''$: indica il numero $\frac{21}{3600}$, cioè la seconda posizione dopo la virgola

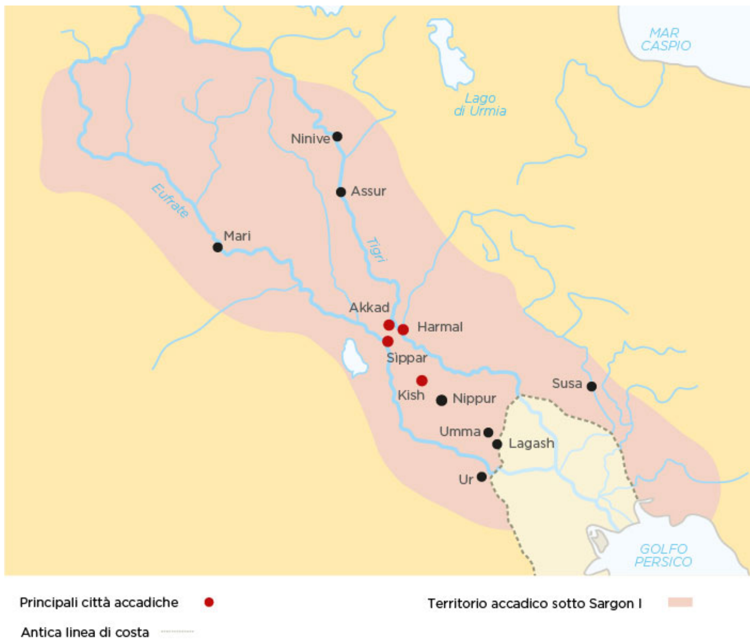


Figura 2.5: Impero Accadico [70].

Nel 2400 a.C. circa le città-stato sumere vennero conquistate da un gruppo di Accadi, provenienti dal vicino deserto, guidati da Sargon I che unificò sotto di se tutta la Mesopotamia e diede inizio alla dinastia semitica. Gli Accadi dai Sumeri impararono molto, in primo luogo la scrittura cuneiforme ed il sistema numerico.

L'egemonia accadica ebbe vita breve ed all'inizio del II millennio a.C. le città-stato tornarono nuovamente indipendenti. Questo periodo viene identificato come periodo Neo-Sumerico che raggiunse il suo apice con la terza dinastia di Ur. Sebbene la lingua sumera tornasse ad essere quella ufficiale, l'identità sumerica stava ormai sparendo. Alla fine di questa dinastia le città-stato erano in conflitto tra loro e questo rese possibile l'invasione di popoli semitici che decretarono la fine della civiltà sumerica. Nonostante ciò la cultura e la letteratura sumerica rimasero a lungo.

Con la fine dell'impero accadico in Mesopotamia si trovavano altre due potenze: i Babilonesi, situati nella parte meridionale e gli Assiri situati nella parte settentrionale. Questi popoli, già presenti precedentemente, in questo periodo si rafforzarono e cominciarono lotte continue per il controllo della mezzaluna fertile.

Verso il 1900 a.C. sorse il Primo o Antico impero Babilonese nel quale si fusero elementi sumerici ed accadici. Durante l'epoca che va dal 1900 a.C. al 1600 a.C. ci fu grande prosperità e rinascita culturale, anche in campo matematico. La prima dinastia di Babilonia fu per molti aspetti l'erede, sul piano culturale, della civiltà sumerica, di cui in particolare venne ripresa la scrittura cuneiforme, inoltre fu a sua volta il tramite fra quest'ultima e le successive fasi di sviluppo del mondo babilonese.

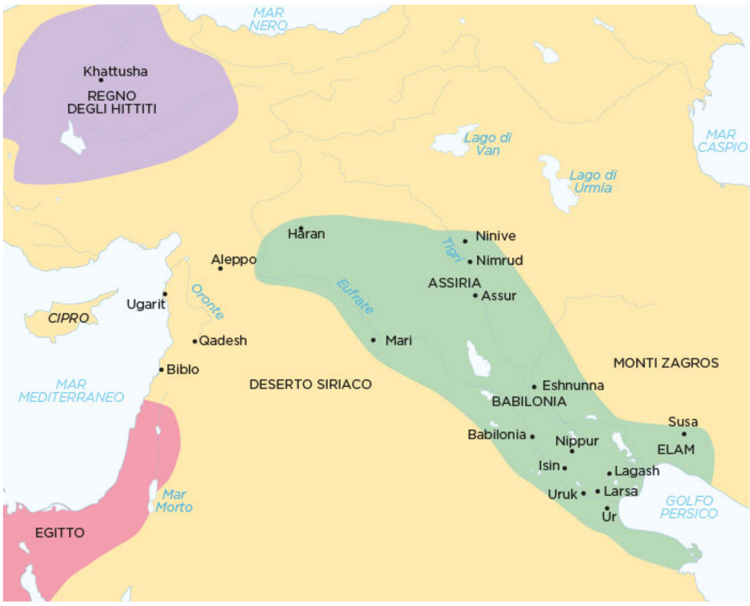


Figura 2.6: Impero babilonese con Hammurabi [72].

Il più importante sovrano di questo periodo fu Hammurabi (1793 a.C.-1750 a.C.) che con astuzia ed abilità riuscì ad ampliare il suo dominio su tutta la Mesopotamia, Babilonia e l'Assiria. Babilonia in questo periodo si affermò come centro culturale e di studi, diventando un importante punto di riferimento. L'urbanistica, l'arte e l'architettura erano molto sviluppate. La grande importanza data all'aritmetica, all'algebra ed alla geometria con i sorprendenti risultati ottenuti in questi campi sono la conseguenza delle nuove esigenze sociali e culturali, come l'accrescimento degli affari sacri, governativi e privati. In questo periodo, inoltre, si intensificarono gli scambi con regioni limitrofe, dato il bisogno di materie prime come la pietra, il legname ed i metalli di cui la Mesopotamia era sprovvista.Questa fitta rete di commercio favorì anche gli scambi culturali tra i popoli.

Dopo Hammurabi ebbe inizio il declino del regno Babilonese, sia per le lotte interne, che per l'invasione prima degli Hittiti, provenienti dall'Anatolia centrale, e poi dei i Cassiti, scesi dai monti della Siria. Gli Hittiti nel 1600 a.C. stabilirono il proprio potere sull'impero babilonese ormai disgregato, ma il loro governo fu contrassegnato da vari disordini. Sebbene fossero stati gli Hittiti a conquistare Babilonia, essa divenne la capitale dell'impero Cassita (1595 a.C.-1157 a.C.). I Cassiti furono la dinastia che regnò più a lungo a Babilonia, ma di questo periodo non si conosce molto, date le poche tracce rimaste. I Cassiti adottarono la lingua babilonese, sia per la comunicazione orale, sia per i rapporti ufficiali scritti, e si fecero continuatori e, soprattutto, sistematori della cultura paleo-babilonese.

A nord l'Assiria era molto potente ed indebolì l'impero Cassita, fino a fondare l'impero Neo-Assiro nel 885 a.C.. L'impero assiro ebbe vita relativamente breve, ma si ebbe una rinascita della cultura, dell'architettura e della scienza.

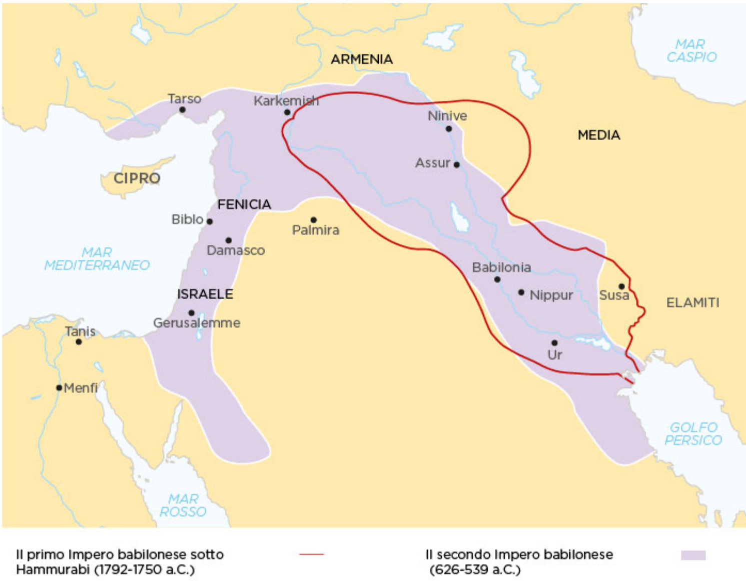


Figura 2.7: Impero babilonese [66].

Nel 625 a.C. il caldeo Nabopolassar guidò la rivolta dei Babilonesi contro gli Assiri, ripristinando l'indipendenza della città e fondando il regno Neo-Babilonese o Caldeo. Nabopolassar, alleatosi con i Medi, distrusse la capitale Ninive nel 612 a.C.. Con la caduta di Ninive, Babilonia si liberò definitivamente dal controllo assiro e divenne capitale del nascente impero Neo-Babilonese. Fu sotto il governo del re Nabucodonosor II di Babilonia (605 a.C. - 562 a.C.) che la città divenne una delle più splendide del mondo antico, furono costruiti templi e palazzi. Con l'incremento dell'economia e dei commerci si verificò un rifiorire dell'arte e delle scienze. Questo splendore durò ben poco, infatti nel 539 a.C. Ciro il grande fondatore dell'impero persiano conquistò Babilonia. L'impero babilonese ebbe fine, ma la produzione di opere di matematica, di medicina e di astronomia continuò. Babilonia conoscerà una tardiva rinascita nel 311 a.C. con lo stabilirsi della dinastia dei Seleucidi, così chiamata da Seleuco, uno dei generali di Alessandro Magno.

Il ruolo centrale di Babilonia giustifica la definizione della matematica prodotta dalle civiltà mesopotamiche come *matematica babilonese*. Nonostante il continuo susseguirsi di diverse popolazioni, la matematica risulta uno degli elementi di continuità più significativi che hanno caratterizzato queste civiltà. Delle oltre cinquecentomila tavolette che sono state riportate alla luce sono poche quelle di interesse matematico. La maggior parte delle fonti riguardanti la matematica babilonese appartiene al periodo del Primo impero Babilonese. Oltre alle tavolette che riportano una serie di risultati, ve ne sono altre in cui sono presenti dei problemi con risoluzione, ed altre ancora di contenuto geometrico. Le numerose tavolette di natura aritmetica ed algebrica fecero prevalere a lungo l'idea che i Babilonesi padroneggiassero il calcolo e le operazioni aritmetiche. Si trovano calcoli di frazioni, di potenze, estrazioni di radici quadrate e cubiche. Inoltre sapevano risolvere problemi algebrici, dato il ritrovamento di soluzioni di equazioni di secondo e terzo grado, di risoluzione di sistemi algebrici con anche cinque equazioni e cinque incognite, ovviamente senza il simbolismo che oggi si considera quando si pensa all'algebra. Gli storici sono convinti della potenza algebrica e di calcolo della matematica babilonese.

2.1.1 Pi Greco nella matematica babilonese

Il minor numero di tavolette di natura geometrica, rispetto a quelle di natura aritmetica ed algebrica, ha fatto pensare per molto tempo che questi popoli non sapessero molto di geometria. Conoscevano sicuramente alcune tra le forme geometriche più elementari come il quadrato, il rettangolo, il triangolo ed il cerchio, di cui sapevano calcolare l'area ed i perimetri. Infatti i Babilonesi per i loro usi pratici ottenevano la circonferenza moltiplicando il diametro per 3. Da tutte le tavolette ritrovate risultava però che avessero capito che Pi Greco era una costante di proporzionalità, ma non risulta tale collegamento tra costante di proporzionalità e lunghezza/area/volume.

Nel 1936 a Susa furono ritrovate un gruppo di tavolette risalente al periodo dell'Antico Impero Babilonese, in cui vi è una migliore approssimazione di Pi Greco. Se si confronta questo valore con l'approssimazione del valore che si conosce oggi, esso rimane una delle migliori approssimazioni conosciute fino ad Archimede.

Si prendono in considerazione tre tavolette in cui è presente il valore di Pi Greco.

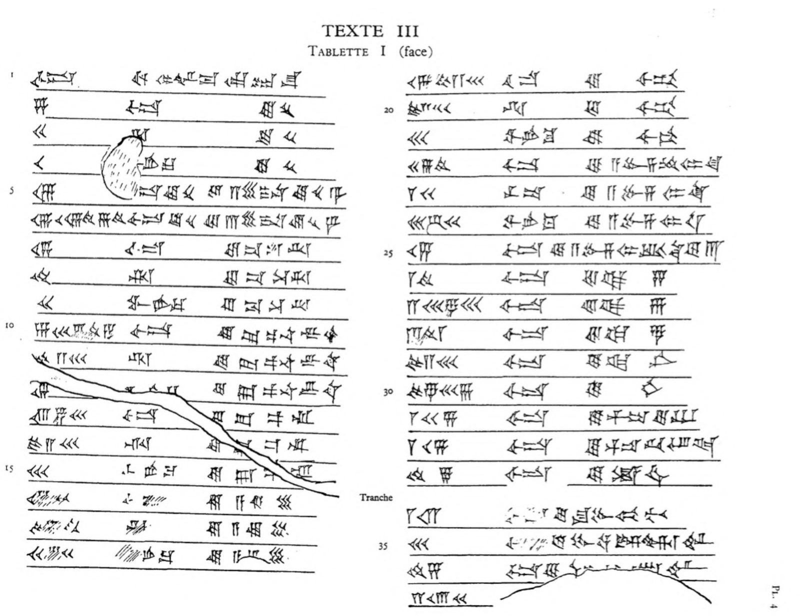


Figura 2.8: Tavoletta TMS 3 [11, PL.4].

La prima tavoletta che si prende in esame, Figura 2.8, è composta da un elenco di 70 costanti fisse e differisce dalle altre tavolette, contenenti elenchi di costanti, per la sua composizione sistematica. L'immagine sopra mostra solo la facciata davanti della tavoletta, perché è quella contente le constanti interessate. Nella prima colonna sono presenti dei numeri mentre a fianco vi è una descrizione di tali costanti.

La tavoletta può essere divisa in tre sezioni:

Prima sezione : costanti fisse per figure geometriche (riga 2-33).

Seconda sezione : costanti fisse per lavori, mattoni (riga 34-52).

Terza sezione : costanti fisse per i vari materiali (riga 53-70).

Mentre la prima riga contiene la descrizione del contenuto della tabella:

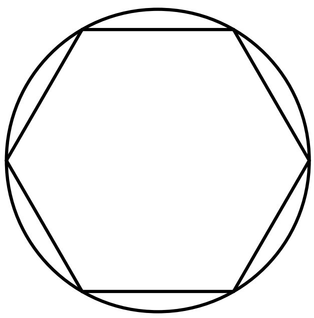
Costante fissa per la quale (deve essere moltiplicato) *quello che segue.* [11, p.27]

Le righe in cui compare Pi Greco sono la seconda, la terza, la quarta e la trentesima. Di seguito si riporta la traduzione [11, pp.27-28]:

Riga 2	$5'$	*costante fissa dell'anello* (cerchio)
Riga 3	$20'$	*della corda* (diametro) *dell'anello* (circonferenza)
Riga 4	$10'$	*della freccia* (raggio) *dell'anello* (circonferenza)
Riga 30	$57'36''$	*costante del ciclo* (cerchio più perfetto)

Il termine qui tradotto con anello [11] sarebbe *kippatim* che significa "cosa che curva". Questo termine veniva usato sia per indicare il cerchio pieno che il suo bordo, creando difficoltà di interpretazione. Le prime tre righe sopra riportate indicano rispettivamente i valori: $\frac{1}{4\pi}$, $\frac{1}{\pi}$ e $\frac{1}{2\pi}$ da cui facendo qualche calcolo si ottiene $\pi = 3$.

Dalla riga trenta invece si ottiene un valore migliore di π. Gli storici hanno ricostruito il possibile metodo con cui questo valore è stato ricavato. Dalle righe precedenti alla trentesima risulta che i Babilonesi conoscessero le aree di alcuni poligoni regolari con buona approssimazione, si è quindi pensato che questo valore di Pi Greco sia stato ricavato facendo il rapporto tra il perimetro di un esagono regolare e la circonferenza circoscritta ad esso.



Con semplici calcoli, sapendo che il lato dell'esagono regolare inscritto è uguale al raggio della circonferenza si ottiene:

$$\frac{6r}{2\pi r} = \frac{3}{\pi}$$

Con il valore dato dalla tavoletta $57'36''$ si ottiene un valore di Pi Greco di circa $3 + \frac{1}{8}$ che con la loro notazione possiamo scrivere come $\pi \approx 3; 7'30'' = \frac{25}{8} = 3,125$

Il Pi Greco compare, in un contesto più sofisticato rispetto ad altre popolazioni, attraverso il confronto sistematico tra due figure geometriche, anche se nella realtà esso non viene mai menzionato.

Nella tavoletta, Figura 2.9, chiamata YBC 7302 (*Yale Babylonian Collection*) ritrovata a Susa e risalente al Primo impero Babilonese viene calcolata l'area del cerchio.

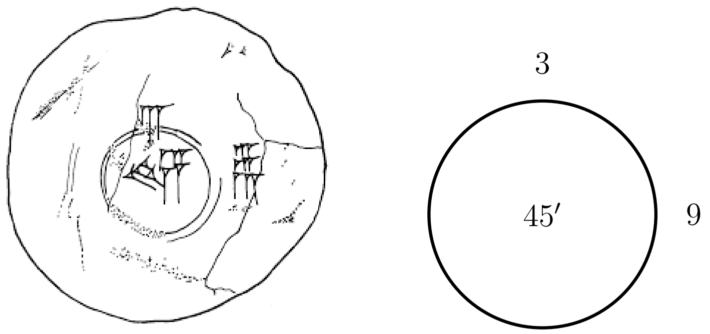


Figura 2.9: Tavoletta YBC 7302 circolare di raggio circa 4cm [52, p.112].

Come illustrato nella schematizzazione a destra, la posizione dei numeri indica il loro significato:

- 3 indica il contorno del cerchio, ovvero la lunghezza della circonferenza. Il contorno risulta per i Babilonesi la misura fondamentale.
- $45' = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$ indica l'interno del cerchio, ovvero la sua area.

I babilonesi calcolavano l'area sempre a partire dalla circonferenza anche se conoscevano il suo raggio. Con le nostre formule:

$$A = \frac{C^2}{4\pi}$$

Sostituendo i numeri della tavoletta si ottiene sempre $\pi = 3$. Il numero nove, a lato, indica il quadrato della circonferenza probabilmente inserito per facilitare i calcoli.

Anche nella tavoletta, Figura 2.10, chiamata YBC 11120 (*Yale Babylonian Collection*) viene calcolata l'area del cerchio utilizzando $\pi = 3$. Le posizioni dei numeri presenti hanno lo stesso significato esposto per la tavoletta YBC 7302.

Figura 2.10: Tavoletta YBC 11120 rettangolare di larghezza circa 8/10 cm e altezza 6 cm [13].

2.2 L'Egitto

Il termine Egitto deriva dal termine *Hut-ka-Ptah* (sacrario del Ka di Ptah) con cui gli Egizi indicavano la città di Menfi ed il territorio circostante, verso la metà del II millennio a.C.. Gli Egizi inoltre distinguevano la loro terra *Kemet* (la nera) dal deserto circostante chiamato *Deshert* (la rossa). La civiltà egizia spiccava per la sua raffinatezza nell'arte e la ricchezza di conoscenze tecnico-pratiche. Infatti il livello scientifico raggiunto era ispirato da esigenze pratiche. Gli Egizi non erano in grado di astrarsi dalla realtà percepita, il mondo fenomenico era per gli Egizi un essere vivente dalla cui volontà dipendevano gli avvenimenti. Le piene regolari del Nilo resero questa civiltà, a differenza di quelle mesopotamiche, fiduciosa e molto devota alla religione, il fiume infatti veniva considerato una divinità, dato che con le sue piene depositava limo che rendeva il terreno fertile ed adatto alla coltivazione. In questa regione non ci furono particolari influenze straniere, ma si susseguirono diverse fasi, che costituirono la continua evoluzione di questa civiltà.

Secondo gli storici queste popolazioni migrarono dal Sahara, diventata una zona arida, verso il Nilo. La disponibilità di acqua e la fertilità del terreno rendevano questa zona adatta alla vita. I primi insediamenti in questa regione risalgono al paleolitico, ma solo nel neolitico gli uomini si raggrupparono in comunità, più o meno grandi ed omogenee per razza e cultura, sempre in lotta tra di loro. Già nel periodo pre-dinastico, prima del 3000 a.C., apparvero le prime divinità locali ed anche la struttura statale si modificò attraverso un generale processo di aggregazione. Cominciarono a formarsi la lingua e la scrittura geroglifica, l'analogo della scrittura pittografica sumerica. A differenza della scrittura sumerica, che ebbe una vera e propria evoluzione, quella egizia rimase ferma alla scrittura geroglifica. Come nel caso sumerico però inizialmente i geroglifici indicavano solo gli oggetti, con il passare del tempo i segni utilizzati potevano indicare una lettera, come nella scrittura alfabetica, oppure potevano indicare una cosa o un concetto. Si svilupparono in Egitto altre due scritture: lo ieratico ed il demotico. Il primo si sviluppò quasi parallelamente al geroglifico ed era utilizzato sopratutto per le questioni burocratiche ed organizzative. Lo ieratico era la scrittura dei sacerdoti e consisteva in una specie di corsivo dei geroglifici. Lo ieratico ed il geroglifico erano rivolti agli iniziati, quindi si sviluppò molto più tardi il demotico che era la lingua popolare.

Attorno al 3000 a.C. si sviluppò anche la numerazione che, diversamente da quella mesopotamica, era decimale e non posizionale. Venivano utilizzati simboli speciali per rappresentare ciascuna potenza di dieci da 1 a 10^6. I numeri da uno a nove venivano rappresentati con delle stanghette di corda verticale[3], il dieci era un arco, il cento una corda arrotolata, il mille il fiore di loto, il diecimila il dito, il centomila il girino e il milione un uomo inginocchiato (Figura 2.11).

Utilizzando questi simboli gli Egizi erano in grado di scrivere qualsiasi numero intero: bastava affiancare i simboli sommando il loro valore per ottenere il numero desiderato. Anche in questa numerazione non esistevano lo zero e la virgola. Inoltre gli egizi, essendo molto concreti, utilizzando i numeri per affari, accettavano solamente frazioni dell'unità indicate con un ovale sopra al numero ad eccezione delle frazioni: $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$. Secondo alcuni storici gli Egizi non conoscevano le frazioni, in quanto le frazioni dell'unità erano sem-

[3]Probabilmente la scelta del simbolo della corda ricorda lo strumento che utilizzavano per le misurazioni. Gli antichi Egizi vengono anche chiamati oggi: *tenditori di corde*.

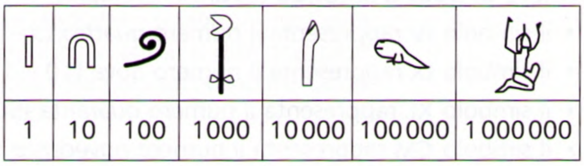


Figura 2.11: Numeri geroglifici [57].

plicemente l'inverso del numero. Nella pratica i numeri erano scritti in ieratico come si osserva nel Papiro di Ahmes.

Figura 2.12: Suddivisione in Alto e Basso Egitto [65].

Il paese era diviso in piccoli regni sotto l'autorità dei faraoni. Dalla coesione politica di più centri abitati, durante l'epoca arcaica (3000 a.C.-2686 a.C.), si arrivò alla costituzione di due entità statali:

- Basso Egitto: che comprendeva il delta del Nilo. Questa zona era molto fertile e meno estesa rispetto all'Alto Egitto. Il Basso Egitto era socialmente più evoluto. I simboli distintivi erano: corona rossa dei faraoni, l'avvoltoio e il papiro.

- Alto Egitto: era una zona umida in cui sono avvenuti i maggiori ritrovamenti. Questo regno era più forte ed organizzato di quello settentrionale. Tra le città importanti si ricorda Tebe. I simboli distintivi erano: corona bianca dei faraoni, il cobra, il giunco ed il loto.

Attorno al 3100 a.C. il faraone Menes (I dinastia) dell'Alto Egitto unificò i due regni con capitale Thinis. Il faraone era l'autorità assoluta, di natura divina, che governava e dirigeva il paese, portando la doppia corona con i colori dell'Alto e del Basso Egitto. Attraverso l'unificazione ci fu uno sviluppo straordinario della burocrazia, dell'amministrazione e dell'arte che si intensificò ancora maggiormente durate l'Antico Regno (2686 a.C.-2181 a.C.).

Dhoser fu il primo faraone della III dinastia, questo fu un periodo di grande prosperità economica e politica. Il territorio era suddiviso in *nomos* (province) amministrate da *nomarchi* nominati dal faraone. L'economia era incentrata sull'agricoltura. Accanto alle botteghe artigianali e ai grandi laboratori reali che istruivano i giovani nelle arti e nei mestieri, esistevano scuole inferiori solitamente private che, oltre a insegnare a leggere, scrivere e a far di conto, impartivano lezioni di letteratura, matematica e medicina.

Il crescente potere dei nomarchi, che diede origine ad una sorta di "feudalesimo", le invasioni dei beduini del deserto e una rivoluzione sociale nel Basso Egitto misero fine all'Antico Regno. Questo periodo caratterizzato da disordini prende il nome di Primo Periodo Intermedio (2181 a.C.-2055 a.C.), in cui si susseguirono le dinastie dalla VII alla X. L'Egitto era diviso in tre parti: il Delta in mano a popoli provenienti dall'Asia, il Centro sotto la monarchia con sede ad Eracleopoli ed il Sud sottomesso alla monarchia tebana.

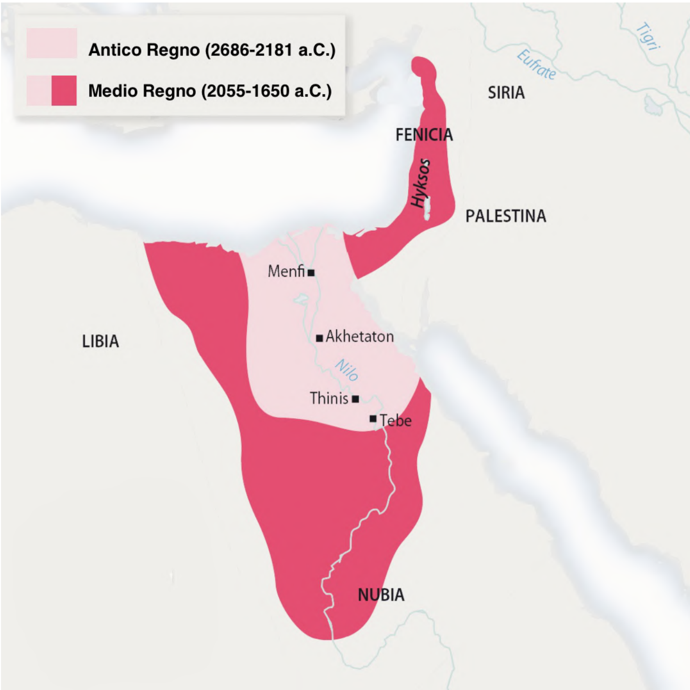


Figura 2.13: Medio Regno [53].

L'ordine venne ristabilito con l'avvento della XI dinastia sotto cui il paese venne riunificato nel periodo chiamato Medio Regno (2055 a.C.-1650 a.C.). Fu poi intrapresa dalla XII dinastia una grandiosa opera di riorganizzazione dello stato. La capitale fu spostata a Tebe e l'Egitto si estese fino alla seconda Cateratta. L'economia rifiorì come dimostrano gli intensi scambi commerciali con Creta. Lo sviluppo economico determinò il sorgere di una forte classe media di commercianti, artigiani e piccoli proprietari. Alcuni faraoni della XII dinastia abolirono i *nomoi* e crearono tre grandi province consolidando maggiormente l'unità del regno. È in questo periodo che si sviluppa maggiormente la matematica e lo testimoniano i papiri pervenuti fino a noi. Contemporaneamente a Babilonia governava Hammurabi ed anche per la civiltà mesopotamica fu un periodo d'oro per la matematica.

Il periodo di stabilità ottenuto durante il Medio Regno non durò a lungo e già con la XIII dinastia il regno si sgretolò dando inizio al Secondo Periodo Intermedio (1650 a.C.-1550 a.C.). L'Egitto venne invaso dagli Hyksos che si insediarono prima nel Delta del Nilo e poi presero tutto il regno. Fu un periodo di guerre con un conseguente calo dello sviluppo matematico.

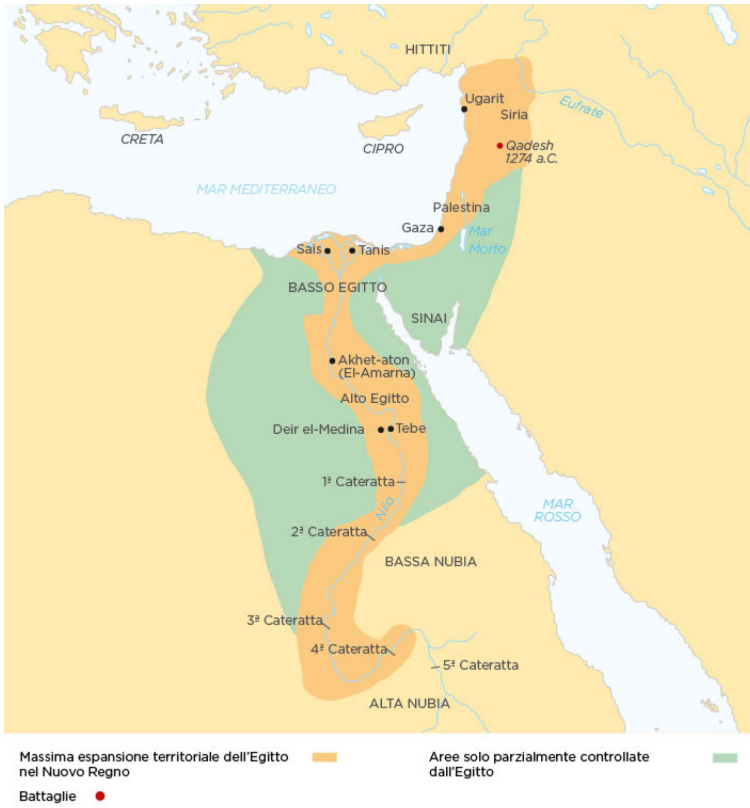


Figura 2.14: Nuovo Regno [69].

Sussisteva a Tebe una piccola monarchia (XVII dinastia) che nonostante fosse vassalla degli Hyksos conservava una certa autonomia. Con la XVII dinastia cominciarono le rivolte per liberare l'Egitto, ma solo con la XVIII dinastia questo avvenne dando inizio al Nuovo Regno (1550 a.C.-1069 a.C.). Fu un periodo di grande ricchezza, il lusso si sviluppò considerevolmente. Della XIX dinastia si ricorda il faraone Ramesse II con cui l'Egitto raggiunse il culmine della propria potenza economica e militare, inoltre affrontò il re degli Hittiti nella battaglia di Qadesh (1274 a.C.circa), che comportò il riconoscimento di una certa egemonia egizia sulle zone mediterranee fenicie e sulla terra di Canaan.

Durante il Terzo Periodo Intermedio (1069 a.C.-322 a.C.), in cui si susseguirono le dinastie dalla XXI alla XXX, l'Egitto conobbe un periodo di decadenza e dominazione straniera. Durante questo periodo l'Egitto fu invaso ben due volte dagli Assiri, dai Babilonesi, dai Nubiani, dai Greci e dai Persiani. Fu con Cambise di Persia, considerato l'iniziatore della XXVII dinastia persiana, che si chiudeva la fase di indipendenza dell'Egitto faraonico.

Questa fase di dominazione di popoli stranieri sull'Egitto si concluse con la conquista da parte di Alessandro Magno, che venne accolto benevolmente dalla popolazione. Fondò in una baia strategica Alessandria d'Egitto che diventò uno dei maggiori centri culturali dell'antichità. Alla sua morte i generali del suo esercito sterminarono la sua famiglia e si spartirono il suo impero. Tolomeo I prese l'Egitto dando inizio alla dinastia Tolemaica (323 a.C.-30 a.C.), greci e macedoni, che per tre secoli regnò sul paese attraverso una monarchia assoluta che si richiamava alla tradizione faraonica. La dinastia Tolemaica finì con la conquista romana che fece diventare l'Egitto una provincia attorno al 30 a.C..

Malgrado i regni frammentati nei secoli, la civiltà egizia fu caratterizzata da grande unità culturale. Grazie ai papiri giunti fino a noi si hanno testimonianze della matematica egizia. Rispetto alle tavolette di argilla Babilonesi, il facile deterioramento del papiro ha fatto sì che pochissimi documenti siano arrivati fino a noi in buone condizioni. I principali sono:

- Papiro di Ahmes (dal nome dello scriba) o di Rhind (dal nome dell'antiquario che lo acquistò) è il più esteso papiro di contenuto matematico pervenuto fino a noi. Risale al 1650 a.C. ma lo scriba, Ahmes, dice di aver trascritto un papiro del Medio regno (2000 a.C.-1800 a.C.). È scritto in ieratico, conservato al British Museum a Londra e si trovano dei commenti dello scriba in rosso. Il papiro è composto da 84 problemi di vario genere: geometrici, algebrici e aritmetici.

- Papiro di Mosca risalente al 1850 a.C. scritto in ieratico, consiste in nove frammenti della parte iniziale, andata quasi completamente perduta, e un segmento più lungo. Conservato nel Museo di belle arti di Mosca. Contiene 25 problemi tra cui i più rilevanti sono il calcolo del volume di un tronco di piramide e quello dell'area di una superficie curvilinea.

- Papiro di Berlino risalente al 1800 a.C. che contiene 4 problemi di cui solo uno completo essendo malridotto.

- Papiro di Cuoio che risale allo stesso periodo del Papiro di Ahmes e contiene elenchi di frazioni dell'unità.

- Papiro di Kahun 1800 a.C. circa contenente frammenti matematici sparsi non tutti decifrati.

- Papiro di Reisner 1800 a.C. circa che consiste in quattro rotoli tarlati usati per registrare calcoli volumetrici dei templi.

Nei papiri non si trovano né teoremi né formule generali, anche se probabilmente formule generali dovevano essere presenti nel substrato. In generale comunque, nei papiri sono contenuti problemi riguardanti la vita quotidiana, alcuni risolti con una particolare ricetta (algoritmo risolutivo specificato), altri in cui viene semplicemente dato il risultato. Un esempio di entrambe le caratteristiche si riscontra proprio nei problemi riguardanti Pi Greco.

Figura 2.15: Papiro di Ahmes lungo 216cm e largo 32 cm [14].

2.2.1 Pi Greco nella matematica Egizia

I continui straripamenti del Nilo con la conseguente cancellazione dei confini dei campi resero indispensabile la figura dell'agrimensore. Alcuni sostengono che in Egitto più che la geometria fosse sviluppata la geodesia; misurazione di vaste aree di terreno. Ad ogni modo a differenza della matematica mesopotamica, visto che il sistema di numerazione non era posizionale, le addizioni e le sottrazioni erano abbastanza semplici bastava raggruppare i simboli sommarli/sottrarli e sostituirli con gli opportuni simboli. Per quanto riguarda le moltiplicazioni e le divisioni invece gli egizi utilizzavano le potenze di due. Per la moltiplicazione scrivevano in binario arbitrariamente uno dei due fattori fermandosi una volta che veniva superato il fattore scelto, nell'esempio il 41. Dopo di che ripercorrevano la tabella così ottenuta e segnavano i fattori che scomponevano il numero e sommavano le potenze ottenute del secondo fattore.

Esempio 3. Tratto dal Papiro di Ahmes: 41×59. Viene scelto 41 come fattore da scomporre tramite potenze di due:

(2^0)	1\	59	(59×1)
(2^1)	2	118	(59×2)
(2^2)	4	236	(59×4)
(2^3)	8\	472	(59×8)
(2^4)	16	944	(59×16)
(2^5)	32\	1888	(59×32)

Infatti: $1 + 8 + 32 = 41$ ed il risultato della moltiplicazione viene ottenuto: $41 \times 59 = (1 + 8 + 32) \times 59 = 59 + 472 + 1888 = 2491$. La divisione aveva un procedimento analogo.

Le testimonianze riguardo a Pi Greco si trovano nel Problema 50, in cui viene calcolata l'area di un cerchio, e nel Problema 49, in cui si trova un disegno con un probabile metodo di calcolo.

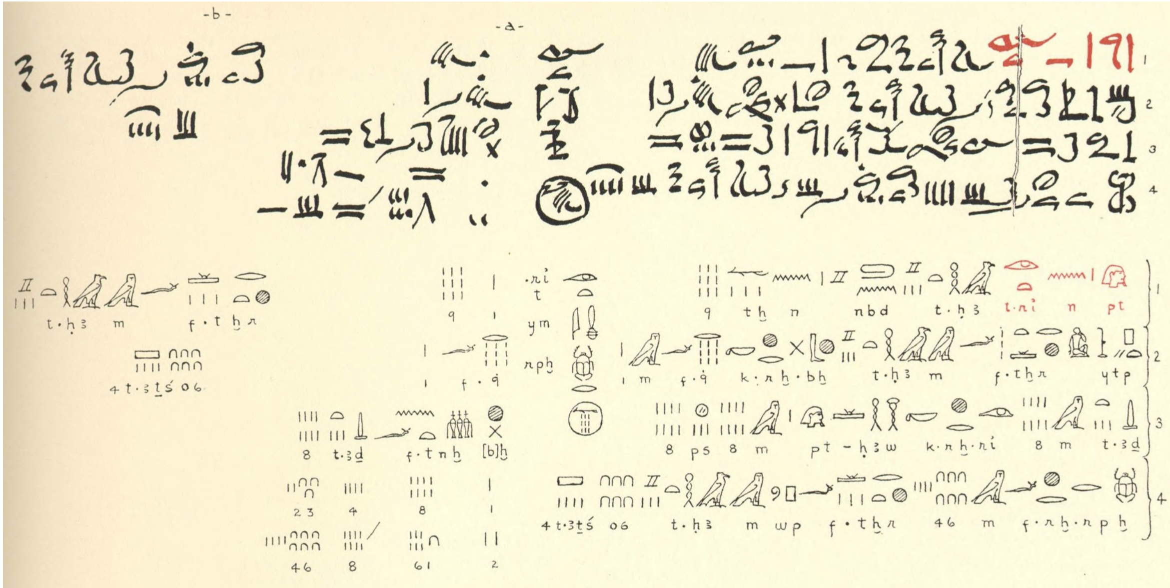


Figura 2.16: Problema 50 [47].

Problema 50

Metodo per calcolare un pezzo di terra circolare di diametro di 9 khet. Qual è la superficie di terra?

Tu devi sottrarre la nona parte di esso, cioè 1 resto 8. Devi moltiplicare 8 volte otto, diventa 64. Questa è la sua area di terra, 64 setat.

		1	8
		2	16
$\frac{1}{9}$	9	4	32
9	1	8\	64
		8	64

Facendo i passaggi descritti dallo scriba con la notazione simbolica moderna si ottiene:

$$9 - \frac{1}{9} \cdot 9 = 8$$

$$8 \cdot 8 = 64$$

Da cui si ottiene che la formula dell'area del cerchio per gli Egizi era la seguente:

$$A = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

Da questa formula si ottiene come valore di Pi Greco: $\pi = \frac{256}{81} \approx 3,1605$.

In questo problema lo scriba da una "ricetta" risolutiva. Pi Greco non viene mai citato e la superficie del cerchio viene assimilata a quella di un quadrato. Si potrebbe quasi considerare come la prima ricerca della "quadratura del cerchio".

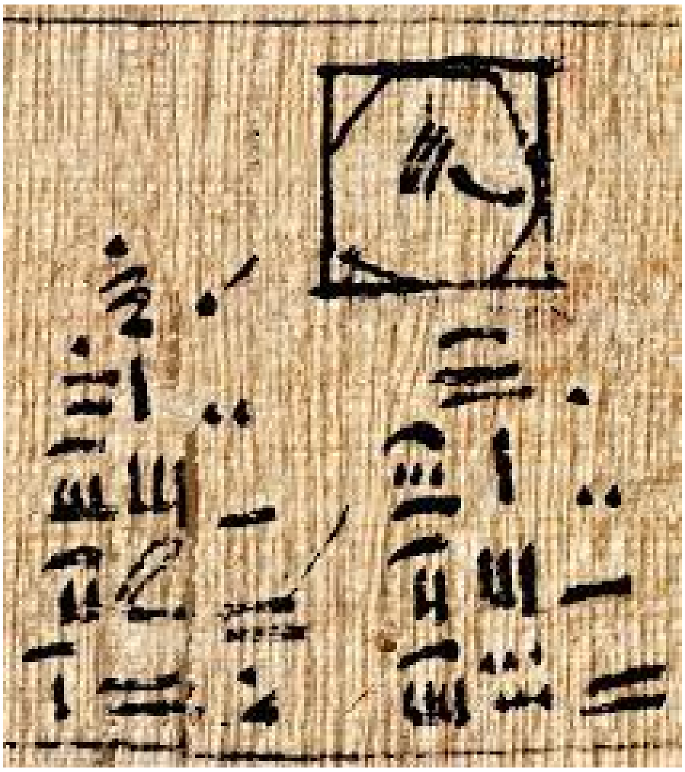


Figura 2.17: Problema 48 [49].

Problema 48

\1	9	1	8
2	18	2	16
4	36	4	32
\8	72	\8	64
9	81	8	64

Questo problema risulta privo di testo, ma presenta una figura e due operazioni: 9×9 e 8×8. Il problema 48, strettamente legato al problema 50 suggerisce un'idea di come gli Egizi abbiano fatto a risolvere il problema 50. Sono state date diverse interpretazioni a questo problema da diversi storici. Essenzialmente di due tipi:

1. Gli egittologi Peet-Chace hanno visto il paragone tra l'area del quadrato di lato *9 khet* e quella del cerchio di diametro *9 khet*.

2. Gli storici Kurt Vogel e R.J.Gillings sostengono invece che la figura all'interno del quadrato sia un ottagono irregolare.

Ci si sofferma ad analizzare questa seconda interpretazione. Entrambi gli storici della matematica citati concordano sull'interpretazione da dare alla figura, ma non sul procedimento che potrebbe aver portato Ahmes al risultato dell'area del cerchio.

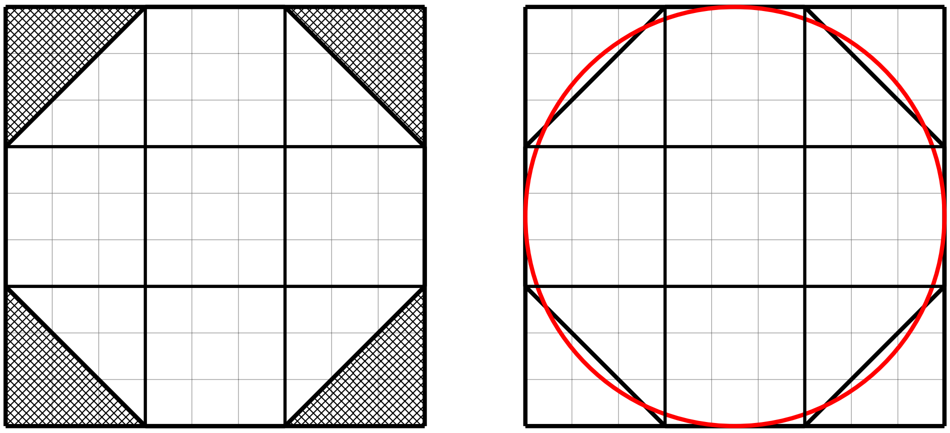


Figura 2.18: Primo schema usato da Vogel, secondo schema usato da Gillings.

Kurt Vogel riporta una figura modificata ed afferma che l'area del cerchio è stata trovata eliminando dall'area del quadrato i quattro triangoli rettangoli tratteggiati. Si ricava quindi:

$$9^2 - 4 \cdot \frac{9}{2} = 63$$

Dato che 63 corrisponde all'area di un quadrato di lato $\sqrt{63}$ che è approssimativamente $\sqrt{64} = 8$ ecco come gli Egizi hanno trovato l'area del cerchio.

R.J.Gillings immagina che lo scriba abbia fatto un disegno come quello in alto a destra, quindi osservato che l'ottagono era in estensione uguale al cerchio. Questo perché le porzioni di cerchio esterne all'ottagono equivalgono per estensione circa a quelle interne all'ottagono. Una volta notato ciò lo scriba tracciando tutte le linee necessarie avrebbe potuto evidenziare le unità di area (quadretti) e conteggiare quelle dell'ottagono. Calcolando le aree dei due rettangoli superiori lo scriba si sarebbe accorto che valevano $9setat$ e potevano perciò ricoprire la prima fila di unità di area del quadrato. Analogamente per i due triangoli inferiori che potevano ricoprire la prima colonna di unità areali del quadrato. Concludendo che l'area del cerchio di raggio $9khet$ era uguale all'area del quadrato di $8khet$.

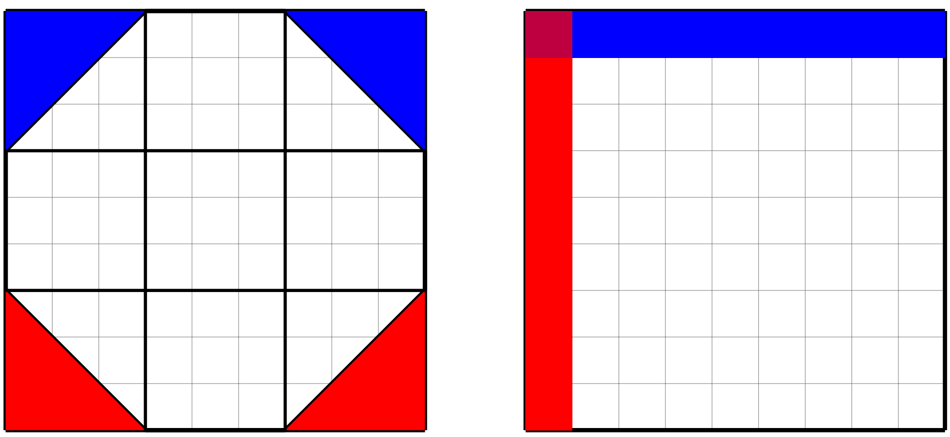


Figura 2.19: Schemi utilizzati da Gillings.

Osservazione 1. Nell'interpretazione di Vogel dall'area dell'ottagono si ottiene:

$$\frac{7}{9} \cdot d^2 = \frac{7}{9^2} \cdot 9 \cdot d^2 = \frac{63}{81} \cdot d^2$$

da cui, per approssimazione, si ottiene la formula dell'area del cerchio trovata nel Problema 50: $(\frac{8}{9} \cdot d)^2$. Secondo Giacardi-Roero [30] questo metodo ed il valore di Pi Greco che ne deriva è poco significativo. Infatti dal confronto si ottiene:

$$\pi \cdot \frac{d^2}{4} = \frac{63}{81} \cdot d^2$$

$$\pi = 63 \cdot \frac{4}{81} \approx 3,11$$

Si è visto che gli Egizi conoscevano una approssimazione migliore di Pi Greco:

$$\pi = 64 \cdot \frac{4}{81} \approx 3,1605$$

Osservazione 2. Si noti che il quadrato in alto a sinistra, colorato in viola nella Figura 2.19, utilizzando questo metodo viene contato due volte ed è infatti l'unità di area per cui differiscono i due ragionamenti fatti da Vogel e Gillings.

Kurt Mendelssohn ipotizzò che gli Egizi conoscessero anche approssimazioni migliori di Pi Greco rispetto a quella che si ricava dal Problema 50. Sostenendo però che una simile conoscenza sarebbe stata puramente sperimentale, perciò non significativa dal punto di vista matematico. Infatti molti sostengono che si trovi un valore molto preciso di questo numero nella piramide di Cheope. Il rapporto tra l'altezza ed il perimetro, grazie all'angolo di inclinazione delle facce (51°52′), risulta $\frac{1}{2\pi}$ da cui otteniamo $\pi \approx 3.141$. La spiegazione, secondo Mendelssohn, risiede nelle diverse unità di misura usate dagli Egizi. Infatti questa popolazione non utilizzava le stesse unità di misura per distanze verticali ed orizzontali. Per l'altezza della piramide usavano il cubito reale, mentre per le misure della base, avendo bisogno di un metodo più accurato, facevano ruotare un cilindro contando il numero delle sue rotazioni (cubito ruotato). I rapporti secondo cui gli egiziani edificavano le piramidi risultano: $4 : 1$ e $3 : 1$. Considerando il primo rapporto l'altezza della piramide risulta $4 \cdot n$ cubiti, dove n indica il numero scelto per determinare la dimensione. La distanza orizzontale dal centro della piramide al lato risulta n cubiti ruotati, cioè $n\pi$. Il perimetro della piramide risulta quindi: $8n\pi$ cubiti. Dal rapporto si ottiene: $\frac{4n}{8n\pi} = \frac{1}{2\pi}$.

Erodoto sostenne però che la piramide fu costruita in modo tale che l'area di ogni faccia laterale fosse uguale all'area di un quadrato di lato uguale all'altezza della piramide. Si può mostrare che una simile richiesta per la costruzione di qualsiasi piramide rende automaticamente un'approssimazione di Pi Greco.

Punti deboli della matematica pre-ellenica

Alcuni storici sono poco convinti della grandezza della matematica babilonese ed egizia affermando, come sostiene Klein [46], che queste civiltà riconoscessero a malapena la matematica come una disciplina autonoma. Questa affermazione di alcuni storici viene spesso supportata da argomenti come:

1. La mancanza di regole generali.
2. L'assenza di dimostrazioni.
3. La mancanza di astrazione.
4. Il non riconoscimento della differenza tra risultati approssimati ed esatti.
5. La non esistenza di una disciplina separata che si potesse chiamare con il nome di "matematica" e che venisse studiata per un interesse specifico.

Nella matematica babilonese ed egizia sono presenti alcune lacune evidenti. Nelle tavolette e nei papiri che sono stati ritrovati sono presenti solo problemi specifici e nessuna regola generale o formulazione di teoremi. Appare però evidente, come dimostrano le tavolette citate ed anche altre come la famosa *Plimpton 322* riguardante le terne pitagoriche, che nel substrato fosse presente qualcosa di simile a delle regole, altrimenti si dovrebbe attribuire al caso la somiglianza di vari problemi con dati diversi. Lo stesso avviene nei papiri, in cui si trovano vari problemi simili in cui cambiano solo i numeri. Probabilmente la ripetizione di problemi di tipo simile costituivano esercizi per gli scolari da eseguire con certi metodi o regole. In ogni caso il semplice fatto che problemi che richiedono algoritmi specifici siano raggruppati insieme, sia nei papiri che nelle tavolette, può fornire una prova al fatto che ci fosse una certa comprensione della generalità delle regole soggiacenti.

La critica riguardante la mancanza di dimostrazioni va interpretata nel giusto modo, cioè esaminando ciò che si intende con il termine *dimostrazione*. Sicuramente non vi sono tracce di dimostrazioni nel senso in cui lo si intende al giorno d'oggi. Oggi una dimostrazione rigorosa che non sia simbolica risulta inconcepibile. L'assenza di dimostrazioni nei papiri e nelle tavolette implicherebbe la mancanza di un approccio scientifico alla matematica. In senso moderno una dimostrazione è un procedimento basato sulla deduzione assiomatica che segue una concatenazione di ragionamenti partendo dall'enunciato iniziale alla conclusione finale, ma anche il concetto di dimostrazione non è sempre stato questo, ma si è evoluto nel tempo. Nei papiri e nelle tavolette si riscontra una grande abilità tecnica di calcolo ed una consapevolezza dell'applicabilità di alcuni procedimenti ed insiemi di risultati. Inoltre si evince l'importanza del verificare i risultati ottenuti, mediante sostituzione della soluzione nel problema iniziale o con l'utilizzo di operazioni inverse. Forse allora si potrebbero considerare queste verifiche nella matematica delle civiltà antiche come una forma di "dimostrazione" primitiva. Si può notare, inoltre, sopratutto nei papiri, ma anche nelle tavolette, l'uso di algoritmi risolutivi per problemi pratici. In questi procedimenti algoritmici si ritrovano chiarezza e semplicità nella descrizione delle procedure da eseguire passo passo, inoltre viene indicata la soluzione ottenuta dopo aver completato la serie di operazioni descritte nell'algoritmo.

Per la questione riguardante la mancanza di distinzione tra risultati approssimati ed esatti, dai documenti arrivati fino a noi, non è possibile rispondere a questo quesito. Si ricorda che con la notazione posizionale sessagesimale sono rappresentabili un'infinità numerabile di numeri. Quali numeri si potevano rappresentare? L'analogo dei nostri numeri decimali, ma a base sessanta. Con la notazione babilonese si possono rappresentare tutti gli interi ed i razionali il cui denominatore si fattorizza con i primi: 2,3,5.

Definizione 2.1. Sia $B > 1$ un numero naturale. Un numero regolare D a base B è un numero razionale rappresentabile come frazione della forma:

$$D = \frac{d}{B^k} \text{ con } d \in \mathbb{Z} \text{ e } k \in \mathbb{N}$$

Osservazione 3.
- Tutti i numeri naturali sono regolari a base B.
- D non determina univocamente d e nemmeno k.
- Sommando e moltiplicando numeri regolari a base B si ottengono ancora numeri regolari a base B.
- I numeri regolari a base fissata B costituiscono un sotto-anello dell'anello $\mathbb{Q}$ dei razionali. Dato che non è detto che l'inverso moltiplicativo di un numero regolare sia regolare non costituiscono un sotto-campo di $\mathbb{Q}$. Infatti mentre 7 è un numero regolare a base sessanta $\frac{1}{7}$ non lo è, perché non esiste alcun intero d per cui si abbia $7 \cdot d = 60^k$ per qualche k.

I Babilonesi riuscivano quindi a rappresentare solo i numeri regolari a base sessanta. Nella tavoletta in cui sono riportati gli inversi dei numeri tra due e sessanta vediamo come l'autore quando si tratta di calcolare gli inversi dei numeri 7, 11, 13, $\ldots$, 59 dica che sia impossibile. Gli Egizi invece consideravano come numeri tutti gli interi, le frazioni dell'unità e $\frac{2}{3}$.

L'ultima critica spesso rivolta alla matematica di queste civiltà antiche è che fosse una matematica puramente pratica ed utilitaristica e non rivolta ad una ricerca intellettuale. Le opinioni degli storici sono discordanti, M. Cipolla sostiene che:

La matematica Babilonese avesse di mira esclusivamente finalità pratiche. [10, p.61]

Altri storici come Ettore Bortolotti sostengono, come riportato nell'edizione italiana [10, p.61] del celebre testo di Boyer, che:

La matematica dei Sumeri non era usata per la soluzione di problemi della vita pratica, ma soltanto per divertimento o per ricreazione dello spirito.

Nessuna delle due tesi può essere validamente sostenuta. La verità probabilmente sta tra le due tesi, naturalmente la maggior parte della matematica pre-ellenica presenta un carattere pratico, ma non era tutta orientata in questo senso. In ogni caso la ricerca matematica come attività fine a se stessa, atteggiamento mentale derivante dai greci, presuppone l'esistenza di una classe agiata, libera da preoccupazioni di sopravvivenza e sostentamento.

2.3 Eudosso, Euclide ed Archimede

Dopo che in Egitto ed in Mesopotamia furono trovati valori di questa costante, per un migliaio di anni nessuno dedicò più molte attenzioni al rapporto tra cerchi e diametri, in quanto si riteneva che la comprensione elementare del rapporto fosse sufficiente ai fini dell'agrimensura e della costruzione di edifici.

Bisogna fare un salto di quasi mille anni per ritrovare un interesse nello studio di questo rapporto. I Greci furono i primi nella storia che non si limitarono ad indagare sulla misurazione di terreni e sulle quantità, ma si interessarono alla ragione ed all'esplorazione di idee. Gli storici ritengono che i Greci entrarono in contatto ed assorbirono le culture mesopotamica ed egizia grazie agli scambi commerciali, ma non si limitarono ad apprenderle anzi le svilupparono in maniera così profonda e radicale che la matematica greca assunse ben presto un aspetto totalmente diverso da quella egizia e babilonese. I Greci riuscirono ad esprimere in una nuova forma astratta ed oggettiva le verità fondamentali della matematica. Mentre gli Egizi erano incentrati sulla vita dopo la morte ed i Babilonesi sulla ricerca del benessere nella vita terrena, l'uomo greco era caratterizzato da un sentimento di fiducia nelle proprie capacità, grazie al quale riuscì a sviluppare la conoscenza, che da questo momento in avanti progredì a dismisura. Fu un'epoca aurea per il pensiero e la matematica e nonostante il rapporto fra lunghezza della circonferenza e diametro non fosse il problema più importante del tempo, molte tra le più illustri menti matematiche ne vennero attratte.

La nascita della civiltà greca

Accanto alla Mesopotamia ed all'Egitto altre importanti civiltà sorsero nel bacino del Mediterraneo fin dall'antichità. La presenza di genti indoeropee, costituenti il primo nucleo della popolazione greca di età storica, si rintraccia nella penisola ellenica e non solo a partire dal 2000 a.C.-1800a.C.. In questo periodo le regioni del mondo egeo, come Creta, l'area delle Cicladi ed alcune terre del vicino Oriente entrarono tra loro in un fecondo rapporto di scambio culturale.

Attorno al XIII secolo a.C. i Dori penetrarono gradualmente nella penisola assimilando la cultura preesistente. Le tribù doriche non si fermarono tutte in Grecia, alcune conquistarono l'impero Hittita, altre si spinsero in Egitto, dove vennero cacciate dopo anni di lotta, infine si insediarono probabilmente in Sardegna e nell'Etruria. Quest'invasione provocò una vasta migrazione greca. I nuovi coloni occuparono in modo pacifico le isole dell'Egeo e le coste dell'Asia Minore, fondando centri come Chio, Samo, Rodi, Creta, Mileto, Efeso e non solo. Con la fine dei palazzi micenei e la migrazioni doriche si entra nei secoli meno conosciuti, per questo definiti bui, della storia greca (XI-IX secolo a.C.) alla fine dei quali emerse la *polis*. In un primo tempo la *polis* aveva un carattere aristocratico; solo i nobili, i ricchi proprietari terrieri, gli allevatori di bestiame ed i detentori del potere economico avevano gli stessi diritti e doveri. Il popolo era costituito da piccoli e medi contadini che lavoravano i terreni e non possedevano nulla essendo perciò al servizio degli aristocratici.

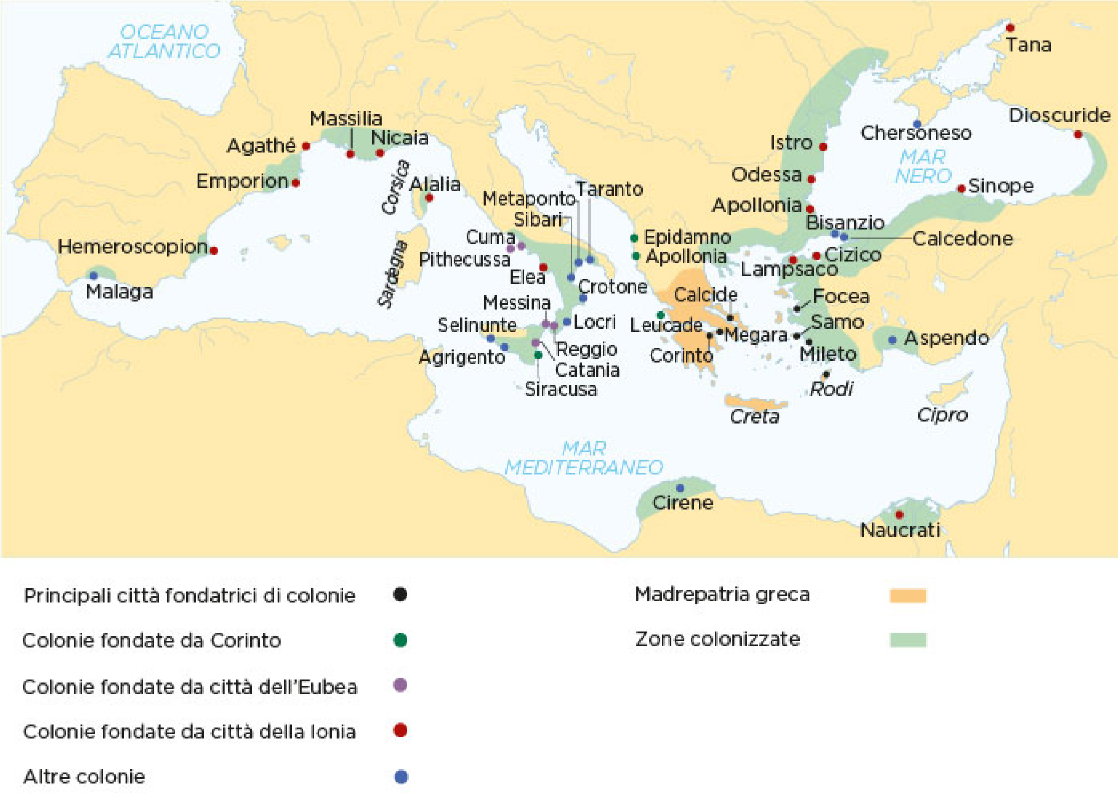


Figura 2.20: Le principali località della colonizzazione greca [73].

Nell'VIII secolo a.C. la crisi agraria fu una delle principali cause della grande migrazione della popolazione greca verso l'Italia meridionale, la Spagna, la Francia e l'Africa. I Greci emigrati, accolti volentieri dai coloni, fondarono città che divennero presto ricche e famose come: Metaponto, Siracusa, Messina, Elea, Agrigento, Reggio, Marsiglia, Malaga e Cirene. La cultura e la civiltà greca si diffusero in tutto il Mediterraneo e si intensificarono gli scambi economici e commerciali. In patria invece, i mercanti e gli artigiani cominciarono a reclamare una parte del potere. Tra il VII e VI secolo a.C. ad Atene, Mileto, Corinto e Samo la *polis* aristocratica cadde nelle mani di un tiranno che favorì il popolo a discapito degli aristocratici, avviando la democrazia. Atene fu una della prime città a sperimentare questa forma di governo, mentre a Sparta vi era un'oligarchia militare. Cominciò un periodo di lotte interne per la successione e di conflitti esterni tra queste due potenze.

