Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Metodo di Hamilton-Jacobi e sistemi canonicamente integrabili

Tesi di Laurea in Fisica Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Emanuela Caliceti

Presentata da:
Stefania Barberini

Seconda sessione
Anno Accademico 2010-2011

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Non esiste scienza che non si sia sviluppata a partire dall'osservazione dei fenomeni, cioè ogni scienza è il frutto della curiosità dell'uomo e della continua rielaborazione delle sue conoscenze. Fin dalle sue origini l'uomo ha sempre sentito l'esigenza di migliorarsi, di scoprire cose nuove e di semplificare le vecchie. Questa spinta verso un continuo miglioramento domina ogni ragionamento scientifico ed è il fulcro del progresso. Nella meccanica razionale e analitica un metodo generale per lo studio del moto di un qualunque sistema meccanico è dato dal principio di D'Alambert, da cui si possono ricavare le equazioni di Lagrange e di Hamilton, proprio grazie a questa esigenza di trovare metodi sempre più veloci ed accurati.
In questa introduzione esporremo in forma sintetica i risultati e le temetiche che verranno illustrati più dettagliatamente nei capitoli successivi, in modo da mettere in evidenza gli obiettivi di questa tesi. Per gli aspetti tecnici esposti in questo capitolo introduttivo si è fatto riferimento principalmente al trattato classico [3].

Consideriamo un sistema meccanico formato da N punti materiali. Sia P_s, $s = 1, ..., N$, un punto generico del sistema, m_s la massa di P_s, $\vec{a_s}$ la sua accelerazione, $\vec{F_s}$ e $\vec{\Phi_s}$ rispettivamente la forza attiva e la reazione vincolare agente su P_s. Queste ultime grandezze sono relative ad un istante generico

di tempo t.
Si consideri l'identità

$$\vec{F_s} = m_s\vec{a_s} + \vec{F}s - m_s\vec{a_s} \ , \quad \forall \ s = 1, ..., N \tag{1.1}$$

Questo significa che la forza attiva applicata in un istante generico ad un punto del sistema si può pensare come somma della forza $m_s\vec{a_s}$ prodotta dall'accelerazione $\vec{a_s}$ e della *forza perduta* per riequilibrare le reazioni vincolari, con entrambe le forze applicate al medesimo punto.
Ora dall'equazione $m_s\vec{a_s} = \vec{F_s} + \vec{\Phi_s}$ si ha subito

$$(\vec{F_s} - m_s\vec{a_s}) + \vec{\Phi_s} = 0. \tag{1.2}$$

Dunque la reazione del vincolo è, per ogni istante e punto del sistema, uguale e contraria alla forza perduta, che non influisce sul moto, essendo compensata dalla reazione vincolare. Da queste considerazioni segue la formulazione del *Principio di D'Alembert*, che sostiene che in ogni istante le forze perdute da un sistema meccanico vengono riequilibrate dalle reazioni vincolari, cioè costituiscono un insieme di forze che manterrebbe il sistema meccanico in equilibrio. Di conseguenza, ogni equazione fra le forze attive che esprime una condizione d'equilibrio di un sistema meccanico vale anche per il movimento dello stesso sistema purché alle forze attive si sostituiscano le forze perdute. Si ottengono in questo modo le equazioni del moto del sistema e si ottiene un metodo per calcolare le reazioni vincolari quando i corpi non sono in quiete. Grazie al Principio di D'Alembert si riconduce ogni problema di dinamica ad un altro di statica, così le reazioni vincolari si calcolano in dinamica con gli stessi procedimenti della statica, sostituendo, come anticipato, alle forze attive le forze perdute. Poiché le forze perdute, applicate ad un sistema meccanico, lo lasciano in equilibrio, esse soddisfano il principio dei lavori virtuali, cioè in ogni istante il lavoro virtuale delle forze perdute è nullo per spostamenti virtuali invertibili e negativo per spostamenti virtuali non invertibili:

$$\sum_{s=1}^{N}(\vec{F_s} - m_s\vec{a_s}) \cdot \delta P_s \leqslant 0 \tag{1.3}$$

Questa è l'*equazione fondamentale o simbolica della dinamica*, scritta per la prima volta da Lagrange. Ovviamente se il sistema è in quiete $\vec{a_s} = 0$ $\forall\ s = 1, ..., N$ e l'equazione si riduce al principio dei lavori virtuali.
Fu proprio Lagrange ad aver dedotto dall'equazione (1.3), equazioni differenziali nei parametri lagrangiani, che permettono, almeno in linea concettuale, di descrivere il moto di qualunque sistema meccanico ad n gradi di libertà. Per arrivare alla scrittura di tali equazioni è necessario conoscere l'espressione ed alcune proprietà dell'energia cinetica di un sistema meccanico in funzione dei parametri lagrangiani.
Si considera il punto P_s in funzione dei parametri lagrangiani $q_1, ..., q_n$ e del tempo t:

$$P_s = P_s(q_1, ..., q_n, t).$$

Dunque, posto $\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i\ \forall\ i = 1, ..., n$, la velocità $\vec{v_s}$ di P_s, $\forall\ s = 1, ..., N$, avrà il valore

$$\vec{v_s} = \frac{dP_s}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P_s}{\partial q_k}\ \dot{q}_k + \frac{\partial P_s}{\partial t} \tag{1.4}$$

Per definizione l'energia cinetica è data dalla seguente espressione

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s \vec{v_s} \cdot \vec{v_s} \qquad \text{con} \quad T = T(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n, t)$$

dove con $\vec{a} \cdot \vec{b}$ si indica il prodotto scalare di due generici vettori $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.
Derivando rispetto a $\dot{q}_i$ si ha

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{s=1}^{N} m_s \vec{v_s} \cdot \frac{\partial \vec{v_s}}{\partial q_i}\ , \quad \forall\ i = 1, ..., n. \tag{1.5}$$

Analogamente derivando rispetto a $\dot{q}_i$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{s=1}^{N} m_s \vec{v_s} \cdot \frac{\partial \vec{v_s}}{\partial \dot{q}_i}\ , \quad \forall\ i = 1, ..., n \tag{1.6}$$

e poiché dalla (1.4) si ottiene $\frac{\partial \vec{v_s}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial P_s}{\partial q_i}$, la (1.6) può essere riscritta

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{s=1}^{N} m_s \vec{v_s} \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_i}\ , \quad \forall\ i = 1, ..., n. \tag{1.7}$$

