

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**Modelli Input-Output:  
un'analisi simultanea di shock  
domanda e offerta**

**Relatore:**

**Chiar.mo Prof.**

**GIACOMO BORMETTI**

**Presentata da:**

**CHIARA BEDEI**

**Sessione 25-03-2022**

**Anno Accademico 2020 - 2021**

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
<b>1 Rassegna dei modelli presenti in letteratura</b>	<b>9</b>
1.1 Modello Input-Output proposto da Leontief . . . . .	9
1.1.1 Modello Input-Output a livello regionale . . . . .	19
1.1.2 Modello Input-Output per settori che producono più merci . . . . .	24
1.1.3 Analisi strutturale del modello Input-Output . . . . .	29
1.1.4 Modello Input-Output dinamico . . . . .	34
1.2 Modello Input-Output proposto da Ghosh . . . . .	37
1.3 Modello Misto Esogeno Endogeno (MEEM) . . . . .	43
<b>2 Applicazione dei modelli Input-Output</b>	<b>48</b>
2.1 Variazione nella fornitura . . . . .	49
2.1.1 Essenzialità dell'industria . . . . .	49
2.1.2 Indice di Lavoro da Remoto . . . . .	50
2.1.3 Shock nella fornitura . . . . .	54
2.2 Variazione nella domanda finale . . . . .	55
2.3 Entità delle variazioni a livello di fornitura ed offerta . . . . .	57
2.3.1 Dati analizzati . . . . .	59
<b>3 Analisi dei sistemi industriali attraverso il modello MEEM</b>	<b>61</b>
3.1 Analisi teorica . . . . .	61
3.1.1 Implementazione . . . . .	66
3.2 Risultati . . . . .	67
3.2.1 Analisi dei dati inerenti alla Germania . . . . .	67

3.2.2	Analisi dei dati inerenti alla Spagna . . . . .	68
3.2.3	Analisi dei dati inerenti all'Italia . . . . .	69
3.2.4	Variazione dell'entità degli shock . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Analisi dei sistemi industriali attraverso lo studio della propagazione di shock nella rete</b>	<b>74</b>
4.1	Allocazioni Ottimali . . . . .	75
4.1.1	Implementazione . . . . .	76
4.2	Schemi di Razionamento . . . . .	77
4.2.1	Implementazione . . . . .	84
4.3	Risultati . . . . .	85
4.3.1	Analisi dei dati inerenti alla Germania . . . . .	85
4.3.2	Analisi dei dati inerenti alla Spagna . . . . .	87
4.3.3	Analisi dei dati inerenti all'Italia . . . . .	88
4.3.4	Variazione dell'entità degli shock . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Analisi della rete industriale</b>	<b>102</b>
5.1	Rete industriale con nodi rimossi in maniera casuale . . . . .	104
5.1.1	Implementazione . . . . .	105
5.1.2	Risultati . . . . .	105
5.2	Rete industriale con nodi rimossi in maniera selettiva . . . . .	112
5.2.1	Implementazione . . . . .	112
5.2.2	Risultati . . . . .	113
	<b>Conclusione</b>	<b>120</b>
	<b>Appendici</b>	<b>126</b>
<b>A</b>	<b>Generalizzazione matematica per l'analisi strutturale del modello Input- Output proposto da Leontief</b>	<b>126</b>
<b>B</b>	<b>Grado di Essenzialità delle industrie</b>	<b>128</b>

C Valori della variazione nella offerta e nella domanda per i settori industriali	130
D Dati riassuntivi degli stati Germania, Spagna ed Italia	133
E Condizioni di Hawkins-Simon	136
F Metodo di programmazione lineare	139
G Risultati ottenuti tramite il metodo di ottimizzazione	147
H Risultati ottenuti tramite gli schemi di razionamento	155
I Analisi della rete industriale a livello matematico	158
Ringraziamenti	163

# Introduzione

In questa tesi si analizza la risposta avuta dai sistemi economici degli stati europei Germania, Spagna ed Italia al fronte dei cambiamenti dovuti e necessari per affrontare la pandemia globale da COVID-19 che ha investito il mondo dai primi giorni dell'anno 2020. Lo studio viene fatto dal punto di vista matematico presentando i modelli che regolano questo tipo di attività e si pone un accento sui risvolti a livello economico che le restrizioni imposte dai governi per limitare il contatto tra persone hanno.

Il modello matematico utile per investigare sull'attività dei settori produttivi di una economia non è una novità, bensì la sua prima formulazione risale al 1936 da parte dell'economista statunitense, di origine russa, Wassily Leontief. Esso è conosciuto come il *Modello Input-Output* ed è stato a lungo argomento di studio, di implementazioni, di critiche e modifiche ed è tuttora oggetto di analisi. Per valutare la composizione dell'economia e le dinamiche all'interno di essa si considerano tutti i settori produttivi attivi e si osserva come la produzione di ognuno di essi venga impiegata nel soddisfare e la richiesta proveniente dalle altre sezioni e quella proveniente dai consumatori finali. L'ipotesi assunta per la definizione di questa struttura è che tutto il funzionamento dipende dalla richiesta totale proveniente dai consumatori, sia intermedi che finali, e la produzione è sempre nelle facoltà di soddisfarla pienamente. Perciò si può definire una quantità caratterizzante lo scambio che avviene tra due dati settori che risulta essere di fondamentale importanza: il *Coefficiente di Produzione*. Considerati un settore industriale oggetto di studio ed un settore fornitore relativo ad esso, il coefficiente è definito come il rapporto tra la quantità di materia prima che il settore riceve dal fornitore e la quantità totale di prodotto finale che emette. Attraverso questa misura si può facilmente osservare la modalità di distribuzione dei prodotti da parte di ogni singolo settore ed eseguendo l'analisi

per tutti i soggetti coinvolti nell'economia il sistema industriale risulta completamente definito.

Una modifica di rilevante importanza per gli studi eseguiti in questa sede apportata a tale schema è contenuta nel modello detto misto esogeno endogeno. Come precedentemente detto, il modello di produzione *Input – Output* assume che la richiesta dei prodotti provenga dall'esterno del sistema economico mentre la produzione, interna al sistema, sia dipendente da essa. Nella realtà dei fatti si possono presentare casi in cui la produzione avverta cambiamenti per cause esterne al sistema industriale e non dipendenti dalla domanda finale che portano dunque a variazioni nella richiesta finale soddisfatta indipendenti da essa. Per questo motivo viene definito un modello misto in cui non tutte le variabili produzione finale sono dipendenti dalla domanda: alcune componenti di produzione sono esogene, e le relative domande corrisposte risultano endogene, ed altre componenti di produzione risultano dipendenti dalla domanda finale e quindi endogene. Suddivise le componenti esogene da quelle endogene ci si riporta ad una formulazione del modello sulla falsa riga di quello di Leontief.

I modelli presentati sono quelli impiegati per lo studio dei sistemi industriali e delle modifiche che hanno subito durante la pandemia e per valutare come essi abbiano reagito alle restrizioni messe in atto dai governi al fine di arginare la diffusione del virus. Andando in questa direzione si possono definire diverse quantità volte a caratterizzare il momento che ogni singolo settore affronta. Infatti a ciascuno è data la possibilità di svolgere l'attività fisicamente sul posto di lavoro in base a quanto la propria mansione sia indispensabile per la comunità. Inoltre un elemento distintivo di tale periodo è la fattibilità o meno di attività da remoto. L'unione di tutte queste componenti porta a determinare la variazione che ogni settore subisce sulla propria produzione totale. Analogamente sono visibili anche cambiamenti nella richiesta totale di prodotti che giunge ad ogni settore economico in quanto, dato il momento di allerta e crisi, la popolazione cambia le priorità ed il proprio stile di vita. In queste condizioni si può dunque valutare quale sia la produzione massima possibile e quale la domanda finale corrisposta massima possibile. Questo limite definisce il livello massimo sia di produzione che di richiesta

soddisfatta che in ogni sistema economico si può verificare durante l'allerta.

Data la variazione subita dai settori industriali sia nella parte di produzione che nella parte di domanda finale si riesce ad applicare un metodo di ottimizzazione al fine di determinare quale sia la produzione totale massima generata dall'attività lavorativa di ogni settore industriale e quale la domanda finale massima soddisfatta in una condizione di piena operatività. Nella realtà dei fatti questa massimizzazione fornisce un limite superiore per i valori di produttività e richiesta soddisfatta, ma le attività non riescono durante questo periodo di crisi a raggiungere tale livello.

Come anticipato il modello di produzione *Input – Output* definito da Leontief lavora in base alla richiesta pervenuta, ma, essendo questo un periodo di crisi per i livelli di produzione a causa delle restrizioni imposte e per via dei lavoratori colpiti dalla malattia, è necessario definire modalità di distribuzione per ogni settore affinché l'attività industriale non cessi completamente. Perciò vengono implementati quattro schemi di razionamento secondo cui si determinano le regole di fornitura. Il primo programma è di tipo proporzionale in base alla dimensione dell'ordine effettuato e non fa distinzione tra i settori industriali intermedi nella catena produttiva ed i consumatori finali; il secondo continua ad essere di tipo proporzionale, ma si dà la priorità di consegna ai settori intermedi e solo terminate queste richieste si passa ai consumatori finali. Successivamente si definisce un sistema secondo cui si continua a dare la priorità ai settori industriali intermedi e le richieste vengono soddisfatte in maniera completa ordinandole dalle più ingenti alle più modeste; per ultimo si prosegue ancora con uno schema prioritario, ma questa volta l'ordine secondo cui vengono erogati i beni è del tutto casuale, soddisfacendo prima i settori intermedi e poi, nel caso ci sia la possibilità, le domande finali.

Attraverso l'analisi di questi programmi è possibile valutare come vari il livello di produttività dei sistemi economici degli stati considerati e come esso sia legato alla dimensione delle variazioni avvertite. Per i tre sistemi industriali presi in esame si riscontra un andamento simile nelle soluzioni ed esse variano sia in base allo schema di razionamento scelto sia per l'entità dello shock che si verifica. L'entità di produzione totale emessa e di domanda finale soddisfatta si riducono rispetto all'attività precedente la pandemia ed esse vengono definite in funzione della percentuale dei livelli pre-crisi raggiunti. Il

metodo di razionamento proporzionale prioritario è quello che realizza il maggiore livello di produzione e domanda finale soddisfatta. In posizione opposta si trovano i due schemi di razionamento prioritario che portano i sistemi al collasso ed a livelli di attività pressochè nulli. Tra questi due estremi si colloca il razionamento proporzionale semplice che porta ad una bassa quota di produttività in confronto con quella precedente la pandemia, ma comunque non arresta le attività. Come anticipato, anche in relazione all'entità delle variazioni si può trovare un'analogia negli andamenti dei tre stati, sebbene i valori mutino al variare dei dati in esame. Si prendono in esame la situazione in cui si presenti solo variazione nel lato della fornitura, quella in cui ci sia modifica solo nel lato della domanda e quella nella quale contemporaneamente ci sia shock nel lato della fornitura e nel lato della domanda. I metodi di ottimizzazione dipendono circa linearmente dalla misura dello shock così come accade per bassi valori dello shock in tutti i metodi di razionamento. All'aumentare di questo parametro gli andamenti degli schemi di razionamento si alterano e si osserva che i metodi prioritari portano i sistemi al collasso molto velocemente. Comunque il metodo proporzionale prioritario resta essere quello che genera i più alti livelli di produzione totale e consumo finale soddisfatto per ogni valore del parametro di shock.

Andando ancora più nel dettaglio è possibile evidenziare come i risultati forniti da questi schemi dipendano anche dalla composizione di ciascuna rete industriale. Infatti queste realtà sotto esame possono essere rappresentate tramite la nozione matematica di rete ed attraverso la modellistica presente è ammissibile studiare come avvengano le interazioni e gli scambi tra i diversi soggetti presenti nel sistema. E' pure ragionevole analizzare gli effetti che alcuni cambiamenti da apportare alla definizione della rete portano ai risultati. Qui si propongono due modifiche che risultano realistiche per la situazione di crisi in esame: prima si considera una rete a cui si eliminano i settori che portano a bassi valori di compravendita, poi, per abbracciare tutti gli altri possibili criteri di scelta, si considera una rimozione casuale. Perfino in queste circostanze gli andamenti dei metodi sono simili. I metodi di ottimizzazione forniscono risultati quasi costanti ed essi rappresentano il limite superiore per gli andamenti dei metodi di razionamento. Per bassi valori di densità della rete è il metodo di razionamento proporzionale ad avere la peggiore performance. All'aumentare della densità, invece, sono i metodi prioritari a portare in



fretta i sistemi al collasso. Comunque, secondo le aspettative, il metodo proporzionale prioritario continua a dare i migliori risultati tra gli schemi di razionamento.

Il documento è strutturato nel seguente modo: nel primo capitolo si descrive nel dettaglio il modello di produzione *Input – Output* definito da Leontief e si propongono diverse modifiche ad esso eseguite sia dallo stesso Leontief che da altri economisti; in più si presenta il modello misto esogeno endogeno. Nel secondo capitolo vengono definiti gli indici utili per potere valutare la variazione che si ha in fornitura ed in domanda finale. Il terzo capitolo è utile per analizzare nel dettaglio il modello misto sia dal punto di vista teorico, evidenziandone le criticità, sia valutando i risultati che fornisce per i sistemi economici in esame. Nel quarto capitolo vengono descritti gli altri metodi di valutazione partendo sempre dalla parte teorica e proseguendo con l'analisi dei risultati nel caso dei sistemi industriali considerati. Si comincia presentando i metodi di ottimizzazione, poi si passa alla descrizione dei quattro algoritmi di razionamento e alla valutazione dei risultati. Per ultimo, in capitolo cinque, si analizza la composizione della rete industriale in termini matematici e per i casi specifici. Si propongono poi le due modifiche da apportare alla definizione della rete sopra anticipate e si analizza la reazione dei sistemi industriali a questi cambiamenti.