Con l'avvento della minaccia persiana le controversie tra queste due civiltà cessarono momentaneamente. Il re persiano Ciro il grande aveva conquistato il regno di Lidia, Babilonia, e le terre da questi conquistate. Alla sua morte gli succedette Cambise di Persia che estese l'impero all'Egitto fino all'Etiopia. La conquista persiana attorno al VI secolo a.C. dilagava a macchia d'olio. A Cambise succedette Dario che promosse riforme amministrative per tenere unito il vasto impero, rafforzò l'esercito e continuò l'espansione. La ribellione greca contro i persiani scoppio attorno al 499 a.C. per opera della città di Mileto, diffondendosi rapidamente anche nelle regioni settentrionali e meridionali. La rivolta terminò nel 494 a.C. quando i persiani rasero al suolo Mileto e sterminarono i suoi abitanti. Nel 490 a.C. la flotta persiana conquistò la isole Cicladi, ma venne fermata a Maratona dall'esercito ateniese. Nel 486 a.C. il trono persiano passò al figlio Serse che dovette dominare le rivolte sorte in Egitto ed in Mesopotamia. I persiani sferrarono un altro attacco sconfiggendo gli spartani alle Termopili, per poi puntare su Atene dove però vennero sconfitti dalla flotta ateniese. Per timore di un nuovo attacco persiano nel 477 a.C. Atene, le città dell'arcipelago e della costa asiatica formarono la lega di Delo. Con gli anni questa alleanza si tramutò in un insieme di città suddite di Atene. Questo periodo fu molto fruttuoso per la cultura e l'arte antica.

Passato il pericolo persiano ritornarono a galla le antiche ostilità tra Atene e Sparta che culminarono nella prima (460 a.C.-445 a.C.) e seconda (431 a.C.-404 a.C.) guerra del Peloponneso. In questo periodo si susseguirono lotte e trattati di pace, che durarono più di metà secolo. Tra queste continue lotte si insinuarono i Tebani che riuscirono a sconfiggere Sparta e diedero inizio ad un decennio di egemonia tebana (371 a.C.-362 a.C.), alla fine del quale si aprì un periodo di grande incertezza militare e politica. Anche la lega marittima di Atene mostrava segni di cedimento ed instabilità, che sfociò in una rivolta generale (357 a.C.) al termine della quale Atene si vide costretta a riconoscere l'indipendenza delle città alleate.

Mentre l'attività intellettuale in Egitto e Mesopotamia si stava esaurendo una nuova cultura stava sbocciando lungo le coste del Mediterraneo. Si presume che alcuni rudimenti del calcolo si siano diffusi nella civiltà greca, lungo tutto l'arco di tempo descritto, attraverso le attività mercantili con i centri del sapere in Egitto ed a Babilonia. Sulla matematica precedente al VI secolo a.C. non si hanno notizie. Nel VI secolo a.C. con l'istituzione della scuola ionica (Talete di Mileto, Anassimandro ed Anassimene) e la scuola pitagorica (Pitagora) la matematica greca si sviluppò realmente, anche se non si possiede nessun documento matematico o scientifico fino al tempo di Platone (IV secolo a.C.). Il sistema, più antico, di numerazione usato dai greci era a base dieci e non posizionale, chiamato sistema attico-acrofonico (si veda Figura 2.21) . Questo sistema di numerazione era molto primitivo e si basava sulla giustapposizione di simboli, come per la numerazione egiziana e la successiva numerazione romana.

Figura 2.21: Numerazione attico-acrofonica [36].

Questa numerazione era di facile lettura ma inadatta al calcolo, tant'è che non si hanno notizie, visto la mancanza di documenti scritti, su come i greci svolgessero le operazioni. Attorno al V secolo a.C. il sistema di numerazione attico venne sostituito dal sistema alfabetico o ionico, anch'esso a base dieci e non posizionale. Questo sistema di numerazione consisteva nell'utilizzo di segni dell'alfabeto greco ai quali veniva assegnato un valore numerico determinato dalla posizione che il segno occupava nell'alfabeto (si veda Figura 2.22).

1 = Α	10 = Ι	100 = Ρ	1000 = ,Α
2 = Β	20 = Κ	200 = Σ	2000 = ,Β
3 = Γ	30 = Λ	300 = Τ	3000 = ,Γ
4 = Δ	40 = Μ	400 = Υ	4000 = ,Δ
5 = Ε	50 = Ν	500 = Φ	5000 = ,Ε
6 = ζ	60 = Ξ	600 = Χ	6000 = ,ζ
7 = Ζ	70 = Ο	700 = Ψ	7000 = ,Ζ
8 = Η	80 = Π	800 = Ω	8000 = ,Η
9 = Θ	90 = ϙ	900 = ϡ	9000 = ,Θ

Figura 2.22: Numerazione alfabetica [44].

In questo sistema le unità venivano contrassegnate da un apice collocato in alto a destra del segno, mentre per le migliaia l'apice era in basso a sinistra. In questo modo i greci erano in grado di scrivere tutti i numeri fino a 9999, a partire dal diecimila la notazione ionica seguiva un principio moltiplicativo; i simboli del numero venivano scritti sopra ad una M, ciò indicava che bisognava fare il prodotto del numero per diecimila. Con questo sistema i greci erano in grado di rappresentare i numeri fino a 10^8, quindi anche questo sistema numerico aveva dei grossi limiti. Era difficile compiere operazioni matematiche con la numerazione alfabetica, che risulta quindi un sistema più arretrato rispetto al più antico sistema di numerazione Babilonese. Probabilmente per fare i conti i greci utilizzavano l'abaco. L'inadeguatezza ed inefficacia del sistema numerico non precluse ai greci di sviluppare in modo profondo certi campi della matematica.

Verso la metà del V secolo a.C. sotto il nome di scuola eleatica si erano riuniti un certo numero di pensatori tra cui: Parmenide e Zenone. È universalmente riconosciuta la notevole influenza che questo focolare intellettuale esercitò sul pensiero antico. Dopo la scuola eleatica ci fu un altro importante matematico della cultura greca: Ippocrate da Chio, che dimostrò la possibilità di quadrare le lunole. Era la prima volta nella storia della matematica che si quadrava una figura curva, questo fece credere ai matematici che la quadratura del cerchio[4] fosse possibile.

A cavallo tra il V e IV secolo a.C. le testimonianze riguardanti la matematica sono scarse tuttavia questa mancanza è compensata dagli scritti dei filosofi che erano al corrente della matematica del tempo, tra cui Platone ed Aristotele. Il ruolo di Platone nella storia della matematica è ancora oggi molto discusso dagli storici, mentre tutti concordano nell'affermare che Platone ebbe un grande influsso sullo sviluppo di questa disciplina. L'accademia platonica di Atene diventò il centro mondiale della cultura e della matema-

[4]Uno dei tre problemi famosi dell'antichità: la quadratura del cerchio, la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo con riga e compasso.

tica. Fu proprio da questa scuola che provennero imminenti studiosi ed insegnati attivi attorno alla metà del IV secolo a.C., tra cui: Eudosso di Cnido (408 a.C.-355 a.C.).

2.3.1 Eudosso di Cnido

Eudosso nacque a Cnido città sulle coste dell'attuale Turchia, fu matematico, filosofo ed astronomo dell'antichità. In giovane età viaggiò verso Atene, che all'epoca era il più grande centro culturale del Mediterraneo, e diventò allievo di Platone. Non molti anni prima, la scoperta di grandezze incommensurabili aveva provocato un vero e proprio scandalo arrecando grandi danni ai teoremi che implicavano proporzioni. Gli storici ipotizzano che il primo incontro con le grandezze incommensurabili sia avvenuto quando i pitagorici, che sostenevano che tutto il mondo potesse essere descritto attraverso rapporti numerici, trovarono due grandezze il cui rapporto non era esprimibile attraverso rapporti tra numeri interi[5]. Si pensa che sia stato Eudosso a dare una nuova definizione di rapporti uguali che venne universalmente accettata, definendo la teoria delle proporzioni che poi venne formalizzata ed ampiamente utilizzata da Euclide nel libro V degli Elementi. La crisi degli incommensurabili era stata arginata grazie ad Eudosso, ma rimaneva aperto il problema riguardante il confronto tra figure rettilinee e curvilinee. Ancora una volta sembra che sia stato proprio Eudosso a trovare la soluzione. Il metodo di esaustione[6] consiste nel considerare una successione crescente di figure che invadono una figura fissata. Tale metodo si basa sulla proprietà archimedea[7]:

> Si dice che hanno fra loro rapporto (o *ragione*) le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente. [43, Libro V, Definizione IV, p.298]

Grazie ad una *reductio ad absurdum* partendo dall'assioma è facile dimostrare la proposizione che costituisce la base del metodo di esaustione:

> *[Assumendosi come] date due grandezze disuguali, se si sottrae alla maggiore una grandezza maggiore della metà, dalla parte restante un'altra grandezza maggiore della metà, e così si procede successivamente, rimarrà una grandezza che sarà minore della grandezza minore [inizialmente] assunta.* [43, (X, 1), p.596]

Il metodo di esaustione si descrive nel dettaglio più avanti quando si dimostra la proposizione (XII,2) in cui Euclide utilizza questo metodo. Eudosso viene da alcuni considerato come il matematico che riuscì ad imbrigliare l'infinito attraverso la sistematizzazione di questi due metodi fondamentali per la matematica greca.

Il clima d'instabilità tra Atene, Sparta e Tebe creò condizioni favorevoli per l'invasione dei macedoni. Nel 359 a.C. salì sul trono di Macedonia Filippo II, che si trovò a governare

[5]Secondo la tradizione i pitagorici scoprono le grandezze incommensurabili osservando il rapporto tra il lato e la diagonale del pentagono regolare. Solo successivamente intuiscono che anche il lato del quadrato e la sua diagonale sono incommensurabili.

[6]Il termine *esaustione* non fu coniato dai greci venne introdotto nel 1647 da Gregorio De Saint Vincent per identificare un metodo che consente di dimostrare l'uguaglianza di due aree o volumi, senza far ricorso esplicitamente all'infinito. Infatti il fulcro del metodo di esaustione consiste nel dimostrare che due grandezze devono essere uguali perché è assurdo che non sia così.

[7]Chiamata così per l'uso frequente che ne fece Archimede, ma lo stesso matematico l'attribuiva ad Eudosso.

un paese ancora arretrato le cui risorse principali erano l'agricoltura, la pastorizia e lo sfruttamento delle foreste. La Macedonia era rimasta fino a quel momento ai margini della grande politica sia per le continue lotte dinastiche, sia per la minaccia dei popoli barbari circostanti. Il giovane sovrano riorganizzò il paese cominciando dall'esercito, mentre in politica estera cominciò a stipulare vari trattati di alleanza con alcune città greche, che continuavano ad essere in lotta tra loro. Filippo II cercò di stipulare per molti anni una pace con Atene, città che aveva una potente flotta navale. Atene si alleò con Tebe, ma vennero sconfitte nell'Agosto del 338 a.C. quando si svolse la battaglia decisiva, nella pianura di Cheronea in Beozia, tra i macedoni ed i greci. Ateniesi e tebani dovettero cedere alla richieste macedoni.

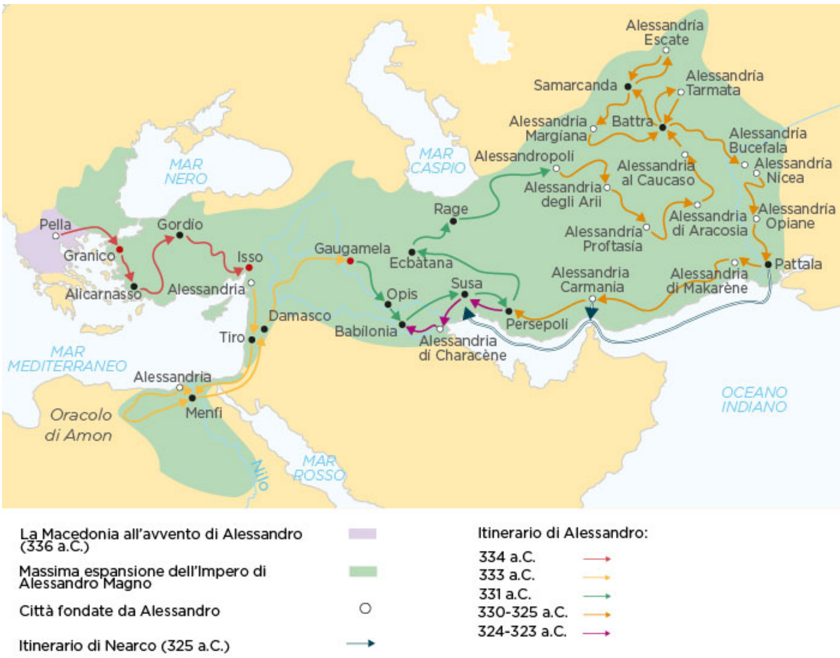


Figura 2.23: L'impero di Alessandro Magno [71].

Filippo II fu assassinato e a lui succedette il figlio Alessandro nel 336 a.C.. Il cambio improvviso di comando fomentò tra gli ateniesi ed i tebani la speranza di vanificare il risultato della battaglia di Cheronea, ma Alessandro affrontò Tebe e la rase al suolo, mentre ad Atene continuava il fermento antimacedone. Alla fine del 335 a.C. il consiglio della lega ellenica decise di dare inizio all'offensiva contro la Persia. Alessandro lasciò la Macedonia e partì con una grande forza armata ed una flotta navale quasi completamente composta da alleati greci. Dopo aver sconfitto i persiani cominciò un periodo di grandi conquiste per il macedone tra cui: la Fenicia, l'Egitto, Babilonia, Susa, l'India. Morì a Babilonia nel 323 a.C. lasciando un grande impero multietnico e un cumulo di problemi irrisolti. Con le sue immense conquiste la storia greca mutava repentinamente e radicalmente il suo corso: se la civiltà greca s'impose come modello su molti dei popoli cosiddetti "barbari", il processo di acculturazione fu tuttavia reciproco, per questo la nuova civiltà che nacque dall'incontro fra greci e popoli orientali è stata chiamata ellenismo.

Figura 2.24: Regni ellenistici alla metà del III secolo a.C. [67].

Il periodo ellenico

Dopo la morte di Alessandro la penisola greca non fu più al centro della storia del mondo ellenico, anche se la polis, fortemente indebolita, continuò a sussistere come struttura municipale, subordinata agli interessi delle grandi monarchie ellenistiche, in cui si suddivise l'immenso impero conquistato dal macedone. Atene provò invano a costituire una coalizione di città contro il dominio macedone. Nel Peloponneso dove anche Sparta era stata sottomessa all'obbedienza, furono istituite oligarchie filomacedoni. Seguì un periodo di lotte tra i generali dell'esercito di Alessandro per il controllo dei territori che terminò con la suddivisione dell'impero in quattro stati principali: la Macedonia della dinastia degli Antigonidi, l'Egitto dei Tolomei, la Siria dei Seleucidi e il regno di Pergamo degli Attalidi. Tali regni conservarono la propria indipendenza fino alla conquista romana.

L'Egitto fu preso da Tolomeo I a cui si attribuisce l'idea di fondare un centro di ricerca ad Alessandria. La dinastia dei Tolomei puntava sulla crescita di Alessandria come centro culturale del mondo antico. L'idea di accademia o scuola era già presente nel mondo antico ad Atene, Babilonia ed in Egitto. L'innovazione portata dai Tolomei fu quella di costituire una biblioteca pubblica in cui raccogliere la conoscenza di tutto il mondo antico. La biblioteca di Alessandria era suddivisa in tre sedi:

1. Inizialmente venne fondato un istituto di alti studi: il Museo, dedicato alle muse, in cui saggi e studiosi potevano confrontarsi ed approfondire i propri studi. L'istituto era sostenuto dallo stato, mentre le biblioteche precedenti erano sostenute da finanziatori. La biblioteca era un'istituzione altamente costosa, tutto veniva copiato su papiri. Al suo interno vennero chiamati studiosi dell'epoca per ricopiare e tradurre i testi dell'epoca raccolti in più di cinquecentomila rotoli. Il Museo era il centro della biblioteca ed era situato nel palazzo reale.

2. Il Serapeo, un tempio dedicato al Dio Serapide, era una biblioteca più piccola, contava circa cinquantamila papiri ed era pubblica.

3. Il Fondo delle navi serviva da magazzino ed era situato vicino al porto di Alessandria. Tolomeo III compì un ulteriore passo avanti nella collezione di manoscritti della biblioteca. Tutte le navi che ormeggiavano ad Alessandria erano obbligate a consegnare tutti i testi nel loro possesso alle autorità. I testi che non erano già presenti nella biblioteca venivano copiati dagli scribi per poi essere riconsegnati ai proprietari.

Il primo direttore del Museo fu un filosofo e letterato: Zenodoto da Efeso. A lui susseguirono altri letterati, finché non arrivò Eratostene e la Biblioteca si aprì alle scienze, facendo diventare Alessandria un centro scientifico di prim'ordine.

Il termine ellenismo fu introdotto nel XIX secolo per indicare il periodo della diffusione internazionale della lingua e cultura greca in seguito alle conquiste di Alessandro Magno. La civiltà ellenistica si fondò su una lingua comune e sulla fusione di elementi culturali greci e orientali. Alessandria, Pergamo, Atene, Rodi furono centri di vita politica, commerciale e culturale che attrassero gli intellettuali dell'epoca offrendo loro preziosi strumenti di ricerca (biblioteche, musei, laboratori). La cultura ellenistica, rifletteva il profondo mutamento storico e il nuovo ruolo dell'intellettuale. Si frantumò il senso dell'unità della cultura, per cui da grandi sistemi filosofici onnicomprensivi si passò allo sviluppo specialistico e autonomo di ogni singola scienza. Il progresso scientifico beneficiò notevolmente dello specialismo e della moltiplicazione degli strumenti e delle attrezzature (musei, orti botanici, laboratori, osservatori), che consentirono la fioritura di scoperte, classificazioni e sistemazioni in ogni campo, dalla filologia all'astronomia, dalla matematica (Euclide, Archimede) alla geografia (Eratostene).

2.3.2 Euclide d'Alessandria

Inizialmente gli storici erano convinti che gli Elementi fossero da attribuire ad Euclide da Megara, vissuto all'epoca di Platone e Socrate, ma ormai si è certi che non sia così dato che nelle opere di Aristotele mancano importanti conoscenze presenti in questo manoscritto. L'autore degli Elementi è quindi Euclide d'Alessandria. Sul personaggio di Euclide purtroppo non si conosce molto. Le notizie più complete derivano dal *Commento al I libro degli Elementi di Euclide* scritto da Proclo (V secolo d.C.).

> Non molto più giovane di loro è Euclide; egli raccolse gli *Elementi*, ne ordinò in sistema molti di Eudosso, ne perfezionò molti di Teeteto, e ridusse a dimostrazioni inconfutabili quelli che suoi predecessori avevano poco rigorosamente dimostrato. Visse al tempo del primo Tolomeo, perché Archimede, che visse subito dopo Tolomeo primo, cita Euclide; e anche si racconta che Tolomeo gli chiese una volta se non ci fosse una via più breve degli *Elementi* per apprendere la geometria; ed egli rispose che per la geometria non esistevano vie fatte per i re. Euclide era dunque più giovane dei discepoli di Platone, ma più anziano di Eratostene e di Archimede che erano fra loro contemporanei, come afferma in qualche luogo Eratostene. Per le idee Euclide era platonico e aveva molto familiare questa filosofia, tanto che si propose come scopo finale di tutta la raccolta degli *Elementi* la costruzione delle figure chiamate platoniche. [58, p.73-74]

Euclide probabilmente visse attorno al terzo secolo a.C. anche se non si hanno notizie sul luogo di nascita. Dalla testimonianza di Proclo si deduce che Euclide probabilmente fu chiamato come insegnante alla Biblioteca di Alessandria. La natura della sua opera fa pensare che egli fosse l'ultimo allievo di Platone, ma questo sembra solamente una leggenda per giustificare l'influenza platonica in Euclide. Dalle testimonianze che si possiedono sembra che Euclide fosse un abile insegnante, infatti a lui non viene attribuita nessuna nuova scoperta, ma la grandezza degli Elementi deriva proprio dalla chiarezza espositiva. Euclide non scrisse solo gli Elementi, ma questi risultano la sua opera più importante in quanto costituiscono un manuale introduttivo di tutta la matematica elementare conosciuta. Mentre i contenuti sembrano essere presi da suoi predecessori, la disposizione assiomatica deduttiva sembra essere opera dell'autore.

Proposizione (XII,2)

Euclide negli Elementi non introduce regole di calcolo o di misura, per questo non si trova nel manuale un'approssimazione di Pi Greco, ma un'importante risultato sull'area del cerchio è la proposizione (XII,2).

I cerchi stanno tra loro come i quadrati dei diametri.[43, p.931]

La dimostrazione data da Euclide è stata inserita nelle attività e la si può trovare nella scheda (Allegato G), di seguito se ne metterà una più moderna. Per dimostrare questa proposizione Euclide utilizza due idee geniali sviluppate dai greci per realizzare prove complesse:

1. Metodo di esaustione.
2. Doppia reductio ad absurdum.

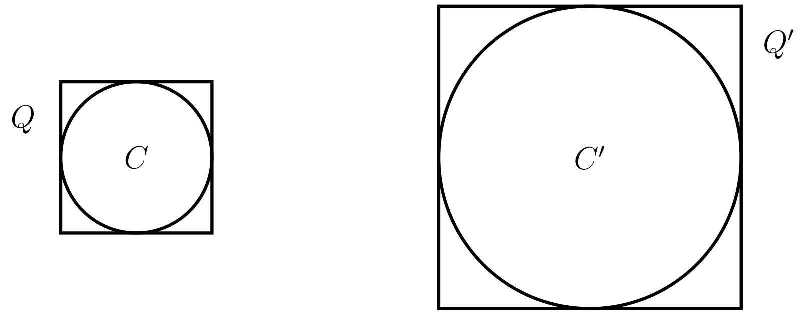
Prima di procedere con la dimostrazione della proposizione (XII,2) è opportuno provare un lemma usato anche da Archimede nella *Misura del cerchio* anche se non in forma esplicita.

Teorema 2.3.1. *[12] Definiamo induttivamente la successione $\{P'_j\}_{j\geqslant 1}$ di poligoni regolari di 2^{j+1} lati tutti inscritti nella circonferenza C', ottenuti nel seguente modo.*
Il quadrato P'_1 è inscritto in C', i vertici dell'ottagono P'_2 sono i quattro vertici del quadrato P'_1 insieme con i quattro punti bisettori degli archi che sottendono i quattro lati di P'_1.
Per ogni $j > 1$ i 2^{j+1} vertici del poligono regolare P'_j sono i 2^j vertici di P'_{j-1} ed i 2^j punti bisettori degli archi che sottendono i lati di P'_{j-1}. In termini di aree vale:

$$C' - P'_{j+1} < \frac{1}{2}(C' - P'_j)$$

Ora si può dimostrare la proposizione (XII,2).

Dimostrazione. [12] Siano C e C' i cerchi dati e siano Q e Q' i rispettivi quadrati dei diametri, si vuole dimostrare che $Q : Q' = C : C'$. La dimostrazione si basa sull'esistenza della quarta proporzionale. Definiamo S come quarta proporzionale di Q, Q', C, cioè S sia una grandezza per cui si ha: $Q : Q' = C : S$.
Si vuole provare che $S = C'$.



Primo passo Si suppone per assurdo $S < C'$.
Si costruisce la successione di poligoni P'_j, per il lemma per ogni grandezza P di quelle considerate, esiste un n tale che si abbia $C' - P'_J < P$ per ogni $j \geqslant n$. In particolare esiste un n tale che si abbia: $C' - P'_J < C' - S$ per ogni $j \geqslant n$. Questo implica $P'_n \geqslant S$
Costruiamo una successione di poligoni regolari ${P_j}_{j \geqslant 1}$ inscritti in C con P_j di 2^{j+1} lati, seguendo lo stesso metodo usato per la costruzione dei P'_j. Per ogni j i poligoni regolari con lo stesso numero di lati P_j e P'_j sono simili. Pertanto per (XII,1)[8] per ogni j si ha:

$$P_j : P'_j = Q : Q'$$

Dalla definizione di S segue dalla relazione precedente, per ogni $j \geqslant 1$:

$$P_j : P'_j = C : S$$

Permutando (V,16)[9]:

$$P_j : C = P'_j : S$$

Poiché vale $P_j < C$, essendo il poligono in questione inscritto in C, ne segue $P'_j < S$ per ogni j, mediante l'uso di (V,8)[10] e non può essere $P'_j \geqslant S$. Contraddizione.

Secondo passo Assumiamo per assurdo $S > C'$
Sia R la quarta proporzionale dopo Q, Q', C, cioè tale che: $Q' : Q = C' : R$. La relazione corrisponde alla precedente $Q : Q' = C : S$ quando i ruoli di Q, Q', C, C', S, R, P'_J, P_J sono scambiati. Segue pertanto, da quanto dimostrato nel primo passo, $R \geqslant C$. Ora essendo $Q : Q' = C : S$, invertendo si ha $Q' : Q = S : C$ e quindi:

$$S : C = C' : R$$

e permutando:

$$S : C' = C : R$$

Pertanto, essendo $S > C'$, segue $C > R$ ed ancora per (V,8) si arriva ad una contraddizione. $\square$

---

[8] *Poligoni simili iscritti in cerchi stanno fra loro come i quadrati dei diametri [dei cerchi stessi]*[43, p.929]

[9] *Se quattro grandezze sono proporzionali, esse saranno proporzionali anche* permutando [43, p.334]

[10] *Di [due] grandezze disuguali, la maggiore ha rispetto ad una stessa grandezza rapporto maggiore che quella minore; ed una stessa grandezza ha rispetto alla minore rapporto maggiore che rispetto a quella maggiore.*[43, p.321]
Grazie a questa proposizione se A, B sono due grandezze omogenee con $B \succ A$ allora per ogni grandezza G omogenea vale: $B : G \succ A : G$. Il poligono P_j è inscritto in C, quindi $C \succ P_j$. Ponendo $B = C$, $A = P_j$ e $G = C$ si ha: $C : C \succ P_j : C$. Ora ragionando per assurdo se fosse $P'_j = S$ avremmo da $P_J : C = P'_j : S = S : S$ quindi $P_j : C = S : S = C : C \succ P_j : C$ Contraddizione.
Se fosse $P'_j \succ S$, potremmo assumere $B = P'_j$, $A = S$, $G = S$ e dedurre da (V,8) che $P'_j : S \succ S : S$ e si arriverebbe a : $P'_j : S \succ S : S = C : C \succ P_j : C$ Contraddizione. Pertanto vale: $P'_j < S$

I greci sapevano che il rapporto tra la lunghezza della circonferenza ed il diametro è costante in qualsiasi cerchio. Attraverso questa proposizione Euclide dimostra che anche il rapporto tra l'area e il diametro al quadrato è costante in ogni cerchio, ma non c'è nessuna connessione tra le due costanti in Euclide.

I greci fin dall'VIII secolo a.C. stabilirono colonie in Sicilia e nel sud Italia, importando la loro civiltà e cultura. Tra le città venne fondata Siracusa nel 734 a.C. in un luogo strategico sia per la posizione geografica che per l'abbondanza di risorse. Tra il V e IV secolo a.C. la polis di Siracusa passò dall'essere sotto il governo di tiranni ad essere repubblica, per poi ritornare tirannide con Dionisio I. Il tiranno intraprese lotte con i cartaginesi riuscendo a ridurre la loro presenza alla sola Sicilia nord-orientale. Inoltre Dionisio I ebbe l'ambizione di unire tutti i greci della Magna Grecia sotto un unico regno. Riuscì a sottomettere molte città della Magna Grecia e intraprese una vasta opera di colonizzazione dell'Adriatico. Alla sua morte gli succedette il figlio Dionisio II che ebbe il potere per periodi alterni, finché non venne cacciato dal generale Timoleonte chiamato dagli aristocratici di Siracusa. Timoleonte permise il ritorno degli esuli e favorì l'afflusso di coloni greci, inoltre promosse una lega di città siciliane libere sotto l'egemonia siracusana. Alla sua morte la repubblica non cessò di esistere, tuttavia si verificarono ripetuti scontri tra i sostenitori della democrazia e quelli dell'oligarchia. Siracusa tornò sotto la tirannide di Agatocle che riprese il programma di Dionisio il Vecchio. Alla sua morte decretò come erede il popolo di Siracusa, questo comportò la caduta della tirannide e l'inizio della quarta repubblica siracusana che ebbe vita breve.

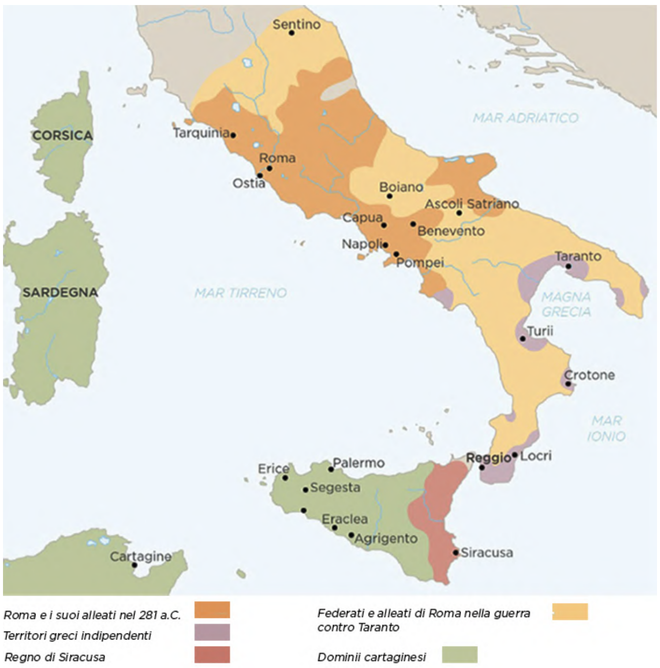


Figura 2.25: Situazione della penisola all'inizio del III secolo a.C. [75].

All'inizio del III secolo a.C. i cartaginesi mostrarono mire conquistatrici verso Siracusa, così i due tiranni che si contendevano la polis decisero di mettere da parte le ostilità e chiamare in aiuto il generale Pirro che si trovava in Italia (278 a.C. circa). Pirro sconfisse i cartaginesi togliendo così l'assedio a Siracusa. Il generale non si fermò e cercò di attaccare Cartagine, ma i siracusani non accettarono di buon grado la sua linea autoritaria ed ambiziosa, costringendolo ad abbandonare la polis. Mentre Pirro contrastava i cartaginesi Gerone II contrastava i mecenati campani scesi in Sicilia. Il popolo siracusano vedendolo trionfare lo proclamò re. I mamertini (mecenati campani) non si arresero chiamando in loro aiuto i Cartagenisi ed i Romani che accettarono entrambi, viste le mire che avevano sul controllo della Sicilia. Gerone II si schierò contro i Romani cercando di contrastare le loro mire di conquista. Dopo aver provato ad attaccare da solo la potenza romana, il siracusano capì che non poteva sconfiggere l'esercito altamente organizzato di Roma, decidendo quindi di diventare loro alleato. Aiutò l'esercito romano durante la prima guerra punica. Essendo un fine stratega Gerone II si rese conto che affinché i Romani non arrivassero a minacciare Siracusa, Cartagine non doveva perdere del tutto la sua forza in Sicilia, motivo per il quale, egli acconsentì a mandare alla capitale punica rinforzi di uomini e viveri nel momento di necessità. Roma aveva preteso che il siracusano rinunciasse al titolo di Re di Sicilia, così il regno di Siracusa comprendeva solo il lato sud-orientale dell'isola. Questa condizione di *regno dentro al regno* giovò molto ai siracusani, i quali assaporarono un clima di pace interna alle mura della città, dato che il loro sovrano aveva rinunciato ad ogni mira di conquista ed era diventato per gli altri popoli un alleato fedele per la pace. Non di meno si valse del genio di Archimede, al quale affidò il compito di fortificare tutte le difese della polis, probabilmente in previsione di un attacco. Fu lo stesso Archimede a progettare la nave *Siracusia*, da donare al sovrano Tolomeo III di Egitto da parte del popolo siracusano. Sotto il regno di Gerone II Siracusa visse oltre cinquant'anni di pace, fino alla sua morte nel 215 a.C.. Alla morte anche del nipote di Gerone II cominciò a Siracusa una specie di guerra civile per decidere a chi affidare la polis. Salirono al potere due generali che si ritrovarono a dover decidere se appoggiare la politica filo-cartaginese o quella filo-romana. Così come Cartagine aveva interesse nel portare Siracusa dalla sua parte, anche Roma aveva estremo interesse affinché i siracusani non stringessero alleanza con i cartaginesi. Per Roma un'alleanza Cartagine-Siracusa avrebbe significato una continua minaccia al loro nuovo conquistato regno di Sicilia. Prevalse a Siracusa il partito filo-cartaginese e dunque venne dichiarata guerra ai romani nel bel mezzo della Seconda Guerra Punica (218 a.C.-201 a.C.). Nel 212 a.C. Siracusa cadde in mano romana dopo l'attacco del console Marco Claudio Marcello.

2.3.3 Archimede di Siracusa

Per tutta l'età ellenistica Alessandria rimase il centro degli studi matematici, ma il più grande matematico di quel periodo non era nato ad Alessandria. Archimede nacque a Siracusa (287 a.C.-212 a.C.). Gli storici pensano che il padre fosse un astronomo e che in gioventù viaggiò e studiò in Egitto nella biblioteca di Alessandria, dove venne in contatto con l'educazione matematica euclidea e con illustri matematici. Tenne corrispondenze con i matematici alessandrini, tuttavia visse e morì a Siracusa. Le informazioni riguardanti la sua vita sono scarse, ma si può ricavare qualche informazione su di lui dalla narrazione della vita di Marcello scritta da Plutarco. Durante la Seconda Guerra Punica Siracusa venne coinvolta nello scontro tra Roma e Cartagine, ed essendosi schierata con quest'ultima, venne assediata dai romani dal 214 a.C. al 212 a.C. quando venne conquistata. Archimede godeva di una grande stima sia nel suo paese, sia ad Alessandria, sia tra i

Romani, tant'è che le leggende narrano che Marcello ordinò di catturarlo vivo. Il fascino attorno alla figura di questo uomo fece sì che nel tempo le vicende e le leggende si mescolarono al punto da non riuscire più a distinguere gli elementi reali da quelli di finzione. Sono due gli aneddoti più famosi attorno a questa figura. Il primo riguarda la richiesta che il re Gerone fece al matematico. Vitruvio racconta che il re chiese al matematico di determinare se una corona fosse stata realizzata in oro puro oppure no. Si racconta che il matematico avrebbe scoperto come risolvere il problema mentre faceva il bagno, notando che immergendosi nella vasca il livello dell'acqua si innalzava. La soddisfazione di una tale scoperta rese euforico Archimede che uscì nudo di casa correndo per le strade della città gridando *"Eureka"* [23, p.32]. Secondo un altro aneddoto Archimede riuscì a spostare, grazie ad una delle sue macchine, una nave. Elettrizzato dalla capacità di costruire macchine in grado di spostare grandi pesi con piccole forze, esclamò: *"Datemi un punto d'appoggio, ed io muoverò la Terra"* [23, p.32]. La tradizione ha tramandato notizie sul suo contributo durante l'assedio di Siracusa. Le fonti principali sono le opere di Polibio, Plutarco e Tito Livio. Quest'ultimo scrisse:

> E l'impresa iniziata con tanto impeto [la conquista di Siracusa] avrebbe avuto successo se in quel momento un uomo non si fosse trovato in Siracusa. Era Archimede, meteorologo e astronomo sommo, ma ancor più meraviglioso inventore di macchine belliche e di ordigni, per mezzo dei quali egli con lieve sforzo rendeva nullo tutto ciò che con sforzo immenso tentavano i nemici. [23, pp.33-34]

Sulla sua morte le versioni sono contrastanti nei particolari, ma tutte concordano nell'affermare che avvenne per opera di un soldato romano durante la conquista della città, nonostante Marcello avesse ordinato di salvare la vita del matematico. *"Quel soldato è un po' l'emblema di Roma, che non sa riconoscere il valore della scienza ellenistica e, di fatto, la dimentica."*. [33, p.51]

Come per Euclide scarse sono le notizie sulla vita di Archimede, ma sono giunte fino a noi diverse sue opere, mentre altre sono andate perdute. Così come Euclide, Archimede partiva dall'enunciare proposizioni primitive da cui ne deduceva proposizioni sempre più complesse fino a quelle che costituivano lo scopo di ciascuna opera, servendosi spesso anche di proposizioni dimostrate negli Elementi. A differenza dell'alessandrino, il matematico siracusano non disdegnava regole di misura e calcoli aritmetici. Dedicò un'intera opera *Misura del cerchio* [23] alla determinazione di valori approssimati del rapporto tra la lunghezza della circonferenza ed il diametro di qualunque cerchio.

Misura del cerchio

Come si è visto precedentemente Euclide negli elementi non accenna mai alle applicazioni pratiche, non fa esempi numerici e nemmeno da regole di misura. Infatti nella Proposizione (XII,2) dimostra che i cerchi stanno tra loro come i quadrati dei diametri, ma si guarda bene dal provare a determinare il valore numerico costante di questo rapporto. Archimede nella *Misura del cerchio* invece determina un'approssimazione di questo rapporto usando solamente rette e cerchi nel modo classico[11]. Il trattato giunto fino a noi contiene solo tre proposizioni, che sono riportate di seguito.

[11] Archimede utilizza solamente le costruzioni elementari, eseguite con riga e compasso.

Proposizione 1

Ogni cerchio è uguale ad un triangolo rettangolo se ha il raggio uguale ad un cateto [del triangolo] e la circonferenza uguale alla base [= all'altro cateto]. [23, p.225]

Per dimostrare questa prima proposizione Archimede utilizza il metodo di esaustione e la doppia *reductio ad absurdum*. Archimede eguaglia l'area del cerchio a quella di un triangolo, si potrebbe allora pensare che sia giunto alla quadratura del cerchio, ma non è così visto che nella dimostrazione non viene fornita nessuna indicazione sulla costruzione del triangolo. I matematici dell'epoca sapevano che dato un qualsiasi cerchio il rapporto tra la lunghezza della circonferenza ed il diametro è sempre costante.

$$C : C' = d : d'$$

Con la notazione moderna si può scrivere: $\frac{C}{d} = \alpha_1$, con α_1 costante.
Euclide d'altro canto nella proposizione (XII,2) aveva dimostrato che:

$$A : A' = d^2 : d'^2$$

perciò che il rapporto tra l'area del cerchio ed il quadrato del diametro era costante: $\frac{A}{d^2} = \beta$, ma Euclide non aveva trovato nessun legame tra le due costanti, cosa che invece fece Archimede, stabilendo l'importante collegamento tra la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio. Dalla proposizione si potrebbe faticare nel riconoscere l'usuale formula che si usa oggi per l'area del cerchio, ciò dipende dalla strategia del matematico siracusano di collegare l'area di una figura sconosciuta all'area di una nota. Dalla proposizione si ricavano due importanti conseguenze:

1. In primo luogo si ottiene la formula oggi usata per l'area del cerchio:

$$A = \frac{C \times r}{2} = \frac{2r\alpha_1 \times r}{2} = \alpha_1 \times r^2$$

2. In secondo luogo da $\frac{A}{d^2} = \beta$ si può riscrivere come: $\frac{A}{r^2} = 4\beta$ chiamando $4\beta = \alpha_2$ si ottiene dalla proposizione l'uguaglianza delle due costanti.

$$A = \alpha_1 \times r^2$$

$$\alpha_2 \times r^2 = \alpha_1 \times r^2$$

da cui: $\alpha_2 = \alpha_1$

Grazie a queste considerazioni si torna a trovare la definizione data nell'introduzione e classicamente nelle scuole per Pi Greco:

$$\pi = \frac{C}{d} \qquad \pi = \frac{A}{r^2}$$

Proposizione 2

Il cerchio ha rispetto al quadrato del diametro il rapporto che 11 *ha rispetto a* 14. [23, p.227]

Nell'opera giunta fino a noi sembra che la seconda e la terza proposizione non siano nel giusto ordine dato che la seconda proposizione applica la terza, quindi probabilmente devono essere state invertite da un copista.

Proposizione 3

La circonferenza di ogni cerchio è tripla del diametro e lo supera ancora di meno di un settimo del diametro, e di più di dieci settantunesimi. [23, p.228]

In questa ultima proposizione del trattato si dimostra, anche con calcoli aritmetici, che:

$$\left(3+\frac{10}{71}\right)d < C < \left(3+\frac{1}{7}\right)d$$

Quindi che:

$$\left(3+\frac{10}{71}\right) < \pi < \left(3+\frac{1}{7}\right)$$

Archimede stabilì questi valori approssimando la circonferenza mediante il perimetro di poligoni regolari inscritti e circoscritti. Partendo dall'esagono regolare e raddoppiando di volta in volta i lati fino ad arrivare ad un poligono regolare di novantasei lati. Il procedimento iterativo utilizzato dal siracusano viene talvolta chiamato algoritmo archimedeo. In termini moderni consiste nel sviluppare le serie $P_n, P_{2n}, P_{3n}, P_{4n}\ldots$ e $p_n, p_{2n}, p_{3n}, p_{4n}\ldots$ rispettivamente dei perimetri dei poligoni regolari circoscritti ed inscritti di n lati. A partire dal terzo termine si calcola ogni termine in base ai due termini della serie precedenti come:

$$P_{2n} = \frac{2P_n p_n}{P_n + p_n}$$

$$p_{2n} = \sqrt{P_{2n} p_n}$$

Il termine trovato come approssimazione per eccesso di Pi Greco nella terza proposizione è:

$$3+\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$$

Nella seconda proposizione del trattato Archimede sostenne che:

$$\frac{A}{d^2} = \frac{11}{14}$$

essendo questo rapporto $\frac{\pi}{4}$ moltiplicandolo per quattro si ottiene proprio:

$$\frac{11}{14} \times 4 = \frac{22}{7}$$

Il problema di trovare valori sempre più precisi da questo momento in avanti divenne un'ossessione per molti matematici.

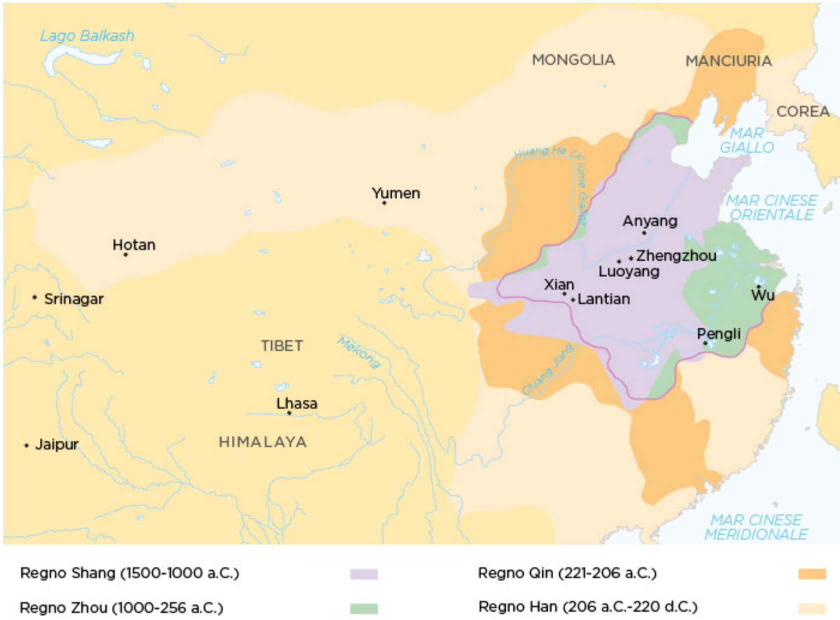


Figura 2.26: Le antiche dinastie cinesi [74].

2.4 L'antica Cina

Così come avvenne in Mesopotamia ed in Egitto la presenza del fiume Giallo rese favorevoli le condizioni per l'insediamento umano. Attorno al III millennio a.C. gruppi di uomini neolitici si dedicarono all'agricoltura ed all'allevamento, costruirono abitazioni, strumenti di lavoro e ceramiche di alto livello artistico. La storia della Cina cominciò probabilmente con il dominio della dinastia Shang attorno al 1500 a.C. che mantenne il potere per circa cinque secoli. Con essa si formò una forma primitiva di feudalesimo, cioè una società composta da nuclei di coltivatori che riconoscevano la supremazia di un sovrano dotato di poteri soprannaturali. La testimonianza più antica della presenza di una numerazione in Cina risale a questo periodo e consisteva in ossa per oracoli, chiamate in questo modo per le iscrizioni che ne indicavano l'utilizzo per divinazioni. I numeri da uno a dieci che si trovano su queste ossa erano rappresentati dai seguenti simboli:

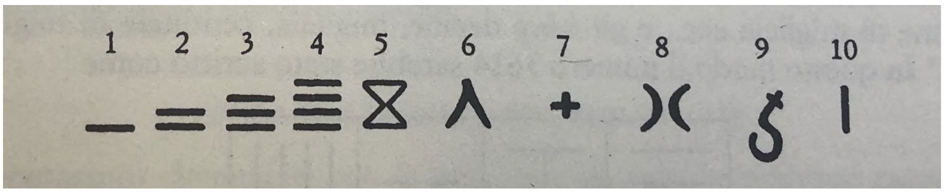


Figura 2.27: Prima numerazione cinese decimale [38, p.147].

Questo sistema numerico era molto più avanzato rispetto a quelli contemporanei, ad eccezione del sistema posizionale sessagesimale babilonese. Infatti questo sistema permetteva di rappresentare qualsiasi numero con l'utilizzo dei dieci simboli di base e altri simboli che indicavano le ventine, le centinaia e le migliaia. In Cina furono presenti fin dai primi tempi due sistemi di notazione, entrambi decimali, in uno era predominante il principio moltiplicativo, mentre nell'altro veniva usata una forma di notazione posizionale. La dinastia Shang, inoltre, entra di diritto nella storia della Cina per aver elaborato un sistema di scrittura in caratteri indipendenti dal suono e quindi dalle differenze regionali.

Attorno al 1030 a.C. i governanti Shang furono sconfitti da tribù guerriere che imposero un sistema aristocratico-militare. La nuova dinastia Zhou ampliò i confini del territorio cinese. Il potere supremo era quello dell'imperatore, circondato da una cerchia di feudatari che avevano il controllo su territori e gruppi umani. Mentre il legame tra le genti di uno stesso territorio si rafforzava e si estendeva territorialmente, quello tra i feudatari e l'imperatore si indeboliva, delineando una pluralità di centri di potere. A partire dalla fine dell'VIII secolo a.C. la dinastia Zhou fu sottoposta a crescenti attacchi di gruppi rivoltosi. Secondo gli storici il duca di Zhou, fratello del re dell'antica Cina, ha redatto i codici etici in cui erano individuate le Nove Arti Aritmetiche. I Nove Capitoli seguono la tradizione delle Nove Arti Aritmetiche. L'impero si disgregò e per due secoli, a partire dal 400 a.C. fino al 221 a.C. circa, si crearono numerosi stati indipendenti in guerra tra loro, questo periodo viene anche chiamato periodo degli stati combattenti. Molto storici concordano sul fatto che la più antica fonte della matematica cinese, il *Chou Pei Suan Ching* (300 a.C.), appartenga a questo periodo. La datazione dei documenti matematici cinesi è molto complessa, tant'è che alcuni storici ritengono invece che questo documento risalga a quasi un millennio prima. Il testo contiene nella prima parte un dialogo tra un principe ed il suo ministro sulle proprietà dei triangoli rettangoli, tra cui viene enunciato, e dimostrato geometricamente, il teorema di Pitagora, ma prima di tutto il testo rappresenta un trattato arcaico di astronomia. Nel trattato il ministro fa sapere al suo signore che l'arte dei numeri deriva dal cerchio e dal quadrato. Questo testo dimostra che in Cina, come avvenne in Egitto, la geometria nacque dalla misurazione e che era essenzialmente un esercizio di aritmetica o di algebra, come in Mesopotamia. Nel periodo degli stati combattenti fiorirono in Cina "cento scuole filosofiche", il cui scopo era quello di fornire ai giovani membri della classe dirigente gli strumenti per governare.

I governanti dello stato di Qin crearono un sistema di canali capaci di produrre consistenti eccedenze di cereali e di garantire facili comunicazioni. Nel corso del III secolo a.C. i regni combattenti furono sconfitti uno dopo l'altro da un esercito di contadini armati e nel 221 a.C. il sovrano di questo stato del nord-ovest Zheng unificò la Cina e si proclamò imperatore. La dinastia Qin fu a capo di tutta la Cina dal 221 a.C. al 210 a.C.. L'imperatore unificò la moneta, i pesi, le misure, la forma dei caratteri di scrittura e rese omogenee le istituzioni di villaggio stabilendo confini tuttora validi. In questo periodo, mentre nel Mediterraneo imperversava la seconda guerra punica, venne costruita la muraglia cinese. Nel 213 a.C. l'imperatore ordinò che venissero bruciati tutti i libri, con poche eccezioni, infatti anche per questo motivo la datazione dei trattati cinesi risulta difficile.

Alla morte del primo imperatore il suo regime autoritario fu travolto da una grande rivolta nella quale confluirono il malcontento delle masse dei lavoratori. L'unità statale era comunque un'idea ormai acquisita ed ha costituito da allora il fattore dominante della storia cinese. Superate sanguinose tensioni tra i ribelli, nel 202 a.C. fu fondata la dinastia Han, destinata a durare fino al 220 d.C.. Nel corso di questi secoli il potere unitario favorì lo sviluppo della cultura e dell'economia. Il periodo Han è famoso per i significativi progressi scientifici e tecnologici. Si ritiene che gli studiosi dell'epoca investirono molto tempo nel trascrivere a memoria testi letterari e scientifici andati distrutti e nel cercare di recuperare i pochi manoscritti sopravvissuti alla distruzione ordinata della dinastia Qin. Proprio durante la dinastia Han fu compilato il più autorevole tra tutti i trattati matematici cinesi: *Chiu Chang Suan Shu*, *Nove capitoli sulle arti matematiche*, che occupa nella matematica cinese una posizione simile a quella degli Elementi per la matematica occidentale. Gli storici ritengono che i Nove capitoli siano stati curati e commentati sulla base di testi precedenti che non sono sopravvissuti. La ragione principale per la quale i *Nove capitoli* non sono andati perduti può essere il fatto che questo testo divenne un canone (*jing*). Il termine "canone" è stato utilizzato da Liu Hui l'autore del primo commento giunto fino ai giorni nostri. A questo periodo risale una delle più grandi invenzioni tecnologiche dell'umanità: la carta. Manuali di medicina, di storia, di scienza militare, di filosofia, di astronomia vennero prodotti da specialisti dell'epoca ed alcuni di questi volumi sono giunti fino ai giorni nostri. Rivolte a palazzo, sommosse religiose e ribellioni contadine indebolirono il potere della dinastia fino a sopraffarla nel 220 d.C. quando la Cina si divise in tre regni.

Nel periodo successivo si susseguirono per un centinaio di anni divisioni e sommosse che ebbero fine con una seconda unificazione della Cina sotto la dinastia dei Chin. Nonostante i tempi tormentati l'attività matematica non si interruppe. Proprio in questo periodo visse il matematico Liu Hui, grande commentatore dei *Nove capitoli*. Grazie alla sua opera si hanno informazioni sulla matematica cinese.

La dinastia Chin ebbe vita breve ed alla sua caduta la Cina si divise in numerose entità politiche. Dopo la seconda spartizione della Cina si susseguirono numerose dinastie a nord ed a sud in rapida successione. Il destino della Cina però era unitario. La breve e autoritaria dinastia Sui (581-618) ripristinò un unico potere centrale e creò le condizioni materiali per la riunificazione con la costruzione del Grande canale, che mise in comunicazione le regioni meridionali, nelle quali si concentrava ormai la produzione, e quelle settentrionali, nelle quali doveva essere insediato per ragioni strategiche il potere politico.

2.4.1 Liu Hui

Liu Hui fu un matematico cinese che visse nel III secolo d.C. (220-280 circa) durante il periodo dei tre regni. Non si hanno notizie sulla sua vita, ma viene ricordato per aver redatto il primo commento ai *Nove capitoli* che completò nel 263 d.C.. L'opera fu oggetto di numerosi commenti, ma vennero scelti quello del matematico Liu Hui e quello composto da un gruppo di studiosi sotto la supervisione di Li Chunfeng, per essere tramandati, infatti tutte le edizioni giunte fino a noi contengono solo questi due commenti. In questo testo venivano proposti 246 problemi, articolati in nove capitoli, riguardanti vari ambiti dai più pratici, come la tassazione e l'agrimensura, ai più astratti, come la risoluzione di equazioni e non solo. Liu Hui introdusse un approccio diverso alla matematica rispetto a quello del testo che stava commentando, in primo luogo inserendo le figure geometriche (nessuna di quelle di Liu Hui è giunta fino ai giorni nostri). In secondo luogo introducendo procedure algoritmiche per giustificare i risultati presenti nel testo. Mentre i greci in questo periodo componevano trattati in cui l'esposizione era sistematica e logicamente ordinata, i cinesi utilizzavano lo stesso metodo usato dai babilonesi e dagli egizi, consistente nella compilazione e risoluzione di una serie di problemi specifici. All'interno dei *Nove capitoli* si trovano problemi composti ciascuno da un enunciato con relativa risposta numerica a cui seguono per alcuni problemi delle regole generali utilizzate per la risoluzione del problema. Liu Hui nel suo commento introdusse, dove credeva necessario, algoritmi per validare le regole all'interno del testo. L'algoritmo giocava un ruolo centrale nel canone della matematica e rappresentava uno strumento per le dimostrazioni algebriche. Dimostrare la validità di un ragionamento voleva dire dimostrare la correttezza delle procedure nei passi dell'algoritmo. L'algoritmo veniva quindi visto come strumento per dimostrare l'esattezza di un ragionamento. L'utilizzo di schemi di ragionamento ricorrenti indica che le dimostrazioni all'interno dei *Nove capitoli* non erano *ad hoc*, ma seguivano determinate regole e quindi che nonostante i problemi fossero pratici gli algoritmi risolutivi erano generali. Questo risulta visibile nelle dimostrazioni, piuttosto elaborate, per mezzo del quale il matematico stabilì la correttezza dell'algoritmo per l'area del cerchio, caso in cui entrano in gioco le suddivisioni infinite. La struttura del ragionamento è la seguente:

1. In primo luogo si suddivide l'oggetto in questione: nel cerchio vengono inscritti poligoni regolari.

2. Il secondo passo consiste nel mettere in evidenza, in base alle precedenti suddivisioni, le relazioni esatte che sussistono in una determinata parte dell'oggetto studiato e che alla fine convergono nell'algoritmo del quale si vuole dimostrare l'esattezza. Per il cerchio si tratta della relazione che sussiste tra il semiperimetro di un poligono regolare inscritto, il raggio e l'area del poligono inscritto con un numero doppio di lati rispetto al precedente.

3. Come terzo passo si itera la suddivisione dell'oggetto mettendo in evidenza quali sono le relazioni considerate. Grazie a ciò si viene a creare una successione di situazioni simili per le quali sono valide le stesse relazioni e dove è considerata una parte sempre maggiore dell'oggetto geometrico inizialmente considerato.

4. Il quarto passo risulta fondamentale per poter giungere alla conclusione e consiste nel calcolare sempre di quanto diminuisce la parte dell'oggetto non ancora trattata nel corso delle iterazioni (suddivisioni) effettuate. L'algoritmo viene dichiarato corretto solamente quando si dimostra che nel procedimento seguito la grandezza non considerata tende a zero.

Il ragionamento matematico che entra in gioco assomiglia al metodo di esaustione utilizzato dai greci. Vi è però una sostanziale differenza. Nei testi greci il metodo di esaustione è affiancato dall'utilizzo della *reductio ad absurdum.* Il numero di passi, per i greci, doveva essere potenzialmente infinito, mentre il matematico cinese procede attraverso un ragionamento diretto facendo entrare in gioco quella che sembra un'infinità attuale di operazioni.

All'interno dei *Nove capitoli* i problemi riguardanti le aree si trovano nel primo capitolo il *Fang tian* (Misurazione del campo). Se tradotto esplicitamente il titolo di questo capitolo in cinese è "campi quadrati", ma nei 38 problemi al suo interno vengono esaminati problemi riguardanti l'area di quadrati, triangoli, cerchi, ma vengono anche esposte le regole per l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione delle frazioni. I problemi 31 e 32 sono i più importanti nel capitolo, in quanto si espone la regola per calcolare l'area di un cerchio, dati il suo diametro e la circonferenza. I problemi all'interno dei *Nove capitoli* vengono indicati mettendo il numero del capitolo, un punto ed a seguire il numero del problema.

(1.31) *Supponiamo di avere un campo circolare di* 30 *bu di circonferenza e di* 10 *bu di diametro.*
Si chiede quanto fa il campo.
Risposta: 75 *bu.* [39, p.177]

(1.32) *Supponiamo che si abbia un campo circolare di* 181 *bu di circonferenza e di* 60 *bu* $\frac{1}{3}$ *di bu di diametro.*
Si chiede quanto fa il campo.
Risposta: 11 *mu*[12] 90 *bu* $\frac{1}{12}$ *di bu.* [39, p.177]

Procedura: la metà della circonferenza e la metà del diametro vengono moltiplicate l'una per l'altra, si ottengono i bu del prodotto. [39, p.177]

Altra procedura: poiché il diametro e la circonferenza sono moltiplicati l'uno per l'altro, si divide per 4. [39, p.187]

Altra procedura: il diametro viene moltiplicato per se stesso, si moltiplica questo per 3 *e si divide per* 4. [39, p.187]

Altra procedura: essendo la circonferenza moltiplicata per se stessa, si divide per 12. [39, p.187]

In questi due problemi veniva utilizzato $\pi = 3$, infatti calcolando il rapporto $\frac{A}{r^2}$ si ottiene:

$$\textbf{(1.31)} \quad \pi = \frac{75}{5^2} = 3 \qquad e \qquad \textbf{(1.32)} \quad \pi = \frac{2730 + \frac{1}{12}}{\left(\frac{60+\frac{1}{3}}{2}\right)^2} = \frac{32761 \times 36}{12 \times 32761} = 3$$

Liu Hui sapeva che questo valore era un'approssimazione molto scarsa, infatti nel commento alla prima procedura scrive:

> *Eppure, da generazioni, questo metodo è stato tramandato: nessuno ha voluto verificarlo con cura. Gli eruditi hanno seguito il passo degli anziani, e hanno copiato i loro errori. Senza avere prove chiare, era difficile discutere quello.* [39, p.179]

Liu Hui calcolò un valore più preciso considerando come dato esatto quello della circonferenza e nei commenti scritti ai due problemi riporta un risultato più preciso in cui utilizza $\pi = 3,14$. Ecco i commenti ai due problemi:

> **Commento al primo problema:** *Con la mia procedura questa dovrebbe fare un campo di* 71 *bu* $\frac{103}{157}$ *di bu.* [39, p.177]
>
> **Commento al secondo problema:** *Con la mia procedura questo dovrebbe fare un campo di* 10 *mu* 208 *bu* $\frac{113}{314}$ *di bu.* [39, p.177]

La scarsa accuratezza del valore utilizzato nei problemi spinse il matematico cinese a scrivere uno dei più lunghi commenti presenti in tutto il testo, dedicato a determinare un rapporto più preciso attraverso un algoritmo generale. L'algoritmo viene descritto di

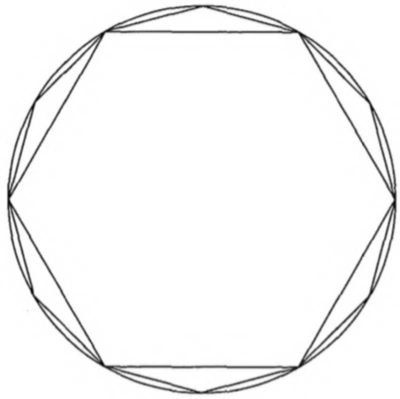


Figura 2.28: Poligoni regolari iscritti nel cerchio. [39, p.144].

seguito in termini moderni, l'originale scritto da Liu Hui lo si trova nel commento alla prima procedura [39, pp.177-183].

L'area del cerchio nei *Nove capitoli* viene calcolata moltiplicando la semicirconferenza per la metà del diametro. Liu Hui per dimostrare la correttezza di questo procedimento, $S = \frac{1}{2}lr$ [13], considera dapprima l'esagono regolare inscritto nel cerchio da cui ottiene il dodecagono regolare inscritto, la cui area vale: $S_1 = 3l_0r$. Poi taglia quest'ultimo ottenendo il poligono regolare di ventiquattro lati inscritto nel cerchio di area pari a: $S_2 = 6l_1r$. Più si taglia più la differenza $S - S_n$ tra l'area del cerchio e l'area del $(6 \cdot 2^n)$-gono regolare che vi è inscritto è piccola, con $S_n = 6 \cdot 2^{n-1} \cdot l_{n-1} \cdot r$ dove l_{n-1} con $n = 1, 2, \ldots$ è la lunghezza di ciascun lato del $(6 \cdot 2^n)$-gono. Si taglia e si interseca fino al punto in cui non si può più tagliare, in quanto il poligono regolare inscritto nel cerchio è tutt'uno con la circonferenza e la sua area non è più inferiore a quella del cerchio. Qui si ha il processo di passaggio al limite, che con simboli moderni si può indicare:

$$\lim_{n\to\infty} 6 \cdot 2^n \cdot l_n = l \tag{2.1}$$

Similmente:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \tag{2.2}$$

In un secondo momento Liu Hui precisa che tra il lato l_n del $(6 \cdot 2^n)$-gono regolare inscritto nel cerchio e la circonferenza del cerchio vi è un *diametro di resto* r_n. Se si moltiplicano tutte le lunghezze di questi lati per il *diametro di resto*, cioè se si aggiunge $6 \cdot 2^n \cdot l_n \cdot r_n$ a S_n allora la somma deve essere superiore all'area del cerchio:

$$S_n + 6 \cdot 2^n \cdot l_n \cdot r_n = S_n + 2(S_{n+1} - S_n) > S$$

È a questo punto preciso che la formula 2.1 è stabilita in termini moderni: $\lim_{n\to\infty} l_n = 0$ di conseguenza $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Da ciò risulta che $S_n + 2(S_{n+1} - S_n)$ non è più superiore all'area del cerchio S, o in termini moderni:

$$\lim_{n\to\infty} S_n + 2(S_{n+1} - S_n) = S \tag{2.3}$$

[12] $1mu$=$240bu$

[13] dove S indica l'area del cerchio, l la lunghezza della circonferenza ed r il suo raggio

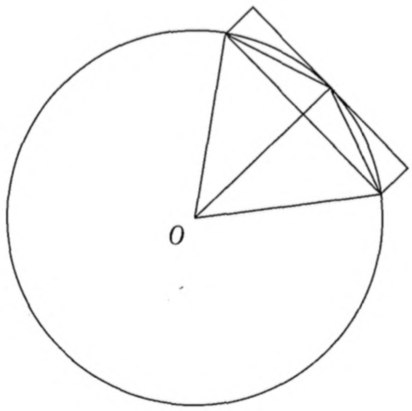


Figura 2.29: La maggiorazione dell'area del cerchio [39, p.144].