Derivando rispetto al tempo la (1.7), notando che

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P_s}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{dP_s}{dt}\right) = \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial q_i}$$

e utilizzando la (1.5) si ottiene la seguente espressione

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) &= \sum_{s=1}^{N} m_s \vec{a}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_i} + \sum_{s=1}^{N} m_s \vec{v}_s \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P_s}{\partial q_i}\right) = \\ &= \sum_{s=1}^{N} m_s \vec{a}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Ora nell'ipotesi di vincoli bilaterali in presenza dei quali ogni spostamento virtuale è invertibile, la (1.3) assume la forma

$$\sum_{s=1}^{N} (\vec{F}_s - m_s \vec{a}_s) \cdot \delta P_s = 0. \tag{1.9}$$

Ricordando poi che gli spostamenti virtuali non avvengono realmente ma sono fittizi e che possiamo pensare che avvengano in un tempo $\delta t = 0$ con velocità infinita, si ha

$$\delta P_s = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P_s}{\partial q_k} \delta q_k$$

e dalla (1.9) si ottiene

$$\sum_{s=1}^{N} (\vec{F}_s - m_s \vec{a}_s) \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P_s}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{s=1}^{N} (\vec{F}_s - m_s \vec{a}_s) \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_k} \right] \delta q_k = 0 \tag{1.10}$$

Per definizione di parametri Lagrangiani i differenziali δq_k, con $k = 1, ..., n$, sono fra loro indipendenti e possono assumere valori arbitrari.
Dalla (1.10) si ha quindi

$$\sum_{s=1}^{N} (\vec{F}_s - m_s \vec{a}_s) \cdot \frac{\partial P_S}{\partial q_k} = 0 \ , \quad \forall \ k = 1, ..., n$$

o, equivalentemente,

$$\sum_{s=1}^{N} m_s \vec{a}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_k} = \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_k} := Q_k \ , \quad \forall \ k = 1, ..., n \tag{1.11}$$

essendo Q_k le cosiddette componenti Lagrangiane delle forze o forze generalizzate di Lagrange. Combinando ora la (1.8) e la (1.11) si ottiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \ , \quad \forall \ i = 1, ..., n. \tag{1.12}$$

Queste sono le celebri *equazioni di Lagrange nella seconda forma*, che opportunamente corredate di condizioni iniziali e note le Q_i, permettono di conoscere il moto di un qualunque sistema meccanico. Un esempio semplice, ma significativo, della loro applicazione è quello del punto materiale libero nello spazio. In tal caso, applicando le equazioni, appena citate, si ritrova la legge fondamentale della dinamica. Le equazioni di Lagrange costituiscono un sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine nelle n incognite $q_i = q_i(t)$ e possono essere espresse in forma normale, cioè esplicitate rispetto alle derivate seconde $\ddot{q}_i$. Assegnate le condizioni iniziali, cioè fissate la configurazione

$$(q_1(t_0), ..., q_n(t_0)) = ({q_1}^0(t_0), ..., {q_n}^0(t_0))$$

e le "velocità" del sistema all'istante t_0

$$(\dot{q_1}(t_0), ..., \dot{q_n}(t_0)) = (\dot{{q_1}^0}(t_0), ..., \dot{{q_n}^0}(t_0)),$$

per il noto teorema di Cauchy esiste una ed una sola soluzione delle (1.12), rappresentata dalle funzioni $(q_1(t), ..., q_n(t))$, che per $t = t_0$ soddisfano le condizioni iniziali. Poiché note le $(q_1(t), ..., q_n(t))$, è nota la configurazione del sistema in ogni istante t, si può dire che le equazioni di Lagrange riducono la conoscenza del moto ad un problema d'analisi e che le condizioni iniziali e le forze attive determinano l'andamento di ogni sistema meccanico.

In particolare se si considerano forze conservative generate da un potenziale $U = U(q_1, ..., q_n)$ tale che

$$\sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \cdot \delta P_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i$$

si ottiene facilmente

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \ , \ \forall \ i = 1, ..., n.$$

Pertanto le equazioni di Lagrange (1.12) possono essere così riscritte

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} \ , \quad \forall\ i = 1, ..., n. \tag{1.13}$$

Poichè U non dipende dalle $\dot{q}_i$ si ha $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0\ \forall\ i = 1, ..., n$ e, ponendo $L = T + U$, dalle (1.13) si ricavano le equazioni di *Eulero-Lagrange*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = 0 \ , \quad \forall\ i = 1, ..., n. \tag{1.14}$$

L si chiama *funzione di Lagrange* o *Lagrangiana* del sistema e grazie ad essa le equazioni (1.12) assumono una forma semplice e comoda per le applicazioni. Nonostante ciò il sistema delle equazioni di Lagrange è pur sempre un sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine, quindi risulta sempre particolarmente difficile trovarne una soluzione. Tuttavia, come è noto dall'analisi, un tale sistema può essere ricondotto ad un sistema di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine, equivalente a quello di partenza e dotato di una particolare simmetria. Un tale sistema è rappresentato dalle *equazioni di Hamilton*, che rappresentano una significativa riscrittura delle equazioni di Lagrange. La forma stessa delle equazioni di Lagrange (1.14) suggerisce l'introduzione di nuove variabili $p_1, ..., p_n$ dette *variabili coniugate* o *momenti cinetici* delle $q_1, ..., q_n$ così definite

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) \ , \quad \forall\ i = 1, ..., n, \tag{1.15}$$

Avendo posto $q = (q_1, ..., q_n)$ e $\dot{q} = (\dot{q}_1, ..., \dot{q}_n)$. Quindi le equazioni di Lagrange diventano

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}(q, \dot{q}, t) \ , \quad \forall\ i = 1, ..., n \tag{1.16}$$

e le variabili p_i sono funzioni di $q, \dot{q}, t$, cioè $p_i = p_i(q, \dot{q}, t)$. Ora il sistema è invertibile rispetto alle $\dot{q}_i$ se la matrice $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\right)$ ha determinante diverso da zero e per i sistemi naturali tale matrice è sempre invertibile. Se tale condizione è soddisfatta si ottengono n equazioni in forma normale $\dot{q}_i = \dot{q}_i(p, q, t)$; le altre n equazioni si ottengono sostituendo il risultato appena ottenuto nelle equazioni stesse di Lagrange, ottenendo $\dot{p}_i = \dot{p}_i(p,q,t)$, avendo posto $p = (p_1, ..., p_n)$. Ora le $2n$ equazioni così ottenute hanno una struttura molto particolare e simmetrica.

Consideriamo allora la funzione, detta *funzione di Hamilton* o più semplicemente *Hamiltoniana* del sistema, definita mediante l'espressione

$$H(q,p,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i}\, \dot{q}_i - L(q,\dot{q},t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(q,\dot{q},t) \tag{1.17}$$

Differenziando la (1.17) e utilizzando le (1.15) e (1.16) si ha

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^{n} \big(\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i\big) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Essendo poi

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \tag{1.19}$$

dal confronto di (1.18) e (1.19) si ottiene

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\ , \ \forall\ i = 1, ..., n, \qquad -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Ricapitolando, se si considera una Lagrangiana $L(q,\dot{q},t)$, con determinante hessiano diverso da zero, il sistema

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \\ \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \end{cases} \qquad \forall\ i = 1, ..., n.$$

è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \qquad \forall\ i = 1, ..., n. \tag{1.20}$$

Questo è il sistema delle equazioni di Hamilton o *equazioni canoniche della Meccanica*; nel caso di vincoli scleronomi l'Hamiltoniana H è costante e corrisponde all'energia totale del sistema.