# Capitolo 1

## Rassegna dei modelli presenti in letteratura

In questo capitolo viene fatta una analisi dei modelli Input-Output presenti nella letteratura e delle modifiche ad essi apportate al fine di comprenderne la struttura e la successiva applicazione pratica a livello industriale.

La struttura matematica di un tale modello consiste in un sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite che descrive la distribuzione dei prodotti in una economia considerati sia come dati in ingresso che dati in uscita. Di questo una notazione matriciale ne facilita la formulazione ed è possibile ricavarne la soluzione con annesse alcune considerazioni di tipo economico.

### 1.1 Modello Input-Output proposto da Leontief

Wassily Leontief fu l'economista che ideò e sviluppò il modello *Input-Output*. Egli diede di questo una struttura analitica che venne presentata per la prima volta nell'articolo Leontief [Aug., 1936] e di cui si può trovare una dettagliata analisi nel volume Miller and Blair [2009, cap. 2].

Questo studio è basato su dati statistici inerenti all'attività economica di un'area: ci si può riferire ad un particolare settore industriale più o meno raffinato nella suddivisione, ad un'area geografica ristretta o anche ad un intero stato. Gli elementi necessari per

la descrizione sono quelli che caratterizzano il flusso commerciale tra i settori produttivi, ossia lo scambio di prodotti e servizi che avviene tra la parte acquirente e quella venditore, durante un intervallo di tempo fissato (un mese, un anno, ecc.). L'unità di misura considerata, per cominciare, è quella monetaria che rappresenta l'entità dei flussi.

Si considera l'economia di uno stato suddivisa nei settori attivi.

Sia  $z_{ij}$  il valore monetario scambiato dall'azienda  $i$ -esima a quella  $j$ -esima. Ovviamente, si può subito osservare la relazione che intercorre tra la quantità di materia prima che l'azienda  $j$ -esima riceve e la quantità di prodotto finale che essa emette, dunque la quantità di materia prima disponibile per chi a sua volta ne usufruisce.

In aggiunta a questi enti si considerano all'interno dell'economia tutti i nuclei familiari che fruiscono di prodotti e servizi, il governo o le associazioni ad esso connesse ed il commercio estero. Queste classi vengono considerate come una unica entità definita *Domanda Finale*.

Sia data una economia in cui sono presenti  $n$  reparti produttivi e si considera il caso in cui ciascuno di essi fabbrichi un solo elemento. Sia  $x_i$  la produzione totale relativa all' $i$ -esimo settore e sia  $f_i$  la domanda finale totale per l' $i$ -esimo settore. Si assume che ci sia equilibrio tra la produzione totale emessa dalla sezione e le richieste per il bene finale, ossia non ci sono vincoli sulla fornitura del settore ed esso produce la quantità necessaria per soddisfare il fabbisogno. Dunque la relazione che intercorre tra le parti può essere descritta da una semplice equazione lineare del tipo

$$x_i = z_{i1} + \cdots + z_{ij} + \cdots + z_{in} + f_i. \quad (1.1)$$

Andando a definire questa equazione di distribuzione dei prodotti per tutti gli  $n$  settori industriali si ottiene il sistema seguente

$$\begin{aligned} x_1 &= z_{11} + \cdots + z_{1j} + \cdots + z_{1n} + f_1 \\ &\quad \vdots \\ x_i &= z_{i1} + \cdots + z_{ij} + \cdots + z_{in} + f_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \vdots \\
 x_n &= z_{n1} + \cdots + z_{nj} + \cdots + z_{nn} + f_n.
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Definendo i vettori e la matrice

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

ed utilizzando il vettore  $\mathbf{i}$ , di dimensione  $n$  e con componenti tutte di valore 1, il sistema si può scrivere in forma matriciale come

$$\mathbf{x} = \mathbf{Z}\mathbf{i} + \mathbf{f}. \tag{1.4}$$

Per come sono state definite le componenti della matrice  $\mathbf{Z}$ , ogni colonna  $j$ -esima di essa rappresenta la quantità di acquisti fatti dal  $j$ -esimo settore dagli altri, dunque quantifica il totale degli input per il  $j$ -esimo settore provenienti dall'interno della rete industriale in termini di costi da pagare. In realtà, le spese che una azienda deve sostenere comprendono molte più voci, per esempio quelle inerenti alla forza lavoro o al capitale detenuto. Questi prezzi vengono catalogati nel complesso come *Valore Aggiunto*. Ancora di più, può presentarsi il caso nel quale una azienda riceva input dall'estero sotto forma di beni importati e dunque debba sostenere le spese annesse. Dunque si definisce per ogni settore la categoria *Pagamenti* comprensiva sia di *Valore Aggiunto* che di importazioni.

Come proposto dallo stesso Leontief, i flussi possono venire presentati tramite una matrice, detta *Tabella Input-Output*, nella quale, dal punto di vista delle righe, si analizza come ogni settore abbia distribuito la propria produzione emessa (output) e, dal punto di vista delle colonne, come abbia visto suddivisi i costi sostenuti (input). Così facendo è possibile capire l'equilibrio del commercio per ogni singola unità, ossia, nel caso in cui si presenti un equilibrio negativo, significa che le vendite sono state inferiori agli acquisti e, nel caso in cui sia positivo, le vendite risultano superiori alle somme esborsate. Perciò si

evidenzia facilmente che il singolo ente possa essere in una condizione di non equilibrio, mentre per il sistema totale possa presentarsi solo la condizione di equilibrio in quanto le parti tra cui si verifica la compravendita sono tutte incluse nel sistema (ogni volta che è presente il lato offerente c'è anche quello acquirente).

A questo punto, per comprendere correttamente la situazione, si presenta un semplice esempio comunque esaustivo di una economia che comprende due soli settori (1 e 2) entrambi in condizione di equilibrio.

La matrice Input-Output per righe presenta gli output di ogni settore industriale: sia gli output scambiati a livello intermedio con altre sezioni sia quelli a livello di *Domanda Finale*. Quest'ultima è composta da diversi contributi: gli acquisti dei consumatori privati (C), gli acquisti fatti come investimento privato (I), gli acquisti provenienti dal governo (G) e la domanda per esportazioni (E).

Dunque per i due settori in esame risulta

$$f_1 = c_1 + i_1 + g_1 + e_1 \quad ; \quad f_2 = c_2 + i_2 + g_2 + e_2.$$

Se si considera la matrice per colonne, le prime due quantità risultano mostrare ancora le interazioni tra industrie e poi viene il settore *Pagamenti*. Per definire la somma totale che l'azienda deve versare (*Valore Aggiunto*) è conveniente mantenere la distinzione in due componenti: gli stipendi dei dipendenti (L) e varie (N), che comprende affitti, tasse ecc.

$$v_1 = l_1 + n_1 \quad ; \quad v_2 = l_2 + n_2.$$

Inoltre è utile evidenziare la somma versata per la quantità di materia proveniente da importazione  $m_1$  ed  $m_2$ .

La *Tabella Input-Output* risultante è di questo genere

	1	2	Domanda Finale				Produzione Totale
1	$z_{11}$	$z_{12}$	$c_1$	$i_1$	$g_1$	$e_1$	$x_1$
2	$z_{21}$	$z_{22}$	$c_2$	$i_2$	$g_2$	$e_2$	$x_2$
Valore Aggiunto	$l_1$	$l_2$	$l_C$	$l_I$	$l_G$	$l_E$	$L$
	$n_1$	$n_2$	$n_C$	$n_I$	$n_G$	$n_E$	$N$
Importazioni	$m_1$	$m_2$	$m_C$	$m_I$	$m_G$	$m_E$	$M$
Spese Totali	$x_1$	$x_2$	$C$	$I$	$G$	$E$	$X$

Di questa tabella i valori  $l_C$ ,  $n_C$ ,  $l_I$ ,  $n_I$ ,  $l_G$  ed  $n_G$  rappresentano le spese sostenute dai nuclei familiari, dagli investitori e dai governi per i servizi. Nella riga riguardante le importazioni, per esempio,  $m_G$  risulta essere la spesa sostenuta dal governo per i prodotti importati, mentre  $m_E$  rappresenta la spesa per le esportazioni di prodotti precedentemente importati.

La colonna terminale della tabella indica la produzione totale di ogni settore e la riga terminale le spese totali sostenute da ogni parte. Si può notare che la produzione totale dei due settori ( $x_1$  e  $x_2$ ) è presente sia nella colonna terminale che nella riga terminale e ciò accade grazie all'assunzione fatta: le due aree si trovano in condizione di equilibrio e ciò significa che la produzione totale emessa eguaglia le spese sostenute.

Il valore  $X$ , considerando l'ultima colonna, risulta essere la produzione totale di tutti i settori o, valutando l'ultima riga, la somma delle spese sostenute da tutte le sezioni. Come precedentemente osservato l'economia vista come sistema totale risulta essere in equilibrio; dunque le vendite totali eguagliano gli acquisti totali, da cui

$$\begin{aligned}
 X &= x_1 + x_2 + L + N + M \\
 X &= x_1 + x_2 + C + I + G + E.
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

Eguagliando le due espressioni si ottiene che

$$L + N = C + I + G + (E - M). \tag{1.6}$$

Da quest'ultima formulazione si può notare che il termine di sinistra ( $L + N$ ) rappresenta il reddito lordo dello stato, il termine di destra ( $C + I + G + (E - M)$ ) misura

la produzione lorda nazionale e queste due quantità si eguagliano.

Ora, compreso il semplice caso con due soli settori produttivi è possibile ampliare il discorso ad una economia che rifletta casi concreti. In realtà descrivere un sistema in cui vengono evidenziate tutte le transazioni che avvengono tra le unità risulta possibile, ma di difficile uso pratico in quanto la relativa matrice avrebbe dimensioni molto grandi. Per ovviare a questo problema lo stesso Leontief propose in [Leontief, Aug., 1936] di attuare alcune semplificazioni raggruppando gli enti. La classificazione può avvenire in base a diversi principi (dal punto di vista matematico del tutto equivalenti tra loro), per esempio per affinità tra i prodotti emessi, per localizzazione in aree geografiche oppure per similarità nel costo della struttura qualitativamente e quantitativamente. Così facendo si ottiene una matrice di dimensioni ridotte rispetto al caso precedente le cui componenti risultano essere una somma dei valori inerenti ai settori aggregati, mentre il valore  $X$  risulta essere invariato.

Tuttavia si può incorrere in un problema di conteggio doppio in quanto se due industrie aggregate risultano essere correlate allora lo stesso articolo compare sia dal lato domanda che dal lato vendita. Se lo scopo del raggruppamento è l'eliminazione dei rapporti reciproci questi valori possono essere eliminati ed ovviamente si ottiene una approssimazione del sistema, ma in certi casi per analizzare la struttura economica ciò può essere sufficiente.

Analizzando il sistema economico, si può definire la relazione che intercorre tra la produzione totale del  $j$ -esimo settore e la quantità di materie prime / dati di immissione che esso riceve dall' $i$ -esima parte attraverso un coefficiente detto *Coefficiente Tecnico* (o *Coefficiente di Produzione*)

$$\alpha_{ij} = \frac{z_{ij}}{x_j}. \quad (1.7)$$

Per il modello *Input-Output Leontief* si assume che il *Coefficiente Tecnico* risulti invariato per ogni coppia di settori durante l'arco temporale considerato. Dunque, dato un set di osservazioni è possibile calcolare il valore di  $\alpha_{ij}$  e successivamente esso può essere utilizzato per fare un'analisi tra la quantità di produzione e gli input necessari. Infatti, da (1.7) viene che  $z_{ij} = \alpha_{ij}x_j$ . Dunque, si dice che il modello opera in condizioni di ritorni costanti in scala.

Ancora, è possibile evidenziare che Leontief presentò un modello che si sviluppa con dati in ingresso in proporzioni fisse per ogni settore. Infatti, preso il settore  $j$ -esimo e considerando che esso riceva ingressi da  $i$  e da  $t$ , è possibile determinare la relazione tra gli input dall'una e dall'altra parte come

$$\frac{z_{ij}}{z_{tj}} = \frac{\alpha_{ij}x_j}{\alpha_{tj}x_j} = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{tj}}. \quad (1.8)$$

Siccome la (1.8) risulta essere il rapporto tra i *Coefficienti Tecnici* assunti come quantità costanti, l'entità di materie prime che un settore riceve risulta fissa.