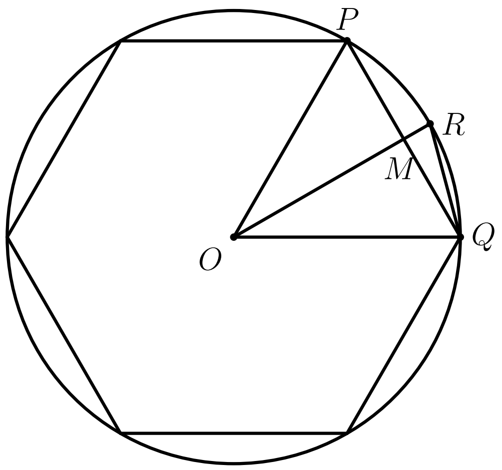
Ricapitolando 2.2 e 2.3 significano che l'area del cerchio S è il limite inferiore di $\{S_n\}$ e superiore di $\{S_n + 2(S_{n+1} - S_n)\}$. Dopo di che Liu Hui riflette sul poligono regolare che è tutt'uno con la circonferenza del cerchio. Sia l^* la lunghezza di ciascuno dei suoi lati, la loro somma è la lunghezza della circonferenza: $\sum_1^* l^* = l$. Per quanto riguarda questo poligono il matematico ne taglia i lati: lo taglia quindi in piccoli triangoli isosceli in numero infinito. Tali triangoli hanno per base ciascuno dei lati del poligono regolare e come vertice il centro del cerchio. La somma delle loro aree dà l'area del cerchio: $S = \sum_1^\infty A$. Poiché il prodotto della base l^* per il raggio r è uguale al doppio dell'area dei piccoli triangoli A, $l^*r = 2A$ allora $A = \frac{1}{2}l^*r$. Di conseguenza a causa dell'uguaglianza $S = \frac{1}{2}lr$ si ottiene:

$$S = \sum_1^\infty A = \frac{1}{2}\sum_1^\infty l^*r = \frac{1}{2}lr$$

Dimostrando così la formula $S = \frac{1}{2}lr$.

L'algoritmo descritto nel commento di Liu Hui fa uso di un esempio numerico, grazie al quale il matematico ottiene un valore approssimato di Pi Greco più preciso rispetto a quello dei *Nove capitoli*. Nonostante l'algoritmo descritto nel commento faccia uso di numeri, l'algoritmo ed il procedimento descritti sono del tutto generalizzabili.

Come già detto precedentemente vi sono somiglianze e differenze tra il procedimento utilizzato da Liu Hui e quello utilizzato da Archimede. Archimede osservò che quando un cerchio è racchiuso tra due poligoni di n lati, aumentando n si diminuisce la differenza tra la lunghezza della circonferenza del cerchio ed i perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti. Quindi il matematico greco arrivò a trovare un intervallo tra cui era compreso Pi Greco utilizzando poligoni inscritti e circoscritti al cerchio. Per calcolare i lati dei successivi poligoni regolari, il matematico greco sfruttò proprietà geometriche tra angoli al centro e rapporti tra i lati dei poligoni e il diametro del cerchio. Il metodo utilizzato da Liu Hui invece necessitava solamente di poligoni inscritti. Il matematico cinese partendo dal perimetro conosciuto di un esagono regolare inscritto nel cerchio, calcolava il perimetro del poligono regolare con il doppio dei lati applicando due volte il Teorema di Pitagora.



Considerava dapprima il triangolo rettangolo $O\widehat{M}Q$ di cui conosceva $\overline{OQ}$ ipotenusa e un cateto $\overline{MQ}$ (*base*). Grazie al Teorema di Pitagora si calcolava l'altro cateto $\overline{OM}$ del triangolo. Dopo di che si considerava il triangolo rettangolo $R\widehat{M}Q$ di cui si conosceva un cateto $\overline{MQ}$ (*piccola altezza*) e tramite la sottrazione tra il raggio ed $\overline{OM}$ si otteneva il secondo cateto del triangolo $\overline{MR}$ (*diametro di resto* che per il triangolo $R\widehat{M}Q$ è la *piccola base*). Applicando nuovamente il teorema di Pitagora si trovava l'ipotenusa $\overline{RQ}$, che era anche il lato del dodecagono regolare inscritto nel cerchio.

Continuando l'algoritmo Liu Hui calcolò i lati dei poligoni inscritti fino al poligono regolare di novantasei lati. Grazie a questi dati, tramite la formula per l'area di un poligono regolare inscritto nel cerchio $S_n = 6 \cdot 2^{n-1} \cdot l_{n-1} \cdot r$, calcolò le aree del 96-gono (S_4) e del 192-gono (S_5). Sapendo che $S_5 < S < 2S_5 - S_4$ prese dapprima il valore intero 314 come valore approssimativo dell'area, da cui ricavò $\pi = 3,14 = \frac{157}{50}$, valore che usò nei commenti ai due problemi quando calcolò le aree corrette. Si accorse però che anche questo valore poteva essere migliorato, così fece i calcoli con i valori non approssimati per le aree, tra cui era compresa l'area del cerchio e trovò $\pi = \frac{3927}{1250} = 3,1416$.

Capitolo 3

Alla scoperta di Pi Greco

3,14159 26535 89793 23846...

3.1 Struttura generale del progetto

Nel progetto *Alla scoperta di Pi Greco*, si vuole utilizzare la storia della matematica, in particolare l'evoluzione storica del numero Pi Greco, come possibile risposta al *justification problem*. Le attività sono rivolte alla scuola secondaria di secondo grado e pensate in particolar modo per gli indirizzi in cui la matematica non è una disciplina caratterizzante, dove risulta ancora più importante e difficile motivare gli studenti al suo studio. Si è deciso di ideare un progetto per il primo biennio, della scuola secondaria di secondo grado, prendendo in considerazione l'ambito geometrico. Questa scelta rispecchia, non solo la suddivisione per ambiti e periodi presente nelle Indicazioni Nazionali (si veda Paragrafo 1.4), ma anche la nascita di questo numero avvenuta storicamente in ambito geometrico. Con lo sviluppo di Pi Greco si seguirà anche lo sviluppo dimostrativo che lo ha accompagnato. Inoltre questa scelta permette di procedere parallelamente al programma che gli alunni affrontano durante il primo biennio in storia. In questo modo la storia della matematica e delle civiltà, che si inserisce in ogni unità didattica, è coerente con quanto i ragazzi affrontano in storia, permettendo loro di fare collegamenti interdisciplinari ed avere una visione unitaria della conoscenza matematica nel contesto storico in cui si è sviluppata.

La storia è il mezzo grazie al quale si possono conoscere gli aspetti fondamentali legati a questo numero, facilitando l'apprendimento dello studente, che si trova a ripercorrere le tappe umane di scoperta e ricerca attorno ad esso. Inoltre immergersi nel contesto socio-culturale, dei periodi che si prendono in esame, serve per comprendere appieno da quali esigenze sono scaturite le scoperte legate a Pi Greco, per poi in un secondo momento trarre conclusioni su quello che è per noi oggi questo numero e la nostra idea di dimostrazione. L'immedesimazione, all'interno del contesto preso in esame risulta necessaria per non incorrere in anacronismi storici. Inoltre si è volutamente considerata la storia di questo numero ed il suo sviluppo nel panorama mondiale, per ampliare la solita visione Eurocentrica della storia della matematica e sottolineare come questo studio sia stato sviluppato da diverse civiltà quasi contemporaneamente ed in modo probabilmente autonomo, trovando approssimazioni del numero al quanto sorprendenti.

PROGETTO: ALLA SCOPERTA DI PI GRECO

UNITÀ DIDATTICA: TRA IL TIGRI E L'EUFRATE

UNITÀ DIDATTICA: L'ANTICO EGITTO

UNITÀ DIDATTICA: EUCLIDE D'ALESSANDRIA

UNITÀ DIDATTICA: ARCHIMEDE DI SIRACUSA

UNITÀ DIDATTICA: L'ANTICA CINA

Figura 3.1: Struttura del progetto: Alla scoperta di Pi Greco.

Obbiettivi del progetto:

1. Superare la visione della matematica come una materia a-temporale ed a-storica.
2. Rendere gli studenti consapevoli dell'evoluzione dei concetti matematici, in particolare Pi Greco.
3. Suscitare interesse, passione e curiosità per la matematica.
4. Umanizzare la matematica.

Il progetto è suddiviso in cinque unità didattiche[14], come si vede in Figura 3.1. Nel progetto il numero viene introdotto, come avviene classicamente ed anche storicamente, attraverso la sua definizione geometrica; come rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il diametro di ogni cerchio. La storia presa in considerazione è quella antica: Egitto, Mesopotamia, Grecia e Cina. Si considera un periodo che parte dal 3000 a.C. per terminare intorno alla fine del VII secolo d.C. (si veda Capitolo 2). In tutti questi popoli Pi Greco nasce in corrispondenza di problemi pratici: calcolo della lunghezza di circonferenze e di aree dei cerchi. Ciascuna unità didattica prende in considerazione una delle civiltà arcaiche mondiali scelte per il progetto, mostrando il modo in cui queste popolazioni ricavano Pi Greco. La scelta di riservare un'unità didattica per ciascuna civiltà è stata fatta per riservare alla storia di queste popolazioni il giusto spazio e tempo. Le unità didattiche sono da due ore ciascuna e composte da una parte di lezione frontale, in cui viene spiegato il contesto storico, e da una laboratoriale, in cui i ragazzi lavoreranno a gruppi sui documenti storici. In questo capitolo per ciascuna unità didattica si descriveranno i contenuti, gli obbiettivi, le tecniche d'insegnamento, gli spazi, i tempi ed i materiali necessari. Per rendere più chiaro e mantenere il filo di quanto fatto ad ogni lezione, si è pensato di introdurre l'utilizzo di un cartellone vedi Figura 3.2. Il cartellone contiene una linea del tempo in cui annotare i processi di scoperta ed avere quindi una cronologia delle conoscenze su Pi Greco nell'antichità ed una carta di identità per mettere in luce quello che oggi si conosce su questo numero.

[14]Con il termine unità didattica si identifica il modo di pianificare, progettare e descrivere il processo di insegnamento-apprendimento. Partendo dal programma si individuano in esso i contenuti, gli obiettivi, le strategie didattiche da utilizzare e la valutazione.

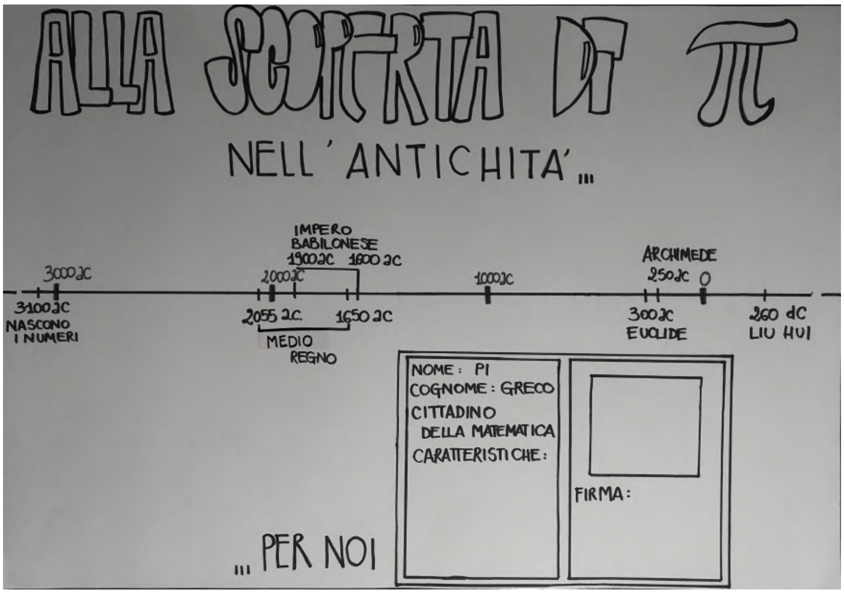


Figura 3.2: Cartellone prima dell'inizio delle attività.

Obbiettivi specifici: (oltre a quelli generali già delineati precedentemente)

1. Pi Greco è una delle poche costanti matematiche, apprendere la sua a-dimensionalità.

2. Comprendere, imparare e saper utilizzare i diversi metodi con cui i popoli antichi hanno ricavato questa costante e conoscere i problemi da cui lo studio è scaturito.

Prerequisiti:

- Conoscenza della terminologia principale riguardante il cerchio e le formule di area e circonferenza.

- Conoscenza dei principali poligoni regolari e terminologia relativa.

- Conoscenza del Teorema di Pitagora.

Sono previsti due questionari realizzati attraverso Google Moduli, per facilitarne la compilazione. I questionari sono anonimi e non è stata inclusa la possibilità di tracciare le email dei mittenti. Questa scelta è stata fatta perché essendo le attività prettamente laboratoriali risulta più significativo valutare la variazione del gruppo classe, piuttosto che del singolo studente. Le domande sono state rese obbligatorie in modo che a tutti i quesiti fosse data una risposta. Per le domande aperte è stata scelta l'opzione *paragrafo* invece che *risposta breve* per lasciare a ciascuno la possibilità di esprimersi senza limiti di spazio. Nelle domande a scelta multipla, con la possibilità di scegliere più risposte, è stata inserita l'opzione *altro* per permettere agli studenti di inserire opzioni non presenti tra quelle proposte. Le domande sono formulate utilizzando un linguaggio informale e la seconda persona singolare in modo che l'alunno si senta coinvolto direttamente.

Il questionario iniziale (Allegato A), che i ragazzi compileranno prima dell'inizio del percorso, contiene sei domande per indagare le conoscenze e credenze degli studenti riguardo i temi principali che sono sviluppati nel progetto. Di seguito uno schema delle domande presenti nel questionario iniziale.

1. Cerchio e Circonferenza: domanda aperta inserita per capire se gli studenti conoscono il significato di questi termini.

2. Pi Greco: domanda a scelta multipla, con possibilità di selezionare più risposte, per indagare cosa i ragazzi conoscono su questo numero prima del percorso.

3. La storia della matematica: prima una domanda con risposta sì o no sulla concezione di evoluzione della matematica, seguita dalla richiesta di motivare la risposta.

4. La concezione di dimostrazione: domanda a scelta multipla, con possibilità di selezionare più risposte, sul concetto di dimostrazione.

5. Percezione della matematica: domanda aperta avente l'obbiettivo di far emergere la concezione di matematica dello studente.

Il questionario finale (Allegato B), che gli studenti compileranno al termine del percorso, è costituito da due parti. La prima parte del questionario riprende le domande presenti nel questionario iniziale, mentre la seconda mira ad avere un feedback sull'attività svolta da parte dei ragazzi.

1. Pi Greco: domanda a scelta multipla, con possibilità di selezionare più risposte, per indagare se le conoscenze riguardo a questa costante sono cambiate alla fine del percorso.

2. La storia della matematica: prima una domanda con risposta sì o no sulla concezione di evoluzione della matematica, seguita dalla richiesta di motivare la risposta per indagare se sono avvenuti cambiamenti al termine del percorso.

3. La concezione di dimostrazione: domanda a scelta multipla, con possibilità di selezionare più risposte, per indagare se la loro idea di dimostrazione è cambiata alla fine del percorso.

4. Gradimento del percorso: domanda aperta in cui gli studenti possono specificare cosa gli è piaciuto fare durante questo percorso.

5. Cambiamento del percorso: domanda aperta in cui si chiede agli studenti se cambierebbero qualcosa del percorso svolto assieme.

6. Apprendimento: due domande aperte che indagano cosa ciascun alunno ha compreso meglio e cosa ha compreso peggio del progetto fatto in classe.

7. Cambiamenti personali: domanda aperta in cui gli studenti indicano i loro cambiamenti alla fine del percorso.

8. Percezione della matematica: domanda aperta sul personale concetto di matematica per indagare se le percezioni riguardo questa materia sono cambiate al termine del percorso.

3.2 Tra il Tigri e l'Eufrate

L'unità didattica inizia con un laboratorio sulla costante Pi Greco in relazione alla circonferenza, seguita da una parte frontale in cui viene raccontata la storia dei Babilonesi, esplicitando il contesto socio-culturale relativo al periodo delle tavolette su cui si focalizza la successiva attività laboratoriale. La scelta di lavorare sulla circonferenza nel primo laboratorio è determinata dal modo in cui Pi Greco viene ricavato nelle tavolette che successivamente verranno presentate. Inoltre, in accordo con quanto facevano le popolazioni antiche, nel laboratorio ai ragazzi viene chiesto di usare le corde per misurare. I ragazzi si dovranno staccare dai materiali a loro familiari in modo da rendere la ricostruzione storica più verosimile possibile, così da immedesimarsi maggiormente nel periodo storico.

3.2.1 Primo laboratorio: Pi Greco e la circonferenza

Obbiettivi: in questa prima attività, analizzando Pi Greco come rapporto tra la lunghezza della circonferenza ed il diametro, si vuole fare emergere che è una costante matematica a-dimensionale.
Durata: 45/50 minuti
Materiali: cordino, oggetti cilindrici da misurare (almeno uno per studente), forbici, scheda *Misuriamo la circonferenza* (Allegato C) fornita dall'insegnante.
Descrizione delle attività:

Fase 1 Misuriamo la circonferenza: i ragazzi, esattamente come facevano alcuni popoli antichi, attraverso un cordino misurano la lunghezza delle circonferenze ed i diametri di vari oggetti. In questa prima fase si approssima grossolanamente Pi Greco, andando a vedere quanti diametri misura la circonferenza di ogni oggetto.

Fase 2 Si chiede agli alunni di trovare una strategia più accurata per misurare la lunghezza della circonferenza. Dopo un momento di confronto in classe, per analizzare le strategie trovate dai vari gruppi, si procede alla fase successiva.

Fase 3 Sfruttando la strategia che ritengono migliore, si chiede di compilare una tabella in cui inserire le misurazioni delle lunghezze delle circonferenze dei vari oggetti. Alla fine della compilazione si chiedono considerazioni riguardanti l'ultima colonna per arrivare alla costanza di Pi Greco. Inoltre da $\pi = \frac{C}{d}$ si ricava l'a-dimensionalità.

Nel commento alla fine di questo primo laboratorio si sottolinea come, nonostante le diverse unità di misura inventate dai vari gruppi ed i diversi oggetti a disposizione, il rapporto tra la lunghezza della circonferenza ed il diametro sia indipendente dagli oggetti e dalle unità di misura scelte.

Finita la discussione si introduce, attraverso una lezione frontale supportata da slide, il contesto storico del periodo su cui gli alunni svolgeranno la seconda attività laboratoriale (si veda Paragrafo 2.1). Oltre alla storia delle varie popolazioni, che si sono susseguite in Mesopotamia, le informazioni necessarie da fornire sono quelle riguardanti la numerazione babilonese, perché saranno necessarie per svolgere il secondo laboratorio.

3.2.2 Secondo laboratorio: Come hanno fatto i Babilonesi

Obbiettivi: in questa fase il focus sarà incentrato prettamente sulla storia della matematica nell'epoca dei Babilonesi. I ragazzi toccheranno con mano i documenti storici del passato in modo da far comprendere loro come la matematica sia una disciplina che si è evoluta nel tempo e sulla quale indagavano già popoli antichi.
Durata: 45/50 minuti
Materiali: scheda *Come hanno fatto i Babilonesi* (Allegato D) fornita dall'insegnante.
Descrizione delle attività:

Fase 1 Analisi della tavoletta ritrovata a Susa nel 1936. Esaminando alcune delle righe presenti, opportunamente tradotte, i ragazzi ottengo due diversi valori di Pi Greco derivanti dalla circonferenza. Inoltre per quanto riguarda il migliore dei due, gli studenti seguiranno la ricostruzione fatta dagli storici per spiegare come probabilmente i Babilonesi siano arrivati a questo secondo valore.

Fase 2 Analisi della tavoletta YBC 7302. Da questa tavoletta si trova il valore di Pi Greco legato all'area. Gli studenti, maneggiando la formula dell'area che conoscono, dovranno ricavare una formula in cui compaia la circonferenza ($A = \frac{C^2}{4\pi}$), dato che i Babilonesi per calcolare l'area del cerchio utilizzavano la lunghezza della circonferenza.

Alla fine dell'attività si condividono le conclusioni trovate dai vari gruppi di lavoro. Si sottolinea il fatto che questi popoli conoscessero il valore costante di Pi Greco ma, come emerge dall'analisi delle tavolette, gli attribuissero valori diversi a seconda dei problemi presi in considerazione. Secondo gli storici, per fare i calcoli queste civiltà utilizzavano il valore tre per semplicità, nonostante ne conoscessero uno migliore. Risulta, inoltre, importante sottolineare come il migliore valore di Pi Greco $3,125$ venga fuori tramite il confronto tra due figure (l'esagono e il cerchio nella tavoletta TMS3, presente in Figura 2.8). Per quanto riguarda la dimostrazione, i Babilonesi in queste due tavolette non ne danno nessuna, ma presentano solamente un elenco di costanti ed un loro esempio di utilizzo. Sono gli storici che hanno dato una possibile interpretazione della tavoletta in cui si trova il valore $\pi = \frac{25}{8} = 3,125$, come rapporto tra il perimetro dell'esagono e la lunghezza della circonferenza circoscritta ed esso. Terminata la discussione assieme alla classe si scrivono le conclusioni trovate riguardo alla conoscenza dei Babilonesi su Pi Greco nel cartellone.

3.3 L'antico Egitto

L'unità didattica inizia con un laboratorio sulla costante Pi Greco in relazione all'area del cerchio. Questa scelta è dovuta al modo in cui nei documenti storici viene presentato il problema riguardante questa costante. Segue una parte di lezione frontale in cui viene raccontata la storia degli Egizi spiegando il contesto socio-culturale relativo al periodo del papiro su cui è incentrata l'ultima attività laboratoriale.

3.3.1 Primo laboratorio: Pi Greco e il cerchio

Obbiettivi: Sfruttando la formula dell'area del cerchio, che gli studenti conoscono, si chiederà di trovare una strategia per approssimare tale area, inoltre si cercherà di dare approssimazioni di Pi Greco con metodi elementari.
Durata: 45/50 minuti
Materiali: scheda *Misuriamo il cerchio* (Allegato E) fornita dall'insegnante, colori.
Descrizione delle attività:

Fase 1 Agli studenti viene chiesto di cercare un modo per calcolare nella pratica l'area del cerchio. Nella scheda è presente una figura che può essere d'aiuto agli studenti durante questo lavoro.

Fase 2 Con l'utilizzo dei colori e delle immagini presenti nella scheda si arriva ad una prima approssimazione di π.

Conclusa l'attività laboratoriale, si discutono assieme alla classe i risultati ottenuti sottolineando la difficoltà nel dare una buona approssimazione di Pi Greco ed il fatto che in questo caso la costante è ricavata dal rapporto tra area e raggio al quadrato.

Dopo questo confronto, si terrà una breve lezione frontale di introduzione storica in preparazione al secondo laboratorio. L'esposizione, supportata da slide, sarà incentrata sulle dinastie che si sono susseguite nella storia Egizia (si veda Paragrafo 2.2). Si può introdurre anche la numerazione facendo un confronto con quella Babilonese, vista nella lezione precedente, sottolineando la differenza tra le due.

3.3.2 Secondo laboratorio: Come hanno fatto gli Egizi

Obbiettivi: Comprendere il diverso modo di ragionare utilizzato dagli Egizi, rispetto ai Babilonesi, per trovare questa costante. Inoltre grazie all'utilizzo di documenti storici si apprezza la diversità tra la matematica che conoscono e quella antica.
Durata: 45/50 minuti
Materiali: scheda *Come hanno fatto gli Egizi*(Allegato F) fornita dall'insegnante, colori.
Descrizione delle attività:

Fase 1 Si analizza il problema n° 50 del Papiro di Ahmes, cercando di trovare una formula generale per l'area del cerchio e ricavando da essa il valore di Pi Greco utilizzato dagli Egizi.

Fase 2 Per capire in che modo lo scriba abbia trovato la formula per l'area del cerchio si analizza il problema n° 48 dello stesso papiro. I ragazzi ripercorrono le giustificazioni, date dagli storici che hanno interpretato il papiro, riguardanti il possibile metodo utilizzato da Ahmes.

Alla fine dell'attività si condividono i risultati trovati dai diversi gruppi. Si sottolinea la difficoltà di generalizzare una formula partendo da un caso specifico. A partire dalla formula ricavata nel papiro, si trova il valore di Pi Greco utilizzato dagli Egizi: $\pi = \frac{256}{81} \approx 3,16$. In questa civiltà Pi Greco viene ricavato dall'area del cerchio, più precisamente dall'area dell'ottagono, mentre non si hanno informazioni su come gli Egizi calcolassero la lunghezza della circonferenza. Si sottolinea la differenza tra le dimostrazioni a cui loro sono abituati e la ricetta data dallo scriba. Terminata la discussione assieme alla classe si scrivono le conclusioni trovate riguardo alla conoscenza degli Egizi su Pi Greco nel cartellone.

3.4 Euclide d'Alessandria

L'unità didattica inizia con una lezione frontale sulla civiltà greca ed in particolare su Euclide e la sua opera (si veda Paragrafo 2.3.2). Date le scarse informazioni su Euclide durante la lezione frontale, supportata da slide, si può leggere ed analizzare assieme ai ragazzi il commento di Proclo, da cui si ricavano informazioni sulla vita del matematico. Inoltre sarebbe importante anche introdurre nel discorso la biblioteca d'Alessandria d'Egitto in cui il matematico probabilmente lavorò, dato che Alessandria è stata il centro culturale più importante del Mediterraneo nell'antichità. Dopo l'introduzione segue un laboratorio in cui toccare con mano la matematica degli Elementi.

3.4.1 Laboratorio: Euclide questo sconosciuto

Obbiettivi: Apprezzare la sistemazione della matematica di Euclide e la chiarezza delle dimostrazioni odierne rispetto a quelle degli Elementi. Comprendere in che cosa consiste il metodo di esaustione utilizzato dal matematico alessandrino.
Durata: 50/60 minuti
Materiali: scheda *Euclide questo sconosciuto* (Allegato G) fornita dall'insegnante, colori.
Descrizione dell'attività:

Fase 1 Lettura, assieme alla classe, della proposizione (XII,2) e della dimostrazione data da Euclide. La lettura viene svolta assieme, affinché almeno una volta la dimostrazione sia letta nella sua interezza, per poi passare alla fase successiva di analisi della varie parti da cui è composta.

Fase 2 Si analizza la dimostrazione suddivisa in opportuni passaggi, rispondendo alle richieste presenti sulla scheda in modo da ripercorrerla capendone i significati. Le suddivisioni della dimostrazione permettono di approfondire un particolare aspetto della dimostrazione, così da avere una visione finale corretta della struttura dimostrativa.

Terminato il laboratorio si discutono assieme alla classe i passaggi fondamentali e le risposte alle ultime tre domande. Deve emergere dalla discussione finale che Euclide non nomina mai Pi Greco, ma dimostra nella proposizione (XII,2) che in ogni cerchio il rapporto $\frac{A}{d^2}$ è costante. Inoltre si spiega in cosa consiste il metodo di esaustione che Euclide utilizza per dimostrare questa proposizione. Al termine della discussione si sottolinea che i greci sapevano che anche il rapporto $\frac{C}{d}$ era costante, ma Euclide non collega queste due costanti. Questo farà da ponte con la successiva unità didattica, perché nel laboratorio su Archimede si scopre, come oggi sappiamo, che le due costanti sono la stessa: Pi Greco. Terminata la discussione assieme alla classe si scrivono le conclusioni trovate riguardo alla conoscenza di Euclide su Pi Greco nel cartellone.

3.5 Archimede di Siracusa

L'unità didattica inizia con una lezione frontale sul contesto storico, in particolare sulla storia di Siracusa, in cui è vissuto il matematico e sulla sua opera: *Misura del cerchio* (si veda Paragrafo 2.3.3). Date le scarse informazioni sulla vita di Archimede nella lezione, supportata da slide, si possono introdurre i due aneddoti più famosi riguardanti il matematico e si può leggere il passo di Tito Livio, in cui si hanno informazioni sul periodo della morte di Archimede. Dopo l'introduzione del contesto storico segue un laboratorio incentrato sull'opera di Archimede.

3.5.1 Laboratorio: Il genio di Archimede

Obbiettivi: Riconoscere il metodo di esaustione e comprendere che Archimede ha consapevolezza che i valori che ottiene per Pi Greco sono solo approssimazioni. Riconoscere e ricavare la nostra formula dell'area presente nella prima proposizione del trattato.
Durata: 45/50 minuti
Materiali: scheda *Il genio di Archimede* (Allegato H) fornita dall'insegnante.
Descrizione dell'attività:

Fase 1 Lavoro sulle tre proposizioni presenti nel trattato *Misura del cerchio* per comprenderne il significato. Dalla prima proposizione presente nel testo si ricaverà la formula dell'area del cerchio moderna. Dalle successive proposizioni si vedrà l'approssimazione data dal matematico siracusano a questa costante.

Fase 2 Si approssima Pi Greco utilizzando il metodo di esaustione come fece Archimede. Grazie alla formula, che lega i perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti successivi, i ragazzi potranno calcolare le successive approssimazioni di Pi Greco arrivando a quella proposta dal matematico siracusano.

Terminato il laboratorio si condividono i risultati trovati per l'approssimazione di Pi Greco, specificando il metodo che Archimede utilizzò per arrivare a tale risultato. Risulta importante sottolineare la differenza tra il metodo di esaustione utilizzato da Euclide, che prende in considerazione solamente i successivi poligoni regolari inscritti nel cerchio, e quello utilizzato da Archimede, che prende in considerazione le successioni di poligoni regolari inscritti e circoscritti al cerchio. Inoltre si sottolinea come dalla Proposizione 1 del trattato si ricavino due considerazioni importanti: in primo luogo che le costanti che legano cerchio e circonferenza sono la stessa, in secondo luogo dal trattato si ricava la nostra formula per l'area del cerchio. Terminata la discussione assieme alla classe si scrivono le conclusioni trovate riguardo alla conoscenza di Archimede su Pi Greco nel cartellone.

3.6 L'antica Cina

L'unità didattica inizia con una lezione frontale sull'antica Cina ed in particolare ci si concentra su due periodi storici (si veda Paragrafo 2.4). In primo luogo viene esposto in generale il periodo storico in cui si presume siano stati scritti i *Nove capitoli* per poi approfondire il contesto storico-sociale in cui visse Liu Hui (si veda Paragrafo 2.4.1). A differenza di Euclide ed Archimede, sul matematico cinese non ci sono informazioni riguardo la vita. Risulta però importante spiegare la portata e l'importanza dei commenti che fece ai *Nove capitoli* e della nuova impostazione che diede alla matematica cinese. Si può introdurre anche la numerazione utilizzata nell'antica Cina sottolineando che, a parte i simboli, è la stessa che utilizziamo noi oggi e quindi si può fare un confronto con le numerazioni prese precedentemente in considerazione. Dopo l'introduzione storica si svolge l'attività laboratoriale sul documento storico, prendendo in esame i problemi 31 e 32 dei *Nove capitoli*.

3.6.1 Laboratorio: Nove capitoli sulle arti matematiche

Obbiettivi: Constatare la potenza del metodo utilizzato in Cina per calcolare i perimetri della successione di poligoni inscritti nel cerchio e riconoscere che si tratta del metodo di esaustione.
Durata: 45/50 minuti
Materiali: scheda *Nove capitoli sulle arti matematiche* (Allegato I) fornita dall'insegnante.
Descrizione dell'attività:

Fase 1 Nella prima parte della scheda si analizza il testo originale presente nei *Nove capitoli* senza i commenti di Liu Hui. I ragazzi scopriranno quindi cosa nell'antica Cina si conoscesse sul cerchio e sulla costante Pi Greco. Verranno analizzate e tradotte con simboli moderni le quattro regole presenti nel testo cinese, osservando come le prime due siano equivalenti.

Fase 2 Nella seconda parte del laboratorio si analizzano i commenti ai due problemi, in cui viene approssimato in modo migliore Pi Greco. Dai commenti si ricava il valore utilizzato da Liu Hui.

Fase 3 Dopo aver ricavato il valore utilizzato per Pi Greco da Liu Hui si seguono i passi di uno dei più lunghi commenti presenti nei *Nove capitoli*, in cui le regole vengono dimostrate mediante un procedimento algoritmico. Seguendo i passaggi si ritrova nuovamente il metodo di esaustione. Liu Hui utilizza, come Euclide, solamente i poligoni regolari inscritti nel cerchio.

Terminato il laboratorio si condividono i risultati trovati per l'approssimazione di Pi Greco. Dal testo dei *Nove capitoli* si ottiene $\pi = 3$. Inoltre si sottolinea che: le prime due regole all'interno del trattato sono equivalenti tra loro e, secondo la matematica moderna, corrette; le ultime due regole non sono equivalenti né tra di loro né alle precedenti (in quanto nella terza si utilizza il diametro al quadrato per calcolare l'area del cerchio e nell'ultima la circonferenza al quadrato) e restituiscono un valore corretto per il calcolo dell'area del cerchio solo utilizzando il valore 3 per Pi Greco. Inoltre dal commento di Liu Hui ai due problemi si ottiene un'approssimazione migliore della costante: $\pi = \frac{157}{50} = 3,14$, anche se il matematico cinese sapeva che si potevano ottenere approssimazioni ancora migliori di questa. Dall'ultima parte della scheda si scopre il procedimento algoritmico utilizzato dal matematico per dimostrare la validità della prima regola presente nel trattato. Si sottolinea come nell'algoritmo il matematico cinese utilizzi il metodo di esaustione trovando un modo più semplice per calcolare i lati dei poligoni inscritti: applicando due volte il teorema di Pitagora. Inoltre il metodo di esaustione utilizzato da Archimede considera poligoni inscritti e circoscritti al cerchio, mentre Liu Hui riesce a dare una stima di Pi Greco utilizzando solamente poligoni inscritti. Terminata la discussione assieme alla classe si scrivono le conclusioni trovate riguardo alla conoscenza dei cinesi su Pi Greco nel cartellone.

Capitolo 4

Lo svolgimento in classe

In teoria,
non c'è nessuna differenza
fra teoria e pratica.
Ma, in pratica, c'è.
Yogi Berra

Nel Capitolo 3 si è descritto il progetto e le relative attività da svolgere in classe. Il progetto è stato sperimentato in una classe quinta ginnasio del Liceo Classico Luigi Galvani di Bologna grazie alla disponibilità della professoressa Alboni, docente di matematica della classe. La classe in cui si è concretizzato il progetto è composta da undici studenti e quindici studentesse. Le lezioni si sono svolte nel laboratorio della scuola, tenute da chi scrive ed in presenza della docente della classe. La presenza di lavori a gruppi ha reso il laboratorio il luogo più adatto a tale scopo. Si sono tenute cinque lezioni, di due ore ciascuna, secondo la seguente suddivisione:

Data	Attività svolta
18/11/2021	Tra il Tigri e l'Eufrate
25/11/2021	L'antico Egitto
13/01/2022	Euclide d'Alessandria
03/02/2022	Archimede di Siracusa
10/02/2022	L'antica Cina

Tabella 4.1: Suddivisione delle ore del progetto svolto in classe.

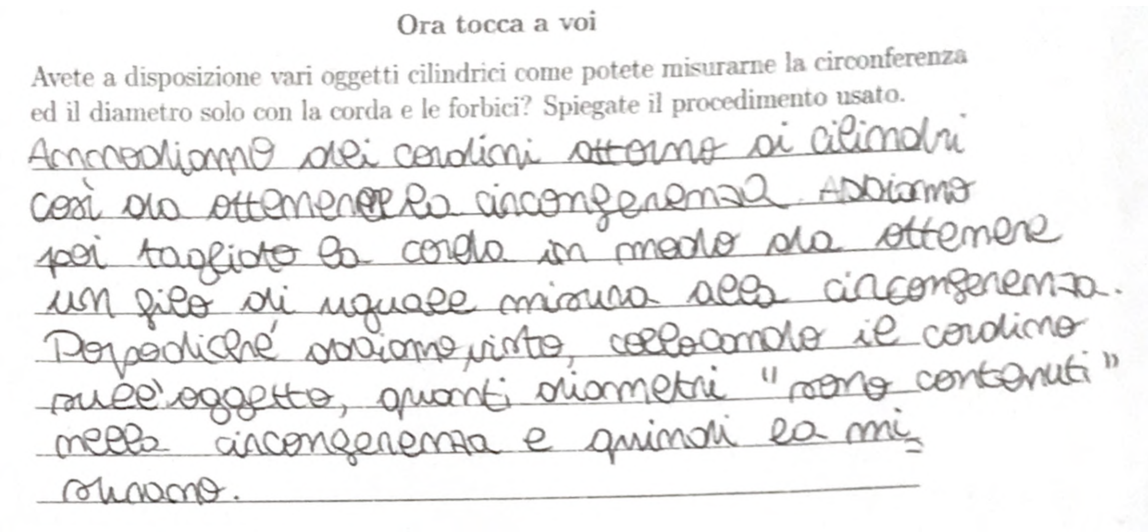
Dalla sperimentazione sul campo sono emersi pregi e difetti della progettazione teorica precedentemente esposta. Le normative relative all'emergenza sanitaria Covid-19 impongono che gli studenti si siedano in ordine alfabetico anche nel laboratorio. La suddivisione in gruppi di lavoro si è dovuta attenere alla vicinanza alfabetica degli studenti, si è cercato di variare i gruppi facendoli più grandi o più piccoli, così da evitare in primo luogo che i ragazzi lavorassero sempre con gli stessi compagni ed in secondo luogo per evitare che i gruppi fossero squilibrati. Questo perché durante la prima attività si è notato che dividendoli per ordine alfabetico alcuni gruppi hanno lavorato in autonomia e con poca fatica, mentre altri hanno riscontrato maggiori difficoltà. Il progetto all'inizio è stato strutturato prevedendo due ore per ciascuna lezione, ma già dalla prima sperimentazione in classe è emerso che due ore non sono sufficienti per affrontare tutti i laboratori proposti e lasciare ai ragazzi il giusto tempo per lavorare. Di seguito si descrive il percorso proposto effettivamente alla classe ed il relativo svolgimento.

4.1 Tra il Tigri e l'Eufrate nella pratica

Essendo il primo incontro, la lezione è cominciata con una piccola introduzione in cui è stato esposto ai ragazzi la struttura del percorso che si sarebbe affrontato assieme, per poi iniziare il laboratorio. Per le attività di laboratorio gli studenti sono stati divisi in cinque gruppi: quattro gruppi da cinque studenti ed un gruppo da sei.

4.1.1 Primo laboratorio: Pi greco e la circonferenza

Nella prima fase dell'attività (si veda Sezione 3.2.1) si chiede di misurare la lunghezza della circonferenza ed il diametro del cerchio attraverso un cordino, per poi trovare la misura della circonferenza rispetto a quest'ultimo. Quasi tutti i gruppi sono riusciti a svolgere in autonomia questa prima fase del laboratorio. È stato interessante osservare che, visto che nella scheda è stato scritto che gli antichi si segnavano le misure annodando le corde, molti ragazzi invece che posizionare il cordino attorno all'oggetto cilindrico e tagliarlo direttamente, lo hanno prima annodato attorno all'oggetto fornito loro (Figura 4.1).


Ora tocca a voi

Avete a disposizione vari oggetti cilindrici come potete misurarne la circonferenza ed il diametro solo con la corda e le forbici? Spiegate il procedimento usato.

Annodiamo dei cordini attorno ai cilindri così da ottenere la circonferenza. Abbiamo poi tagliato la corda in modo da ottenere un filo di uguale misura alla circonferenza. Dopodiché abbiamo visto, collocando il cordino sull'oggetto, quanti diametri "sono contenuti" nella circonferenza e quindi la misuriamo.

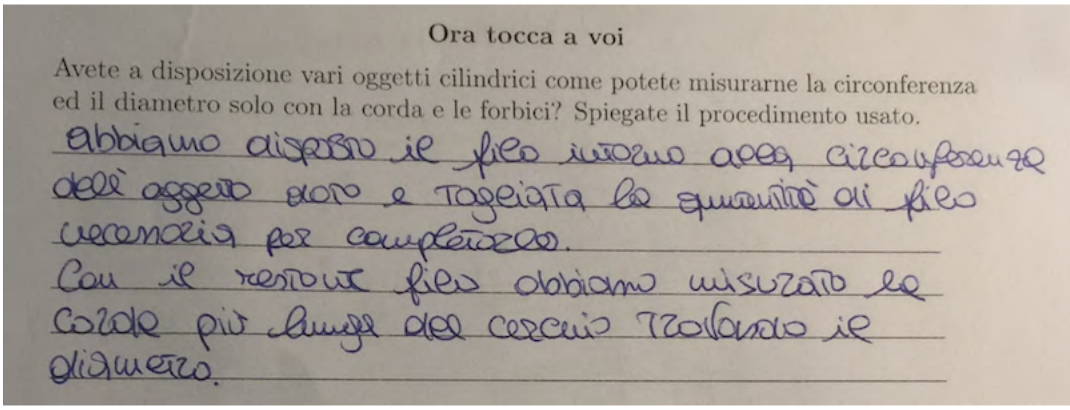
Figura 4.1: Risposta presa da un protocollo.

Le strategie utilizzate per svolgere questa prima parte dell'attività sono state diverse. Di seguito si descrivono i tre metodi utilizzati:

1. Alcuni gruppi hanno disposto il filo attorno all'oggetto cilindrico ed hanno tagliato il filo ottenendo la lunghezza della circonferenza. Con il filo rimanente hanno misurato e tagliato il diametro. Infine hanno confrontato i pezzi di filo misurando quanti dimetri misura ciascuna circonferenza (Figura 4.2).

2. Altri gruppi hanno disposto il filo attorno all'oggetto cilindrico ed hanno tagliato il filo ottenendo la lunghezza della circonferenza. Successivamente hanno posizionato la circonferenza ripetutamente sul diametro contando quante volte il diametro era contenuto in essa (Figura 4.1).

3. Altri gruppi invece hanno misurato attraverso il cordino il diametro dell'oggetto cilindrico per poi disporlo attorno all'oggetto misurando quanti diametri misura la circonferenza, tenendo il segno del punto di partenza scelto (Figura 4.3).

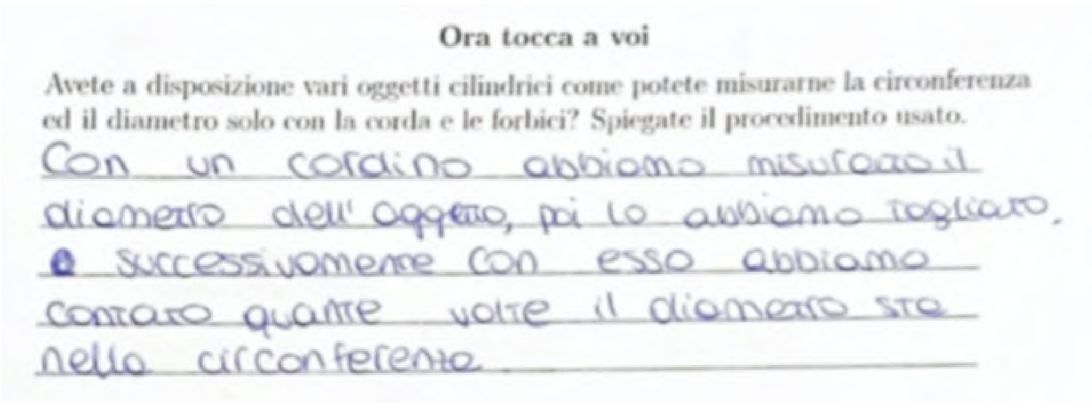


Ora tocca a voi

Avete a disposizione vari oggetti cilindrici come potete misurarne la circonferenza ed il diametro solo con la corda e le forbici? Spiegate il procedimento usato.

abbiamo disposto il filo intorno alla circonferenza dell'oggetto dato e tagliato la quantità di filo necessaria per completarla.
Con il restante filo abbiamo misurato le corde più lunghe del cerchio trovando il diametro.

Figura 4.2: Risposta presa da un protocollo.



Ora tocca a voi

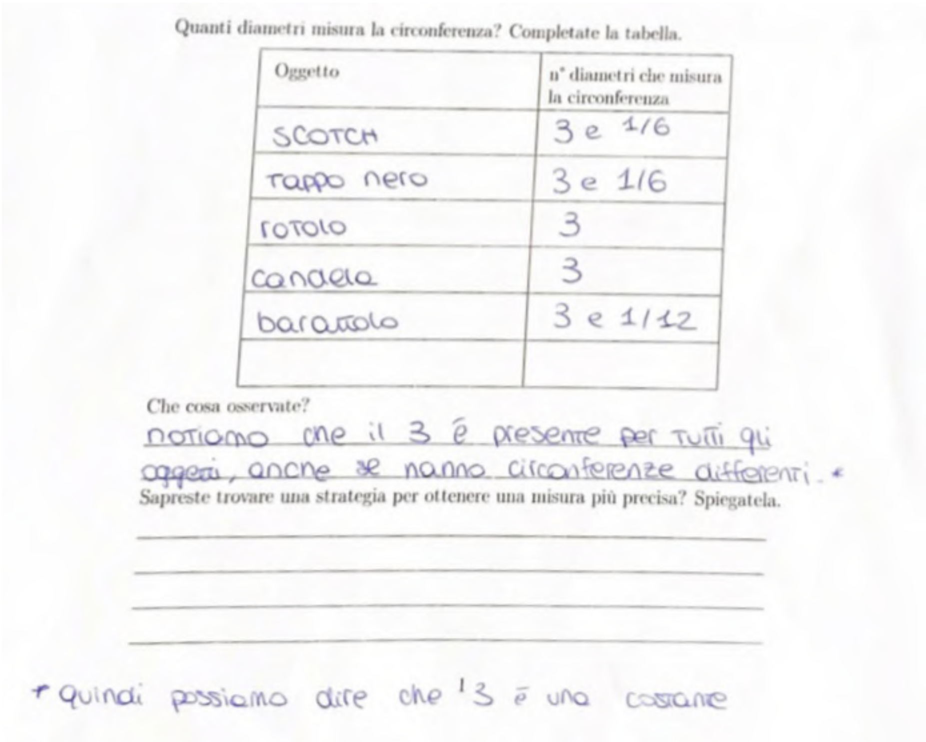
Avete a disposizione vari oggetti cilindrici come potete misurarne la circonferenza ed il diametro solo con la corda e le forbici? Spiegate il procedimento usato.

Con un cordino abbiamo misurato il diametro dell'oggetto, poi lo abbiamo tagliato. e successivamente con esso abbiamo contato quante volte il diametro sta nella circonferenza

Figura 4.3: Risposta presa da un protocollo.

Nel completare la prima tabella alcuni gruppi hanno semplicemente scritto che il diametro misura tre volte la circonferenza, altri hanno scritto *"tre e un po'"*, un altro gruppo ha proposto di suddividere il diametro attraverso il pezzetto di circonferenza rimasto fuori dalla misurazione scrivendo quindi che la circonferenza misura tre diametri più un sesto di diametro (Figura 4.4)[15].

[15]Senza saperlo quest'ultimo gruppo ha utilizzato il procedimento della divisione euclidea. Dividendo la circonferenza per il diametro hanno ottenuto un resto che è stato utilizzato per dividere nuovamente il diametro. La continuazione di questo procedimento porta al processo di divisione successiva delle grandezze euclidee confermando quanto questo processo sia "naturale".



Quanti diametri misura la circonferenza? Completate la tabella.

Oggetto	n° diametri che misura la circonferenza
SCOTCH	3 e 1/6
Tappo nero	3 e 1/6
rotolo	3
candela	3
barattolo	3 e 1/12

Che cosa osservate?

notiamo che il 3 è presente per tutti gli oggetti, anche se hanno circonferenze differenti. *

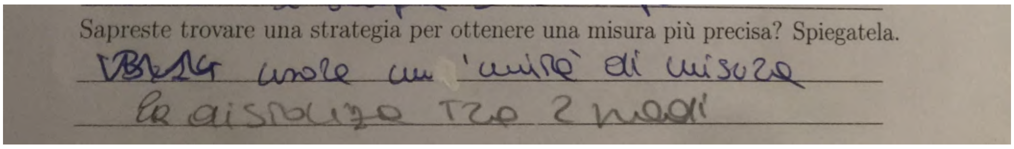
Sapreste trovare una strategia per ottenere una misura più precisa? Spiegatela.

* Quindi possiamo dire che il 3 è una costante

Figura 4.4: Tabella e risposta prese da un protocollo.

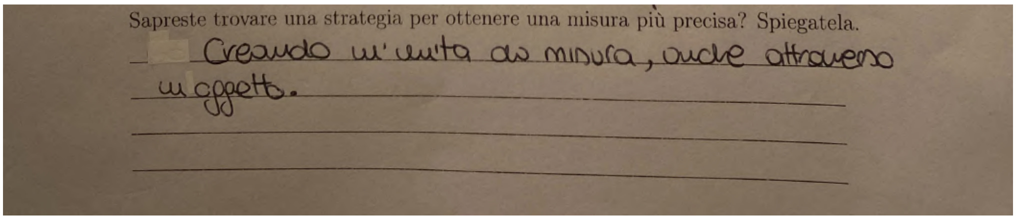
Tutti i gruppi alla domanda che segue la tabella (*Che cosa osservate?*) hanno compreso che tutte le circonferenze dei diversi oggetti presentano una costanza nel numero di diametri che le misurano. Alcuni ragazzi di un gruppo nel completare la tabella hanno chiesto autonomamente se potevano scegliere un'unità di misura più precisa, anticipando la domanda successiva: *Sapreste trovare una strategia per ottenere una misura più precisa? Spiegatela.* In un altro gruppo, mentre stavano rispondendo a quest'ultima domanda, una ragazza ha chiesto se potevano prendere metà circonferenza per avere una misura esatta, poi però si è resa conto che avrebbe funzionato solo per la circonferenza presa in considerazione e non per tutte. Si è deciso di interrompere la scheda dopo la domanda: *Sapreste trovare una strategia per ottenere una misura più precisa? Spiegatela.* Questa scelta è stata fatta, perché se qualche gruppo non avesse trovato una risposta non sarebbe riuscito ad andare avanti. Infatti molti gruppi sono riusciti a trovare una strategia arrivando a capire di dover introdurre una nuova unità di misura, mentre un gruppo no.

L'attività quindi è stata fermata e i vari gruppi hanno spiegato la loro strategia, così che anche chi non l'aveva trovata, ha capito il procedimento riuscendo ad affrontare la seconda parte della scheda in autonomia. Un gruppo spiegando la strategia ha detto che come nuova unità di misura avrebbe preso il diametro dell'oggetto più piccolo, candela, ed il gruppo che non aveva trovato nessuna strategia ha usato esattamente quella spiegata dai compagni. Gli altri gruppi invece si sono inventati della unità di misura diverse, dandole un nome inventato da loro: il *temperino* (Figura 4.6), il *ghidini* (pezzo di corda preso a caso) e il *gioia* (pezzo di corda preso a caso, Figura 4.5).


Sapreste trovare una strategia per ottenere una misura più precisa? Spiegatela.

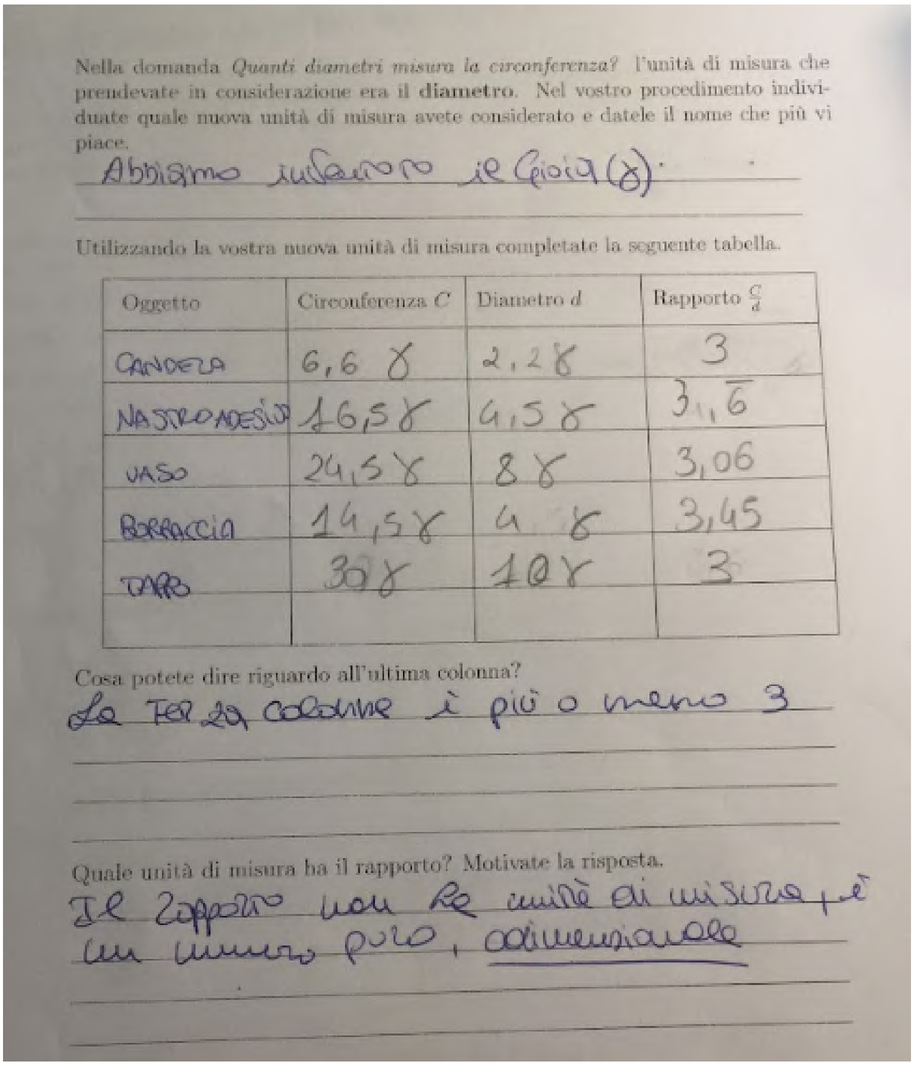
[illegible] usare un 'unità di misura la distanza tra 2 nodi

Figura 4.5: Risposta presa da un protocollo.


Sapreste trovare una strategia per ottenere una misura più precisa? Spiegatela.

Creando un'unità di misura, anche attraverso un oggetto.

Figura 4.6: Risposta presa da un protocollo.


Nella domanda *Quanti diametri misura la circonferenza?* l'unità di misura che prendevate in considerazione era il **diametro**. Nel vostro procedimento individuate quale nuova unità di misura avete considerato e datele il nome che più vi piace.

Abbiamo utilizzato il Gioia (γ).

Utilizzando la vostra nuova unità di misura completate la seguente tabella.

Oggetto	Circonferenza C	Diametro d	Rapporto $\frac{C}{d}$
CANDELA	6,6 γ	2,2 γ	3
NASTRO ADESIVO	16,5 γ	4,5 γ	3,$\overline{6}$
VASO	24,5 γ	8 γ	3,06
BORRACCIA	14,5 γ	4 γ	3,45
TAPPO	30 γ	10 γ	3

Cosa potete dire riguardo all'ultima colonna?

La terza colonna è più o meno 3

Quale unità di misura ha il rapporto? Motivate la risposta.

Il rapporto non ha unità di misura, è un numero puro, adimensionale

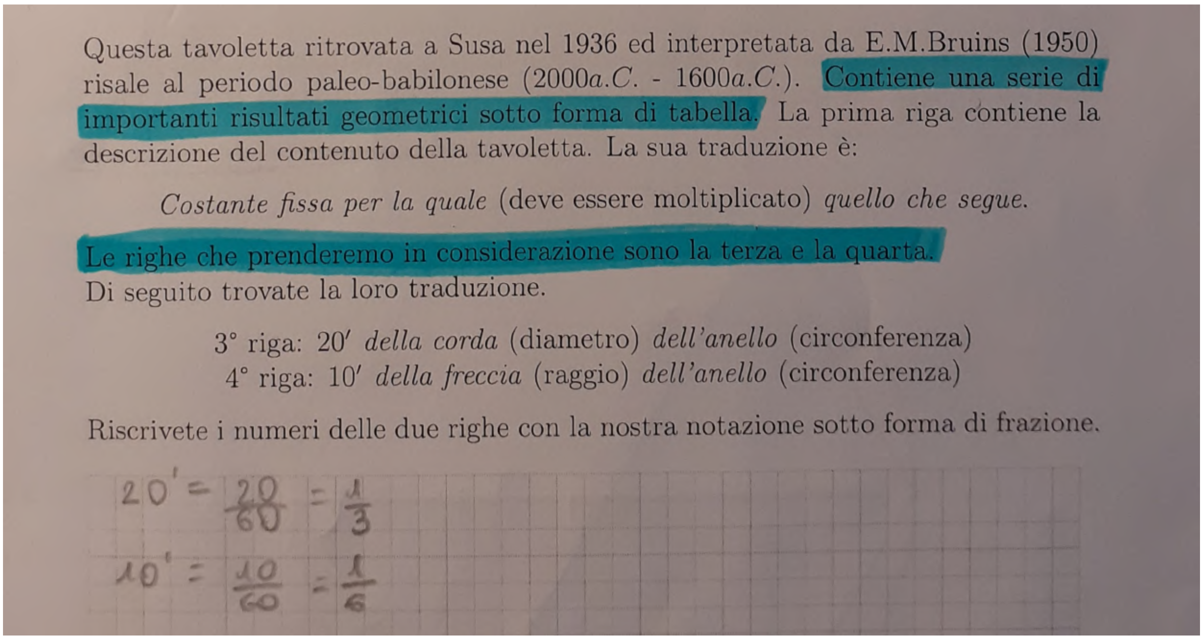
Figura 4.7: Tabella e risposte prese da un protocollo.

Solo un gruppo in questa prima attività laboratoriale ha avuto difficoltà, ma secondo la professoressa era perché erano svogliati, più che per la difficoltà del laboratorio. Terminata la scheda nella discussione finale sono emerse dai ragazzi la costanza di Pi Greco, la sua a-dimensionalità e la formula della circonferenza con la quale abbiamo definito la costante. Queste informazioni sono state scritte sul cartellone completando, in parte, la carta d'identità di Pi Greco (Figura 4.49).

Una volta completato il cartellone si è svolta la lezione frontale, supportata da slide, riguardante il contesto storico del periodo delle tavolette. Nell'esposizione si è descritto il contesto storico ed il sentimento che animava queste popolazioni. Si è poi descritto il sistema numerico babilonese e la struttura dei documenti storici, le tavolette, giunti fino a noi.

4.1.2 Secondo laboratorio: Come hanno fatto i Babilonesi

Per quanto riguarda il secondo laboratorio (si veda Sezione 3.2.2) è stata svolta insieme alla classe la prima parte della scheda dei Babilonesi traducendo i numeri (Figura 4.8) e ricavando un valore di Pi Greco (Figura 4.9). La parte più interessante e significativa, riguardante una migliore approssimazione di Pi Greco attraverso l'esagono, è stata lasciata come compito per casa. Questa scelta è stata fatta, perché il primo laboratorio si è dilungato rispetto ai tempi previsti dalla progettazione dell'unità didattica (si veda Paragrafo 3.2.1).



Questa tavoletta ritrovata a Susa nel 1936 ed interpretata da E.M.Bruins (1950) risale al periodo paleo-babilonese (2000*a.C.* - 1600*a.C.*). Contiene una serie di importanti risultati geometrici sotto forma di tabella. La prima riga contiene la descrizione del contenuto della tavoletta. La sua traduzione è:

Costante fissa per la quale (deve essere moltiplicato) *quello che segue.*

Le righe che prenderemo in considerazione sono la terza e la quarta. Di seguito trovate la loro traduzione.

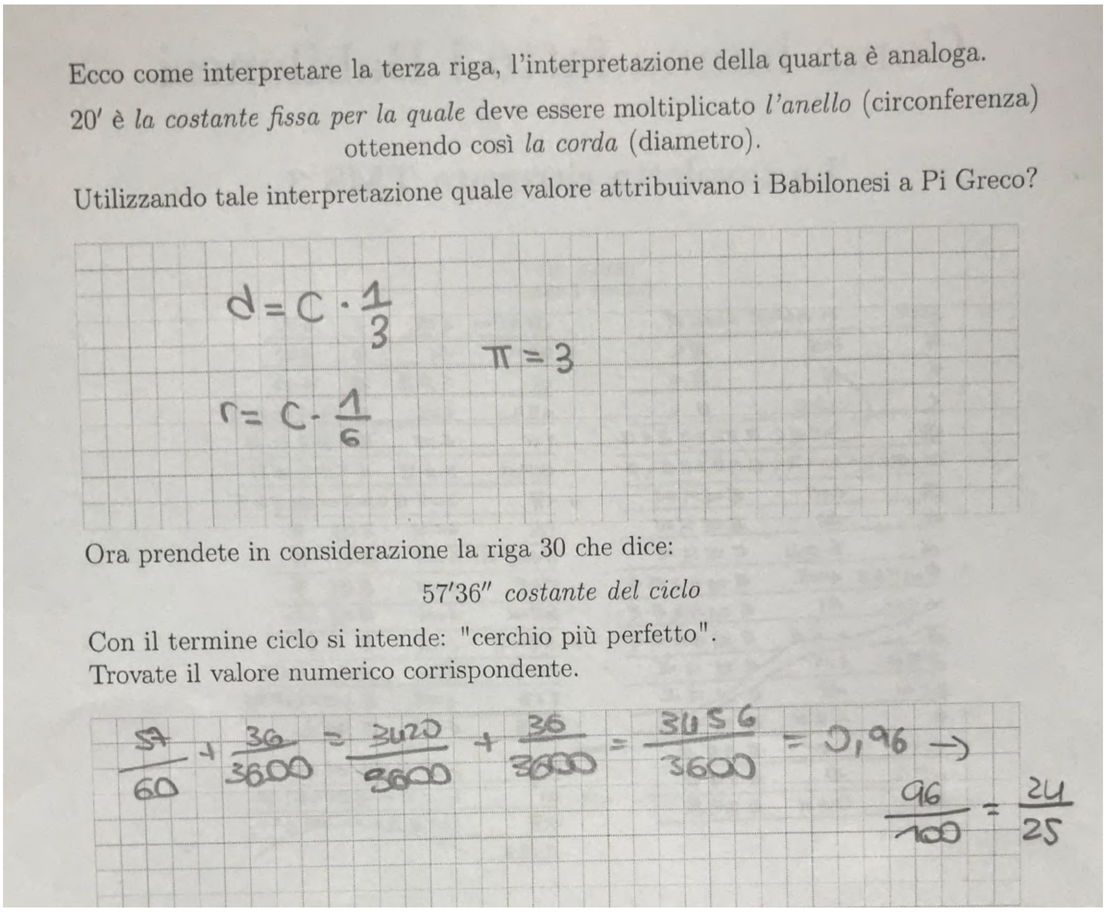
3° riga: 20′ *della corda* (diametro) *dell'anello* (circonferenza)
4° riga: 10′ *della freccia* (raggio) *dell'anello* (circonferenza)

Riscrivete i numeri delle due righe con la nostra notazione sotto forma di frazione.