In maniera ancora più elegante e spontanea è possibile ricavare la funzione di Hamilton attraverso la *traformata di Legendre* che è così definita

Definizione 1.1. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ almeno di classe C^2 con $f^{(2)} > 0$ e sia $p \in \mathbb{R}$. Sia $f_p(x) = f(x) - px \; \forall \; x \in \mathbb{R}$.
Si chiama *trasformata di Legendre* di f la funzione

$$g(p) := \max_x(-f_p(x)).$$

Poiché l'energia cinetica T è una forma quadratica definita positiva è definita positiva anche la matrice hessiana $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}$, quindi la Lagrangiana $L = T - V$ ammette trasformata di Legendre, che è la Hamiltoniana. Inversamente, data una Hamiltoniana, con la formula inversa di Legendre si trova la rispettiva Lagrangiana.
L'importanza delle equazioni di Hamilton (1.20) è dovuta al fatto che descrivono l'evoluzione temporale di un sistema meccanico, cioè una loro soluzione ci permette di conoscere la configurazione del sistema istante per istante. Purtroppo, essendo un sistema di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine, non è sempre facile trovarne una soluzione. Risulta quindi particolarmente utile la nozione di trasformazione canonica, che varrà approfondita nel Capitolo 2, che consiste in un cambiamento di coordinate che mantiene inalterata la struttura delle equazioni di Hamilton. In altre parole attraverso la nozione di trasformazione canonica si cerca di passare dalla Hamiltoniana H ad una nuova Hamiltoniana H' le cui equazioni di Hamilton siano di più semplice risoluzione di quelle iniziali. In questo contesto un metodo molto importante è il metodo di Hamilton-Jacobi che, attraverso le due equazioni di Hamilton-Jacobi dipendente dal tempo e di Hamilton-Jacobi stazionaria, fornisce uno strumento molto importante che apre la strada alla nozione di sistema Hamiltoniano canonicamente integrabile. Per questo tipo di sistema Hamiltoniano, come vedremo, le equazioni di Hamilton sono di immediata risoluzione e, nel caso che le nuove variabili siano del tipo "azione-angolo", i suoi moti sono tutti classificabili nella stessa tipologia dei cosiddetti moti quasiperiodici.
La trattazione di questi argomenti sarà l'oggetto dei prossimi due capitoli di questa tesi e verrà svolta seguendo principalmente i trattati [1, 2]. In particolare nel Capitolo 2 verranno richiamate le nozioni di base nell'ambito della

meccanica analitica, formalismo Lagrangiano e Hamiltoniano e la nozione di trasformazione canonica, poi verrà illustrato dettagliatamente il metodo della funzione generatrice per la costruzione di trasformazioni canoniche. Nel successivo Capitolo 3 verrà illustrato in dettaglio il metodo di Hamilton-Jacobi e verranno dati la definizione e alcuni esempi classici di sistemi canonicamente integrabili.

Capitolo 2

Richiami di Meccanica analitica

2.1 Equazioni di Lagrange e Hamilton

Sia data una varietà differenziabile M di classe C^∞ e di dimensione n, propriamente immersa in $\mathbb{R}^N$, dove $n < N$.
Sia TM_x lo spazio tangente alla varietà nel punto $x \in M$ e $TM = \bigcup_{x \in M} TM_x$ il fibrato tangente alla varietà M, unione degli spazi tangenti alla varietà nei suoi punti, il quale possiede una struttura naturale di varietà differenziabile la cui dimensione è doppia della dimensione di M.
Si costruiscono delle coordinate locali per TM nel seguente modo: siano $q_1, ..., q_n$ delle coordinate locali sulla varietà e siano $\xi_1, ..., \xi_n$ le componenti del vettore tangente; allora i $2n$ numeri $(q_1, ..., q_n, \xi_1, ..., \xi_n)$ danno un sistema di coordinate locali su TM.

Definizione 2.1. Sia $L : TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞,

$$L(\nu, x; t) \in C^\infty(TM \times \mathbb{R}; \mathbb{R}).$$

Allora la coppia (M, L) si dice un *sistema Lagrangiano* di configurazione M e Lagrangiana L.

Definizione 2.2. Sia $I \subset \mathbb{R}$. La curva $\gamma : t \in I \to \gamma(t) \in M$ è un *moto del sistema Lagrangiano* (M, L) se è un estremale del funzionale di azione $A(\gamma)$

calcolato lungo γ definito da

$$A(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{\gamma}, \gamma; t)dt$$

dove $(\dot{\gamma}(t), \gamma(t); t) \in TM_{\gamma(t)}$.

Indichiamo con $x = q = (q_1, ..., q_n)$, $\nu = \dot{q} = (\dot{q}_1, ..., \dot{q}_n)$ le coordinate su TM, cioè $(x(t), \nu(t)) = (q(t), \dot{q}(t))$ rappresenti una curva su M con velocità $\dot{q}(t)$. Si ha allora il seguente risultato classico:

Corollario 2.1.1. *$\gamma(t)$ è un moto del sistema Lagrangiano (M, L) se e solo se soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange (1.14):*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)(\dot{q}, q; t) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)(\dot{q}, q; t) = 0 \ , \quad \forall\ i = 1, ..., n,$$

ovvero

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \nu_i}\right)(\dot{\gamma}(t), \gamma(t); t) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right)(\dot{\gamma}(t), \gamma(t); t) = 0 \ , \quad \forall\ i = 1, ..., n.$$

Definizione 2.3. Un sistema Lagrangiano si dice *naturale* se la funzione di Lagrange è uguale alla differenza tra energia cinetica ed energia potenziale, $L = T - V$, con $T = \frac{1}{2}\ (\nu \cdot \nu)$, $\nu \in TM_x$ e $V = V(x) \in C^\infty(M)$.

