Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

IL PROBLEMA DEL FILTRAGGIO STOCASTICO

Tesi di Laurea Magistrale in Analisi Stocastica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ANDREA PASCUCCI

Presentata da:
LAURA AMADORI

Sessione Unica
Anno Accademico 2020/2021

Introduzione

Il problema del filtraggio sorge in molti campi applicati come nelle comunicazioni, nel tracciamento di un target e nella finanza matematica. Nella sua più semplice interpretazione, consiste nello stimare uno specifico *segnale*, attraverso le osservazioni in cui esso è corrotto dal *rumore*. Si suppone che il segnale Z sia modellato da un equazione diffusiva del tipo

$$dZ_s = b(Z_s)ds + \sigma(Z_s)dB_s, \qquad s > 0, Z_0 = z \in \mathcal{R}^d,$$

e che siano fornite le osservazioni descritte da

$$dY_s = h(Z_s)ds + dW_s$$

dove W_s è un moto browniano differente da B_s. Ad esempio, si può pensare a Y_s come un processo che descrive la posizione di un oggetto in movimento sulla base di un'osservazione GPS, W_s come l'errore di misura e Z_s come le reali coordinate dell'oggetto. Se B_s e W_s sono moti indipendenti, la funzione relativa al flusso delle informazioni $\{Y_s; 0 \leq s \leq T\}$ che meglio approssima la quantità $\varphi(X_T)$ è data da

$$E[\varphi(X_T)|\sigma(Y_s; 0 \leq s \leq T)] = \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(0, x; T, \xi)\varphi(\xi)d\xi,$$

dove Γ è detta la soluzione fondamentale stocastica normalizzata della SPDE

$$dp_s(\xi) = \big(\frac{1}{2}\partial_{\xi\xi}(\sigma^2(\xi)p_s(\xi)) - \partial_\xi(b(\xi)p_s(\xi))\big)ds + h(\xi)p_s(\xi)dY_s, \quad s \geq 0,$$

che è la generalizzazione dell'equazione classica di *Fokker-Planck* dell'equazione Z_s.

In generale, i modelli di filtraggio forniscono un'ampia e rilevante classe di SPDE evolutivi che possono essere scritti nella forma

$$du_s(\xi) = \mathcal{A}u_s(\xi)ds + \sum_{k=1}^{d_1} \mathcal{G}^k u_s(\xi)dW_s^k, \quad s \geq 0, \xi \in \mathbb{R}^d,$$

dove $\mathcal{A}$ è un operatore del secondo ordine (anche degenere) e $(\mathcal{G}^k)_{k=1,\dots,d_1}$ sono operatori del primo ordine.
In questa tesi ricaveremo le equazioni del filtraggio per modelli cinetici e per sistemi gaussiani lineari.
Si procede come segue, inizialmente vengono presentati alcuni risultati fondamentali di esistenza ed unicità per le SDE; per poi introdurre l'integrale backward di Itô, che indicheremo come $\star dW_t$, e la relativa formula backward di Itô. Per concludere il primo capitolo, presentiamo un collegamento tra le SPDE e lo studio dei flussi stocastici definiti da SDE ordinarie.
A seguire, nel secondo capitolo dopo aver richiamato la definizione di soluzione fondamentale, consideriamo il seguente modello cinetico

$$\begin{cases} dX_t = V_t dt, \\ dV_t = b(t, X_t, V_t, Y_t)dt + \bar{\sigma}(t, X_t, V_t, Y_t)dW_t^1 + \hat{\sigma}(t, X_t, V_t, Y_t)dW_t^2, \\ dY_t = h(t, X_t, V_t, Y_t)dt + \theta(t, Y_t)dW_t^1, \end{cases}$$

dove X, V sono processi stocastici scalari che rappresentano rispettivamente la posizione e la velocità di una particella, mentre $W_t = (W_t^1, W_t^2)$ è un moto Browniano bidimensionale e Y descrive il processo delle informazioni disponibili sul moto dell'oggetto. In questa sezione studieremo appunto il problema del filtraggio per il modello in questione adottando un *approccio diretto*. Di questi ne tratteremo due: il primo, detto di Krylov e Zatezalo ed il secondo di Veretennikov.
Nel terzo capitolo viene introdotto il filtro di Kalman-Bucy. Lo scopo del filtro di Kalman è quello di utilizzare misurazioni osservate nel tempo, contenenti rumore (variazioni casuali) e altre imprecisioni, e produrre valori che tendono ad essere più vicini ai valori reali delle misurazioni e ai valori calcolati associati.

Il filtro di Kalman ha molte applicazioni nella tecnologia ed è una parte essenziale nello sviluppo di essa in ambito spaziale e militare. Nello specifico i filtro di Kalman-Bucy viene applicato a sistemi lineari in cui il processo del segnale è gaussiano. In questo modo si riesce a dimostrare che anche la variabile Z_T condizionata alla informazioni fino al tempo T, $\sigma\{Y_s, 0 \leq s \leq T\}$, ha distribuzione gaussiana. Poiché quest'ultima è univocamente determinata dalla media e dalla covarianza, il filtro di Kalman-Bucy fornisce due equazioni differenziali per esse.

Indice

Introduzione **i**

1 Equazioni differenziali stocastiche **1**

1.1 Esistenza e unicità 1

1.1.1 Esistenza 3

1.1.2 Unicità 6

1.1.3 Stime per le soluzioni delle SDE 9

1.2 Calcolo di Itô Backward 12

1.2.1 Calcolo integrale backward di Itô 13

1.2.2 SPDE backward 14

2 Il problema del filtraggio **18**

2.1 Soluzione fondamentale 19

2.2 Filtering problem 25

2.2.1 Teorema di Girsanov 26

2.2.2 Filtraggio forward 29

2.2.3 Filtraggio backward 39

3 Filtro di Kalman **44**

3.1 Sistema gaussiano 44

3.2 Kalman-Bucy filtering 48

3.2.1 Caso discreto 53

Bibliografia **57**

Capitolo 1

Equazioni differenziali stocastiche

In questo capitolo, riprendiamo alcuni risultati principali per le equazioni differenziali stocastiche, come l'esistenza ed unicità.
Un equazione differenziale stocastica (SDE) è un'espressione della forma:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \qquad t \in [0, T] \tag{1.1}$$

dove W è un moto Browniano d-dimensionale, b e σ, detti rispettivamente coefficiente di drift e di diffusione, sono funzioni misurabili:

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \qquad \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N \times d}, \qquad N, d \in \mathbb{N}.$$

Vogliamo poi introdurre il calcolo backward di Itô; per poter studiare le SDE backward.

1.1 Esistenza e unicità

Definizione 1.1 (Soluzione debole)**.** Sia μ una distribuzione su $\mathbb{R}^N$. Fissato uno spazio di probabilità con filtrazione $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ in cui valgono le ipotesi usuali, su cui è definito un moto Browniano $W = (W_t)_{t \geq 0}$ d-dimensionale. Diciamo che un processo stocastico X su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$

è soluzione della SDE (1.1) relativa a W con dato iniziale X_0 e scriviamo $X \in SDE(b, \sigma, W, \mathcal{F}_{t\geq 0}, X_0)$ se:

i) X è adattato alla filtrazione standard generata da W;

ii) X è continuo quasi certamente;

iii) $b(\cdot, X_t)$ e $\sigma(\cdot, X_t) \in L^2_{loc}([0,T])$; $\quad X_0 \sim \mu$;

iv) X verifica l'equazione (1.1).

Una SDE si scrive in forma differenziale come in (1.1), oppure in forma integrale come:

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \qquad X_0 = Z \text{ q.c.} \tag{1.2}$$

Si dice che è risolubile in senso *debole* se esiste uno spazio di probabilità con una filtrazione che soddisfa le ipotesi usuali su cui sono definiti un moto Browniano ed un processo stocastico X, tali che $X \in SDE(b, \sigma, W, \mathcal{F}_{t\geq 0}, X_0)$, o in senso *forte* se per ogni moto Browniano, l'equazione (1.1) ammette una soluzione. Si parla invece di *unicità* in senso *debole* se, prese due soluzioni $X \in SDE(b, \sigma, W, \mathcal{F}_{t\geq 0}, X_0)$ e $Y \in SDE(b, \sigma, B, \mathcal{G}_{t\geq 0}, Y_0)$, allora (X, W) e (Y, B) sono uguali in legge; o *unicità* in senso *forte*, ovvero se esistono due soluzioni X, Y relative allo stesso moto Browniano implica che i due processi stocastici sono indistinguibili.
Esistono delle condizioni per i coefficienti b, σ dell'equazione (1.1) sufficienti per dimostrare l'esistenza e l'unicità forte delle soluzioni.

Definizione 1.2 (Ipotesi standard)**.** Si dice che i coefficienti b, σ verificano le ipotesi standard se per $T > 0$ esistono due costanti positive K_1, K_2 tali che:

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq K_1(1 + |x|) \tag{1.3}$$

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K_2|x - y| \tag{1.4}$$

per ogni $t \in [0,T]$ e $x, y \in \mathbb{R}^N$.

Queste condizioni, rispettivamente di crescita lineare e di Lipschitzianità globale in x, sono dette *ipotesi standard* per i coefficienti b, σ e permettono di dimostrare un teorema di esistenza ed unicità per una soluzione forte.

1.1.1 Esistenza

In analogia con le equazioni differenziali deterministiche, l'esistenza di una soluzione per le SDE si ricava usando il metodo del punto-fisso. Ciò consiste nel verificare se il funzionale:

$$\Psi_t(X) := Z + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \quad t \in [0, T] \tag{1.5}$$

ammette un punto fisso, ovvero se esiste X tale che $\Psi_t(X) = X$, ottenendo così anche una soluzione per (1.1).

Definizione 1.3. Chiamiamo $\mathcal{A}_c$ lo spazio dei processi $(X_t)_{t \in [0,T]}$ continui, $\mathcal{F}_t$-adattati tali che:

$$[\![X]\!]_T^2 := E\left[\sup_{0 \le t \le T} |X_t|^2\right] < \infty$$

Si può dimostrare che lo spazio $\mathcal{A}_c$ con la semi-norma $[\![\cdot]\!]_T$ è uno spazio completo.

Lemma 1.1.1. *Il funzionale Ψ definito in (1.5) è ben definito dallo spazio $\mathcal{A}_c$ in se stesso. Inoltre, esiste una costante C_1 che dipende solamente da T e dalla costante di crescita lineare K_1, tale che:*

$$[\![\Psi(X)]\!]_T^2 \le C_1 \left(1 + E[|Z|^2] + \int_0^t [\![X]\!]_s^2 ds\right), \qquad t \in [0, T]$$

Dimostrazione. Per l'ipotesi di crescita lineare sui coefficienti b, σ si ha:

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{0 \le s \le t} |b(s, X_s)|^2\right] + E\left[\sup_{0 \le s \le t} |\sigma(s, X_s)|^2\right] &\le E\left[K_1(1 + \sup_{0 \le s \le t} |X_s|^2)\right] \\ &\le K_1(1 + [\![X]\!]_t^2) \end{aligned}$$

e quindi, se $X \in \mathcal{A}_c$ allora $b, \sigma \in \mathcal{A}_c$. Consideriamo:

$$\begin{aligned}
[\![\Psi(X)]\!]_t^2 &= E\left[\sup_{0\le s\le t}\left|Z+\int_0^s b(u,X_u)du+\int_0^s \sigma(u,X_u)dW_u\right|^2\right]\\
&\le 3\left(E[|Z|^2]+E\left[\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^s b(u,X_u)du\right|^2\right]+E\left[\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^s \sigma(u,X_u)dW_u\right|^2\right]\right)
\end{aligned}$$

(Per il teorema di Hölder sull'integrale deterministico e la disuguaglianza di Doob con l'isometria di Itô per l'integrale stocastico)

$$\begin{aligned}
&\le 3\left(E[|Z|^2]+t\int_0^t E\left[\sup_{0\le u\le s}|b(u,X_u)|^2\right]ds+4\int_0^t E\left[\sup_{0\le u\le s}|\sigma(u,X_u)|^2\right]ds\right)\\
&\le 3\left(E[|Z|^2]+K_1(4+t)\left(t+\int_0^t [\![X]\!]_s^2 ds\right)\right)
\end{aligned}$$

Raccogliendo e sistemando le costanti otteniamo la disuguaglianza da dimostrare, e notiamo che il funzionale è ben definito da $\mathcal{A}_c$ a $\mathcal{A}_c$. □

Il risultato che andremo ad enunciare garantisce che le ipotesi (1.3) e (1.4) sui coefficienti b, σ sono sufficienti per l'esistenza (ed unicità) di una soluzione forte. Nonostante nella letteratura esistono risultati più generici, non è restrittivo richiedere le ipotesi standard poiché sono verificate nella maggior parte delle applicazioni.

Teorema 1.1.2 (Esistenza)**.** *Se sono verificate le ipotesi standard della Definizione 1.2 l'equazione*

$$X_t = Z+\int_0^t b(s,X_s)ds+\int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s, \qquad t\in[0,T]$$

ammette una soluzione forte nello spazio $\mathcal{A}_c$.

Dimostrazione. Come nel caso deterministico, la dimostrazione è basata sul teorema del punto fisso di Banach-Caccioppoli, il quale afferma che una contrazione definita su uno spazio completo, ammette un unico punto fisso. Abbiamo già osservato che il funzionale (1.5) è ben definito sullo spazio completo $\mathcal{A}_c$, rimane da verificare che esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale per cui un iterata Ψ^n

del funzionale sia una contrazione. Vogliamo quindi dimostrare che, per un qualche $n \in \mathbb{N}$, e $\forall X, Y \in \mathcal{A}_c$:

$$[\![\Psi^n(X) - \Psi^n(Y)]\!]_T \leq L[\![X - T]\!]_T, \qquad \text{con } L \in (0,1)$$

Proviamo per induzione che:

$$[\![\Psi^n(X) - \Psi^n(Y)]\!]_t^2 \leq \frac{(L_0 t)^n}{n!}[\![X - Y]\!]_t^2, \qquad X, Y \in \mathcal{A}_c, \quad t \in [0,T]$$

dove $L_0 = 2K_2(T+4)$. Vediamo il caso base, $n = 1$:

$$[\![\Psi(X) - \Psi(Y)]\!]_t^2 = E\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s (b(u,X_u) - b(u,Y_u))du + \int_0^s (\sigma(u,X_u) - \sigma(u,Y_u))dW_u\right|^2\right]$$

Usando la disequazione elementare: $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ e poi la disuguaglianza di Hölder nell'integrale deterministico e la disuguaglianza di Doob con l'isometria di Itô nell'integrale stocastico, otteniamo:

$$\leq E\left[\sup_{0\leq s\leq t} 2s\int_0^s |(b(u,X_u) - b(u,Y_u))|^2 du + 8\int_0^s |(\sigma(u,X_u) - \sigma(u,Y_u))|^2 du\right]$$

Usiamo l'ipotesi (1.4):

$$\begin{aligned}
[\![\Psi(X) - \Psi(Y)]\!]_t^2 &\leq 2(4+T)E\left[\sup_{0\leq s\leq t}\int_0^s K_2|X_u - Y_u|^2 du\right] \\
&= 2(4+T)K_2\int_0^t [\![X - Y]\!]_s^2 ds \\
&\leq 2(4+T)K_2 t[\![X - Y]\!]_t^2.
\end{aligned}$$

Analogamente, supponiamo vero per n e verifichiamo per n+1:

$$\begin{aligned}
[\![\Psi^{n+1}(X) - \Psi^{n+1}(Y)]\!]_t^2 &= E\left[\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^s (b(u,\Psi_u^n(X)) - b(u,\Psi_u^n(Y)))du\right.\right.\\
&\left.\left. + \int_0^s (\sigma(u,\Psi_u^n(X)) - \sigma(u,\Psi_u^n(Y)))dW_u\right|^2\right]\\
&\le 2t\int_0^t E\left[\sup_{0\le u\le s}|b(u,\Psi_u^n(X)) - b(u,\Psi_u^n(Y))|^2\right]ds\\
&+ 8\int_0^t E\left[\sup_{0\le u\le s}|\sigma(u,\Psi_u^n(X)) - \sigma(u,\Psi_u^n(Y))|^2\right]ds\\
&\le 2(4+T)K_2\int_0^t [\![\Psi^n(X) - \Psi^n(Y)]\!]_s^2 ds\\
&\le L_0^{n+1}\int_0^t \frac{s^n}{n!}[\![X-Y]\!]_s^2 ds\\
&\le \frac{(L_0 t)^{n+1}}{(n+1)!}[\![X-Y]\!]_t^2
\end{aligned}$$

Quindi, posto:

$$L = \frac{(L_0 t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $L \in (0,1)$, di conseguenza Ψ^n è una contrazione ed ammette un unico punto fisso. Possiamo quindi concludere che anche per Ψ esiste un unico punto fisso. □

Osservazione 1. Questa dimostrazione contiene anche un risultato di unicità, poiché Ψ ammette un unico punto fisso nello spazio $\mathcal{A}_c$. Nella prossima sezione presenteremo un risultato più generale: vedremo che si ha l'unicità della soluzione non solo nello spazio $\mathcal{A}_c$.

1.1.2 Unicità

Uno strumento utile per la stima delle proprietà delle SDE è il lemma di Gronwall:

Lemma 1.1.3 (Lemma di Gronwall). *Sia* $\varphi \in C([0,T])$ *tale che:*

$$\varphi(t) \le a + \int_0^t f(s)\varphi(s)ds, \qquad t \in [0,T]$$

dove $a \in \mathbb{R}$ e f è una funzione continua e non negativa. Allora, si ha:

$$\varphi(t) \leq a e^{\int_0^t f(s)ds}, \qquad t \in [0,T].$$

Osservazione 2. La condizione (1.4) si può indebolire richiedendo la Lipschitzianità locale in x (1.6), adattando le dimostrazioni con l'uso di un argomento di localizzazione come faremo di seguito.

Teorema 1.1.4 (Unicità). *Se $\forall n \in \mathbb{N}$, esiste una costante K_n tale che:*

$$|b(t,x) - b(t,y)|^2 + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 \leq K_n |x-y|^2 \tag{1.6}$$

per $|x|, |y| \leq n$, $t \in [0,T]$, la soluzione della SDE

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma((t, X_t)dW_t$$

è unica in senso forte, cioè se esistono due soluzioni sono indistinguibili.