$20' = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$

$10' = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$

Figura 4.8: Risposta presa da un protocollo.



Ecco come interpretare la terza riga, l'interpretazione della quarta è analoga.

20′ è *la costante fissa per la quale* deve essere moltiplicato *l'anello* (circonferenza) ottenendo così *la corda* (diametro).

Utilizzando tale interpretazione quale valore attribuivano i Babilonesi a Pi Greco?

$d = C \cdot \frac{1}{3}$ $\quad \pi = 3$

$r = C \cdot \frac{1}{6}$

Ora prendete in considerazione la riga 30 che dice:

57′36″ *costante del ciclo*

Con il termine ciclo si intende: "cerchio più perfetto".
Trovate il valore numerico corrispondente.

$\frac{57}{60} + \frac{36}{3600} = \frac{3420}{3600} + \frac{36}{3600} = \frac{3456}{3600} = 0,96 \rightarrow$

$\frac{96}{100} = \frac{24}{25}$

Figura 4.9: Risposta presa da un protocollo.

Queste prime due attività sono risultate adatte per la difficoltà, ma troppo lunghe per essere svolte in due ore di lezione. Probabilmente il fatto che gli studenti abbiano segnalato l'attività sui Babilonesi tra quelle capite peggio (si veda Capitolo 5) è dato dal fatto che la scheda è stata lasciata da finire per casa, più che dalla reale difficoltà del laboratorio.

La scheda riguardante la tavoletta YBC 7302, invece, è stata consegnata a chi era interessato ad approfondire l'argomento. Quasi tutti gli studenti hanno preso la scheda, ma solo quattro studenti l'hanno effettivamente svolta ricavando il Pi Greco utilizzato dai Babilonesi per calcolare l'area. Sono emersi due differenti modi, utilizzati dagli studenti, per ricavare il Pi Greco:

1. Due studenti hanno ricavato la formula dell'area del cerchio in cui compare solamente la circonferenza. Per risolvere la scheda sono partiti dalla formula: $A = \frac{C^2}{4\pi}$ (Figura 4.10). Questo è il metodo storicamente più corretto dato che i Babilonesi calcolavano l'area a partire dalla lunghezza della circonferenza, inoltre nella tavoletta sono presenti solamente il valore dell'area e della lunghezza della circonferenza del cerchio. Uno di loro ha anche autonomamente calcolato, senza che fosse richiesto, la costante per la quale deve essere moltiplicata la lunghezza della circonferenza al quadrato per ottenere il raggio, trovando esattamente la costante presente nella seconda riga della tavoletta TMS3, che non era stata menzionata loro (Figura 4.11).

2. Due studenti invece sono partiti dalla formula: $A = C\frac{r}{2}$. In cui compare la circonferenza, ma anche il raggio di cui non è presente il valore nella tavoletta. Da questa formula uno ha trovato il valore del raggio per poi sostituirlo nella nostra formula della circonferenza trovando il valore di Pi Greco (Figura 4.12), l'altro ha trovato il valore del raggio ma ha calcolato anche quello del diametro per poi successivamente sostituirlo nella nostra formula della circonferenza ottenendo Pi Greco (Figura 4.13).

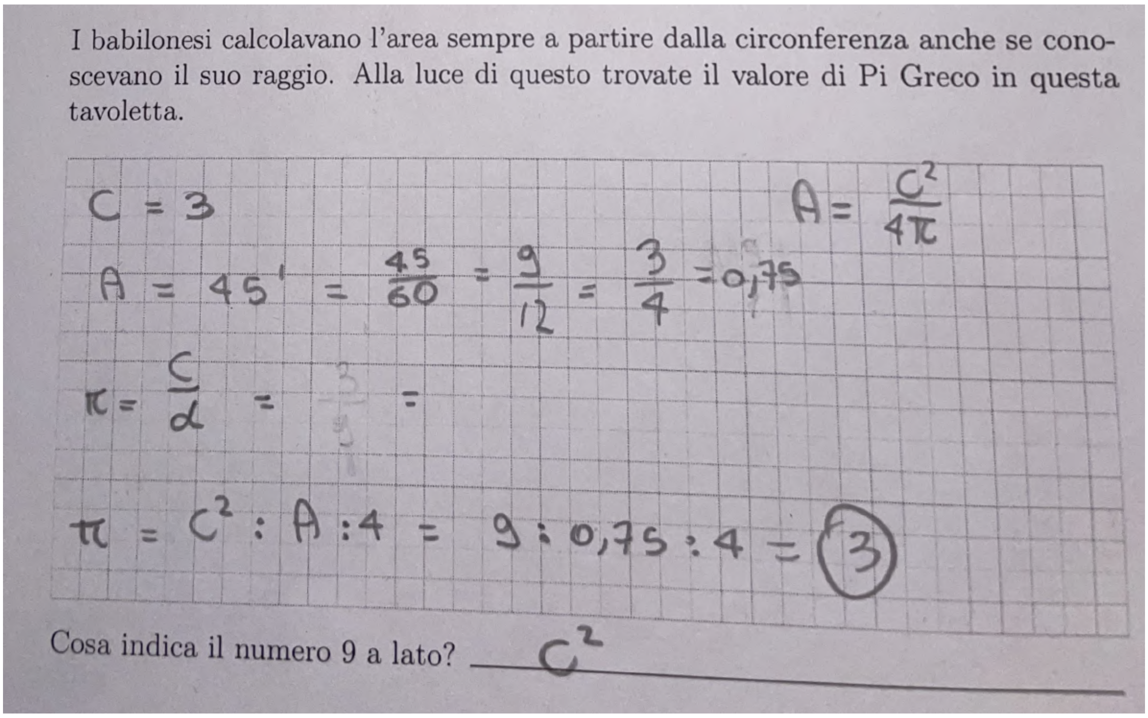


Figura 4.10: Risposta presa da un protocollo.

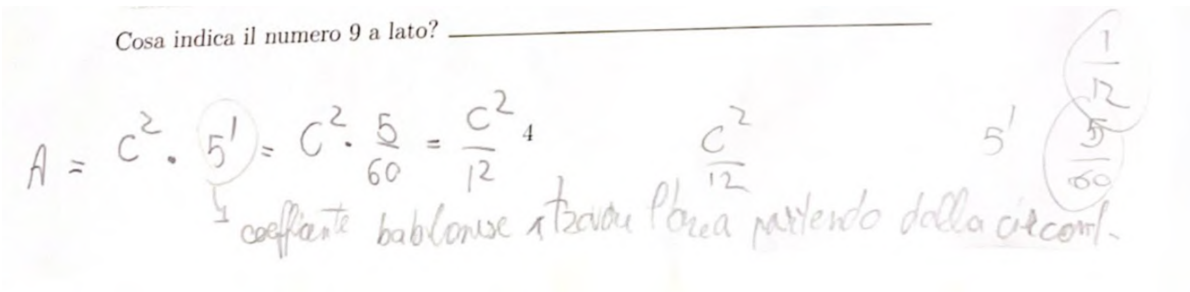
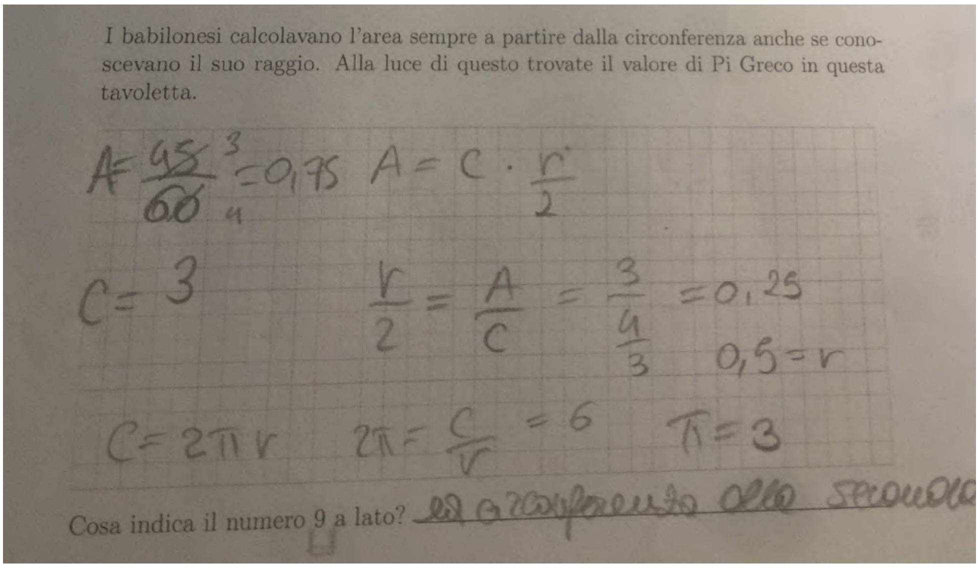


Figura 4.11: Ragionamento di uno studente trovato su un protocollo.



I babilonesi calcolavano l'area sempre a partire dalla circonferenza anche se conoscevano il suo raggio. Alla luce di questo trovate il valore di Pi Greco in questa tavoletta.

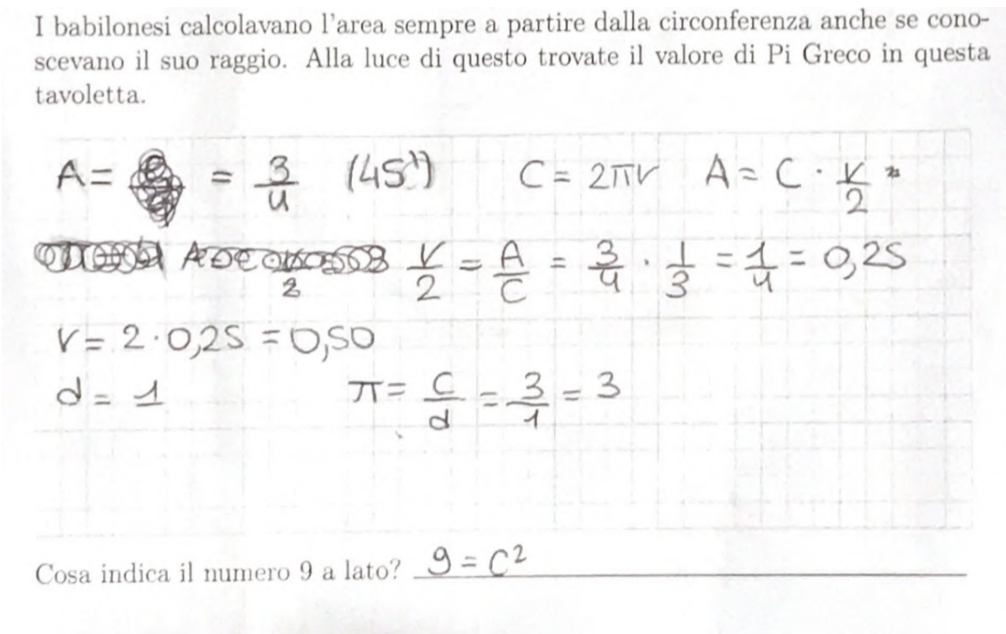
$A = \frac{45}{60} = \frac{3}{4} = 0{,}75 \quad A = C \cdot \frac{r}{2}$

$C = 3 \quad \frac{r}{2} = \frac{A}{C} = \frac{\frac{3}{4}}{3} = 0{,}25 \quad 0{,}5 = r$

$C = 2\pi r \quad 2\pi = \frac{C}{r} = 6 \quad \pi = 3$

Cosa indica il numero 9 a lato? la circonferenza della seconda

Figura 4.12: Risposta presa da un protocollo.



I babilonesi calcolavano l'area sempre a partire dalla circonferenza anche se conoscevano il suo raggio. Alla luce di questo trovate il valore di Pi Greco in questa tavoletta.

$A = \ldots = \frac{3}{4} \; (45') \quad C = 2\pi r \quad A = C \cdot \frac{r}{2}$

$\frac{r}{2} = \frac{A}{C} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

$r = 2 \cdot 0{,}25 = 0{,}50$

$d = 1 \quad \pi = \frac{C}{d} = \frac{3}{1} = 3$

Cosa indica il numero 9 a lato? $9 = C^2$

Figura 4.13: Risposta presa da un protocollo.

4.2 L'Antico Egitto nella pratica

Per questo secondo incontro si è deciso, assieme alla docente, di cambiare i gruppi: in primo luogo per dividere il gruppo che durante il primo incontro aveva riscontrato delle difficoltà, in secondo luogo perché così i ragazzi si sarebbero confrontati con altri compagni di classe. Si è quindi divisa la classe in sei gruppi: quattro gruppi da quattro alunni e due da cinque. Visto quanto successo durante la prima unità didattica, Sezione 4.1 , si è deciso di eliminare a priori il primo laboratorio (si veda Sezione 3.3.1), per far concentrare i ragazzi sulla seconda attività (si veda Sezione 3.3.2) in cui si lavora sui documenti storici.

Nella prima parte della lezione sono stati ripresi i concetti visti precedentemente ed è stato commentato quanto fatto dagli studenti a casa. Purtroppo non tutti hanno svolto il compito lasciato per casa. Gli studenti che hanno completato la scheda in autonomia sono riusciti a trovare il perimetro dell'esagono inscritto (si veda Figura 4.14) per poi farne il rapporto con la lunghezza della circonferenza trovando così il Pi Greco utilizzato dai Babilonesi. Dalla scheda gli studenti sono riusciti a trarre le conclusioni sperate, notando che nella tavoletta TMS 3 i Babilonesi individuano due valori di Pi Greco (si veda Figura 4.15).

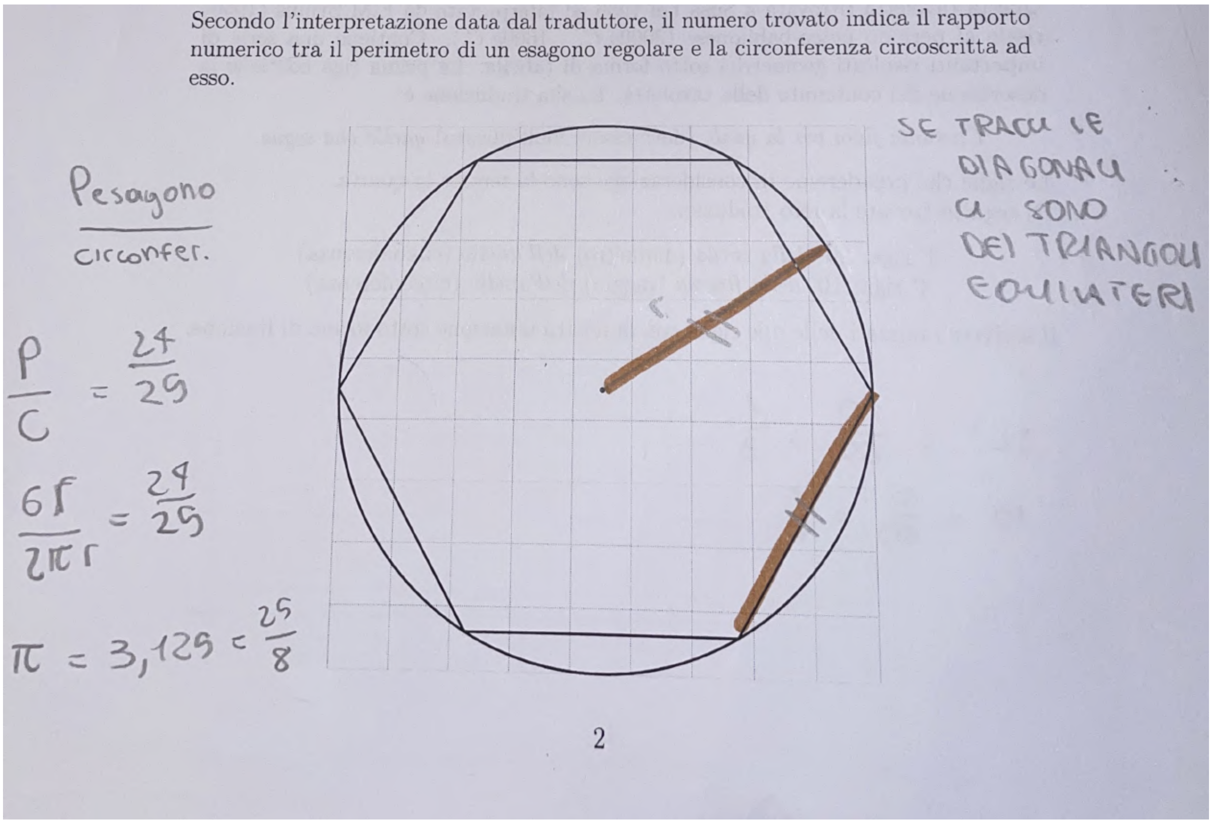


Figura 4.14: Risposta presa da un protocollo.

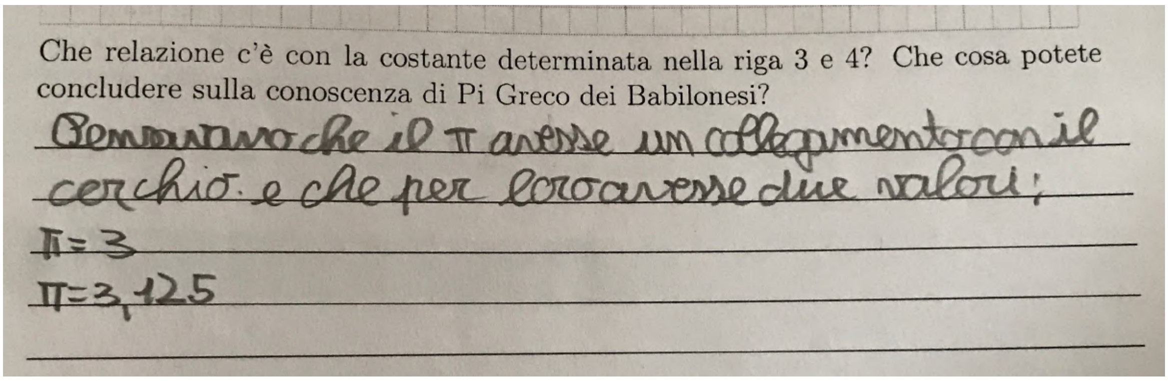


Figura 4.15: Risposta presa da un protocollo.

Durante la discussione sono stati i ragazzi stessi a spiegare ai compagni il procedimento utilizzato e le conclusioni a cui erano arrivati. Si è poi completato il cartellone mettendo quello che si è scoperto sulle conoscenza dei Babilonesi (Figura 4.49).

Una volta completato il cartellone si è svolta la lezione frontale, supportata da slide, in cui è stato descritto il contesto storico ed il diverso sentimento che animava gli Egizi rispetto ai Babilonesi. Con la storia si è descritto anche lo sviluppo della scrittura e della numerazione egizia, facendo poi un confronto con i ragazzi con il sistema numerico babilonese, affrontato durante la prima lezione. Infine è stato descritto il Papiro su cui si trovano i problemi presi in considerazione nel laboratorio. Dato che si è deciso di eliminare il primo laboratorio in cui si ricavava una stima di Pi Greco a partire dall'area, sono state inserite delle slide finali in cui discutere assieme ai ragazzi quale strategia potesse essere utilizzata per calcolare l'area.

4.2.1 Laboratorio: Come hanno fatto gli Egizi

Il laboratorio sugli Egizi è stato diviso in due parti: il Problema 50 ed il Problema 48.

Nella prima parte del laboratorio, lavorando sul Problema 50 la difficoltà maggiore è riuscire da un esempio a trovare la formula generale utilizzata dagli Egizi per calcolare l'area. La prima domanda, in cui si richiede di riprodurre i calcoli descritti nel testo dallo scriba, è stata svolta da tutti i gruppi senza difficoltà.

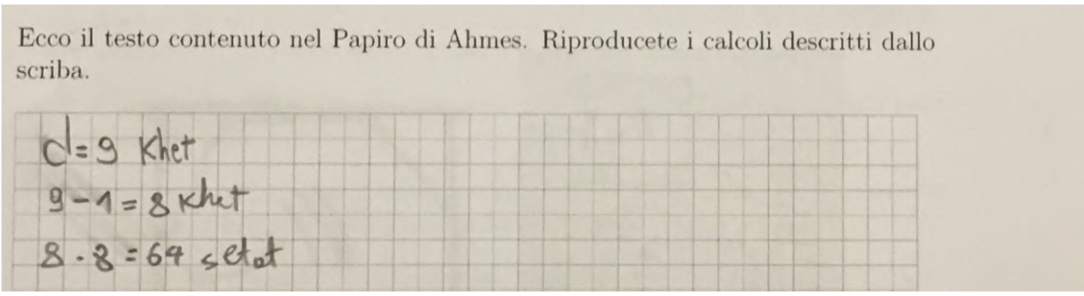


Figura 4.16: Risposta presa da un protocollo.

Quasi tutti i gruppi sono arrivati a capire che $\frac{1}{9}$, presente nel problema, era da considerare fisso (osservazione storicamente corretta come visto nel Paragrafo 2.2.1), mentre solo due gruppi sono arrivati alla formula generale in cui vi era il quadrato.

Solamente un gruppo non è riuscito a trovare una formula generale, non riuscendo a fare il passaggio di generalizzazione attraverso una variabile. Quattro gruppi sono riusciti in autonomia, mentre due gruppi all'inizio hanno fatto fatica anche nel tradurre il problema di Ahmes. Tutti i gruppi hanno trovato l'approssimazione di Pi Greco utilizzata dagli Egizi andando a sostituire nella formula dell'area, che utilizziamo oggi, i valori scritti da Ahmes (Figura 4.17). Nessun gruppo ha usato la formula generalizzata degli Egizi per trovare l'approssimazione di Pi Greco. Per correttezza questo è stato fatto assieme durante la discussione collettiva. Ricavando il valore di Pi Greco dalla formula dell'area egizia ($A = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$) gli studenti hanno constatato che nonostante la costante non fosse esplicitata, come nella formula odierna, è comunque presente, infatti gli Egizi avevano idea che ci fosse una costante che valeva per tutti i cerchi.

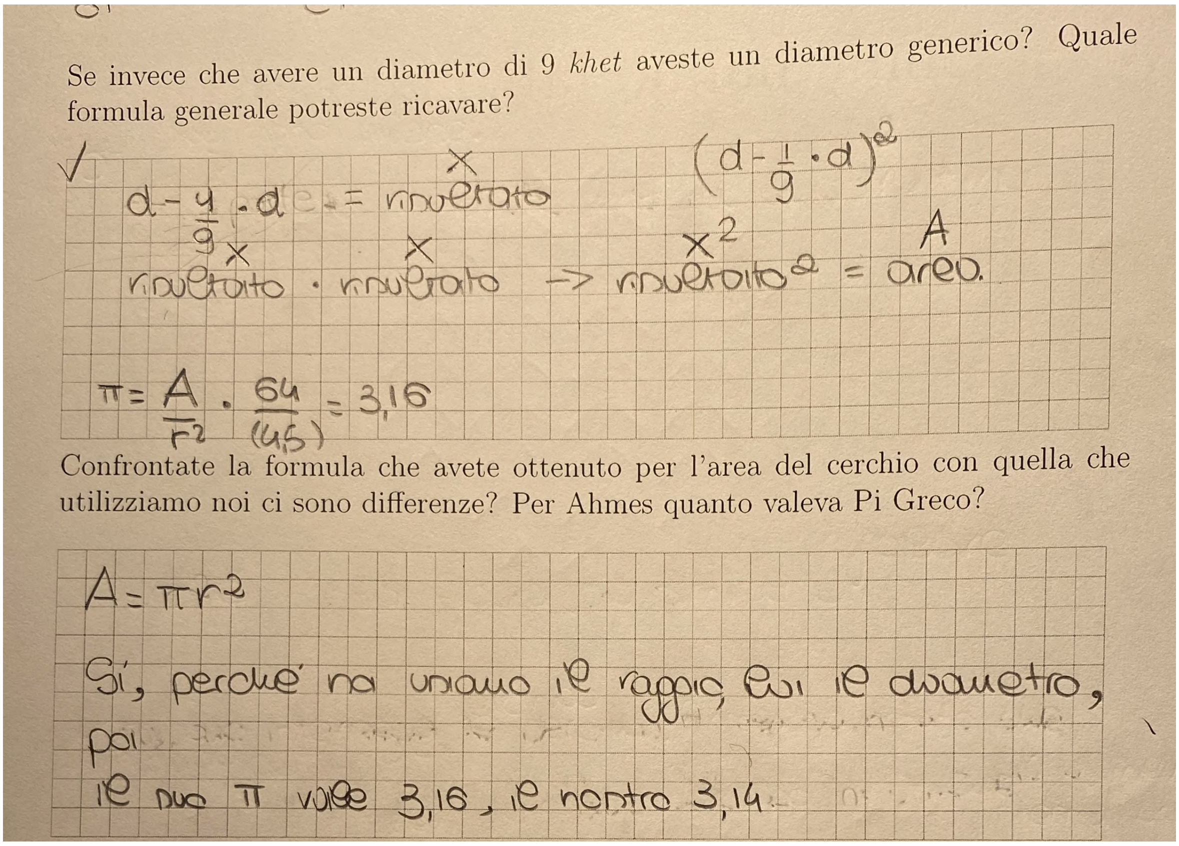


Figura 4.17: Risposte prese da un protocollo.

Nella seconda parte del laboratorio, lavorando sul Problema 48 anche i due gruppi che inizialmente avevano fatto fatica nell'affrontare il problema 50 non hanno avuto bisogno di nessun intervento, forse perché l'attività era più grafica (Figura 4.19).
Proprio il gruppo che inizialmente aveva avuto più difficoltà é stato uno dei due gruppi che hanno capito come mai l'area dell'ottagono calcolata da loro e quella di Ahmes non fossero uguali.

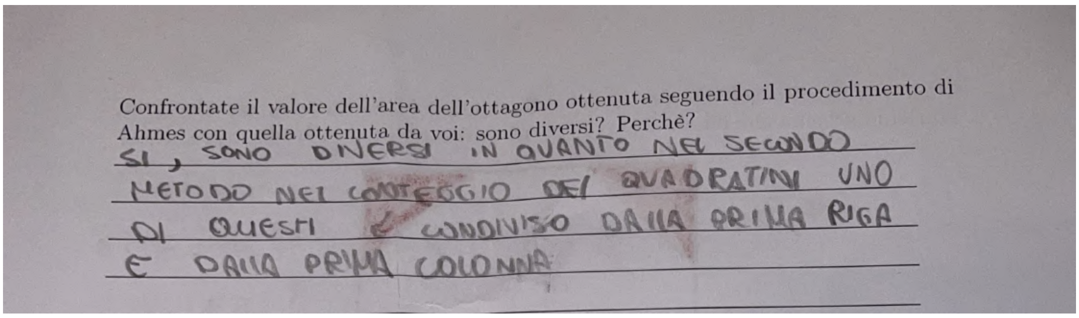
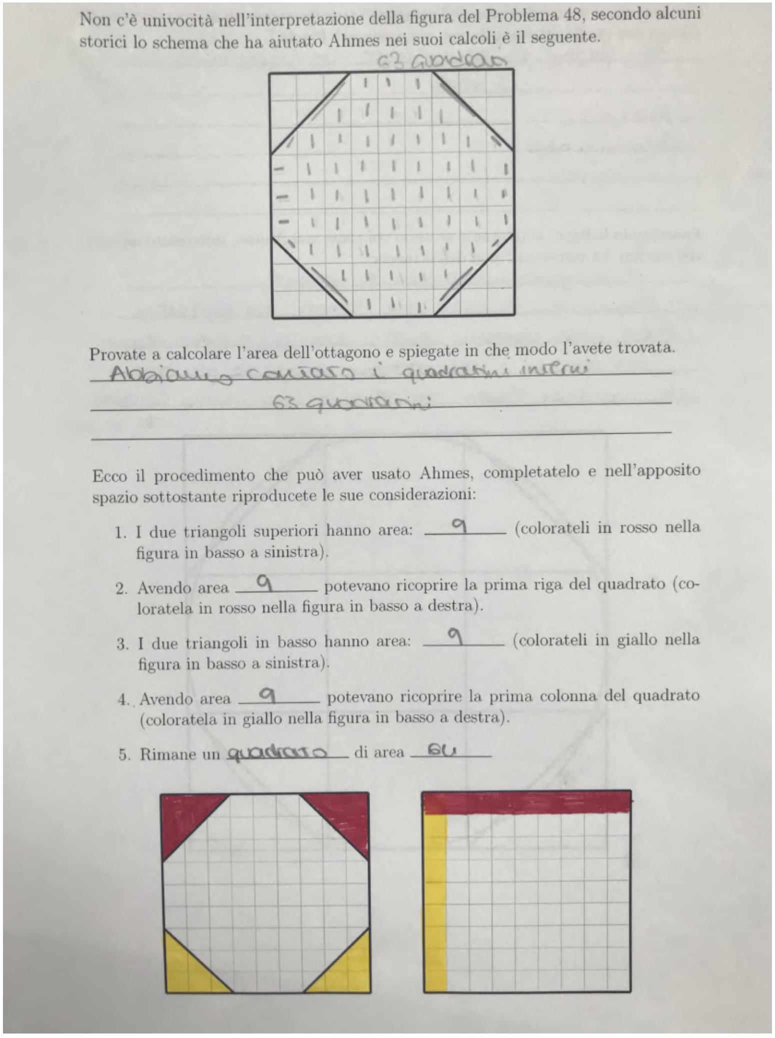


Figura 4.18: Risposta presa da un protocollo.


Non c'è univocità nell'interpretazione della figura del Problema 48, secondo alcuni storici lo schema che ha aiutato Ahmes nei suoi calcoli è il seguente.

63 quadrati

Provate a calcolare l'area dell'ottagono e spiegate in che modo l'avete trovata.

Abbiamo contato i quadratini interni

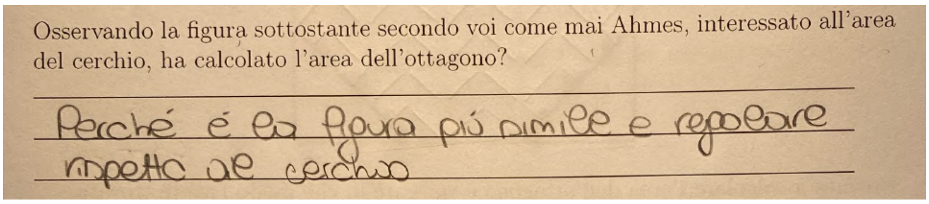
63 quadratini

Ecco il procedimento che può aver usato Ahmes, completatelo e nell'apposito spazio sottostante riproducete le sue considerazioni:

1. I due triangoli superiori hanno area: 9 (colorateli in rosso nella figura in basso a sinistra).
2. Avendo area 9 potevano ricoprire la prima riga del quadrato (coloratela in rosso nella figura in basso a destra).
3. I due triangoli in basso hanno area: 9 (colorateli in giallo nella figura in basso a sinistra).
4. Avendo area 9 potevano ricoprire la prima colonna del quadrato (coloratela in giallo nella figura in basso a destra).
5. Rimane un quadrato di area 64

Figura 4.19: Risposte prese da un protocollo.

Altri gruppi hanno motivato questa differenza facendo riferimento alla precisione dei calcoli ed altri non hanno risposto. Nel confronto finale tra ottagono e cerchio nessun gruppo ha detto che le aree esterne ed interne erano più o meno uguali. Le risposte sono state: *"L'ottagono permette una migliore approssimazione dato che i quadretti vengono tagliati in modo più preciso rispetto al cerchio"*, altri hanno risposto che era più facile calcolare l'area dell'ottagono rispetto a quella del cerchio o la risposta data in Figura 4.20.


Osservando la figura sottostante secondo voi come mai Ahmes, interessato all'area del cerchio, ha calcolato l'area dell'ottagono?

Perché è la figura più simile e regolare rispetto al cerchio

Figura 4.20: Risposta presa da un protocollo.

Al termine del laboratorio è stato completato il cartellone (si veda Figura 4.49) con le conoscenze degli Egizi su Pi Greco. Ridimensionando l'attività inizialmente progettata (si veda Paragrafo 3.3.2) i tempi a disposizione, durante questa seconda lezione, sono stati rispettati e non si è riscontrata grande difficoltà da parte degli studenti nello svolgere il laboratorio proposto, cosa segnalata anche dalle risposte presenti nel questionario finale (si veda Capitolo 5).

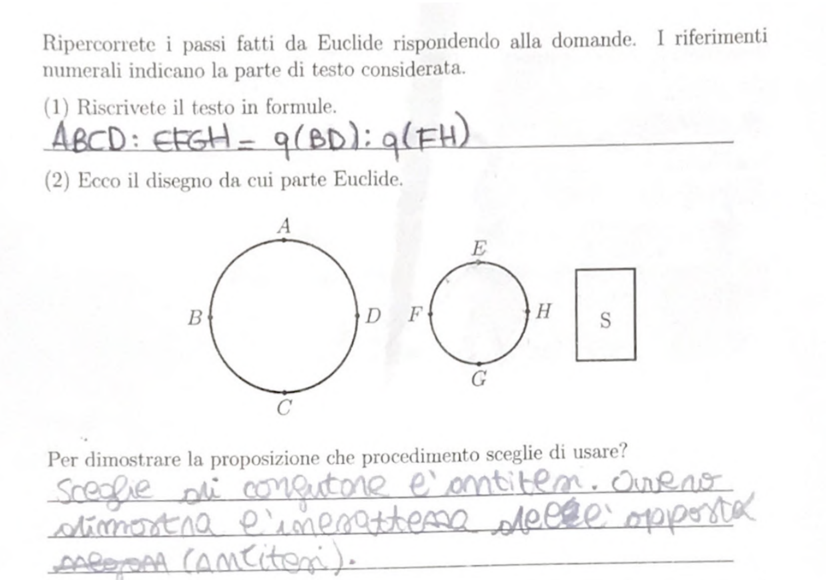
4.3 Euclide d'Alessandria nella pratica

Visto che i primi due incontri erano stati svolti prima delle vacanze di Natale ad inizio lezione si è chiesto ai ragazzi di riassumere assieme cosa era emerso precedentemente riguardo a Pi Greco. Nonostante avessero davanti il cartellone, pochi hanno partecipato a questo momento. Successivamente si è svolta la lezione frontale, supportata da slide, in cui si è spiegato il contesto storico e più precisamente si è visto chi era Euclide attraverso il commento di Proclo. Infine i ragazzi sono stati divisi in gruppi, sempre per vicinanza alfabetica, ed hanno svolto l'attività laboratoriale. Sono stati formati sette gruppi: un gruppo costituito da i due studenti in DAD[16], quattro gruppi da cinque studenti ed un gruppo da quattro studenti.

4.3.1 Laboratorio: Euclide questo sconosciuto

Si è deciso di leggere assieme la dimostrazione per intero prima di far lavorare gli studenti a gruppi, ed in questo momento, a parte il ragazzo che leggeva e pochi altri, l'attenzione è svanita.

Per quanto riguarda la domanda relativa al passaggio (1) della dimostrazione non si evince dai protocolli una particolare difficoltà (si veda Figura 4.21), mentre già nella domanda riguardante il passaggio (2) della dimostrazione le risposte sono diverse.


Ripercorrete i passi fatti da Euclide rispondendo alla domande. I riferimenti numerali indicano la parte di testo considerata.

(1) Riscrivete il testo in formule.

ABCD : EFGH = q(BD) : q(FH)

(2) Ecco il disegno da cui parte Euclide.

Per dimostrare la proposizione che procedimento sceglie di usare?

Sceglie di confutare l'antitesi. Ovvero dimostra l'inesattezza delle opposte ~~...~~ (antitesi).

Figura 4.21: Risposte prese da un protocollo.

[16]Didattica A Distanza

Solo un gruppo ha scritto che il procedimento utilizzato da Euclide consisteva in un ragionamento per assurdo. Gli studenti di questo gruppo sono stati aiutati, da chi scrive, in quanto chiedendo spiegazioni riguardo alla risposta è emerso dagli studenti che non avevano mai sentito parlare di dimostrazioni per assurdo. Ragionando assieme, però, gli alunni sono arrivati a dire che il procedimento prevedeva una supposizione assurda. Le diverse risposte sono dovute alla mancata conoscenza da parte degli studenti di questo procedimento dimostrativo. Infatti alcuni gruppi hanno risposto scrivendo la prima porzione utilizzata dal matematico alessandrino nel ragionamento per assurdo (si veda Figura 4.22).

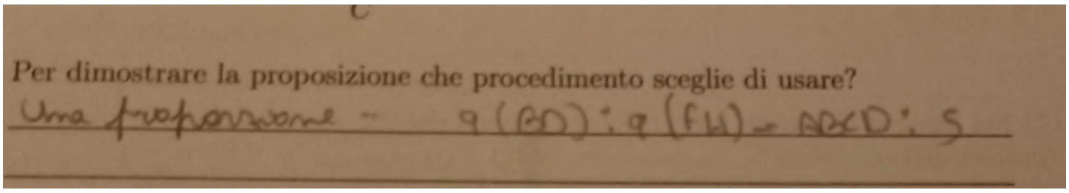

Per dimostrare la proposizione che procedimento sceglie di usare?
Una proporzione - q(BD) : q(FH) = ABCD : S

Figura 4.22: Risposta presa da un protocollo.

Mentre altri hanno descritto il procedimento con cui il matematico trova i successivi poligoni regolari inscritti (Figura 4.23).

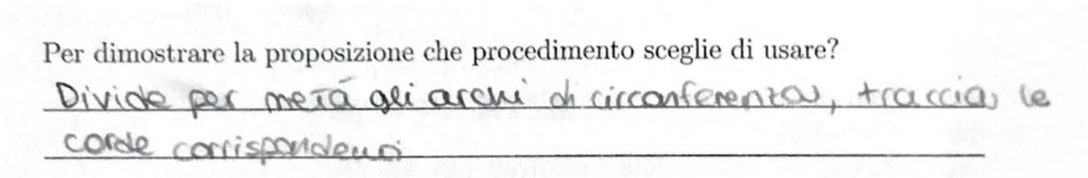

Per dimostrare la proposizione che procedimento sceglie di usare?
Divide per metà gli archi di circonferenza, traccia le corde corrispondenti

Figura 4.23: Risposta presa da un protocollo.

Il fatto che gli studenti non conoscessero tale metodo, rende significativa la risposta presente in Figura 4.21. Questo mostra che semplicemente ragionando e comprendendo il testo gli studenti siano riusciti a capirne il procedimento proposto. Capire il ragionamento, in questo caso il procedimento, risulta più importante che rispondere con il nome con i cui i matematici oggi lo identificano.

Anche i passaggi del metodo di esaustione hanno causato problemi in alcuni gruppi, che facevano domande a chi scrive senza leggere bene il testo. Più che il metodo in sé, gli studenti hanno trovato difficoltà nel comprendere come Euclide dimostra nei punti (3) e (4) della dimostrazione (si veda Allegato G) rispettivamente che il quadrato inscritto nel cerchio è maggiore della metà del cerchio e che i triangoli, aggiunti al quadrato per ottenere l'ottagono, sono maggiori della metà del segmento di cerchio che li racchiudono. Infatti dai protocolli si osserva che i disegni dei due poligoni inscritti sono stati eseguiti da tutti in modo corretto (si veda Figura 4.24), mentre per la dimostrazione dei fatti appena citati si trovano disegni al quanto particolari, come quelli in Figura 4.25 e 4.26.

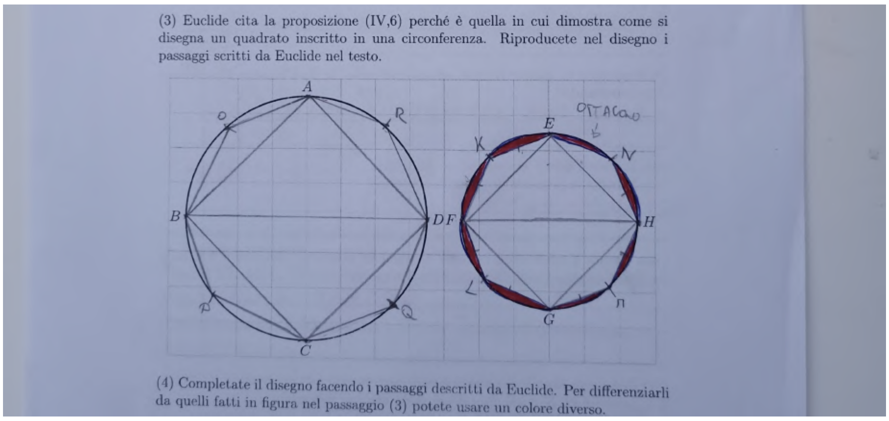


Figura 4.24: Disegno preso da un protocollo.

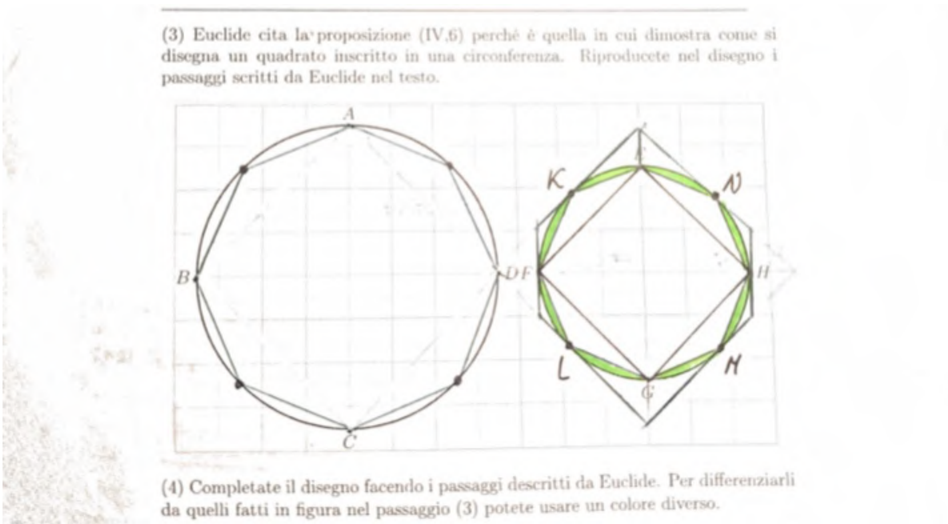


Figura 4.25: Disegno preso da un protocollo.

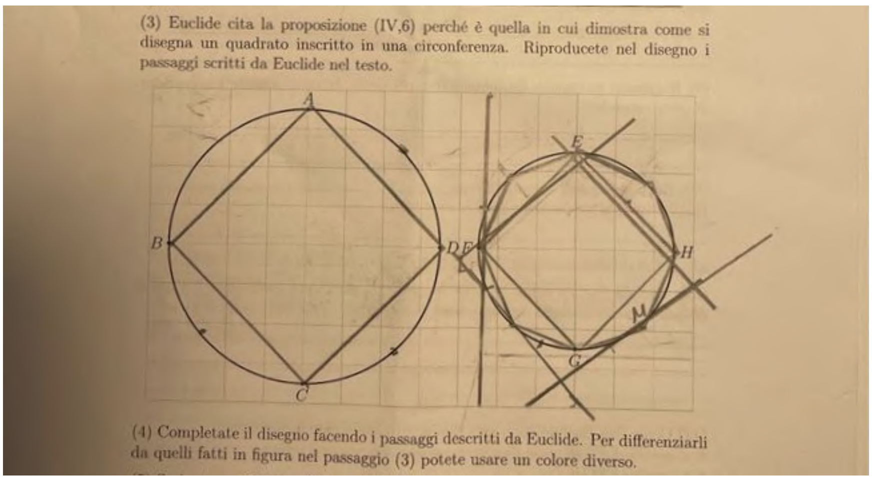
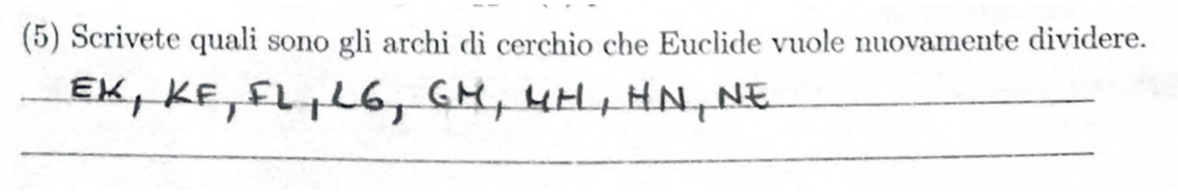


Figura 4.26: Disegno preso da un protocollo.

Per quanto riguarda la domanda relativa al passaggio (5) della dimostrazione, quasi tutti gruppi hanno individuato gli archi da dividere per continuare il procedimento

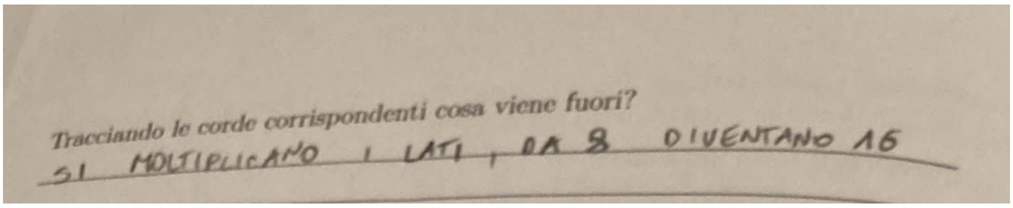


(5) Scrivete quali sono gli archi di cerchio che Euclide vuole nuovamente dividere.

EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE

Figura 4.27: Risposta presa da un protocollo.

proposto dal matematico (Figura 4.27).
Le risposte sbagliate, presenti nei protocolli, sono in corrispondenza dei disegni particolari sopra citati. Per quanto riguarda la domanda successiva, per cui la risposta riguardante gli archi era propedeutica, la situazione è diversa: in quanto anche in schede in cui sono stati sbagliati gli archi si trovano risposte corrette alla domanda: *Tracciando le corde corrispondenti che cosa viene fuori?* (si veda Figura 4.28).

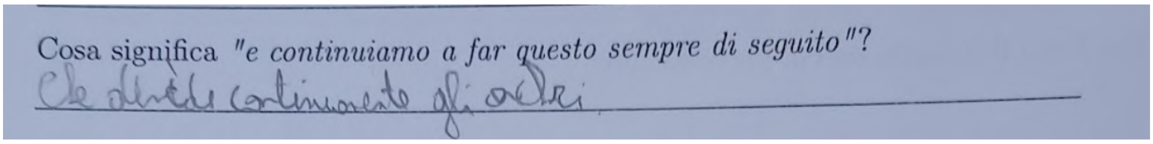


Tracciando le corde corrispondenti cosa viene fuori?

SI MOLTIPLICANO I LATI, DA 8 DIVENTANO 16

Figura 4.28: Risposta presa da un protocollo in cui gli archi individuati sono sbagliati.

Questo sottolinea che, nonostante non abbiano capito quali archi il matematico alessandrino proponeva di dividere per ottenere un poligono regolare di sedici lati, l'idea del metodo di esaustione sia chiara agli studenti. Infatti anche alla domanda successiva tutti hanno risposto correttamente (si veda Figura 4.29).

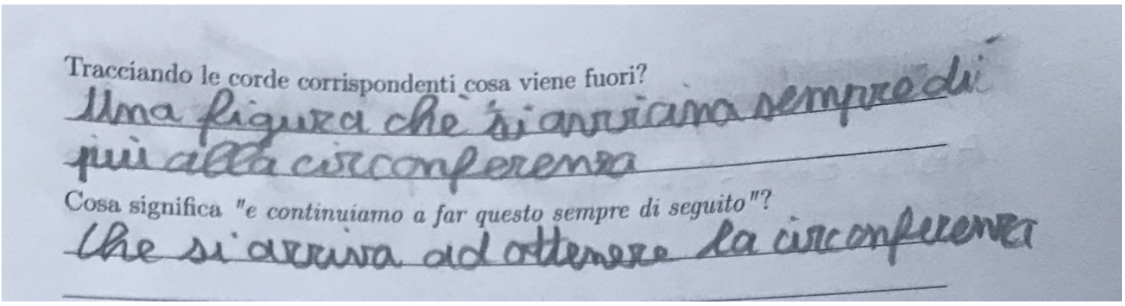


Cosa significa *"e continuiamo a far questo sempre di seguito"*?

Che divide continuamente gli archi

Figura 4.29: Risposta presa da un protocollo.

Inoltre un gruppo ha dato risposte interessanti a queste domande.



Tracciando le corde corrispondenti cosa viene fuori?

Una figura che si avvicina sempre di più alla circonferenza

Cosa significa *"e continuiamo a far questo sempre di seguito"*?

Che si arriva ad ottenere la circonferenza

Figura 4.30: Risposte prese da un protocollo.

Nonostante la prima risposta non sia quella attesa, non essendo specifica, è corretta, infatti si evince che l'idea del metodo di esaustione sia già stata colta dal gruppo prima ancora di rispondere alla domanda finale: *Nei passaggi da (3) a (5) Euclide utilizza un metodo chiamato metodo di esaustione. Provate a descrivere con parole vostra in che cosa consiste.*

La domanda riguardante il passaggio (6) della dimostrazione è stata svolta correttamente da tutti i gruppi, ma con metodologie diverse: alcuni gruppi si sono aiutati con un disegno (Figura 4.31), mentre altri hanno utilizzato solo le formule (Figura 4.32). La domanda è stata inserita solamente per farli ragionare su quanto viene detto nella dimostrazione e tutti i gruppi hanno capito che cosa intendesse Euclide in questo passaggio della dimostrazione.

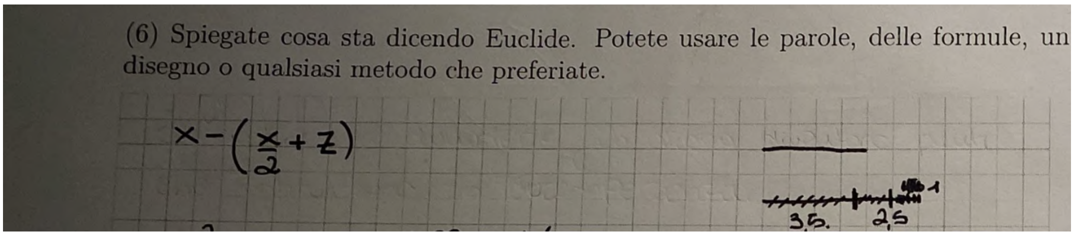


Figura 4.31: Risposta presa da un protocollo.

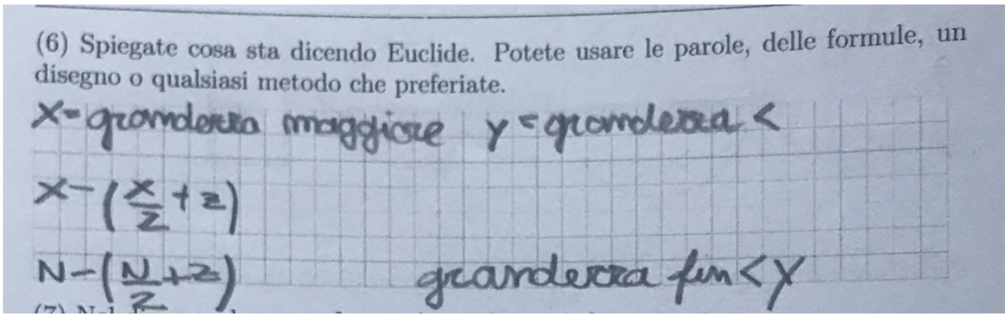
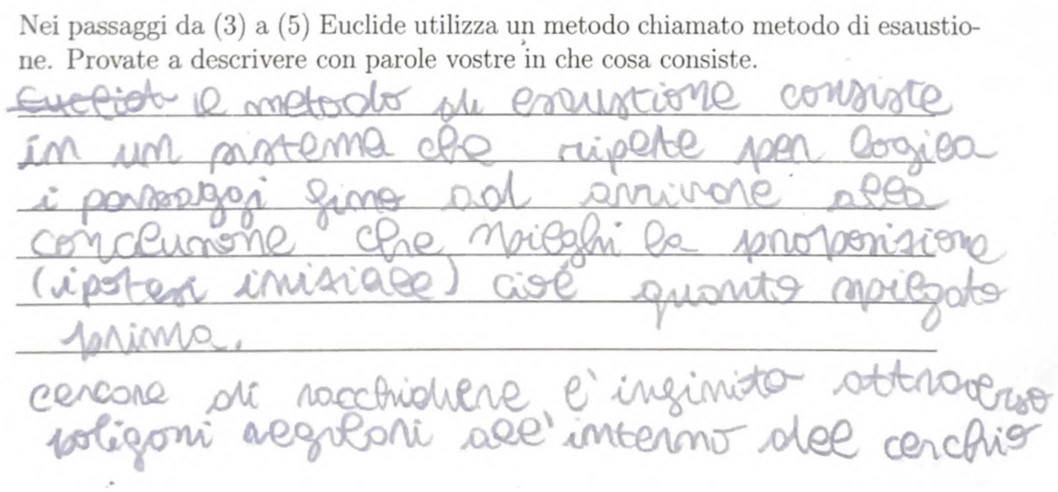


Figura 4.32: Risposta presa da un protocollo.

La domanda riguardante il passaggio (7) non è stata svolta da tutti, ma i gruppi che prima che venisse fermato il tempo hanno risposto lo hanno fatto correttamente (si veda Figura 4.24), infatti nella figura si trovano colorate in rosso le parti che sommate risultano minori dell'eccedenza per Euclide.

Durante il laboratorio è emersa una difficoltà generale nella lettura e comprensione del testo della dimostrazione. Molti leggevano superficialmente la parte di testo non riuscendo a capire cosa chiedesse la domanda. La professoressa mi diceva che questa difficoltà è stata riscontrata anche dalla collega di italiano. Tutti i gruppi hanno fatto parecchie domande durante l'attività. La maggior parte, anche se non leggeva attentamente il testo o non lo capiva, si è impegnata per affrontare il laboratorio. Mentre il gruppo costituito dai due studenti in DAD, nonostante la possibilità di utilizzare la chat, non ha fatto domande, hanno solo scritto quando si è fermata l'attività dicendo che erano arrivati alla sesta domanda della scheda.

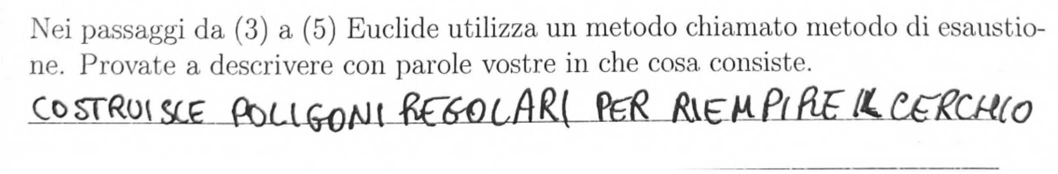
La difficoltà nella comprensione testuale era emersa in alcuni gruppi anche durante l'attività sul problema 50 del papiro di Ahmes, ma in questo caso è stata una difficoltà generale. Questa difficoltà generale ha fatto sì che gli abbondanti cinquanta minuti lasciati per l'attività non siano stati sufficienti per terminarla. Essendo tutti i gruppi arrivati almeno al passaggio (6) dieci minuti prima del termine della lezione, si è deciso di fermare l'attività e farli rispondere all'ultima domanda presente nella scheda. Le risposte sono state tutte molte interessanti si riportano di seguito le più significative.


Nei passaggi da (3) a (5) Euclide utilizza un metodo chiamato metodo di esaustione. Provate a descrivere con parole vostre in che cosa consiste.

~~Euclide~~ il metodo di esaustione consiste in un sistema che ripete per logica i passaggi fino ad arrivare alla conclusione che mostri la proposizione (ipotesi iniziale) cioè quanto spiegato prima.

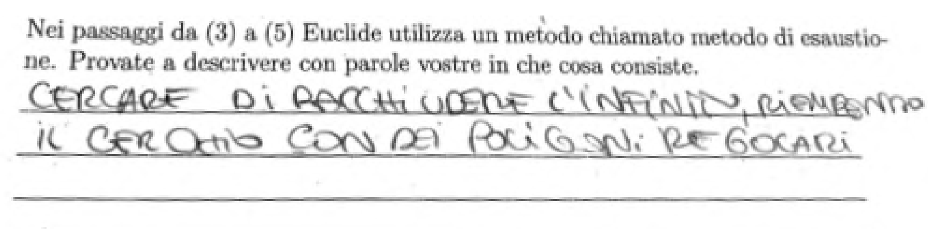
cercare di racchiudere l'infinito attraverso poligoni regolari all'interno del cerchio

Figura 4.33: Risposta presa da un protocollo.


Nei passaggi da (3) a (5) Euclide utilizza un metodo chiamato metodo di esaustione. Provate a descrivere con parole vostre in che cosa consiste.

COSTRUISCE POLIGONI REGOLARI PER RIEMPIRE IL CERCHIO

Figura 4.34: Risposta presa da un protocollo.


Nei passaggi da (3) a (5) Euclide utilizza un metodo chiamato metodo di esaustione. Provate a descrivere con parole vostre in che cosa consiste.

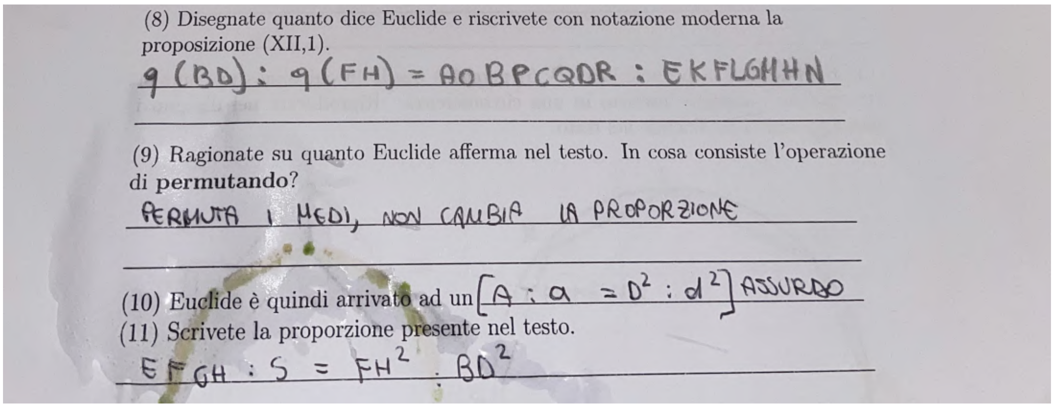
CERCARE DI RACCHIUDERE L'INFINITO, RIEMPENDO IL CERCHIO CON DEI POLIGONI REGOLARI

Figura 4.35: Risposta presa da un protocollo.

Nella discussione finale gli studenti hanno esposto in che cosa, secondo loro, consiste il metodo di esaustione, dando risposte corrette. Da questo, come sottolineato precedentemente, emerge che il metodo di esaustione sia stato capito dagli studenti nonostante le difficoltà di comprensione testuale riscontrata nel laboratorio. Dato che la scheda non era stata completata è stata lasciata come compito per casa.

4.4 Archimede di Siracusa nella pratica

Visto che nella lezione su Euclide gran parte della scheda era stata lasciata per compito, si è deciso di cominciare la lezione riprendendo i risultati che i ragazzi avrebbero dovuto ottenere nella scheda. Purtroppo la maggioranza della classe riscontrando difficoltà già in classe durante il laboratorio, non ha svolto o non è riuscita a svolgere in autonomia la scheda lasciata per compito. Si è quindi investita una buona mezz'ora nello spiegare passo passo il metodo utilizzato da Euclide nella dimostrazione della Proposizione (XII,2). Rispondendo alle domande dal passaggio (8) fino alla fine della scheda. Si riportano di seguito le risposte prese dai protocolli a questa parte finale svolta insieme in classe.


(8) Disegnate quanto dice Euclide e riscrivete con notazione moderna la proposizione (XII,1).

q(BD) : q(FH) = AOBPCQDR : EKFLGMHN

(9) Ragionate su quanto Euclide afferma nel testo. In cosa consiste l'operazione di **permutando**?

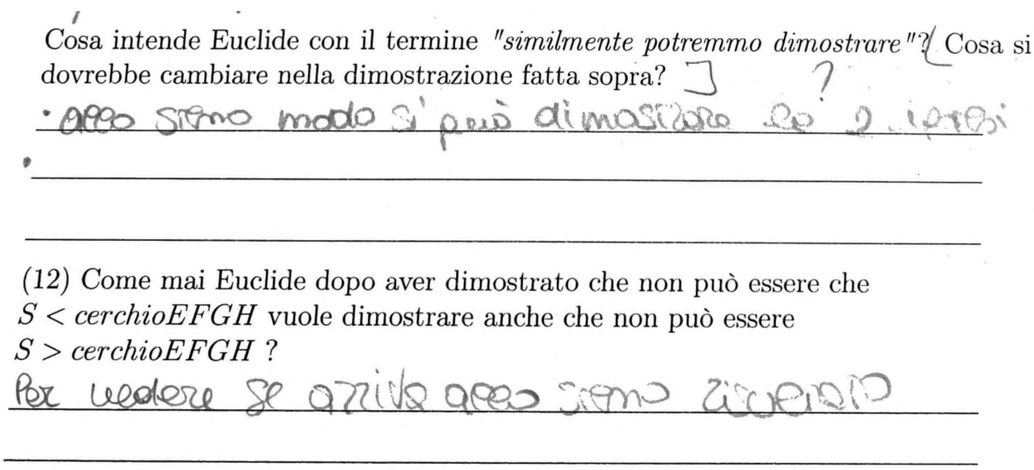
PERMUTA I MEDI, NON CAMBIA LA PROPORZIONE

(10) Euclide è quindi arrivato ad un [A : a = D^2 : d^2] ASSURDO

(11) Scrivete la proporzione presente nel testo.