Con le considerazioni fatte è possibile riscrivere il sistema (1.2) attraverso la definizione di  $z_{ij}$

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1i}x_i + \cdots + \alpha_{1n}x_n + f_1 \\ &\quad \vdots \\ x_i &= \alpha_{i1}x_1 + \cdots + \alpha_{ii}x_i + \cdots + \alpha_{in}x_n + f_i \\ &\quad \vdots \\ x_n &= \alpha_{n1}x_1 + \cdots + \alpha_{ni}x_i + \cdots + \alpha_{nn}x_n + f_n. \end{aligned} \quad (1.9)$$

In questo modo è possibile osservare il flusso e la distribuzione dei beni tra le sezioni. Questa scrittura inoltre permette di visualizzare il modo in cui utilizzare questo modello *Input-Output*: facendo una previsione della *Domanda Finale* inerente ad ogni settore in un arco temporale futuro determinato, siccome i *Coefficienti Tecnici* sono fissi, è possibile trovare il volume di produzione di ogni ente necessario per soddisfare la richiesta.

$$\begin{aligned} x_1 - \alpha_{11}x_1 - \cdots - \alpha_{1i}x_i - \cdots - \alpha_{1n}x_n &= f_1 \\ &\quad \vdots \\ x_i - \alpha_{i1}x_1 - \cdots - \alpha_{ii}x_i - \cdots - \alpha_{in}x_n &= f_i \\ &\quad \vdots \\ x_n - \alpha_{n1}x_1 - \cdots - \alpha_{ni}x_i - \cdots - \alpha_{nn}x_n &= f_n. \end{aligned} \quad (1.10)$$



Definendo la matrice diagonale  $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & x_n \end{bmatrix}$  ed sfruttando l'identità  $\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^{-1} = \mathbf{I}$ , si

ricava la matrice inversa  $\hat{\mathbf{x}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{x_n} \end{bmatrix}$ .

Richiamando la matrice  $\mathbf{Z}$  definita in (1.3), si ottiene la matrice dei *Coefficienti Tecnici*

$$\mathbf{A} = \mathbf{Z}\hat{\mathbf{x}}^{-1}. \quad (1.11)$$

Così facendo il sistema (1.10) può essere espresso in forma matriciale come

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{f}. \quad (1.12)$$

Ora, dato il vettore  $\mathbf{f}$  e la matrice  $\mathbf{A}$  noti per le ipotesi assunte, questo sistema lineare ha  $n$  equazioni in  $n$  incognite  $x_1, \dots, x_n$  e non è detto che abbia una unica soluzione. Ciò dipende dal fatto che la matrice  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$  sia o meno singolare, ossia se la matrice  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  esiste.

Per verificare l'esistenza della matrice inversa si calcola il determinante di  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$  e si verifica se assume valore nullo. Se  $|\mathbf{I} - \mathbf{A}| \neq 0$  si può procedere nel calcolo dell'inversa e, definita  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^*$  la matrice dei complementi algebrici trasposta, si ottiene che  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{I} - \mathbf{A}|}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^*$ . Dunque è possibile ricavare la soluzione del sistema matriciale (1.12)

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{L}\mathbf{f} \quad (1.13)$$

dove la matrice inversa è definita essere  $\mathbf{L}$  *Matrice Leontief Inversa*. La soluzione matriciale (1.13) si può scrivere per componenti ottenendo

$$x_1 = l_{11}f_1 + \dots + l_{1j}f_j + \dots + l_{1n}f_n \\ \vdots$$

$$\begin{aligned}
x_i &= l_{i1}f_1 + \cdots + l_{ij}f_j + \cdots + l_{in}f_n \\
&\quad \vdots \\
x_n &= l_{n1}f_1 + \cdots + l_{nj}f_j + \cdots + l_{nn}f_n.
\end{aligned}$$

Effettivamente nei casi in cui si considera una economia molto estesa, nella quale la matrice  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$  assume dimensioni elevate, non sempre è possibile calcolarne la inversa. Per ovviare le difficoltà intervengono risultati di algebra matriciale che permettono di approssimare  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  non richiedendone il calcolo esplicito.

La matrice  $\mathbf{A}$  contenente i *Coefficienti Tecnici* risulta essere non negativa per sua definizione, ossia  $\alpha_{ij} \geq 0 \forall i \forall j$ . Inoltre, come è plausibile fare, assumiamo che le componenti della sezione *Pagamenti* non siano mai identicamente nulle allora si ha che  $\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} < 1 \forall j$ .

Ora, moltiplicando  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$  per  $(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^n)$  si ottiene

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^n) = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{n+1}).$$

Dalle considerazioni fatte sugli elementi di  $\mathbf{A}$  ora mostriamo che per  $n \rightarrow \infty \mathbf{A}^{n+1} \rightarrow 0$ . La norma di una matrice può essere definita come il massimo valore delle somme per colonne degli elementi. Date le matrici  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  e le rispettive norme, dalla disuguaglianza tra norme segue che  $\|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\| \geq \|\mathbf{AB}\|$ , da cui sostituendo a  $\mathbf{B}$  la matrice  $\mathbf{A}$  ed iterando si ottiene  $\|\mathbf{A}\|^n \geq \|\mathbf{A}^n\|$ .

Per definizione di norma matriciale  $\alpha_{ij} \leq \|\mathbf{A}\|$  e, dato che  $\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} < 1 \forall j$ , si ha  $\|\mathbf{A}\| < 1$ . Da ciò segue che  $\|\mathbf{A}\|^n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ .

Dunque è corretto assumere

$$\mathbf{L} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \simeq (\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^n) \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.14)$$

Sostituendo il valore di  $\mathbf{L}$  alla soluzione del sistema matriciale (1.13)

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= (\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^n)\mathbf{f} & (1.15) \\
\mathbf{x} &= \mathbf{f} + \mathbf{A}\mathbf{f} + \mathbf{A}^2\mathbf{f} + \dots = \mathbf{f} + \mathbf{A}\mathbf{f} + \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{f}) + \mathbf{A}^2(\mathbf{A}\mathbf{f}) + \dots
\end{aligned}$$

Dalle applicazioni e sperimentazioni attuate si è osservato che le potenze di  $\mathbf{A}$  risultano essere significative fino alla ottava potenza, i successivi termini che moltiplicano  $\mathbf{f}$  assumono valore circa nullo e perciò non sono rilevanti.

**Osservazione 1.** Il sistema così definito prevede che i nuclei familiari siano presenti solo a livello di *Domanda Finale*, dunque le famiglie vengono considerate solamente come consumatori esterni al sistema produttivo. In questo modo si definisce un *Modello Aperto* nel quale sono presenti componenti esogene e non interagenti con l'attività produttiva dei settori.

Nella realtà questi clienti sono tali poichè hanno alle spalle dei redditi che utilizzano per effettuare le spese e perciò il totale delle somme uscenti è connesso con il valore delle entranti. Per questo motivo gli stessi nuclei familiari potrebbero essere considerati interni al sistema produttivo, definendo così un *Modello Chiuso*. In tal caso si definiscono una riga ed una colonna inerenti a questo settore nella matrice che descrive le transazioni tra i reparti: la riga per la distribuzione del "prodotto" mostra in quali settori viene fatto servizio e la colonna delle spese indica come vengono suddivisi gli acquisti.

In questa analisi si è considerato il valore monetario delle compravendite, tuttavia il modello iniziale sviluppato da Leontief e proposto in Leontief [Aug., 1936] era basato sulle quantità fisiche di materie prime, o contributi iniziali, e di prodotti finali.

Questa strada sarebbe similmente altrettanto percorribile, tuttavia l'unità di misura utilizzata nei settori produttivi può variare a causa dei differenti beni maneggiati e ciò porta a quantità tra loro non omogenee. Per risolvere la questione, come riportato in Miller and Blair [2009, cap. 2], si definisce quindi l'unità di misura secondo cui una unità di materia risulta essere quella necessaria per la fabbricazione di un prodotto la cui vendita genera 1\$. Così facendo l'unità di misura della materia è definita avendo il valore monetario parificato per tutti i settori e si può illustrare il modello del prezzo dei prodotti.

Sia  $\mathbf{v}$  il vettore che descrive il *Valore Aggiunto*, in questo momento si assume per semplicità che  $\mathbf{v}$  contenga solo i dati inerenti alla manodopera. Considerando ancora un settore produttivo in condizione di equilibrio, ossia generalizzando ciò che è accaduto per i settori 1 e 2 nell'esempio precedente, si ha

$$\begin{aligned}
x_j &= \sum_{i=1}^n z_{ij} + v_j \\
\mathbf{x}' &= \mathbf{i}' \mathbf{Z} + \mathbf{v}'
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Sia  $\mathbf{x}$  il vettore contenente i valori di produzione all'istante iniziale, ossia all'istante in cui viene definita l'unità di misura, dunque quei valori che generano 1\$ dalla vendita. Sostituendo in (1.16) l'espressione di  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Z} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ , e moltiplicando a destra per  $\hat{\mathbf{x}}^{-1}$  si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}' \hat{\mathbf{x}}^{-1} &= \mathbf{i}' \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}^{-1} + \mathbf{v}' \hat{\mathbf{x}}^{-1} \\
\mathbf{i}' &= \mathbf{i}' \mathbf{A} + \mathbf{v}' \hat{\mathbf{x}}^{-1}.
\end{aligned}$$

Il membro di sinistra risulta essere il vettore dei prezzi degli articoli all'istante iniziale e, nelle ipotesi sopra definite, ogni componente risulta essere uguale a 1 essendo il prezzo pari ad 1\$. Il membro di destra rappresenta il costo degli input necessari per ottenere le unità di prodotto finale richieste.

Similmente questa analisi può essere condotta al fine di determinare il vettore dei prezzi della merce noti i costi da sostenere per la produzione. Infatti, indicando con  $\tilde{\mathbf{p}}$  il vettore dei prezzi si ha che

$$\tilde{\mathbf{p}}' = \tilde{\mathbf{p}}' \mathbf{A} + \mathbf{v}' \hat{\mathbf{x}}^{-1}. \tag{1.17}$$

Ricordando la definizione della *Matrice Leontief Inversa* la (1.17) porta al vettore soluzione contenente i prezzi

$$\tilde{\mathbf{p}}' = \mathbf{v}' \hat{\mathbf{x}}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{v}' \hat{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{L}. \tag{1.18}$$

### 1.1.1 Modello Input-Output a livello regionale

Una variazione del modello, presentata dallo stesso Leontief e richiamata in Leontief [1986, cap. 7], fu necessaria al fine di poter applicare il sistema non solo all'economia di

una intera nazione, ma anche all'economia ristretta ad una regione o area circoscritta. Si può trovare una illustrazione a livello matematico di ciò in Miller and Blair [2009, cap. 3]

In questo modo è possibile valutare da un lato come si svolga l'attività di una zona e come essa riesca ad autosostenersi e dall'altro come avvengano gli scambi tra diverse regioni tutte contenute nel territorio selezionato.

Innanzitutto bisogna osservare che, sebbene i valori presenti nella tabella Input-Output di una nazione provengano dalla media dei dati di tutte le zone, non è detto che tali valori eguaglino quelli delle regioni prese singolarmente. Infatti esse possono avere per casualità proprietà del tutto uguali o completamente diverse a quelle nazionali. Inoltre, considerando porzioni territoriali ridotte, importazioni ed esportazioni assumono un'importanza maggiore in quanto più un'area risulta ristretta più dipende dalle connessioni con l'esterno sia per la vendita dei prodotti che per l'acquisto delle materie prime.

In primo luogo per esaminare la struttura economica di una zona si considera un sistema composto da una singola regione  $r$ .

Sia  $\mathbf{x}^r$  il vettore contenente i valori della produzione totale dei settori esaminati appartenenti alla suddetta regione e sia  $\mathbf{f}^r$  il vettore di componenti le domande finali provenienti dalla zona.

Si assume che a livello regionale, come a livello nazionale, la relazione tra le materie prime in input nei settori industriali provenienti dalla stessa e la produzione totale distribuita all'interno sia definita tramite i coefficienti contenuti nella matrice  $\mathbf{A}^{rr} = [\alpha_{ij}^{rr}]$ , in cui la componente  $\alpha_{ij}^{rr}$  rappresenta lo scambio dal settore  $i$ -esimo al  $j$ -esimo entrambi contenuti in  $r$ . Dunque per poter valutare l'attività è necessario essere a conoscenza di tali parametri e sono due le strade percorribili a tal fine: da un lato se ne cerca una stima, dall'altro il valore esatto.

Per avere una valutazione innanzitutto si esamina la percentuale di fornitura proveniente dalla regione considerata per ogni area industriale. Sia  $x_i^r$  la produzione totale del settore  $i$ -esimo presente in  $r$ , sia  $e_i^r$  la quantità di esportazioni di  $i$  all'esterno della regione  $r$  e sia  $m_i^r$  l'entità delle importazioni per  $i$  in  $r$ . Dunque, la proporzione che rappresenta l'ammontare del bene  $i$ -esimo prodotto in  $r$  e disponibile in  $r$  per l'acquisto risulta

essere

$$p_i^r = \frac{(x_i^r - e_i^r)}{(x_i^r - e_i^r + m_i^r)}. \quad (1.19)$$

Note le proporzioni per tutti i comparti ed organizzate nel vettore  $\mathbf{p}^r$  e definita la matrice diagonale  $\hat{\mathbf{p}}^r$  a partire dai valori in  $\mathbf{p}^r$ , la matrice dei coefficienti regionali si può ottenere come

$$\mathbf{A}^{rr} = \hat{\mathbf{p}}^r \mathbf{A}. \quad (1.20)$$

Ora, richiamando la soluzione matriciale  $\mathbf{x}$  riportata in (1.13) ed inserendo in essa questi dati, si ottiene la soluzione a livello regionale come

$$\mathbf{x}^r = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{p}}^r \mathbf{A})^{-1} \mathbf{f}^r. \quad (1.21)$$

D'altro canto per ottenere valori di produzione più precisi che una stima si possono definire le quantità pressochè esatte di capacità produttiva e di compravendita tra soggetti interni al sistema attraverso questionari compilati dai lavoratori con i dati riguardanti le aziende. Ovviamente questa procedura risulta più complessa, ma così facendo si riesce a calcolare direttamente il rapporto che definisce il coefficiente  $e$ , procedendo come in (1.13), si determina la produzione totale regionale.