Dimostrazione. Supponiamo che $X, \tilde{X}$ siano due soluzioni con dati iniziali rispettivamente $Z, \tilde{Z}$.
Applichiamo il metodo di localizzazione: per $n \in \mathbb{N}$ e $\omega \in \Omega$, consideriamo i tempi d'arresto s_n e $\tilde{s}_n$ definiti come:

$$s_n := T \wedge \inf\{t \in [0,T] | |X_n| \geq n\}$$

$$\tilde{s}_n := T \wedge \inf\{t \in [0,T] | |\tilde{X}_n| \geq n\}$$

e poniamo $\tau_n := s_n \wedge \tilde{s}_n$, anch'esso tempo di arresto. Sia:

$$\begin{aligned} X_{t\wedge\tau_n} - \tilde{X}_{t\wedge\tau_n} = Z - \tilde{Z} &+ \int_0^{t\wedge\tau_n} (b(s,X_s) - b(s,\tilde{X}_s))ds \\ &+ \int_0^{t\wedge\tau_n} (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,\tilde{X}_s))dW_s \end{aligned}$$

Utilizzando la disuguaglianza elementare $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$, si ha:

$$\begin{aligned} E\left[|X_{t\wedge\tau_n} - \tilde{X}_{t\wedge\tau_n}|^2\right] \leq 3E\left[|Z-\tilde{Z}|^2\right] & \\ + 3E\left[\left|\int_0^{t\wedge\tau_n} (b(s,X_s) - b(s,\tilde{X}_s))ds\right|^2\right] & \\ + E\left[\left|\int_0^{t\wedge\tau_n} (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,\tilde{X}_s))dW_s\right|^2\right] & \end{aligned}$$

Per la disuguaglianza di Hölder sull'integrale deterministico e per l'isometria di Itô otteniamo:

$$E\left[|X_{t\wedge\tau_n} - \tilde{X}_{t\wedge\tau_n}|^2\right] \leq 3\underbrace{E\left[|Z-\tilde{Z}|^2\right]}_{=a} + 3tE\left[\int_0^{t\wedge\tau_n} |b(s,X_s) - b(s,\tilde{X}_s)|^2 ds\right]$$
$$+ 3E\left[\int_0^{t\wedge\tau_n} |\sigma(s,X_s) - \sigma(s,\tilde{X}_s)|^2 ds\right]$$

Per l'ipotesi di Lipschitzianità:

$$\underbrace{E\left[|X_{t\wedge\tau_n} - \tilde{X}_{t\wedge\tau_n}|^2\right]}_{\varphi(t)} \leq 3\left(a + K_n(T+1)\int_0^t \underbrace{E\left[\left|X_{s\wedge\tau_n} - \tilde{X}_{s\wedge\tau_n}\right|^2\right]}_{\varphi(s)} ds\right)$$

Applicando il lemma di Gronwall, otteniamo:

$$E\left[|X_{t\wedge\tau_n} - \tilde{X}_{t\wedge\tau_n}|^2\right] \leq 3E\left[|Z-\tilde{Z}|^2\right] e^{3K_n(T+1)t}$$

In particolare, se $Z = \tilde{Z}$ q.c., per il lemma di Fatou:

$$E\left[|X_t - \tilde{X}_t|^2\right] \leq \liminf_{n\to\infty} E\left[|X_{t\wedge\tau_n} - \tilde{X}_{t\wedge\tau_n}|^2\right] = 0$$

Ciò significa che $X, \tilde{X}$ sono modificazioni; ma ricordando che sono anche soluzioni di un SDE, sono anche processi stocastici continui; segue quindi che sono indistinguibili. $\square$

Osservazione 3. Per $0 \leq t_0 \leq t \leq T$, sia $X^{t_0,Z}$ soluzione dell'equazione (1.2) con dato iniziale $X_t^{t_0,Z}$, vale:

$$\begin{aligned}
X_T^{t_0,Z} &= Z + \int_{t_0}^T b(s,X_s^{t_0,Z})ds + \int_{t_0}^T \sigma(s,X_s^{t_0,Z})dW_s \\
&= Z + \int_{t_0}^t b(s,X_s^{t_0,Z})ds + \int_{t_0}^t \sigma(s,X_s^{t_0,Z})dW_s \\
&\quad + \int_t^T b(s,X_s^{t_0,Z})ds + \int_t^T \sigma(s,X_s^{t_0,Z})dW_s \\
&= X_t^{t_0,Z} + \int_t^T b(s,X_s^{t_0,Z})ds + \int_t^T \sigma(s,X_s^{t_0,Z})dW_s
\end{aligned}$$

di conseguenza $X^{t,X_t^{t_0,Z}}$ è anch'essa soluzione di (1.2) con dato iniziale $X_t^{t_0,Z}$. Per l'unicità della soluzione

$$X_T^{t_0,Z} = X_T^{t,X_t^{t_0,Z}}, \qquad t_0 \leq t \leq T, \quad q.c \tag{1.7}$$

Viene detto che la soluzione di una SDE gode della *proprietà di flusso.*

1.1.3 Stime per le soluzioni delle SDE

Le ipotesi standard per i coefficienti, ci permettono di stimare i coefficienti delle SDE e di conseguenza, come vedremo di seguito, possiamo avere delle stime a priori in L^p sulle soluzioni.

Lemma 1.1.5. *Siano X, Y processi adattati e continui q.c., sia $t \geq 0$ e $p \geq 2$. Allora, se b, σ verificano la condizione (1.3) di crescita lineare, esiste una costante positiva $\bar{c}_1 = \bar{c}_1(T, d, d_1, p, K_1)$ tale che:*

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{t_0\leq t\leq t_1}\left|\int_{t_0}^{t} b(s,X_s)ds\right|^p\right] &\leq \bar{c}_1(t_1-t_0)^{\frac{p-2}{2}}\int_{t_0}^{t_1}\left(1+E\left[\sup_{t_0\leq r\leq s}|X_r|^p\right]\right)ds \\ E\left[\sup_{t_0\leq t\leq t_1}\left|\int_{t_0}^{t} \sigma(s,X_s)dW_s\right|^p\right] &\leq \bar{c}_1(t_1-t_0)^{\frac{p-2}{2}}\int_{t_0}^{t_1}\left(1+E\left[\sup_{t_0\leq r\leq s}|X_r|^p\right]\right)ds \end{aligned} \tag{1.8}$$

Dimostrazione. Per la disuguaglianza di Hölder:

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{t_0\leq t\leq t_1}\left|\int_{t_0}^{t} b(s,X_s)ds\right|^p\right] &\leq (t_1-t_0)^{p-1}E\left[\int_{t_0}^{t_1}|b(s,X_s)|^p ds\right] \\ &\quad \textit{(Poichè b è a crescita al più lineare)} \\ &\leq 2^{p-1}(t_1-t_0)^{p-1}K_1^p\int_{t_0}^{t_1}E[(1+|X_s|^p]ds \\ &\leq \bar{c}_1(t_1-t_0)^{\frac{p-2}{2}}\int_{t_0}^{t_1}\left(1+E\left[\sup_{t_0\leq r\leq s}|X_r|^p\right]\right)ds \end{aligned}$$

Analogamente, per le stime L^p sull'integrale stocastico, esiste $\bar{c} = \bar{c}(p, d, d_1)$ tale che:

$$E\left[\sup_{t_0 \le t \le t_1} \left| \int_{t_0}^{t} \sigma(s, X_s) dW_s \right|^p \right] \le \bar{c}(t_1 - t_0)^{\frac{p-2}{2}} E\left[\int_{t_0}^{t_1} |\sigma(s, X_s)|^p ds\right]$$

(procedendo come nella stima precedente)

$$\le \bar{c}_1 (t_1 - t_0)^{\frac{p-2}{2}} \int_{t_0}^{t_1} \left(1 + E\left[\sup_{t_0 \le r \le s} |X_r|^p\right]\right) ds$$

□

Lemma 1.1.6. *Siano X, Y processi adattati e continui q.c., sia* $t \ge 0$ *e* $p \ge 2$. *Allora, se* b, σ *verificano la condizione (1.4) di Lipschitzianità globale, esiste una costante positiva* $\bar{c} = \bar{c}_2(T, d, d_1, p, K_2)$ *tale che:*

$$E\left[\sup_{t_0 \le t \le t_1} \left| \int_{t_0}^{t} (b(s, X_s) - b(s, Y_s)) ds \right|^p \right] \le \bar{c}_2 (t_1 - t_0)^{\frac{p-2}{2}} \int_{t_0}^{t_1} E\left[\sup_{t_0 \le r \le s} |X_r - Y_r|^p\right] ds$$

$$E\left[\sup_{t_0 \le t \le t_1} \left| \int_{t_0}^{t} (\sigma(s, X_s) + \sigma(s, Y_s)) dW_s \right|^p \right] \le \bar{c}_2 (t_1 - t_0)^{\frac{p-2}{2}} \int_{t_0}^{t_1} E\left[\sup_{t_0 \le r \le s} |X_r - Y_r|^p\right] ds \tag{1.9}$$

per ogni $0 \le t_0 \le t_1 \le T$.

Dimostrazione. Si dimostra in maniera analoga al lemma precedente. □

Teorema 1.1.7 (Stima in L^p). *Sia X un processo stocastico soluzione di (1.2) con i coefficienti* b, σ *che soddisfano le ipotesi standard. Per ogni* $p \ge 2$ *esiste una costante positiva* $c = c(T, d, d_1, p, K_1)$*, tale che:*

$$E\left[\sup_{t_0 \le t \le T} |X_t|^p\right] \le c(1 + E[|Z|^p]). \tag{1.10}$$

Dimostrazione. Procediamo utilizzando il metodo di localizzazione. Osserviamo che se $E[|Z|^p = \infty$ la tesi è ovvia; assumiamo quindi che $E[|Z|^p \le \infty$. Poniamo:

$$\tau_n = \inf\{t \in [t_0, T] : |X_t| \ge n\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

con la convenzione $min\emptyset = T$. Essendo $|Z| \le \infty$ e X continuo q.c., si ha che τ_n è una successione crescente di tempi d'arresto tali che $\tau_n \nearrow T$ q.c.

Definiamo:

$$b_n(t,x) = b(t,x)\mathbb{1}_{[t_0,\tau_n]}(t), \quad \sigma_n(t,x) = \sigma(t,x)\mathbb{1}_{[t_0,\tau_n]}(t), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

che, pur essendo stocastici, continuano a soddisfare l'ipotesi (1.3) con la stessa costante K_1. Si ha quindi:

$$\begin{aligned} X_{t\wedge\tau_n} &= Z + \int_{t_0}^{t\wedge\tau_n} b(s,X_s)ds + \int_{t_0}^{t\wedge\tau_n} \sigma(s,X_s)dW_s \\ &= Z + \int_{t_0}^{t} b_n(s,X_{s\wedge\tau_n})ds + \int_{t_0}^{t} \sigma_n(s,X_{s\wedge\tau_n})dW_s \end{aligned}$$

Vogliamo usare il lemma di Gronwall, consideriamo:

$$v_n(t_1) := E\left[\sup_{t_0\le t\le t_1} |X_{t\wedge\tau_n}|^p\right], \qquad t_1 \in [t_0,T]$$

Grazie alle stime (1.8) otteniamo:

$$\begin{aligned} v_n(t_1) &\le 2^{p-1}\left(E[|Z|^p] + \bar{c}_1 \int_{t_0}^{t_1}\left(1 + E\left[\sup_{t_0\le r\le s}|X_{r\wedge\tau_n}|^p\right]\right)ds\right) \\ &\le c\left(1 + E[|Z|^p] + \int_{t_0}^{t_1} v_n(s)ds\right), \quad t_1 \in [t_0,T] \end{aligned}$$

Per il lemma di Gronwall:

$$E\left[\sup_{t_o\le t\le T}|X_{t\wedge\tau_n}|^p\right] = v_n(T) \le ce^{c(T-t_0)}(1 + E[|Z|^p])$$

da cui passando al limite per n che tende all'infinito, grazie al teorema di Beppo-Levi, si ottiene la tesi. □

Teorema 1.1.8 (Stime di regolarità e dipendenza dal dato iniziale)**.** *Siano i coefficienti b, σ che soddisfano le ipotesi standard (1.2), siano X^{t_0,Z_0} e X^{t_1,Z_1} soluzioni dell'equazione (1.1), rispettivamente con i dati iniziali (t_0,Z_0) e (t_1,Z_1) con $0 \le t_0 \le t_1 \le T$. Allora per ogni $p \ge 2$ esiste una costante positiva $c = c(T,d,d_1,p,K_1,K_2)$ tale che*

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{t_1\le t,s\le T}|X_t^{t_0,Z_0} - X_s^{t_1,Z_1}|^p\right] &\le cE[|Z_0 - Z_1|^p] \\ &+ c(1 + E[|Z_0|^p] + E[|Z_1|^p])(|t_0 - t_1|^{\frac{p}{2}} + |t-s|^{\frac{p}{2}}). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
E\left[\sup_{t_1\le t\le T}\left|X_t^{t_0,Z_0}-X_s^{t_1,Z_1}\right|^p\right] &\le 3^{p-1}E\left[\sup_{t_1\le t\le T}|X_t^{t_0,Z_0}-X_t^{t_0,Z_1}|^p\right]\\
&+3^{p-1}E\left[\sup_{t_1\le t\le T}|X_t^{t_0,Z_1}-X_t^{t_1,Z_1}|^p\right] \qquad (1.12)\\
&+3^{p-1}E\left[\sup_{t_1\le t\le T}|X_t^{t_1,Z_1}-X_s^{t_1,Z_1}|^p\right]
\end{aligned}
$$

Stimiamo i termini a destra. Il primo, grazie alla (1.9) si stima come:

$$
v(t):=E\left[\sup_{t_0\le s\le t}\left|X_s^{t_0,Z_0}-X_s^{t_0,Z_1}\right|^p\right]\le 2^{p-1}\left(E[|Z_0-Z_1|^p]+\bar{c}_2T^{\frac{p-2}{2}}\int_{t_0}^t v(s)ds\right)
$$

e, per il lemma di Gronwall,

$$
E\left[\sup_{t_1\le t\le T}\left|X_t^{t_0,Z_0}-X_t^{t_0,Z_1}\right|^p\right]\le v(T)\le cE[|Z_0-Z_1|^p] \qquad (1.13)
$$

con c che dipende da $\bar{c}_2, T, p$.

Per il secondo, grazie alla proprietà di flusso (1.7) si ha

$$
E\left[\sup_{t_1\le t\le T}|X_t^{t_0,Z_1}-X_t^{t_1,Z_1}|^p\right]=E\left[\sup_{t_1\le t\le T}|X_t^{t_1,X_{t_1}^{t_0,Z_1}}-X_t^{t_1,Z_1}|^p\right]
$$

(per (1.13))

$$
\le cE\left[\left|X_{t_1}^{t_0,Z_1}-Z_1\right|^p\right]
$$

(per (1.8))

$$
\le c\bar{c}_1|t_1-t_0|^{\frac{p-2}{2}}\int_{t_0}^{t_1}\left(1+E\left[\sup_{t_0\le r\le s}\left|X_r^{t_0,Z_1}\right|^p\right]\right)ds
$$

(per la stima $\mathbb{L}^p$ (1.10))

$$
\le C(1+E[|Z_1|^p])|t_1-t_0|^{\frac{p}{2}}.
$$

L'ultimo termine si stima in modo analogo grazie alla (1.9). □

1.2 Calcolo di Itô Backward

Introduciamo ora alcuni risultati di base del calcolo integrale backward di Itô. Definiremo poi le SDE in versione backward, le quali ci permetteranno di risolvere il problema del filtraggio backward più agevolmente.

1.2.1 Calcolo integrale backward di Itô

Sia $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ un moto Browniano d-dimensionale definito sullo spazio $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}^W)$, dove con $\mathcal{F}^W$ indichiamo la filtrazione standard generata da W che verifica le ipotesi usuali. Consideriamo la σ-algebra aumentata relativa agli incrementi Browniani tra t e T:

$$\mathcal{F}_T^{W,t} = \sigma(\mathcal{G}_t \cup \mathcal{N}), \qquad \mathcal{G}_t := \sigma(W_s - W_t, \quad t \le s \le T), \qquad t \in [0,T].$$

Indichiamo con $\overleftarrow{\mathcal{F}}$ la famiglia $(\mathcal{F}_T^{W,t})_{t\in[0,T]}$ di σ-algebre che chiameremo *filtrazione Browniana backward*; si nota facilmente che è una famiglia decrescente. Definiamo:

$$\overleftarrow{W}_t := W_T - W_{T-t}, \qquad t \in [0,T]$$

è un moto Browniano sullo spazio $(\Omega, \mathcal{F}, P, \overleftarrow{\mathcal{F}})$.

Definizione 1.4 (Integrale stocastico backward)**.** Sia $u = (u_t)_{t\in[0,T]}$ un processo stocastico tale che:

i) $t \longmapsto u_{T-t}$ è $\overleftarrow{\mathcal{F}}$-progressivamente misurabile, ossia vale $u_{T-t} \in m\overleftarrow{\mathcal{F}}_t$ per ogni $t \in [0,T]$

ii) $u \in L^2([0,T])$, ossia $E\left[\int_0^T |u_s|^2 ds\right] < \infty$

Definiamo l'integrale stocastico di Itô come:

$$\int_t^s u_r \star dW_r := \int_{T-s}^{T-t} u_{T-r} d\overleftarrow{W}_r, \qquad 0 \le t \le s \le T \tag{1.14}$$

Osservazione 4. Analogamente a quanto visto per l'integrale di Itô classico; se u è un processo continuo, l'integrale di Itô backward si può ricondurre al limite di una somma di Riemann, ossia vale:

$$\int_t^s u_r \star dW_r = \lim_{|\pi|\to 0^+} \sum_{k=1}^n u_{t_k}(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})$$

Notiamo che, se consideriamo il processo u calcolato nel primo estremo di ogni intervallo della partizione otteniamo l'integrale stocastico classico (o "forward"); mentre se consideriamo l'ultimo estremo di ogni intervallo della partizione otteniamo l'integrale stocastico backward.