EFGH : S = FH^2 : BD^2

Figura 4.36: Risposte prese da un protocollo.

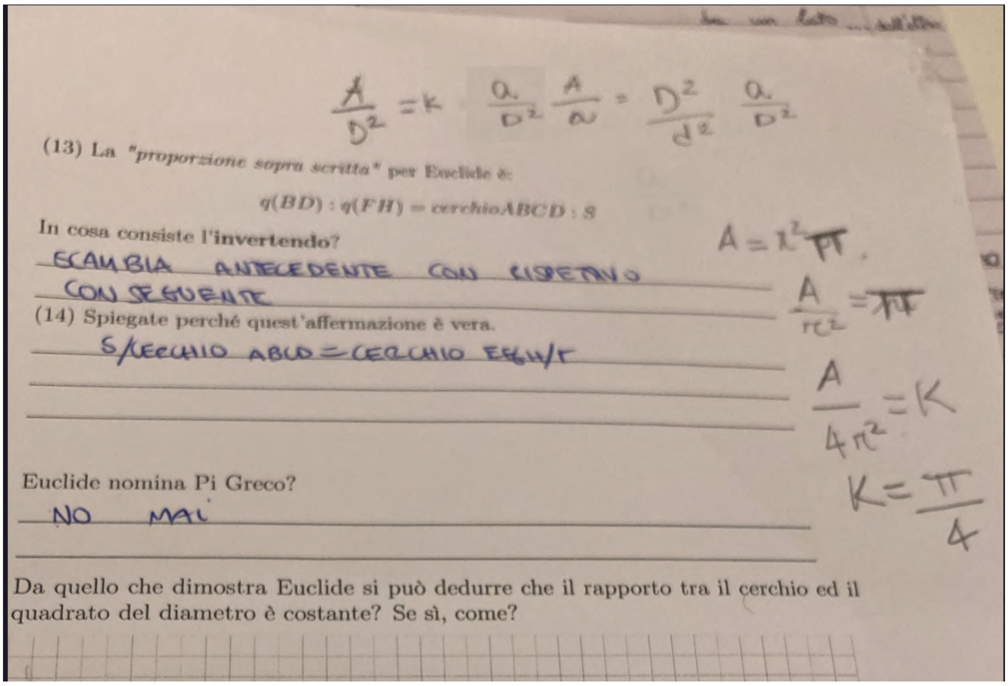

Cosa intende Euclide con il termine *"similmente potremmo dimostrare"*? Cosa si dovrebbe cambiare nella dimostrazione fatta sopra?

· allo stesso modo si può dimostrare le 2 ipotesi

(12) Come mai Euclide dopo aver dimostrato che non può essere che $S < cerchioEFGH$ vuole dimostrare anche che non può essere $S > cerchioEFGH$?

Per vedere se arriva allo stesso risultato

Figura 4.37: Risposte prese da un protocollo.



$\frac{A}{D^2} = k$ $\frac{a}{D^2}$ $\frac{A}{a} = \frac{D^2}{d^2}$ $\frac{a}{D^2}$

(13) La *"proporzione sopra scritta"* per Euclide è:

$q(BD) : q(FH) = cerchio ABCD : S$

In cosa consiste l'**invertendo**?

SCAMBIA ANTECEDENTE CON RISPETTIVO CON SEGUENTE

(14) Spiegate perché quest'affermazione è vera.

S/CERCHIO ABCD = CERCHIO EFGH/T

$A = r^2 \pi$

$\frac{A}{r^2} = \pi$

$\frac{A}{4r^2} = K$

$K = \frac{\pi}{4}$

Euclide nomina Pi Greco?

NO MAI

Da quello che dimostra Euclide si può dedurre che il rapporto tra il cerchio ed il quadrato del diametro è costante? Se sì, come?

Figura 4.38: Risposte prese da un protocollo.

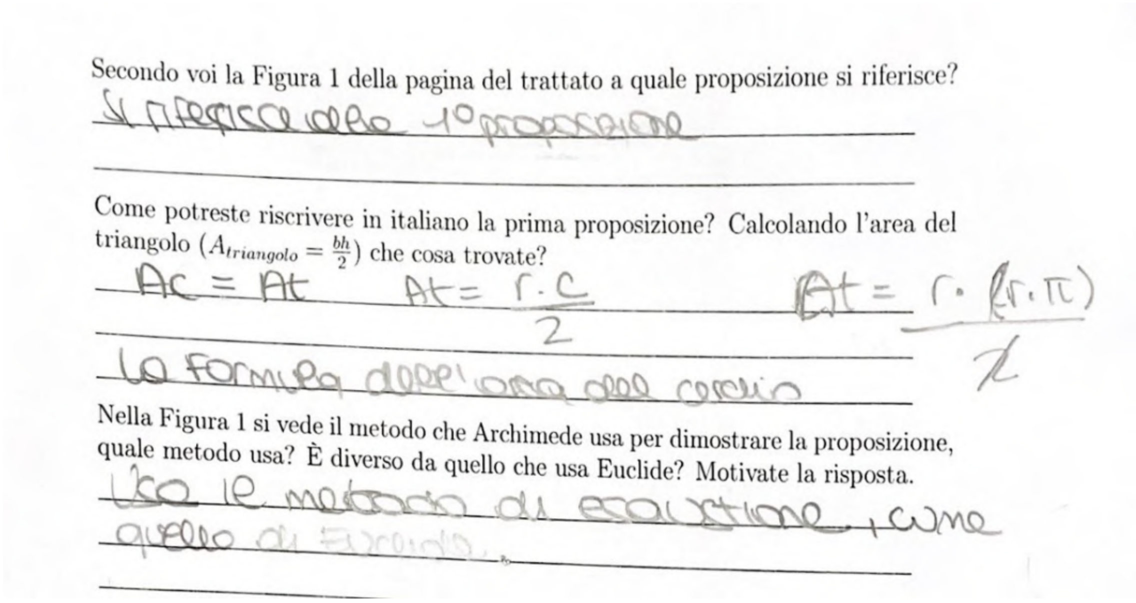
Il testo complesso della dimostrazione è stato un ostacolo all'apprendimento dei ragazzi, come si evince anche dalle risposte al questionario finale (si veda Sezione 5.3). Forse il laboratorio su Euclide sul documento storico sarebbe da ripensare, mettendo i ragazzi in grado di comprendere il testo che nell'attività, così proposta, è stato considerato complesso. Si è quindi concluso assieme che Euclide non nomina mai Pi Greco e che non collega le due costanti presenti nei rapporti tra la lunghezza della circonferenza ed il diametro e tra l'area del cerchio ed il diametro al quadrato.

Una volta completato il cartellone (si veda Figura 4.49) con le conoscenze su Euclide, si è svolta la lezione frontale, supportata da slide, su Archimede ed il periodo storico in cui è vissuto il matematico. Con Archimede, oltre alla vita ed al contesto storico in cui è vissuto, sono state presentati anche le due leggende più famose riguardanti questo matematico. Durante la lezione frontale i ragazzi sono stati partecipi intervenendo con considerazioni e fatti storici che si ricordavano e ricollegavano alla storia studiata. Gli studenti non hanno fatto collegamenti solo riguardanti la storia, ma anche riguardo ad autori latini che presumo abbiano studiato, questo era emerso già con Euclide, ma maggiormente con Archimede e la storia di quel periodo.

4.4.1 Laboratorio: il genio di Archimede

Terminata la lezione frontale gli studenti sono stati suddivisi in gruppi, sempre con la modalità di vicinanza per ordine alfabetico, cercando per quanto possibile di variare i gruppi rispetto alle volte precedenti. Sono stati creati sei gruppi: tre gruppi da cinque studenti, due gruppi da quattro studenti ed un gruppo costituito dai tre studenti in DAD.

Le prime tre richieste presenti nella scheda, riguardanti la prima proposizione del trattato, sono state svolte da tutti i gruppi senza difficoltà. Di seguito si riportano le risposte prese da due protocolli. Tutti i gruppi hanno riconosciuto il metodo di esaustione, visto nel laboratorio precedente su Euclide, ma nessuno ha notato la differenza con quello euclideo.


Secondo voi la Figura 1 della pagina del trattato a quale proposizione si riferisce?

Si riferisce alla 1° proposizione

Come potreste riscrivere in italiano la prima proposizione? Calcolando l'area del triangolo ($A_{triangolo} = \frac{bh}{2}$) che cosa trovate?

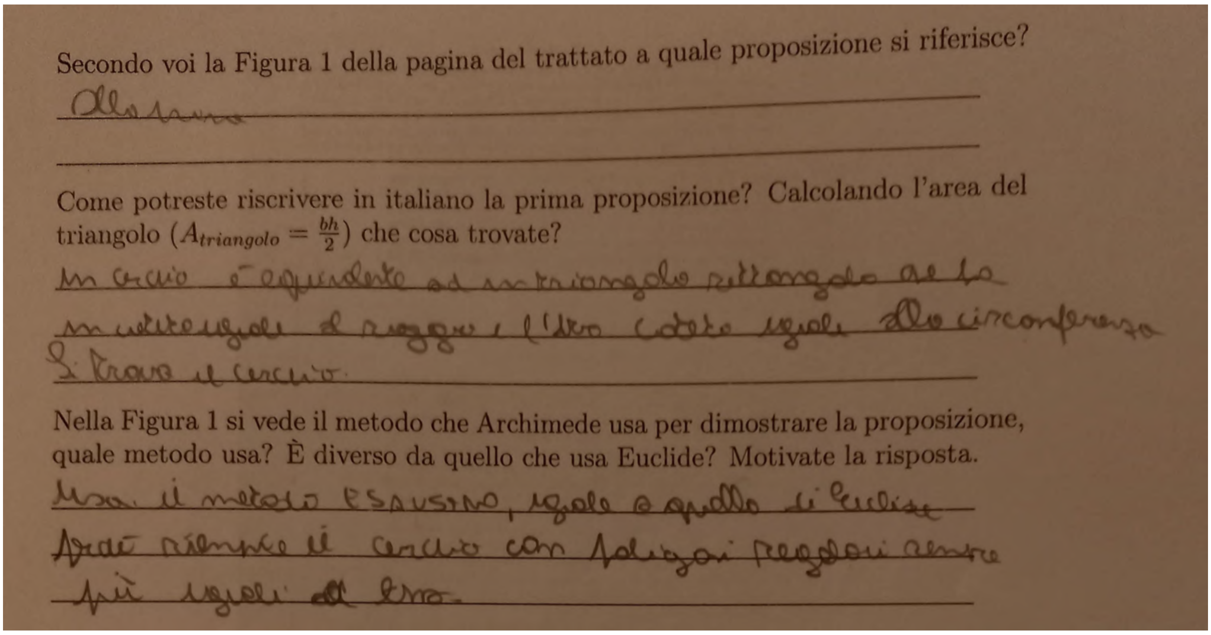
$Ac = At \quad At = \frac{r \cdot C}{2} \quad At = \frac{r \cdot (r \cdot \pi)}{\cancel{2}}$

La formula dell'area del cerchio

Nella Figura 1 si vede il metodo che Archimede usa per dimostrare la proposizione, quale metodo usa? È diverso da quello che usa Euclide? Motivate la risposta.

Usa il metodo di esaustione, come quello di Euclide.

Figura 4.39: Risposte prese da un protocollo.


Secondo voi la Figura 1 della pagina del trattato a quale proposizione si riferisce?

Alla prima

Come potreste riscrivere in italiano la prima proposizione? Calcolando l'area del triangolo ($A_{triangolo} = \frac{bh}{2}$) che cosa trovate?

Un cerchio è equivalente ad un triangolo rettangolo che ha un cateto uguale al raggio e l'altro cateto uguale alla circonferenza. Si trova il cerchio.

Nella Figura 1 si vede il metodo che Archimede usa per dimostrare la proposizione, quale metodo usa? È diverso da quello che usa Euclide? Motivate la risposta.

Usa il metodo esaustivo, uguale a quello di Euclide. Arriva riempire il cerchio con poligoni regolari sempre più uguali all'area.

Figura 4.40: Risposte prese da un protocollo.

Nemmeno nella seconda proposizione gli alunni hanno riscontrato difficoltà rispondendo tutti correttamente alla domanda presente sulla scheda (si veda Figura 4.41).

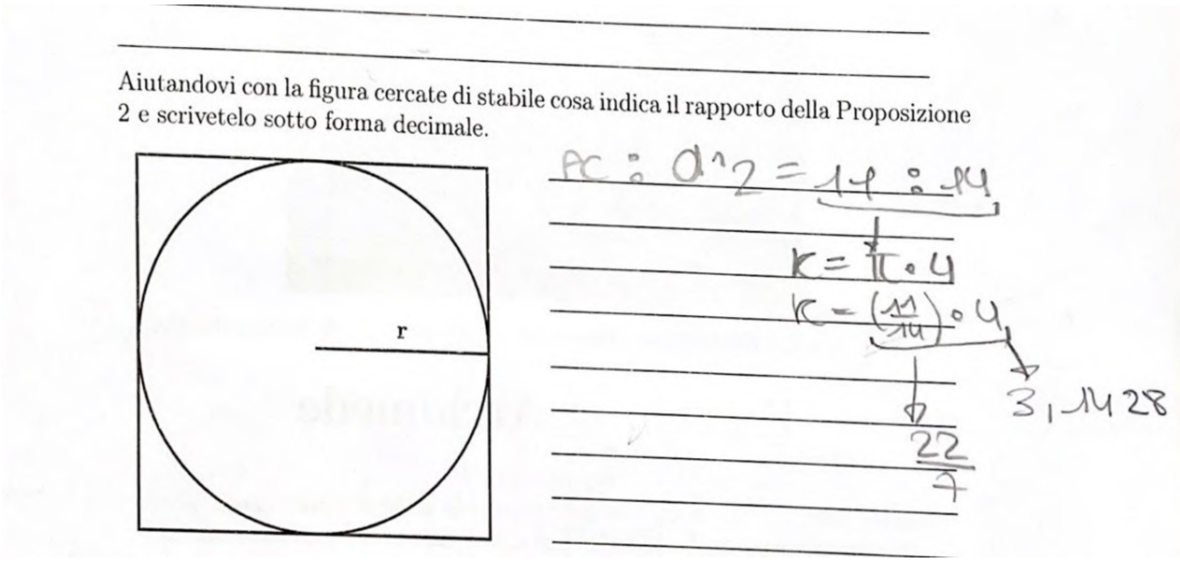
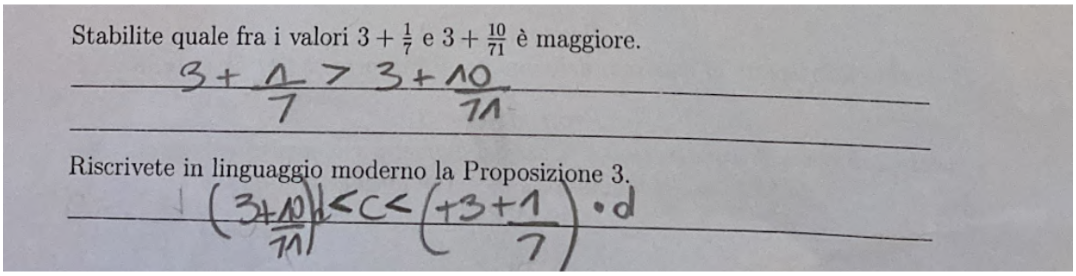

Aiutandovi con la figura cercate di stabile cosa indica il rapporto della Proposizione 2 e scrivetelo sotto forma decimale.

Figura 4.41: Risposta presa da un protocollo.

Anche in questo caso nonostante le tre proposizioni fossero brevi il linguaggio della terza ha fatto emergere nuovamente problemi di comprensione del testo che sono stati risolti girando tra i vari gruppi e ragionando assieme a loro, dato il testo molto breve della proposizione.

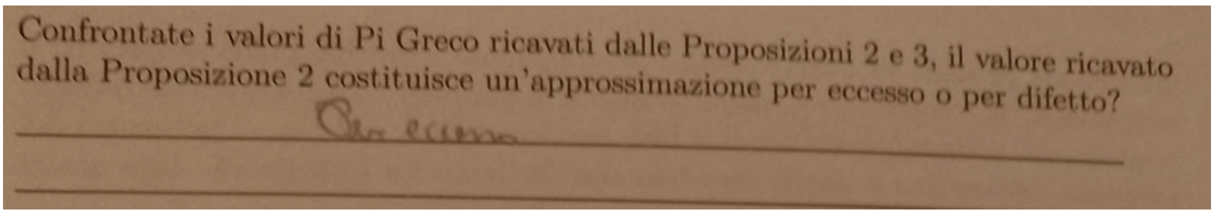

Stabilite quale fra i valori $3 + \frac{1}{7}$ e $3 + \frac{10}{71}$ è maggiore.

$3 + \frac{1}{7} > 3 + \frac{10}{71}$

Riscrivete in linguaggio moderno la Proposizione 3.

$\left(3+\frac{10}{71}\right) < C < \left(+3+\frac{1}{7}\right) \cdot d$

Figura 4.42: Risposte prese da un protocollo.


Confrontate i valori di Pi Greco ricavati dalle Proposizioni 2 e 3, il valore ricavato dalla Proposizione 2 costituisce un'approssimazione per eccesso o per difetto?

Per eccesso

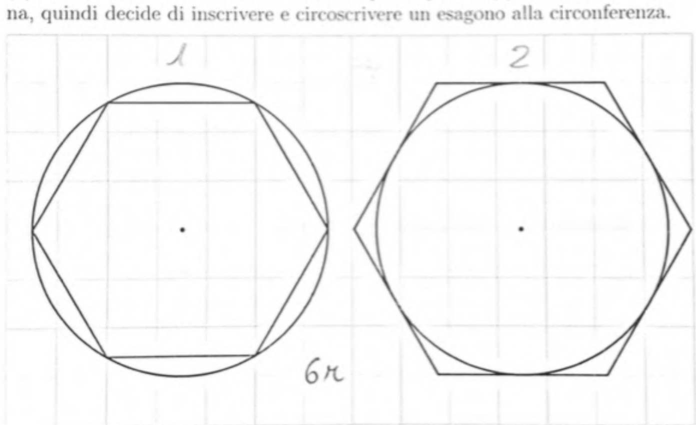
Figura 4.43: Risposta presa da un protocollo.

Al laboratorio sono stati lasciati cinquanta minuti abbondanti, ma la maggior parte dei gruppi è riuscita a finire solo la prima parte riguardante le tre proposizioni del trattato *Misura del cerchio*. Il gruppo in DAD anche questa volta non ha fatto domande né a voce né in chat. In questa prima parte svolta in classe tutti i gruppi sono riusciti a lavorare in autonomia facendo solamente qualche domanda per avere chiarimenti, sopratutto sulla terza proposizione. Dieci minuti prima del suono della campanella si è fermata l'attività, visto che i risultati che servivano per ottenere le considerazione su Archimede erano stati raggiunti da tutti, discutendo assieme su quanto è stato trovato sul trattato proposto. Si è quindi sottolineato il fatto che il matematico siracusano, a differenza di Euclide, non disdegnava affatto le misure ed i calcoli tant'è che diede un'approssimazione di Pi Greco. Inoltre grazie alla Proposizione 1 del trattato si è trovata la nostra formula per l'area del cerchio ed il collegamento tra le due costanti che Euclide non aveva cercato. Si è quindi completato il cartellone, Figura 4.49, con le conoscenze di Archimede su Pi Greco.

Visto che la seconda fase del laboratorio (si veda Sezione 3.5.1) riguardava le approssimazioni successive di Pi greco, fatte dal matematico siracusano, questa è stata lasciata per casa.

4.5 L'antica Cina nella pratica

Nella lezione precedente ai ragazzi era rimasto da calcolare per casa le successive approssimazioni di Pi Greco trovate da Archimede. Visto che erano solo calcoli non sono stati controllati insieme. Dai protocolli emerge però che il compito lasciato per casa sia risultato difficile nella prima parte, in quanto si trovano risposte inadeguate nei protocolli (Figure 4.44 e 4.45), mentre la seconda parte delle approssimazioni successive non sia stata svolta da nessuno studente.



Archimede arriva a stimare il valore di Pi Greco utilizzando il metodo di esaustione. Vediamo quali sono i suoi passaggi:

(1) Dalla Proposizione 2 Archimede si rende conto che la circonferenza é IL DIAMETRO del perimetro del quadrato. Inoltre sapeva grazie a matematici del passato che la circonferenza é LA SOMMA di tre diametri. Da cui si può ricavare una prima stima di questo numero, ricordando la formula della circonferenza ($C = 2\pi r$):

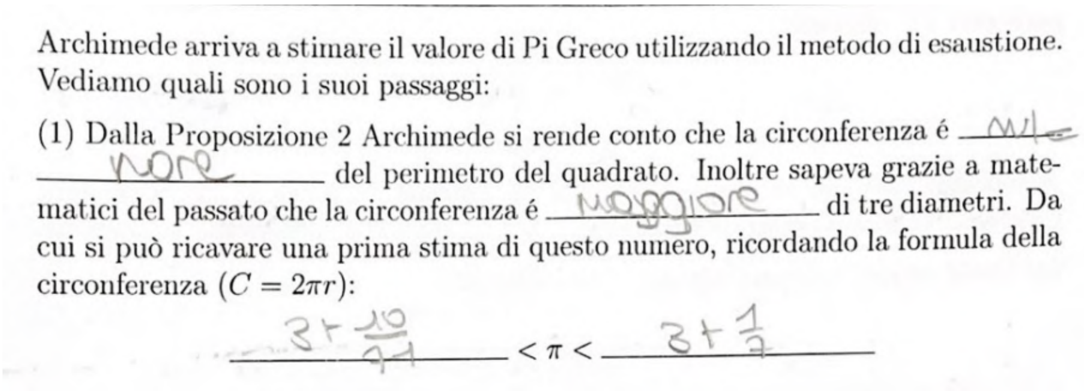
$$3,1408 < \pi < 3,142$$

(2) Archimede si rende subito conto che questa prima approssimazione è grossolana, quindi decide di inscrivere e circoscrivere un esagono alla circonferenza.

Il perimetro dell'esagono inscritto è MINORE (ricordate la scheda sui Babilonesi), mentre quello dell'esagono circoscritto è MAGGIORE

$P_1 < P_2$

Figura 4.44: Risposta presa da un protocollo.



Archimede arriva a stimare il valore di Pi Greco utilizzando il metodo di esaustione. Vediamo quali sono i suoi passaggi:

(1) Dalla Proposizione 2 Archimede si rende conto che la circonferenza é minore del perimetro del quadrato. Inoltre sapeva grazie a matematici del passato che la circonferenza é maggiore di tre diametri. Da cui si può ricavare una prima stima di questo numero, ricordando la formula della circonferenza ($C = 2\pi r$):

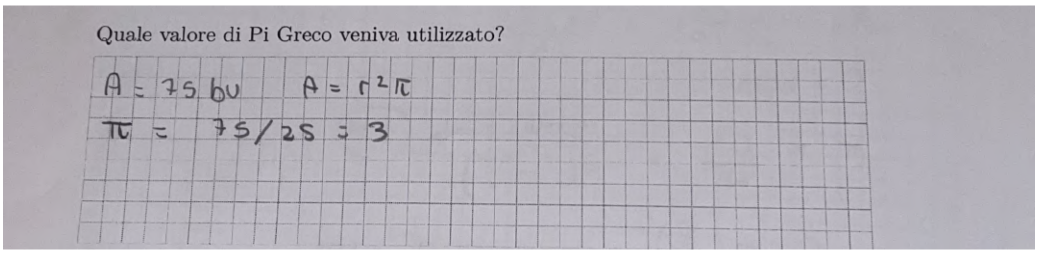
$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

Figura 4.45: Risposta presa da un protocollo.

La lezione è quindi cominciata con un'introduzione frontale, mediante slide, sulle principali dinastie susseguitesi nella storia cinese a cui è seguita l'attività laboratoriale sui nove capitoli. Anche in questo caso alcuni studenti hanno fatto collegamenti con quanto visto precedentemente nelle lezioni e nella storia. Gli studenti sono stati divisi in sei gruppi: due gruppi da cinque studenti, due gruppi da sei studenti ed un gruppo composto da una sola studentessa in DAD. Purtroppo per un disguido tecnico la studentessa in DAD si era collegata, ma la docente non riusciva a vederla, quindi tutto il primo laboratorio non lo ha svolto.

4.5.1 Laboratorio: Nove capitoli sulle arti matematiche

L'attività è incentrata sui problemi 1.31 e 1.32 presenti nel trattato cinese, in cui si calcola l'area del cerchio. Tutti i gruppi sono riusciti a svolgere autonomamente l'attività. Alcuni gruppi, per quanto riguarda la prima richiesta nella scheda, hanno chiesto delucidazioni su cosa significasse 60 *bu* $\frac{1}{3}$ *di bu* (si veda Figura 4.46).



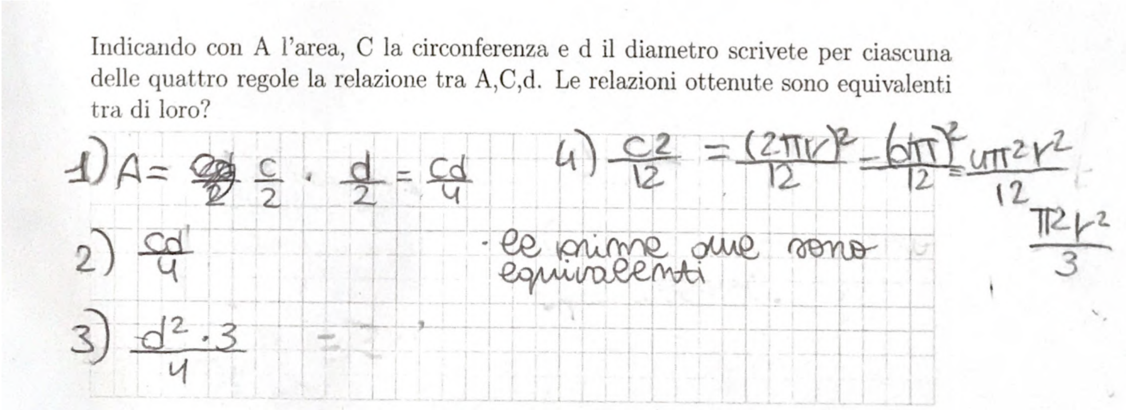
Quale valore di Pi Greco veniva utilizzato?

$A = 75$ bu $\quad A = r^2\pi$

$\pi = 75/25 = 3$

Figura 4.46: Risposta presa da un protocollo.

Nelle schede si trovano, purtroppo, solamente i calcoli riguardo al problema 1.31, e solamente qualche abbozzo di calcolo per il problema 1.32, probabilmente gli studenti capendo che dal secondo problema veniva fuori lo stesso valore di Pi Greco non hanno fatto i calcoli. Per quanto riguarda la seconda richiesta, presente nella scheda, nessun gruppo ha avuto difficoltà a ricavare le regole per calcolare l'area del cerchio esposte nel trattato (si veda Figura 4.47).



Indicando con A l'area, C la circonferenza e d il diametro scrivete per ciascuna delle quattro regole la relazione tra A,C,d. Le relazioni ottenute sono equivalenti tra di loro?

1) $A = \cancel{2}\,\frac{c}{2}\cdot\frac{d}{2} = \frac{cd}{4}$

2) $\frac{cd}{4}$

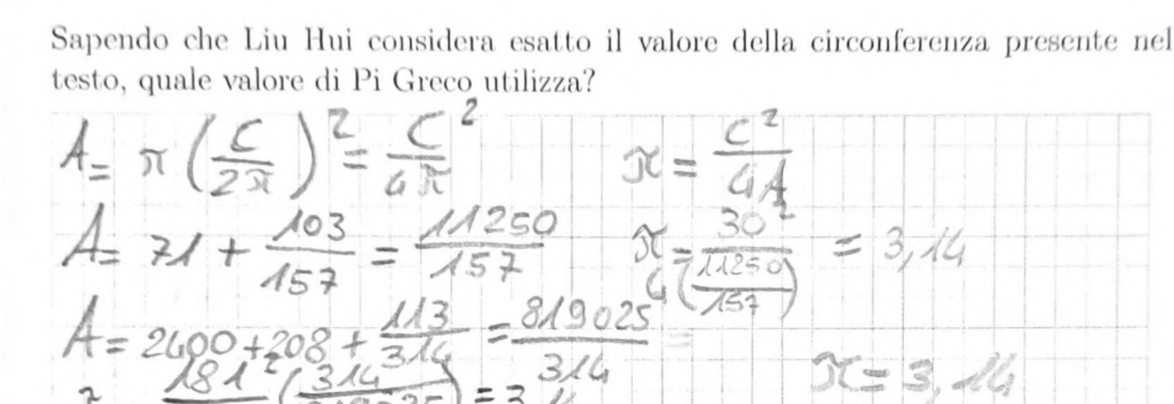
3) $\frac{d^2\cdot 3}{4}$

4) $\frac{c^2}{12} = \frac{(2\pi r)^2}{12} = \frac{(6\pi)^2}{12} = \frac{4\pi^2 r^2}{12}$ $\frac{\pi^2 r^2}{3}$

· le prime due sono equivalenti

Figura 4.47: Risposta presa da un protocollo.

A questo punto, dopo che gli studenti in una quindicina di minuti avevano risposto ai primi quesiti della scheda, l'attività è stata fermata e sono stati confrontati i valori ottenuti. Terminato il confronto è stata fatta una piccola premessa su Liu Hui, la sua importanza nella matematica cinese e il periodo storico in cui è vissuto, attraverso delle slide. La scheda, ridimensionata per rispettare i tempi rispetto al progetto iniziale (si veda Sezione 3.6.1), è stata completata assieme alla classe. In questo momento di lavoro assieme, la classe è stata partecipativa e attenta correggendo una mia svista in una formula che stavamo ricavando. Sono sorti un po' di problemi con i calcoli, perché si sentivano numeri urlati per la classe, quindi è intervenuta la docente per ristabilire l'ordine. Non è stato un momento di confusione generale, ma di confusione in cui ogni studente ci teneva ad intervenire condividendo i calcoli che stava facendo. Una volta ristabilito l'ordine si è ricavato la migliore approssimazione di Pi Greco trovata da Liu Hui (si veda Figura 4.48).



Sapendo che Liu Hui considera esatto il valore della circonferenza presente nel testo, quale valore di Pi Greco utilizza?

$A = \pi\left(\frac{C}{2\pi}\right)^2 = \frac{C^2}{4\pi}$ $\pi = \frac{C^2}{4A}$

$A = 71 + \frac{103}{157} = \frac{11250}{157}$ $\pi = \frac{30^2}{4\left(\frac{11250}{157}\right)} = 3,14$

$A = 2400 + 208 + \frac{113}{314} = \frac{819025}{314}$

$\pi = \frac{181^2}{4}\left(\frac{314}{819025}\right) = 3,14$ $\pi = 3,14$

Figura 4.48: Risposta presa da un protocollo.

Una volta ricavato il valore di Pi Greco trovato dal matematico cinese è stato completato il cartellone con i valori dei cinesi per Pi Greco, completando definitivamente la linea del tempo presente sul cartellone, Figura 4.49. A questo momento è seguita una parte di lezione partecipata in cui si è fatto un riassunto di tutto quello che si è scoperto durante il

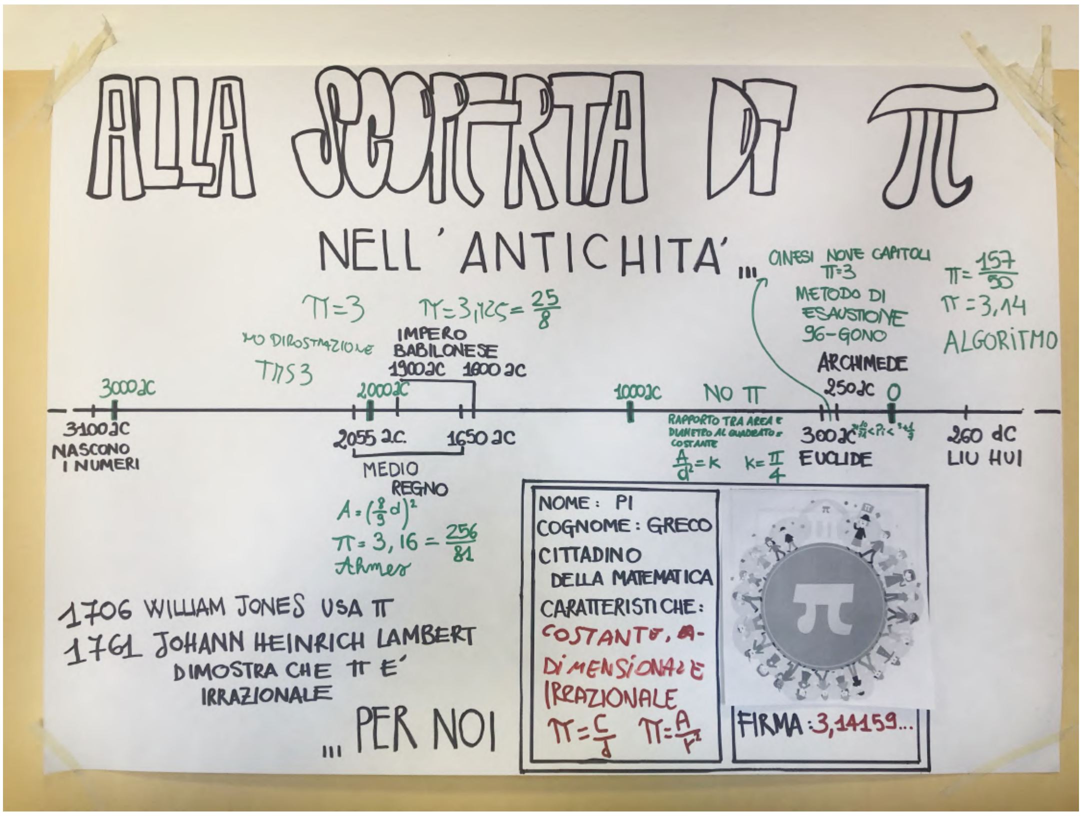


Figura 4.49: Cartellone alla fine del percorso.

percorso per poi arrivare all'irrazionalità di Pi Greco, completando definitivamente anche la carta d'identità riguardo questa costante presente sul cartellone.

Anche durante questa parte i soliti ragazzi, che sono sempre intervenuti, hanno partecipato. Visto che, una volta completato il cartellone, è rimasto un po' di tempo è stato proiettato un video preso da YouTube sulla costante Pi Greco [26]. Successivamente si è andati sul sito ANGIO.NET [4] ed i ragazzi hanno verificato se la stringa della loro data di nascita fosse presente tra le prime duecento milioni di cifre. Questa parte un po' giocosa ha attirato molto l'attenzione, infatti tutti volevano cercare la propria data di nascita. Gli ultimi 15 minuti di lezione sono stati impiegati per la compilazione del questionario finale (si veda Capitolo 5).

Capitolo 5

Questionari, intervista e conclusioni

In questo capitolo si analizzeranno le risposte degli studenti ai questionari, iniziale e finale, descritti nel Capitolo 3. Assieme ai questionari si riporta l'intervista proposta alla docente della classe, per poi a fine capitolo trarre le conclusioni sul percorso progettato e svolto in classe. Il questionario iniziale (Allegato A), è stato somministrato dalla docente Alboni prima dell'inizio del percorso, ed ha lo scopo di individuare alcune conoscenze e credenze degli studenti utili per il percorso. Il questionario finale (Allegato B), è stato somministrato durante l'ultima lezione in classe, ed ha lo scopo di rilevare eventuali cambiamenti avvenuti nei ragazzi al termine del progetto ed al suo interno sono state inserite anche domande personali di gradimento. Entrambi i questionari sono stati fruiti, come previsto, tramite Google Moduli. L'analisi dei questionari è divisa in tre sezioni. Di seguito si spiega la divisione e la motivazione di tale ripartizione. Nella Sezione 5.1 si riporta l'analisi dei questionari iniziali. Il questionario iniziale è servito per avere una valutazione diagnostica della classe prima del progetto. Inoltre, l'analisi del questionario iniziale serve come base per valutare l'evoluzione ed i cambiamenti avvenuti negli studenti attraverso il questionario finale. Nella Sezione 5.2 si prendono in considerazione solamente le domande presenti in entrambi i questionari. L'analisi delle risposte al questionario finale è strutturata in confronto alle relative risposte presenti nel questionario iniziale. Questo permette una agevole valutazione dei possibili cambiamenti avvenuti al termine del percorso. Nella Sezione 5.3 si analizzano le rimanenti risposte presenti nel questionario finale e l'intervista proposta alla docente della classe. La scelta di dividere l'analisi delle risposte del questionario finale è dovuta alla diversa natura delle domande presenti in esso. Si è quindi ritenuto più efficace esaminare le domande di valutazione del percorso e dei suggerimenti dati dagli studenti assieme all'intervista della docente.

5.1 Questionario iniziale

In questa sezione si analizzano le risposte date dagli studenti alle diverse domande presenti nel questionario iniziale, descritto nel Capitolo 3. I questionari compilati sono ventisei, cioè la totalità degli studenti della classe.

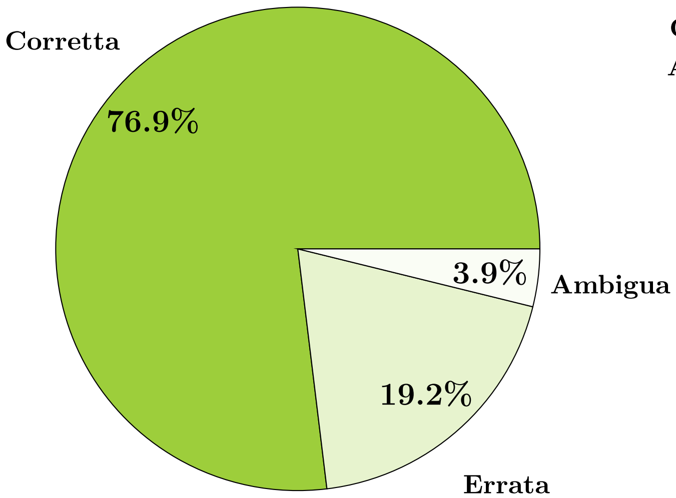
Domanda 1: Che differenza c'è tra cerchio e circonferenza?

Questa domanda come specificato in precedenza è stata inserita per sapere se prima dell'inizio del percorso i ragazzi avessero chiara la differenza tra i termini *cerchio* e *circonferenza* utilizzati costantemente durante tutto il percorso. Le risposte sono state suddivise in tre categorie descritte di seguito.

1. Corretta: in questa categoria rientrano tutte le risposte in cui gli studenti hanno delineato in modo esatto la differenza tra i due termini. Alcune risposte sono state molto precise in quanto per esempio la circonferenza è stata definita come *"insieme dei punti equidistanti da un punto chiamato centro"*, mentre il cerchio come *"porzione di piano delimitata dalla circonferenza"* o *"parte di piano delimitata da una circonferenza ed è costituito da un insieme infinito di punti"*.

2. Ambigua: in questa categoria è presente solo una risposta relativa ad uno studente che utilizza termini non chiari nella spiegazione: *"il cerchio è la figura mentre la circonferenza è ciò che compone il cerchio"*.

3. Errata: in questa categoria rientrano le risposte errate e le risposte: *"non lo so"* e *"?"*.

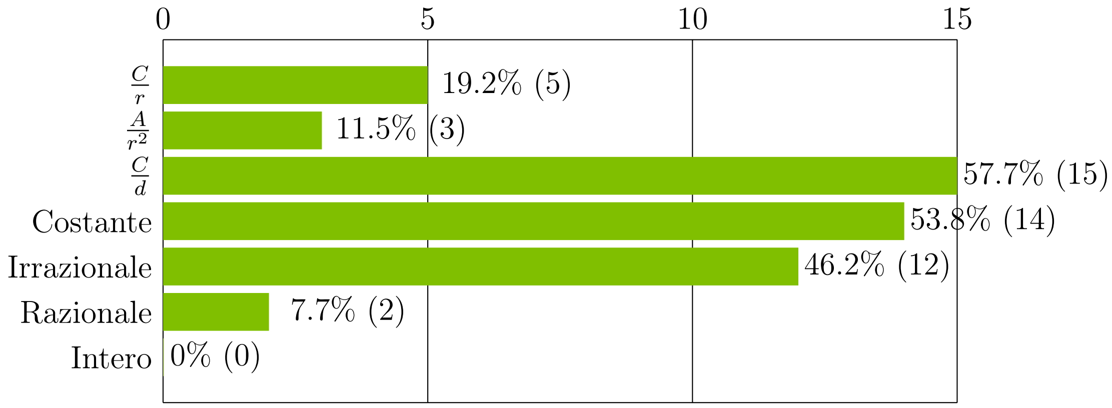


Corretta	20/26
Ambigua	1/26
Errata	5/26

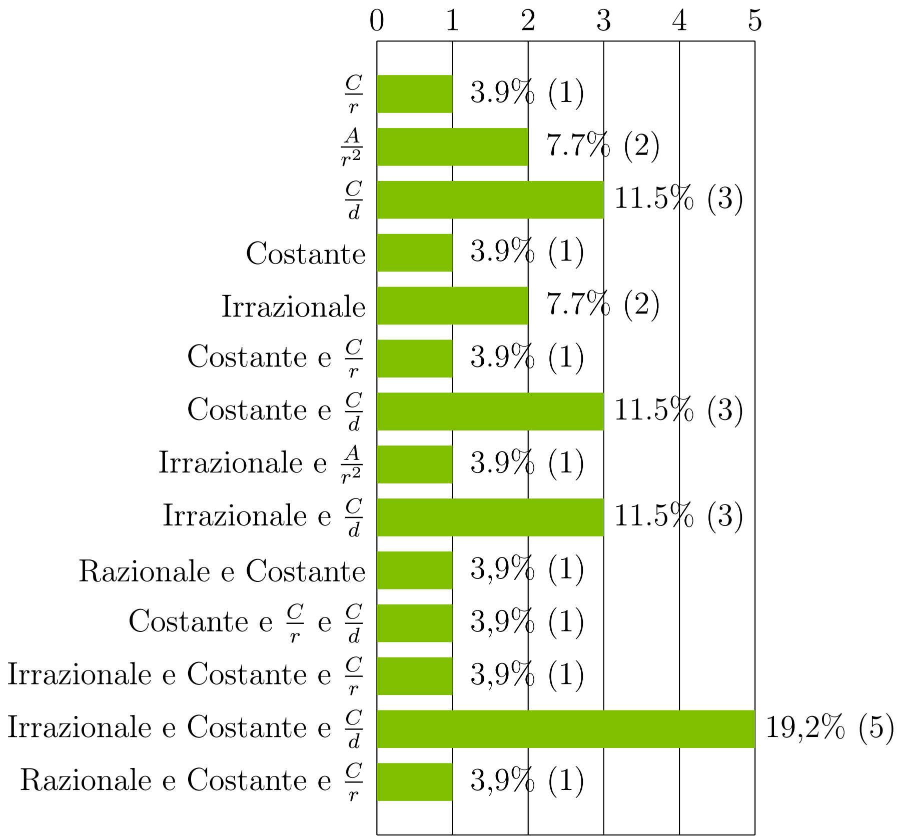
Dalle risposte a questa prima domanda si evince che la maggioranza della classe ha chiaro il significato e la differenza tra i due termini.

Domanda 2: Pi Greco è: (puoi scegliere più di una risposta)

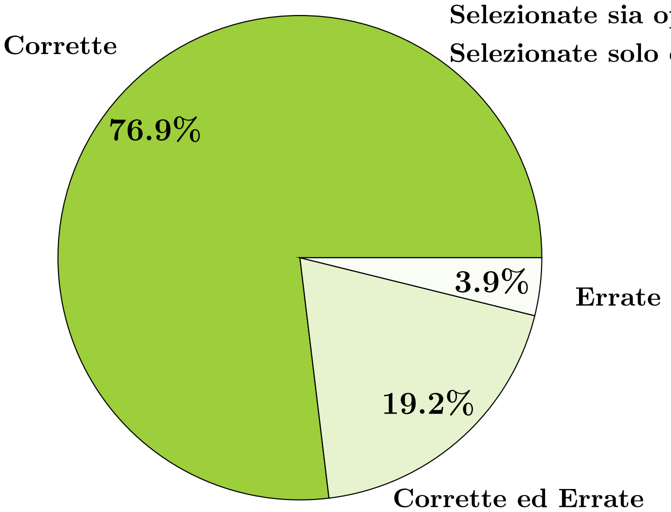
Questa domanda è stata inserita per indagare le conoscenze che gli alunni hanno su Pi Greco prima dell'inizio del percorso. Si è lasciata agli alunni la possibilità di inserire quello che ritenevano giusto nella sezione altro, ma nessuno ha aggiunto nulla rispetto alle opzioni già presenti. Tra le opzioni sono state inserite quattro risposte corrette (irrazionale, costante, rapporto tra circonferenza e diametro, rapporto tra area e quadrato del raggio) e tre risposte errate (intero, razionale, rapporto tra circonferenza e raggio). Di seguito si inserisce il grafico che mostra quante volte ciascuna opzione è stata selezionata nelle risposte date dagli studenti.



Nel grafico seguente si riportano tutti i set di risposte selezionate dagli studenti con relativa frequenza assoluta e percentuale.



Nessuno studente ha selezionato tutte le quattro risposte esatte, ma si possono individuare alunni che hanno selezionato solo opzioni corrette, mentre altri hanno selezionato sia opzioni corrette che errate.

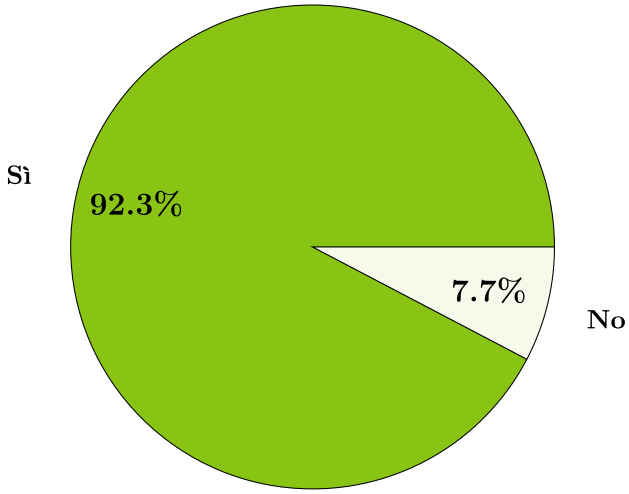


Selezionate solo opzioni corrette	20/26
Selezionate sia opzioni corrette che errate	5/26
Selezionate solo opzioni errate	1/26

Dalle risposte si evince che la maggioranza della classe, anche se non conosce tutti gli aspetti di Pi Greco, ha conoscenze esatte riguardo questa costante. La presenza di questionari con selezionate sia opzioni esatte che errate fa emergere il conflitto di conoscenze degli studenti relative a Pi Greco.

Domande 3 e 4: La matematica si è evoluta nel tempo? Motiva la risposta precedente.

Queste due domande sono state inserite per indagare che concezione gli studenti hanno riguardo alla storia della matematica ed alla sua evoluzione. La richiesta di motivare la risposta serve per indagare maggiormente il loro pensiero su questi due temi.



Sì	24/26
No	2/26

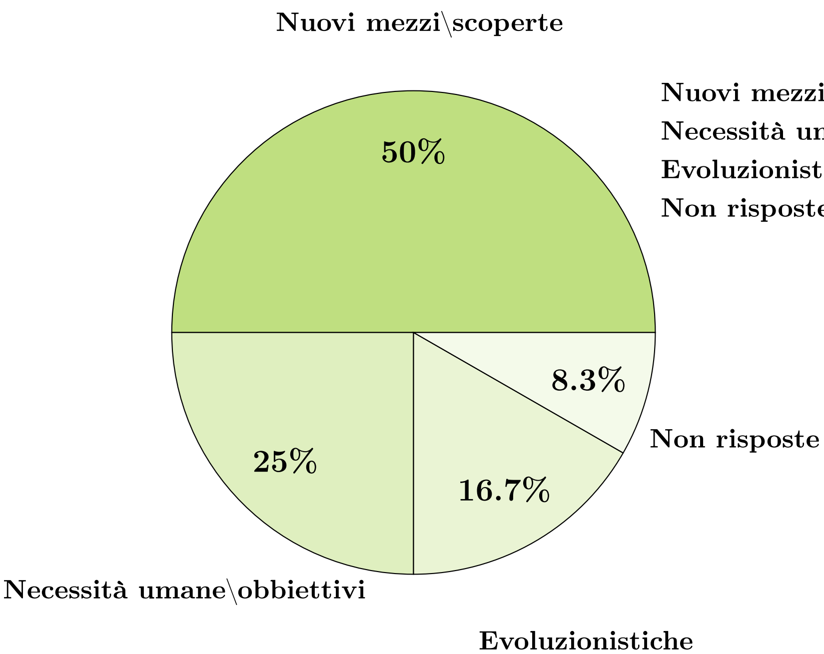
La maggioranza della classe ritiene che la matematica si sia evoluta nel tempo. Le risposte aperte, di chi sostiene tale tesi, si possono dividere in quattro categorie:

1. Evoluzionistiche: rientrano in questa categoria le risposte che fanno riferimento al processo evolutivo che è sempre avvenuto nella storia dell'umanità. Esempio: *"tutto si evolve col tempo"*

2. Nuove necessità\obbiettivi: rientrano in questa categoria le risposte che fanno riferimento alle diverse necessità ed ai diversi obbiettivi dell'uomo durante la storia. Esempi: *"si è evoluta poiché le tesi vengono sviluppate e vanno avanti in base alle necessità dell'uomo"*, *"si è sicuramente evoluta sono cambiati principalmente gli obbiettivi"*.

3. Nuovi mezzi\scoperte: rientrano in questa categorie le risposte che fanno riferimento all'evoluzione grazie alle nuove scoperte in ambito matematico o ai nuovi strumenti inventati dall'uomo. Esempi: *"nel corso del tempo si sono scoperti nuovi teoremi e regole e nuovi strumenti con cui studiarli"*, *"oggi l'uomo con i mezzi che ha a disposizione è riuscito a smentire o dimostrare molte teorie passate"*.

4. Non risposte: fanno parte di questa categoria le risposte *"non lo so"*.



Nuovi mezzi\scoperte	12/24
Necessità umane\obbiettivi	6/24
Evoluzionistiche	4/24
Non risposte	2/24

Si osserva che in alcuni questionari emergono idee interessanti relative alla storia della matematica ed alla sua evoluzioni, di seguito si riportano gli esempi. In una risposta della categoria 1 viene sottolineato l'immutabilità di alcune verità matematiche.

> *"Molto probabilmente si, come ogni cosa. Anche se alcuni teoremi che studiamo adesso sono stati creati tantissimi anni fa e non sono mai stati cambiati"*

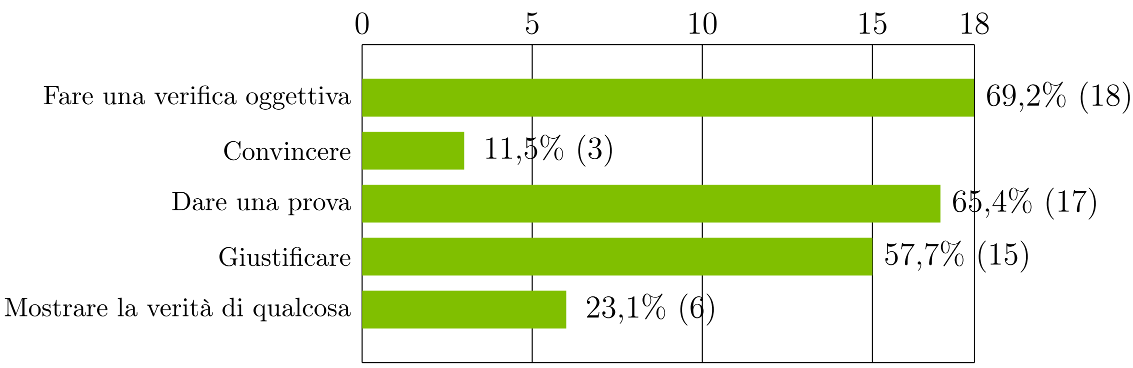
Significativa anche una risposta della categoria 2 che si riporta, di seguito, per intero.

> *"Col passare del tempo, sono decisamente variate le necessità dell'uomo e con queste i metodi per ottenerle. Pertanto, nella matematica, è stato necessario adottare nuovi tipi di calcoli o confutare passati teoremi, congetture, che non tenevano conto delle recenti scoperte. Quando nell'antichità la matematica poteva essere utile per semplici calcoli relativi alle attività di sussistenza, ad oggi la si adopera per questioni molto più complesse."*

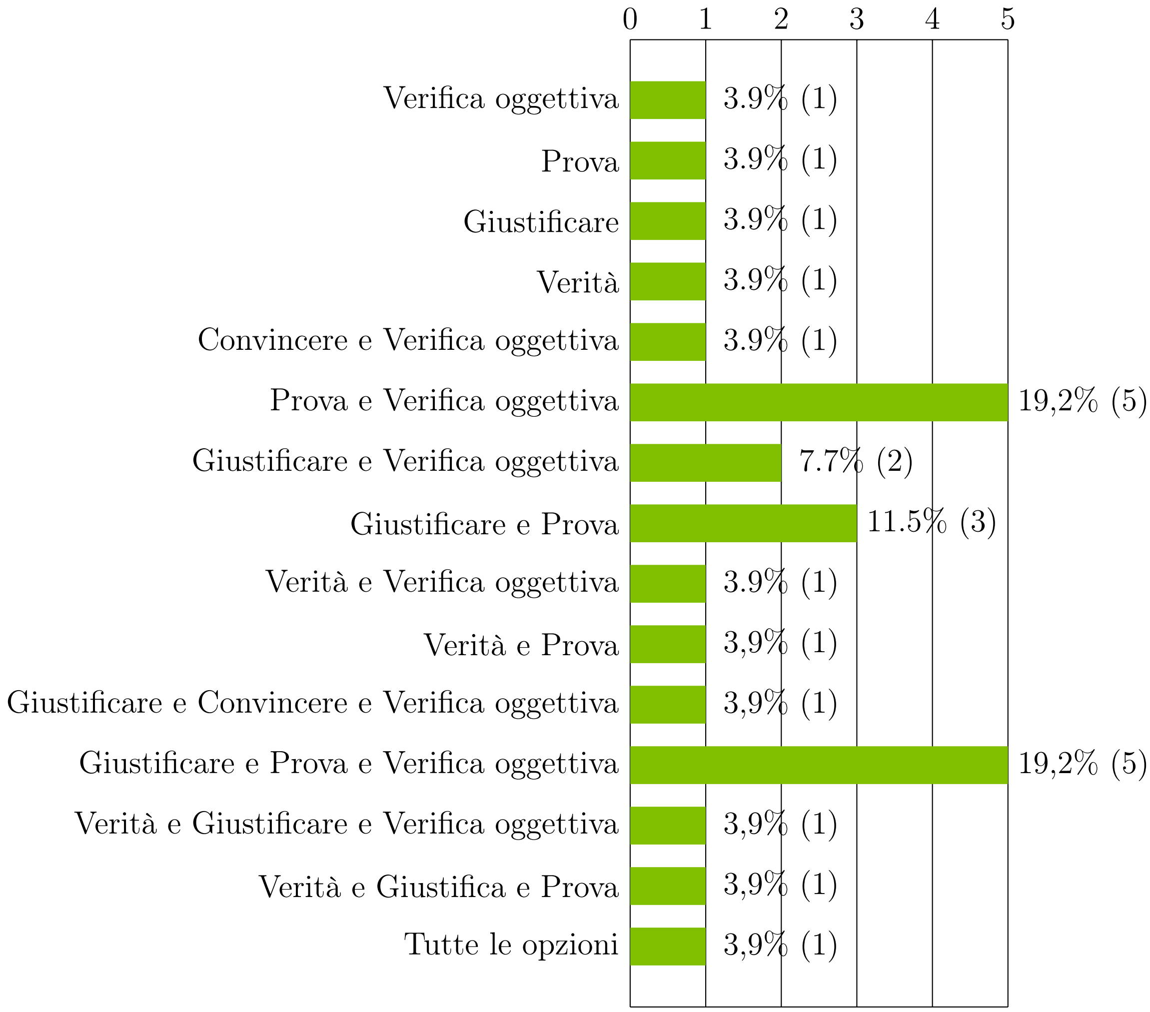
I due studenti che hanno risposto negativamente hanno motivato in maniera differente la loro risposta. Una risposta rafforza la tesi secondo cui la matematica non si è evoluta, *"la matematica è la stessa da tantissimo tempo"*, mentre l'altra parla del concetto di evoluzione d'uso, *"Io credo che la matematica non si sia evoluta poiché tutti i concetti di essa non possono cambiare, credo si sia evoluto il modo di usarla"*. Non è chiaro se lo studente dicendo *"si sia evoluto il modo di usarla"* intende il modo di fare matematica o il modo di applicarla, però nonostante abbiamo dato una risposta negativa nella motivazione è presente un'idea di evoluzione.

Domanda 5: Cosa vuol dire secondo te dimostrare in matematica? (puoi scegliere più di una risposta)

Questa domanda è stata inserita per indagare quale concetto di dimostrazione hanno i ragazzi prima dell'inizio del percorso. Si è lasciata agli alunni la possibilità di inserire personali idee sul concetto di dimostrazione tramite l'opzione altro, ma nessuno studente ha aggiunto nulla rispetto alle opzioni presenti. La domanda a scelta multipla contiene cinque risposte: mostrare la verità di qualcosa, giustificare, dare una prova, convincere e fare una verifica oggettiva. L'opzione *dare una prova* rispecchia una forma primordiale di idea di dimostrazione, già presente anche nella matematica prodotta da popolazioni antiche, come per esempio gli Egizi (si veda Paragrafo 2.2). L'opzione *convincere* rispecchia il passaggio avvenuto storicamente dalla prova alle prime dimostrazioni greche basate su un sistema ipotetico-deduttivo. Le dimostrazioni per i Greci hanno lo scopo di convincere l'interlocutore attraverso argomenti persuasivi (per esempio attraverso il ragionamento per assurdo) evitando gli argomenti che potevano essere ritenuti deboli come il passaggio all'infinito. Le opzioni *mostrare la verità di qualcosa*, *fare una verifica oggettiva* e *giustificare* rispecchiano l'evoluzione dimostrativa avvenuta a partire dal XIX secolo e maggiormente nel XX secolo quando la dimostrazione diventa un processo formale che porta da formule ben formate di un certo linguaggio (gli assiomi) ad altre formule ben formate (i teoremi), attraverso l'applicazione di regole di inferenza.
Il grafico sottostante mostra quante volte ciascuna opzione è stata selezionata nelle risposte date dagli studenti. Dal grafico si evince che la maggioranza della classe ritiene che dimostrare significhi fare una verifica oggettiva.



Nel grafico seguente si riportano tutti i set di risposte selezionate dagli studenti con relativa frequenza assoluta e percentuale.



I set di risposte maggiormente selezionati dagli studenti contengono sia l'idea di prova che quella di verifica oggettiva. Questo potrebbe sottolineare come la prova sia un concetto di dimostrazione naturale per l'uomo, a cui però si aggiunge, come avviene storicamente, il passaggio all'oggettività della verifica. Questa potrebbe essere una possibile interpretazione, dato che l'opzione *prova* presente nel questionario è molto generica e gli studenti potrebbero anche averla considerata con una diversa accezione.

Domanda 6: Che cos'è per te la matematica?

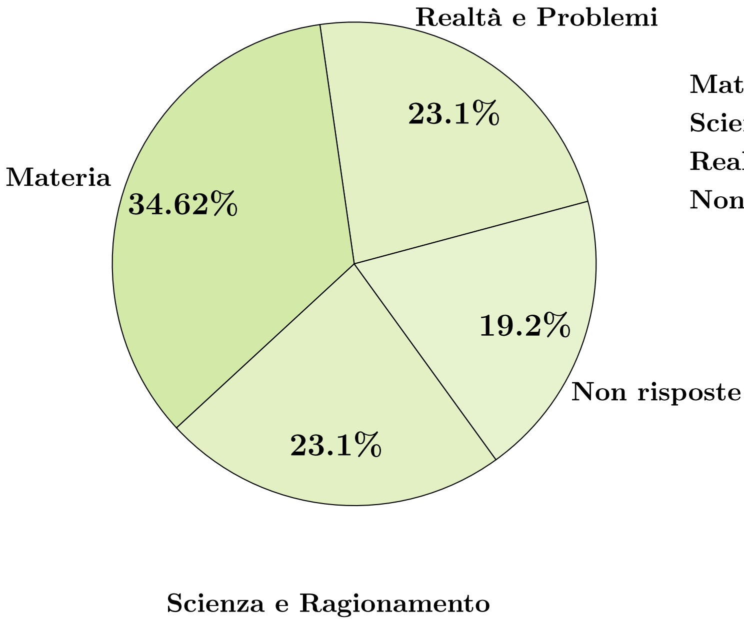
Questa domanda è stata inserita per indagare la percezione personale riguardante la matematica in ogni studente prima dell'inizio del percorso. È stata inserita l'espressione *"per te"* per indicare che si richiede un'opinione personale e che quindi non esistono risposte giuste o sbagliate. Analizzando le risposte si individuano quattro categorie descritte di seguito.

1. Materia: rientrano in questa categoria le risposte che definiscono la matematica come una materia scolastica, *"una materia che tiene il cervello allenato"*, o che fanno riferimento a quello che viene insegnato a scuola, *"i numeri e i calcoli"*.

2. Scienza e Ragionamento: rientrano in questa categoria le risposte che inquadrano la matematica attraverso il saper ragionare, *"un modo per ragionare con la logica"*, o che la definiscono come una scienza, *"per me la matematica è una scienza"*

3. Realtà e Problemi: rientrano in questo categoria le risposte che individuano la matematica nel contesto della realtà e della vita quotidiana, *"la quotidianità di tutti i problemi logici che affrontiamo nella vita"* , o che fanno riferimento alla matematica come mezzo per risolvere problemi, *"saper usare in modo appropriato le conoscenze che abbiamo accumulato per risolvere problemi"*.