In secondo luogo è possibile analizzare un sistema contenente diverse regioni piuttosto che una soltanto poichè in questo modo si visualizza non solo l'economia interna, ma anche quella interregionale.

Il sistema risulta essere sulla linea dei precedenti; per semplicità si mostra l'analisi di un sistema contenente due regioni per poi condurre al caso generale.

Siano  $r$  ed  $s$  le regioni esaminate e si assume che l'economia di  $r$  comprenda tre reparti produttivi (1,2,3) e quella di  $s$  solo due (1,2). Siano date le matrici che descrivono i flussi monetari tra i settori di una stessa regione e quelli dell'altra:  $\mathbf{Z}^{rr}$  ha componenti  $z_{ij}^{rr}$  che quantificano le compravendite tra i settori (1,2,3) della regione  $r$ ,  $\mathbf{Z}^{sr}$  determina i flussi interregionali da  $s$  ad  $r$   $z_{ij}^{sr}$ ,  $\mathbf{Z}^{rs}$  di componenti  $z_{ij}^{rs}$  descrive i flussi interregionali

tra i settori da  $r$  ad  $s$  e  $\mathbf{Z}^{ss}$  quelli interni alla regione  $s$   $z_{ij}^{ss}$ . I valori possono essere rappresentati in un'unica matrice contenente dati interregionali ed intraregionali come

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^{rr} & \mathbf{Z}^{rs} \\ \mathbf{Z}^{sr} & \mathbf{Z}^{ss} \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

Considerando il settore  $i$ -esimo della regione  $r$  si ha che la produzione totale equivale a

$$x_i^r = z_{i1}^{rr} + z_{i2}^{rr} + z_{i3}^{rr} + z_{i1}^{rs} + z_{i2}^{rs} + f_i^r \quad \forall i = 1, 2, 3. \quad (1.23)$$

Dunque, avendo a disposizione le compravendite tra tutti i settori e le produzioni totali, il calcolo dei coefficienti è lecito e sono della forma  $\alpha_{ij}^{rr} = \frac{z_{ij}^{rr}}{x_j^r}$ ,  $\alpha_{ij}^{rs} = \frac{z_{ij}^{rs}}{x_j^s}$ ,  $\alpha_{ij}^{sr} = \frac{z_{ij}^{sr}}{x_j^r}$  e  $\alpha_{ij}^{ss} = \frac{z_{ij}^{ss}}{x_j^s}$ . Così (1.23) diventa

$$x_i^r = \alpha_{i1}^{rr} x_1^r + \alpha_{i2}^{rr} x_2^r + \alpha_{i3}^{rr} x_3^r + \alpha_{i1}^{rs} x_1^s + \alpha_{i2}^{rs} x_2^s + f_i^r \quad \forall i = 1, 2, 3. \quad (1.24)$$

Si può trovare una formulazione analoga considerando l'economia della regione  $s$ .

Ora, andando a definire le matrici contenenti tutti i coefficienti di produzione  $\mathbf{A}^{rr}$ ,  $\mathbf{A}^{rs}$ ,  $\mathbf{A}^{sr}$  e  $\mathbf{A}^{ss}$  dalla definizione data in precedenza si ottiene che

$$\mathbf{A}^{rr} = \mathbf{Z}^{rr}(\hat{\mathbf{x}}^r)^{-1}; \quad \mathbf{A}^{rs} = \mathbf{Z}^{rs}(\hat{\mathbf{x}}^s)^{-1}; \quad \mathbf{A}^{sr} = \mathbf{Z}^{sr}(\hat{\mathbf{x}}^r)^{-1}; \quad \mathbf{A}^{ss} = \mathbf{Z}^{ss}(\hat{\mathbf{x}}^s)^{-1}.$$

Così facendo il sistema (1.24) può essere scritto in forma compatta sia per  $r$  che per  $s$  come

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{rr})\mathbf{x}^r - \mathbf{A}^{rs}\mathbf{x}^s &= \mathbf{f}^r \\ -\mathbf{A}^{sr}\mathbf{x}^r + (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{ss})\mathbf{x}^s &= \mathbf{f}^s. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Per ultimo, definendo gli elementi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{rr} & \mathbf{A}^{rs} \\ \mathbf{A}^{sr} & \mathbf{A}^{ss} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^r \\ \mathbf{x}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^r \\ \mathbf{f}^s \end{bmatrix},$$

il sistema (1.25) può essere espresso in forma matriciale come

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{f}. \quad (1.26)$$

Per poter avere una configurazione di questo genere ben definita è necessario richiedere che sia i coefficienti che rappresentano i rapporti intraregionali sia quelli interregionali siano costanti nel tempo o al più che varino poco.

Per concludere la derivazione del modello multiregionale è possibile dare la soluzione del sistema (1.26), ovvero la produzione necessaria al fine di soddisfare le domande provenienti dalle industrie e le domande finali, che risulta essere

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{f}. \quad (1.27)$$

Questa derivazione è stata fatta considerando due regioni e soli pochi settori per poter avere dei calcoli facilmente comprensibili e maneggiabili e per mostrare che la successione di passi necessari a ricavare la soluzione è analoga a quella seguita nel caso nazionale. Ora, per una economia più strutturata i dati necessari ed i conteggi sono uguali ai precedenti, l'unico inconveniente è la dimensione del sistema che aumenta notevolmente. Perciò si comprende che questo genere di modelli non risulta di semplice e veloce uso a causa della moltitudine di dati, tuttavia seguendo la linea si percepisce l'impatto che ogni settore considerato ha sul sistema economico ed i traffici tra le regioni offerenti e le riceventi vengono fatti espliciti, anche se la richiesta che i coefficienti siano costanti nel tempo risulta molto forte.

**Osservazione 2.** Per ovviare alla gestione una quantità molto grande di dati precisi descrittivi la situazione multiregionale si può percorrere la strada presentata per il modello ad una regione e cercare una stima dei valori.

Assumendo nota la quantità complessiva che l'industria *i-esima* appartenente alla regione *r* esporta nelle altre aree considerate nel sistema, è possibile calcolare la porzione di materia che ogni altra zona riceva da *i*. Inoltre, ipotizzando di conoscere i coefficienti tecnici di ogni regione, si può stimare la matrice contenente i dati intraregionali multipli-



cando la matrice di proporzione con quella dei coefficienti. Così si è ottenuta una stima dei coefficienti descrittivi la situazione multiregionale e si può procedere nel ricavare la soluzione.

### 1.1.2 Modello Input-Output per settori che producono più merci

Una ulteriore estensione del modello attuata da Leontief fu quella del 1960 al fine di analizzare una economia più reale che quella del modello iniziale. Nel volume di Miller e Blair è presente un approfondimento a riguardo reperibile in Miller and Blair [2009, cap. 5]

Si considera ora un sistema industriale composto da  $n$  settori che producono più di una merce, sebbene si possa definire il prodotto principale (di maggiore realizzazione) ed i prodotti secondari.

Sia  $j = 1, \dots, n$  l'indice che numera i settori industriali e sia  $i = 1, \dots, m$  quello che conta i prodotti.

**Osservazione 3.** Se gli articoli prodotti fossero tutti primari, allora ogni settore fornirebbe un solo elemento,  $n = m$ , e si tornerebbe al modello precedentemente analizzato.

Sia  $\mathbf{x}$  il vettore contenente la produzione di ogni settore  $j = 1, \dots, n$  e sia  $\hat{\mathbf{x}}$  la matrice diagonale definita dal vettore  $\mathbf{x}$ .

Si definisce la matrice  $\mathbf{U}$  le cui componenti  $u_{ij}$  descrivono gli acquisti fatti dal  $j$ -esimo settore del prodotto  $i$ , ossia essa quantifica in termini monetari i prodotti di tipo  $i$  che vengono impiegati da ogni reparto nel ciclo produttivo. E' possibile calcolare i coefficienti

$$\gamma_{ij} = \frac{u_{ij}}{x_j}$$

o in forma matriciale

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{U}\hat{\mathbf{x}}^{-1}. \tag{1.28}$$

Ogni colonna di  $\mathbf{\Gamma}$  riporta il valore totale delle materie in fornitura per ogni prodotto al fine di ottenere 1\$ dalla produzione del settore considerato.

Sia  $\mathbf{V}$  la matrice di produzione le cui componenti  $v_{ji}$  quantificano in termini monetari la produzione dell'articolo  $i$  da parte di  $j$ .

Si mostra ora come è possibile determinare sia il vettore  $\mathbf{x}$  produzione totale di ogni settore industriale che il vettore  $\mathbf{q}$  contenete la produzione totale di ogni bene in funzione delle componenti della matrice  $\mathbf{V}$ . Infatti la fabbricazione complessiva di ciascun settore produttivo è trovata sommando per righe le componenti di  $\mathbf{V}$

$$\begin{aligned}x_j &= v_{j1} + \cdots + v_{jm}, \\ \mathbf{x} &= \mathbf{V}\mathbf{i}\end{aligned}\tag{1.29}$$

e quella degli articoli è ottenuta sommando per colonna i valori dei settori che generano tale prodotto

$$\begin{aligned}q_i &= v_{1i} + \cdots + v_{ni}, \\ \mathbf{q} &= (\mathbf{V}')\mathbf{i}.\end{aligned}\tag{1.30}$$

Ricordando la matrice  $\mathbf{U}$  precedentemente definita, il vettore  $\mathbf{q}$  può essere anche definito come

$$\begin{aligned}q_i &= u_{i1} + \cdots + u_{in} + f_i, \\ \mathbf{q} &= \mathbf{U}\mathbf{i} + \mathbf{f}\end{aligned}\tag{1.31}$$

dove  $\mathbf{f}$  è il vettore che rappresenta la domanda finale per i prodotti.

Ora, ricavando la definizione di  $\mathbf{U}$  da (1.28) ed inserendola in (1.31), si ha

$$\mathbf{q} = \mathbf{\Gamma}\hat{\mathbf{x}}\mathbf{i} + \mathbf{f} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{x} + \mathbf{f}.\tag{1.32}$$

Questa formulazione sembra richiamare quella dei modelli precedenti, tuttavia a causa della presenza sia della produzione industriale totale  $\mathbf{x}$  sia di quella descritta da  $\mathbf{q}$  non è possibile procedere nella derivazione della soluzione. A tal fine è necessario precisare quale dei due vettori si voglia specificare: nel caso si voglia determinare la produzione

industriale si deve definire la produzione dell'articolo come una funzione della produzione industriale e poi proseguire o viceversa.

Questo può essere ottenuto in due diversi modi tramite l'uso della matrice  $\mathbf{V}$  e la definizione di coefficienti.

Come fino ad ora sostenuto, si può osservare che la produzione di ogni articolo è suddivisa tra i diversi settori e si può determinare la frazione che ogni comparto emette come  $d_{ji} = \frac{v_{ji}}{q_i}$ . I coefficienti possono essere raggruppati tutti in una sola matrice tramite la matrice diagonale definita da  $\mathbf{q}$  ( $\hat{\mathbf{q}}$ ) come

$$\mathbf{D} = \mathbf{V}\hat{\mathbf{q}}^{-1}. \quad (1.33)$$

Si noti che le colonne di  $\mathbf{D}$  rappresentano la percentuale che ogni settore emette del bene *i-esimo*, dunque la somma delle componenti di ciascuna colonna è 1.

Analogamente, è possibile ottenere la composizione della produzione di ogni settore industriale tramite il coefficiente  $c_{ji} = \frac{v_{ji}}{x_j}$  che esprime la porzione di produzione finale dell'industria *j* di tipo *i*. Anche questi valori possono essere mostrati in notazione matriciale come

$$\mathbf{C} = \mathbf{V}'\hat{\mathbf{x}}^{-1} \quad (1.34)$$

ed in tal caso la somma degli elementi di ciascuna riga è 1.

Tramite queste matrici di coefficienti si possono analizzare due diverse metodologie di risoluzione.

Si consideri la matrice  $\mathbf{D}$ .

Dalla definizione di  $\mathbf{D}$  e ricordando (1.29) e (1.30) si ottiene

$$\mathbf{D}\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{V}$$

$$\mathbf{D}\hat{\mathbf{q}}\mathbf{i} = \mathbf{V}\mathbf{i}$$

$$\mathbf{D}\mathbf{q} = \mathbf{x}$$

da cui è possibile ottenere il valore di  $\mathbf{q}$  come

$$\mathbf{q} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{x} \quad (1.35)$$

nel caso in cui la matrice  $\mathbf{D}$  sia non singolare.

Così si ricava il sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{x} - \mathbf{D}\mathbf{q} &= 0 \\ -\mathbf{\Gamma}\mathbf{x} + \mathbf{q} &= \mathbf{f} \end{aligned}$$

che in forma matriciale risulta essere

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{D} \\ -\mathbf{\Gamma} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}.$$

Inoltre dalla scrittura di  $\mathbf{x}$  è possibile trovare la soluzione di  $\mathbf{q}$  (1.32)

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{\Gamma}(\mathbf{D}\mathbf{q}) + \mathbf{f} = (\mathbf{\Gamma}\mathbf{D})\mathbf{q} + \mathbf{f} \\ \mathbf{q} &= (\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{D})^{-1}\mathbf{f} \end{aligned} \quad (1.36)$$

da cui deriva anche

$$\mathbf{x} = [\mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{D})^{-1}]\mathbf{f}. \quad (1.37)$$

**Osservazione 4.** La matrice  $\mathbf{\Gamma}\mathbf{D}$  presente in (1.36) ed in (1.37) rappresenta la merce necessaria per la produzione di un articolo al fine di ottenere 1\$ dalla vendita finale di esso. Le componenti presenti nelle righe di questa matrice risultano essere definite come una combinazione convessa degli elementi presenti nelle righe di  $\mathbf{\Gamma}$  pesati secondo i valori presenti nelle colonne della matrice  $\mathbf{D}$ .