Definizione 2.4. Se $V = 0$ il sistema non è soggetto a forze attive esterne e dunque è libero di muoversi su M, L si dice Lagrangiana *geodetica* e i moti corrispondenti si dicono *moti geodetici*, in quanto rappresentano delle curve dette geodetiche della varietà, o *moti per inerzia.*

Sia (M, L) un sistema Lagrangiano con $L(\nu, x; t) \in C^\infty(TM \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, sia inoltre

$$\text{Hess}_\nu L = \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \nu_i \partial \nu_j}\right) > 0 \quad \forall\ i, j = 1, ..., n,$$

localmente in un punto $(\nu, x; t)$.
Allora L è detta *Lagrangiana regolare* e fissato (x, t), possiamo trovare la funzione che a $(\nu, x; t)$ associa

$$\frac{\partial L}{\partial \nu_i}(\nu, x; t) \quad \forall\ i = 1, ..., n$$

che, per il teorema della funzione inversa, è localmente invertibile rispetto alla variabile ν perché $\mathrm{Hess}_\nu L > 0$.
Allora, posto

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \nu_i} \quad \forall\ i = 1, ..., n,$$

per la suddetta invertibilità è possibile esprimere ν in funzione di π, perciò, $\nu = \nu(\pi, x; t)$.
Definiamo la *funzione Hamiltoniana*

$$H(\pi, x; t) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \nu_i(\pi, x; t) - L(\nu(\pi, x; t), x; t).$$

Per questa vale il teorema seguente:

Teorema 2.1.2. *Il moto* $(\nu, x; t) = (\dot{q}(t), q(t); t)$ *soddisfa le equazioni di Lagrange, cioè*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \nu_i}\right)(\dot{q}(t), q(t); t) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right)(\dot{q}(t), q(t); t) = 0\ , \quad \forall\ i = 1, ..., n,$$

se e solo se il moto $(\pi, x; t) = (p(t), q(t); t)$*, con*

$$p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \nu_i}(\dot{q}, q; t) \quad \forall\ i = 1, ..., n$$

soddisfa le seguenti equazioni di Hamilton relative alla Hamiltoniana $H(\pi, x; t)$ *sopra definita, cioè*

$$\begin{cases} \dot{p}_i(t) = \dot{\pi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(p(t), q(t); t) \\ \dot{q}_i(t) = \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial \pi_i}(p(t), q(t); t) \end{cases} \quad \forall\ i = 1, ..., n.$$

Osservazione 1. È anche possibile definire una Lagrangiana a partire da una Hamiltoniana regolare: infatti, assegnata $H(\pi, x; t) \in C^\infty(TM \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ e tale che

$$\mathrm{Hess}_\pi H = \det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \pi_i \partial \pi_j}\right) > 0 \quad \forall\ i, j = 1, ..., n,$$

localmente in un punto $(\pi, x; t)$, allora H è detta *Hamiltoniana regolare* e fissato (x, t), l'applicazione che a $(\pi, x; t)$ associa

$$\frac{\partial H}{\partial \pi_i}(\pi, x; t) \quad \forall\ i = 1, ..., n$$

è localmente invertibile per il teorema della funzione inversa ed è possibile esprimere π come funzione di $(\nu, x; t)$.
Quindi si può esprimere la Lagrangiana come:

$$L(\nu, x; t) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(\nu, x; t)\nu_i - H(\pi(\nu, x; t), x; t).$$

La relazione tra $L(\nu, x; t)$ e $H(\pi, x; t)$ può essere espressa anche mediante le trasformazioni di Legendre.

Proposizione 2.1.3. *Sia, per semplicità,* $M = \mathbb{R}^N$*,* $TM = \mathbb{R}^{2N}$*.*
Allora, assegnata la Lagrangiana regolare $L(\nu, x; t)$*, si trova*

$$H(\pi, x; t) = \max_{\nu \in \mathbb{R}^N} \left(\sum_{i=1}^{N} \pi_i \nu_i - L(\nu, x; t) \right),$$

sfruttando la formula di Legendre;
inversamente, data l'Hamiltoniana regolare $H(\pi, x; t)$*, si trova*

$$L(\nu, x; t) = \max_{\pi \in \mathbb{R}^N} \left(\sum_{i=1}^{N} \pi_i \nu_i - H(\pi, x; t) \right),$$

grazie alla formula di Legendre inversa.

2.2 Trasformazioni canoniche

In relazione alle equazioni di Hamilton è interessante la nozione di *trasformazione canonica*, cioè di una trasformazione di variabili che lascia inalterata la struttura delle equazioni di Hamilton. Tale nozione ha una notevole importanza negli algoritmi utilizzati nella teoria delle perturbazioni.

Definizione 2.5. Siano M e N varietà differenziabili di classe C^∞ di dimensione n; siano V un sottoinsieme aperto di T^*M e W un sottoinsieme aperto di T^*N. Siano poi assegnate due Hamiltoniane $H \in C^\infty(V \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ e $H' \in C^\infty(W \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Un' applicazione

$$\begin{aligned} C : V \times \mathbb{R} &\longrightarrow W \times \mathbb{R} \\ (p, q, t) &\longmapsto (\pi, k, t) = C(p, q, t) \end{aligned}$$

biunivoca e di classe C^∞, si dice una *trasformazione canonica* di V in W rispetto alla coppia di Hamiltoniane H, H' se, essendo

$$t \longmapsto (p(t), q(t), t)$$

un qualunque moto in V per la Hamiltoniana H che verifica le equazioni di Hamilton

$$\begin{cases} \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(p(t), q(t), t) \\ \dot{q}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(p(t), q(t), t) \end{cases}, \quad \forall\ i = 1, ..., n,$$

il suo trasformato

$$t \longmapsto (\pi(t), k(t), t) = C(p(t), q(t), t) \in W \times \mathbb{R}$$

è un moto per l'Hamiltoniana H', ovvero

$$\begin{cases} \dot{\pi}_i(t) = -\frac{\partial H'}{\partial k_i}(\pi(t), k(t), t) \\ \dot{k}_i = \frac{\partial H'}{\partial \pi_i}(\pi(t), k(t), t) \end{cases}, \quad \forall\ i = 1, ..., n$$

e viceversa. In tal caso le Hamiltoniane H e H' e le variabili (p, q, t) e (π, k, t) si dicono *canonicamente coniugate.*

Osservazione 2. In generale, il moto e l'operazione di cambiamento di coordinate non commutano; tuttavia, se la trasformazione è canonica, manda moti in moti, e quindi la struttura delle equazioni di Hamilton rimane inalterata.

Osservazione 3. Sottolineiamo il fatto che, essendo C invertibile, si possono esprimere p e q in funzione di π e k, cioè $(p, q, t) = C^{-1}(\pi, k, t)$; perciò

$$\begin{cases} p = P(\pi, k, t) \\ q = Q(\pi, k, t) \end{cases}$$

Definizione 2.6. Se C è una trasformazione canonica indipendente dal tempo t e se, qualunque sia la funzione Hamiltoniana $H(p,q)$ su V indipendente da t, la Hamiltoniana canonicamente coniugata è

$$H'(\pi,k) = H(C^{-1}(\pi,k)),$$

allora C è una *trasformazione completamente canonica.*

Illustriamo ora un metodo molto generale per costruire una trasformazione canonica mediante una funzione generatrice.