4. Non risposte: rientrano in questa categoria le risposte *"non lo so"*, *"?"* e *"."*.



Materia	9/26
Scienza e Ragionamento	6/26
Realtà e Problemi	6/26
Non risposte	5/26

Risulta interessante notare che in alcuni questionari emergono aspetti della matematica significativi, riportati di seguito. In una risposta della prima categoria si fa riferimento all'importanza della matematica per la cultura personale di ciascun individuo.

> *"per me è una materia che tutti dovrebbero conoscere anche a livello culturale perché nella vita serve sempre sapere queste cose"*

L'importanza culturale della matematica viene sottolineata anche nelle Indicazioni Nazionali, come esposto nel Paragrafo 1.4. In una risposta della terza categoria viene sottolineata l'importanza del linguaggio matematico e la sua universalità.

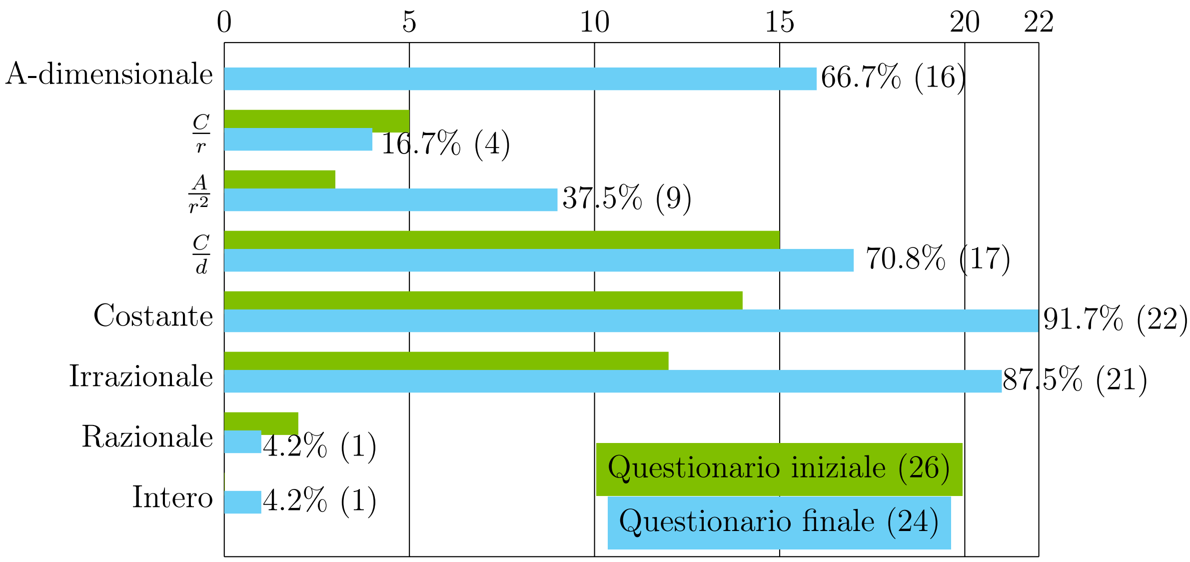
> *"La matematica è per me uno dei linguaggi più importanti per l'essere umano. Attraverso la matematica è possibile quantificare e rendere esplicita la realtà. In questo modo, questa si potrebbe esprimere e valorizzare in maniera comprensibile per qualsiasi persona di ogni nazionalità. È una lingua universale."*

5.2 Questionario finale (prima parte)

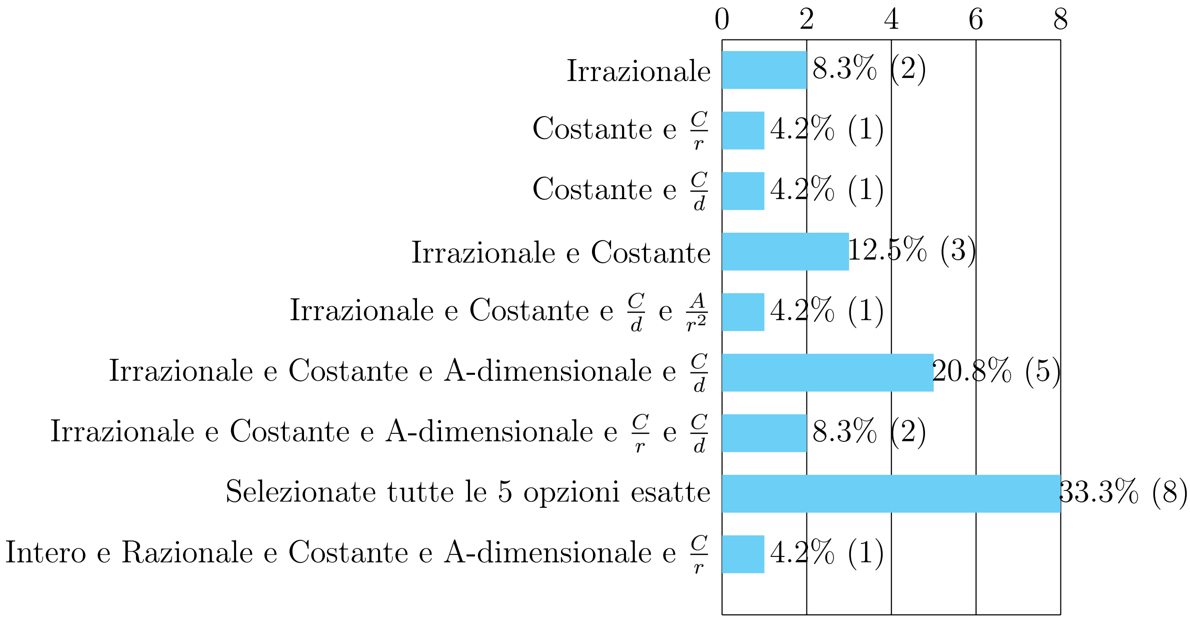
In questa sezione si analizzano le risposte date dagli studenti nel questionario finale alle domande presenti anche nel questionario iniziale. Le domande cinque, sei, sette, otto e nove verranno analizzate assieme all'intervista della professoressa Alboni. I questionari compilati sono ventiquattro, in quanto durante l'ultima lezione due alunni erano assenti. Non è stato chiesto agli assenti di compilare il questionario finale dato che nell'ultima lezione si è chiuso il cerchio sulle conoscenze riguardanti Pi Greco esponendo la sua irrazionalità e ripercorrendo il percorso fatto in classe.

Domanda 1: Pi Greco è: (puoi scegliere più di una risposta)

A differenza del questionario iniziale nella domanda è stata inserita tra le opzioni: a-dimensionale, visto che durante il primo laboratorio è emersa proprio questa caratteristica di Pi Greco.

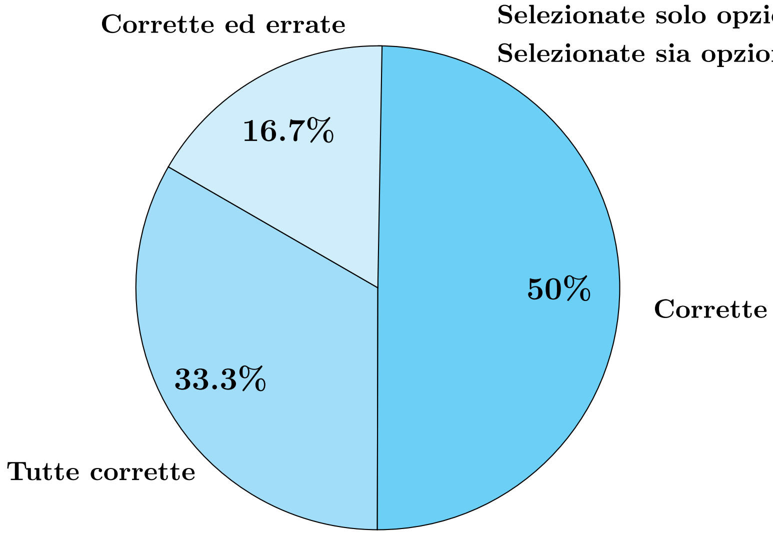


Nel grafico sono state inserite solo le percentuali ed il numero di risposte date nel questionario finale. Si nota un miglioramento generale della classe sulle conoscenze riguardanti Pi Greco. Essendo la domanda a scelta multipla, di seguito si riporta il grafico del set di opzioni selezionato in ogni questionario finale.



Di seguito si inserisce il grafico in cui si mostra quanti studenti hanno selezionato solo opzioni corrette e quanti hanno selezionato opzioni sia corrette che errate.

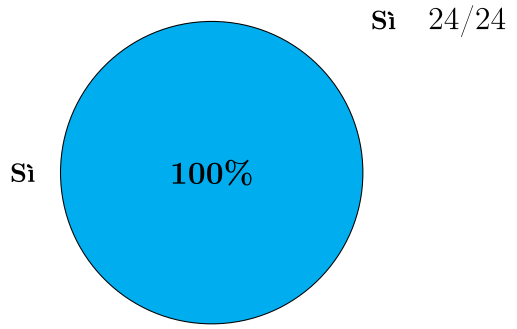
Selezionate tutte le opzioni corrette	8/24
Selezionate solo opzioni corrette	12/24
Selezionate sia opzioni corrette che errate	4/24



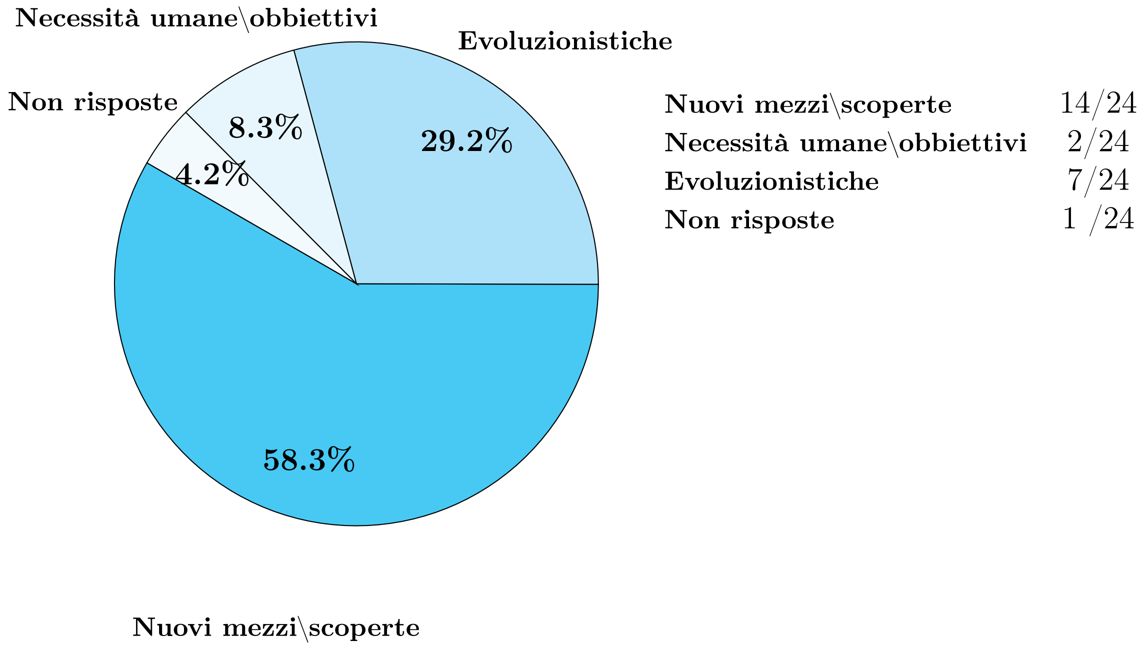
Rispetto al questionario iniziale nessun alunno ha selezionato solo opzioni errate, inoltre otto alunni (33.3%) hanno selezionato tutte le opzioni corrette presenti tra le possibili scelte. Tra gli studenti che hanno selezionato sia risposte esatte che errate si trova un questionario in cui Pi Greco viene definito sia come intero che come razionale. Visionando il questionario di questo studente si nota che alla domanda in cui si chiede qual'è la cosa che gli è sembrato di aver capito meglio viene data come risposta: *"Il fatto chè il π sia infinito"*. Nelle altre risposte che contengono opzioni sia corrette che errate l'errore è sempre dato dall'aver definito Pi Greco come $\frac{C}{r}$.

Domanda 2 e 3: La matematica si è evoluta nel tempo? Motiva la risposta precedente.

Già nel questionario iniziale ventiquattro studenti su ventisei avevano risposto positivamente a questa domanda. Nel questionario finale, in cui si ricorda che solamente ventiquattro studenti su ventisei erano presenti, tutti hanno sostenuto la tesi secondo cui la matematica si sia evoluta nel tempo.



Per l'analisi delle motivazioni sono state utilizzate le quattro categorie individuate nel questionario iniziale (si veda Paragrafo 5.1 per la loro descrizione).



Il numero di risposte per categoria non è cambiato molto rispetto al questionario iniziale. Tra le risposte, date alla domanda, cinque studenti (20.8%) hanno fatto riferimento all'evoluzione del numero Pi Greco visto durante il percorso.

> *"La matematica si è evoluta infatti col passare del tempo ci sono stati cambiamenti nel modo di definire e calcolare il π"*

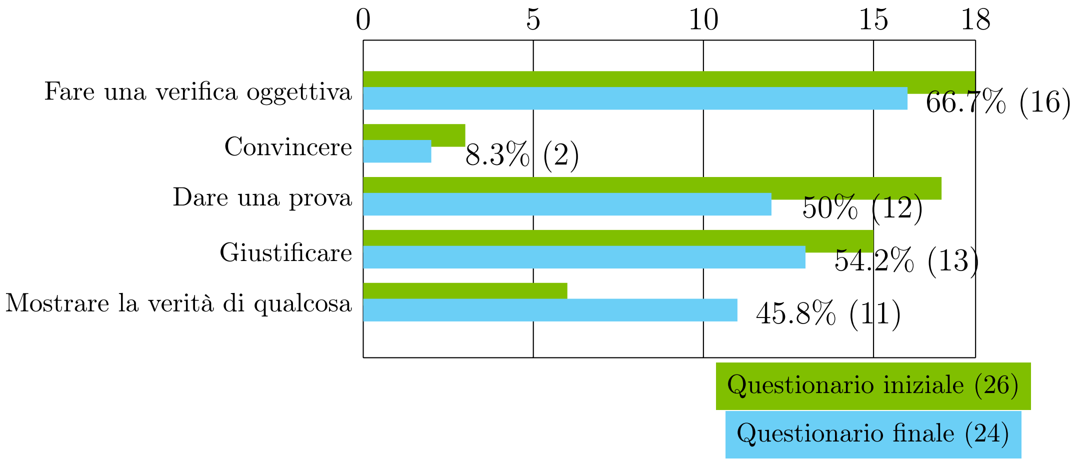
> *"A partire dai Sumeri abbiamo visto come le conoscenze della matematica sono variate e sono diventate più specifiche. Ad esempio, si è arrivati ad un valore sempre più preciso e meno approssimato del pi greco e si è stati in grado di dimostrare le conoscenze a cui si è arrivati."*

Inoltre in sei risposte (25%) è emerso il concetto del perfezionamento e della maggiore precisione dei risultati ottenuti con il tempo.

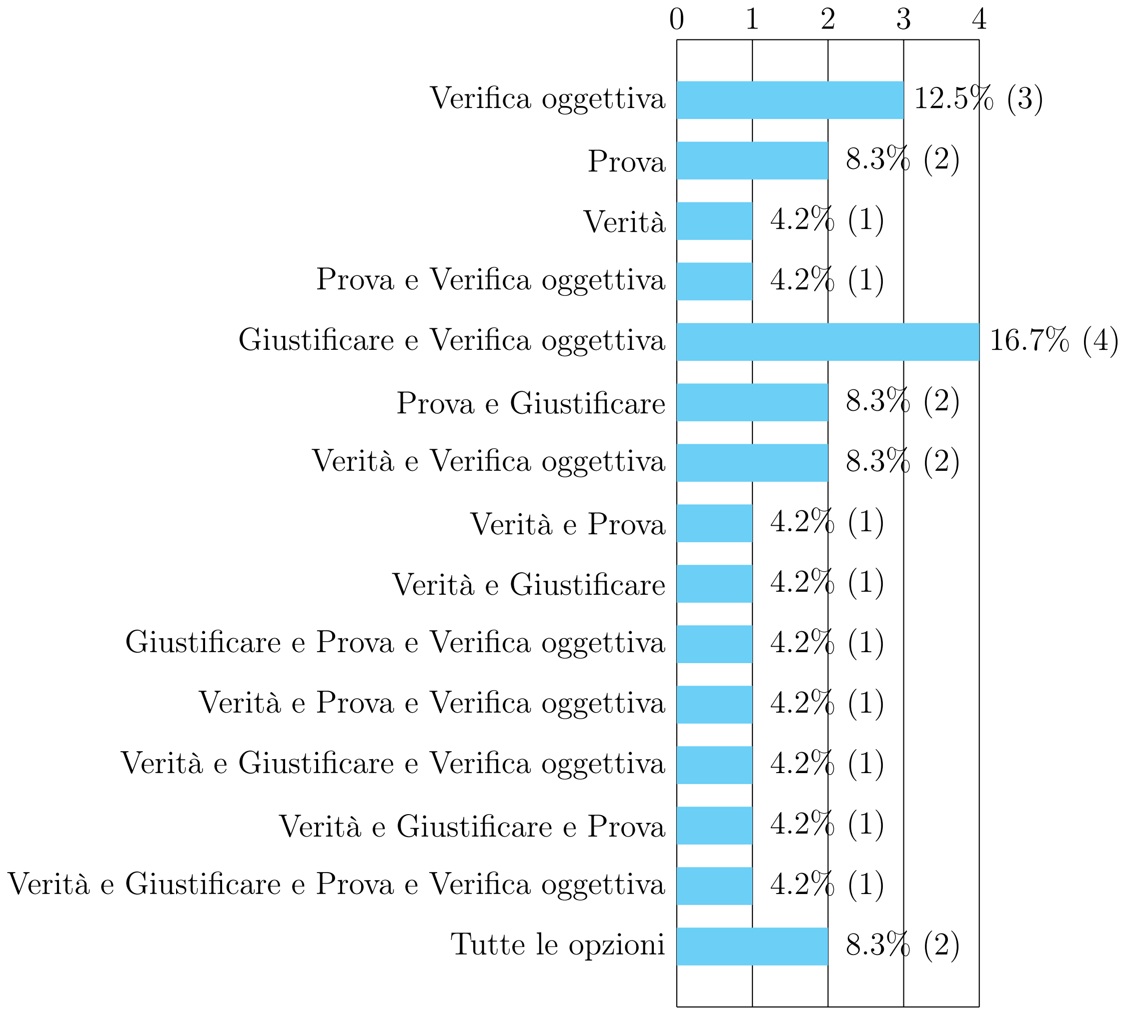
> *"Si, la matematica ha subito continue evoluzioni nella storia. Infatti, come abbiamo visto con il pi greco, è stata utilizzata per diversi obiettivi, con metodi differenti (assiomatico, di esaustione...) e sempre con più precisione. "*
>
> *"Si, abbiamo aprofondito molto questo tema e si puo notare come gli antichi abbiano scoperto concetti che successivamente abbiamo perfezionato "*

Domanda 4: Cosa vuol dire secondo te dimostrare in matematica? (puoi scegliere più di una risposta)

Nel grafico sottostante sono riportate il numero delle risposte e le loro percentuali relative al questionario finale. Inoltre sono inserite il numero di risposte, selezionate per ogni opzione, del questionario iniziale, così da poter effettuare un confronto.



In generale si può notare una maggiore percezione della dimostrazione legata al concetto di verità. Mentre tutte le altre opzioni sono diminuite rispetto al questionario iniziale. Essendo la domanda a scelta multipla risulta interessante, come fatto per il questionario iniziale, vedere quanti studenti hanno selezionato un determinato set di opzioni, questo verrà mostrato nel grafico seguente.



I set di risposte maggiormente selezionati dagli studenti contengono, come nel questionario iniziale, l'idea della dimostrazione come una verifica oggettiva, questa volta selezionata assieme al concetto di giustificazione. L'attività svolta in classe su Euclide (si veda Paragrafo 3.4.1) concentrata sulla dimostrazione della proposizione (XII,2) potrebbe aver mutato l'idea degli studenti portandoli a individuare la dimostrazione come una giustificazione dei risultati.

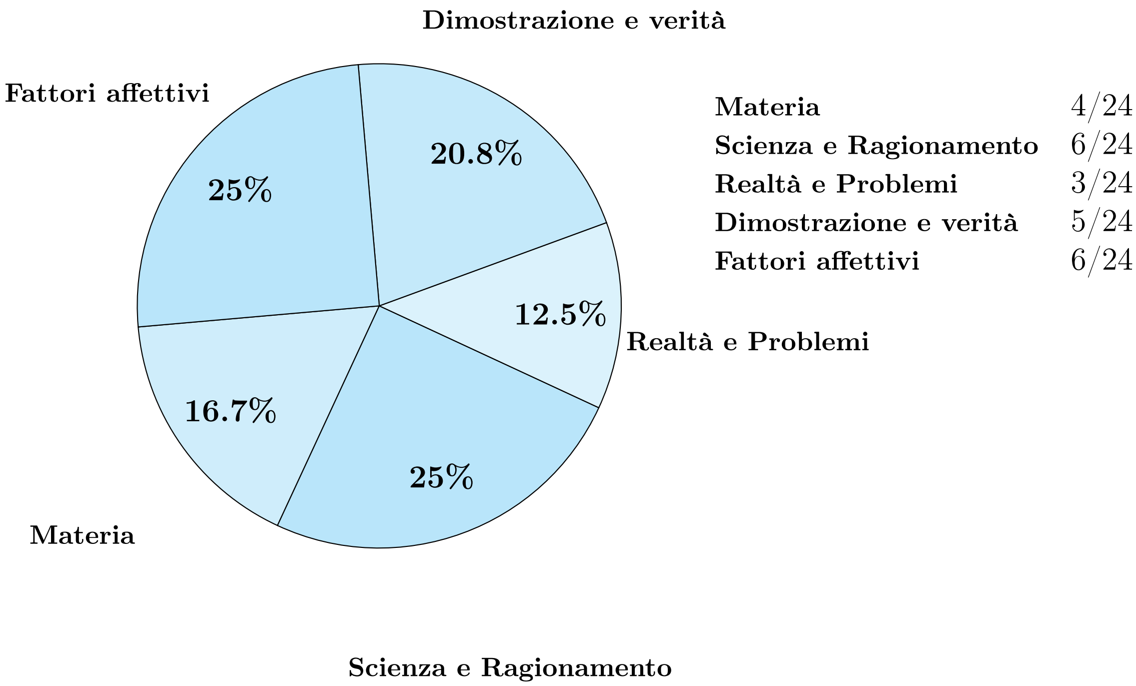
Domanda 10: Che cos'è per te la matematica?

Nel questionario iniziale le risposte sono state catalogate in quattro categorie: materia, scienza e ragionamento, realtà e problemi e non risposte. Esaminando il questionario finale la categoria della *non risposte* non è più presente e si sono aggiunte due categorie che verranno esplicitate di seguito. Si rimanda al Paragrafo 5.1 per la descrizione delle categorie: materia, scienza e ragionamento e realtà e problemi.

1. Dimostrazione e verità: rientrano in questa categoria le risposte che inquadrano la matematica come la capacità di dimostrare, *"Per me la matematica è dimostrare qualcosa che sembra impossibile o molto difficile e riuscirlo a spiegare e giustificare"*, *"Trovare una dimostrazione alle proprie convinzioni"* o che inquadrano la matematica come una verità, *"Verità"*.

2. Fattori affettivi: rientrano in questa categoria le risposte che specificano i sentimenti provati dai ragazzi nei confronti della matematica, *"Noia"*, *"Devo ammettere che non la disprezzo, talvolta non la capisco appieno ma non mi arrendo. È come una sfida, ma la soddisfazione che provi quando risolvi da solo un problema, è impagabile"*

Di seguito si riporta un grafico che sintetizza le risposte date dagli studenti.



Risulta interessante notare che siano emersi, in alcuni studenti, alla fine del percorso i sentimenti nei confronti della matematica.

> *"Per me, la matematica è qualcosa che è impossibile da capire al 100%"*

> *"È qualcosa di indefinibile ma comunque complicata e rigida"*

Sentimenti nei confronti della matematica sono emersi anche in risposte che la identificano come una materia scolastica.

> *"una materia che purtroppo non riesco a comprendere"*

> *"Una materia scolastica piena di argomenti molto difficili ma, se capiti, coinvolgenti"*

> *"Una materia che fin da quando ero piccola non mi piaceva. Oggi sto iniziando ad apprezzare la sua logica anche se alcune volte ancora non la capisco"*

5.3 Questionario finale (seconda parte) ed intervista alla docente

In questa sezione si analizzeranno le domande rimanenti presenti nel questionario finale, inserite con lo scopo di raccogliere le opinioni dei ragazzi riguardo al percorso svolto in classe. Assieme a queste domande verrà inserita, in questa sezione, l'intervista proposta alla docente della classe, volta a raccogliere le sue opinioni ed i suoi consigli riguardo al progetto.

Domanda 5: Cosa ti è piaciuto fare durante questo percorso?

le risposte presenti nei questionari possono essere raggruppate in quattro categorie illustrate di seguito.

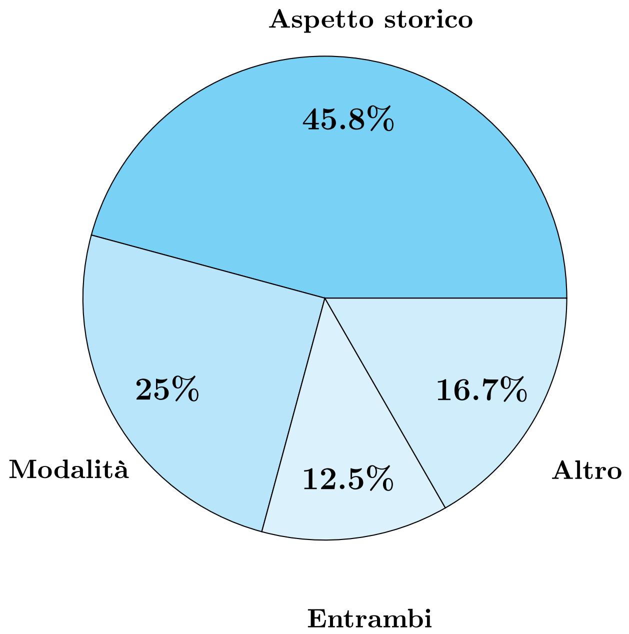
1. Aspetto storico: in questa categoria rientrano le risposte in cui i ragazzi scrivono di aver apprezzato lo scoprire l'evoluzione storica della matematica, *"scoprire l'aspetto storico della matematica "*, di Pi Greco, *"Scoprire l'origine e l'evoluzione del pi greco"* oppure *"Conoscere l'intero percorso tutte le difficoltà che hanno portato a stabilire il valore di pi greco come lo conosciamo oggi"*.

2. Modalità: in questa categoria rientrano le risposte in cui i ragazzi affermano di aver apprezzato il lavoro a gruppi, *"discutere le nostre idee in gruppo"* e il confronto paritetico, *"Mi è piaciuto tantissimo poter discutere di matematica apertamente, come materia di confronto e dibattito: supponendo varie ipotesi, confrontandomi con i miei coetanei, scoprendo caratteristiche molto interessanti, che in una normale lezione non sono considerati, sul π"*.

3. Entrambi: in questa categoria rientrano le risposte che hanno sottolineato il gradimento sia delle modalità che dell'aspetto evolutivo della matematica o del Pi Greco, *"Scoprire come si è arrivati al nostro pi greco, vedere come calcolavano i popoli antichi e lavorare in gruppo"*.

4. Altro: rientrano in questa categoria le risposte che hanno sottolineato gradimento per altri aspetti del progetto, *"Mi è piaciuta la parte di calcolo"*, *"Il video fatto vedere durante l'ultima lezione"* o che non hanno risposto.

Il grafico seguente mostra la suddivisione delle risposte date dagli alunni.



Aspetto storico	11/24
Modalità	6/24
Entrambi	3/24
Altro	4/24

L'aspetto storico sembra aver generato interesse negli studenti che hanno sottolineato nelle risposte il piacere di aver scoperto l'evoluzione della matematica e del numero preso in considerazione in questo percorso. Anche le modalità laboratoriali hanno riscontrato apprezzamento da parte degli studenti, sopratutto il confronto paritetico e la discussione in classe come momento per apprendere.

> *"lavorare con i compagni e confrontarmi poi con la prof per capire meglio i procedimenti vari"*

> *"Dimostrare delle cose che non sembravano alla mia portata con l'aiuto dei miei compagni"*

Domanda 6: Che cosa cambieresti di questo percorso?

In questa domanda si chiedeva agli studenti di proporre suggerimenti per il miglioramento del progetto fatto assieme. Purtroppo la maggior parte degli studenti (20/24, 83.3%) ha risposto che non cambierebbe nulla. Solo una tra queste risposte riporta un suggerimento:

> *"Non cambierei nulla del percorso di per sé. Sarebbe bello poter seguire un percorso simile anche per altri aspetti della matematica"*

Questa risposta risulta significativa sottolineando di aver apprezzato le metodologie, richiedendo che vengano utilizzate anche per altri argomenti, mettendo in luce una certa efficacia.

Le rimanenti quattro risposte, essendo poche, si riportano di seguito:

> *"La difficoltà di alcuni compiti dati da svolgere a casa da soli"*
> *"alcuni problemi che mi sono risultati troppo difficili"*

Due risposte sottolineano la difficoltà di alcune richieste presenti nelle schede dei laboratori. Non viene specificato quali laboratori sono stati più difficili, ma questa difficoltà è emersa anche durante la lezione in classe.

"La spiegazione un po' lenta"

In questa risposta non viene specificato se con il termine spiegazione è intesa la parte di spiegazione del contesto storico o se è intesa la parte di spiegazione dei procedimenti utilizzati dalle varie civiltà.

"avrei preferito fare cose più pratiche piuttosto che calcoli, come la prima esperienza"

In questa risposta emerge che l'alunno ha apprezzato maggiormente il primo laboratorio in cui si sono impiegati materiali da manipolare piuttosto che gli altri laboratori.

Domande 7 e 8: Qual è la cosa che ti sembra di aver capito meglio? Qual è la cosa che ti sembra di aver capito peggio?

Le risposte date a queste domande sono di tipologie diverse, la maggior parte ha fatto riferimento agli argomenti svolti nelle lezioni, altri invece hanno sottolineato parti specifiche o generali del percorso.

Si individuano le seguenti categorie:

1. Babilonesi: rientrano in questa categoria le risposte che hanno fatto riferimento alla lezione riguardante la civiltà Babilonese.

2. Egizi: rientrano in questa categoria le risposte che hanno fatto riferimento alla lezione riguardante la civiltà Egizia.

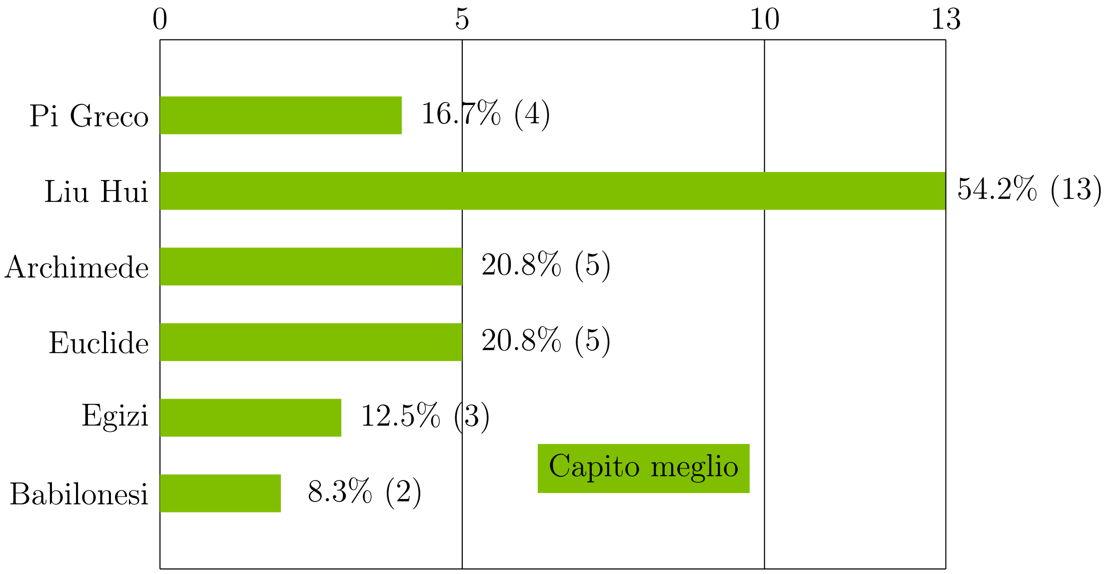
3. Euclide: rientrano in questa categoria le risposte che hanno fatto riferimento alla lezione sul matematico alessandrino.

4. Archimede: rientrano in questa categoria le risposte che hanno fatto riferimento alla lezione sul matematico siracusano.

5. Liu Hui: rientrano in questa categoria le risposte che hanno fatto riferimento alla civiltà cinese ed al matematico Liu Hui.

6. Pi Greco: rientrano in questa categoria le risposte che hanno specificato aspetti di Pi Greco che hanno capito meglio o peggio, *"Il fatto che il π sia infinito"*, *"La conclusione: cos'è il pi greco e i calcoli che sono stati fatti per averlo ottenuto"*

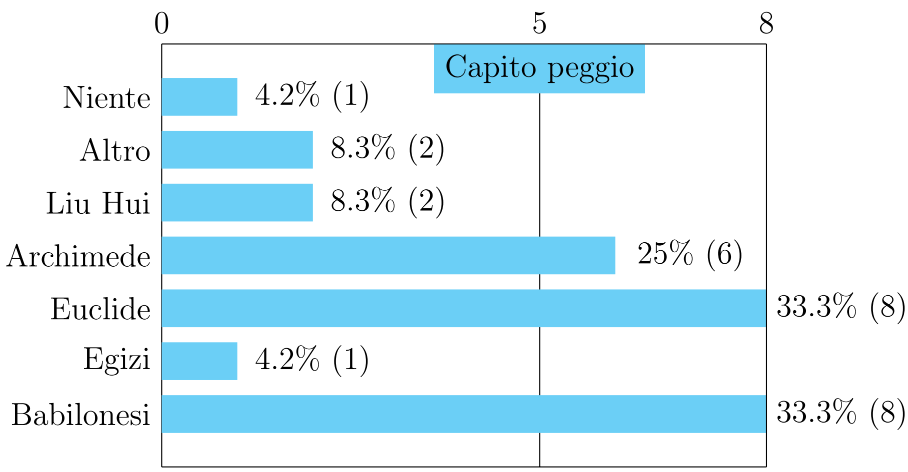
Dato che alcune risposte hanno indicato più di un argomento si seguirà lo schema proposto nell'analisi dei quesiti a risposta multipla, individuando quante risposte per ciascuna categoria sono state date. Le risposte in cui si trova scritto *"La prima parte "* sono state interpretate segnando sia i Babilonesi, che gli Egizi, mentre le risposte in cui si trova scritto *"Forse le ultime lezioni"* sono state interpretate segnando Euclide, Archimede e Liu Hui. Questa interpretazione deriva dalla suddivisione dello svolgimento temporale delle lezioni, descritto all'inizio del capitolo.



La maggior parte degli studenti ritiene di aver capito meglio l'ultima lezione svolta sui cinesi e Liu Hui. Tra le risposte in cui gli studenti spiegano cosa hanno capito peggio, non ci sono più risposte nella categoria Pi Greco, ma si individuano risposte che necessitano l'inseriscono di due nuove categorie:

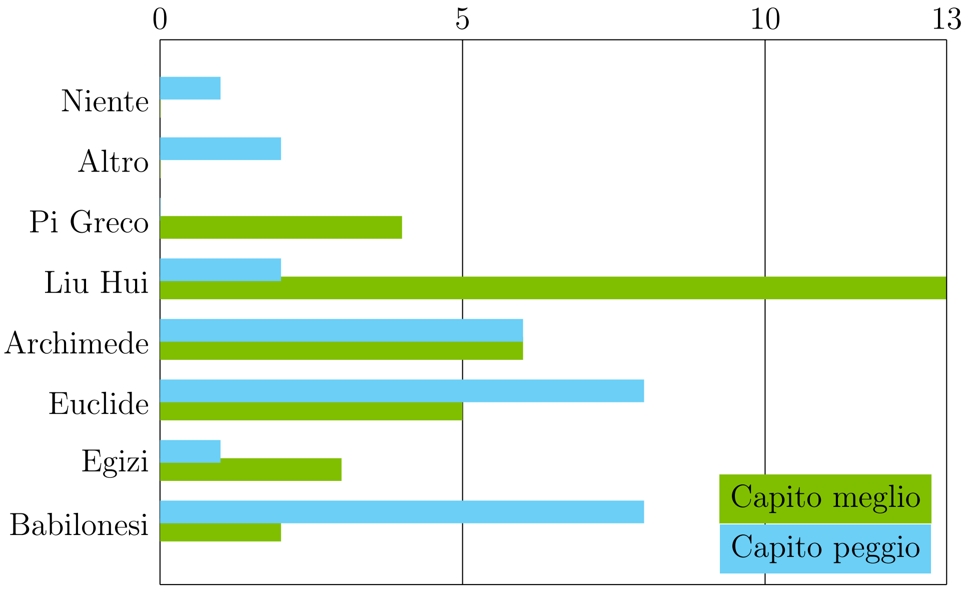
1. Altro: in questa categoria si trovano due risposte, *"La relazione tra le varie forme geometriche (durante gli esercizi a gruppi)"*, probabilmente fa riferimento alle relazioni tra i poligoni regolari ed il cerchio, mentre l'altra risposta è *"alcuni problemi di pitagora"*, non si capisce a cosa fa riferimento dato che la parte relativa a Pitagora non è stata vista nella lezione dei cinesi.

2. Niente: è presente una risposta in cui l'alunno sostiene che non c'è niente che ha capito peggio.[17]



Il grafico seguente mette a confronto gli argomenti che gli studenti dicono di aver capito meglio e peggio.

[17]Visionando il questionario si percepisce che sia stato compilato senza troppo impegno dato che le risposte sono singole parole senza nessuna spiegazione o motivazione. È lo stesso questionario in cui alla domanda in cui viene chiesto cosa gli sia piaciuto fare durante questo percorso risponde *"si"*.



L'alto numero di risposte che indicano la lezione sul Pi Greco dei Babilonesi come argomento capito peggio del percorso, può essere dovuto al fatto che la scheda è stata lasciata per casa visto la mancanza di tempo in classe. Il fatto che lo svolgimento sia stato individuale senza la presenza di un insegnante a cui fare domande di chiarimento e senza il confronto dei compagni può aver reso il completamento dell'attività più difficile. Come sottolineato nel Paragrafo 4.2.1 molti degli studenti non hanno completato la scheda lasciata per casa e quindi è probabile che solamente seguire il ragionamento di quelli che avevano svolto il compito a casa sia risultato più difficile. Dal grafico si evince, come si è sottolineato anche nel Paragrafo 4.3, che anche la lezione su Euclide sia stata capita peggio dagli studenti. La difficoltà di comprensione del testo emersa maggiormente durante questa lezione sicuramente è stata la causa della difficoltà dei ragazzi. Anche Archimede sulla scia di Euclide è stato secondo alcuni studenti difficile da capire, ma come si evince dal grafico per altrettanti studenti invece risulta l'argomento capito meglio.

L'intervista alla docente è semi-strutturata, nel senso che sono stati individuati tre ambiti di cui si voleva avere un feedback e sono state proposte delle domande per ogni ambito come punto di partenza per un confronto informale. I tre ambiti che si vogliono indagare sono descritti di seguito e si specificano anche le domande proposte inizialmente alla docente:

1. Contenuto e metodologie: *"Cosa cambierebbe per migliorare il percorso?"*, *"Che cosa secondo lei ha funzionato nell'attività e cosa no?"*, *"Le metodologie usate sono state adeguate?"*.

2. Feedback della classe: *"Come ha visto la classe rispetto al solito?"*, *"Gli alunni sono stati più attivi?"*, *"Li ha visti più coinvolti o meno coinvolti rispetto al solito?"*

3. Opinione riguardo l'approccio storico e laboratoriale: *"Qual è la sua opinione riguardo l'approccio storico e quello laboratoriale?"*

L'intervista si è svolta per ambiti, le domande di ogni ambito sono state proposte tutte insieme alla docente che poi è stata libera di articolare le risposte come meglio credeva. Di seguito si riportano le risposte per ambiti date dalla docente.

Per quanto riguarda le metodologie è emerso che la metodologia utilizzata è risultata adatta secondo la docente, che ha sottolineato il fatto che ci sia stato il giusto equilibrio tra i diversi momenti, cioè tra il lavoro di gruppo, la presentazione e sistematizzazione ed i momenti di lavoro autonomo lasciato per casa. Per quanto riguarda i contenuti l'inserimento della storia ha catturato l'attenzione, ma la docente suggerisce la riduzione e semplificazione di alcuni contenuti trattati. La riduzione sottolineata dalla docente riguarda non le tempistiche, ma le quantità dei contenuti cercando di ridurre ogni lezione per non esagerare nell'inserimento di nozioni. La necessità di riduzione e semplificazione è emersa anche dai questionari dei ragazzi, che hanno sottolineato la difficoltà di alcuni compiti. Inoltre il fatto che nella domanda in cui si indagava cosa avevano capito peggio siano state indicate da molti studenti le stesse lezioni, indica che sicuramente le lezioni devono essere ridimensionate e ristrutturate per un migliore apprendimento.

Per quanto riguarda il feedback della classe la docente ha notato un maggiore coinvolgimento rispetto alla lezioni tradizionali notando partecipativi anche alunni che solitamente non lo sono. Questa maggiore partecipazione da parte di tutti gli alunni è stata notata anche dagli stessi studenti. Secondo la docente il maggiore coinvolgimento è dovuto sia alla metodologia (lavoro a gruppi) che alla struttura delle schede le cui richieste favorivano un coinvolgimento. Le difficoltà avute da alcuni studenti, come sottolineato anche nella descrizione delle lezioni tenute in classe ad inizio capitolo, secondo la docente sono dovute per alcuni studenti a difficoltà di comprensione della materia, mentre per una minoranza sono dovute ad un'immaturità personale. La docente ha sottolineato nell'intervista che il fatto che le lezioni fossero tenute da una persona esterna ha fatto sì che gli studenti prendessero con la giusta serietà il lavoro da svolgere, nonostante non ci fosse una verifica finale. Questo ha portato gli studenti a lavorare per lavorare e non con lo scopo finale di superare la verifica. Alcuni studenti, come emerso dal questionario, hanno avuto difficoltà nello svolgere alcuni compiti, ma allo stesso tempo hanno dimostrato la volontà di svolgerli, chiedendo anche aiuto ai genitori nei compiti per casa. La serietà mostrata da alcuni studenti nonostante la mancanza di una valutazione finale rientra nella *competenza personale, sociale e capacità di imparare a imparare* una delle otto competenze chiave sancite dall'Unione europea.

Per quanto riguarda gli approcci proposti in questo modulo la docente è convinta che l'approccio storico, oltre ad essere adatto per la richiesta di interdisciplinarietà dell'esame di stato, sia utile agli studenti per mostrare l'evoluzione della matematica nel tempo. Ovviamente la docente, come si sottolinea anche nel Capitolo 1, sostiene che non si possa utilizzare questo approccio con tutti gli argomenti in primo luogo per la manca di tempo ed in secondo luogo perché non tutti gli argomenti si prestano all'approccio storico. Bisogna pensare all'interno della programmazione dei moduli che utilizzino l'approccio storico. Anche per l'approccio laboratoriale la docente sostiene fermamente la sua importanza. Sopratutto l'importanza del lavoro paritetico e di confronto che i ragazzi svolgono in gruppo. Anche dai questionari degli studenti emerge un apprezzamento dello svolgimento dei lavori a gruppi. Gli stessi studenti sottolineano nei questionari l'importanza della discussione e del confronto con i compagni. Secondo la docente entrambi gli approcci, storico e laboratoriale, dovrebbero essere integrati nella didattica della matematica, trovando il giusto equilibrio, spazio e tempo con la didattica frontale, che non deve essere sostituita da questi approcci, ma integrata con essi.

5.4 Conclusioni

Nonostante il progetto *Alla scoperta di Pi Greco*, esposto in questa tesi, sia stato sperimentato in una sola classe se ne possono sottolineare aspetti positivi e negativi traendo conclusioni quantomeno qualitative. Un obbiettivo del progetto (si veda Capitolo 3) era quello di contrastare la visione della matematica come una materia a-temporale ed a-storica. In particolare attraverso lo studio di Pi Greco nella storia, si voleva rendere gli studenti consapevoli dell'evoluzione temporale dei concetti matematici. Rispetto a questo è stato particolarmente interessante osservare che seppur già prima dell'inizio del percorso gli studenti avessero idea che la matematica si fosse evoluta nel tempo, al termine del progetto le loro argomentazioni a supporto di questa tesi sono diventate più specifiche. Infatti nel questionario iniziale utilizzano risposte del tipo: *"tutto si evolve col tempo"*, alla fine invece portano esempi del percorso fatto insieme: *con il tempo si è evoluta perché è stata oggetto di studi di più civiltà, che hanno apportato il proprio contributo ad essa*. Quindi non necessariamente l'uso della storia ha risposto al *justification problem* degli studenti, ma per lo meno gli ha dato uno strumento per giustificazione l'evoluzione matematica. Il miglioramento dei risultati nella domanda riguardante Pi Greco (si veda Paragrafo 5.2), fa pensare che aver investito tempo nel sottolineare la storia di Pi Greco ed il suo processo evolutivo abbia permesso agli studenti di apprendere e approfondire tale concetto. Tale pensiero è rafforzato dal fatto che la maggior parte degli studenti abbia richiamato in diverse risposte, del questionario finale, parti delle lezioni e dei laboratori.

L'efficacia della storia sicuramente è stata amplificata dall'aver deciso di utilizzare attività laboratoriali durante tutto il percorso. Il laboratorio ha permesso agli studenti di toccare con mano la matematica di un certo periodo storico, rendendo maggiore l'immersione nel contesto culturale dell'epoca trattata. Come emerso dal questionario finale, anche gli studenti hanno apprezzato il lavoro di gruppo, riuscendo a liberarsi dalla paura di dire qualcosa di sbagliato. Dall'intervista con la docente è emerso che il confronto paritetico li ha portati ad essere più partecipi al lavoro, congetturando e discutendo di matematica apertamente. Tali osservazioni fanno pensare che il progetto, come si proponeva, sia riuscito a suscitare interesse e curiosità per la matematica. La storia della matematica ed il laboratorio hanno permesso agli studenti di sperimentare in prima persona il processo di fare matematica realizzando che questa è un'attività umana; in tal modo si è superato il paradigma scolastico in cui viene insegnato solamente il prodotto finale di una teoria, tralasciando le ipotesi e la fatica necessarie per formularla (si veda Paragrafo 1.2.1). Gli studenti si sono trovati a dover mettere in campo competenze differenti rispetto a quelle che sono abituati a dover utilizzare durante una lezione frontale. Hanno sperimentato l'incertezza delle risposte, la necessità di avere una prova di verità delle loro ipotesi ed imparato a lavorare in gruppo.

Il primo laboratorio proposto nel progetto (si veda Sezione 3.2.1) prevede un'attività pratica di manipolazione di oggetti: nella sperimentazione non si sono evidenziate particolari criticità ed è stato apprezzato anche nel questionario finale. La manipolazione di oggetti ha permesso agli alunni di imparare matematica "mettendo le mani in pasta". Gli altri laboratori (descritti nel Capitolo 3) che prevedono l'introduzione e il lavoro sui documenti storici, nella sperimentazione si sono rivelati più critici, portando a galla una difficoltà generale di comprensione testuale, confermata sia dalla docente di matematica che dalla collega di italiano. Questa mancanza, forse dovuta anche ai due anni di DAD che gli studenti hanno affrontato a causa dell'emergenza Covid-19, deve essere colmata e anche la matematica deve contribuire a tale scopo; per questo le attività proposte, seppur faticose, possono essere utili in tal senso: trovarsi in difficoltà con un testo in lingua antica, anche se tradotto, richiede uno sforzo di comprensione, ma può portare giovamento anche alla comprensione testuale dell'italiano odierno.

Come segnalato dalla docente la struttura delle unità didattiche attraverso la storia della matematica e l'utilizzo della metodologia laboratoriale hanno messo in luce l'interdisciplinarietà richiesta anche all'esame di stato. Gli stessi alunni, in alcune unità didattiche, durante le lezioni frontali sulla storia del periodo preso in considerazione, hanno fatto collegamenti con quanto visto in storia ed in latino. Progettare momenti interdisciplinari integrando la matematica, con la storia, e perché no anche con altre materie, permette di mostrare agli alunni l'unità del sapere che stanno apprendendo.

Infine si può fare un commento su quale contributo alle competenze chiave sancite dall'Unione europea possa dare questo progetto. Chiaramente per quanto già spiegato, lavora sulla *competenza matematica e competenza in scienze, tecnologie e ingegneria*, ma anche sulla *competenza personale, sociale e capacità di imparare a imparare* e *competenza alfabetica funzionale.* Il tipo di metodologia e le attività proposte contribuiscono alla costruzione della *competenza personale, sociale e capacità di imparare a imparare* che

> consiste nella capacità di riflettere su sé stessi, di gestire efficacemente il tempo e le informazioni, di lavorare con gli altri in maniera costruttiva, di mantenersi resilienti e di gestire il proprio apprendimento e la propria carriera. [21, p.C 189/10]

Infatti nelle attività laboratoriali gli studenti si sono dovuti confrontare con la gestione del tempo lasciato per svolgere i laboratori, e con una parziale gestione del personale apprendimento. La serietà, di alcuni studenti, sia nel lavoro da svolgere in classe che in quello lasciato per casa, mostra la loro capacità e volontà di *imparare ad imparare* e di gestire il proprio apprendimento. Inoltre nelle *conoscenze, abilità e atteggiamenti essenziali legati a tale competenza* si trova scritto:

> Ne fa parte la capacità di imparare e di lavorare sia in modalità collaborativa sia in maniera autonoma, di organizzare il proprio apprendimento e di perseverare, di saperlo valutare e condividere, di cercare sostegno quando opportuno e di gestire in modo efficace la propria carriera e le proprie interazioni sociali.

Gli studenti, di questa classe, hanno sottolineato nel questionario finale, Sezione 5.3, di aver apprezzato la modalità laboratoriale ed in particolare il lavoro a gruppi. Inoltre dall'intervista alla docente è emerso che nelle difficoltà riscontrate nei compiti lasciati per casa, gli alunni non si sono scoraggiati, ma hanno cercato sostegno e chiesto aiuto ai genitori. Imparare ad imparare ha portato gli studenti a riflettere, congetturare, confrontarsi, riordinare le idee sulle proprie conoscenze ..., mentre il lavoro sui testi e sulla comprensione testuale ha lavorato sulla *competenza alfabetica funzionale.*

> La competenza alfabetica funzionale indica la capacità di individuare, comprendere, esprimere, creare e interpretare concetti, sentimenti, fatti e opinioni, in forma sia orale sia scritta, utilizzando materiali visivi, sonori e digitali attingendo a varie discipline e contesti. [21, p. C189/8]

I documenti storici, nonostante alcune difficoltà riscontrate dagli studenti, hanno e possono agire come motore per le *conoscenze, abilità e atteggiamenti essenziali legati a tale competenza*, infatti nel documento [21] si specifica:

> Questa competenza comprende anche la capacità di distinguere e utilizzare fonti di diverso tipo, di cercare, raccogliere ed elaborare informazioni, di usare ausili, di formulare ed esprimere argomentazioni in modo convincente e appropriato al contesto, sia oralmente sia per iscritto. Essa comprende il pensiero critico e la capacità di valutare informazioni e di servirsene.

Come sottolineato nell'introduzione e come emerso anche dall'intervista alla docente, la storia presentata attraverso un progetto di queste dimensioni, non può entrare più di una volta all'anno in una programmazione per questioni legate alla gestione del tempo. Inserire, però, almeno un progetto all'anno in cui insegnare la matematica attraverso la sua storia e utilizzare diverse metodologie didattiche rispetto alla solita lezione frontale, aiuta a stimolare i ragazzi rendendoli consapevoli che imparare matematica non vuol dire solamente riprodurre esercizi e memorizzare formule.

La matematica è una materia umana come me e il lettore di questa tesi e proprio come un uomo possiede tante sfaccettature che dovrebbero essere tutte conosciute prima che uno studente la giudichi, creandosi preconcetti difficili da sradicare. In fondo ci hanno sempre insegnato a non giudicare un libro dalla sua copertina ed allo stesso modo gli studenti non dovrebbero giudicare la matematica senza conoscere la sua storia ed assaporare la sua meravigliosa e semplice umanità. Alla fine di questo percorso l'idea che la matematica senza la sua storia sia un meraviglioso corpo senz'anima, sembra ancora più attuale e reale. L'inserimento della storia della matematica nella pratica d'aula potrebbe mostrare la rilegatura, l'incipit, i flashback presenti in quel famoso libro, la cui copertina piena di formule potrebbe spaventare a colpo d'occhio. Forse gli studenti non ne sono consapevoli, ma sono pronti per conoscere ogni piega, ogni nota, ogni immagine, ogni storia, ogni realtà ed ogni errore presente in questo libro attendendo l'istante in cui resteranno incantati da quell'imprevedibile umanità.

Capitolo 6

Possibili sviluppi

Il progetto di questa tesi è stato pensato per il primo biennio della scuola di secondaria di secondo grado e prende in considerazione l'ambito *Geometria*, presente nelle Indicazioni Nazionali. Questa scelta ha portato a considerare la nascita di Pi Greco nelle civiltà arcaiche mondiali, in accordo con quanto avvenuto storicamente e con il programma di storia che gli alunni affrontano in questi primi anni di scuola superiore. Molte scoperte riguardanti questa costante sono avvenute nei secoli successivi al periodo considerato, questo può suggerire la possibilità di continuare il progetto, proposto in questa tesi, sviluppando un percorso verticale. Come rappresentato in tabella 6.1, si potrebbe pensare di considerare in ciascun periodo, individuato dalle Indicazioni Nazionali, un diverso ambito, in modo da seguire i passi storici ed evolutivi di Pi Greco e della dimostrazione matematica. In questo modo la conoscenza di questo numero potrebbe essere estesa a tutto il periodo dei cinque anni.

Annualità	Ambito	Periodo storico
Primo Biennio	Geometria	3000 a.C. 600 d.C.
Secondo Biennio	Aritmetica e Algebra	600 1900
Quinto anno	Dati e Previsioni	1900 Oggi

Tabella 6.1: Possibili sviluppi del progetto *Alla scoperta di Pi Greco* nell'arco dei cinque anni di scuola secondaria di secondo grado.

Più precisamente nel secondo biennio, seguendo i passi storici e le scoperte su Pi Greco, si potrebbe analizzare la parte più algebrica legata a questo numero e conseguentemente la sua irrazionalità e la sua trascendenza. Il quinto anno, invece, si potrebbero vedere aspetti legati alla sua natura probabilistica e un approccio più computazionale. In tale ottica nel secondo biennio e nel quinto anno si potrebbe mettere in luce non solo la cronologia relativa a Pi Greco, ma anche l'evoluzione dimostrativa che lo ha accompagnato.

Di seguito si proporranno alcuni spunti relativi a possibili attività per il secondo biennio e il quinto anno. Per farlo, si riporterà un riassunto sommario della storia di Pi Greco seguendo [6, 7, 8, 9, 10, 33] e inserendo dei riquadri con idee e riferimenti per la loro costruzione.

Secondo biennio

Questo misterioso $3,14159\ldots$,
che entra per ogni porta e finestra,
e scende da ogni camino
Augustus De Morgan

Dopo la caduta di Cartagine nel 146 a.C. il Mediterraneo diventò un "lago romano". Per quanto riguarda il mondo romano, ad eccezione di Alessandria e delle terre ancora influenzate dalla cultura ellenistica, non si hanno tracce che si sia interessato alla scienza. Pi Greco, così come la scienza e la matematica, venne ignorato scomparendo dalla cultura. Al culmine del loro impero (27 a.C. - 476 d.C.) i romani usavano come valore di Pi Greco $3+\frac{1}{8}$ pur sapendo che $3+\frac{1}{7}$ era più esatto. Sembra che questo fosse dovuto al fatto che le per legioni era più semplice usare $\frac{1}{8}$, che non è altro che la metà di una metà di una metà [9]. Il sapere riesce, però, ad arrivare là dove può fiorire e così Pi greco giunse nel clima accademico più favorevole del mondo arabo.

Il primo secolo dell'impero mussulmano, che va dal 650 al 750, fu privo di qualsiasi conquista scientifica. Durante la seconda metà del VIII secolo vi fu un risveglio culturale dell'Islam, grazie al quale una parte considerevole della scienza e della matematica antiche furono recuperate. In questo periodo vennero chiamati a Baghdad, grazie al mecenatismo di tre grandi protettori della cultura, molti scienziati e filosofi dalla Siria, dalla Persia e dalla Mesopotamia. Durante il califfato di Harun al-Rashid venne tradotta una parte degli Elementi di Euclide, fu però durante il califfato di al-Mamun (809-833) che gli arabi cominciarono a tradurre innumerevoli testi scientifici. Proprio quest'ultimo fondò a Baghdad una *Casa del Sapere* paragonabile all'antico Museo di Alessandria. Fra i membri della *Casa del Sapere* si ricorda Abū Ja'far Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (780-850 circa), che scrisse due opere di aritmetica e algebra che svolsero un ruolo molto importante nella storia della matematica. Non è chiaro se al-Khwārizmī abbia effettivamente tentato di calcolare il rapporto tra la lunghezza della circonferenza ed il diametro, ma nei suoi scritti usò tre diversi valori per Pi Greco:

$$\pi = 3+\frac{1}{7} \quad \pi=\sqrt{10} \quad \pi=\frac{62832}{20000}=3,1416$$

attribuendo il primo valore ai greci e gli altri due a matematici indiani. Nonostante al-Khwārizmī fosse un grande matematico non è pervenuta fino a noi nessuna sua stima di Pi Greco, mentre risulta più importante sottolineare che nei suoi scritti usò le cifre indiane compresi lo zero e la virgola. È l'insieme della conoscenza matematica islamica che risulta di grande interesse. I matematici islamici furono molto bravi a integrare la geometria ellenistica e l'algebra indiana, raggiungendo tramite questa fusione un inedito livello di conoscenza matematica. Il contributo islamico va ben oltre la mera assimilazione e fusione della matematica ellenistica ed indiana. L'originalità islamica ha contribuito allo sviluppo della matematica, consentendo all'Europa di scoprirla a partire dal XIII secolo. Tra i matematici arabi, facenti parte della storia di Pi Greco, si ricorda Jamshīd al-Kashī (1380-1429) autore di un trattato sul cerchio. Il matematico arabo utilizzando il metodo di esaustione, già utilizzato da Archimede (si veda Paragrafo 2.3.3), calcolò il valore di Pi Greco (in realtà di 2π) fino alla sedicesima cifra decimale.

All'inizio del II millennio testi antichi, che erano stati conservati nella lingua araba, cominciarono a filtrare in Europa. Questo interesse fu alimentato in parte dalla passione degli europei per la matematica ed in parte da diffuse credenze superstiziose fondate sull'astrologia. Il ritrovato interesse per la matematica diede inizio a due secoli di traduzione dai libri arabi. All'inizio di questo millennio le vie commerciali fra Medio Oriente ed Europa erano monopolizzate dall'Italia, ed è proprio il matematico italiano Leonardo Pisano che riporterà all'attenzione degli europei Pi Greco. Leonardo Pisano, detto il Fibonacci, era figlio di un mercante pisano che intratteneva affari nell'Africa settentrionale, questo gli permise di studiare da un maestro mussulmano e di viaggiare in Egitto, in Siria ed in Grecia. Nel 1202 pubblicò il *Liber abaci* portando in Italia la numerazione posizionale indo-arabica. Nel 1220 pubblicò un nuovo libro: *Pratica geometriae* grazie al quale l'Europa riscoprì Pi Greco. Il matematico utilizzò il metodo di Archimede, approssimando il perimetro di un poligono regolare di novantasei lati inscritto e circoscritto al cerchio attraverso i numeri decimali, ottenendo: $\pi = 3,141818$. Nonostante lo studio della matematica e di Pi Greco furono tutt'altro che stagnanti durante il Medioevo, si fecero scarsi progressi ed i valori usati rimasero meno esatti di quelli degli antichi greci, cinesi, indiani e mussulmani. Durante il XIII secolo l'Europa riscopre la scienza grazie a Fibonacci ed alla sterminata serie di classici ellenistici ed islamici che vennero tradotti. Purtroppo la grande crisi economica e sanitaria del 1300, con un'epidemia di peste che sterminò un terzo della popolazione del continente, soffocò la tensione creativa segnando un periodo di nuova stagnazione. Per trovare un ulteriore passo in avanti su Pi Greco bisogna aspettare i primi anni del XV secolo, con il Rinascimento. A metà del Quattrocento il cardinale Niccolò Cusano affermò di avere quadrato esattamente il cerchio, trovando che il rapporto tra la lunghezza della circonferenza ed il diametro era $3,1423$. Egli era convinto di aver quadrato il cerchio attraverso un ingegnoso procedimento consistente nel fare la media dei poligoni inscritti e circoscritti.