Dimostrazione. Consideriamo la seguente successione di processi semplici: sia $\{t = t_0 < \cdots < t_n = s\}$ una partizione di $[t, s]$, allora:

$$u_{n,t} := \sum_{k=1}^{n} u_{t_{k-1}} \mathbb{1}_{[t_{k-1},t_k]}(t)$$

Come conseguenza del teorema della convergenza dominata, è semplice provare che $u_n \to u$ in L^2. Allora:

$$\begin{aligned}
\int_{T-s}^{T-t} u_{T-r} d\overleftarrow{W}_r &= \lim_{|\pi|\to 0^+} \int_{T-s}^{T-t} \left(\sum_{k=1}^{n} u_{n,t_{k-1}} \mathbb{1}_{[t_{k-1},t_k]}(T-r) \right) d\overleftarrow{W}_r \\
&= \lim_{|\pi|\to 0^+} \sum_{k=1}^{n} u_{t_{k-1}} (\overleftarrow{W}_{T-t_{k-1}} - \overleftarrow{W}_{T-t_k}) \\
&= \lim_{|\pi|\to 0^+} \sum_{k=1}^{n} u_{t_k} (W_T - W_{t_{k-1}} - W_T + W_{t_k})
\end{aligned}$$

□

Definizione 1.5 (Processo di Itô backward)**.** Diciamo che un processo integrale $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ è un processo di Itô backward se si scrive come:

$$X_t = X_T + \int_t^T b_s(s, X_s)ds + \int_t^T \sigma(s, X_s) \star dW_s \tag{1.15}$$

o in forma differenziale:

$$-dX_t = b_t dt + \sigma_t \star dW_t \tag{1.16}$$

Teorema 1.2.1 (Formula di Itô backward)**.** *Sia $v \in C^{1,2}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^N)$ e sia X il processo definito in (1.15), allora:*

$$\begin{aligned}
-dv(t, X_t) = &\left((\partial_t v)(t, X_t) + \frac{1}{2}(\sigma_t \sigma_t^*)_{ij} (\partial_{x_i x_j} v)(t, X_t) + (b_t)_i (\partial_{x_i} v)(t, X_t) \right) dt \\
&+ (\sigma_t)_{ij} (\partial_{x_i} v)(t, X_t) \star dW_t^j
\end{aligned} \tag{1.17}$$

1.2.2 SPDE backward

Vediamo che possiamo studiare le equazioni di Itô backward in maniera analoga a quelle forward poiché grazie al *time reversal* ogni risultato ottenuto per le SDE forward si applicano al caso backward.

Teorema 1.2.2 (SPDE diffusiva backward). *Siano $b, \sigma \in bC^3(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^N)$. Indichiamo con $s \mapsto X_s^{t,x}$ la soluzione dell'equazione stocastica:*

$$dX_s^{t,x} = b(s, X_s^{t,x})ds + \sigma(s, X_s^{t,x})dW_s \tag{1.18}$$

con dato iniziale $X_t^{t,x} = x$. Allora il processo $(t,x) \mapsto X_T^{t,x}$ risolve la seguente equazione alle derivate parziali stocastiche (SPDE):

$$\begin{cases} -dX_T^{t,x} = \mathcal{L}X_T^{t,x}dt + \sigma_{ij}(t,x)\partial_{x_i}X_T^{t,x} \star dW_t^j \\ X_T^{T,x} = x \end{cases} \tag{1.19}$$

dove $\mathcal{L}$ è l'operatore caratteristico di X:

$$\mathcal{L} := \frac{1}{2}(\sigma(t,x)\sigma^*(t,x))_{ij}\partial_{x_i x_j} + b_i(t,x)\partial_{x_i}$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso autonomo in una dimensione.
Sia $t = t_0 < \cdots < t_n = T$ una partizione di [t,T], si ha:

$$\begin{aligned} X_T^{t,x} - x &= X_T^{t,x} - X_T^{T,x} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(X_T^{t_{k-1},x} - X_T^{t_k,x} \right) \end{aligned}$$

(per la proprietà di flusso)

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(X_T^{t_k, X_{t_k}^{t_{k-1},x}} - X_T^{t_k,x} \right).$$

Grazie ai risultati classi per i flussi stocastici (cf. [3]), $(t,x) \to X_T^{t,x}$ è sufficientemente regolare da supportare le derivate in senso classico. Usiamo lo sviluppo di Taylor per una funzione C^2:

$$f(\delta) - f(0) = \delta f'(0) + \frac{\delta^2}{2} f"(\lambda\delta), \qquad \lambda \in [0,1].$$

dove $f(\delta) = X_t^{t_k, x+\delta}$ e $\delta := \Delta_k X = X_{t_k}^{t_{k-1},x} - x$

$$X_T^{t,x} - x = \sum_{k=1}^{n} \left(\Delta_k X \partial_x X_T^{t_k,x} + \frac{(\Delta_k X)^2}{2} \partial_{xx} X_T^{t_k, x+\lambda_k \Delta_k X} \right) \tag{1.20}$$

per qualche $\lambda_k = \lambda_k(\omega) \in [0,1]$. Dato che X è soluzione dell'equazione (1.18), vale:

$$\Delta_k X = X_{t_k}^{t_{k-1},x} - x = \int_{t_{k-1}}^{t_k} b(X_s^{t_{k-1},x})ds + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sigma(X_s^{t_{k-1},x})dW_s.$$

Definiamo:

$$\Delta_k t = t_k - t_{k-1}, \quad \Delta_k W = W_{t_k} - W_{t_{k-1}}, \quad \tilde{\Delta}_k X = b(x)\Delta_k t + \sigma(x)\Delta_k W.$$

Per la stima a priori in L^2 (1.10) e la dipendenza dal dato iniziale (1.11) delle soluzioni di una SDE, otteniamo:

$$E\left[\left|\Delta_k X - \tilde{\Delta}_k X\right|^2 + \left|\partial_{xx} X_T^{t_k, x+\lambda_k \Delta_k X - \partial_{xx} X_T^{t_k,x}}\right|^2\right] \leq c(1+|x|^2)(\Delta_k t)^2$$

dove la costante c dipende solamente da T e dalle costanti delle ipotesi standard sui coefficienti b, σ. Dalla (1.20) si ha quindi:

$$X_T^{t,x} - x = \sum_{k=1}^{n}\left(\tilde{\Delta}_k X \partial_x X_T^{t_k,x} + \frac{(\tilde{\Delta}_k X)^2}{2}\partial_{xx} X_T^{t_k,x}\right)$$

Ora, muniti dell'osservazione 4 e notando che $\partial_x X_T^{t_k,x}, \partial_{xx} X_T^{t_k,x} \in m\mathcal{F}_T^{W,t_k}$, valgono i seguenti limiti in norma L^2:

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{\Delta}_k X \partial_x X_T^{t_k,x} = \sum_{k=1}^{n} b(x)\partial_x X_T^{t_k,x}(\Delta_k t) + \sum_{k=1}^{n} \sigma(x)\partial_x X_T^{t_k,x}\Delta_k W$$

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{\Delta}_k X \partial_x X_T^{t_k,x} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_t^T b(x)\partial_x X_T^{s,x} ds + \int_t^T \sigma(x)\partial_x X_T^{s,x} \star dW_s$$

Analogamente, osservando che $(\tilde{\Delta}_k X)^2 = \sigma^2(x)\Delta_k t$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(\tilde{\Delta}_k X)^2}{2}\partial_{xx} X_T^{t_k,x} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_t^T \frac{1}{2}\sigma^2(x)\partial_{xx} X_T^{t_k,x} ds$$

□

Corollario 1.2.3. *Sia $v \in bC^2(\mathbb{R}^N)$. Se X è soluzione di (1.18) e posto $V_T^{t,x} = v(X_T^{t,x})$. Allora $V_T^{t,x}$ risolve la SPDE (1.19), ovvero:*

$$-dV_T^{t,x} = \mathcal{L}V_T^{t,x}dt + \sigma_{ij}(t,x)\partial_{x_i} V_T^{t,x} \star dW_t^j$$

con la condizione finale $V_T^{T,x} = g(x)$.

Dimostrazione. É una semplice conseguenza della formula backward di Itô (1.17) e del teorema precedente.
Innanzitutto calcoliamo alcune derivate di cui avremo bisogno:

$$\begin{aligned}\partial_{x_h} V_T^{t,x} = \partial_{x_h} v(X_T^{t,x}) =& (\nabla v)(X_T^{t,x}) \partial_{x_h} X_T^{t,x} \\ \partial_{x_h x_k} V_T^{t,x} = \partial_{x_h x_k} v(X_T^{t,x}) =& (\partial_{ij} v)(X_T^{t,x})(\partial_{x_h} X_T^{t,x})_i (\partial_{x_k} X_T^{t,x})_j \\ &+ (\nabla v)(X_T^{t,x}) \partial_{x_h x_k}(X_T^{t,x})\end{aligned} \tag{1.21}$$

Consideriamo la formula backward di Itô per $v(X_T^{t,x})$ dove il processo X è soluzione della SPDE (1.19):

$$\begin{aligned}-dv(X_T^{t,x}) =& \left(\frac{1}{2}((\nabla X_T^{t,x})\sigma(t,x)((\nabla X_T^{t,x})\sigma(t,x))^*)_{ij}(\partial_{ij} v)(X_T^{t,x})\right) dt \\ &+ \left(\frac{1}{2}(\sigma(t,x)\sigma^*(t,x))_{ij}\partial_{x_i x_j} X_T^{t,x} + b(t,x)\nabla X_T^{t,x}\right)(\nabla v)(X_T^{t,x}) dt \\ &+ (\nabla v)(X_T^{t,x})(\nabla X_T^{t,x})\sigma(t,x) \star dW_t\end{aligned}$$

Sostituendo le (1.21):

$$-dV_T^{t,x} = \left(\frac{1}{2}(\sigma(t,x)\sigma^*(t,x)\partial_{x_h x_k} V_T^{t,x} + b(t,x)\nabla V_T^{t,x}\right) dt + \nabla V_T^{t,x}\sigma(t,x) \star dW_t$$

$\square$

Capitolo 2

Il problema del filtraggio

Lo scopo del filtraggio è stimare lo stato attuale di un sistema dinamico in evoluzione, descritto da un processo stocastico, denotato con $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ e chiamato processo del segnale. Il processo del segnale non può essere misurato direttamente, ma solo attraverso un processo correlato $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$, chiamato processo delle osservazioni.
Il problema del filtraggio consiste nel calcolo, per ogni t, della distribuzione condizionata del segnale Z_t, data la filtrazione generata dal processo osservabile Y, dove indichiamo con $\mathcal{F}^Y_{t,T} = \sigma(Y_s; 0 \leq s \leq t)$.
Ad esempio, supponiamo di osservare il processo Y che descrive la posizione di un oggetto rilevata da un radar. Le misurazioni di questo genere sono sempre legate ad un errore che sarà rappresentato da un moto Browniano W. Con il problema del filtraggio intendiamo la ricerca della reale posizione Z dell'oggetto o di una funzione di essa sulla base delle informazioni ottenute dall'osservazione di Y.
In questo capitolo prenderemo in esame un modello cinetico classico e studieremo il problema del filtraggio. Nel dettaglio, otterremo una formula di rappresentazione per l'attesa condizionata del tipo

$$E[\varphi(Z^{t,z}_T)|\mathcal{F}^Y_{t,T}] = \int \hat{\Gamma}(t, z; T, \zeta)\varphi(\zeta)d\zeta$$

dove $\hat{\Gamma}$ è la soluzione fondamentale normalizzata dell'equazione del filtraggio forward ed analogamente,

$$E[\varphi(Z_T^{t,z,t}, Y_T^{t,z,y})|\mathcal{F}_{t,T}^Y] = \int \bar{\Gamma}(t,z,y;T,\zeta,\eta)\varphi(\zeta)d\zeta d\eta$$

dove $\bar{\Gamma}$ è la soluzione fondamentale normalizzata dell'equazione del filtraggio backward.

2.1 Soluzione fondamentale

Consideriamo un operatore L della forma

$$Lu = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} c_{ij}\partial_{x_i x_j}u + \sum_{i=0}^{N} b_i\partial_{x_i}u - au - \partial_t u$$

dove (c_{ij}) è una matrice simmetrica ed i coefficienti $c_{ij} = c_{ij}(t,x), b_i = b_i(t,x)$ e $a = a(t,x)$ sono funzioni Hölder continue e limitate in $(t,x) \in \mathbb{R}^{N+1}$. Supponiamo inoltre che L sia uniformemente parabolico, ovvero esiste una costante λ tale che

$$\lambda^{-2}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} c_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \leq \lambda|\xi|^2, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad x,\xi \in \mathbb{R}^N.$$

Fissato $T > 0$, poniamo $\mathcal{S}_T :=]0,T[\times\mathbb{R}^N$. Prendiamo in considerazione il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{in } \mathcal{S}_T \\ u(0,\cdot) = \varphi, & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2.1}$$

Definizione 2.1 (Soluzione fondamentale)**.** Una soluzione fondamentale per l'operatore L, con polo in (t,x) in $\mathbb{R}^{N+1}$, è una funzione $\Gamma(t,x;\cdot,\cdot)$ definita su $]t,+\infty[\times\mathbb{R}^N$ tale che, per ogni $\varphi \in bC(\mathbb{R}^N)$, la funzione

$$u(s,y) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(t,x;s,y)\varphi(x)dx$$

è soluzione classica del problema di Cauchy

$$\begin{cases} Lu = 0, & \text{in }]t,+\infty[\times\mathbb{R}^N \\ u(t,\cdot) = \varphi, & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2.2}$$

Si può vedere tramite il metodo della parametrice di Levi che, se L è uniformemente parabolico con i coefficienti limitati e Hölder continui, allora l'operatore ammette una soluzione fondamentale $\Gamma = \Gamma(t, x; s, y)$. In questo caso la soluzione fondamentale è una funzione positiva definita per $x, y \in \mathbb{R}^N$ e $t < s$, tale che per ogni $\varphi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, la funzione u definita come

$$u(s, y) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(0, x; s, y)\varphi(x) - \int_0^s \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(t, x; s, y) f(t, x) dx dt,$$

con $(s, y) \in \mathcal{S}_T$ e $u(0, x) = \varphi(x)$, è una soluzione di (2.1).
Se le derivate $\partial_{x_i} c_{ij}, \partial_{x_i x_j} c_{ij}, \partial_{x_i} b_i$ esistono per ogni indice $i, j = 1, \ldots, N$ e sono Hölder continue, allora possiamo definire l'operatore aggiunto di L.
Per ogni $u, v \in C_0^2(\mathbb{R}^{N+1})$, applicando l'integrazione per parti otteniamo la seguente relazione:

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}} uLv = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} vL^*u,$$

dove

$$L^* = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{N} c_{jk} \partial_{x_j x_k} + \sum_{j=1}^{N} b_j^* \partial_{x_j} - a^* + \partial_t$$

con

$$b_i^* = -b_i + \sum_{j=1}^{N} \partial_{x_i} c_{ij}, \qquad a^* = a - \frac{1}{2} \partial_{x_i x_j} c_{ij} + \sum_{j=1}^{N} b_j.$$

Si dice che L^* è l'operatore aggiunto di L. Ad esempio, l'operatore del calore definito come $H := \frac{1}{2}\Delta - \partial_t$ ha come operatore aggiunto $H^* = \frac{1}{2}\Delta + \partial_t$.

Definizione 2.2. Una soluzione fondamentale per l'operatore L^* è una funzione $\Gamma^*(t, x; T, y)$ definita per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$ e $t < T$, tale che, per ogni $\varphi \in bC(\mathbb{R}^N)$, la funzione

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma^*(t, x; T, y)\varphi(y) dy$$

è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} L^* v = 0, & \text{in }] - \infty, T[\times \mathbb{R}^N, \\ v(T, \cdot) = \varphi, & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2.3}$$

L'operatore L^* è anche detto *operatore backward* poiché il problema di Cauchy associato (2.3) richiede una condizione finale. Il seguente risultato stabilisce la relazione duale tra la soluzione fondamentale di L e L^*.

Teorema 2.1.1. *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$ e $t < T$, si ha*

$$\Gamma^*(t, x; T, y) = \Gamma(t, x; T, y).$$

Osservazione 5. Per l'operatore del calore, con un semplice cambio di variabile, si nota che il problema backward è equivalente al corrispondente problema diretto: infatti, u è soluzione di

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\Delta u - \partial_t u = 0, & \text{in }]0, +\infty[\times\mathbb{R}^N \\ u(0, x) = \varphi(x), & \text{in } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

se e solo se $v(t, x) = u(T - t, x)$ è soluzione di

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\Delta v + \partial_t u = 0, & \text{in }] - \infty, T[\times\mathbb{R}^N \\ u(T, x) = \varphi(x), & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

La soluzione fondamentale di un operatore è la connessione tra le PDE e le SDE. Consideriamo la seguente equazione differenziale stocastica

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \tag{2.4}$$

con i coefficienti b, σ continui e limitati. Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^{N+1})$, se applichiamo la formula di Itô otteniamo:

$$du(t, X_t) = \partial_t u(t, X_t)dt + \mathcal{A}_t u(t, X_t)dt + \nabla u(t, X_t) \cdot \sigma(t, X_t)dW_t \tag{2.5}$$

dove

$$\mathcal{A}_t := \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} c_{ij}(t, x)\partial x_i x_j + \sum_{j=1}^{N} b_j(t, x)\partial_{x_j}, \tag{2.6}$$

con $(c_{ij}) = \sigma\sigma^*$.

Definizione 2.3 (Operatore caratteristico)**.** L'operatore $\mathcal{A}_t$ definito sopra è detto operatore caratteristico della SDE (2.4).