Proposizione 2.2.1. ***Metodo della funzione generatrice.***
Siano V un sottoinsieme aperto di T^*M, W un sottoinsieme aperto di T^*N e F una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$ che denoteremo:

$$(q,k,t) \longrightarrow F(q,k,t) \in \mathbb{R}.$$

Posto

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}(q,k,t) \\ \pi_i = -\frac{\partial F}{\partial k_i}(q,k,t) \end{cases}, \quad \forall\ i = 1,...,n, \tag{2.1}$$

supponiamo che tali relazioni stabiliscano una corrispondenza biunivoca

$$\begin{aligned} C_F : V \times \mathbb{R} &\longrightarrow W \times \mathbb{R} \\ (p,q,t) &\longmapsto C_F(p,q,t) = (\pi,k,t). \end{aligned}$$

Inoltre supponiamo che C_F sia di classe C^∞ su $V \times \mathbb{R}$ con inversa di classe C^∞ su $W \times \mathbb{R}$ e con matrice jacobiana a determinante non nullo.
Allora la trasformazione C_F è canonica e coniuga una qualunque Hamiltoniana $H(p,q,t)$, regolare con $V \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, con la Hamiltoniana

$$H'(\pi,k,t) = H(C_F^{-1}(\pi,k,t)) + \frac{\partial F}{\partial t}(q(\pi,k,t),k,t), \tag{2.2}$$

dove

$$C_F^{-1}(\pi,k,t) = (p(\pi,k,t), q(\pi,k,t), t).$$

L' applicazione F è detta funzione generatrice della trasformazione canonica C_F.

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme

$$\mathscr{N}^V = \mathscr{N}_{t_1,t_2}(p_1, q_1, t_1; p_2, q_2, t_2; V),$$

dei moti m in V aventi la forma

$$t \longmapsto m(t) = (p(t), q(t), t) \in V \quad \text{con} \quad t \in [t_1, t_2],$$

e tali che $p(t_1) = p_1$, $q(t_1) = q_1$, $p(t_2) = p_2$, $q(t_2) = q_2$, detti moti "sincroni"in V. Consideriamo la funzione su $\mathscr{N}^V$:

$$S(m) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\dot{q}_i(t) - H(p(t), q(t), t) \right) dt. \tag{2.3}$$

La condizione di stazionarietà di S su m, in $\mathscr{N}^V$, è la condizione che il moto m verifichi le equazioni di Hamilton in V con Hamiltoniana H, che sono, essenzialmente, le equazioni di Lagrange per l'azione di Lagrangiana (2.3). Sia ora

$$t \longmapsto \mu(t) = (\pi(t), k(t), t) = C_F(p(t), q(t), t) \quad \text{con} \quad t \in [t_1, t_2],$$

il moto immagine di un moto $m \in \mathscr{N}^V$. Dunque $\mu(t)$ è un moto in

$$\mathscr{N}^W = C_F(\mathscr{N}^V) = \mathscr{N}_{t_1,t_2}(C_F(p_1, q_1, t_1), C_F(p_2, q_2, t_2); W).$$

Se $\mu(t)$ verifica le equazioni di Hamilton per un Hamiltoniana H' su W, dovrà rendere stazionaria in $\mathscr{N}^W$ l'azione

$$\Sigma(\mu) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\dot{k}_i(t) - H'(\pi(t), k(t), t) \right) dt.$$

Una condizione sufficiente perché questo avvenga è che:

$$S(m) = \Sigma(C_F(m)) + \text{costante} \quad \forall\ m \in \mathscr{N}^V$$

che è sicuramente verificata se la forma differenziale su V:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - H(p, q, t)dt$$

e la forma differenziale su W:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i dk_i - H'(\pi, k, t)dt$$

sono trasformate l'una nell'altra dalla trasformazione C_F a meno di un differenziale esatto. Questa condizione si può imporre richiedendo l'esistenza di una funzione G su W tale che:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - H(p, q, t)dt = \sum_{i=1}^{n} \pi_i dk_i - H'(\pi, k, t)dt + dG \tag{2.4}$$

dove p, q, t si pensano funzioni di π, k, t attraverso la trasformazione C_F. Per sfruttare la relazione (2.4), conviene pensare la funzione G come una funzione $\tilde{G}$ di q, k, t anzichè di π, k, t, mediante la (2.1).
Si ha allora dalla (2.4):

$$d\tilde{G} = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - \sum_{i=1}^{n} \pi_i dk_i - (H - H')dt. \tag{2.5}$$

Essendo poi

$$d\tilde{G} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial k_i} dk_i + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} dt$$

si vede che la (2.4) è valida se e solo se esiste una funzione G che, pensando, attraverso le (2.1), i coefficienti dei differenziali nel secondo membro di (2.5) come funzioni di q e k, è tale che, per $i = 1, ..., n$:

$$p_i = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial q_i}, \quad \pi_i = -\frac{\partial \tilde{G}}{\partial k_i}, \quad H' - H = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}. \tag{2.6}$$

Queste relazioni sono evidentemente soddisfatte proprio dalla funzione F. □

Osservazione 4. Dalla dimostrazione segue che altre trasformazioni di coordinate analoghe alle (2.1) sono trasformazioni canoniche. Ad esempio, da una funzione $F_1(q, \pi, t) \in C^\infty$ si costruisce una trasformazione canonica C_{F_1} ponendo

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}(q, \pi, t) \quad \text{e} \quad k_i = \frac{\partial F_1}{\partial \pi_i}(q, \pi, t), \quad \forall\, i = 1, ..., n,$$

da cui si avrà

$$H'(\pi,k,t) = H({C_{F_1}}^{-1}(\pi,k,t)) + \frac{\partial F_1}{\partial t}(q(\pi,k,t),\pi,t), \quad \forall\ i = 1,...,n.$$

Analogamente una funzione $F_2(p,k,t) \in C^\infty$ definisce una trasformazione canonica C_{F_2} ponendo

$$q_i = -\frac{\partial F_2}{\partial p_i}(p,k,t) \quad \text{e} \quad \pi_i = -\frac{\partial F_2}{\partial k_i}(p,k,t), \quad \forall\ i = 1,...,n,$$

da cui si avrà

$$H'(\pi,k,t) = H({C_{F_2}}^{-1}(\pi,k,t)) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(p(\pi,k,t),k,t), \quad \forall\ i = 1,...,n.$$

Infine una funzione $F_3(p,\pi,t) \in C^\infty$ definisce una trasformazione canonica C_{F_3} ponendo

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}(p,\pi,t) \quad \text{e} \quad k_i = \frac{\partial F_3}{\partial \pi_i}(p,\pi,t), \quad \forall\ i = 1,...,n,$$

da cui

$$H'(\pi,k,t) = H({C_{F_3}}^{-1}(\pi,k,t)) + \frac{\partial F_3}{\partial t}(p(\pi,k,t),\pi,t), \quad \forall\ i = 1,...,n.$$