Si assume che tutti i beni generati da un settore industriale abbiano la stessa struttura per i dati che riceve in ingresso, dunque  $\mathbf{\Gamma}\mathbf{D}$  è detta *Matrice Tecnologica dell'Industria*.

In alternativa si consideri la matrice  $\mathbf{C}$ . Dalla sua definizione e sempre ricordando

(1.29) e (1.30) si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{V}' \\ \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}\mathbf{i} &= \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{V}'\mathbf{i}. \end{aligned}$$

Noto che  $\mathbf{q} = \mathbf{V}'\mathbf{i}$  si giunge a

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{q}$$

da cui

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{q} \tag{1.38}$$

se la matrice  $\mathbf{C}$  risulta non singolare.

Come in precedenza è possibile ricavare un sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{q} &= 0 \\ -\mathbf{\Gamma}\mathbf{x} + \mathbf{q} &= \mathbf{f} \end{aligned}$$

che in forma matriciale diventa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{\Gamma} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}.$$

Ancora si può cercare una soluzione di (1.32), nel caso in cui  $\mathbf{x}$  esista, che risulta essere

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{\Gamma}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{q}) + \mathbf{f} = (\mathbf{\Gamma}\mathbf{C}^{-1})\mathbf{q} + \mathbf{f} \\ \mathbf{q} &= (\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{C}^{-1})^{-1}\mathbf{f} \end{aligned} \tag{1.39}$$

da cui segue che

$$\mathbf{x} = [\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{C}^{-1})^{-1}]\mathbf{f}. \tag{1.40}$$

La matrice  $\mathbf{\Gamma}\mathbf{C}^{-1}$  risulta essere la matrice tecnologica in riferimento ai prodotti.

### 1.1.3 Analisi strutturale del modello Input-Output

Avendo già definito il modello *Input-Output* ed avendo compreso come poterlo utilizzare applicato ad una economia, ora è possibile investigare come esso sia strumento per una analisi approfondita della questione riguardante più di un insieme di dati riferiti agli stessi soggetti. Infatti, stabiliti i valori descrittivi i reparti produttivi o le categorie prese in esame su istanti temporali distinti, si possono studiare dettagliatamente le modifiche attuate per affrontare o sostenere il cambiamento. Un'analisi di questo genere proviene dal testo Miller and Blair [2009, cap. 13]

Nel caso più generale si considerano le variazioni nella produzione totale del sistema economico definita in funzione del tempo  $\mathbf{x}^t$ . Ancora, per semplicità, si prendono in esame due soli istanti temporali  $t = 0, 1$ .

Ricordando la soluzione del sistema (1.13) nel caso uniperiodale, essa si può adattare al caso multiperiodale come  $\mathbf{x}^t = \mathbf{L}^t \mathbf{f}^t$  in cui  $\mathbf{L}^t = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^t)^{-1}$  e  $\mathbf{f}^t$  rappresenta la domanda finale che giunge al sistema nell'istante  $t$ . Nel caso specificato, dalla relazione si ottiene

$$\mathbf{x}^0 = \mathbf{L}^0 \mathbf{f}^0 \quad , \quad \mathbf{x}^1 = \mathbf{L}^1 \mathbf{f}^1. \quad (1.41)$$

La trasformazione tra i due momenti viene valutata come

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0 = \mathbf{L}^1 \mathbf{f}^1 - \mathbf{L}^0 \mathbf{f}^0. \quad (1.42)$$

Ora, continuando a valutare le relazioni in termini monetari, per un controllo dettagliato si può scomporre  $\Delta \mathbf{x}$  evidenziando i cambiamenti in  $\mathbf{L}$  oppure in  $\mathbf{f}$ . Come prima cosa siano  $\Delta \mathbf{L} = \mathbf{L}^1 - \mathbf{L}^0$  e  $\Delta \mathbf{f} = \mathbf{f}^1 - \mathbf{f}^0$  le variazioni rispettivamente in  $\mathbf{L}$  ed in  $\mathbf{f}$ .

Si assuma di conoscere  $\mathbf{L}$  all'istante iniziale e  $\mathbf{f}$  all'istante terminale; dalle definizioni precedenti  $\mathbf{L}^1 = \Delta \mathbf{L} + \mathbf{L}^0$  e  $\mathbf{f}^0 = \mathbf{f}^1 - \Delta \mathbf{f}$ . Così (1.42) diventa

$$\Delta \mathbf{x} = (\Delta \mathbf{L} + \mathbf{L}^0) \mathbf{f}^1 - \mathbf{L}^0 (\mathbf{f}^1 - \Delta \mathbf{f}) = (\Delta \mathbf{L}) \mathbf{f}^1 + \mathbf{L}^0 (\Delta \mathbf{f}). \quad (1.43)$$

Dunque la variazione nella produzione finale è attribuita in parte alla variazione della matrice tecnologica ed in parte al cambiamento nella domanda finale. Il cambiamento

di  $\mathbf{L}$  è pesato da  $f$  valutata in  $t = 1$  e la variazione in  $f$  è pesata da  $\mathbf{L}$  per  $t = 0$ .

Per comprendere il significato di questi termini, si consideri la prima componente:  $(\Delta\mathbf{L})\mathbf{f}^1 = (\mathbf{L}^1 - \mathbf{L}^0)\mathbf{f}^1 = \mathbf{L}^1\mathbf{f}^1 - \mathbf{L}^0\mathbf{f}^1$ . Il primo membro quantifica la produzione necessaria per soddisfare la domanda finale in  $t = 1$  con una industria descritta dalla matrice tecnologica in  $t = 1$  mentre la seconda determina la fabbricazione necessaria per soddisfare la richiesta in  $t = 1$  con la matrice tecnologica che è disponibile all'istante iniziale.

Una valutazione simile può essere fatta considerando  $\mathbf{L}^1$  ed  $\mathbf{f}^0$  eseguendo lo stesso identico procedimento

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{L}^1(\Delta\mathbf{f} + \mathbf{f}^0) - (\mathbf{L}^1 - \Delta\mathbf{L})\mathbf{f}^0 = (\Delta\mathbf{L})\mathbf{f}^0 + \mathbf{L}^1(\Delta\mathbf{f}). \quad (1.44)$$

L'unica variazione rispetto al precedente sono i pesi moltiplicativi e di conseguenza varia l'interpretazione produttiva.

Sommando (1.43) e (1.44) si ha

$$\begin{aligned} 2\Delta\mathbf{x} &= (\Delta\mathbf{L})\mathbf{f}^1 + \mathbf{L}^0(\Delta\mathbf{f}) + (\Delta\mathbf{L})\mathbf{f}^0 + \mathbf{L}^1(\Delta\mathbf{f}) \\ \Delta\mathbf{x} &= \frac{1}{2}(\Delta\mathbf{L})(\mathbf{f}^0 + \mathbf{f}^1) + \frac{1}{2}(\mathbf{L}^0 + \mathbf{L}^1)(\Delta\mathbf{f}) \end{aligned} \quad (1.45)$$

da cui si nota che la variazione nella produzione totale è data da un cambiamento nella matrice tecnologica (prima componente) e da un cambiamento nella domanda finale (seconda componente).

In questa dimostrazione sono stati considerati due soli istanti temporali, ma è semplice pensare ad una estensione con una moltitudine di stati. Siccome ad ogni passo si considera l'entità della variazione del sistema, si presuppone di poter confrontare due diversi stati dunque avere un sistema con più momenti non è maggiormente complesso, andando ogni volta ad identificare la coppia da valutare. Per comprendere ancora meglio, nei calcoli precedenti si sarebbero potuti usare due istanti temporali generici  $t$  e  $\tilde{t}$  e procedere con la derivazione.

E' inoltre possibile valutare cambiamenti in un arco temporale più specifici che quelli nella produzione totale. Infatti questi ultimi giungono in risposta ai movimenti: per

esempio, se si presenta una variazione nella domanda finale cambia la produzione industriale poichè *Leontief* è un modello basato sul bisogno della clientela sia presente all'interno del sistema industriale che esterna ad esso, ossia la domanda finale. Allo stesso modo se c'è variazione nel sistema produttivo (variazione della matrice) la produzione ne risente.

Per i dettagli specifici a livello matematico di questa derivazione si faccia riferimento all'Appendice A.

In primo luogo si consideri un cambiamento nella domanda finale; questa può presentare variazioni in un arco temporale dovute all'ammontare di tutte le spese, oppure dovute alla distribuzione delle spese tra le categorie (nuclei familiari, governi, esportazioni, ecc.) od ancora causate dalla porzione di spese totali che una categoria assegna ad un particolare settore industriale (prodotto).

Sia dato un modello *Input-Output* con  $n$  settori e  $p$  categorie di domanda finale. La distribuzione delle spese viene descritta tramite la matrice  $\mathbf{F}^t = [\mathbf{f}_1^t, \dots, \mathbf{f}_p^t]$  di dimensione  $n \times p$  nella quale ogni componente è un vettore che descrive come la  $k$ -esima categoria vede suddivise le spese tra i settori nell'arco temporale.

Sia  $\mathbf{F}^t \mathbf{i} = \mathbf{f}^t$ . Sia inoltre  $\mathbf{i}' \mathbf{F}^t \mathbf{i} = \mathbf{i}' \mathbf{f}^t = f^t$  l'ammontare totale delle spese che giungono ad ogni settore nel periodo temporale e sia  $\mathbf{y}^t = (\mathbf{i}' \mathbf{F}^t)'$  il vettore di componenti descrittive le spese totali pagate da ogni categoria ( $\forall k = 1, \dots, p$ ).

Si può definire il vettore che specifica la distribuzione di  $f^t$  nelle categorie come

$$\mathbf{h}^t = \left( \frac{1}{f^t} \right) \mathbf{y}^t = \begin{bmatrix} y_1^t / f^t \\ \vdots \\ y_p^t / f^t \end{bmatrix}$$

in cui ogni componente rappresenta la porzione delle spese di domanda finale originate nella categoria  $k$ -esima nel periodo  $t$ .

Sia infine

$$\mathbf{\Psi}^t = (\mathbf{F}^t)(\hat{\mathbf{y}}^t)^{-1}$$



la matrice ( $n \times p$ ) che indica la porzione di spese totali della categoria  $k$  fatte per un prodotto del settore  $i$ -esimo.

Si ottiene

$$\mathbf{f}^t = f^t \Psi^t \mathbf{h}^t = \Psi^t \mathbf{y}^t$$

da cui

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{f}^1 - \mathbf{f}^0 = f^1 \Psi^1 \mathbf{h}^1 - f^0 \Psi^0 \mathbf{h}^0 = \Psi^1 \mathbf{y}^1 - \Psi^0 \mathbf{y}^0. \quad (1.46)$$

Si procede decomponendo la variazione  $\Delta \mathbf{f}$  come mostrato in (A.5) ed in (A.6)

$$\Delta \mathbf{f} = (\Delta f) \Psi^0 \mathbf{h}^0 + f^1 (\Delta \Psi) \mathbf{h}^0 + f^1 \Psi^1 (\Delta \mathbf{h})$$

$$\Delta \mathbf{f} = (\Delta f) \Psi^1 \mathbf{h}^1 + f^0 (\Delta \Psi) \mathbf{h}^1 + f^0 \Psi^0 (\Delta \mathbf{h})$$

e si ricava l'espressione finale come

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{f} = (1/2)(\Delta f)(\Psi^0 \mathbf{h}^0 + \Psi^1 \mathbf{h}^1) + (1/2)[f^0 (\Delta \Psi) \mathbf{h}^1 + f^1 (\Delta \Psi) \mathbf{h}^0] + \\ (1/2)(f^0 \Psi^0 + f^1 \Psi^1)(\Delta \mathbf{h}). \end{aligned} \quad (1.47)$$

E' legittimo pensare che si possano presentare anche cambiamenti nelle quantità di materie prime che una industria riceva in ingresso per la produzione dei propri articoli; in questo caso la variazione è visibile nella matrice dei *Coefficienti Tecnici*  $\mathbf{A}$  di cui ogni componente assume i valori di uno specifico reparto.