Notiamo quindi che ad ogni SDE è formalmente associato un operatore $\partial_t + \mathcal{A}_t$ che è della forma di L^* con il coefficiente $a = 0$.
Abbiamo visto che se i coefficienti di $\partial_t + \mathcal{A}_t$ sono limitati e Hölder continui, l'operatore ammette una soluzione fondamentale Γ. Allora, la funzione u definita come

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(t,x;T,y)\varphi(y)dy, \qquad \forall \varphi \in bC(\mathbb{R}^N) \tag{2.7}$$

è la soluzione classica e limitata del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \mathcal{A}_t u(t,x) = 0, & (t,x) \in \mathcal{S}_t \\ u(T,y) = \varphi(y), & y \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

La (2.5) diventa quindi

$$du(t,X_t) = \nabla u(t,X_t) \cdot \sigma(t,X_t)dW_t \tag{2.8}$$

da cui

$$u(T,X_T^{t,x}) = u(t,x) + \int_t^T \nabla u(s,X_s^{t,x}) \cdot \sigma(s,X_s^{t,x})dW_s$$

Dove indichiamo con $X^{t,x}$ la soluzione di (2.4) con dato iniziale $X_t^{t,x} = x$. Applichiamo il valore atteso e poiché sia ∇u e σ sono limitati, si ha che $\nabla u(t,X_t) \cdot \sigma(t,X_t) \in L^2$, otteniamo

$$E[u(T,X_T^{t,x})] = u(t,x).$$

Usando la formula di Feynman-Kač sul primo termine e la definizione (2.7) per il secondo, si ha

$$E[\varphi(X_T^{t,x})] = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(t,x;T,y)\varphi(y)dy. \tag{2.9}$$

Per l'arbitrarietà di φ, per ogni $x \in \mathbb{R}^{d_1}$ e $t < T$, la funzione

$$y \mapsto \Gamma(t,x;T,y)$$

è la densità di $X_T^{t,x}$. Possiamo quindi dire che Γ è la densità di transizione della SDE (2.4).

Teorema 2.1.2. *Se esiste la soluzione fondamentale dell'operatore differenziale $\mathcal{A}_t + \partial_t$ con $\mathcal{A}_t$ definito come (2.6), allora questa è uguale alla densità di transizione del SDE (2.4).*

Analogamente, se esiste l'operatore aggiunto $\mathcal{A}_t^* - \partial_t$ ed ammette una soluzione fondamentale, questa è la densità di transizione della SDE.

Esempio 2.1 (Equazione del calore)**.** Consideriamo la SDE definita come

$$dX_t = \sigma dW_t^1 + \sqrt{1-\sigma^2}dW_t^2$$

con $W = (W^1, W^2)$ moto browniano bidimensionale. Si nota immediatamente che è un'equazione lineare e di conseguenza la soluzione sarà della forma:

$$X_t^x = x + \sigma W_t^1 + \sqrt{1-\sigma^2}dW_t^2.$$

Quindi $X_t^x \sim \mathcal{N}_{x,t}$ ed ha una densità di transizione uguale a

$$\Gamma(0, x; t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right).$$

La SDE in studio è associata all'operatore del calore aggiunto

$$\partial_t + \frac{1}{2}\partial_x^2$$

che ammetterà quindi $\Gamma(0, x; t, \cdot)$ come soluzione fondamentale.

Esempio 2.2. Consideriamo il seguente modello cinetico classico in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} dX_t = V_t dt, \\ dV_t = \sigma dW_t, \quad \sigma > 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Dove W è un moto Browniano unidimensionale e X, V rappresentano rispettivamente la posizione e la velocità di una particella.
Possiamo riscrivere il sistema come un'unica equazione stocastica lineare:

$$dZ_t = BZ_t dt + \bar{\sigma} dW_t, \qquad Z_t = (X_t, V_t)$$

dove:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix}.$$

Poiché i coefficienti dell'equazione sono funzioni lineari, sono verificati i teoremi di esistenza ed unicità per la soluzione, la quale è della forma:

$$Z_t^z = e^{tB}\left(z + \int_0^t e^{-sB}\bar{\sigma}dW_s\right)$$

dove $z = (x, v)$ indica il dato iniziale.
Di conseguenza $Z_t^z \sim \mathcal{N}_{m_t(z),\mathcal{C}_t}$.
Dato che $B^2 = 0$, la matrice B è nilpotente e

$$e^{tB} := \sum_{n\geq 0} \frac{(tB)^n}{n!} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che:

$$m_t(z) = e^{tB}z = (x + tv, v)$$

e

$$\mathcal{C}_t = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \frac{t^3\sigma}{3} & \frac{t^2\sigma}{2} \\ \frac{t^2\sigma}{2} & t\sigma \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{C}_t$ è definita positiva se $t > 0$, cioè il processo (X, V) ha densità di transizione gaussiana per $t < T$:

$$\Gamma(t, z; T, \zeta) = \frac{\sqrt{3}}{\pi\sigma(T-t)^2} exp\left(-\frac{1}{2}\langle\mathcal{C}_{T-t}^{-1}(\zeta - e^{(T-t)B}z), \zeta - e^{(T-t)B}z)\rangle\right)$$

dove $z = (x, v)$ e $\zeta = (\mu, \xi)$.
Come abbiamo visto precedentemente, alla SDE (2.10) è formalmente associato l'operatore di Kolmogorov backward:

$$\partial_t + \mathcal{A}_t = \frac{1}{2}\sigma^2\partial_{vv} + v\partial_x + \partial_t,$$

dove la soluzione fondamentale è: $(t, x, v) \mapsto \Gamma(t, x, v; T, \mu, \xi)$. Analogamente, $(T, \mu, \xi) \mapsto \Gamma(t, x, v; T, \mu, \xi)$ è la soluzione fondamentale dell'operatore di Kolmogorov forward

$$-\partial_t + \mathcal{A}_t^* = \frac{1}{2}\sigma^2\partial_{\mu\mu} + \mu\partial_\xi - \partial_T.$$

Osservazione 6. Notiamo che nell'esercizio appena svolto, l'operatore di Kolmogorov forward non è uniformemente parabolico poichè il coefficiente del secondo ordine è degenere:

$$\bar{\sigma}\bar{\sigma}^* = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2 Filtering problem

Consideriamo la seguente generalizzazione del modello cinetico visto in precedenza:

$$\begin{cases} dX_t = V_t dt \\ dV_t = b(t, X_t, V_t, Y_t)dt + \bar{\sigma}(t, X_t, V_t, Y_t)dW_t^1 + \hat{\sigma}(t, X_t, V_t, Y_t)dW_t^2 \\ dY_t = h(t, X_t, V_t, Y_t)dt + \theta(t, Y_t)dW_t^1 \end{cases} \tag{2.11}$$

Dove X, V sono processi stocastici scalari che rappresentano rispettivamente la posizione e la velocità di una particella, mentre $W_t = (W_t^1, W_t^2)$ è un moto Browniano bidimensionale definito sullo spazio di probabilità completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con la filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ che soddisfa le ipotesi usuali. Il processo Y, detto processo delle osservazioni, indica le informazioni disponibili sul moto della particella.
Denotiamo con $Z = (X, V)$, possiamo quindi riscrivere il sistema (2.11) come:

$$\begin{cases} dZ_t = BZ_t dt + \mathbf{e}_2(b(t, Z_t, Y_t)dt + \bar{\sigma}(t, Z_t, Y_t)dW_t^1 + \hat{\sigma}(t, Z_t, Y_t)dW_t^2 \\ dY_t = h(t, Z_t, Y_t)dt + \theta(t, Y_t)dW_t^1 \end{cases} \tag{2.12}$$

con

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sia $\mathcal{F}_{t,T}^Y$ la filtrazione definita dal processo delle osservazioni e sia $\varphi \in bC(\mathbb{R}^2)$ una funzione continua e limitata, il problema del filtraggio consiste nel trovare la miglior stima di $E[\varphi(Z_T^{t,z})|\mathcal{F}_{t,T}^Y]$.

Vogliamo dimostrare una formula di rappresentazione per $E[\varphi(Z_T^{t,z})|\mathcal{F}_{t,T}^Y]$ che sia analoga alla (2.9), adottando un *approccio diretto*. Nello specifico tratteremo l'approccio di Krylov e Zatezalo e successivamente quello di Veretennikov. Per il primo: supponiamo di conoscere in anticipo la SPDE del filtraggio forward, troviamo la soluzione per essa e verifichiamo che sia effettivamente il valore atteso che cercavamo. In questo modo si prova l'esistenza della densità del filtraggio forward ed una rappresentazione di $E[\varphi(Z_T^{t,z})|\mathcal{F}_{t,T}^Y]$ in termini di essa.
Il secondo invece permette di ricavare la SPDE del filtraggio backward, e la relativa densità di filtraggio, grazie alle formule backward di Itô.
Come prima cosa applichiamo il teorema di Girsanov modificando così il drift del processo delle osservazioni, ottenendo un nuovo sistema equivalente:

$$\begin{cases} dZ_t = BZ_t dt + \mathbf{e}_2((b - \bar{\sigma}\tilde{h})dt + \bar{\sigma}d\tilde{W}_t + \hat{\sigma}dW_t^2 \\ dY_t = \theta(t, Y_t)d\tilde{W}_t \end{cases} \tag{2.13}$$

2.2.1 Teorema di Girsanov

Il teorema di Girsanov mostra come sostituire "arbitrariamente" il drift di un processo di Itô, modificando la misura di probabilità e il moto Browniano su cui è definito il processo in questione e mantenendo invariato il coefficiente di diffusione.
Per prima cosa chiamiamo martingala esponenziale associata ad un processo $\lambda \in L^2_{loc}$ d-dimensionale il processo:

$$Z_t^\lambda = exp\left(-\int_0^t \lambda_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\lambda_s|^2 ds\right), \qquad t \in [0, T] \tag{2.14}$$

dove $(W_t)_{t\in[0,T]}$ è un moto Browniano d-dimensionale in $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t))$. Per la formula di Itô:

$$dZ_t^\lambda = -Z_t^\lambda \lambda_t dW_t \tag{2.15}$$

quindi Z_t^λ è una martingala locale. Inoltre, dato che Z^λ assume sempre valori positivi, è anche una super martingala, ossia:

$$E[Z_t^\lambda] \leq E[Z_0^\lambda] = 1 \tag{2.16}$$

Lemma 2.2.1. *Se esiste una costante C tale che:*

$$\int_0^T |\lambda_s|^2 ds \leq C \qquad a.s.$$

allora Z^λ definito in (2.14) è una martingala tale che

$$E[\sup_{0\leq t\leq T}(Z_t^\lambda)^p] < \infty, \qquad p \geq 1.$$

In particolare $Z^\lambda \in L^p(\Omega, \mathbb{P})$ per ogni $p \geq 1$.

Dimostrazione. Poniamo

$$\hat{Z} := \sup_{0\leq t\leq T} Z_t^\lambda.$$

Per ogni $\zeta > 0$, si ha

$$\begin{aligned} P(\hat{Z}_T \geq \zeta) &\leq P\left(\sup_{0\leq t\leq T} exp\left(-\int_0^t \lambda_s dW_s\right) \geq \zeta\right) \\ &= P\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left(-\int_0^t \lambda_s dW_s\right) \geq log\zeta\right) \\ &\leq c_1 e^{-c_2(log\zeta)^2} \end{aligned}$$

Allora, otteniamo:

$$E[\hat{Z}_T^p] = p\int_0^\infty \zeta^{p-1} P(\hat{Z}_T \geq \zeta) d\zeta < \infty.$$

In particolare per $p = 2$ si ha $\lambda Z^\lambda \in L^2$ e quindi, dalla (2.15), Z^λ è una martingala. □

Lemma 2.2.2. *Sia Z^λ in (2.14) una $\mathbb{P}$-martingala e sia $\mathbb{Q}$ una misura di probabilità definita come*

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Z_T^\lambda.$$

Allora un processo $(M_t)_{t\in[0,T]}$ è una $\mathbb{Q}$-martingala se e solo se $(M_t Z_t^\lambda)_{t\in[0T]}$ è una $\mathbb{P}$-martingala.

Dimostrazione. Poiché Z^λ è strettamente positiva ed un processo adattato, M è adattato se e solo se $MZ\lambda$ lo è. Inoltre, $Z\lambda$ è una $\mathbb{P}$-martingala, M è $\mathbb{Q}$-integrabile se e solo se MZ^λ è $\mathbb{P}$-integrabile, infatti:

$$E^Q[|M_t|] = E^P[|M_t|Z_T^\lambda] = E^P[E^P[|M_t|Z_T^\lambda|\mathcal{F}_t]] =$$

(poiché M è adattato)

$$= E^P[|M_t|E^P[Z_T^\lambda|\mathcal{F}_t]] = E^P[|M_t|Z_t^\lambda].$$

E, per ogni $s \leq t$, vale la proprietà martingala:

$$E^P[M_t Z_T^\lambda|\mathcal{F}_s] = E^P[E^P[M_t Z_T^\lambda|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] = E^P[M_t Z_t^\lambda|\mathcal{F}_s].$$

Per la formula di Bayes:

$$E^Q[M_t|\mathcal{F}_s] = \frac{E^P[M_t Z_T^\lambda|\mathcal{F}_s]}{E^P[Z_T^\lambda|\mathcal{F}_s]} = \frac{E^P[M_t Z_t^\lambda|\mathcal{F}_s]}{Z_s^\lambda}$$

□

Teorema 2.2.3 (Teorema di Girsanov)**.** *Sia Z^λ la martingala esponenziale associata al processo $\lambda \in L^2_{loc}$. Sia Z^λ una $\mathbb{P}$-martingala e sia $\mathbb{Q}$ una misura di probabilità definita come*

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Z_T^\lambda$$

allora il processo

$$W_t^\lambda := W_t + \int_0^t \lambda_s ds, \qquad t \in [0, T]$$

è un moto browniano su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}, (\mathcal{F}_t))$.

Dimostrazione. W^λ è un processo continuo in $\mathbb{R}^d$ su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}, (\mathcal{F}_t))$ e $W\lambda_0 = 0$. Se per ogni $\xi \in \mathbb{R}^d$ il processo:

$$Y_t^\xi := e^{i\xi \cdot dW^\lambda + \frac{|\xi|^2 t}{2}}$$

è una $\mathbb{Q}$-martingala allora W^λ è un moto browniano. Equivalentemente, per il Lemma 2.2.2, basta mostrare che $Y^\xi Z^\lambda$ è una $\mathbb{P}$-martingala.

$$Y_t^\xi Z_t^\lambda = \exp\left(i\xi \cdot W_t + i\int_0^t \xi \cdot \lambda_s ds + \frac{|\xi|^2 t}{2} - \int_0^t \lambda_s \cdot dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\lambda_s|^2 ds\right)$$
$$= \exp\left(-\int_0^t (\lambda_s - i\xi) \cdot dW_s - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^d \int_0^t (\lambda_s^k - i\xi^k)^2 ds\right)$$

Applichiamo il metodo di localizzazione: consideriamo la seguente sequenza di tempi d'arresto

$$\tau_n := T \wedge \inf\{t : \int_0^t |\lambda_s|^2 ds \geq n\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Per il Lemma 2.2.1, il processo $(Y^\xi_{t\wedge\tau_n} Z^\lambda_{t\wedge\tau_n})$ è una $\mathbb{P}$-martingala e abbiamo:

$$E^P[Y^\xi_{t\wedge\tau_n} Z^\lambda_{t\wedge\tau_n} | \mathcal{F}_s] = Y^\xi_{s\wedge\tau_n} Z^\lambda_{s\wedge\tau_n}, \quad s \leq t, n \in \mathbb{N}.$$

Perciò, per dimostrare che $Y^\xi Z^\lambda$ è una martingala, basta vedere che $(Y^\xi_{t\wedge\tau_n} Z^\lambda_{t\wedge\tau_n})$ converge a $Y^\xi Z^\lambda$ in norma L^1 per n che tende all'infinito.
Poiché:

$$\lim_{n\to\infty} Y^\xi_{t\wedge\tau_n} = Y^\xi_t, \qquad q.c.$$

e $0 \leq Y^\xi_{t\wedge\tau_n} \leq e^{\frac{|\xi|^2 t}{2}}$, quindi è sufficiente mostrare che

$$\lim_{n\to\infty} Z^\lambda_{t\wedge\tau_n} = Z^\lambda_t, \quad \text{in } L^1(\Omega, \mathbb{P}).$$

Poniamo

$$M_n := \min\{Z^\lambda_{t\wedge\tau_n}, Z^\lambda_t\}$$

di conseguenza, si ha $0 \leq M_t \leq Z^\lambda_t$ e per il teorema della convergenza dominata:

$$\lim_{n\to\infty} E[M_n] = E[Z^\lambda_t].$$

D'altra parte

$$E[|Z^\lambda_t - Z^\lambda_{t\wedge\tau_n}|] = E[Z^\lambda_t - M_n] + E[M_n - Z^\lambda_{t\wedge\tau_n}] = 2E[Z^\lambda_t - M_n]$$

poiché $E[Z_t] = E[Z_{t\wedge\tau_n}] = 1$. □

2.2.2 Filtraggio forward

Ipotesi 2.1 (Regolarità)**.** Assumiamo che i coefficienti di (2.11) abbiano la seguente regolarità:

$$\bar{\sigma} \in bC^{3+\alpha}_{0,T}(\mathbb{R}^3), \quad \hat{\sigma} \in bC^{2+\alpha}_{0,T}(\mathbb{R}^3), \quad \theta \in bCbC^{\alpha}_{0,T}(\mathbb{R}),$$

$$b \in bC^1_{0,T}(\mathbb{R}^3), \quad h \in bC^2_{0,T}(\mathbb{R}^3).$$

Ipotesi 2.2 (Coercività)**.** Esiste una costante positiva m tale che

$$\theta(t,y) \geq m, \quad \hat{\sigma}(t,z,y) \geq m, \qquad t \in [0,T],\ z \in \mathbb{R}^2,\ y \in \mathbb{R}.$$

Ipotesi 2.3 (Flattening)**.** Esistono due costanti positive ε, M tali che:

$$\sup_{\substack{t\in[0,T]\\ y\in\mathbb{R}}} \left(\langle \bar{\sigma}(t,\cdot,y)\rangle_{\varepsilon,\beta} + \langle \bar{\sigma}(t,\cdot,y)\rangle_{\frac{1}{2}+\varepsilon,\beta'} + \langle h(t,\cdot,y)\rangle_{\frac{1}{2},\beta}\right.$$

per $|\beta| = 1$ e $|\beta'| = 2,3$.