Capitolo 3

Il metodo di Hamilton-Jacobi

3.1 Equazione di Hamilton-Jacobi dipendente dal tempo

Assegnato un sistema Hamiltoniano H in $V \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ si vuole determinare una trasformazione canonica

$$C : (p, q, t) \longrightarrow (\pi, k, t) = C(p, q, t)$$

che coniughi la Hamiltoniana $H(p, q, t)$ con una Hamiltoniana $H'(\pi, k, t)$ definita in $W \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ che sia identicamente nulla:

$$H'(\pi, k, t) = 0 \ , \quad \forall \ (\pi, k, t) \in W \times \mathbb{R}.$$

In questo modo le equazioni di Hamilton relative ad H' sono immediatamente integrabili:

$$\begin{cases} \dot{\pi} = -\frac{\partial H'}{\partial k} = 0 \\ \dot{k} = \frac{\partial H'}{\partial \pi} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \pi = \text{costante} := \pi_0 \\ k = \text{costante} := k_0 \end{cases} . \tag{3.1}$$

I moti per H' risultano punti fissi, quindi è possibile integrare le equazioni di Hamilton di partenza. Applicando la trasformazione inversa C^{-1} ai moti di H' si trovano i moti dell' Hamiltoniana di partenza, poi si cercherà la trasformazione C con il metodo della funzione generatrice illustrato nella

Proposizione 2.2.1. Cerchiamo dunque una funzione $S(\pi, q, t)$ che generi una trasformazione canonica C_S e che coniughi $H(p, q, t)$ a $H'(\pi, k, t) = 0$.
Prima di tutto si suppone l'invertibilità del sistema

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(\pi, q, t) \\ k_i = \frac{\partial S}{\partial \pi_i}(\pi, q, t) \end{cases} \qquad \forall\ i = 1, ..., n \tag{3.2}$$

Dalla (2.2) la condizione $H'(\pi, k, t) = 0$ diventa

$$H'(\pi, k, t) = H(C_S^{-1}(\pi, k, t)) + \frac{\partial S}{\partial t}(\pi, q(\pi, k, t), t) = 0$$

e utilizzando la prima delle (3.2) si ottiene l'equazione

$$H\bigg(\frac{\partial S}{\partial q}(\pi, q, t), q, t\bigg) + \frac{\partial S}{\partial t}(\pi, q, t) = 0, \tag{3.3}$$

nota come *equazione di Hamilton-Jacobi dipendente dal tempo.* Si tratta di un'equazione differenziale alle derivate parziali nelle incognite $S(\pi, q, t)$, che, sotto opportune ipotesi di regolarità sulla Hamiltoniana H, ammette infinite soluzioni.
Imponiamo la condizione iniziale:

$$S(\pi, q, t)|_{t=t_0} = \pi \cdot q = \sum_{i=1}^{n} \pi_i q_i. \tag{3.4}$$

Ne consegue che il punto fisso $(\pi, k) = (\pi_0, k_0)$, moto per la Hamiltoniana nulla $H' = 0$, in cui viene trasformato un generico moto $(p(t), q(t))$ di H in base alle (3.1), altro non è che il dato iniziale $(p(t_0), q(t_0))$.
Infatti, utilizzando le (3.2) si ha

$$p(t_0) = \frac{\partial S}{\partial q}(\pi, q, t)\bigg|_{t=t_0} = \pi(t_0) = \pi_0,$$

$$k_0 = k(t_0) = \frac{\partial S}{\partial \pi}(\pi, q, t)\bigg|_{t=t_0} = q(t_0).$$

Ora per risolvere l'equazione del moto basta applicare il seguente teorema, detto di Jacobi.

Teorema 3.1.1. ***Teorema di Jacobi.***
Sia assegnato il problema di Cauchy per $H(p,q,t) \in C^{\infty}\big(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}\big)$ *costituito dall'equazione differenziale non lineare alle derivate parziali del primo ordine (3.3)*

$$H\big(\frac{\partial S}{\partial q}(\pi,q,t),q,t\big) + \frac{\partial S}{\partial t}(\pi,q,t) = 0$$

e soggetta alle condizioni iniziali (3.4)

$$S(\pi,q,t)|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{n} \pi_i q_i.$$

Supponiamo che $S(\pi,q,t) \in C^{\infty}\big(\mathbb{R}^{2n}\big)$ *sia una soluzione locale in t, per* $|t| \leq \mathbb{R}$*. È allora possibile esplicitare*

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(\pi,q,t) \\ k_i = \frac{\partial S}{\partial \pi_i}(\pi,q,t) \end{cases} \quad \forall\ i = 1,...,n$$

per p e q, invertendo le equazioni (3.2) globalmente nello spazio e localmente nel tempo, in modo da definire due funzioni

$$\begin{cases} p_i = p_i(\pi,k,t) \\ q_i = q_i(\pi,k,t) \end{cases} \quad \textit{tali che} \quad \begin{cases} p_i(\pi,k,t)|_{t=t_0} = \pi_i \\ q_i(\pi,k,t)|_{t=t_0} = k_i \end{cases} \quad \forall\ i = 1,...,n$$

che risolvono per $|t| \leq \mathbb{R}$ *le equazioni di Hamilton di Hamiltoniana* $H(p,q,t)$

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases} \quad \forall\ i = 1,...,n$$

3.2 Equazione di Hamilton-Jacobi stazionaria

Supponiamo di partire ora da una Hamiltoniana autonoma, cioè indipendente dal tempo, $H = H(p,q)$. Applichiamo ad $H(p,q)$ il metodo di Hamilton-Jacobi illustrato nel precedente paragrafo richiedendo che la funzione generatrice incognita abbia la forma

$$S(\pi,q,t) = W(\pi,q) - E(\pi)t.$$

Sostituendo nell'equazione (3.3) si ottiene

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial q}(\pi, q), q\right) - E(\pi) = 0, \tag{3.5}$$

che può essere riscritta come

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial q}(\pi, q), q\right) = E(\pi), \tag{3.6}$$

nota come *equazione di Hamilton-Jacobi stazionaria.* Le incognite nella (3.6) sono le parti $W(\pi, q)$ e $E(\pi)$ che costituiscono la funzione generatrice $S(\pi, q, t)$. L'equazione (3.6) tuttavia ammette un'ulteriore interpretazione che fornisce una risposta al seguente problema: si vuole determinare una funzione generatrice $W(\pi, q)$ che generi una trasformazione

$$C_W : (p, q) \longrightarrow C_W(p, q) = (\pi, k)$$

che coniughi la Hamiltoniana $H(p, q)$ con una Hamiltoniana H' che dipende da un solo blocco di variabili, ad esempio $\pi = (\pi_1, ..., \pi_n)$:

$$H' = E(\pi).$$

Allora, sempre utilizzando la Proposizione 2.2.1 e imponendo questa condizione si ottiene

$$H'(\pi, k, t) = H(C_W^{-1}(\pi, k)) + \frac{\partial W}{\partial t} = H(C_W^{-1}(\pi, k)) = E(\pi),$$

che rispetto alle incognite $W(\pi, q)$ e $E(\pi)$ coincide con la (3.6). Inoltre possiamo osservare che in questo caso, come ogni qualvolta la funzione generatrice non dipende dal tempo, la nuova Hamiltoniana H' coniugata alla H, altro non è che la vecchia Hamiltoniana H espressa nelle nuove variabili (π, k). È poi facile verificare che l'invertibilità delle (3.2) assicura anche l'invertibilità del seguente sistema,