Assumendo sempre un sistema ad  $n$  aree

$$\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}^0 + \Delta \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}^0 + \Delta a_{11} & \dots & a_{1n}^0 + \Delta a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^0 + \Delta a_{n1} & \dots & a_{nn}^0 + \Delta a_{nn} \end{bmatrix}$$

e considerando la variazione nella  $j$ -esima componente di  $\mathbf{A}$  come

$$\Delta \mathbf{A}^{(j)} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \Delta a_{1j} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \Delta a_{nj} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

si ottiene che

$$\Delta \mathbf{A} = \Delta \mathbf{A}^{(1)} + \Delta \mathbf{A}^{(2)} + \dots + \Delta \mathbf{A}^{(j)} + \dots + \Delta \mathbf{A}^{(n)} = \sum_{j=1}^n \Delta \mathbf{A}^{(j)}. \quad (1.48)$$

Come è facile pensare, i cambiamenti nella matrice  $\mathbf{A}$  si ripercuotono sulla matrice *Leontief* per sua definizione ( $\mathbf{L} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ ). Dunque è anche lecito osservare che la stessa matrice  $\mathbf{L}$  è dipendente dal tempo ( $\mathbf{L}^t = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^t)^{-1}$ ) e, considerando due istanti temporali  $t=0, 1$ , si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^0 &= (\mathbf{I} - \mathbf{A}^0)^{-1} \\ \mathbf{L}^1 &= (\mathbf{I} - \mathbf{A}^1)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Dalla (1.49) si ricava che

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}^0)\mathbf{L}^0 = \mathbf{I} = \mathbf{L}^0 - \mathbf{A}^0\mathbf{L}^0 \quad (1.50)$$

$$\mathbf{L}^1(\mathbf{I} - \mathbf{A}^1) = \mathbf{I} = \mathbf{L}^1 - \mathbf{L}^1\mathbf{A}^1. \quad (1.51)$$

Riorganizzando la prima espressione e moltiplicando per  $\mathbf{L}^1$  a sinistra risulta

$$\mathbf{L}^0 - \mathbf{I} = \mathbf{A}^0\mathbf{L}^0 \quad (1.52)$$

$$\mathbf{L}^1\mathbf{L}^0 - \mathbf{L}^1 = \mathbf{L}^1\mathbf{A}^0\mathbf{L}^0$$

e lavorando sulla seconda e moltiplicando per  $\mathbf{L}^0$  a destra si ha

$$\mathbf{L}^1 - \mathbf{I} = \mathbf{L}^1\mathbf{A}^1 \quad (1.53)$$

$$\mathbf{L}^1\mathbf{L}^0 - \mathbf{L}^0 = \mathbf{L}^1\mathbf{A}^1\mathbf{L}^0$$

cosicchè si può studiare la variazione nella matrice  $\mathbf{L}$  come

$$\Delta\mathbf{L} = \mathbf{L}^1 - \mathbf{L}^0 = \mathbf{L}^1\mathbf{A}^1\mathbf{L}^0 - \mathbf{L}^1\mathbf{A}^0\mathbf{L}^0 = \mathbf{L}^1(\Delta\mathbf{A})\mathbf{L}^0.$$

Dunque viene palesato che i cambiamenti nella matrice *Leontief inversa* sono in stretta connessione con cambiamenti nella matrice dei coefficienti tecnologici  $\mathbf{A}$ .

**Osservazione 5.** Le scelte attuate di moltiplicare per  $\mathbf{L}^1$  a sinistra in (1.52) e per  $\mathbf{L}^0$  a destra in (1.53) sono state del tutto arbitrarie. Si potrebbe scegliere una diversa trasformazione delle matrici ed il risultato sarebbe allo stesso modo del tutto valido. Si moltiplichino ora (1.52) per  $\mathbf{L}^1$  a destra e (1.53) per  $\mathbf{L}^0$  a sinistra. Si ottiene dunque

$$\Delta\mathbf{L} = \mathbf{L}^1 - \mathbf{L}^0 = \mathbf{L}^0\mathbf{A}^1\mathbf{L}^1 - \mathbf{L}^0\mathbf{A}^0\mathbf{L}^1 = \mathbf{L}^0(\Delta\mathbf{A})\mathbf{L}^1$$

e la connessione rimane valida.

### 1.1.4 Modello Input-Output dinamico

Ancora nel testo di Miller and Blair [2009, cap. 13] nell'ottica di definire un modello che descriva sempre al meglio la situazione realmente osservabile tra i settori industriali, viene proposta una breve illustrazione di come vengano trattati tutti i prodotti e servizi immagazzinati da ogni sezione. Infatti ci sono alcune materie prime, macchinari o servizi che servono per la fabbricazione del prodotto, ma impiegati in uno stadio avanzato del processo, non in quello iniziale, quindi stoccati.

L'importanza che assumono questi materiali all'interno del processo può essere compresa in un articolo di Inoue and Todo [2020] che tratta degli effetti della Pandemia Covid-19 e del relativo lockdown attuato a Tokyo. Infatti gli autori danno alla quantità di materia stoccata un ruolo centrale nel modello di produzione: da un lato essa permette che la produzione prosegua anche in momenti nei quali si presenta un malfunzionamento nella catena produttiva, dall'altro è una entità da tenere sotto controllo affinché venga sempre mantenuta ad un livello fissato per permetterne l'uso.

Il valore di questo insieme è detto *Capitale Stoccato* ed ogni elemento  $k_{ij}$  è ottenuto

misurando il valore della produzione finale del settore  $i$  presente nell'inventario del  $j$ -esimo settore. E' possibile definire il *Coefficiente Capitale* come il rapporto tra  $k_{ij}$  e la produzione finale del settore  $j$  su un certo periodo

$$\theta_{ij} = \frac{k_{ij}}{x_j}, \quad (1.54)$$

dove  $\theta_{ij}$  descrive la quantità di prodotto proveniente dall' $i$ -esimo settore detenuto e necessario per la produzione di 1\$ di merce del settore  $j$ . Sia definita la matrice  $\Theta$  contenente questi elementi assunti costanti sul periodo temporale selezionato.

Sia  $x_j^t$  il valore della produzione complessiva emessa dal settore  $j$  all'istante  $t$  e dall'osservazione dell'annualità corrente si assuma noto il *Coefficiente Capitale*  $k_{ij}$  che descrive il rapporto tra i settori  $j$  ed  $i$ . Prevedendo l'ammontare della produzione totale di  $j$  all'istante successivo  $t + 1$  è possibile valutare la quantità di merce di tipo  $i$  necessaria per la produzione come  $\theta_{ij}(x_j^{t+1} - x_j^t)$ . Ipotizzando di valutare una economia in crescita si ha che  $(x_j^{t+1} - x_j^t)$  è positiva e dunque si richiedono nuovi beni.

Ricordando la produzione totale del settore  $i$ -esimo come in (1.9), si possono eseguire alcune modifiche alla formulazione per poterla adattare al caso: è necessario inserire la dipendenza temporale ed aggiungere il termine che descriva la quantità di materia presente nell'inventario. Dunque si ricava

$$x_i^t = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^t + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} (x_j^{t+1} - x_j^t) + f_i^t \quad (1.55)$$

che in forma matriciale risulta essere

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}^t - \Theta(\mathbf{x}^{t+1} - \mathbf{x}^t) &= \mathbf{f}^t \\ (\mathbf{I} - \mathbf{A} + \Theta)\mathbf{x}^t - \Theta\mathbf{x}^{t+1} &= \mathbf{f}^t. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Questa equazione può essere risolta usando un metodo in avanti ottenendo  $\mathbf{x}^t$  in funzione di  $\mathbf{x}^{t+1}$  od un metodo all'indietro con  $\mathbf{x}^{t+1}$  in funzione di  $\mathbf{x}^t$ .

Nel primo caso si ha che

$$\mathbf{x}^t = (\mathbf{I} - \mathbf{A} + \Theta)^{-1}(\Theta\mathbf{x}^{t+1} + \mathbf{f}^t)$$

che, definendo  $\mathbf{S} = (\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{\Theta})$ , si riduce a

$$\mathbf{x}^t = \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{\Theta}\mathbf{x}^{t+1} + \mathbf{f}^t).$$

Questa soluzione è ammissibile nel caso in cui  $\mathbf{S}^{-1}$  esista, ossia la matrice  $(\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{\Theta})$  sia non singolare.

Nel secondo caso

$$\mathbf{x}^{t+1} = \mathbf{\Theta}^{-1}(\mathbf{S}\mathbf{x}^t - \mathbf{f}^t)$$

che per l'esistenza richiede  $\mathbf{\Theta}$  non singolare.

Per risolvere il metodo in avanti o all'indietro è necessario definire le condizioni iniziali per  $t=0$  o quelle terminali in  $t=T$  che rappresentano le caratteristiche del sistema richieste nei due momenti.

## 1.2 Modello Input-Output proposto da Ghosh

Nel 1958 A. Ghosh pubblicò in *Economica* un articolo Ghosh [Feb., 1958] contenente un cambiamento del modello proposto da Leontief.

Dal punto di vista di Ghosh una economia è composta da più parti che interagiscono ed essa è al meglio descritta da un insieme di funzioni le quali in parte mostrano l'organizzazione della fornitura di materie di base ed in parte l'andamento della domanda finale che interessano le industrie.

Il modello proposto da Leontief analizza solo il lato domanda finale in quanto si assume che nel breve periodo non ci sia un cambiamento nella distribuzione dei materiali in ingresso o scarsità degli stessi, ossia è disponibile un volume di elementi tale che variazioni nella domanda finale non portano a conseguenti diversificazioni nella fornitura. In questo contesto la produzione totale del sistema industriale è il cardine del modello, la funzione di produzione descrive completamente l'andamento del mercato e vengono determinati i *Coefficienti Tecnici* necessari al raggiungimento dell'equilibrio.

Nella realtà è possibile considerare anche il caso in cui nel sistema economico sia presente una scarsità di materie prime e quindi è necessario procedere con il razionamento di esse durante la fornitura. Si possono realizzare diversi scenari per la distribuzione e tramite la funzione di allocazione si può ricavare quale combinazione applicare ad un determinato settore produttivo. Il punto fondamentale di un modello così fatto non è più la produzione totale emessa dal settore bensì quali sono i costi che esso deve sostenere per i dati in ingresso che riceve dalle altre sezioni.

Un modello complessivo che descrive a tutto tondo lo stato in cui si trova il sistema economico comprende sia il lato fornitura che il lato domanda ed esso fornisce la soluzione di equilibrio tra i due set di equazioni. E' possibile anche definire i coefficienti da cui essa è descritta: il primo risulta essere il *Coefficiente di Produzione*, proposto da Leontief, per cui la quantità di materie prime che il settore *j-esimo* riceve dall'*i-esimo* è proporzionale alla produzione totale dell'area *j-esima*  $z_{ij} = \alpha_{ij}x_j$ , mentre il secondo è il *Coefficiente di Allocazione* che mostra il rapporto tra l'entità della materia in input per il settore

$j$ -esimo proveniente dal settore  $i$ -esimo e la produzione totale dell' $i$ -esimo settore

$$\beta_{ij} = \frac{z_{ij}}{x_i}. \quad (1.57)$$

Dunque, per poter completare la formulazione del modello economico, lo stesso Ghosh costruì un modello in cui vengono considerate le funzioni di allocazione cosicchè insieme alla parte realizzata da Leontief la formulazione risulta essere completa.

Ghosh studiò una economia in cui ogni elemento viene emesso da un solo settore, con forza lavoro disponibile ed ipotizzò di avere tutte le risorse eccetto una scarse. Il programma di distribuzione realizzato per ogni settore produttivo ha l'obiettivo di raggiungere benessere nazionale e sociale, ossia si attua un programma di fornitura tale che le allocazioni ammissibili sono quelle che portano a maggiore benessere piuttosto che a maggiore efficienza produttiva. Ovviamente i dati in ingresso sono razionati a causa dell'insufficienza e cambiamenti nella quota assegnata modificano le proporzioni; perciò, in questo contesto, i coefficienti descrittivi di maggiore interesse sono quelli di allocazione.

Per una descrizione esaustiva di questo tema si fa riferimento al volume Miller and Blair [2009, cap. 12].

Sia  $\mathbf{B}$  la matrice dei *Coefficienti di Allocazione*; richiamando la matrice  $\mathbf{Z}$  definita in (1.3) e la matrice diagonale  $\hat{\mathbf{x}}$  contenente i valori della produzione di ogni settore, si ha che

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{Z}, \quad (1.58)$$

da cui si ottiene

$$\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{x}}\mathbf{B}. \quad (1.59)$$

**Osservazione 6.** Si vuole puntualizzare la differenza che c'è tra la definizione dei *Coefficienti di Allocazione* appena introdotti  $\beta_{ij}$  e la definizione dei *Coefficienti di Produzione*  $\alpha_{ij}$ .

$$\beta_{ij} = \frac{z_{ij}}{x_i} \quad , \quad \alpha_{ij} = \frac{z_{ij}}{x_j}.$$

Nel coefficiente  $\alpha_{ij}$  si specifica l'interesse alla produzione del settore che riceve i materiali in input, il  $j$ -esimo, grazie alla normalizzazione ottenuta dalla sua funzione di produzione totale  $x_j$ .

In opposto, nel coefficiente  $\beta_{ij}$  si pone l'attenzione sulla quantità di materia che il settore  $j$  riceve dall' $i$ -esimo, cioè i costi da sostenere. Questo interesse nella fornitura viene evidenziato dalla normalizzazione ottenuta tramite la funzione di produzione totale del settore  $i$ -esimo  $x_i$ .

Le considerazioni vengono fatte in termini monetari e definendo  $\mathbf{v}'$  il *Valore Aggiunto*. Come in (1.16), il sistema risulta essere della forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{i}'\mathbf{Z} + \mathbf{v}' \quad (1.60)$$

Nota l'espressione di  $\mathbf{Z}$  grazie a (1.59), il sistema diventa

$$\mathbf{x}' = \mathbf{i}'\hat{\mathbf{x}}\mathbf{B} + \mathbf{v}' = \mathbf{x}'\mathbf{B} + \mathbf{v}' \quad (1.61)$$

poichè, per definizione degli elementi,  $\mathbf{i}'\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}'$ . Dall'ultima formulazione è possibile ricavare l'espressione di  $\mathbf{x}'$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{v}'(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}. \quad (1.62)$$

Sia la *Matrice di Produzione Inversa* definita come

$$\mathbf{G} = (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} \quad (1.63)$$

le cui componenti misurano il valore totale della produzione del settore  $j$  per ogni unità di elemento in immissione proveniente dall' $i$ -esimo comparto.