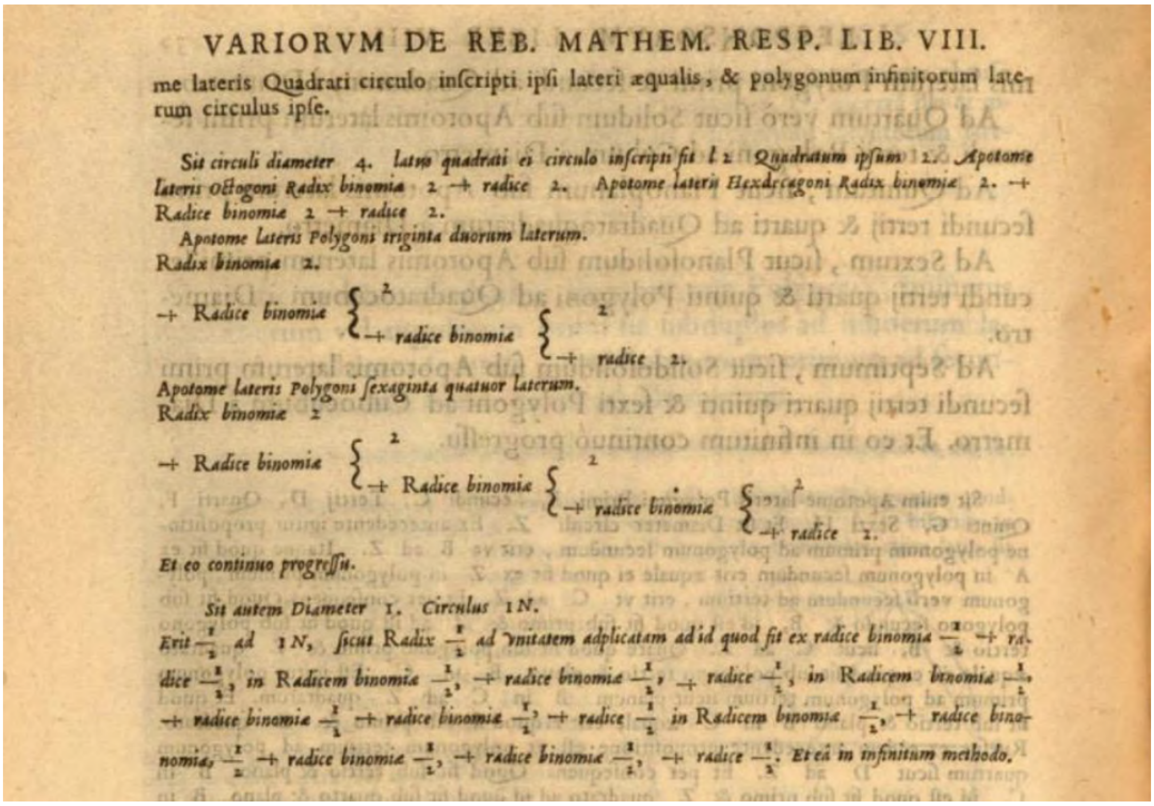
Cusano e la quadratura del cerchio
Si potrebbe strutturare un'unità didattica in cui far lavorare i ragazzi sul documento storico e la dimostrazione proposta da Cusano, cercando di farli arrivare all'errore commesso dal cardinale. Come riferimento si potrebbe usare l'articolo di Federica De Felice [15], in cui viene spiegato il procedimento usato da Cusano. Dato che storicamente fu Regiomontano (Johannes Müller) a dimostrare la falsità della dimostrazione di Cusano, si potrebbe anche pensare di utilizzare con gli studenti il suo lavoro. Questo potrebbe mostrare agli alunni che le dimostrazioni devono essere validate e non sempre risulta semplice trovarne gli errori. Inoltre attraverso la figura di Cusano, si può mettere in luce che nella storia della matematica si incontrano personaggi che la studiavano per diletto e mentre alcuni di essi hanno prodotto risultati sorprendenti, altri, come il cardinale, hanno prodotto risultati errati.

Tra la fine del XV e l'inizio del XVI secolo da Firenze e dall'Italia la scienza, sopratutto visuale, si diffuse in tutta Europa, creando le premesse per quell'esplosione di creatività scientifica che vedrà in Galileo e Newton i personaggi più emblematici. In questo periodo subì un'autentica svolta anche la storia di Pi Greco. Se, infatti, tra il XV e la prima parte del XVI secolo i matematici europei iniziarono a conoscerlo e ad approfondire il dibattito sul suo valore e sulla sua natura, alla fine del Cinquecento trovarono un nuovo metodo originale per calcolarlo. Un segnale, questo, che i matematici e i filosofi naturali europei iniziarono a guardare oltre i limiti della scienza ellenistica ed a produrre con sistematicità e profondità nuove conoscenze. Grande influenza ebbe in questo periodo Michel Stifel (1486-1567) che pubblicò un'opera, senza sostanziali novità rispetto a quelle che circolavano in Italia, dove però venivano utilizzati per la prima volta in maniera sistematica i segni $+$ e $-$ per i numeri relativi. Questo matematico affrontò il tema teorico della realtà dei numeri irrazionali, tema che coinvolge anche Pi Greco, che da tempo si sospettava essere irrazionale. Stifel sosteneva, esattamente come Pitagora, che i "veri" numeri sono solo o interi o frazionari. *"Per Stifel π è un "non numero" che vive sulle nuvole inafferrabili dell'infinito"* [33, p.211]. Questa posizione di molti matematici ha il merito di indurre la ripresa della discussione sulla natura di certi numeri. Nel Cinquecento inoltre l'algebra, sopratutto in Italia, ottenne i suoi risultati più significativi. La riscoperta dei classici, aprì la strada alla ricerca originale, che portò novità non da poco rispetto all'algebra di al-Khwārizmī. Il matematico islamico separava la trattazione simbolica e quella geometrica dell'algebra, mentre i matematici europei, ed in particolare gli italiani, del XV e XVI secolo iniziarono a fondere i due linguaggi, portando una notevole accelerazione agli studi sull'algebra. Il XVI secolo si avviava alla sua conclusione con parecchie novità in campo matematico. I matematici europei avevano portato l'algebra oltre le frontiere definite dagli ellenistici e dagli islamici, producendo nuova conoscenza. Il sistema numerico fu esteso: all'inizio del secolo lo zero venne finalmente riconosciuto come membro a tutti gli effetti della famiglia dei numeri, famiglia in cui alla fine del secolo entrano a far parte i numeri negativi e infine gli immaginari. Una novità altrettanto significativa in algebra era l'introduzione dei simboli. Se prima del XVI secolo solo Diofanto aveva cercato di rendere il ragionamento algebrico più compatto ed efficace, introducendo dei simboli, ora si assisteva alla diffusione lenta ma costante dei simboli. La matematica europea del Cinquecento, però, non era solo algebra. La trigonometria fu riscoperta nel Quattrocento e applicata agli studi agronomici e astronomici. Un'ulteriore grande novità, infine, è quella introdotta nel 1594 da John Napier: i logaritmi. Occorre riconoscere al Rinascimento almeno due grandi meriti: ristabilisce legami intimi tra la scienza dei numeri, le scienze naturali e la tecnologia e dona agli Europei la possibilità di costruirsi un'immagine matematica del mondo. Certo, all'inizio del Rinascimento la matematica costituisce ancora un insieme di tecniche utili a risolvere problemi pratici. I libri di Pacioli e di Tartaglia per esempio, contengono un numero enorme di problemi di aritmetica mercantile. Ma alla metà del XVI secolo, lo sviluppo tecnologico e della navigazione richiedeva un salto di qualità.

A metà del XVI secolo l'Europa occidentale aveva recuperato gran parte delle opere matematiche dell'antichità. L'algebra degli arabi era stata completamente assimilata e sviluppata, mentre la trigonometria era diventata una disciplina a sé stante. Una cospicua parte degli studiosi europei era impegnata nel progresso della matematica, al di là dei contributi antichi e medievali. È proprio in questo periodo che si colloca la figura di François Viète (1540-1603) che si interessò alla teoria dei numeri, imponendo definitivamente l'uso del sistema decimale. Viète non era un matematico di professione, ma nel 1559 usò il metodo di Archimede (si veda Paragrafo 2.3.3) stabilendo che: $3,1415926535 < \pi < 3,1415926537$. Per ottenere questo risultato raddoppiò i lati di due esagoni sedici volte, trovando il perimetro dei poligoni, inscritto e circoscritto, di 393216 lati ciascuno. Nonostante il suo valore fosse esatto alla decima cifra decimale, Ludolph van Ceulen (1540-1610) aveva trovato un valore di Pi Greco dapprima con venti cifre esatte, e poi con trentacinque cifre esatte. Viète entra di diritto nella storia di Pi Greco, perché fu il primo a dare un'espressione numerica teoricamente precisa per questa costante (1593):

attraverso un prodotto infinito[18], raffinando così il metodo di Archimede.

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$


VARIORVM DE REB. MATHEM. RESP. LIB. VIII.

me lateris Quadrati circulo inſcripti ipſi lateri æqualis, & polygonum infinitorum laterum circulus ipſe.

Sit circuli diameter 4. Latus quadrati ei circulo inſcripti ſit l 2 Quadratum ipſum 2. Apotome lateris Octogoni Radix binomia 2 + radice 2. Apotome lateris Hexdecagoni Radix binomiæ 2. + Radice binomiæ 2 + radice 2.

Apotome lateris Polygoni triginta duorum laterum.

Radix binomia 2.

+ Radice binomiæ { 2 *+ radice binomiæ* { 2 *+ radice 2.*

Apotome lateris Polygoni ſexaginta quatuor laterum.

Radix binomiæ 2

+ Radice binomiæ { 2 *+ Radice binomiæ* { 2 *+ radice binomiæ* { 2 *+ radice 2.*

Et eo continuo progreſſu.

Sit autem Diameter 1. Circulus 1 N.

Erit $\frac{1}{2}$ *ad 1 N, ſicut Radix* $\frac{1}{2}$ *ad vnitatem adplicatam ad id quod ſit ex radice binomia* $\frac{1}{2}$ *+ radice* $\frac{1}{2}$*, in Radicem binomiæ* $\frac{1}{2}$*, + radice binomiæ* $\frac{1}{2}$*, + radice* $\frac{1}{2}$*, in Radicem binomiæ* $\frac{1}{2}$*, + radice binomiæ* $\frac{1}{2}$ *+ radice binomiæ* $\frac{1}{2}$*, + radice* $\frac{1}{2}$ *in Radicem binomiæ* $\frac{1}{2}$*, + radice binomiæ,* $\frac{1}{2}$ *+ radice binomiæ* $\frac{1}{2}$*, + radice binomiæ* $\frac{1}{2}$*, + radice* $\frac{1}{2}$*. Et eâ in infinitum methodo.*

Figura 6.1: Passo tratto dal libro VIII del *Variorum de rebus mathematicis responsorum* in cui si trova la formula [61, p.31].

Nel libro VIII del *Variorum de rebus mathematicis responsorum* [61] il matematico scompose i poligoni inscritti nel cerchio in triangoli e trovò che il rapporto delle aree, fra un poligono regolare e un secondo poligono con il doppio dei lati, era uguale al $\cos(\theta)$. Nonostante quest'equazione fu un passo avanti per la matematica, lo stesso Viète dovette constatare la scarsa utilità della formula per calcolare valori approssimati di Pi Greco. Inoltre Viète non dimostrò mai che questa formula convergeva effettivamente a Pi Greco, questo verrà dimostrato solo tre secoli dopo.

[18]La convergenza è di tipo lineare, nel senso che c'è proporzionalità diretta fra numero di fattori (radici quadrate) e numero di cifre guadagnate in precisione. Lo svantaggio è che occorre effettuare molti prodotti e radici, il che è computazionalmente molto pesante.

Viète e la prima espressione numerica di Pi Greco
Si potrebbe pensare di strutturare un'unità didattica su Viète. Dato che proprio nel secondo biennio si affronta la trigonometria si potrebbe utilizzare il metodo di Viète per fare ciò. Oltre al documento storico [61], si trovano delle indicazioni sulla sua formula anche nel libro *Pi: A Source Book* [8] e in *A history of* π [7]. Inoltre proporre passi del libro di Viète agli studenti fa emergere la differenza tra la notazione algebrica del tempo rispetto a quella odierna. Si potrebbe pensare di mostrare loro l'immagine del libro (Figura 6.1) e cercare di fargli ricavare la formula in simboli moderni, in questo modo si andrebbe ad utilizzare la storia come obbiettivo (si veda Paragrafo 1.2.1), sottolineando l'evoluzione simbolica della matematica e la praticità della notazione algebrica moderna che gli studenti, spesso, percepiscono come difficoltosa.
Un altro spunto potrebbe essere il confronto tra il metodo di Archimede precedentemente affrontato nel primo biennio e quello di Viète. Sul sito MATMEDIA.IT [31] si trova un documento in cui vengono messi a confronto il metodo di Archimede, quello di Aryabhata e quello di Viète. Potrebbe essere interessante vedere la precisione ottenuta con i vari metodi di approssimazione di Pi Greco.

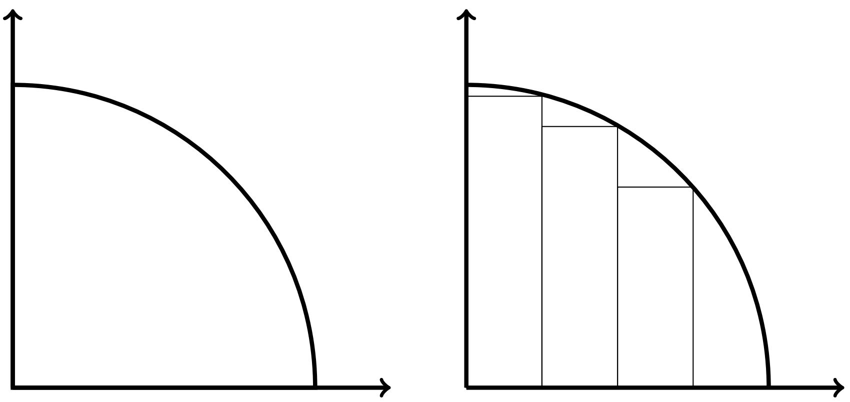
La storia di Pi Greco prosegue velocemente tant'è che da questo momento in poi, fino ai giorni nostri, comincia una caccia sfrenata alle cifre di Pi Greco. Molti matematici si dilettarono nel cercare sempre più cifre esatte di questa costante, tant'è che Petr Beckmann [7] li chiama *digit hunetrs*. Di seguito si riporta una tabella con i progressi della stima di Pi Greco. Alla fine del Seicento il valore di Pi Greco era ormai conosciuto fino alla settantaduesima cifra decimale ed all'inizio del XVIII secolo i decimali noti erano addirittura cento. Donald Fraser Ferguson, vissuto nel XX secolo, nel 1948 raggiunse il record assoluto prima dell'arrivo dei computer.

Anno	Nome	Cifre decimali
1424	al-Kashi	16
1615	Ludolph van Ceulen	35
1702	Abraham Sharp	72
1706	John Machin	100
1717	Thomas Fantet de Lagny	127
1794	Jurij Vega	140
1844	Johann Dase	200
1847	Thomas Clausen	248
1853	William Rutherford	440
1855	Richter	500
1873	William Shanks	707
1948	Donald Fraser Ferguson	808

Tabella 6.2: Progressi sulle cifre di Pi Greco.

La ricerca di un valore sempre più preciso, cessò di essere un problema pratico diventando un problema matematico puro. La precisione con cui si calcolava questa costante diventa un indicatore della bontà di un metodo matematico. Il numero sempre più grande di decimali serviva anche a verificare se tra le cifre dopo la virgola fossero presenti sequenze periodiche, il che significava cercare di stabilire la natura di questa costante. Malgrado la novità della serie introdotta da Viète il metodo di Archimede rimase il più efficiente per calcolare Pi Greco fino al XVIII secolo. All'inizio del Seicento il metodo di esaustione cominciò ad essere troppo laborioso ed i matematici avrebbero dovuto trovare un metodo migliore o rassegnarsi a conoscere sempre solo poche cifre di questa costante. Il matematico olandese Willebrord Snell trovò un modo più intelligente per calcolare Pi Greco. Mentre con il metodo di esaustione, per conseguire una migliore approssimazione, si doveva raddoppiare ogni volta il numero dei lati dei poligoni, Snell trovò un'approssimazione migliore usando lo stesso numero di lati. Nel 1621 pubblicò il *Cyclometricus* in cui propose un metodo geometrico basato sulla rettificazione dell'arco. L'arco di circonferenza considerato era quello individuato da uno dei lati del poligono inscritto. Grazie al suo metodo il matematico usando un poligono regolare di novantasei lati riuscì a determinare un valore esatto fino alla sesta cifra decimale. Snell però non convalidò nessuna della sue teorie, il cui rigore fu provato, invece, da Christiaan Huygens (1629- 1695). Inoltre Huygens migliorò le teorie di Snell riuscendo ad eguagliare l'approssimazione trovata da Archimede inscrivendo semplicemente un triangolo, mentre con l'esagono riuscì a determinare nove cifre esatte di Pi Greco. Nessuno dei due matematici olandesi era interessato a calcolare un numero record di cifre, ma volevano calcolarle nel modo più efficiente.

Il matematico John Wallis (1616-1703), contemporaneo di Huygens ed autore del testo *Arithmetica infinitorum*, affrontò in modo nuovo il problema di trovare l'area di un quarto di cerchio.



Pensò di poter ottenere una buona approssimazione calcolando la somma di tanti piccoli rettangoli di lunghezza scelta a piacere e con un'altezza che partiva dalla base e toccava l'arco descritto dal quarto di cerchio. Il matematico si accorse che se sceglieva rettangoli di lunghezza sempre più piccola si otteneva un'approssimazione sempre migliore dell'area. Partendo da questa idea il matematico fu in grado di calcolare il valore di Pi Greco come sviluppo di una serie infinita e convergente di prodotti[19]. Wallis, nonostante il calcolo infinitesimale non fosse ancora nato, nel 1655 riuscì, faticosamente, ad ottenere la formula:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \ldots}$$

A differenza della formula trovata da Viète, che aveva fatto ricorso a infinite estrazioni di radici, Wallis fu il primo a calcolare Pi Greco con operazioni che coinvolgevano solo numeri razionali.

[19]La convergenza della formula è di tipo logaritmico. Per dare un'idea della lentezza della convergenza: dopo cinquemila termini frazionari moltiplicati la precisione raggiunta è di sole tre cifre decimali.

Wallis e la nuova idea per calcolare l'area di un cerchio
Il procedimento usato da Wallis è lo stesso con cui si introducono gli integrali nella scuola. Inserirlo in una lezione senza formalizzarlo, potrebbe essere un preludio dell'idea di integrale che gli studenti formalizzeranno più avanti. Inoltre nel laboratorio sulla misura del cerchio (si veda Sezione 3.3.1) è stata usata la stessa idea, invece che i rettangoli ai ragazzi è stato chiesto di contare i quadretti per approssimare l'area del cerchio. Collegare le due idee, per poi riprenderle definitivamente quando in classe si formalizzeranno gli integrali, potrebbe rendere più agevole la comprensione dei ragazzi, facendoli arrivare gradualmente alla formalizzazione degli integrali.

Nel Seicento vissero molti altri grandi matematici ed i tempi erano ormai maturi per raggiungere l'importantissima innovazione del calcolo infinitesimale. Un metodo analogo a quello di Wallis fu usato da un altro matematico inglese, William Brouncker (1620-1684), che individua Pi Greco attraverso una frazione continua generalizzata:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2+\frac{3^2}{2+\frac{5^2}{2+\frac{7^2}{2+\dots}}}}}$$

Wallis dimostrò che il metodo di Brouncker era equivalente alla suo. Nella storia di Pi Greco si trova anche il matematico scozzese James Gregory che all'età di trentasei anni trovò, nel 1671, una soluzione estremamente elegante del calcolo delle arcotangenti[20].

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \dots$$

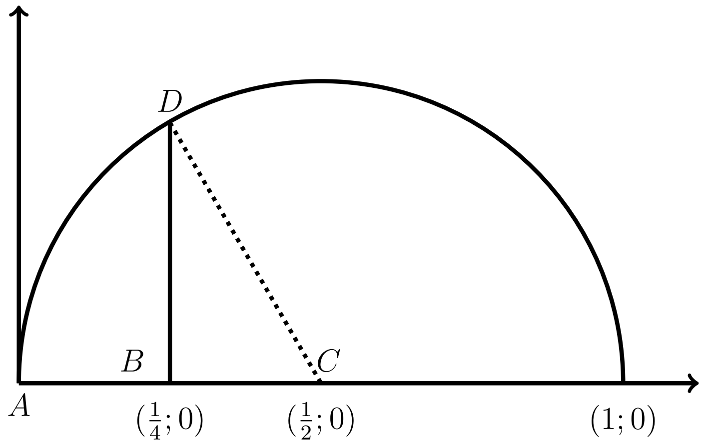
Non si sa se il matematico scozzese abbia davvero determinato il valore di Pi Greco, sappiamo solo che calcolò l'arcotangente come sviluppo di una serie infinita. Tre anni dopo che Gregory ebbe trovato questa nuova soluzione, il matematico tedesco Gottfried Wilhelm Leibniz, uno dei padri del calcolo infinitesimale, scoprì indipendentemente la serie di arcotangenti e la pubblicò assieme ad un importante caso speciale. Introducendo il numero 1 nella serie approssimò $\frac{\pi}{4}$. Nonostante la serie sia impressionante per la sua eleganza e semplicità, risulta insoddisfacente quando si tratta di calcolare effettivamente i decimali di Pi Greco. Occorrerebbero trecento termini della serie per ottenere solo due cifre decimali di Pi Greco, molto meno efficace del metodo di Archimede. Si noti però, che l'introduzione delle serie per definire e calcolare Pi Greco spostò tale problema da geometrico, quando si usavano i poligoni regolari di Archimede, ad aritmetico, aggiungere e sottrarre termini numerici. Quindi nonostante il metodo di Leibniz fosse importante sul piano teorico, perché segnava l'inizio di un nuovo approccio, ebbe scarsi usi pratici. Anche il secondo padre del calcolo infinitesimale, Isaac Newton, entra di diritto nella storia di Pi Greco. Nel 1655 quando a Londra si diffuse la peste, il matematico si ritirò nel suo paese natale e spese il suo tempo a riflettere sul calcolo infinitesimale. In questo anno il matematico inglese fece quattro delle sue principali scoperte: la formula del binomio, il calcolo infinitesimale, le legge di gravitazione universale e la natura dei colori. Nonostante Pi Greco non fosse tra le sue ricerche, Newton in quest'anno pose una pietra miliare

[20]Come per la formula di Wallis la convergenza è di tipo logaritmico.

anche nella storia di Pi Greco trovando varie serie infinite per questa costante, tra cui la seguente[21]:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3 \cdot 2^3}\right) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\left(\frac{1}{5 \cdot 2^5}\right) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\left(\frac{1}{7 \cdot 2^7}\right) + \dots$$

Nel trattato *Methodus fluxionum et serierum infinitorum*, del 1671, si trova il metodo utilizzato da Newton per ottenere il valore di Pi Greco con sette cifre decimali esatte. Newton considerò una particolare semicirconferenza di cui voleva calcolare l'area.



Il matematico calcolò l'area in due modi diversi: come primo metodo utilizzò una combinazione tra la formula del binomio ed il metodo delle flussioni, come secondo metodo utilizzò la geometria.

Newton e Pi Greco
Si potrebbe pensare ad un'unità didattica su Newton, leggendo parte del documento storico in cui spiega il calcolo di Pi Greco e ripercorrendo assieme ai ragazzi i due ragionamenti usati. Dato che con Newton nasce l'analisi infinitesimale cominciare con i ragazzi ad accennare i concetti, come detto precedentemente per Wallis, potrebbe aiutarli a costruirli mano a mano. Per trovare una spiegazione dei due diversi metodi si può consultare il libro *Viaggio attraverso il genio* [19].

Sempre nell'opera si trova un valore di Pi Greco con sedici cifre decimali esatte ottenute sommando venti termini dello sviluppo del binomio di $\sqrt{1-x}$.

Per i matematici ormai il problema riguardo a Pi Greco stava diventando quello di trovare metodi efficienti in cui l'espressione convergeva rapidamente alla costante. Alla fine del Seicento, grazie ai nuovi metodi, la ricerca delle cifre decimali fece un salto in avanti (si veda Tabella 6.2). Agli inizi del Settecento, inoltre, questa costante venne indicata per la prima volta nella sua storia con il simbolo con cui oggi la si identifica (π) da William Jones (1706). In questo anno un altro matematico inglese John Machin (1680-1751) trovò il modo di rendere le serie infinite di Gregory rapidamente convergenti, calcolando cento

[21] La formula ha convergenza lineare nel numero degli addendi: raddoppiando il numero degli addendi, raddoppia il numero di cifre esatte nello sviluppo di Pi Greco.

cifre di Pi Greco attraverso la seguente relazione[22]:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

Tra i matematici che si ricordano nella storia di questo numero non si può non inserire Leonhard Euler (1707-1783). Eulero trovò molte formule di arcotangenti e serie per calcolare Pi Greco, fra cui un metodo con arcotangenti che converge molto più rapidamente rispetto a quello di Gregory, tant'è che in una sola ora riuscì a calcolarne venti cifre esatte. Eulero utilizzò una combinazione tra una formula dell'arcotangente, rapidamente convergente, e la formula di Machin per arrivare ad una formula che convergeva ancora più rapidamente:

$$\frac{\pi}{4} = 5 \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 2 \arctan\left(\frac{3}{79}\right)$$

Eulero è legato a Pi Greco anche grazie alla sua celebre identità:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Come se non bastasse, il matematico diede il via al reale utilizzo del simbolo odierno e riportò all'attualità il tema sulla natura di Pi Greco: è razionale o irrazionale? Bisognerà aspettare ancora qualche anno per ottenere una risposta.

Osservazione: Potrebbe risultare interessante anche cercare di far capire agli studenti come mai queste formule con l'arcotangente sono esatte. Si trova un articolo in merito sul sito MATMEDIA.IT [32], con una spiegazione che potrebbe essere alla portata degli studenti del secondo biennio che stanno imparando la trigonometria.
Inoltre, visto che si sono accennate tutte queste formule per il calcolo di Pi Greco, sul sito math-segnale [54] si trova la simulazione del loro confronto.

Ad iniziare a sciogliere i dubbi attorno alla natura di questa costante fu Johann Heinrich Lambert che nel 1761 diede la dimostrazione della sua irrazionalità.

> Il metodo di Lambert, pur essendo complesso, si riduce al seguente ragionamento: egli dimostrò per prima cosa che, se x è un numero razionale, $\tan(x)$ dev'essere irrazionale. Ne segue allora che, se $\tan(x)$ è razionale, x dev'essere irrazionale. Poiché $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$, $\frac{\pi}{4}$ (e quindi π) dev'essere un numero irrazionale. [9, p.84]

Dato che alcuni matematici non ritenevano rigorosa la dimostrazione di Lambert, nel 1794 Adrien-Marie Legendre dimostrò in modo più rigoroso l'irrazionalità di Pi Greco e del suo quadrato.

[22]Questa formula risulta particolarmente utile per calcolare Pi Greco in quanto: $\arctan(\frac{1}{5})$ è facile da calcolare utilizzando la serie di Gregory, mentre $\arctan(\frac{1}{239})$ converge molto rapidamente

Osservazione: Ricreare una unità didattica in cui far esplorare agli studenti l'irrazionalità di Pi Greco, attraverso documenti, storici sarebbe difficile e controproducente. La dimostrazione data da Lambert non è affatto facile e gli studenti del secondo biennio non hanno gli strumenti adatti per poterla affrontare. Si consiglia di introdurre l'irrazionalità di Pi Greco attraverso la spiegazione, che avviene normalmente in classe, dei numeri irrazionali.

Una volta stabilità l'irrazionalità della costante i matematici cominciarono a chiedersi se questo numero potesse essere espresso attraverso un'equazione algebrica a coefficienti razionali. Fu Eulero ad introdurre la differenza tra numeri algebrici, soluzioni di equazioni algebriche a coefficienti razionali, e trascendenti.

Nel 1882 Ferdinand von Lindemann dimostrò che Pi Greco è un numero trascendente. La dimostrazione della trascendenza di Pi Greco mise fine agli svariati tentativi abortiti di quadrare il cerchio con riga e compasso.

L'impossibilità di quadrare il cerchio con riga e compasso
Come per l'irrazionalità proporre un'unità didattica sulla trascendenza di Pi Greco sarebbe controproducente e troppo complicata per gli studenti della scuola secondaria. Dato però che dalla trascendenza di Pi Greco deriva l'impossibilità di quadrare il cerchio, si potrebbe pensare ad un'unità didattica che tocchi questo tema, visto che nella storia della matematica i tentativi sono stati svariati, tra cui quello di Cusano citato sopra. L'attività potrebbe strutturarsi introducendo la nozione di numero costruibile con riga e compasso, per poi terminare esponendo semplicemente la definizione di numero trascendente e la trascendenza di Pi Greco. Provare a trovare gli errori nelle dimostrazioni della quadratura del cerchio avvenute storicamente, mette i ragazzi nella situazione di dover, innanzitutto capire l'argomentazione del matematico preso in considerazione, per poi giustificare il loro ragionamento sull'errore trovato.

Quinto anno

Il misterioso e mirabile π
è ridotto a un gargarismo
che aiuta i computer
a schiarirsi la voce.
Philip J.Davis

Con l'avvento dei primi calcolatori, nella metà del XX secolo, la caccia alla cifre di Pi Greco diventa una vera e propria sfida tra matematici. Donal Fraser Ferguson, citato in Tabella 6.2, impiegò un anno per calcolare ottocentootto cifre di Pi Greco, attraverso la formula:

$$\frac{\pi}{4} = 3 \arctan\left(\frac{1}{4}\right) + \arctan\left(\frac{1}{20}\right) + \arctan\left(\frac{1}{1985}\right)$$

Il suo sforzo terminato nel 1949 fu reso più lieve grazie all'utilizzo di una primitiva calcolatrice da tavolo. L'inglese infatti è considerato da alcuni come l'ultimo dei cacciatori di decimali a mano, mentre da altri il primo cacciatore di decimali col computer. La primitiva calcolatrice usata dal matematico non può essere considerata un vero e proprio computer, quindi questo personaggio può costituire lo spartiacque tra le due categorie. Nella Tabella 6.3 si riportano i risultati ottenuti, nel calcolo delle cifre di Pi Greco, grazie all'avvento dei computer.

Matematico	Data	Numero di decimali	Computer
Reitwiesner et al.	1949	2037	ENIAC
Nicholson, Jeenel	1954	3092	NORC
Felton	1957	7480	PEGASUS
Genuys	1958	10000	IBM 704
Felton	1958	10021	PEGASUS
Guilloud	1959	16167	IBM 704
Shanks, Wrench	1961	100265	IBM 7090
Guilloud, Filliatre	1966	250000	IBM 7030
Guilloud, Dichampt	1967	500000	CDC 6600
Guilloud, Bouyer	1973	1001250	CDC 7600
Miyoshi, Kanada	1981	2000036	FACOM M-200
Tamura	1982	2097144	MELCOM 900II
Kanada, Yoshino, Tamura	1982	16777206	HITACHI M-280H
Gosper	1985	17526200	SYMBOLICS 3670
Kanada, Tamura	1988	201326551	HITACHI S-810/20
Kanada, Tamura	1989	1073741799	
Čudnovskij D. e G.	1994	4044000000	
Kanada, Takahashi	1999	206158430000	HITACHI SR8000

Tabella 6.3: Progressi nel calcolo di Pi Greco nell'era del computer. Nel libro *Storia di π* [33] si trova una tabella più dettagliata.

L'esordio dei calcolatori tra i cacciatori di digitali è attribuito all'ENIAC (*Electronic Numerical Intefratos and Computer*), che facendo uso della formula di Machin:

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

nel Settembre del 1949 impiegò circa 70 ore per calcolare i primi 2037 decimali di Pi Greco. Da questo momento in avanti è difficile stare dietro alle nuove approssimazioni trovate con la formule matematiche più diverse. Nel mese di Ottobre del 2010 Nicholas Sze ha annunciato di aver calcolato i primi due milioni di miliardi di decimali lasciando lavorare mille computer per ventitré giorni. I nostri computer utilizzano un valore di Pi Greco approssimato alla diciassettesima cifra decimale, ma calcolare tutte queste cifre è diventato un test universale sull'affidabilità dei computer e per cercare di capire qualcosa in più sulla natura di questa costante.

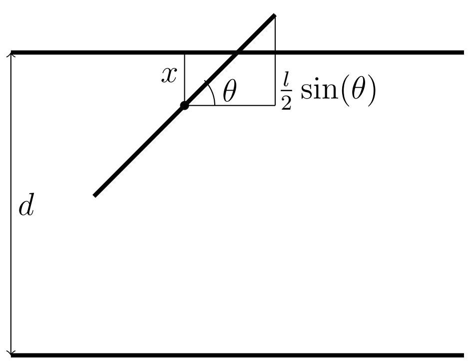
Nel quinto anno, però, ci si vuole concentrare sulla natura computazionale e probabilistica legata a Pi Greco. Si utilizzeranno quindi risultati e metodi che nella storia della matematica hanno visto Pi Greco entrare nella probabilità, compiendo dei salti temporali rispetto alla cronologia proposta fino a questo momento nel progetto. Le proposte di attività, che verranno esposte di seguito, riprendono la possibilità, inserita nei primi laboratori (si veda Sezione 3.2.1 e Sezione 3.3.1), di manipolare oggetti, cosa che alcuni studenti hanno apprezzato.

Intorno al 1777 il matematico francese Georges-Louis Leclerc, conte di Buffon (1707-1788), propose un problema che riuscì poi a risolvere, trovando uno strano legame tra la costante e la probabilità.

> È per mezzo di esperimenti fini, ragionati e seguiti, che si forza la natura per scoprirne il segreto; tutti gli altri metodi non hanno mai funzionato[...] le raccolte di esperimenti e di osservazioni sono quindi gli unici libri che possono aumentare le nostre conoscenze. [35, p.V]

Di seguito si espone il problema proposto dal conte.

> Si supponga di avere un pavimento con un motivo a linee parallele, tutte aventi la stessa distanza (d) una dall'altra, e si faccia cadere un ago di lunghezza $l < d$ su di esso. Si vuole sapere qual'è la probabilità che l'ago cadendo intersechi una di queste linee.



Il conte trovò che questa probabilità dipendeva da Pi Greco, secondo la formula: $P = \frac{2l}{d\pi}$, dove P indica la probabilità cercata. Infatti si presentano due possibili eventualità: che l'ago incontri una linea o che sia caduto tra una linea e l'altra. La condizione affinché l'ago incontri una linea è:

$$x < \frac{l}{2}\sin(\theta)$$

Per cui per risolvere il problema è necessario calcolare la probabilità:

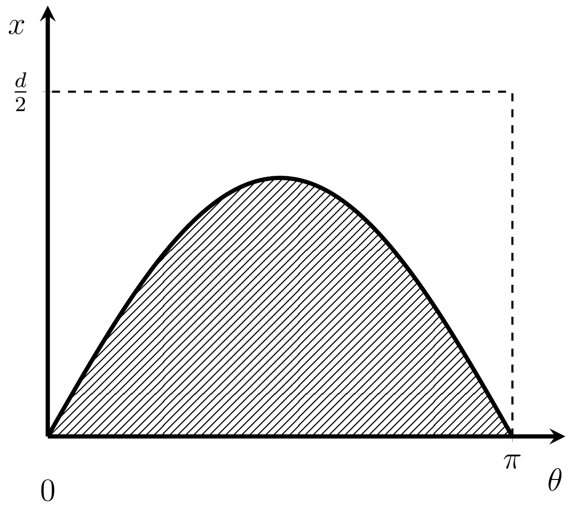
$$P\left(x < \frac{l}{2}\sin(\theta)\right)$$

Per fare ciò si può tentare un approccio geometrico, trasformando la definizione classica di probabilità $\left(\frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}\right)$ in un rapporto tra aree. I limiti geometrici del problema sono:

$$0 < x < \frac{d}{2} \quad 0 < \theta < \pi$$

Utilizzando un grafico, queste condizioni consentono di individuare un rettangolo la cui area costituisce la somma di tutte le possibili combinazioni tra l'orientazione dell'ago e la posizione del suo centro sul piano. Fra queste, le combinazioni favorevoli sono quelle individuate dai punti le cui coordinate soddisfano la condizione sopra determinata, ovvero da tutti i punti al di sotto della curva:

$$x = \frac{l}{2}\sin(\theta)$$



Facendo ciò si ottiene:

$$P\left(x < \frac{l}{2}\sin(\theta)\right) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{\frac{l}{2}\int_0^\pi \sin(\theta)d\theta}{\pi\frac{d}{2}}$$

Ottenendo la formula per la probabilità, scritta sopra: $P = \frac{2l}{d\pi}$.
Riscrivendo la formula, si ottiene:

$$\pi = \frac{2l}{Pd}$$

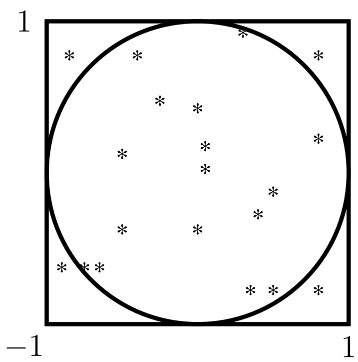
Questa formula apre le porte alla possibilità di trovare un'approssimazione di Pi Greco tramite la probabilità. Il problema e la soluzione di Buffon furono persi di vista, finché nel 1812 vennero ripresi da un altro matematico francese: Pierre-Simon Laplace (1749-1827) nel suo lavoro *Théorie analytique des probabilités*, in cui ne propone una generalizzazione, gettando le basi del *Metodo Montecarlo*.

Pi Greco e l'ago di Buffon
Si potrebbe pensare di strutturare un'unità didattica su questo esperimento facendo dapprima ragionare i ragazzi per trovare la formula generale di questa probabilità. Gli studenti del quinto anno hanno gli strumenti necessari per poterla calcolare, dato che si utilizzano le funzioni trigonometriche, gli integrali ed elementi di probabilità. Si potrebbe anche pensare di utilizzare il documento storico di Laplace per cercare la soluzione la problema. Dopo che la formula è stata trovata si potrebbe procedere all'esecuzione dell'esperimento facendo notare agli studenti che con pochi lanci non si ottiene una buona stima di Pi Greco, ma grazie al computer si può ottenere una buona stima. Sul sito math-segnale [54] si trova una bellissima animazione in cui viene approssimato Pi Greco con questo metodo.

Il metodo statistico di Buffon e Laplace è stato molto sviluppato a metà del Novecento ed è noto come *Metodo Montecarlo*. In realtà con il termine *Metodo Montecarlo* si individua una classe di metodi computazionali basati sul campionamento casuale per ottenere risultati numerici. Il metodo è usato per trarre stime attraverso simulazioni. Si basa su un algoritmo che genera una serie di numeri tra loro non correlati, che seguono la distribuzione di probabilità che si suppone abbia il fenomeno da indagare.

Esiste un secondo modo per determinare sperimentalmente le cifre di Pi Greco adoperando questo metodo (cambia unicamente l'evento casuale preso in considerazione rispetto all'ago di Buffon).

> Si suppone di lanciare N freccette su un bersaglio costituito da un quadrato di lato $2L$ circoscritto ad una circonferenza. Si assume che le freccette vengano lanciate casualmente all'interno del quadrato e che, quindi, colpiscano il quadrato in ogni posizione con uguale probabilità. Si vuole calcolare quante freccette hanno colpito la circonferenza.



Per analizzare questa situazione, si può stabilire un sistema cartesiano Oxy avente come origine il centro della circonferenza, in cui la posizione di ogni freccetta sarà indicata da una coppia "casuale" di coordinate (x, y). Dopo un certo numero di lanci, la frazione di freccette che hanno colpito il cerchio rispetto al numero di freccette lanciate, sarà circa uguale al rapporto tra l'area del cerchio e quella del quadrato.

$$\frac{\pi L^2}{4L^2} = \frac{\pi}{4} \approx \frac{N_{\text{cerchio}}}{N} \quad N_{\text{cerchio}} = \text{numero di freccette nel cerchio}$$

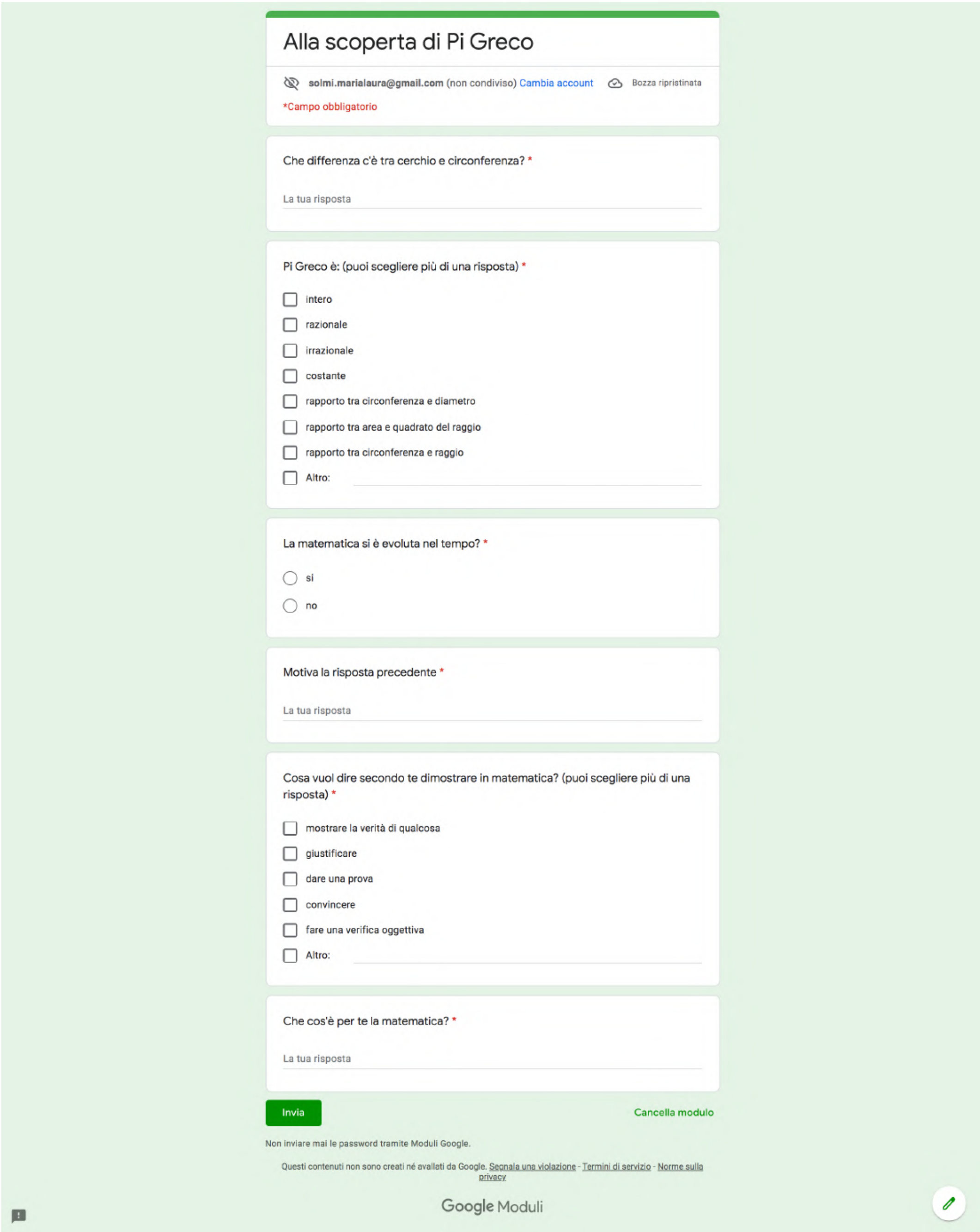
Si potrà quindi usare per approssimare Pi Greco il valore: $\pi = \frac{4N_{\text{cerchio}}}{N}$ La stima di Pi Greco migliora all'aumentare di N, ma la convergenza non è particolarmente veloce: la presenza di fluttuazioni dovute all'approccio probabilistico è una caratteristica del Metodo Montecarlo.

Pi Greco e il Metodo Montecarlo
Si potrebbe pensare di strutturare un'unità didattica con attività laboratoriali in cui gli studenti sperimentano questo metodo approssimando Pi Greco. Si potrebbe proprio creare un bersaglio (con bordi rialzati) in cui vengano fatte cadere delle palline in modo che gli studenti possano realizzare realmente l'esperimento, trovando una prima approssimazione di Pi Greco, per poi farli ragionare sulla bontà del risultato da loro ottenuto. Sempre sul sito math-segnale [54] è presente anche la simulazione del Metodo Montecarlo.

Osservazione: esistono altri esperimenti riguardanti la probabilità in cui compare Pi Greco e che quindi potrebbero essere utilizzati per creare dei laboratori in cui gli studenti possono sperimentare e trovarne un'approssimazione. Un esempio è dato dalla probabilità che presi due qualsiasi numeri naturali essi siano coprimi. Questa probabilità vale $\frac{6}{\pi^2}$, quindi si potrebbe, anche questa volta, proporre un laboratorio in cui gli studenti possono arrivare a stimare Pi Greco. Sempre sul sito math-segnale [54] si trova la simulazione di questo fatto. Essendo presenti sul sito tutte e tre le simulazioni degli esperimenti aleatori proposti, si potrebbe pensare di fare un confronto in classe fra i tre per vedere quale sia l'esperimento che raggiunge un valore più accurato.

Appendice A

Questionario iniziale



Alla scoperta di Pi Greco

solmi.marialaura@gmail.com (non condiviso) Cambia account

Bozza ripristinata

*Campo obbligatorio

Che differenza c'è tra cerchio e circonferenza? *

La tua risposta

Pi Greco è: (puoi scegliere più di una risposta) *

- intero
- razionale
- irrazionale
- costante
- rapporto tra circonferenza e diametro
- rapporto tra area e quadrato del raggio
- rapporto tra circonferenza e raggio
- Altro:

La matematica si è evoluta nel tempo? *

- si
- no

Motiva la risposta precedente *

La tua risposta

Cosa vuol dire secondo te dimostrare in matematica? (puoi scegliere più di una risposta) *

- mostrare la verità di qualcosa
- giustificare
- dare una prova
- convincere
- fare una verifica oggettiva
- Altro:

Che cos'è per te la matematica? *

La tua risposta

Invia

Cancella modulo

Non inviare mai le password tramite Moduli Google.

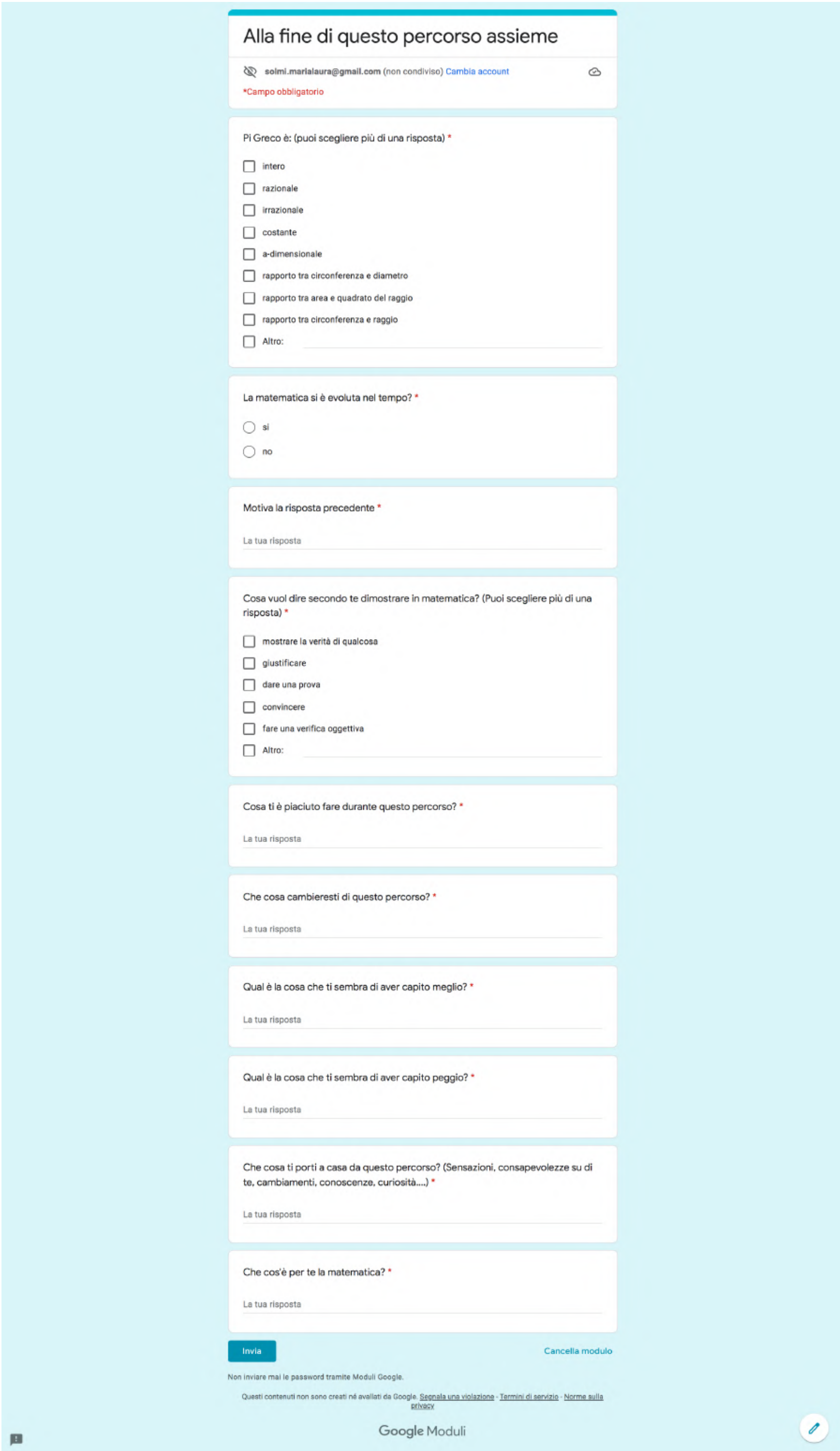
Questi contenuti non sono creati né avallati da Google. Segnala una violazione - Termini di servizio - Norme sulla privacy

Google Moduli

Figura A.1: Questionario iniziale

Appendice B

Questionario finale



Alla fine di questo percorso assieme

solmi.marialaura@gmail.com (non condiviso) Cambia account

*Campo obbligatorio

Pi Greco è: (puoi scegliere più di una risposta) *

- [ ] intero
- [ ] razionale
- [ ] irrazionale
- [ ] costante
- [ ] a-dimensionale
- [ ] rapporto tra circonferenza e diametro
- [ ] rapporto tra area e quadrato del raggio
- [ ] rapporto tra circonferenza e raggio
- [ ] Altro:

La matematica si è evoluta nel tempo? *

- si
- no

Motiva la risposta precedente *

La tua risposta

Cosa vuol dire secondo te dimostrare in matematica? (Puoi scegliere più di una risposta) *

- [ ] mostrare la verità di qualcosa
- [ ] giustificare
- [ ] dare una prova
- [ ] convincere
- [ ] fare una verifica oggettiva
- [ ] Altro:

Cosa ti è piaciuto fare durante questo percorso? *

La tua risposta

Che cosa cambieresti di questo percorso? *

La tua risposta

Qual è la cosa che ti sembra di aver capito meglio? *

La tua risposta

Qual è la cosa che ti sembra di aver capito peggio? *

La tua risposta

Che cosa ti porti a casa da questo percorso? (Sensazioni, consapevolezze su di te, cambiamenti, conoscenze, curiosità....) *

La tua risposta

Che cos'è per te la matematica? *

La tua risposta

Invia

Cancella modulo

Non inviare mai le password tramite Moduli Google.

Questi contenuti non sono creati né avallati da Google. Segnala una violazione - Termini di servizio - Norme sulla privacy

Google Moduli

Figura B.1: Questionario finale

Appendice C

Misuriamo la circonferenza

In tempi antichi non esistevano i righelli come abbiamo noi oggi ed ogni popolazione aveva le proprie unità di misura. Per misurare molte popolazioni si servivano di corde che annodavano per segnare le misure fatte.

Ora tocca a voi

Avete a disposizione vari oggetti cilindrici come potete misurarne la circonferenza ed il diametro solo con la corda e le forbici? Spiegate il procedimento usato.

____

____

____

____

____

____

Quanti diametri misura la circonferenza? Completate la tabella.

Oggetto	n° diametri che misura la circonferenza

Che cosa osservate?

____

____

Sapreste trovare una strategia per ottenere una misura più precisa? Spiegatela.

____

____

____

Nella domanda *Quanti diametri misura la circonferenza?* l'unità di misura che prendevate in considerazione era il **diametro**. Nel vostro procedimento individuate quale nuova unità di misura avete considerato e datele il nome che più vi piace.

Utilizzando la vostra nuova unità di misura completate la seguente tabella.

Oggetto	Circonferenza C	Diametro d	Rapporto $\frac{C}{d}$

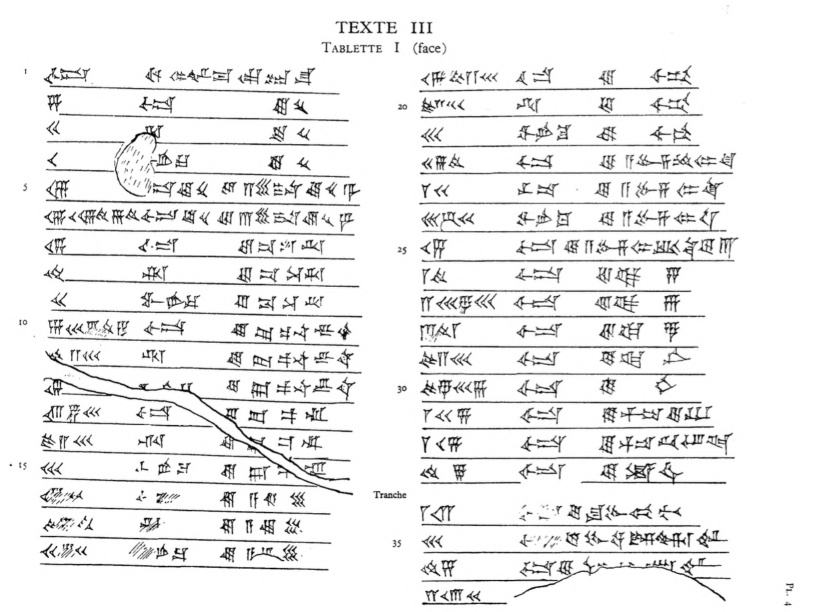
Cosa potete dire riguardo all'ultima colonna?

Quale unità di misura ha il rapporto? Motivate la risposta.

Appendice D

Come hanno fatto i Babilonesi

La tavoletta ritrovata TMS 3



Questa tavoletta ritrovata a Susa nel 1936 ed interpretata da E.M.Bruins (1950) risale al periodo paleo-babilonese ($2000 a.C.$ - $1600 a.C.$). Contiene una serie di importanti risultati geometrici sotto forma di tabella. La prima riga contiene la descrizione del contenuto della tavoletta. La sua traduzione è:

Costante fissa per la quale (deve essere moltiplicato) *quello che segue.*

Le righe che prenderemo in considerazione sono la terza e la quarta.

Di seguito trovate la loro traduzione.

3° riga: $20'$ *della corda* (diametro) *dell'anello* (circonferenza)
4° riga: $10'$ *della freccia* (raggio) *dell'anello* (circonferenza)

Riscrivete i numeri delle due righe con la nostra notazione sotto forma di frazione.

Ecco come interpretare la terza riga, l'interpretazione della quarta è analoga.

$20'$ è *la costante fissa per la quale* deve essere moltiplicato *l'anello* (circonferenza) ottenendo così *la corda* (diametro).

Utilizzando tale interpretazione quale valore attribuivano i Babilonesi a Pi Greco?

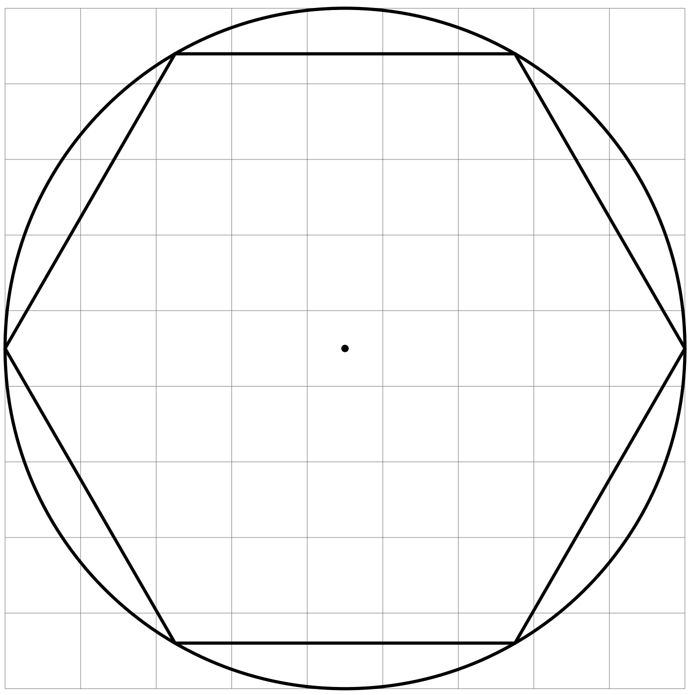
Ora prendete in considerazione la riga 30 che dice:

$57'36''$ *costante del ciclo*

Con il termine ciclo si intende: "cerchio più perfetto".

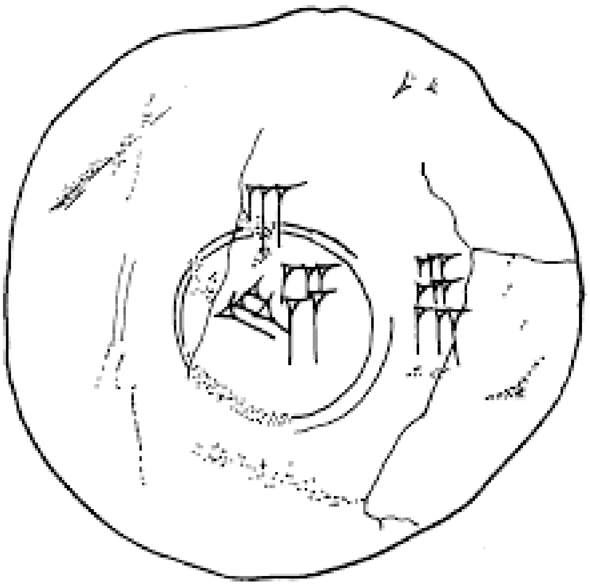
Trovate il valore numerico corrispondente.

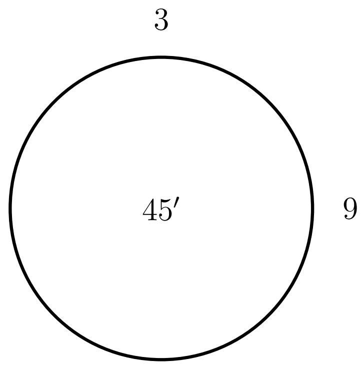
Secondo l'interpretazione data dal traduttore, il numero trovato indica il rapporto numerico tra il perimetro di un esagono regolare e la circonferenza circoscritta ad esso.



Facendo riferimento alla figura nella pagina precedente trovate la relazione tra il lato dell'esagono regolare e il raggio del cerchio. Usando tale relazione, provate a ricavare a cosa corrisponde la costante della riga 30.

Che relazione c'è con la costante determinata nella riga 3 e 4? Che cosa potete concludere sulla conoscenza di Pi Greco dei Babilonesi?





(a)

Tavoletta YBC 7302

È stata ritrovata a Susa un'altra tavoletta (vedi immagine a sinistra) catalogata YBC 7302 (*Yale Babylonian Collection*) risalente all'incirca al $1900 - 1600 a.C.$, che tratta il problema del calcolo dell'area del cerchio.
Come illustrato nella schematizzazione a destra, la posizione dei numeri indica il loro significato:

- 3 indica il contorno del cerchio, ovvero la lunghezza della circonferenza. Il contorno risulta per i Babilonesi la misura fondamentale.
- $45'$ indica l'interno del cerchio, ovvero la sua area.

I babilonesi calcolavano l'area sempre a partire dalla circonferenza anche se conoscevano il suo raggio. Alla luce di questo trovate il valore di Pi Greco in questa tavoletta.

Cosa indica il numero 9 a lato? ______________________________

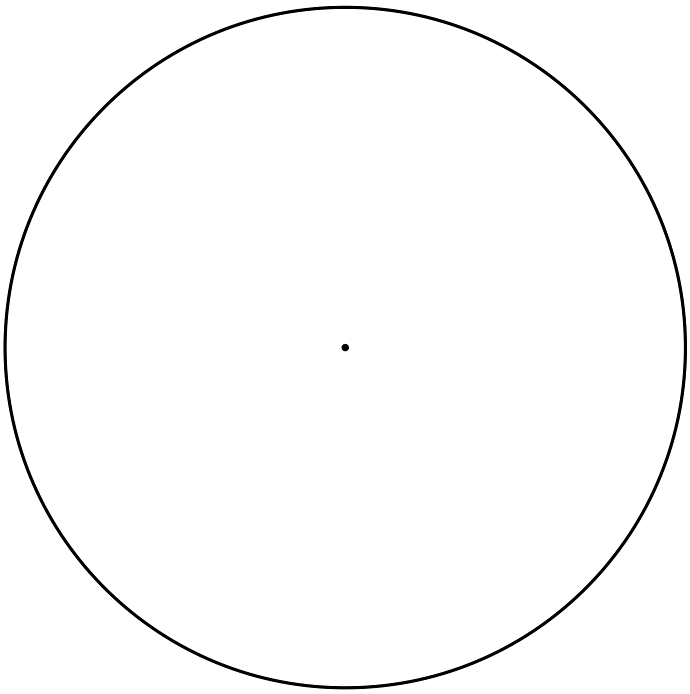
Appendice E

Misuriamo il cerchio

Misurare un'area è un po' più complicato, ma anche gli antichi riuscivano a farlo, conoscevano molto bene le aree delle figure rettilinee, per il cerchio la questione diventa un più complessa.

Ora tocca a voi

Discutete insieme e descrivete in che modo secondo voi si potrebbe trovare nella pratica l'area di una circonferenza (se volete potete utilizzare la figura sottostante).



Riportate il vostro ragionamento.

Figura	$A_{interna}$	$A_{esterna}$	$A_{cerchio}$	π
1				
2				
3				
4				

Completate la tabella sopra facendo riferimento alle figure che trovate nelle pagine successive (potete aiutarvi colorando i quadretti).

Procedimento:

1. Trovate l'area per difetto contando i quadratini completamente contenuti nel cerchio: $A_{interna}$
2. Trovate l'area per eccesso contando i quadratini che contengono parti della circonferenza: $A_{esterna}$
3. Calcolate l'area del cerchio facendo la media delle aree per eccesso e difetto $A_{cerchio}$
4. Utilizzando la formula dell'area che conoscete potete approssimare Pi Greco

Suggerimento: usare le simmetrie del cerchio potrebbe aiutarvi nel conto sopratutto quando i quadratini diventano sempre più piccoli!