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}(\pi, q) \\ k_i = \frac{\partial W}{\partial \pi_i}(\pi, q) \end{cases} \quad \forall\ i = 1, ..., n$$

che, a sua volta, garantisce l'esistenza della trasformazione canonica C_W. Adesso valutiamo il vantaggio ottenuto avendo a disposizione una Hamiltoniana

$$H'(\pi, k) = E(\pi) := f(\pi)$$

dipendente solo dalle variabili π. In questo caso le equazioni di Hamilton si integrano immediatamente, infatti si ha

$$\begin{cases} \dot{\pi}_i = -\frac{\partial H'}{\partial k_i} = 0 \\ \dot{k}_i = \frac{\partial H'}{\partial \pi_i} \end{cases} \quad \forall\ i = 1, ..., n, \tag{3.7}$$

da cui innanzitutto $\pi(t) = \text{costante} = \pi_0$ e $\dot{k}(t) = f'(\pi_0) = \text{costante}$. Posto

$$\omega := f'(\pi_0) \in \mathbb{R}^n,$$

si ottiene

$$k(t) = \omega t + k_0,$$

e la soluzione generale di (3.7) assume dunque la forma:

$$\begin{cases} \pi_i(t) = \pi_{0i} \\ k_i(t) = \omega_i t + k_0 \end{cases} \quad \forall\ i = 1, ..., n. \tag{3.8}$$

3.3 Sistemi canonicamente integrabili

Il caso in cui la variabile k è ciclica, cioè varia nel toro n-dimensionale $\mathbb{T}^n$, anziché in $\mathbb{R}^n$, è un caso particolarmente interessante, in cui le variabili (π, k) vengono indicate con (A, φ) e chiamate coordinate *"azione-angolo"*. Un sistema Hamiltoniano rappresentabile in variabili azione-angolo e al quale sia applicabile il metodo di Hamilton-Jacobi stazionario viene detto canonicamente integrabile. Più precisamente si dà la seguente definizione:

Definizione 3.1. Sia M una varietà differenziabile di dimensione n. Sia W un aperto del fibrato cotangente di M e sia V un aperto di $\mathbb{R}^n$. Un sistema di Hamiltoniana autonoma $H(p, q)$ si dice *canonicamente integrabile* su W se esiste una trasformazione completamente canonica

$$C : W \longrightarrow V \times \mathbb{T}^n,$$

con $C(p,q) = (A,\varphi)$, $\forall (p,q) \in W$, tale che

$$H'(A,\varphi) = H(C^{-1}(A,\varphi)) = f(A).$$

Osservazione 5. La definizione implica che $\forall\ i = 1, ..., n$:

$$\begin{cases} \dot{A}_i = -\frac{\partial H'}{\partial \varphi_i}(A) = -\frac{\partial f}{\partial \varphi_i}(A) = 0 \\ \dot{\varphi}_i = \frac{\partial H'}{\partial A_i}(A) = \frac{\partial f}{\partial A_i}(A) := \omega_i(A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_i = \text{costante} = A_{0i} \\ \varphi_i = (\omega_i(A)t + \varphi_i) \quad (\text{mod. } 2\pi) \end{cases}$$

Quindi al dato iniziale (A,φ) fa seguito il *flusso quasiperiodico*

$$\varphi \longmapsto \omega(A)t + \varphi$$

sul toro. Infatti, mediante C si passa da (p,q) a

$$(A, \varphi(t)) = (A_1, ..., A_n, \omega_1 t + \varphi_1, ..., \omega_n t + \varphi_n)$$

con $A_i = A_{0i} =$ costante, $\forall\ i = 1, ..., n$ e quindi il moto è quasiperiodico per definizione, poiché dipende da n variabili $\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)$, ognuna periodica con periodo rispettivamente

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1},\ \dots\ , T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}.$$

Nel caso unidimensionale $n = 1$, il moto è periodico.

Osservazione 6. Geometricamente in questa coordinate A, φ si attua una ripartizione dello spazio delle fasi in insiemi invarianti rispetto al moto che non hanno punti in comune. Ciò non si verifica usando le coordinate cartesiane, in cui lo spazio viene diviso in quadrati, nessuno dei quali invariante rispetto al moto.

3.4 Applicazioni

Esempio 3.1. Sistema di n oscillatori armonici.

Un sistema di n oscillatori armonici è un sistema di n punti materiali $P_1, ..., P_n$, ciascuno soggetto ad una forza elastica.

Indicando con q_i, $\forall\ i = 1, ..., n$, la posizione del punto P_i il potenziale dell'i-esima forza elastica è data da

$$U_i(q_i) = -\frac{{\omega_i}^2}{2}{q_i}^2.$$

Pertanto la Hamiltoniana associata a P_i è data dall'espressione

$$\frac{1}{2}{p_i}^2 + \frac{{\omega_i}^2}{2}{q_i}^2, \quad \forall\ i = 1, ..., n,$$

dove ${\omega_i}^2$ rappresenta la costante elastica della forza.
La Hamiltoniana dell'intero sistema di oscillatori dunque è data da

$$H(p,q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}({p_i}^2 + {\omega_i}^2{q_i}^2), \quad \forall\ (p,q) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Vogliamo dimostrare che questo è un sistema canonicamente integrabile costruendo esplicitamente una trasformazione canonica C che trasforma le coordinate (p,q) in variabili azione-angolo $(A,\varphi) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{T}^n$ e che rende H dipendente solo dalle azioni A.
Consideriamo quindi il seguente cambiamento di coordinate:

$$C : \{\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)\}^n \xleftrightarrow[su]{1-1} \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{T}^n$$

definito da $C(p,q) = (A,\varphi) = (A_1, ..., A_n, \varphi_1, ..., \varphi_n)$ e $C^{-1}(A,\varphi) = (p,q)$ con

$$A_i = \frac{1}{2\omega_i}({p_i}^2 + {\omega_i}^2{q_i}^2)$$

e

$$\varphi_i = -\arctan\left(\frac{p_i}{\omega_i q_i}\right) \quad \forall\ i = 1, ..., n.$$