La definizione del vettore descrittivo la produzione totale può essere espresso tramite la



matrice  $\mathbf{G}$  come

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}' \mathbf{v}. \quad (1.64)$$

Come nel modello di produzione, anche nel modello di fornitura i coefficienti descrittivi l'allocazione sono stabili, ossia vengono assunti fissi. Ciò significa che

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{G}' \Delta \mathbf{v}. \quad (1.65)$$

Inoltre, le componenti della matrice  $\mathbf{G}$  descrivono l'effetto che 1\$ di materie prime del settore *i-esimo* ha sulla produzione finale del *j-esimo*.

La somma degli elementi per righe descrive il risultato totale che la variazione di merce del reparto *i-esimo* ha su tutti gli altri comparti, mentre la somma per colonne rappresenta l'esito che un cambiamento nella fornitura proveniente dalle altre aree porta sulla produzione del settore *i-esimo*.

**Osservazione 7.** E' possibile evidenziare la relazione che esiste tra la matrice  $\mathbf{A}$  dei *Coefficienti di Produzione* e la matrice  $\mathbf{B}$  dei *Coefficienti di Allocazione*.

Esse sono definite come segue:  $\mathbf{A} = \mathbf{Z}\hat{\mathbf{x}}^{-1}$  e  $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{Z}$ . Sostituendo l'espressione di  $\mathbf{Z}$  in  $\mathbf{A}$  o  $\mathbf{B}$  si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \hat{\mathbf{x}}\mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}^{-1} \\ \mathbf{B} &= \hat{\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Questa relazione mostra che le matrici  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  sono simili ( $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ ).

Considerando  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$  si trae

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{I} - \hat{\mathbf{x}}\mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}^{-1},$$

da cui

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{I} - \mathbf{B})\hat{\mathbf{x}}^{-1} \quad (1.67)$$

e ciò mostra che  $(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \sim (\mathbf{I} - \mathbf{B})$ . Da (1.67) segue anche

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\hat{\mathbf{x}}^{-1}$$

o, richiamando la *Matrice di Leontief inversa* e la *Matrice di Produzione inversa*,

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \hat{\mathbf{x}}\mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}^{-1} \\ \mathbf{G} &= \hat{\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{L}\hat{\mathbf{x}}. \end{aligned} \tag{1.68}$$

Perciò si ottiene anche che  $\mathbf{L} \sim \mathbf{G}$ .

Da questa nota si evince come ogni valore di  $\mathbf{A}$  possa essere ottenuto dalle componenti di  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{x}$  ed un analogo per  $\mathbf{B}$ .

Nell'articolo Ghosh si può osservare come il modello di fornitura possa essere utilizzato per valutare le spese che ogni area deve sostenere per la produzione.

Sia  $E_i$  la spesa totale esterna affrontata dal settore  $i$  –esimo, essa può essere vista come la somma dei costi dovuti alle altre aree

$$E_i = \sum_{j=1}^n e_{ij} \quad \forall j \neq i. \tag{1.69}$$

Le spese  $e_{ij}$  vengono definite come funzioni del tipo

$$e_{ij} = \beta_{ij}E_j$$

per cui (1.69) diventa

$$E_i = \sum_{j=1}^n \beta_{ij}E_j \quad \forall i, j = 1, \dots, n. \tag{1.70}$$

Per poter ottenere un sistema aperto, in analogia con il modello di Leontief, si assume che l' $n$  –esimo settore sia esterno al sistema e noto. In questo modo si ricava un sistema in  $n - 1$  incognite del tipo

$$E_i - e_{in} = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} E_j \quad \forall i, j = 1, \dots, n-1 \quad \forall i \neq j. \quad (1.71)$$

Assumendo che questa relazione valga  $\forall i$  si estrae la struttura matriciale riguardante il sistema aperto

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{E} = \mathbf{e} \quad (1.72)$$

che porta alla soluzione

$$\mathbf{E} = (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{e}. \quad (1.73)$$

Così si è ottenuta una stima dei costi da sostenere per ogni settore produttivo.

### 1.3 Modello Misto Esogeno Endogeno (MEEM)

Il modello di produzione *Input-Output* aperto introdotto da *Leontief* e precedentemente analizzato considera un sistema produttivo nel quale le *Domande Finali* sono variabili esogene, ossia esterne al sistema ed indipendenti, mentre le variabili *Produzione Finale* sono endogene, interne al sistema e dipendenti dalle *Domande Finali*. In queste ipotesi i cambiamenti nella domanda sono esterne al complesso produttivo mentre le ripercussioni sulla variazione nella fabbricazione sono interne.

Effettivamente in alcuni casi reali si osservano cambiamenti esogeni nella produzione e quindi può essere più adeguato un modello flessibile nel quale alcune variabili *Domanda Finale* sono esogene (con la corrispondente produzione endogena) ed alcune *Produzione Finale* sono esogene (e la corrispondente domanda endogena). Un esempio reale e recente di cambiamenti esogeni nella produzione è descritto da ciò che è accaduto durante il lockdown per fronteggiare l'epidemia COVID-19. In questa circostanza i settori produttivi sono stati rallentati per decisioni ed imposizioni dal governo, del tutto esterne al sistema produttivo e del tutto indipendenti dalla sua operatività. La capacità produttiva di molte aree è stata posta pari a zero non per mancanza di domanda finale o per carenza di materie prime, ma per necessità sociale.

Di modelli così fatti sono stati eseguiti diversi studi di molto precedenti all'esempio riportato ed un riferimento può essere quello presente nel volume Miller and Blair [2009, cap. 13]. Per condurre a questa analisi dunque è necessario determinare un modello adeguato distinguendo le componenti esogene da quelle endogene in due vettori ed osservare come le une si possano determinare in funzione delle altre.

Per comprendere la procedura si analizza un sistema contenente tre aree produttive e successivamente si passa al caso generale con  $n$  sezioni.

Siano 1,2,3 i settori considerati, siano  $x_1, x_2, x_3$  le rispettive produzioni finali e  $f_1, f_2, f_3$  le domande finali. Si assuma che  $f_1, f_2$  e  $x_3$  sono le variabili esogene.

Dal modello presentato in (1.10) e portando sul lato destro tutte le variabili esogene e sul lato sinistro quelle endogene si ottiene

$$\begin{aligned}
(1 - \alpha_{11})x_1 - \alpha_{12}x_2 &= f_1 + \alpha_{13}x_3 \\
-\alpha_{21}x_1 + (1 - \alpha_{22})x_2 &= f_2 + \alpha_{23}x_3 \\
-\alpha_{31}x_1 - \alpha_{32}x_2 - f_3 &= -(1 - \alpha_{33})x_3.
\end{aligned}$$

Ora si completa il sistema definito andando ad inserire in ogni equazione le variabili mancanti con coefficiente moltiplicativo nullo al fine di determinarne una rappresentazione matriciale

$$\begin{aligned}
(1 - \alpha_{11})x_1 - \alpha_{12}x_2 + 0f_3 &= f_1 + 0f_2 + \alpha_{13}x_3 \\
-\alpha_{21}x_1 + (1 - \alpha_{22})x_2 + 0f_3 &= 0f_1 + f_2 + \alpha_{23}x_3 \\
-\alpha_{31}x_1 - \alpha_{32}x_2 - f_3 &= 0f_1 + 0f_2 - (1 - \alpha_{33})x_3
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{bmatrix} (1 - \alpha_{11}) & -\alpha_{12} & 0 \\ -\alpha_{21} & (1 - \alpha_{22}) & 0 \\ -\alpha_{31} & -\alpha_{32} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + \alpha_{13}x_3 \\ f_2 + \alpha_{23}x_3 \\ -(1 - \alpha_{33})x_3 \end{bmatrix}. \quad (1.74)$$

La scrittura (1.74) si può raffinare ulteriormente al fine di evidenziare anche il vettore delle variabili esogene oltre a quello delle variabili endogene

$$\begin{bmatrix} (1 - \alpha_{11}) & -\alpha_{12} & 0 \\ -\alpha_{21} & (1 - \alpha_{22}) & 0 \\ -\alpha_{31} & -\alpha_{32} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha_{13} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & -(1 - \alpha_{33}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (1.75)$$

Ora, definendo le matrici  $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} (1 - \alpha_{11}) & -\alpha_{12} & 0 \\ -\alpha_{21} & (1 - \alpha_{22}) & 0 \\ -\alpha_{31} & -\alpha_{32} & -1 \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha_{13} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & -(1 - \alpha_{33}) \end{bmatrix}$  il sistema (1.75) può essere ridotto alla scrittura

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

con soluzione

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (1.76)$$

dove il vettore delle variabili endogene risulta in funzione di quello con le esogene.

La matrice  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$  contiene i coefficienti specifici delle industrie che mettono in relazione le quantità esogene con quelle determinate dal modello endogene.

**Osservazione 8.** E' possibile trovare una relazione tra la *Matrice Leontief*  $\mathbf{L}$  definita nelle pagine precedenti ( $\mathbf{L} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ ) e una sottomatrice contenuta in  $\mathbf{M}^{-1}$ .

Andando a definire la *Matrice Leontief* per un sistema economico contenente due soli settori produttivi essa risulta della forma

$$\mathbf{L}^{(2)} = \begin{bmatrix} (1 - \alpha_{11}) & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & (1 - \alpha_{22}) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} l_{11}^{(2)} & l_{12}^{(2)} \\ l_{21}^{(2)} & l_{22}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

La matrice  $\mathbf{M}^{-1}$  in questione è definita come

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} (1 - \alpha_{11}) & -\alpha_{12} & 0 \\ -\alpha_{21} & (1 - \alpha_{22}) & 0 \\ -\alpha_{31} & -\alpha_{32} & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} l_{11}^{(2)} & l_{12}^{(2)} & 0 \\ l_{21}^{(2)} & l_{22}^{(2)} & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nel caso generale in cui l'economia sia composta da  $n$  settori produttivi, si assuma che la produzione di  $k$  aree sia endogena ed attraverso una trasformazione si faccia in modo che queste risultino essere le prime  $k$  componenti dei vettori. Sia

$$\mathbf{x}^{\text{en}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

e sia dato il corrispondente vettore delle domande finali esogene

$$\mathbf{f}^{\text{ex}} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{bmatrix}.$$

Di conseguenza, la produzione delle  $n-k$  sezioni terminali è esogena e la corrispondente domanda endogena

$$\mathbf{x}^{\text{ex}} = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^{\text{en}} = \begin{bmatrix} f_{k+1} \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

Richiamando la matrice  $\mathbf{A}$  dei *Coefficienti Tecnici* e facendo la partizione attraverso la distinzione tra le incognite endogene e quelle esogene essa diventa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

con  $\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A}^{(k,k)}$  sottomatrice di  $\mathbf{A}$  con le prime  $k$  righe e  $k$  colonne,  $\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}^{(k, -(n-k))}$  sottomatrice di  $\mathbf{A}$  con le prime  $k$  righe e le ultime  $(n-k)$  colonne,  $\mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}^{(-(n-k), k)}$   $\mathbf{A}_{22} = \mathbf{A}^{(-(n-k), -(n-k))}$ . La generalizzazione del sistema (1.75) risulta

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(k)}) & 0 \\ -\mathbf{A}_{21} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\text{en}} \\ \mathbf{f}^{\text{en}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & -(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{\text{ex}} \\ \mathbf{x}^{\text{ex}} \end{bmatrix}. \quad (1.77)$$

Ponendo ancora una volta  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{N}$  le matrici moltiplicative i vettori di componenti esogene

ed endogene si ha

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\text{en}} \\ \mathbf{f}^{\text{en}} \end{bmatrix} = \mathbf{N} \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{\text{ex}} \\ \mathbf{x}^{\text{ex}} \end{bmatrix}$$

da cui

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\text{en}} \\ \mathbf{f}^{\text{en}} \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N} \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{\text{ex}} \\ \mathbf{x}^{\text{ex}} \end{bmatrix}. \quad (1.78)$$

**Osservazione 9.** E' possibile definire esplicitamente la forma della matrice  $\mathbf{M}^{-1}$  ricorrendo alla *Matrice Leontief*  $\mathbf{L}$ , come fatto nella precedente osservazione 8. In questo caso viene considerato un sistema produttivo a  $k$  settori, essendo  $k$  i settori produttivi endogeni, e la *Matrice Leontief*  $\mathbf{L}^k$  risulta essere di dimensione  $k \times k$ .

Inoltre, definendo esplicitamente la matrice moltiplicativa  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{N}$ , si osserva che

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\text{en}} \\ \mathbf{f}^{\text{en}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}^{(k)} & \mathbf{L}^{(k)} \mathbf{A}_{12} \\ -\mathbf{A}_{21} \mathbf{L}^{(k)} & (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22}) - \mathbf{A}_{21} \mathbf{L}^{(k)} \mathbf{A}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{\text{ex}} \\ \mathbf{x}^{\text{ex}} \end{bmatrix}. \quad (1.79)$$

E' bene evidenziare che un modello così fatto è ben definito, ma ha un costo computazionale molto elevato al fine di determinare tutte le componenti.