Cosa potete concludere

____

____

____

Calcolate il valore medio che avete trovato di Pi Greco e confrontatelo con quello che trovate sulla calcolatrice. Che osservazioni potete fare?

____

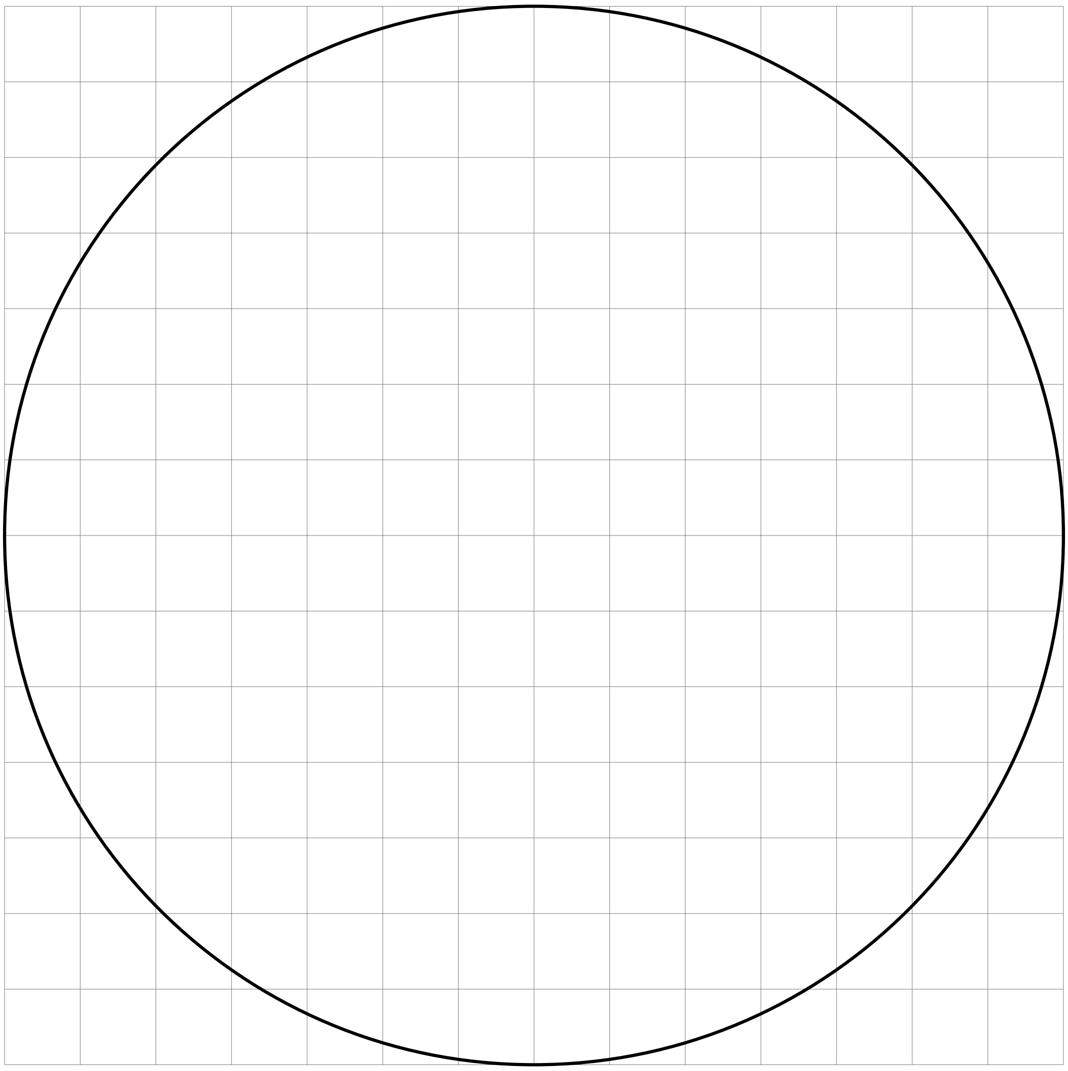


Figura E.1

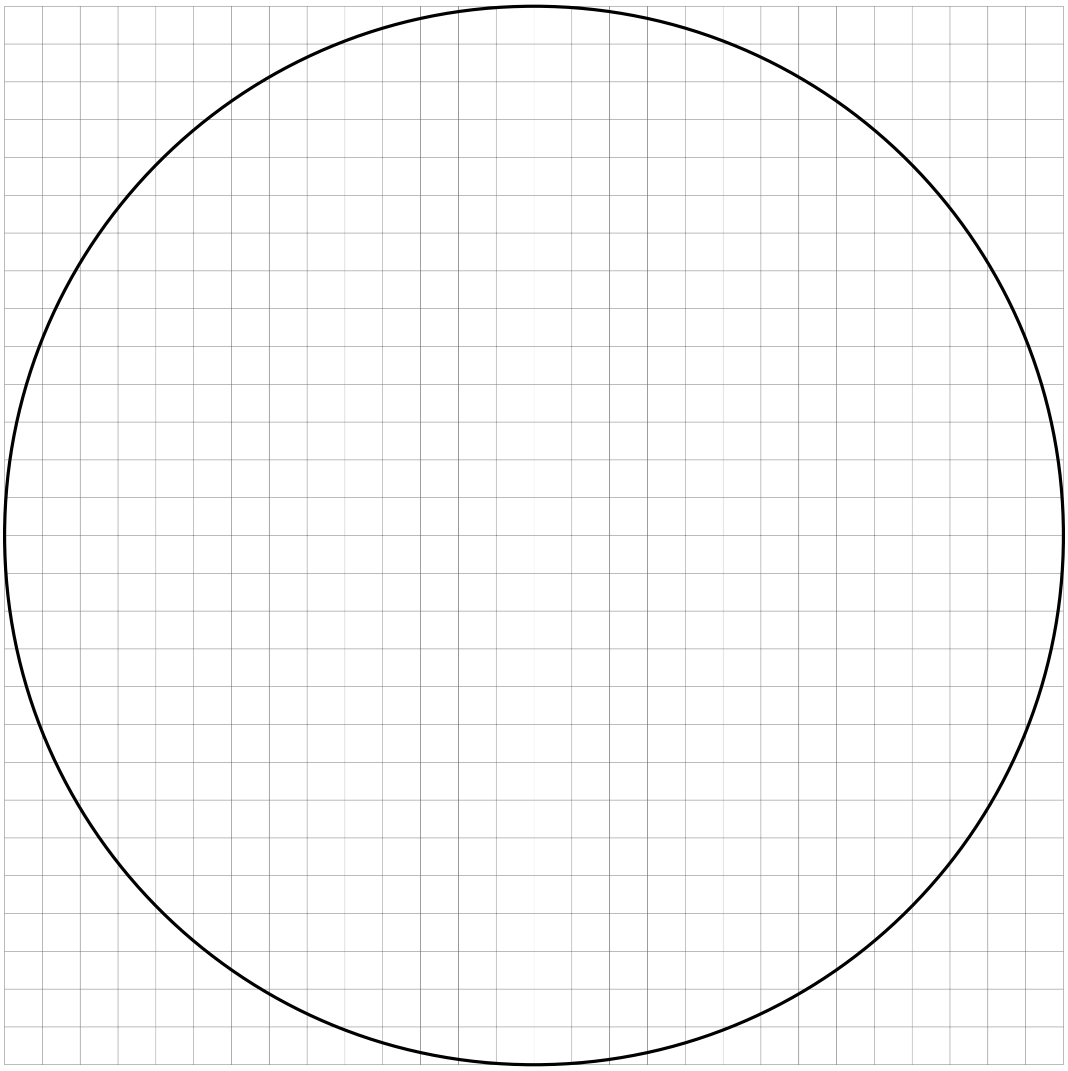


Figura E.2

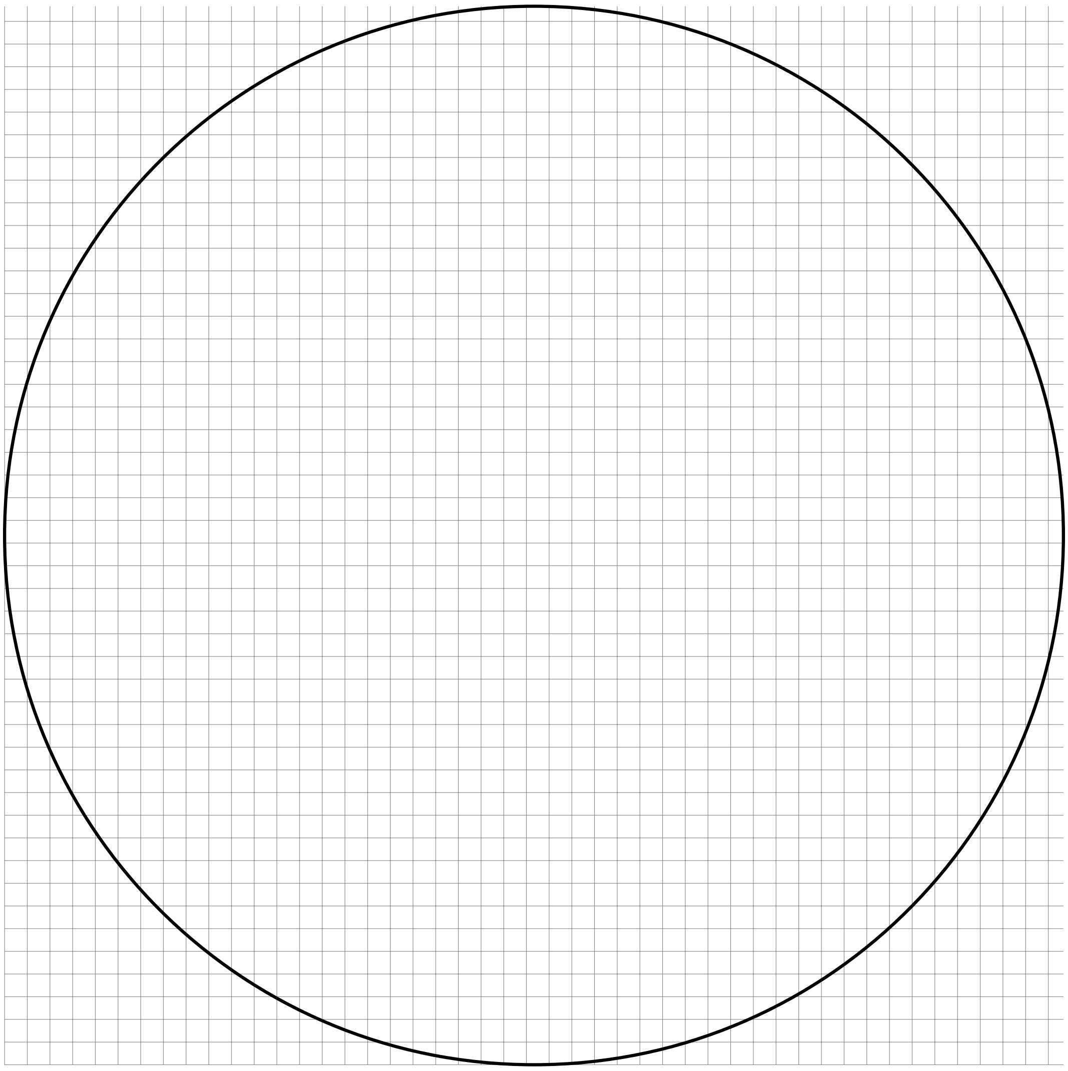


Figura E.3

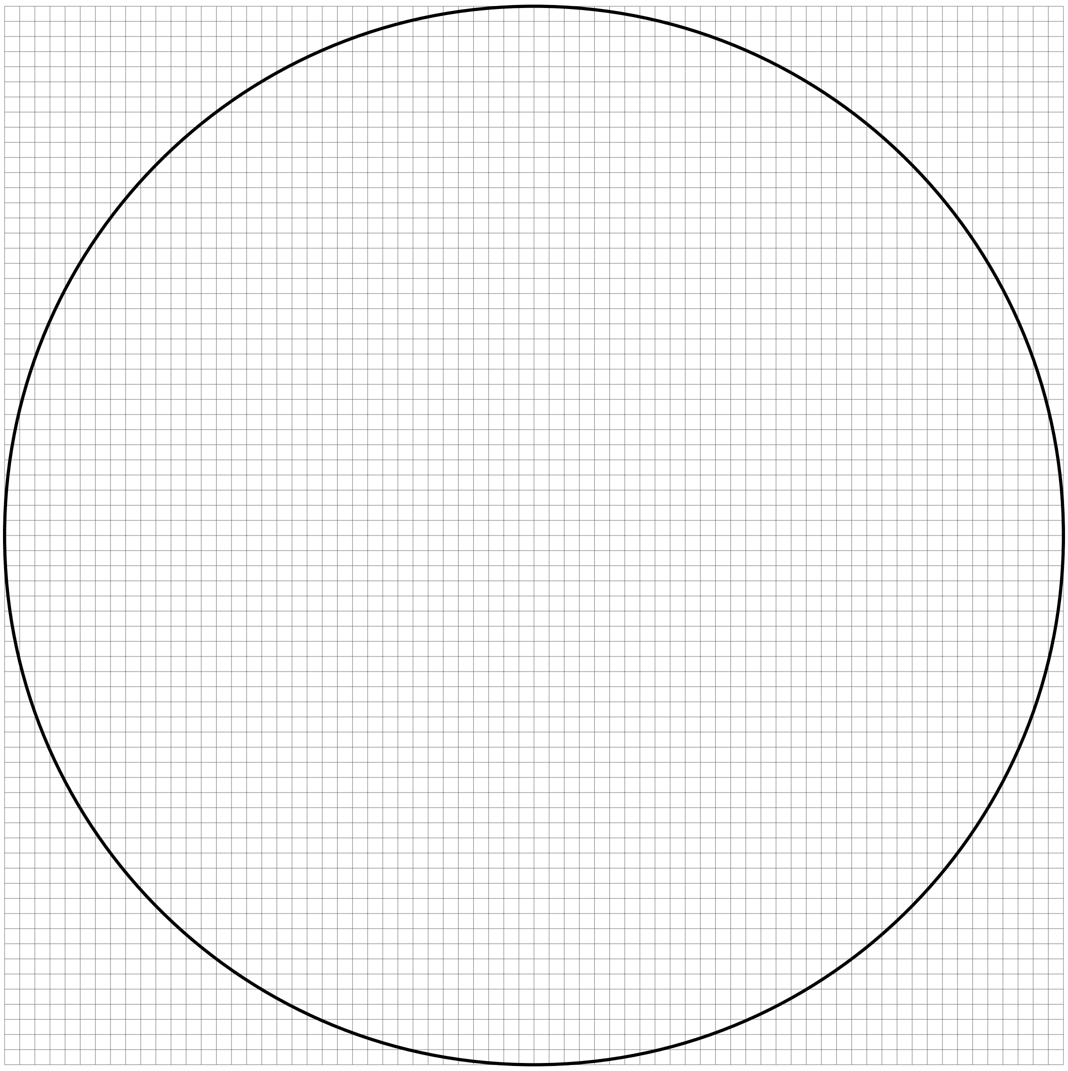
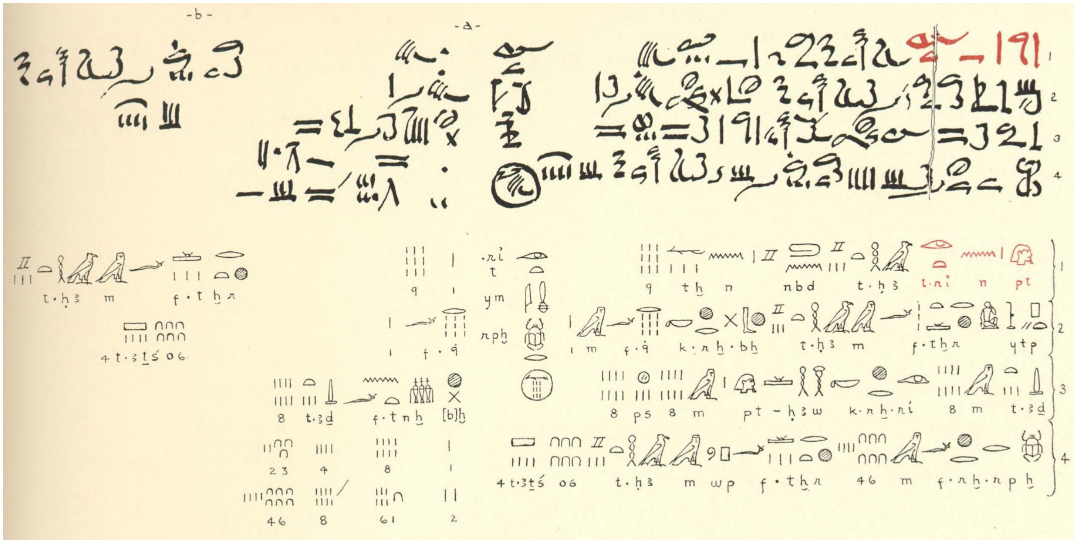


Figura E.4

Appendice F

Come hanno fatto gli Egizi



Problema 50 del Papiro di Ahmes

Metodo per calcolare un pezzo di terra circolare di diametro di 9 khet. Qual è la superficie di terra?
Tu devi sottrarre la nona parte di esso, cioè 1 resto 8. Devi moltiplicare 8 volte otto, diventa 64. Questa è la sua area di terra, 64 setat.

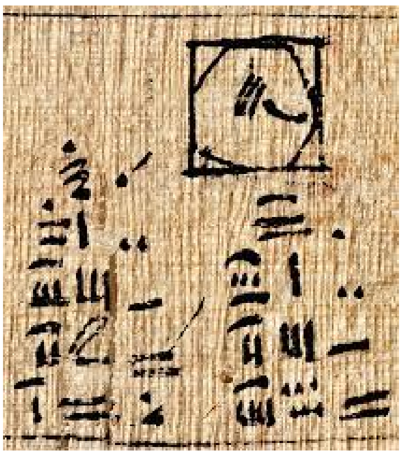
Ecco il testo contenuto nel Papiro di Ahmes. Riproducete i calcoli descritti dallo scriba.

Se invece che avere un diametro di 9 *khet* aveste un diametro generico? Quale formula generale potreste ricavare?

Confrontate la formula che avete ottenuto per l'area del cerchio con quella che utilizziamo noi ci sono differenze? Per Ahmes quanto valeva Pi Greco?

Problema 48 del Papiro di Ahmes

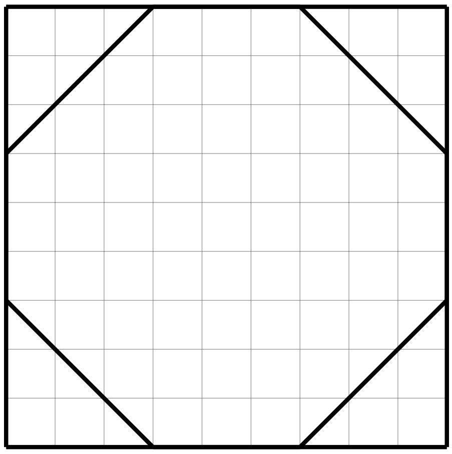
In questo problema Ahmes fa un disegno che ci permette di intuire come sia arrivato al risultato dato nel problema 50.



Analizziamo meglio la figura: il numero presente all'interno della figura è 9 in ieratico, che indica il lato del quadrato.

A quale figura assomiglia quella all'interno del quadrato? Motivate la risposta.

Non c'è univocità nell'interpretazione della figura del Problema 48, secondo alcuni storici lo schema che ha aiutato Ahmes nei suoi calcoli è il seguente.



Provate a calcolare l'area dell'ottagono e spiegate in che modo l'avete trovata.

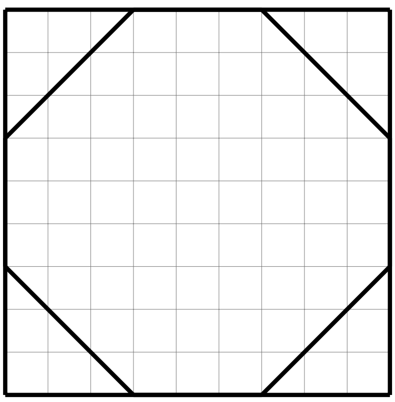
____

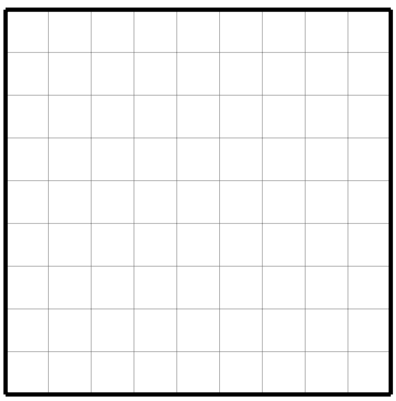
____

____

Ecco il procedimento che può aver usato Ahmes, completatelo e nell'apposito spazio sottostante riproducete le sue considerazioni:

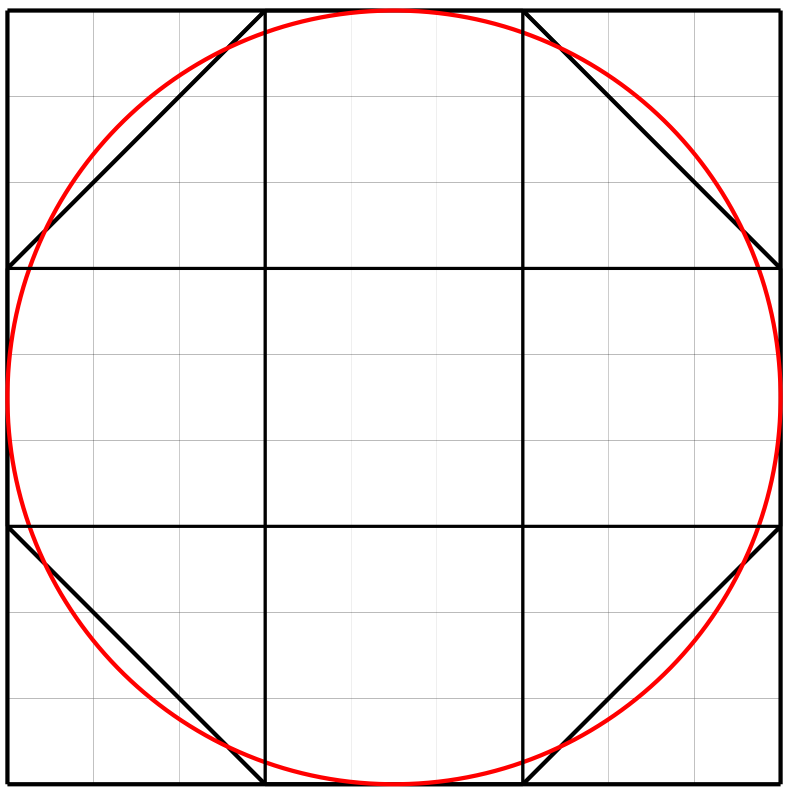
1. I due triangoli superiori hanno area: __________ (colorateli in rosso nella figura in basso a sinistra).
2. Avendo area __________ potevano ricoprire la prima riga del quadrato (coloratela in rosso nella figura in basso a destra).
3. I due triangoli in basso hanno area: __________ (colorateli in giallo nella figura in basso a sinistra).
4. Avendo area __________ potevano ricoprire la prima colonna del quadrato (coloratela in giallo nella figura in basso a destra).
5. Rimane un _______________ di area __________





Confrontate il valore dell'area dell'ottagono ottenuta seguendo il procedimento di Ahmes con quella ottenuta da voi: sono diversi? Perchè?

Osservando la figura sottostante secondo voi come mai Ahmes, interessato all'area del cerchio, ha calcolato l'area dell'ottagono?



Appendice G

Euclide questo sconosciuto

Nonostante le poche informazioni sulla vita di Euclide è giunto fino a noi, dopo varie traduzioni, la sua pietra miliare: Gli Elementi. Questo testo è un manuale introduttivo che abbraccia tutta la matematica elementare conosciuta a quel tempo. Gli Elementi sono costituiti da tredici libri ed organizzati attraverso il metodo assiomatico. Le proposizioni al suo interno sono numerate riportando in numeri romani il libro ed in numeri arabi la proposizione. Il testo originale è scritto in greco qui sotto si riporta la traduzione della U.T.E.T. a cura di A. Frajese e L. Maccioni.

Proposizione (XII,2)

I cerchi stanno tra loro come i quadrati dei diametri.

Euclide per fare dimostrazioni usava solamente la riga ed il compasso. Ecco come dimostra la proposizione (XII,2).

Siano i cerchi ABCD, EFGH e BD, FH siano i loro diametri; dico che il cerchio ABCD sta al cerchio EFGH come il quadrato di BD sta al quadrato di FH.(1)

Infatti, se il cerchio ABCD non stesse al cerchio EFGH come il quadrato di BD sta a quello di FH, starebbe in tal caso il quadrato di BD a quello di FH come il cerchio ABCD ad un'area S che fosse minore o maggiore del cerchio EFGH: cioè q(BD):q(FH)= ABCD:S. (2)

Si supponga dapprima che S sia minore del cerchio EFGH. Si iscriva ora nel cerchio EFGH il quadrato EFGH (IV,6); il quadrato iscritto è così maggiore della metà del cerchio EFGH, dal momento che, se per i punti E, F, G, H conduciamo rette tangenti al cerchio, il quadrato EFGH è la metà del quadrato circoscritto al cerchio, mentre il cerchio è minore del quadrato circoscritto, cosicché il quadrato iscritto EFGH è maggiore della metà del cerchio EFGH. (3)

Si dividano per metà gli archi EF, FG, GH, HE nei punti K, L, M, N, e si traccino le congiungenti EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE; di conseguenza, pure ciascuno dei triangoli EKF, FLG, GMH, HNE è maggiore della metà del segmento di cerchio che lo racchiude, dal momento che, se per i punti K, L, M, N conduciamo rette tangenti al cerchio e completiamo i parallelogrammi posti sulle corde EF, FG, GH, HE, si avrà che ciascuno dei triangoli EKF, FLG, GMH, HNE è la metà del parallelogrammo che lo racchiude, mentre il segmento di cerchio da cui è racchiuso è invece minore del parallelogrammo; cosicché ognuno dei triangoli EKF, FLG, GMH, HNE è maggiore della metà del segmento di cerchio che lo racchiude. (4)

Se veniamo allora a dividere per metà gli archi di circonferenza, tracciamo le corde corrispondenti, e continuiamo a far questo sempre di seguito, finiremo col determinare come residui certi segmenti del cerchio EFGH la cui somma sarà minore dell'eccedenza di cui il cerchio EFGH supera l'area S. (5)

Fu infatti dimostrato nel primo teorema del libro decimo che, se assumiamo due grandezze disuguali, si sottrae dalla maggiore una grandezza che sia maggiore della sua metà, dalla parte che così rimane si sottrae un'altra grandezza maggiore della sua metà, e se si procede sempre così di seguito, finirà col restare una grandezza che sarà minore della minore delle due grandezze date (X,1). (6)

Finisca dunque col risultare rimanente [una grandezza del genere], e supponiamo che sia appunto la somma dei segmenti del cerchio EFGH posti su EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE ad esser minore dell'eccedenza di cui il cerchio EFGH supera l'area S. Quindi il poligono iscritto EKFLGMHN è maggiore dell'area S. (7)

Si iscriva ora nel cerchio ABCD il poligono AOBPCQDR simile al poligono EKFLGMHN; il quadrato del diametro BD sta perciò al quadrato del diametro FH come il poligono AOBPCQDR sta al poligono EKFLGMHN (XII,1). (8)

Ma si ha pure che q(BD):q(FH)= cerchio ABCD:S; quindi anche: cerchio ABCD:S= AOBPCQDR: EKFLGMHN, per cui si ha ***permutando*** *(V,16): cerchio ABCD: AOBPCQDR= S:EKFLGMHN. (9)*

Ma il cerchio ABCD è maggiore del poligono AOBPCQDR in esso iscritto; quindi, in tal caso, pure l'area S sarebbe maggiore del poligono EKFLGMHN. Ma essa è anche minore [come si è sopra veduto]: il che è impossibile. Dunque il quadrato di BD non può stare al quadrato di FH come il cerchio ABCD sta ad un'area S che sia minore del cerchio EFGH. (10)

Similmente potremmo dimostrare come nemmeno possa darsi che il cerchio EFGH stia ad un'area minore del cerchio ABCD come il quadrato di FH sta al quadrato di BD. (11)

Dico adesso che non può darsi neppure che sia: q(BD): q(FH)= cerchio ABCD: S supponendo S maggiore del cerchio EFGH. (12)

Invertendo *nella proporzione sopra scritta (V,7,coroll.), si ha: q(FH): q(BD)= S: cerchio ABCD. (13)*

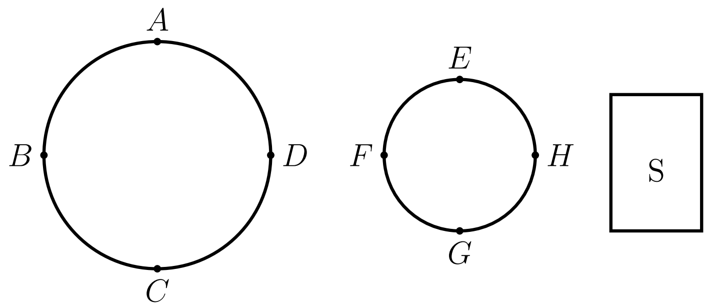
Ma l'area S sta al cerchio ABCD come il cerchio EFGH sta ad un'area che sia minore del cerchio ABCD (cfr. coroll. seguente); (14)

quindi anche, in tal caso, il quadrato di FH starebbe al quadrato di BD come il cerchio EFGH starebbe ad un'area minore del cerchio ABCD: il che fu dimostrato essere impossibile. Non può quindi darsi che il quadrato di BD stia al quadrato di FH come il cerchio ABCD starebbe ad un'area che fosse maggiore del cerchio EFGH. Ma fu dimostrato che ciò non può essere nemmeno con un'area che sia minore del cerchio in questione, per cui il quadrato di BD sta al quadrato di FH come il cerchio ABCD sta al cerchio EFGH. Dunque i cerchi stanno fra loro come i quadrati dei diametri. C.D.D. (15)

Ripercorrete i passi fatti da Euclide rispondendo alla domande. I riferimenti numerali indicano la parte di testo considerata.

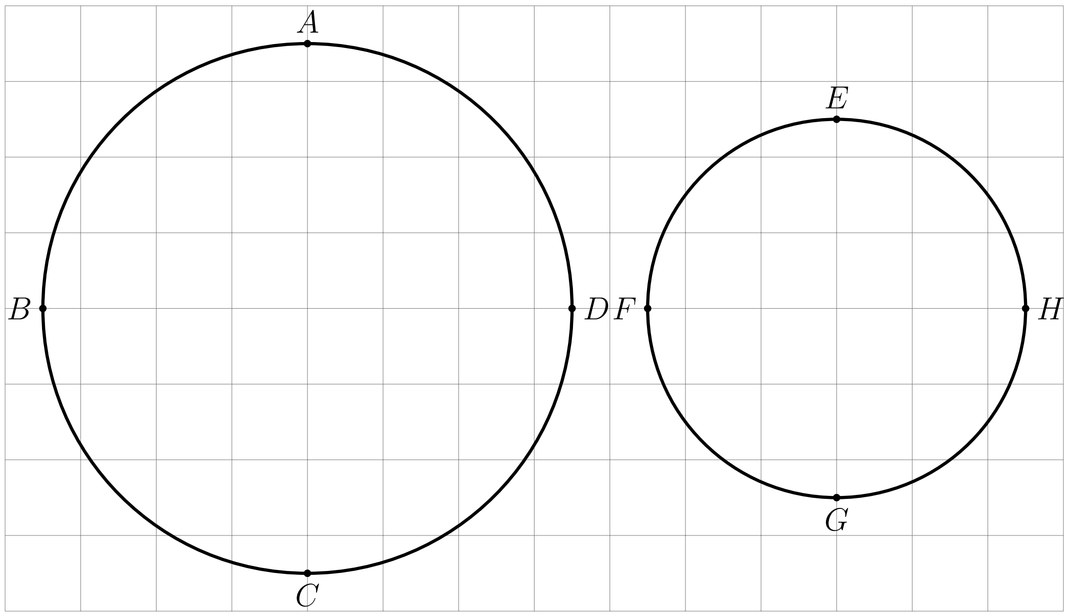
(1) Riscrivete il testo in formule.

(2) Ecco il disegno da cui parte Euclide.



Per dimostrare la proposizione che procedimento sceglie di usare?

(3) Euclide cita la proposizione (IV,6) perché è quella in cui dimostra come si disegna un quadrato inscritto in una circonferenza. Riproducete nel disegno i passaggi scritti da Euclide nel testo.



(4) Completate il disegno facendo i passaggi descritti da Euclide. Per differenziarli da quelli fatti in figura nel passaggio (3) potete usare un colore diverso.

(5) Scrivete quali sono gli archi di cerchio che Euclide vuole nuovamente dividere.

Tracciando le corde corrispondenti cosa viene fuori?

Cosa significa *"e continuiamo a far questo sempre di seguito"*?

(6) Spiegate cosa sta dicendo Euclide. Potete usare le parole, delle formule, un disegno o qualsiasi metodo che preferiate.

(7) Nel disegno che avete fatto colorate le parti che sommate sono *"minori dell'eccedenza"*.

(8) Disegnate quanto dice Euclide e riscrivete con notazione moderna la proposizione (XII,1).

(9) Ragionate su quanto Euclide afferma nel testo. In cosa consiste l'operazione di **permutando**?

(10) Euclide è quindi arrivato ad un

(11) Scrivete la proporzione presente nel testo.

Cosa intende Euclide con il termine *"similmente potremmo dimostrare"*? Cosa si dovrebbe cambiare nella dimostrazione fatta sopra?

(12) Come mai Euclide dopo aver dimostrato che non può essere che $S < cerchio EFGH$ vuole dimostrare anche che non può essere $S > cerchio EFGH$?

(13) La *"proporzione sopra scritta"* per Euclide è:

$$q(BD) : q(FH) = cerchioABCD : S$$

In cosa consiste l'**invertendo**?

(14) Spiegate perché quest'affermazione è vera.

Euclide nomina Pi Greco?

Da quello che dimostra Euclide si può dedurre che il rapporto tra il cerchio ed il quadrato del diametro è costante? Se sì, come?

Nei passaggi da (3) a (5) Euclide utilizza un metodo chiamato metodo di esaustione. Provate a descrivere con parole vostre in che cosa consiste.

Appendice H

Il genio di Archimede


44

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ.

Figura H.1: L'inizio del trattato *Misura del cerchio* edizione di Basilea del 1544

Proposizione 1

Ogni cerchio è uguale ad un triangolo rettangolo se ha il raggio uguale ad un cateto [del triangolo] e la circonferenza uguale alla base [= all'altro cateto].

Proposizione 2

Il cerchio ha rispetto al quadrato del diametro il rapporto che 11 ha rispetto a 14.

Proposizione 3

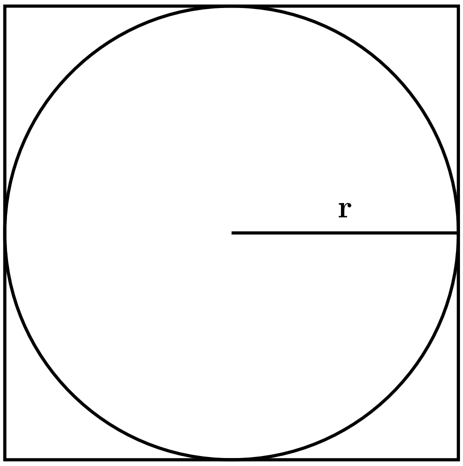
La circonferenza di ogni cerchio è tripla del diametro e lo supera ancora di meno di un settimo del diametro, e di più di dieci settantunesimi.

Secondo voi la Figura H.1 della pagina del trattato a quale proposizione si riferisce?

Come potreste riscrivere in italiano la prima proposizione? Calcolando l'area del triangolo ($A_{triangolo} = \frac{bh}{2}$) che cosa trovate?

Nella Figura H.1 si vede il metodo che Archimede usa per dimostrare la proposizione, quale metodo usa? È diverso da quello che usa Euclide? Motivate la risposta.

Aiutandovi con la figura cercate di stabile cosa indica il rapporto della Proposizione 2 e scrivetelo sotto forma decimale.



Stabilite quale fra i valori $3 + \frac{1}{7}$ e $3 + \frac{10}{71}$ è maggiore.

Riscrivete in linguaggio moderno la Proposizione 3.

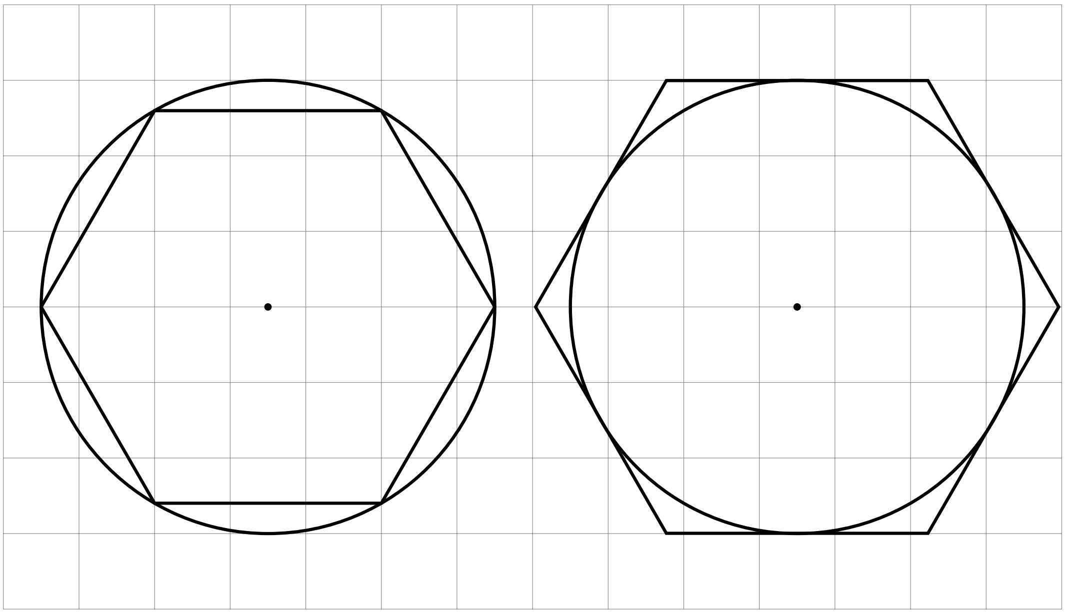
Confrontate i valori di Pi Greco ricavati dalle Proposizioni 2 e 3, il valore ricavato dalla Proposizione 2 costituisce un'approssimazione per eccesso o per difetto?

Archimede arriva a stimare il valore di Pi Greco utilizzando il metodo di esaustione. Vediamo quali sono i suoi passaggi:

(1) Dalla Proposizione 2 Archimede si rende conto che la circonferenza é ________ ____________________ del perimetro del quadrato. Inoltre sapeva grazie a matematici del passato che la circonferenza é ____________________ di tre diametri. Da cui si può ricavare una prima stima di questo numero, ricordando la formula della circonferenza ($C = 2\pi r$):

____________________ $< \pi <$ ____________________

(2) Archimede si rende subito conto che questa prima approssimazione è grossolana, quindi decide di inscrivere e circoscrivere un esagono alla circonferenza.



Il perimetro dell'esagono inscritto è ____________________(ricordate la scheda sui Babilonesi), mentre quello dell'esagono circoscritto è ____________________

Archimede procede in questo modo, raddoppiando i lati dei poligoni inscritti e circoscritti. Si chiama c_n e i_n rispettivamente il perimetro del poligono circoscritto e quello del poligono inscritto di n lati, mentre chiama c_{2n} e i_{2n} il perimetro del poligono circoscritto e quello inscritto con $2n$ lati. La formula che lega questi perimetri è la seguente:

$$c_{2n} = \frac{2c_n i_n}{c_n + i_n}$$
$$i_{2n} = \sqrt{c_{2n} i_n}$$

Archimede continua la duplicazione fino ad arrivare al un poligono di 96 lati. Calcolate le approssimazioni successive:

(a) Dodecagono: poligono regolare con dodici lati

____________________ $< \pi <$ ____________________

(b) Poligono regolare con ventiquattro lati

$\underline{\hspace{4cm}} < \pi < \underline{\hspace{4cm}}$

(c) Poligono regolare con quarantotto lati

$\underline{\hspace{4cm}} < \pi < \underline{\hspace{4cm}}$

(d) Poligono regolare con novantasei lati

$\underline{\hspace{4cm}} < \pi < \underline{\hspace{4cm}}$

Appendice I

Nove capitoli sulle arti matematiche

Il cerchio viene trattato nel primo capitolo: *Fang tian* (Misurazione del campo). Di seguito si riportano i testi dei due problemi (il 31 ed il 32), le soluzioni e le relative regole. I *bu* ed i *mu* sono unità di misura, $1mu{=}240bu$, potete utilizzare per fare i calcoli i *bu*.

(1.31) *Supponiamo di avere un campo circolare di* 30 *bu di circonferenza e di* 10 *bu di diametro. Si chiede quanto fa il campo.*
Risposta: 75 *bu.*

(1.32) *Supponiamo che si abbia un campo circolare di* 181 *bu di circonferenza e di* 60 *bu* $\frac{1}{3}$ *di bu di diametro. Si chiede quanto fa il campo.*
Risposta: 11 *mu* 90 *bu* $\frac{1}{12}$ *di bu.*

Quale valore di Pi Greco veniva utilizzato?

Nel trattato vengono proposte quattro diverse procedure per ottenere le risposte ai problemi sopra:

Procedura: la metà della circonferenza e la metà del diametro vengono moltiplicate l'una per l'altra, si ottengono i bu del prodotto.

Altra procedura: poiché il diametro e la circonferenza sono moltiplicati l'uno per l'altro, si divide per 4.

Altra procedura: il diametro viene moltiplicato per se stesso, si moltiplica questo per 3 *e si divide per* 4.

Altra procedura: essendo la circonferenza moltiplicata per se stessa, si divide per 12.

Indicando con A l'area, C la circonferenza e d il diametro scrivete per ciascuna delle quattro regole la relazione tra A,C,d. Le relazioni ottenute sono equivalenti tra di loro?

Il commento di Liu Hui

Il matematico cinese Liu Hui rendendosi conto che il valore utilizzato per Pi Greco era un'approssimazione grossolana, commentò questi due problemi e scrisse un algoritmo per dimostrare la validità del suo ragionamento. Di seguito i due commenti ai problemi:

Con la mia procedura questa dovrebbe fare un campo di 71 *bu* $\frac{103}{157}$ *di bu.*

Con la mia procedura questo dovrebbe fare un campo di 10 *mu* 208 *bu* $\frac{113}{314}$ *di bu.*

Sapendo che Liu Hui considera esatto il valore della circonferenza presente nel testo, quale valore di Pi Greco utilizza?

L'algoritmo dimostrativo di Liu Hui

A seguito della quattro regole Liu Hui comincia uno dei più lunghi commenti presenti in tutto il testo, nel quale descrive un algoritmo generale per approssimare Pi Greco. L'algoritmo che utilizza consiste in quattro passi:

(1) *Supponiamo che il diametro del cerchio sia di 2 chi. I valori di un lato dell'esagono iscritto nel cerchio e del semidiametro del cerchio sono uguali.*

Quale strategia propone di utilizzare?

(2) Nel secondo passo dell'algoritmo il matematico vuole individuare la relazione che c'è tra il semiperimetro di un poligono regolare inscritto nella circonferenza, il raggio e l'area del poligono regolare inscritto con il doppio dei lati del precedente. Ecco cosa dice:

Se si moltiplica per un lato dell'esagono il semidiametro del cerchio [...] e si moltiplica per 3*, si ottiene l'area del dodecagono. Se, ancora una volta, si taglia questo, e poi si moltiplica per un lato del dodecagono il mezzo diametro [...] e si moltiplica questo per* 6*, allora si ottiene l'area del* 24*-gono.*

Riscrivete le formule proposte da Liu Hui per trovare le aree dei poligoni inscritti nel cerchio.

Qual è la formula generale per trovare l'area di un poligono regolare inscritto in una circonferenza?

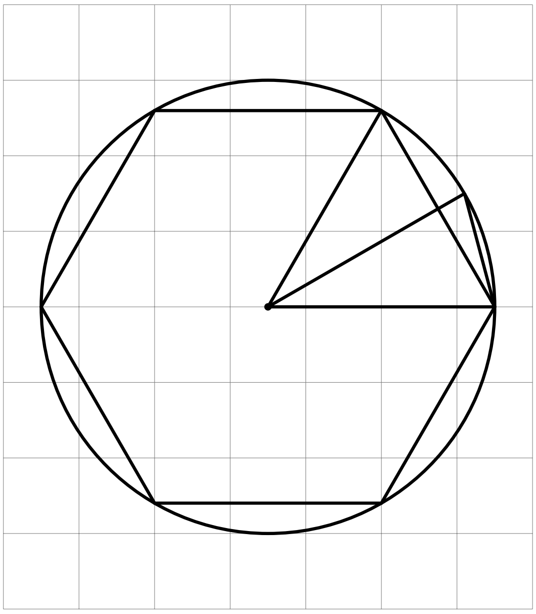
(3) Dopo aver individuato la strategia e la relazione, il matematico itera il passaggio, descrivendo come trovare i lati dei poligoni inscritti nel cerchio. Ecco come dice di trovare il lato del dodecagono regolare inscritto nel cerchio a partire dal lato dell'esagono regolare inscritto nel cerchio:

Procedura che consiste nel tagliare l'esagono per farne un dodecagono: Posizioniamo il diametro del cerchio, 2 *chi. Se ne prendiamo la metà, ciò fa* 1 *chi e dà i lati dell'esagono iscritto nel cerchio. Si prende il mezzo-diametro,* 1 *chi, come ipotenusa, la metà del lato,* 5 *cun, come base, e si cerca l'altezza che corrisponde loro. Il quadrato della base,* 25 *cun, essendo sottratto dal quadrato dell'ipotenusa, rimane* 75 *cun. Dividiamo questo per estrazione dalla radice quadrata [...] Questo fa [...] come altezza,* 8 *cun* 6 *fen* 6 *li* 2 *miao* 5 *hu* 2/5 *di hu. Se si sottrae questo dal mezzo diametro, rimane* 1 *cun* 3 *fen* 3 *li* 9 *hao* 7 *miao* 4 *hu* 3/5 *di hu, che si* *chiama piccola base. La metà del lato del poligono è chiamata anche piccola altezza. E si cerca l'ipotenusa che corrisponde loro; il suo quadrato fa* 267949193445 *hu e si abbandonano le quote restanti. Se dividiamo questo per estrazione dalla radice quadrata, questo dà un lato del dodecagono.*

Di seguito si riportano le unità di misura in sequenza:

chi	*cun*	*fen*	*li*	*hao*	*miao*	*hu*

Quindi, per esempio: $1chi{=}10cun$. Le unità di misura hanno nomi diversi, ma funzionano esattamente come nel nostro sistema dato che i cinesi usavano un sistema decimale posizionale. Per i calcoli successivi potete usare i *cun* oppure gli *hu* a seconda di quello che preferite. Riproducete i calcoli nello spazio sottostante aiutandovi, se volete, con la figura.



Quale procedimento usa Liu Hui per calcolare il lato del dodecagono conoscendo quello dell'esagono?

Liu Hui continua a raddoppiare i lati fino ad un poligono regolare di novantasei lati inscritto nel cerchio.

(4) *Più si taglia più ciò che si perde è piccolo. Si tagliano questi (i poligoni) e li si intersecano fino a raggiungere ciò che non si può tagliare. Allora il corpo coincide con la circonferenza del cerchio e non c'è niente da perdere.*

Ecco che Liu Hui in questo passaggio descrive l'ultimo passo dell'algoritmo. Che cosa dice in questo passaggio? Secondo voi perché?

Bibliografia

[1] AA.VV. *Storia della scienza.* Vol. II. Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani, 2001.

[2] Giorgio Allulli. «Dalla strategia di Lisbona a Europa 2020». In: *Roma: Istituto salesiano Pio* 11 (2015).

[3] Emilio Ambrisi. «Matematica e storia per l'insegnamento». In: *Periodico di Matematiche* 1 (2017), pp. 3–14.

[4] David G. Andersen. *The Pi-Search Page.* 2016. URL: `https://www.angio.net/pi/`.

[5] Giorgio T. Bagni. «Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche». In: *La matematica e la sua didattica* 18.3 (2004), pp. 51–70.

[6] Egidio Battistini. *In viaggio con pi greco.* Franco Angeli, 2016.

[7] Petr Beckmann. *A history of pi.* St. Martin's Griffin, 2015.

[8] Lennart Berggren, Jonathan Borwein e Peter Borwein. *Pi: A Source Book.* Springer, 2004.

[9] David Blatner. *Le gioie del* π. Garzanti Libri, 1999.

[10] Carl B. Boyer. *Storia della matematica.* Mondadori, 2021.

[11] E. M. Bruins e M. Rutten. *Textes mathématiques de Suse.* Librairie orientaliste Paul Geuthner, 1961.

[12] Salvatore Coen. *Note al corso di Storia della Matematica.* Università di Bologna. 2018.

[13] *Cronologia della matematica. Babylonian Area Tablets.* 2022. URL: `https://it.mathigon.org/timeline/babylonian-area`.

[14] *Cronologia della matematica. Rhind Papyrus.* 2022. URL: `https://it.mathigon.org/timeline/rhind-papyrus`.

[15] Federica De Felice. «Niccolò Cusano. Scritti matematici : Introduzione, traduzione e note». In: *Edition Open Sources Sources 13* (2020), pp. 217–263.

[16] Adriano Demattè. «Documenti storici per la didattica della matematica/1». In: *Didattica delle scienze* 253 (2008), pp. 9–17.

[17] Adriano Demattè. *Fare matematica con i documenti storici. Una raccolta per la scuola secondaria di primo e secondo grado. Volume per l'insegnante.* Editore provincia autonoma di Trento-IPRASE del Trentino, 2006.

[18] Adriano Demattè. «Matematica e documenti storici». In: *Inserto* 14 (2010), pp. 54–68.

[19] William Dunham. *Viaggio attraverso il genio. I grandi teoremi della matematica.* Zanichelli, 1992.

[20] Federigo Enriques, Franco Ghione e Mauro Moretti. *Insegnamento dinamico.* Agorà, 2003.

[21] IL CONSIGLIO DELL'UNIONE EUROPEA. «RACCOMANDAZIONE DEL CONSIGLIO del 22 maggio 2018 relativa alle competenze chiave per l'apprendimento permanente». In: *Gazzetta ufficiale dell'Unione europea* (2018), pp. 189/1–189/13.

[22] John Fauvel e Johannes Arnoldus van Maanen. *History in mathematics education: The ICMI study.* Vol. 6. Springer Science & Business Media, 2006.

[23] Attilio Frajese. *Opere di Archimede.* Utet, 1974.

[24] F. Furinghetti e A. Somaglia. «Storia della matematica in classe». In: *L'educazione matematica* 35.5 (1997), p. 2.

[25] Fulvia Furinghetti. «Storia della matematica per insegnanti e studenti». In: *Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* Universidad de Granada. 2003, pp. 87–96.

[26] AR G. *pi greco* La bellezza della matematica.* 2013. URL: `https://www.youtube.com/watch?v=rjw0auMx4d4`.

[27] Livia Giacardi. «La storia della matematica nell'insegnamento». 2013.

[28] Livia Giacardi. «Matematica e humanitas scientifica Il progetto di rinnovamento della scuola di Giovanni Vailati». In: *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. La matematica nella Società e nella Cultura* 2-A (1999), pp. 317–352.

[29] Livia Giacardi. «Tullio Viola e l'insegnamento della matematica: approcci metodologici e interventi istituzionali». In: *Conferenze e Seminari 2013-2014* (2014), pp. 121–127.

[30] Livia Giacardi e Silvia Clara Roero. *La matematica delle civiltà arcaiche.* Stampatori didattica, 1979.

[31] Antonio Giambò. *Ancora si π: metodi a confronto.* 2021. URL: `https://www.matmedia.it/ancora-su-%CF%80-metodi-a-confronto/?utm_source=rss&utm_medium=rss&utm_campaign=ancora-su-%5C%25cf%5C%2580-metodi-a-confronto`.

[32] Antonio Giambò. *Formule abbastanza strane per il calcolo di π.* 2021. URL: `https://www.matmedia.it/formule-abbastanza-strane-per-il-calcolo-di-%CF%80/`.

[33] Pietro Greco. *Storia di π greco.* Carrocci editore, 2018.

[34] Lucia Grugnetti e Francesco Speranza. «Riflessioni sul problema Storia e Didattica della matematica». In: *Rivista matematica della Università degli studi di Parma* (2000), pp. 71–77.

[35] Stephen Hales. *La statique des vegetaux, et l'analyse de l'air.* A Paris, 1735.

[36] *I Numeri Greci.* 2022. URL: `https://inumeri.net/i-numeri-greci/`.

[37] Uffe Thomas Jankvist. «A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education». In: *Educational studies in Mathematics* 71.3 (2009), pp. 235–261.

[38] George Gheverghese Joseph e Barbara Mussini. *C'era una volta un numero*. Il saggiatore, 2000.

[39] Gou Shuchun Karine Chemla. *Les neuf chapitres : le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. Dunod, 2004.

[40] Felix Klein. *Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen*. Vol. 1. BG Teubner, 1907.

[41] *La numerazione sumera*. 2014. URL: `https://www.studiarapido.it/la-numerazione-sumera/`.

[42] J.L. Lagrange. *Lezioni elementari sulle matematiche: date alla Scuola Normale di Francia l'anno 1795*. Coi tipi di Paolo Emilio Giusti, 1839.

[43] Attilio Frajese–Lamberto Maccioni. *Gli elementi di Euclide*. Torino, UTET, 1970.

[44] Elisa Macina. *Greci*. 2022. URL: `http://progettomatematica.dm.unibo.it/NumeriAdditivi/greci.html`.

[45] MIUR. *Indicazioni nazionali degli obbiettivi specifici di apprendimento per i licei*. 2010. URL: `https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf`.

[46] Klein Morris. *Storia del pensiero matematico. Volume primo. Dall'antichità al Settecento*. Biblioteca Einaudi, 2018.

[47] Junaid Mubeen. *Mathematics without history is soulless*. 2017. URL: `https://medium.com/hackernoon/mathematics-without-history-is-soulless-978436602fa4`.

[48] Mogens Niss. «Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project». In: *3rd Mediterranean conference on mathematical education*. 2003, pp. 115–124.

[49] Steven Pigeon. «Quadrature in Ancient Egypt Revisited». 2016.

[50] George Polya. *La scoperta matematica. Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi*. Vol. 1. Feltrinelli, 1971.

[51] Luis Radford. «On psychology, historical epistemology, and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics». In: *For the learning of mathematics* 17.1 (1997), pp. 26–33.

[52] Eleanor Robson. «Words and pictures: New light on Plimpton 322». In: *The American Mathematical Monthly* 109.2 (2002), pp. 105–120.

[53] Editrice La Scuola, cur. *I regni dell'Antico Egitto*. 2018. URL: `http://www2.edu.lascuola.it/edizioni-digitali/GeoErodotoMagazine1/storia/immagini%5C%20gallery%5C%20cartine/U03/regni_AnticoEgitto/delivery/index.html`.

[54] Math segnale. *MATH-segnale-Approssimiamo Pi greco*. 2021. URL: `https://www.mathsegnale.it/risorse/pigreco/`.

[55] Francesco Severi. «Didattica della matematica». In: *Enciclopedia delle enciclopedie: Pedagogia, Formiggini* (1932), pp. 362–370.

[56] Francesco Severi. *Lezioni di analisi. Vol. 1*. Zanichelli, 1933.

[57] Tania Tanfoglio. *Anche i numeri hanno una storia.* 2011. URL: https://www.scienceforpassion.com/2011/12/anche-i-numeri-hanno-una-storia.html.

[58] Maria Timpanaro Cardini. *Commento al I libro degli elementi di Euclide.* Giardini editori e stampatori in Pisa, 1978.

[59] Giovanni Vailati. *Epistolario 1891-1909.* a cura di G. Lanaro. Einaudi, Torino, 1971.

[60] Giovanni Vailati. *Sull'importanza delle ricerche relative alla storia delle scienze.* Roux Frassati e C., 1897.

[61] François Viète. *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII.* TVRONIS, 1970.

[62] Shlomo Vinner. «Mathematics education: Procedures, rituals and man's search for meaning». In: *The Journal of Mathematical Behavior* 26.1 (2007), pp. 1–10.

[63] Francesco Vissani. *Cos'è la scienza?, di Richard Feynman.* 2018. URL: https://it.linkedin.com/pulse/cos%C3%A8-la-scienza-di-richard-feynman-francesco-vissani.

[64] Wikipedia, cur. *Sistema di numerazione babilonese.* 2020. URL: https://it.wikipedia.org/wiki/Sistema_di_numerazione_babilonese.

[65] Zanichelli, cur. *Carta dell'antico Egitto con la ripartizione in Alto e Basso Egitto.* 2013. URL: http://dizionaripiu.zanichelli.it/storiadigitale/p/mappastorica/261/Carta%5C%20dell%E2%80%99antico%5C%20Egitto%5C%20con%5C%20la%5C%20ripartizione%5C%20in%5C%20Alto%5C%20e%5C%20Basso%5C%20Egitto.

[66] Zanichelli, cur. *I due Imperi babilonesi.* 2013. URL: http://dizionaripiu.zanichelli.it/storiadigitale/p/mappastorica/277/i-due-imperi-babilonesi.

[67] Zanichelli, cur. *I regni ellenistici alla metà del III secolo a.C.* 2013. URL: http://dizionaripiu.zanichelli.it/storiadigitale/p/mappastorica/358/I%5C%20regni%5C%20ellenistici%5C%20alla%5C%20met%C3%A0%5C%20del%5C%20III%5C%20secolo%5C%20a.C..

[68] Zanichelli, cur. *I Sumeri.* 2013. URL: http://dizionaripiu.zanichelli.it/storiadigitale/p/mappastorica/264/i-sumeri.

[69] Zanichelli, cur. *Il Nuovo Regno.* 2013. URL: http://dizionaripiu.zanichelli.it/storiadigitale/p/mappastorica/279/il-nuovo-regno-1550-1150-ac.

[70] Zanichelli, cur. *L'impero accadico.* 2013. URL: http://dizionaripiu.zanichelli.it/storiadigitale/p/mappastorica/265/l-impero-accadico.

[71] Zanichelli, cur. *L'impero di Alessandro Magno.* 2013. URL: http://dizionaripiu.zanichelli.it/storiadigitale/p/mappastorica/342/l-impero-di-alessandro-magno.

[72] Zanichelli, cur. *L'impero di Hammurabi.* 2013. URL: http://dizionaripiu.zanichelli.it/storiadigitale/p/mappastorica/276/L'impero%5C%20di%5C%20Hammurabi.

[73] Zanichelli, cur. *La regione del Mediterraneo e del Mar Nero con le principali località della colonizzazione greca*. 2013. URL: http://dizionaripiu.zanichelli.it/storiadigitale/p/mappastorica/301/la-regione-del-mediterraneo-e-del-mar-nero-con-le-principali-localita-della-colonizzazione-greca.

[74] Zanichelli, cur. *Le antiche dinastie cinesi: Shang, Qin, Han*. 2013. URL: http://dizionaripiu.zanichelli.it/storiadigitale/p/mappastorica/281/le-antiche-dinastie-cinesi-shang-qin-han.

[75] Zanichelli, cur. *Roma e l'Italia meridionale all'inizio del III secolo a.C.* 2013. URL: http://dizionaripiu.zanichelli.it/storiadigitale/p/mappastorica/354/Roma%5C%20e%5C%20l%E2%80%99Italia%5C%20meridionale%5C%20all%E2%80%99inizio%5C%20del%5C%20III%5C%20secolo%5C%20a.C..

Ringraziamenti

Ringrazio la professoressa Cattabriga che è stata una guida sicura durante tutto il percorso. La ringrazio di cuore per aver compreso i miei tempi lunghi, per aver accettato questo lavoro di tesi ed in qualche modo per aver creduto in questo progetto e nelle mie potenzialità. La sensibilità dovrebbe essere uno dei tratti caratterizzanti un'insegnante con la i maiuscola e credo che lei ne abbia dimostrata molta seguendomi in questo percorso.

Ringrazio il professor Coen per avermi fatto amare una materia come la storia che mai avrei pensato potesse piacermi e per aver accettato di seguirmi durante il percorso di tesi. La saggezza e la passione sprigionate durante ogni lezione hanno risolto qualcosa in me, dando inizio all'idea di questo progetto di tesi. Nella mia carriera universitaria ho incontrato pochi professori con una conoscenza profonda e poliedrica come la sua.

Ringrazio la professoressa Alboni che nonostante la situazione precaria attuale, si è fidata di una sconosciuta concedendomi tempo prezioso nella sua classe. Inoltre un ringraziamento speciale va ai suoi studenti che si sono impegnati con attenzione mettendosi in gioco nella sperimentazione.

Ringrazio la mia famiglia per non avermi mai fatto mancare nulla ed avermi sostenuta in questo lunghissimo percorso. L'amore, anche se ognuno lo dimostra a modo proprio, è la più grande forza che qualsiasi persona possa sperare di ricevere.

Un ringraziamento speciale va alla mia metà. Il confronto tra due mondi distanti porta sempre accrescimento e tu, ogni giorno, mi insegni qualcosa di nuovo.

Non possono non ringraziare le mie amiche, vecchie e nuove, ognuna con una diversa peculiarità.

A Silvia che mi ha insegnato l'importanza delle virgole nella vita. Purtroppo, come può testimoniare la professoressa Cattabriga, non ho ancora imparato la punteggiatura, ma sono sicura di avere un'ottima guida al mio fianco.

A Giulia che mi ha insegnato che si può volere bene ad un persona anche non vedendola sempre, ma semplicemente portandola nel cuore.

Ad Erica che mi ha insegnato che è normale avere dei dubbi nel percorso, ma se si hanno insieme tutto diventa meno difficile.

A Carolina che mi ha insegnato che esistono i sogni e si possono realizzare, ovunque sarai spero che tu gioisca con me in questo giorno proteggendomi e sgrindandomi come solo tu sapevi fare.