Inoltre C è invertibile, infatti si ha:

$$p_i = -\sqrt{2A_i\omega_i}\sin\varphi_i \quad \text{e} \quad q_i = \sqrt{\frac{2A_i}{\omega_i}}\cos\varphi_i \qquad \forall\ \ (A,\varphi) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{T}^n \quad \forall\ \ i = 1, ..., n. \tag{3.9}$$

Si vede immediatamente che

$$H'(A,\varphi) = H(C^{-1}(A,\varphi)) = \sum_{i=1}^{n}\omega_i A_i$$

e che C è la trasformazione in coordinate polari.
Le equazioni di Hamilton per la nuova Hamiltoniana $H'(A,\varphi) = \omega \cdot A$ sono date da

$$\begin{cases} \dot{A}_i = -\frac{\partial H'}{\partial \varphi_i} = 0 \\ \dot{\varphi}_i = \frac{\partial H'}{\partial A_i} := \omega_i \end{cases}, \qquad \forall\, i = 1, ..., n,$$

e le soluzioni

$$\begin{cases} A_i = \text{costante} \\ \varphi_i = \omega_i t + \varphi_i \quad (\text{mod.} 2\pi) \end{cases} \qquad \forall\, i = 1, ..., n$$

confermando il fatto che i moti sono quasiperiodici di cui le ω_i rappresentano le frequenze.

Esempio 3.2. Moto unidimensionale di un punto
Consideriamo il moto di un punto materiale che si muove di moto unidimensionale sotto l'azione di un sistema di forze conservative con energia potenziale totale rappresentata da una funzione $V \in C^\infty(\mathbb{R})$ con le seguenti proprietà:

$$V(q) \underset{q \to \pm\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{e} \quad \begin{cases} V'(q) < 0 & \text{se } q < 0 \\ V'(q) > 0 & \text{se } q > 0 \\ V'(0) = 0 & \text{se } q = 0 \end{cases}.$$

La Hamiltoniana corrispondente è data da

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + V(q).$$

Si vuole cercare una trasformazione canonica C in variabili azione-angolo, che trasformi $H(p,q)$ in una funzione Hamiltoniana $f(A) = E(A)$, dipendente solo dalle azioni. Si noti che $\forall\, E > V(0)$ tutti i moti di $H(p,q)$ con energia E sono periodici con periodo

$$T = T(E) = 2 \int_{q_-(E)}^{q_+(E)} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(q))}}$$

dove $q_\pm(E)$ sono le soluzioni di $E - V(q) = 0$.
Prima di tutto si cerca la funzione generatrice $S(A,q)$ della trasformazione

canonica definita dalle equazioni

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(A,q) \\ \varphi_i = \frac{\partial S}{\partial A_i}(A,q) \end{cases} \quad \forall\ i = 1, ..., n.$$

Si scrive poi l'equazione di Hamilton-Jacobi, relativa all'esempio considerato

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}(A,q)\right)^2 + V(q) = E = f(A) \tag{3.10}$$

dove sia $S(A,q)$ che $f(A)$ sono da determinare.
Si ha immediatamente dalla (3.10)

$$\frac{\partial S}{\partial q}(A,q) = \sqrt{2m(E - V(q))}$$

da cui

$$S(A,q) = \int_{q_0}^{q} \sqrt{2m(E - V(q))}dq.$$

Sia ora $A = a(E)$ la funzione inversa di $f(A) = E$.
Ponendo

$$\frac{df(A)}{dA} = \omega(A) = \frac{2\pi}{T} \neq 0,$$

si ha

$$\begin{aligned} \frac{da(E)}{dE} &= \frac{1}{\omega(A)} = \frac{T}{2\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{q_-(E)}^{q_+(E)} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(q))}} = \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{d}{dE}\int_{q_-(E)}^{q_+(E)} \sqrt{2m(E - V(q))}dq \end{aligned}$$

Segue che

$$A = a(E) = \frac{1}{\pi}\int_{q_-(E)}^{q_+(E)} \sqrt{2m(E - V(q))}dq$$

Così viene soddisfatta la condizione di invertibilità di $f(A)$ e si può affermare che $a(E) = A$ è la funzione inversa di $E = f(A)$. Per concludere si determina l'espressione di φ, come funzione di (p,q), in modo da mostrare che è un angolo, cioè che varia sul toro unidimensionale $\mathbb{T}^1 = \mathbb{T}$:

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{\partial S}{\partial A}(A,q) = \frac{\partial}{\partial A}\int_{q_0}^{q}\sqrt{2m(E-V(q))}dq = \\ &= mf'(A)\int_{q_0}^{q}\frac{dq}{\sqrt{2m(E-V(q))}} = \\ &= \frac{2\pi}{T}\int_{q_0}^{q}\frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(q))}}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Da qui si vede che φ vale esattamente 2π su un intero ciclo, cioè se l'integrale

$$\int_{q_0}^{q}\frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(q))}}$$

viene calcolato in un ciclo e quindi sostituito nella (3.11) da

$$\int_{q_0}^{q_+(E)}\frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(q))}}+\int_{q_+(E)}^{q_-(E)}\frac{dq}{-\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(q))}}+\int_{q_-(E)}^{q_0}\frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(q))}} =$$

$$= 2\int_{q_-}^{q_+}\frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(q))}} = T.$$

Questo completa la prova della periodicità di φ e dunque della sua appartenenza a $\mathbb{T}$.

Bibliografia

[1] V.I. Arnol'd, *Metodi Matematici della Meccanica Classica*, I edizione, Roma, Editori Riuniti, 1979.

[2] G. Gallavotti, *Meccanica elementare*, II edizione, Torino, Boringhieri, 1986

[3] D. Graffi, *Elementi di meccanica razionale*, V edizione, Bologna, R. Pàtron, 1954

Ringraziamenti

Il primo ringraziamento desidero rivolgerlo alla Professoressa Emanuela Caliceti per la disponibilità, per i preziosi consigli e per la cura con cui mi ha seguito durante tutta la stesura della tesi.

Ringrazio tutti i miei compagni di corso con cui ho condiviso la fatica e la gioia di questi tre anni di studio e che porterò sempre nel mio cuore.
In particolare ringrazio Samantha, amica sincera e impeccabile, che mi sembra di conoscere da una vita anche se sono passati solo tre anni. Sami ti ringrazio per le tue attenzioni, per la tua presenza nei momenti di fatica e per la pazienza con cui mi hai sempre sopportato.

Grazie alla mia famiglia, a Matteo e a Davide per essermi sempre stati vicino nei momenti più duri e più belli, per avermi ascoltato con pazienza e per essere sempre stati presenti.

Infine ringrazio tutti i miei amici, gli anni di vita scout e tutte le persone che ho incontrato che hanno lasciato un segno.