Per alleggerire la notazione, posto $\zeta = (\xi,\nu) \in \mathbb{R}^2$ e $\sigma := (\bar{\sigma},\hat{\sigma})$ denotiamo con:

$$\sigma_s(\zeta) := \sigma(s,\zeta,Y_s), \quad \theta_s := \theta(s,Y_s), \quad b_s(\zeta) := b(s,\zeta,Y_s), \quad \tilde{h}_s(\zeta) := \frac{h(s,\zeta,Y_s)}{\theta(s,Y_s)}$$

Sia $(Z_s^{t,z}, Y_s)_{s\in[t,T]}$ soluzione del sistema (2.12), per $t \leq s \leq T$, definiamo:

$$\rho_s^{t,z} = \rho_s^{t,z}(Z^{t,x}, Y_s) := exp\left(\int_t^s \tilde{h}_\tau(Z_\tau^{t,z})dW_\tau^1 + \frac{1}{2}\int_t^s \tilde{h}_\tau(Z_\tau^{t,z})^2 d\tau\right) \quad (2.17)$$

Per le ipotesi di regolarità su h e per la coercività di θ, la funzione $\tilde{h}$ è limitata; si ha quindi $\mathbb{P}(0 < \rho_T^{t,z} < \infty) = 1$ e per il Lemma 2.2.1, $(\rho_T^{t,z})^{-1}$ è una martingala per cui vale:

$$E[(\rho_T^{t,z})^{-1}] = E[(\rho_t^{t,z})^{-1}] = 1.$$

Dunque, è possibile introdurre una nuova misura di probabilità $\mathbb{Q}$ su $(\Omega,\mathcal{F})$, definita come

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = (\rho_T^{t,z})^{-1}. \qquad (2.18)$$

Per il teorema di Girsanov, esiste un moto browniano $(\tilde{W}_s)_{s\in[t,T]}$ tale che

$$\tilde{W}_s := W_s^1 - W_t^1 + \int_t^s \tilde{h}_\tau(Z_\tau^{t,z})d\tau, \quad s \in [t,T].$$

Possiamo quindi riscrivere il sistema (2.12) come (2.13).
Supponiamo che la SPDE del filtraggio forward per il sistema (2.13) sia della forma:

$$d_{\mathbf{B}}u_s(\xi,\nu) = \mathcal{A}_s^*(\xi,\nu)u_s(\xi,\nu)ds + \mathcal{G}_s^*(\xi,\nu)u_s(\xi,\nu)d\tilde{W}_s, \quad \mathbf{B} = \partial_s + \nu\partial_\xi \quad (2.19)$$

nello spazio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}, (\mathcal{F}_t))$, dove $\mathcal{A}^*$ e $\mathcal{G}^*$ indicano rispettivamente gli operatori differenziali aggiunti di:

$$\mathcal{A}_s(\xi,\nu) := \frac{1}{2}(\bar{\sigma}^2(\xi,\nu) + \hat{\sigma}^2(\xi,\nu))\partial_{\nu\nu} + b_s(\xi,\nu)\partial_\nu,$$

$$\mathcal{G}_s(\xi,\nu) := \bar{\sigma}_s(\xi,\nu)\partial_\nu + \tilde{h}_s(\xi,\nu).$$

Il simbolo $d_{\mathbf{B}}$ indica che l'equazione è risolta in un senso intrinseco.

Definizione 2.4. Diciamo che $u_s = u_s(\xi,\nu)$ è soluzione di (2.19) se è un processo continuo differenziabile due volte in ν che risolve l'equazione:

$$u_s(\gamma^{\mathbf{B}}_{s-t}(\zeta)) = u_t(\zeta) + \int_t^s \mathcal{A}^*_\tau(\gamma^{\mathbf{B}}_{\tau-t}(\zeta))u_\tau(\gamma^{\mathbf{B}}_{\tau-t}(\zeta))d\tau + \int_t^s \mathcal{G}^*_\tau(\gamma^{\mathbf{B}}_{\tau-t}(\zeta))u_\tau(\gamma^{\mathbf{B}}_{\tau-t}(\zeta))d\tilde{W}_\tau$$

dove $s \mapsto \gamma^{\mathbf{B}}_{s-t}(\zeta)$ denota la curva integrale relativa al campo vettoriale $\nu\partial_\xi$, con punto iniziale (ξ,ν), cioè $\gamma^{\mathbf{B}}_{s-t}(\xi,\nu) = (\xi + s\nu, \nu)$.

Con il metodo della parametrice è possibile ottenere alcune stime per la soluzione fondamentale di (2.19) e per le sue derivate in termini del nucleo Gaussiano:

$$\Gamma_\lambda(t,x,v) = \frac{1}{t^2} exp\left(-\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{x^2}{t^3} + \frac{v^2}{t}\right)\right), \quad t > 0, (x,v) \in \mathbb{R}^2, \lambda > 0.$$

Si può vedere che, a meno di costanti e normalizzazioni, Γ_λ è la soluzione fondamentale dell'equazione degenere di Langevin (2.10).
In [7] viene dimostrato che l'equazione (2.19) ammette una soluzione fondamentale Γ e il processo $s \mapsto \Gamma(t,z;s,\zeta)$ è adattato a $(\mathcal{F}^Y_{t,s})_{s\in[t,T]}$.
Diciamo che il processo stocastico

$$\hat{\Gamma}(t,z;s,\zeta) = \frac{\Gamma(t,z;s,\zeta)}{\int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(t,z;s,\zeta_1)d\zeta_1}, \quad 0 \le t < s \le T, z, \zeta \in \mathbb{R}^2$$

è la densità del problema del filtraggio forward per il sistema (2.11).

Teorema 2.2.4. *Consideriamo la soluzione* $(Z^{t,z}_s, Y_s)_{s\in[t,T]}$ *del sistema (2.11) con dato iniziale* $Z^{t,z}_t = z \in \mathbb{R}^2$. *Sotto le ipotesi 2.1, 2.5, 2.6 per ogni* $\varphi \in bC(\mathbb{R}^2)$ *si ha*

$$E[\varphi(Z^{t,z}_T)|\mathcal{F}^Y_{t,T}] = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{\Gamma}(t,z;T,\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta, \quad (t,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^2 \qquad (2.20)$$

Osservazione 7. Data l'equazione (2.19), supponiamo che essa sia la SPDE del filtraggio forward del nostro sistema. Dobbiamo fare attenzione allo spazio di probabilità su cui sono definite le rispettive equazioni differenziali.
Il sistema (2.11) è definito per la misura di probabilità $\mathbb{P}$, mentre la SPDE forward per la misura di probabilità $\mathbb{Q}$. Applicando un cambio di misura, riscriviamo la (2.19) in $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t))$ come

$$d_{\mathbf{B}} u_s(\xi, \nu) = \mathcal{A}_s^*(\xi, \nu) u_s(\xi, \nu) ds + \mathcal{G}_s^*(\xi, \nu) u_s(\xi, \nu) \frac{dY_s}{\theta_s}. \tag{2.21}$$

Per (2.19) sappiamo che esiste Γ tale che

$$E^Q[\varphi(Z_T^{t,z})\rho_T^{t,z}|\mathcal{F}_{t,T}^Y] = \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(t, z; T, \zeta)\varphi(\zeta) d\zeta$$

Quindi $\int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(t, z; T, \zeta)\varphi(\zeta) d\zeta \in m\mathcal{F}_{t,T}^Y$ e per la formula di Kallianpur-Striebel si ha

$$E^P[\varphi(Z_T^{t,z})|\mathcal{F}_{t,T}^Y] = E^P\left[(\rho_T^{t,z})^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(t, z; T\zeta)\varphi(\zeta) d\zeta \big| \mathcal{F}_{t,T}^Y\right] \tag{2.22}$$

Dimostrazione. Per dimostrare (2.20) bisogna vedere che il termine di sinistra soddisfi la definizione di attesa condizionata.
Per prima cosa, $\int_{\mathbb{R}^2} \hat{\Gamma}(t, z; T, \zeta)\varphi(\zeta) d\zeta \in m\mathcal{F}_{t,T}^Y$ poiché per quanto detto precedentemente $\Gamma(t, z; T, \zeta) \in m\mathcal{F}_{t,T}^Y$.
Grazie alla (2.22), rimane da verificare che: data una variabile aleatoria G, $\mathcal{F}_{t,T}^Y$-misurabile e limitata, si ha

$$E[G\varphi(Z_T^{t,z})] = E\left[G(\rho_T^{t,z})^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(t, z; T, \zeta)\varphi(\zeta) d\zeta\right]. \tag{2.23}$$

Per l'arbitrarietà di φ, scelta $\varphi \equiv 1$ segue

$$E\left[(\rho_T^{t,z})^{-1}|\mathcal{F}_{t,T}^Y\right] = \left(\int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(t, z; T, \zeta) d\zeta\right)^{-1} \tag{2.24}$$

Quindi se vale (2.23) si ha

$$E[\varphi(Z_T^{t,z})|\mathcal{F}_{t,T}^Y] = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\Gamma(t, z; T, \zeta)\varphi(\zeta)}{\int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(t, z; T, \zeta_1) d\zeta_1} d\zeta. \tag{2.25}$$

Per i metodi standard di approssimazione, possiamo supporre φ nella classe delle funzioni test e G della forma $G = e^{-\int_{\mathbb{R}^2} c_s ds}$ dove $c_s = c(s, Y_s)$ è una funzione liscia, limitata e non negativa. Dobbiamo verificare che:

$$E[e^{-\int_{\mathbb{R}^2} c_s ds}\varphi(Z_T^{t,z})] = E\left[e^{-\int_{\mathbb{R}^2} c_s ds}(\rho_T^{t,z})^{-1}\int_{\mathbb{R}^2}\Gamma(t,z;T,\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta\right] \quad (2.26)$$

Consideriamo il seguente problema deterministico di Cauchy:

$$\begin{cases} -d_{\mathbf{B}}f(s,\zeta,y) = \Big(\tilde{\mathcal{A}}_s f(s,\zeta,y) - c(s,y)f(s,\zeta,y)\Big)\,ds, \\ f(T,\zeta,y) = \varphi(\zeta). \end{cases} \quad (2.27)$$

dove

$$\tilde{\mathcal{A}}_s := \frac{1}{2}(|\sigma_s(\zeta,y)|^2\partial_{\nu\nu} + 2\theta_s(y)\bar{\sigma}_s(\zeta,y)\partial_{\nu y} + \theta_s^2(y)\partial_{yy}) + b_s(\zeta,y)\partial_\nu + h_s(\zeta,y)\partial_y$$

Una soluzione di (2.27) è una funzione f continua e limitata che verifica:

$$f(s,\gamma_{T-t}^{\mathbf{B}}(\zeta),y) = \varphi(\zeta) + \int_s^T(\tilde{\mathcal{A}}_\tau - c(s,y))f(\tau,\gamma_{T-\tau}^{\mathbf{B}}(\zeta),y)d\tau.$$

Dalle stime in [7], si ha l'esistenza di una soluzione forte f per il sistema (2.27). Definiamo ora il processo continuo:

$$M_s^{t,z} := e^{-\int_{\mathbb{R}^2} c_s ds}(\rho_s^{t,z})^{-1}\int_{\mathbb{R}^2}\Gamma(t,z;T,\zeta)f(s,\zeta,Y_s)d\zeta, \qquad s \in [t,T]$$

dove $M_t^{t,z} := f(t,z,Y_t)$ è definito per continuità. Per $s = T$ si ottiene:

$$M_T^{t,z} = e^{-\int_{\mathbb{R}^2} c_s ds}(\rho_T^{t,z})^{-1}\int_{\mathbb{R}^2}\Gamma(t,z;T,\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta.$$

D'altra parte, per il teorema di Feynman-Kač

$$M_t^{t,z} = f(t,z,Y_t) = E[e^{-\int_{\mathbb{R}^2} c_s ds}\varphi(Z_T^{t,x})|Y_t]$$

Se $M = (M_s^{t,x})_{s\in[t,T]}$ è una martingala, poiché $E[M_t^{t,z}] = E[M_T^{t,z}]$. Per la rappresentazione browniana delle martingale, $M = (M_s^{t,x})_{s\in[t,T]}$ ammette un unico processo $G \in L^2$ tale per cui la martingala si scrive come:

$$M_T^{t,z} = M_t^{t,z} + \int_t^T G_s^{t,z}dW_s^1.$$

con

$$E[\int_t^T |G_s^{t,z}|^2 ds] < \infty.$$

Priviamo che G si scrive come:

$$G_s^{t,z} := e^{-\int_t^s c_\tau d\tau} (\rho_s^{t,z})^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(t,z;T,\zeta)(\mathcal{G}_s + \theta_s \partial_y) f(s,\zeta,Y_s) d\zeta, \quad s \in [t,T]. \tag{2.28}$$

Per prima cosa calcoliamo il differenziale stocastico $d_{\mathbf{B}} f(s,\zeta,Y_s)$, per (2.27):

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{B}} f(s,\zeta,Y_s) &= \left(-\tilde{\mathcal{A}}_s + \frac{1}{2}\theta_s^2 \partial_{yy} + c_s\right) f(s,\zeta,Y_s) ds + \partial_y f(s,\zeta,Y_s) dY_s \\ &= \left(-\tilde{\mathcal{A}}_s + \frac{1}{2}\theta_s^2 \partial_{yy} + h_s(Z_s)\partial_y + c_s\right) f(s,\zeta,Y_s) ds \\ &+ \theta_s \partial_y f(s,\zeta,Y_s) dW_s^1 \end{aligned}$$

Poiché Γ è soluzione fondamentale di (2.19), vale:

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{B}} \Gamma(t,z;s,\zeta) &= \mathcal{A}_s^* \Gamma(t,z;s,\zeta) ds + \mathcal{G}_s^* \Gamma(t,z;s,\zeta) d\tilde{W}_s \\ &= \left(\mathcal{A}_s^* + \tilde{h}_s(Z_s)\mathcal{G}_s^*\right) \Gamma(t,z;s,\zeta) ds + \mathcal{G}_s^* \Gamma(t,z;s,\zeta) dW_s^1. \end{aligned}$$

Calcoliamo con la formula di Itô il differenziale stocastico di

$$d_{\mathbf{B}}(f(s,\zeta,Y_s)\Gamma(t,z;s,\zeta)) = M_1(t,z;s\zeta)ds + M_2(t,z;s\zeta)dW^1$$

dove

$$\begin{aligned} M_1(t,z;s,\zeta) =& f(s,\zeta,Y_s)\left(\mathcal{A}_s^* + \tilde{h}_s(Z_s)\mathcal{G}_s^*\right)\Gamma(t,z;s,\zeta) \\ &+ \Gamma(t,z;s,\zeta)\left(-\tilde{\mathcal{A}}_s + \frac{1}{2}\theta_s^2\partial_{yy} + h_s(Z_s)\partial_y + c_s\right) f(s,\zeta,Y_s) \\ &+ \theta_s \mathcal{G}_s^* \Gamma(t,z;s,\zeta)\partial_y f(s,\zeta,Y_s) \\ M_2(t,z;s,\zeta) =& f(s,\zeta,Y_s)\mathcal{G}_s^*\Gamma(t,z;s,\zeta) + \theta_s \Gamma(t,z;s,\zeta)\partial_y f(s,\zeta,Y_s) \end{aligned}$$

Per ogni $s \in (t,T]$ si ha quindi:

$$\begin{aligned} f(T,\gamma_{T-s}^{\mathbf{B}}(\zeta),Y_T)\Gamma(t,z;T,\gamma_{T-s}^{\mathbf{B}}(\zeta)) =& f(s,\zeta,Y_s)\Gamma(t,z;s,\zeta) \\ &+ \int_s^T M_1(t,z;s,\gamma_{\tau-s}^{\mathbf{B}}(\zeta))d\tau \\ &+ \int_s^T M_2(t,z;s,\gamma_{\tau-s}^{\mathbf{B}}(\zeta))dW_\tau^1 \end{aligned}$$

Integrando l'identità precedente su $\mathbb{R}^2$ e applicando il teorema di Fubini, sia deterministico che stocastico, otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(T,\gamma^{\mathbf{B}}_{T-s}(\zeta),Y_T)\Gamma(t,z;T,\gamma^{\mathbf{B}}_{T-s}(\zeta))d\zeta = &\int_{\mathbb{R}^2} f(s,\zeta,Y_s)\Gamma(t,z;s,\zeta)d\zeta\\ &+\int_s^T\int_{\mathbb{R}^2} M_1(t,z;s,\gamma^{\mathbf{B}}_{\tau-s}(\zeta))d\zeta d\tau\\ &+\int_s^T\int_{\mathbb{R}^2} M_2(t,z;s,\gamma^{\mathbf{B}}_{\tau-s}(\zeta))d\zeta dW^1_\tau\end{aligned}$$

Se adottiamo un cambio di variabile definito come $\zeta' = \gamma^{\mathbf{B}}_{\tau-s}(\zeta)$, la cui matrice jacobiana è $Id_{2\times 2} + (\tau - s)B$, si ha :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(T,\zeta,Y_T)\Gamma(t,z;T,\zeta)d\zeta = &\int_{\mathbb{R}^2} f(s,\zeta,Y_s)\Gamma(t,z;s,\zeta)d\zeta\\ &+\int_s^T\int_{\mathbb{R}^2} M_1(t,z;\tau,\zeta)d\zeta d\tau\\ &+\int_s^T\int_{\mathbb{R}^2} M_2(t,z;\tau,\zeta)d\zeta dW^1_\tau\end{aligned}$$

Integrando per parti M_1 e M_2, possiamo riscrivere gli integrali sopra come:

$$\int_{\mathbb{R}^2} M_1(t,z;\tau,\zeta)d\zeta = \int_{\mathbb{R}^2}\Gamma(t,z;\tau,\zeta)(\tilde{h}(Z_\tau)\mathcal{G}_\tau + h_\tau(Z_\tau)\partial_y + c_\tau)f(\tau,\zeta,Y_s)d\zeta$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} M_2(t,z;\tau,\zeta)d\zeta = \int_{\mathbb{R}^2}\Gamma(t,z;\tau,\zeta)(\mathcal{G}_\tau + \theta_\tau\partial_y)f(\tau,\zeta,Y_s)d\zeta$$

otteniamo quindi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(T,\zeta,Y_T)\Gamma(t,z;T,\zeta)d\zeta = &\int_{\mathbb{R}^2} f(s,\zeta,Y_s)\Gamma(t,z;s,\zeta)d\zeta\\ &+\int_s^T\int_{\mathbb{R}^2}\Gamma(t,z;\tau,\zeta)(\tilde{h}(Z_\tau)\mathcal{G}_\tau + h_\tau(Z_\tau)\partial_y + c_\tau)f(\tau,\zeta,Y_s)d\zeta d\tau\\ &+\int_s^T\int_{\mathbb{R}^2}\Gamma(t,z;\tau,\zeta)(\mathcal{G}_\tau + \theta_\tau\partial_y)f(\tau,\zeta,Y_s)d\zeta dW^1_\tau.\end{aligned}$$

Infine, moltiplichiamo l'espressione sopra per $e^{-\int_t^s c_\tau d\tau}(\rho_s^{t,s})^{-1}$: poiché

$$d(e^{-\int_t^s c_\tau d\tau}(\rho_s^{t,s})^{-1}) = e^{-\int_t^s c_\tau d\tau}(\rho_s^{t,s})^{-1}(c_s ds - \tilde{h}_s(Z_s)dW^1_s),$$

$$
\begin{aligned}
d\langle e^{-\int_t^s c_\tau d\tau}(\rho_\cdot^{t,s})^{-1}, &\int_{\mathbb{R}^2} f(\cdot,\zeta,Y_\cdot)\Gamma(t,z,\cdot,\zeta)d\zeta\rangle_s = \\
&- \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(t,z;s,\zeta)(\tilde{h}_s(Z_s)\mathcal{G}_s + h_s(Z_s)\partial_y)f(s,\zeta,Y_s)d\zeta ds
\end{aligned}
$$

grazie alla formula di Itô, per $s \in (t,T]$ si ha

$$
\begin{aligned}
M_T^{t,z} =& e^{-\int_t^T c_\tau d\tau}(\rho_T^{t,z})^{-1}\int_{\mathbb{R}^2} f(T,\zeta,Y_t)\Gamma(t,z;\tau,\zeta)d\zeta \\
=& M_s^{t,z} + int_s^T e^{-\int_t^\tau c_\iota d\iota}(\rho_\tau^{t,z})^{-1}\int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(t,z;\tau,\zeta)(\mathcal{G}_\tau + \theta_\tau\partial_y)f(\tau,\zeta,Y_\tau)d\zeta dW_\tau^1 \\
=& M_s^{t,z} + \int_s^T G_\tau^{t,z} dW_\tau^1
\end{aligned}
$$

con $G_\tau^{t,z}$ definita come in (2.28). Ora, ancora grazie alle stime per la soluzione fondamentale (Teorema 4, [7]), le stime della soluzione f e delle sue derivate (Corollario 1, [7]), i coefficienti limitati e la condizione di coercività (2.5), deduciamo la seguente stima

$$|G_\tau^{t,z}| \leq C$$

per qualche costante positiva C. Questo prova che $G \in L^2$ e conclude la dimostrazione. □

Esempio 2.3 (Modello di Langevin)**.** Siano B, W due moti browniani indipendenti, $a > 0$ e $\sigma \in [0, \sqrt{a}]$. Il modello stocastico di Langevin è definito attraverso il seguente sistema di SDE

$$
\begin{cases}
dX_t = V_t dt, \\
dV_t = \sqrt{a-\sigma^2}dB_t - \sigma dW_t.
\end{cases}
\tag{2.29}
$$

Il processo W rappresenta il processo delle osservazioni: se $\sigma = 0$ la velocità V è inosservabile, mentre se $\sigma = \sqrt{a}$ la velocità V è completamente misurabile, essendo equivalente a W. Posto $Z_t = (X_t, V_t)$, l'equazione (2.29) può essere riscritta come

$$dZ_t = BZ_t dt + \boldsymbol{e}_2 d(\sqrt{a-\sigma^2}B_t - \sigma W_t), \tag{2.30}$$

con $\boldsymbol{e}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\quad B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
Vediamo che l'equazione

$$d_{\boldsymbol{Y}} u_t = \frac{a}{2}\partial_{vv} u_t dt + \sigma \partial_v u_t dW_t, \qquad \boldsymbol{Y} := \partial_t + v\partial_x \tag{2.31}$$

è l'equazione forward di Kolmogorov del sistema (2.29) condizionata alle osservazioni browniane date da $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s, s \le t)$.
La soluzione $Z = z^\zeta$ di (2.30), con dato iniziale $\zeta = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, è data da

$$Z_t^\zeta = e^{tB}\left(\zeta + \int_0^t e^{-sB}\boldsymbol{e}_2 d(\sqrt{a - \sigma^2} B_s - \sigma dW_s)\right).$$

Z_t^ζ condizionata a $\mathcal{F}_t^W$ ha distribuzione normale con media e covarianza data da

$$\begin{aligned} m_t(\zeta) := E[Z_t^\zeta | \mathcal{F}_t^W] &= e^{tB}\left(\zeta - \sigma \int_0^t e^{-sB}\boldsymbol{e}_2 dW_s\right) ds \\ &= \begin{pmatrix} \xi + t\eta - \sigma \int_0^t (t-s) dW_s \\ \eta - \sigma W_t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_t := cov(Z_t^\zeta | \mathcal{F}_t^W) &= (a - \sigma^2) \int_0^t \left(e^{sB}\boldsymbol{e}_2\right)\left(e^{sB}\boldsymbol{e}_2\right)^* ds \\ &= (a - \sigma^2)\begin{pmatrix} \frac{t^3}{3} & \frac{t^2}{2} \\ \frac{t^2}{2} & t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In particolare, se $\sigma = \sqrt{a}$, la distribuzione di Z_t^ζ condizionata a $\mathcal{F}_t^W$ è una delta di Dirac centrata in $m_t(\zeta)$. In caso contrario, quando $\sigma \in [0, \sqrt{a})$, la variabile Z_t^ζ condizionata a $\mathcal{F}_t^W$ ha densità uguale a

$$\Gamma(0, \zeta; t, z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{det\mathcal{C}_t}} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle \mathcal{C}_t^{-1}(z - m_t(\zeta)), (z - m_t(\zeta))\rangle\right)$$

dove $z = (x, v) \in \mathbb{R}^2$.
Per la formula di Itô, $\Gamma(0, \zeta; t, z)$ è soluzione dell'equazione (2.31). Proviamo che, per ogni $\varphi \in \mathbb{R}^2$ misurabile e limitata, si ha

$$E[\varphi(Z_t^\zeta) | \mathcal{F}_t^W] = \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(0, \zeta; t, z)\varphi(z) dz. \tag{2.32}$$

Poniamo

$$I_t(\zeta) := \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(0,\zeta;t,z)\varphi(z)dz, \qquad t>0, \quad \zeta \in \mathbb{R}^2.$$

Grazie alle osservazioni precedenti, $I_t(\zeta)$ è $\mathcal{F}_t^W$-misurabile: quindi, per provare la (2.32) è sufficiente mostrare che, per ogni funzione continua, non negativa $c = c_s(w)$ in $[0,t]\times\mathbb{R}$, si ha

$$E[e^{-\int_0^t c_s(W_s)ds}\varphi(Z_t^\zeta)] = E[e^{-\int_0^t c_s(W_s)ds}T_t(\zeta)]. \tag{2.33}$$

Sia

$$\mathcal{L} := \frac{1}{2}(a\partial_{vv} - 2\sigma\partial_{vw} + \partial_{ww}) + v\partial_x$$

l'operatore associato al processo tridimensionale (X,V,W). Per $\sigma \in [0,\sqrt{a})$, $\mathcal{L}+\partial_s$ ammette una soluzione fondamentale gaussiana.
Denotiamo con $f = f_s(x,v,w)$ la soluzione classica del seguente problema di Chauchy backward

$$\begin{cases} (\partial_s+\mathcal{L})f_s(x,v,w) - c_s(w)f_s(x,v,w) = 0, & (s,x,v,w)\in[0,t)\times\mathbb{R}^3 \\ f_t(x,v,w) = \varphi(x,v), \qquad (x,v,w)\in\mathbb{R}^3 \end{cases}$$

e poniamo

$$M_s := e^{-\int_0^s c_\tau(W_\tau)d\tau}\int_{\mathbb{R}^2} f_s(z,W_s)\Gamma(0,\zeta;s,z)dz, \qquad s\in[0,t]. \tag{2.34}$$

Per definizione, abbiamo:

$$E[M_t] = E[e^{-\int_0^t c_s(W_s)ds}I_t(\zeta)]$$

e, grazie alla rappresentazione di Feynman-Kač di f,

$$E[M_0] = f_0(\zeta,0) = E[e^{-\int_0^t c_s(W_s)ds}\varphi(Z_t^\zeta)].$$

Quindi la (2.33) segue dimostrando che M è una martingala. Per la formula di Itô, si ha

$$\begin{aligned} df_s(x,v,W_s) =& \big(\partial_s f_s + \frac{1}{2}\partial_{ww}f_s\big)(x,v,W_s)ds + (\partial_w f_s)(x,v,W_s)dW_s \\ =& (-\mathcal{L}f_s + c_s f_s + \frac{1}{2}\partial_{ww}f_s)(x,v,W_s)ds + (\partial_w f_s)(x,v,W_s)dW_s. \end{aligned}$$

Inoltre, dato che Γ è soluzione della (2.31), posto $e_s := e^{-\int_0^s c_\tau(W_\tau)d\tau}$, otteniamo

$$\begin{aligned}
dM_s = -c_s(W_s)M_s ds + e_s & \int_{\mathbb{R}^2} (-\mathcal{L}f_s + c_s f_s + \frac{1}{2}\partial_{ww} f_s)(x,v,W_s)\Gamma(0,\zeta;s,x,v)dxdvds \\
& + e_s \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_w f_s)(x,v,W_s)\Gamma(0,\zeta;s,x,v)dxdvdW_s \\
& + e_s \int_{\mathbb{R}^2} f_s(x,v,W_s)(\frac{a}{2}\partial_{vv} - v\partial_x)\Gamma(0,\zeta;s,x,v)dxdvds \\
& + e_s\sigma \int_{\mathbb{R}^2} f_s(x,v,W_s)\partial_v\Gamma(0,\zeta;s,x,v)dxdvds \\
& + e_s\sigma \int_{\mathbb{R}^2} \partial_w f_s(x,v,W_s)\partial_v\Gamma(0,\zeta;s,x,v)dxdvds.
\end{aligned}$$

Integrando per parti, troviamo

$$dM_s = e_s \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_w f_s - \sigma\partial_v f_S)(x,v,W_s)\Gamma(0,\zeta;s,x,v)dxdvds$$

che mostra che M è almeno una martingala locale.
Per concludere, richiamando le stime del gradiente fornite da [1], per ogni funzione φ esistono due costanti positive ε, C tali che

$$|\partial_v f_s(x,v,w)| + |\partial_w f_s(x,v,w)| \le \frac{C}{(t-s)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}.$$

Così, abbiamo

$$\begin{aligned}
& E\left[\int_0^t \Big(\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_w f_s - \sigma\partial_v f_S)(x,v,W_s)\Gamma(0,\zeta;s,x,v)dxdv\Big)^2 ds\right] \\
& \le \int_0^t \frac{C}{(t-s)^{1-2\varepsilon}} E\left[\left(\int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(0,\zeta,s,x,v)dxdv\right)^2\right] ds \\
& = \int_0^t \frac{C}{(t-s)^{1-2\varepsilon}} ds < \infty
\end{aligned}$$

e questo prova che M è una martingala.

2.2.3 Filtraggio backward

Vogliamo ora presentare l'approccio diretto di Veretennikov. Anche in questo caso usiamo il teorema di Girsanov per riscrivere il sistema (2.12).

Ipotesi 2.4 (Regolarità)**.** Assumiamo che i coefficienti di (2.11) abbiano la seguente regolarità:

$$\bar{\sigma} \in bC^{3+\alpha}_{0,T}(\mathbb{R}^3), \quad \hat{\sigma} \in bC^{\alpha}_{0,T}(\mathbb{R}^3), \quad \theta \in bC^{3+\alpha}_{0,T}(\mathbb{R}),$$

$$b \in bC^{0}_{0,T}(\mathbb{R}^3), \quad h \in bC^{2}_{0,T}(\mathbb{R}^3).$$

Ipotesi 2.5 (Coercività)**.** Esiste una costante positiva m tale che

$$\theta(t,y) \geq m, \quad \hat{\sigma}(t,z,y) \geq m, \qquad t \in [0,T],\ z \in \mathbb{R}^2,\ y \in \mathbb{R}.$$

Ipotesi 2.6. Esistono due costanti positive ϵ, M tali che:

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(\langle \bar{\sigma}(t,\cdot,\cdot)\rangle_{\epsilon,\beta} + \langle \bar{\sigma}(t,\cdot,\cdot)\rangle_{\frac{1}{2}+\epsilon,\beta'} + \theta(t,\cdot)\rangle_{\epsilon,\beta} + \langle \theta(t,\cdot)\rangle_{\frac{1}{2}+\epsilon,\beta'} + \langle h(t,\cdot,y)\rangle_{\frac{1}{2},\beta}\right) \leq M$$

per $|\beta| = 1$ e $|\beta'| = 2, 3$.

Consideriamo il processo stocastico $(\rho_s^{t,z,y,\eta})_{s\in[t,T]}$:

$$\rho_s^{t,z,y,\eta} = \eta \exp\left(\int_t^s \tilde{h}(\tau, Z_\tau^{t,z,y}, Y_\tau^{t,z,y}) d\tilde{W}_\tau - \frac{1}{2}\int_t^s \tilde{h}(\tau, Z_\tau^{t,z,y}, Y_\tau^{t,z,y})^2 d\tau\right).$$

Per $\eta = 1$, $\rho_s^{t,z,y,1}$ è la martingala esponenziale che definisce il cambio di misura di probabilità:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = (\rho_T^{t,z,y,1})^{-1}.$$

Sia $(Z_s^{t,z,y}, Y_s^{t,z,y}, \rho_s^{t,z,y,\eta})$ la soluzione del seguente sistema, equivalente al modello (2.12), nello spazio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}, (\mathcal{F}_t))$ con dato iniziale al tempo t uguale a (z, y, η):

$$\begin{cases} dZ_s^{t,z,y} = \tilde{B}(s, Z_s^{t,z,y}, Y_s^{t,z,y})ds + \mathbf{e_2}\left(\hat{\sigma}(s, Z_s^{t,z,y}, Y_s^{t,z,y})dW^2 + \bar{\sigma}(s, Z_s^{t,z,y}, T_s^{t,z,y})d\tilde{W}_s\right) \\ dY_s^{t,z,y} = \theta(s, Y_s^{t,z,y})d\tilde{W}_s \\ d\rho_s^{t,z,y,\eta} = \tilde{h}(s, Z_s^{t,z,y}, Y_s^{t,z,y})\rho_s^{t,z,y,\eta} d\tilde{W}_s \end{cases} \tag{2.35}$$

dove $\tilde{B}(s,z,y) = Bz + \mathbf{e_2}(b(s,z,y) - \bar{\sigma}(s,z,y)\tilde{h}(s,z,y))$.
L'operatore caratteristico associato al sistema precedente è:

$$\mathcal{A}_t := \frac{1}{2}\left(|\sigma|^2\partial_{vv} + \theta^2\partial_{yy} + \eta^2\tilde{h}^2\partial_{\eta\eta} + 2\theta\bar{\sigma}\partial_{vy} + 2\eta\bar{\sigma}\tilde{h}\partial_{v\eta} + 2\eta\theta\tilde{h}\partial_{y\eta}\right) + \langle \tilde{B}, \nabla_z\rangle.$$

Ora vogliamo definire la SPDE di diffusione backward per il sistema (2.35) e successivamente, applicando l'attesa condizionata rispetto alla σ-algebra $\mathcal{F}_{t,T}^{Y}$, troveremo la SPDE del filtraggio backward.
Il processo $(t,z,y,\eta) \mapsto (Z_T^{t,z,y}, Y_T^{t,z,y}, \rho_T^{t,z,y,\eta}) =: K_T^{t,z,y,\eta}$, per il Teorema 1.2.2, risolve la SPDE di diffusione backward

$$\begin{cases} -dK_T^{t,z,y,\eta} = \mathcal{A}_t K_T^{t,z,y,\eta} dt + \partial_v K_T^{t,z,y,\eta}(\bar{\sigma}(t,z,y) \star d\tilde{W}_t + \hat{\sigma}(t,z,y) \star dW_t^2) \\ \qquad + \theta \partial_y K_T^{t,z,y,\eta} \star d\tilde{W}_t + \eta \tilde{h}(t,z,y)\partial_\eta K_T^{t,z,y,\eta} \star d\tilde{W}_t \\ K_T^{T,z,y,\eta} = (z,y,\eta) \end{cases}$$

Sia $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, poniamo $V_t(z,y) = \varphi(Z_T^{t,z,y}, Y_T^{t,z,y})$ e $v(K_T^{t,z,y,\eta}) = (V_t(z,y)\rho_T^{t,z,y,\eta})$.
Per il Corollario 1.2.3 $v(K_T^{t,z,y,\eta})$ risolve la SPDE backward

$$\begin{aligned} -d(V_t(z,y)\rho_T^{t,z,y,\eta}) =& \mathcal{A}_t(V_t(z,y)\rho_T^{t,z,y,\eta})ds + \partial_v(V_t(z,y)\rho_T^{t,z,y,\eta})\hat{\sigma}(t,z,y) \star dW_t^2 \\ &+ \partial_v(V_t(z,y)\rho_T^{t,z,y,\eta})\bar{\sigma}(t,z,y) \star d\tilde{W}_t \\ &+ \partial_y(V_t(z,y)\rho_T^{t,z,y,\eta})\theta(t,z,y) \star d\tilde{W}_t \\ &+ \partial_\eta(V_t(z,y)\rho_T^{t,z,y,\eta})\eta\tilde{h}(t,z,y) \star d\tilde{W}_t \end{aligned} \tag{2.36}$$

Dato che $\partial_\eta Z_T^{t,z,y} = \partial_\eta Y_T^{t,z,y} = \partial_{\eta\eta}\rho_T^{t,z,y,\eta} = 0$ e $\eta\partial_\eta\rho_T^{t,z,y,\eta} = \rho_T^{t,z,y,\eta}$

$$\begin{aligned} =& \frac{1}{2}\left(|\sigma|^2\partial_{vv} + \theta^2\partial_{yy} + 2\theta\bar{\sigma}\partial_{vy} + 2\eta\bar{\sigma}\tilde{h}\partial_{v\eta} + 2\eta\theta\tilde{h}\partial_{y\eta}\right)(V_t(z,y)\rho_T^{t,z,y,\eta})dt \\ &+ \langle \tilde{B}, \nabla_z\rangle(V_t(z,y)\rho_T^{t,z,y,\eta})dt + \hat{\sigma}\partial_v(V_t(z,y)\rho_T^{t,z,y,\eta}) \star dW_t^2 \\ &+ (\bar{\sigma}\partial_v + \theta\partial_y + \tilde{h})(V_t(z,y)\rho_T^{t,z,y,\eta}) \star d\tilde{W}_t \end{aligned}$$

Calcoliamo e sostituiamo le seguenti identità

$$\begin{aligned} \langle \tilde{B}(t,z,y), \nabla_z\rangle =& (b(t,z,y) - \bar{\sigma}(t,z,y)\tilde{h}(t,z,y))\partial_v + v\partial_x \\ \eta\bar{\sigma}(t,z,y)\tilde{h}(t,z,y)\partial_{v\eta}(V_t(z,y)\rho_T^{t,z,y,\eta}) =& \bar{\sigma}(t,z,y)\tilde{h}(t,z,y)\partial_v(\eta\partial_\eta(V_t(z,y)\rho_T^{t,z,y,\eta}) \\ =& \bar{\sigma}(t,z,y)\tilde{h}(t,z,y)\partial_v(V_t(z,y)\rho_T^{t,z,y,\eta}). \end{aligned}$$

Definiamo i due operatori differenziali, coefficienti della SPDE diffusiva relativa a $v(Z_T^{t,z,y}, Y_T^{t,z,y}, \rho_T^{t,z,y,\eta})$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}_t =& \frac{1}{2}\left(|\sigma|^2(t,z,y)\partial_{vv} + \theta^2(t,y)\partial_{yy} + 2\theta(t,y)\bar{\sigma}(t,z,y)\partial_{vy}\right) \\ &+ b(t,z,y)\partial_v + \tilde{h}(t,z,y)\partial_y \end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_t = \bar{\sigma}(t,z,y)\partial_v + \theta(t,y)\partial_y + \tilde{h}(t,z,y). \tag{2.38}$$

Posto $\mathcal{L} := \tilde{\mathcal{A}}_t + v\partial_x$, sostituendo nell'identità (2.36), si ottiene:

$$\begin{aligned}-d(V_t(z,y)\rho_T^{t,z,y,\eta}) =& \mathcal{L}(V_t(z,y)\rho_T^{t,z,y,\eta})ds + \hat{\sigma}\partial_v(V_t(z,y)\rho_T^{t,z,y,\eta}) \star dW_t^2 \\ &+ \tilde{\mathcal{G}}_t(V_t(z,y)\rho_T^{t,z,y,\eta}) \star d\tilde{W}_t\end{aligned}$$

Notiamo che $\mathcal{L}$ è il generatore infinitesimale di (Z_t, Y_t). Infine, considerando la soluzione con dato iniziale al tempo t uguale a $(z, y, 1)$, ricaviamo:

$$\begin{aligned}\varphi(Z_T^{t,z,y}, Y_T^{t,z,y})\rho_T^{t,z,y,1} - \varphi(z,y) &= V_T^{t,z,y,1}\rho_T^{t,z,y,1} - V_T^{T,z,y,1}\rho_T^{T,z,y,1} \\ &= \int_t^T \mathcal{L}(V_s(z,y)\rho_T^{s,z,y,1})ds + \int_t^T \hat{\sigma}(s,z,y)\partial_v(V_s(z,y)\rho_T^{s,z,y,1}) \star dW_s^2 \\ &\quad + \int_t^T \tilde{\mathcal{G}}(V_s(z,y)\rho_T^{s,z,y,1}) \star d\tilde{W}_s\end{aligned}$$

Applichiamo l'attesa condizionata rispetto alla σ-algebra $\mathcal{F}_{t,T}^Y$, definendo

$$u_t^{(\varphi)}(z,y) = E^Q[\varphi(Z_T^{t,z,y}, Y_T^{t,z,y})\rho_T^{t,z,y,1} | \mathcal{F}_{t,T}^Y] \tag{2.39}$$

Usando il teorema di Fubini, per l'integrale deterministico e stocastico, sfruttando il fatto che W^2 è indipendente da $\mathcal{F}_{t,T}^Y$; otteniamo

$$u_t^{(\varphi)}(z,y) = \varphi(z,y) + \int_t^T \mathcal{L}_s u_s^{(\varphi)}(z,y)ds + 0 + \int_t^T \tilde{\mathcal{G}}_s u_s^{(\varphi)}(z,y) \star d\tilde{W}_s \tag{2.40}$$

Possiamo quindi affermare che la SPDE del filtraggio backward per il sistema (2.35) è definita come:

$$-d_{\mathbf{B}} u_s(z,y) = \tilde{\mathcal{A}}_s u_s(z,t)ds + \tilde{\mathcal{G}}_s u_s(z,y) \star d\tilde{W}_s, \quad \mathbf{B} := \partial_t + v\partial_x \tag{2.41}$$

o analogamente come:

$$-d_{\mathbf{B}} u_s(z,y) = \tilde{\mathcal{A}}_s u_s(z,t)ds + \tilde{\mathcal{G}}_s u_s(z,y) \star \frac{dY_s}{\theta(t,y)}, \quad \mathbf{B} := \partial_t + v\partial_x \tag{2.42}$$

Per il Teorema 4 di [7], (2.41) ammette una soluzione fondamentale $\overleftarrow{\Gamma}$ tale che:

$$E^Q[\varphi(Z_T^{t,z,y}, Y_T^{t,z,y})\rho_T^{t,z,y,1} | \mathcal{F}_{t,T}^Y] = \int_{\mathbb{R}^3} \overleftarrow{\Gamma}(t,z,y;T,\zeta,\eta)\varphi(\zeta,\eta)d\zeta d\eta$$

Per concludere, basta richiamare la formula di Kallianpur-Striebel per l'attesa condizionata, in [10] Lemma 6.1, dalla quale

$$
\begin{aligned}
E^P[\varphi(Z_T^{t,z,y}, Y_T^{t,z,y})|\mathcal{F}_{t,T}^Y] =& \frac{E^Q[\varphi(Z_T^{t,z,y}, Y_T^{t,z,y})\rho_T^{t,z,y,1}|\mathcal{F}_{t,T}^Y]}{E^Q[\rho_T^{t,z,y,1}|\mathcal{F}_{t,T}^Y]} \\
=& \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\overleftarrow{\Gamma}(t,z,y;T,\zeta,\eta)\varphi(\zeta,\eta)d\zeta d\eta}{\int_{\mathbb{R}^3} \overleftarrow{\Gamma}(t,z,y;T,\zeta_1,\eta_1)d\zeta_1 d\eta_1}
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

Definizione 2.5. Il processo normalizzato

$$
\bar{\Gamma}(t,z,y;T,\zeta,\eta) = \frac{\overleftarrow{\Gamma}(t,z,y;T,\zeta,\eta)}{\int_{\mathbb{R}^3} \overleftarrow{\Gamma}(t,z,y;T,\zeta_1,\eta_1)d\zeta_1 d\eta_1} \tag{2.44}
$$

per $0 \leq t \leq T$ e $(z,y),(\zeta,\eta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ è chiamata la densità del filtraggio backward del sistema (2.12).

Capitolo 3

Filtro di Kalman

In questo capitolo, consideriamo un modello in cui il segnale è un processo Gaussiano e il processo delle osservazioni è una sua funzione lineare. La corrispondente teoria del filtraggio è chiamata Kalman filtering. Ricaveremo il filtro di Kalman come un caso particolare del filtraggio non lineare visto nel capitolo precedente.
Nel caso particolare dei processi gaussiani si riesce a dimostrare che anche la variabile Z_T condizionata alla informazioni fino al tempo T, $\sigma\{Y_s, 0 \leq s \leq T\}$ ha distribuzione gaussiana. Poiché quest'ultima è univocamente determinata dalla media e dalla covarianza, il filtro di Kalman-Bucy fornisce due equazioni differenziali per esse.

3.1 Sistema gaussiano

Consideriamo il seguente sistema

$$\begin{cases} dZ_t = (\tilde{b}_t + b_t Z_t)dt + c_t dW_t^1 + \sigma_t dW_t^2, \\ dY_t = (\tilde{h}_t + h_t Z_t)dt + dW_t^1, \quad Y_0 = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

dove Z_0 è un vettore aleatorio d-dimensionale con distribuzione normale, $Z_0 \sim \mathcal{N}_{\hat{Z}_0, \mathcal{C}_0}$; W_t^1, W_t^2 sono due moti browniani rispettivamente in m e d dimensioni e i coefficienti sono matrici deterministiche. Per il risolvere il sistema stocastico lineare (3.1), consideriamo le seguenti equazioni differenziali

ordinarie.
Siano p_t e q_t due funzioni deterministiche a valori nello spazio delle matrici $d \times d$. Supponiamo che p_t è l'unica soluzione del sistema lineare

$$\frac{d}{dt}p_t = -p_t b_t, \quad p_0 = Id_{d\times d} \tag{3.2}$$

e q_t sia l'unica soluzione di

$$\frac{d}{dt}q_t = q_t b_t, \quad q_0 = Id_{d\times d} \tag{3.3}$$

Allora:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(p_t q_t) &= \frac{dp_t}{dt}q_t + p_t\frac{dq_t}{dt}\\ &= -p_t b_t q_t + p_t b_t q_t = 0,\end{aligned}$$

da cui, $p_t q_t = p_0 q_0 = Id_{d\times d}$, cioè p_t è invertibile e la sua inversa è proprio q_t.

Osservazione 8. Se $b_t = b$ non dipende dal tempo, allora

$$p_t = e^{-bt} \qquad \text{e} \qquad q_t = e^{bt}.$$

Ricordiamo che un processo gaussiano è definito come:

Definizione 3.1. Un processo stocastico X_t è un processo gaussiano se per ogni $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^d$, la variabile aleatoria $\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$ ha distribuzione normale.

Teorema 3.1.1. *Supponiamo che i coefficienti b, h siano funzioni limitate su $[0,T]$, $c, \sigma \in L^2([0,T])$ e $\tilde{b}, \tilde{h} \in L^1([0,T])$. Allora, il processo stocastico (Z_t, Y_t) è un processo gaussiano.*

Dimostrazione. Applicando la formula di itô, otteniamo:

$$\begin{aligned}d(p_t Z_t) &= -p_t b_t Z_t dt + p_t\big((\tilde{b}_t + b_t Z_t)dt + c_t dW_t + \sigma_t dB_t\big)\\ &= p_t(\tilde{b}_t dt + c_t dW_t + \sigma_t dB_t).\end{aligned}$$

Allora,

$$\begin{cases} Z_t = q_t Z_0 + q_t \int_0^t p_s\big(\tilde{b}_s ds + c_s dW_s + \sigma_s dB_s\big),\\ Y_t = \int_0^t (\tilde{h}_s + h_s Z_s)ds + W_t.\end{cases}$$

Dunque, il vettore (Z_t, Y_t) si ottiene tramite una trasformazione lineare di $\{(Z_0, W_s, B_s) : 0 \leq s \leq t\}$, e di conseguenza è un processo gaussiano. $\square$

Ricordiamo che $\mathcal{F}^Y_{0,T}$ è la σ-algebra contenente le informazioni sul processo Y fino al tempo T.
Introduciamo ora una nuova notazione, useremo $\langle \nu, f \rangle$ per indicare l'integrale della funzione f rispetto alla misura ν. É semplice notare che, per quanto detto fino ad ora, la soluzione del problema del filtraggio è tale che:

$$E[f(Z^{t,z}_T)|\mathcal{F}^Y_{t,T}] = \langle \pi_T, f \rangle \tag{3.4}$$

dove con π_T indichiamo la legge di transizione associata alla densità $\hat{\Gamma}$ dell'equazione del filtraggio forward

$$\pi_T(\zeta) = p(0, z; T, d\zeta) = \hat{\Gamma}(0, z; T, \zeta) d\zeta.$$

Teorema 3.1.2. *Per ogni $T \geq 0$ e per ogni $\omega \in \Omega$ fissato, $\pi_T(\omega)$ è una misura di probabilità multi-normale.*

Dimostrazione. Sia $D_N = \{0 = s^N_1 < \cdots < s^N_{a_N} = T\}$ una famiglia crescente di insiemi la cui unione è densa in $[0, T]$. Dato che (Z_T, Y_T) è un processo gaussiano, la distribuzione condizionata $\pi^N_T(\cdot) \equiv P(Z_T \in \cdot|Y_s, s \in D_N)$ è normale con media $\hat{Z}^N_T$ e matrice di covarianza $\mathcal{C}^N_T$. Consideriamo ora la funzione caratteristica corrispondente a π^N_T. Per $\lambda \in \mathbb{R}^d$, definiamo

$$\begin{aligned}\Phi_N(\lambda) &:= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \lambda, \zeta \rangle} \pi^N_T(d\zeta) \\ &= E\left[e^{i\langle \lambda, Z_T \rangle}|Y_s, s \in D_N\right].\end{aligned}$$

Notiamo che per $\lambda \in \mathbb{R}^d$ fissato, $\{\Phi_N(\lambda) : N \geq 1\}$ è una martingala con $\Phi_\infty(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \lambda, \zeta \rangle} \pi_T(d\zeta)$. Per il teorema di convergenza delle martingale (Teorema 2.10 in [12]), si vede che $\Phi_N(\lambda) \to \Phi_\infty(\lambda)$ q.c..
La funzione caratteristica della distribuzione multi-normale π^N_T è data esplicitamente da

$$\Phi_N(\lambda) = \exp\left(i\langle \lambda, \hat{Z}^N_T \rangle - \frac{1}{2}\langle \mathcal{C}^N_T \lambda, \lambda \rangle\right),$$

otteniamo il limite di $\hat{Z}_T^N$ e $\mathcal{C}_T^N$ per $N \to \infty$ e li indichiamo rispettivamente come $\hat{Z}_T$ e $\mathcal{C}_T$. Allora

$$\Phi_\infty(\lambda) = \exp\left(i\langle \lambda, \hat{Z}_T \rangle - \frac{1}{2}\langle \mathcal{C}_T \lambda, \lambda \rangle \right).$$

Quindi π_T è una distribuzione multi-normale. $\square$

Come nel teorema precedente, continuiamo a chiamare con $\hat{Z}_T^N$ e $\mathcal{C}_T^N$ il valore atteso condizionato e la matrice di covarianza della distribuzione multi-normale corrispondente alla misura π_T.

Lemma 3.1.3. *La matrice $\mathcal{C}_T$ è deterministica. Infatti, per $1 \leq i, j \leq d$, si ha*

$$\mathcal{C}_T^{ij} = E[Z_T^i Z_T^j] - E[\hat{Z}_T^i \hat{Z}_T^j].$$

Dimostrazione. Come nel teorema precedente, definiamo $\mathcal{C}_T^{ij}$ come limite di

$$\mathcal{C}_T^{ij} = \lim_{N\to\infty} E[(Z_t^i - \hat{Z}_T^i)(Z_t^j - \hat{Z}_T^j)|Y_s, s \in D_N].$$

Poiché

$$E[(Z_t^i - \hat{Z}_T^i)|Y_s, s \in D_N] = E[E[(Z_t^i - \hat{Z}_T^i)|\mathcal{F}_{t,T}^Y]|Y_s, s \in D_N] = 0,$$

$Z_T^i - \hat{Z}_T^i$ è scorrelato da $\{Y_s, s \in D_N\}$. Per le proprietà dei vettori aleatori normali, $Z_T^i - \hat{Z}_T^i$ è anche indipendente dalla famiglia $\{Y_s, s \in D_N\}$. Analogamente per $Z_T^j - \hat{Z}_T^j$. Allora,

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_T^{ij} &= E[(Z_T^i - \hat{Z}_T^i)(Z_T^j - \hat{Z}_T^j)|\mathcal{F}_{t,T}^Y] \\
&= \lim_{N\to\infty} E[(Z_t^i - \hat{Z}_T^i)(Z_t^j - \hat{Z}_T^j)|Y_s, s \in D_N] \\
&= \lim_{N\to\infty} E[(Z_t^i - \hat{Z}_T^i)(Z_t^j - \hat{Z}_T^j)] \\
&= E[Z_T^i Z_T^j - \hat{Z}_T^i \hat{Z}_T^j]
\end{aligned}$$

$\square$

3.2 Kalman-Bucy filtering

In questa sezione ricaviamo l'equazione per $\hat{Z}_t$ e $\mathcal{C}_t$ facendo uso dell'equazione del filtraggio.
Come nel capitolo precedente, grazie al teorema di Girsanov, possiamo riscrivere il sistema (3.1) come

$$\begin{cases} dZ_t = (\tilde{b}_t - c_t\tilde{h}_t + (b_t - c_t h_t)Z_t)dt + c_t dY_t + \sigma_t dB_t, \\ dW_t = dY_t - (\tilde{h}_t + h_t Z_t)dt \end{cases}$$

dove Y_t è un moto browniano sulla misura di probabilità $\mathbb{Q}$ definita come in (2.18).
Per quanto visto nel capitolo precedente, per $\varphi \in bC^2(\mathbb{R}^d)$ la soluzione per il problema del filtraggio forward di (3.1) si scrive come

$$E^P[\varphi(Z_T)|\mathcal{F}_T^Y] = \frac{E^Q[\varphi(Z_T)\rho_T|\mathcal{F}_T^Y]}{E^Q[\rho_T|\mathcal{F}_T^Y]}$$

o in modo equivalente, con la notazione introdotta in (3.4)

$$\langle \pi_T, \varphi \rangle = \frac{\langle V_T, \varphi \rangle}{\langle V_T, 1 \rangle}. \tag{3.5}$$

Dove indichiamo con V_T la legge di transizione associata alla soluzione fondamentale Γ di (2.19). In forma distribuzionale la (2.19) è scritta come segue

$$d\langle V_s, \varphi \rangle = \langle \mathcal{A}_s^* V_s, \varphi \rangle ds + \langle \mathcal{G}_s^* V_t, \varphi \rangle dY_s.$$

Da quest'ultima, integrando per parti, riusciamo a scaricare gli operatori sulla funzione

$$d\langle V_s, \varphi \rangle = \langle V_s, \mathcal{A}_s \varphi \rangle ds + \langle V_t, \mathcal{G}_s \varphi \rangle dY_s \tag{3.6}$$

dove

$$\mathcal{A}_s \varphi = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{d} a_{ij} \partial_{ij}^2 \varphi + \sum_{i=1}^{d} (\tilde{b}_s + b_s z)_i \partial_i \varphi, \tag{3.7}$$

$$\mathcal{G}_s \varphi = \nabla \varphi \cdot c_s + \varphi(\tilde{h}_s + h_s z)^*. \tag{3.8}$$

con $a = (cc^* + \sigma\sigma^*)$. L'equazione (3.6) è detta *equazione di Zakai.*
Se applichiamo la formula di Itô alla (3.5), otteniamo la seguente equazione:

$$\langle \pi_s, \varphi \rangle = \langle \pi_s, \mathcal{A}_s\varphi \rangle + \langle \pi_s, \mathcal{G}_s f \rangle d\nu_s - \langle \pi_s, \varphi \rangle \langle \pi_s, (\tilde{h}_s + h_s\iota)^* \rangle d\nu_s \tag{3.9}$$

in cui ι indica la funzione identità in $\mathbb{R}^d$, mentre ν_s è un moto browniano d-dimensionale chiamato il processo delle innovazioni ed è definito come

$$\begin{aligned} \nu_t =& Y_t - \int_0^t \langle \pi_s, \tilde{h}_s + h_s\iota \rangle ds \\ =& Y_t - \int_0^t (\tilde{h}_s + h_s\hat{Z}_s) ds. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Nell'equazione precedente, l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che sia $\tilde{h}$ che h sono funzioni deterministiche.
Ricaviamo ora l'equazione per la media $\hat{Z}_t$. Posto $\varphi(z) = z^i$, si ha

$$\mathcal{A}_s\varphi(z) = \tilde{b}_s^i + \sum_{j=i}^{N} b_s^{ij} z^j, \qquad \partial_j\varphi = \delta_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Allora

$$\begin{aligned} \langle \pi_s, \mathcal{A}_s\varphi \rangle &= \tilde{b}_s^i + \sum_{j=i}^{N} b_s^{ij} \hat{Z}_s^j \\ \langle \pi_s, \mathcal{G}_s\varphi \rangle &= \sum_{j=1}^{N} \langle \pi_s, \sum_{l=1}^{N} \partial_l\varphi c_s^{lj} + (\tilde{h}_s^j + \sum_{k=1}^{N} h_s^{jk} z^k)\varphi \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{N} \langle \pi_s, c_s^{ij} + z^i(\tilde{h}_s^j + \sum_{k=1}^{N} h_s^{jk} z^k) \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{N} (c_s^{ij} + \hat{Z}_s^i \tilde{h}_s^j + \sum_{k=1}^{N} h_s^{jk} (\mathcal{C}_s^{ik} + \hat{Z}_s^i \hat{Z}_s^k)) \end{aligned}$$

ed infine

$$\begin{aligned} \langle \pi_s, (\tilde{h}_s + h_s\iota)^* \rangle &= \sum_{j=1}^{N} \langle \pi_s, \tilde{h}_s^j + \sum_{k=1}^{N} h_s^{jk} z^k \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{N} (\tilde{h}_s^j + \sum_{k=1}^{N} h_s^{jk} \hat{Z}_s^k). \end{aligned}$$

Se andiamo a sostituire i valori ottenuti nell'equazione (3.9), si ha che

$$\begin{aligned}\hat{Z}_t^i =&\hat{Z}_0^i + \int_0^t (\tilde{b}_s^i + \sum_{j=i}^N b_s^{ij}\hat{Z}_s^j)ds \\ &+ \sum_{j=1}^N \int_0^t (c_s^{ij} + \hat{Z}_s^i\tilde{h}_s^j + \sum_{k=1}^N h_s^{jk}(\mathcal{C}_s^{ik} + \hat{Z}_s^i\hat{Z}_s^k))d\nu_s^j \\ &- \sum_{j=1}^N \int_0^t (\tilde{h}_s^j + \sum_{k=1}^N h_s^{jk}\hat{Z}_s^k)d\nu_s^j \\ =&\hat{Z}_0^i + \int_0^t (\tilde{b}_s^i + \sum_{j=i}^N b_s^{ij}\hat{Z}_s^j)ds + \sum_{j=1}^N \int_0^t (c_s^{ij} + \sum_{k=1}^d h_s^{jk}\mathcal{C}_s^{ik})d\nu_s^j.\end{aligned}$$

In forma vettoriale, otteniamo l'equazione per il processo di media $\hat{Z}$

$$\hat{Z}_t = \hat{Z}_0 + \int_0^t (\tilde{b}_s + b_s\hat{Z}_s)ds + \int_0^t (c_s + \mathcal{C}_s h_s^*)d\nu_s. \tag{3.11}$$

Teorema 3.2.1. *Il processo del vettore medio $\hat{Z}$ è soluzione della SDE (3.11), con ν_t moto browniano d-dimensionale definito come*

$$\nu_t = Y_t - \int_0^t (\tilde{h}_s + h_s\hat{Z}_s)ds.$$

Dimostrazione. Notiamo subito che ν_t dipende dalla soluzione $\hat{Z}$. Scriviamo l'equazione (3.11) come

$$\hat{Z}_t = \hat{Z}_0 + \int_0^t (c_s + \mathcal{C}_s h_s^*)dYs + \int_0^t (\tilde{b}_s - (c_s + \mathcal{C}_s h_s^*)\tilde{h}_s) + (b_s - (c_s + \mathcal{C}_s h_s^*)h_s)\hat{Z}_s)ds$$

Siano $\tilde{p}, \tilde{q}$ definite rispettivamente come in (3.2) e (3.3) in cui b_t è sostituito da $b_s - (c_s + \mathcal{C}_s h_s^*)h_s$. Analogamente a quanto visto nella dimostrazione del Teorema 3.1.1, vediamo che

$$\hat{Z}_t = \tilde{q}_t\hat{Z}_0 + \tilde{q}_t \int_0^t \big(\tilde{p}_s((\tilde{b}_s - (c_s + \mathcal{C}_s h_s^*)\tilde{h}_s)ds + (c_s + \mathcal{C}_s h_s^*)dY_s\big),$$

dove Y è un moto browniano d-dimensionale. Ciò prova il teorema. □

Ora, vediamo che condizioni deve soddisfare $\mathcal{C}_t$. Applicando la formula di Itô all'equazione (3.1), per $1 \leq i, j \leq N$, si ha

$$d(Z_t^i Z_t^j) = Z_t^i dZ_t^j + Z_t^j dZ_t^i + a_t^{ij} dt.$$

Riscritto in forma integrale come

$$Z_t^i Z_t^j = Z_0^i Z_0^j + \int_0^t (Z_s^i dZ_s^j + Z_s^j dZ_s^i + a_s^{ij} ds).$$

Applicando il valore atteso e successivamente derivando entrambi i membri, otteniamo

$$\begin{aligned} dE[Z_t^i Z_t^j] =& E\left[Z_t^i \left(\tilde{b}_t^j + \sum_{k=1}^N b_t^{jk} Z_t^k\right)\right] dt \\ &+ E\left[Z_t^j \left(\tilde{b}_t^i + \sum_{k=1}^N b_t^{ik} Z_t^k\right)\right] dt + a_t^{ij} dt. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Utilizzando la formula di Itô all'equazione (3.11), si ha

$$d(\hat{Z}_t^i \hat{Z}_t^j) = \hat{Z}_t^i d\hat{Z}_t^j + \hat{Z}_t^j d\hat{Z}_t^i + \sum_{k=1}^m (c_t + \mathcal{C}_t h_t^*)^{ik} (c_t + \mathcal{C}_t h_t^*)^{jk} dt.$$

da cui, analogamente a quanto visto per la (3.12)

$$\begin{aligned} dE[\hat{Z}_t^i \hat{Z}_t^j] =& E\left[\hat{Z}_t^i \left(\tilde{b}_t^j + \sum_{k=1}^N b_t^{jk} \hat{Z}_t^k\right)\right] dt + E\left[\hat{Z}_t^j \left(\tilde{b}_t^i + \sum_{k=1}^N b_t^{ik} \hat{Z}_t^k\right)\right] dt \\ &+ ((c_t + \mathcal{C}_t h_t^*)(c_t + \mathcal{C}_t h_t^*)^*)^{ij} dt. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Ricordando che per il Lemma (3.1.3), la matrice $\mathcal{C}$ è definita come

$$\mathcal{C}_t^{ij} = E[Z_t^i Z_t^j] - E[\hat{Z}_t^i \hat{Z}_t^j],$$

possiamo sostituire (3.12) e (3.13) nella forma differenziale dell'equazione sopra ottenendo:

$$d\mathcal{C}_t^{ij} = \left(\sum_{k=1}^d \mathcal{C}_t^{ik} b_t^{jk} + \sum_{k=1}^d b_t^{ik} \mathcal{C}_t^{jk} + a_t^{ij} + ((c_t + \mathcal{C}_t h_t^*)(c_t + \mathcal{C}_t h_t^*)^*)^{ij}\right) dt.$$

Ne segue poi che, in forma matriciale, $\mathcal{C}_t$ soddisfa la seguente equazione, detta *equazione di Riccati*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{C}_t = \mathcal{C}_t b_t^* - b_t\mathcal{C}_t + a_t - (c_t + \mathcal{C}_t h_t^*)(c_t + \mathcal{C}_t h_t^*)^*. \tag{3.14}$$

Teorema 3.2.2. *Il processo $(\hat{Z}_t, \mathcal{C}_t)$ è l'unica soluzione delle equazioni (3.11) e (3.14) ed è chiamato il filtro di Kalman-Bucy del sistema lineare (3.1).*

Dimostrazione. Supponiamo che esistano $\mathcal{C}_t^1$ e $\mathcal{C}_t^2$ soluzioni dell'equazione (3.14). Poniamo $\delta_t := \mathcal{C}_t^1 - \mathcal{C}_t^2$.
Vogliamo calcolare $|\delta_t|$, poiché se è uguale alla funzione nulla, allora la soluzione $(\hat{Z}_t, \mathcal{C}_t)$ è unica.

$$|\delta_t| \leq \int_0^t (2|b_s||\delta_t| + 2|c_s||h_s||\delta_s| + |\mathcal{C}_t^1 h_t^* h_t \mathcal{C}_t^1 - \mathcal{C}_t^1 h_t^* h_t \mathcal{C}_t^2|)ds$$

Poiché, aggiungendo e sottraendo la quantità $\mathcal{C}_t^2 h_t^* h_t \mathcal{C}_t^1$, si ha

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}_t^1 h_t^* h_t \mathcal{C}_t^1 - \mathcal{C}_t^1 h_t^* h_t \mathcal{C}_t^2| &\leq |\delta_t h_t^* h_t \mathcal{C}_t^1| + |\mathcal{C}_t^2 h_t^* h_t \delta_t| \\ &\leq |h_t|^2(|\mathcal{C}_t^1| + |\mathcal{C}_t^2|)|\delta_t|, \end{aligned}$$

da cui

$$|\delta_t| \leq \int_0^t 2\big(|b_s| + |c_s||h_s| + |h_s|^2\big(|\mathcal{C}_s^1 + |\mathcal{C}_s^2|\big)\big)|\delta_s|ds.$$

Dalla disuguaglianza di Gronwall, otteniamo che $\delta_t = 0$. □

Se consideriamo il caso in cui, nel sistema (3.1), i moti browniani W, B siano unidimensionali ed i coefficienti siano costanti, possiamo dare la formula esplicita per $\mathcal{C}_t$.
Notiamo infatti che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{C}_t =& 2b\mathcal{C}_t + a + (c + h\mathcal{C}_t)^2 \\ =& - h^2\mathcal{C}_t^2 + 2(b - ch)\mathcal{C}_t + (a - c^2) \\ =& - h(\mathcal{C}_t - c_+)(\mathcal{C}_t - c_-) \end{aligned} \tag{3.15}$$

dove

$$c_\pm = \frac{b - ch \pm \sqrt{(b-ch)^2 - h(a - c^2)}}{h}.$$

Allora
$$\frac{d\mathcal{C}_t}{(\mathcal{C}_t - c_+)(\mathcal{C}_t - c_-)} = -hdt.$$
Risolvendo l'equazione precedente, otteniamo quindi che
$$\frac{\mathcal{C}_t - c_+}{\mathcal{C}_t - c_-} = \frac{\mathcal{C}_0 - c_+}{\mathcal{C}_0 - c_-} e^{-h(c_+ - c_-)t}.$$

3.2.1 Caso discreto

Nelle applicazioni non sempre si lavora con processi del segnale o delle osservazioni che sono continui nel tempo. Pensiamo per esempio al caso di modelli finanziari in cui è presente il processo dei prezzi di un sottostante; quest'ultimo è una serie storica contenente un unico valore per giornata. Di conseguenza si ricorre ad una versione discreta del filtro di Kalman-Bucy.
Il filtro discreto si può ottenere direttamente dal caso continuo tramite algoritmi di discretizzazione come il metodo di Eulero, oppure tramite la funzione caratteristica, ripercorrendo i passaggi svolti nel caso precedente.

Esempio 3.1 (Modello di Heston)**.** Il modello di volatilità stocastica di Heston è un modello utilizzato per il prezzo degli asset, guidato dal moto browniano, in cui la volatilità del sottostante non è costante o deterministica, ma segue a sua volta un processo stocastico. Inoltre, anche il drift è guidato dallo stesso processo stocastico della volatilità.
Lo scopo del problema del filtraggio è valutare il processo di volatilità stocastica utilizzando le osservazioni del prezzo del sottostante. La complicazione deriva dal fatto che i coefficienti del modello non sono costanti o lineari. L'idea principale è ottenere una soluzione approssimata, linearizzando i coefficienti non lineari nelle equazioni e successivamente applicando il filtro di Kalman al modello linearizzato.
Consideriamo il modello di Heston
$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + S_t\sqrt{z_t}dW_t^1, \\ dz_t = k(\theta - z_t)dt + \sigma\sqrt{z_t}dW_t^2, \\ dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt. \end{cases}$$

Le equazioni rappresentano rispettivamente l'andamento del prezzo del sottostante, la varianza istantanea del prezzo, detta volatilità, ed infine la correlazione dei due moti browniani W^1, W^2. Il termine r indica il rendimento medio istantaneo. Come si vede, il modello presenta cinque parametri:

i) z_0, la volatilità iniziale;

ii) θ, la varianza a lungo termine; ossia il limite per $t \to \infty$ del valore atteso di z_t;

iii) ρ, il coefficiente di correlazione dei due moti browniani;

iv) k, rappresenta la velocità con cui la volatilità implicita si avvicina a θ;

v) σ, detta *volatility of volatility* e determina la varianza di z_t.

Il modello può essere scritto come segue:

$$\begin{cases} dln(S_t) = \big(r - \frac{1}{2}z_t\big)dt + \sqrt{(1-\rho^2)z_t}dW_t^S + \rho\sqrt{z_t}dW_t^z, \\ dz_t = k(\theta - z_t)dt + \sigma\sqrt{z_t}dW_t^z, \end{cases} \tag{3.16}$$

dove $dW_t^z dW_t^S = 0$ sono definiti come

$$\begin{cases} W_t^1 = \sqrt{(1-\rho^2)}W_t^S + \rho W_t^z \\ W_t^2 = W_t^z. \end{cases}$$

La versione discretizzata del modello (3.16) può essere scritta nella seguente forma

$$\begin{cases} s_n = \big(r - \frac{1}{2}z_n)\Delta t + \sqrt{(1-\rho^2)z_n}\Delta W_{s_n} + \rho\sqrt{z_n}\Delta W_{z_n}, \\ z_n = z_{n-1} + k(\theta - z_{n-1})\Delta t + \sigma\sqrt{z_{n-1}}\Delta W_{z_n} \end{cases}$$

dove $s_n := ln(S_{n+1}) - ln(S_n)$ e W_{s_n}, W_{z_n} sono moti browniani per $n = 1, 2, \ldots$. Per poter applicare il filtro di Kalman è necessario prima linearizzare tutte le funzioni non lineari nel modello. I termini nella parte di drift sono lineari, quindi si deve linearizzare solo la funzione $\sqrt{z_n}$. Usando un metodo di linearizzazione statistica, si riesce a definire l'approssimazione $U_t = \varphi + k_1(z_t - m_z)$.

La ricerca dei parametri φ, k_1 si basa sul fatto che $\sqrt{z_k}$ e U_t devono essere stocasticamente equivalenti.
Una volta trovati i parametri della linearizzazione, si può applicare il filtro di Kalman.
Se si vuole approfondire la lineareizzazione e la calibrazione del modello si consiglia di consultare [11] e [9].

Bibliografia

[1] Di Francesco, M., and Pascucci, A. A continuous dependence result for ultraparabolic equations in option pricing. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 336*, 2 (2007), 1026–1041.

[2] Fristedt, B., Jain, N., and Krylov, N. *Filtering and Prediction: A Primer*, vol. 38 of *Student Mathematical Library.* American Mathematical Society, 2007.

[3] Kunita, H. *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations*, vol. 24 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[4] Liptser, R. S., and Shiryaev, A. N. *Statistics of Random Processes II: Applications*, second ed., vol. 6 of *Applications of Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[5] Pascucci, A. *PDE and Martingale Methods in Option Pricing*, vol. 2 of *Bocconi & Springer Series.* Springer, Milano, 2011.

[6] Pascucci, A. *Teoria della Probabilità.* 2021. Dispense del corso di Probabilità e Statistica.

[7] Pascucci, A., and Pesce, A. Backward and forward filtering under the weak Hörmander condition. *To appear in Stochastics and Partial Differential Equations: Analysis and Computations* (2022).

[8] Pascucci, A., and Pesce, A. On stochastic langevin and fokker-planck equations: The two-dimensional case. *Journal of Differential Equations 310* (2022), 443–483.

[9] Putyatina, O. *Filtering, approximation and portfolio optimization for shot-noise models and the Heston model.* PhD thesis, University of Kaiserslautern, 2012.

[10] Rozovsky, B. L., and Lototsky, S. V. *Stochastic Evolution Systems: Linear Theory and Applications to Non-Linear Filtering*, second ed., vol. 89 of *Probability Theory and Stochastic Modelling.* Springer, Cham, 2018.

[11] Wang, X., He, X., Bao, Y., and Zhao, Y. Parameter estimates of heston stochastic volatility model with mle and consistent ekf algorithm. *Science China Information Sciences 61*, 4 (2018), 1–17.

[12] Xiong, J. *An Introduction to Stochastic Filtering Theory*, vol. 18 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics.* Oxford University Press, Oxford, 2008.