A questo punto, è del tutto lecito procedere in un'analisi del modello MEEM per studiare come, data una variazione temporale alle variabili esogene, essa si ripercuota in modifiche sulle variabili endogene. La linea da seguire è analoga a quella descritta in riferimento al modello *Leontief* nella sezione 1.1.3 e ancora si può osservare l'effetto di variazioni nei dati a livello di produzione finale, negli elementi specifici di domanda finale o nella matrice che regola il sistema.



## Capitolo 2

# Applicazione dei modelli Input-Output

I modelli *Input-Output* presentati nel capitolo precedente sono un efficace strumento per analizzare un sistema produttivo industriale. Infatti essi possono essere impiegati per diversi scopi come, per esempio, valutare il funzionamento della catena produttiva di un settore, o di un intero stato, andando ad evidenziare la quantità di materie prime necessarie a soddisfare la domanda. Oppure possono essere utilizzati per osservare l'andamento ed i cambiamenti del sistema in un intervallo di tempo selezionato o, ancora, per stimare la sua evoluzione futura. Inoltre, tramite essi, si può indagare sulla risposta del sistema economico a variazioni nello stesso. Gli shock possono essere sia fittizi, ossia imposti per studiare ed analizzare il successivo riadattamento del sistema, sia reali. In quest'ultimo caso impiegare il modello può essere di duplice vantaggio: da un lato si osserva la risposta del mercato alla variazione e, dall'altro, è realizzabile uno studio in riguardo ai risultati di provvedimenti presi per affrontare la situazione.

E' possibile rintracciare diversi documenti in cui vengono presentati studi riguardanti cambiamenti nei sistemi economici, dovuti ad eventi inaspettati, e le strategie di risoluzione attuabili. Un esempio è la valutazione proposta dal Congressional Budget Office [2006] riguardante gli effetti ed i possibili rimedi per contrastare l'influenza Aviaria che colpì gli Stati Uniti d'America nei primi anni 2000. In questa sede vengono analizzate le variazioni subite nel sistema industriale sia a livello di fornitura che a livello di domanda finale per prodotti e servizi. In aggiunta, si presenta una interessante considerazione sui realizzabili rimedi messi in campo dallo stato per arginare la pandemia e risollevare il sistema economico.

Dunque, i modelli *Input-Output* sono davvero di fondamentale importanza per lo studio dei sistemi economici degli stati. Quando si valuta la condizione in cui si trova un settore industriale e quali le dimensioni e gli effetti di modifiche sullo stesso è necessario avere a disposizione una grande mole di dati descrittivi la situazione. Essi devono rappresentare la variazione nella catena produttiva sia lato domanda sia lato offerta.

Nei prossimi paragrafi vengono mostrate alcune linee attuabili al fine di valutare queste quantità in caso in cui si presenti una epidemia, come per esempio quella da Aviaria dei primi anni 2000 o quella da COVID-19 iniziata nel 2020.

## 2.1 Variazione nella fornitura

La variazione nella fornitura delle materie prime e dei prodotti sia a livello industriale che a livello di domanda finale che si può verificare durante un periodo di epidemia dipende da vari fattori. Infatti, è necessario considerare sia il grado di importanza che viene dato all'industria tramite l'opportunità di proseguire il lavoro sia la quantità di manodopera disponibile a seguito dei provvedimenti attuati per distanziamento sociale.

### 2.1.1 Essenzialità dell'industria

Il grado di essenzialità di un'industria durante un periodo di crisi, come quello pandemico, descrive quanto lavoro sia ad essa permesso svolgere con limitazioni all'attività in atto. Nella pubblicazione di Fana et al. [2020] si può ritrovare una analisi riguardante le disposizioni impartite ai settori industriali degli stati europei Germania, Spagna ed Italia durante il periodo pandemico da COVID-19. In quel momento, i governi degli stati di interesse hanno formulato decreti legislativi per poter regolare l'attività economica e lavorativa di tutti i settori industriali e mansioni. Dunque, gli autori cercano di definire il grado di essenzialità di ogni specifica attività lavorativa andando a valutare quanto ognuna sia indispensabile per il paese, e dunque inarrestabile anche durante una situazione di grave crisi, o quanto essa possa essere momentaneamente sospesa per affrontare problemi, come quelli sanitari, più gravi ed imminenti.

Si assume che nell'analisi siano presenti  $N$  settori industriali. Ad ognuno di essi vie-

ne associato un indice di essenzialità  $e_i$  che prende valori compresi tra 0 ed 1 ( $0 \leq e_i \leq 1$ ). Questa quantità viene determinata dagli autori andando ad analizzare i decreti legislativi per ogni stato e per ciascun settore di interesse al fine di determinare il grado di attività permesso. Se un settore è pienamente operativo senza nessun vincolo, per esempio il settore medico, assume un grado di essenzialità pari ad 1, ossia esso è di primaria importanza e necessità e non può arrestare l'attività. Al contrario se un settore è totalmente chiuso esso al momento risulta essere non essenziale ed assume un indice di valore 0.

Tra i valori agli estremi ci sono tutti quegli indici relativi ai settori solo parzialmente attivi ed essi sono indicatori del grado di attività. In questa fascia sono principalmente contenuti i settori suddivisi in sotto settori, caratterizzati ognuno per il grado di essenzialità relativo. Ciò significa che alcune mansioni relative ad un settore industriale possono essere permesse, perchè di primaria importanza o perchè nella catena produttiva risultano essere fornitrici di industrie a loro volta essenziali, ed altre risultano essere sospese. In questo caso il settore non è totalmente attivo e perciò non può essere assegnato un indice pari ad 1, ma non è neanche totalmente inattivo. Dunque viene assegnato un indice rispetto al grado di attività permessa di valore compreso tra 1 e 0.

In appendice B si può trovare la tabella tratta da Fana et al. [2020] riassuntiva gli indici di tutti i settori relativi ai tre stati Germania, Spagna ed Italia e successivamente viene definito il grado di essenzialità globale, basato sui tre valori precedenti, come la media aritmetica delle tre componenti. Esso serve per poter osservare il livello di essenzialità attribuito ad ogni attività nella visione del sistema complessivo.

### **2.1.2 Indice di Lavoro da Remoto**

Lo shock nella fornitura durante una crisi pandemica è principalmente causato dalla scarsità di manodopera nelle industrie. Questa carenza è dovuta alla malattia che colpisce i lavoratori e dalle restrizioni di distanziamento sociale messe in atto dal governo al fine di limitare la diffusione del virus. Ecco dunque che è lecito distinguere le cause di mancanza dall'attività lavorativa tra morbidità, decesso e restrizioni governative.

Durante la pandemia da COVID-19 si può osservare che in realtà le restrizioni attuate

hanno sortito un effetto molto più incisivo nella diminuzione di forza lavoro rispetto a quello provocato dalla malattia stessa. Si può dimostrare questa osservazione ripercorrendo un esempio proposto in del Rio-Chanona et al. [2020] basato sui dati riguardanti lo stato italiano ad Aprile 2020. Per comprendere la scelta, si deve ricordare che lo stato italiano è stato uno dei primi ad essere colpito dalla pandemia sia a livello globale che a livello europeo, dunque tra i primi a dover affrontare la crisi.

La popolazione totale italiana nel 2018 è di 60.421.760 persone <sup>1</sup>. Ad Aprile 2020, il numero di persone infette accertato clinicamente ammonta ad un totale di 132.547 <sup>2</sup> casi. Dunque, assumendo in tale istante un picco di contagi e prendendo la curva descrittiva l'andamento simmetrica, il numero totale di casi di contagio al termine dello shock risulta essere raddoppiato, cioè di 265.094 persone, che è lo 0,44% della popolazione. Dato che il numero di casi totali si riferisce ai casi accertati della presenza della malattia, esso può non includere tutti i casi non verificati a livello medico od anche il numero delle persone asintomatiche che non si accorgono della presenza del virus. Per poter fare dunque una migliore stima del numero delle persone colpite, si assume che esso risulti essere 4 volte maggiore di quello accertato. In questo caso si ottiene che la percentuale delle persone colpite è 1,75% della popolazione totale. Tramite questo esempio è possibile osservare che nella realtà dei fatti le persone assenti dall'attività lavorativa perchè infettate risultano essere in numero inferiore rispetto a quelle assenti a causa delle restrizioni per distanziamento sociale attuate e quindi è lecito assumere che la principale causa di scarsità di forza lavoro sia data dalle misure preventive adottate dal governo. Essa è l'unica motivazione di mancanza assunta nel seguito.

Per mostrare come definire la variazione nella fornitura si segue la linea presentata in del Rio-Chanona et al. [2020], articolo che si riferisce espressamente al sistema economico degli Stati Uniti, ma che si può adattare a qualunque altro sistema con semplici variazioni presentate nel seguito.

La rete industriale viene descritta tramite una suddivisione in 4 set di nodi e 3 set di link bipartiti che connettono gli insiemi. Il primo set di nodi definito contiene i codici *NAICS* (North American Industry Classification System) a 6 cifre descrittivi la classificazione del

---

<sup>1</sup><https://data.worldbank.org/indicator/SP.POP.TOTL?locations=IT>

<sup>2</sup><https://coronavirus.jhu.edu/map.html>

sistema industriale nordamericano. Di seguito è presente il set di nodi che rappresenta le categorie di industrie aggregandole per macro aree di lavoro, definite attraverso i codici *NAICS* a 4 cifre; poi vengono inseriti i nodi in riferimento alle occupazioni per ogni area di lavoro ed infine tutte le attività di lavoro necessarie per far funzionare l'occupazione. I link definiti connettono questi insiemi di nodi; percorrendo la direzione analoga a quella tenuta per la definizione dei set di nodi, si definiscono per primi i link che uniscono i settori industriali (*NAICS* 6 cifre) con le macro aree industriali (*NAICS* 4 cifre) di appartenenza. Successivamente si collegano le macro aree industriali con le occupazioni che possono essere svolte all'interno delle stesse ed infine alle occupazioni vengono associate le attività lavorative che ognuna richiede. Si assume che i link siano bipartiti poichè la connessione deve essere ammissibile sia nel verso mostrato che nel verso opposto.

Ora si stima la quantità di lavoro per ogni industria che viene svolta da casa attraverso l'*Indice di Lavoro da Remoto* (ILR).

A questo scopo due assunzioni sono fondamentali. Innanzitutto si assume che in ogni occupazione le attività da svolgere contribuiscano equamente per ottenere i livelli produttivi; inoltre, definendo  $z\%$  la percentuale di lavoro che non può essere svolta da remoto, la quantità  $1-z\%$  risulta essere l'attività lavorativa svolta da casa che porta agli stessi livelli produttivi, come se fosse eseguita sul luogo di lavoro.

Sia dato un sistema contenente  $k$  industrie con classificazione tramite codice *NAICS* a 6 cifre. Sia definito il vettore  $\mathbf{e}$  che descrive l'essenzialità dell'industria:  $e_k = 1$  se la  $k$ -esima industria è definita essenziale,  $e_k = 0$  altrimenti.

Tramite la classificazione aggregata siano definiti  $N$  settori industriali tramite il codice *NAICS* a 4 cifre e sia  $\tilde{\mathbf{S}}$  la matrice di dimensioni  $N \times k$  che collega le industrie ai settori di appartenenza.

Siano poi date  $J$  occupazioni. La matrice che mette in relazione i settori industriali con le occupazioni è la matrice  $\mathbf{M}$  di dimensioni  $N \times J$ , la cui componente  $m_{ij}$  rappresenta il numero di persone presenti nell'occupazione  $j$  che lavorano presso l'industria  $i$ -esima. Per ultimo, siano presenti nel sistema economico considerato  $L$  attività lavorative. E' possibile osservare due aspetti di queste attività. In primis si definisce la matrice  $\mathbf{T}$

che mette in relazione le occupazioni e le attività lavorative: la componente  $T_{jl} = 1$  se l'attività  $l$ -esima è rilevante per l'occupazione  $j$ ,  $T_{jl} = 0$  altrimenti. In più si definisce il vettore  $\mathbf{r}$  contenente i dati relativi all'attività da remoto:  $r_l = 1$  se l'attività  $l$ -esima può essere svolta da casa,  $r_l = 0$  altrimenti.

Dunque è possibile ricavare l'*Indice di Lavoro da Remoto*.

Si definiscono le matrici normalizzate  $\tilde{\mathbf{T}}$  e  $\tilde{\mathbf{M}}$  di  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{M}$  rispettivamente come

$$\tilde{T}_{jl} = T_{jl} / \sum_{l=1}^L T_{jl} \qquad \tilde{M}_{ij} = M_{ij} / \sum_{j=1}^J M_{ij}.$$

L'indice a livello matriciale è dunque definito essere

$$\mathbf{ILR} = \tilde{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{r}$$

dove ogni componente  $i$ -esima  $ILLR_i$  descrive l'indice specifico dell' $i$ -esimo settore industriale. Se  $ILLR_i = 1$  significa che tutte le attività dell' $i$ -esimo settore possono essere svolte da remoto; se  $ILLR_i = 0$  allora dell' $i$ -esimo settore nessuna attività viene svolta fuori dall'ambiente di lavoro.

Si riporta di seguito un grafico tratto da del Rio-Chanona et al. [2020] che osserva la relazione tra il grado di essenzialità e l'indice di lavoro da remoto per ogni settore industriale.

E' interessante osservare come vari la densità di persone impiegate nelle mansioni e come cambi il grado di essenzialità e di possibilità di attività da remoto.

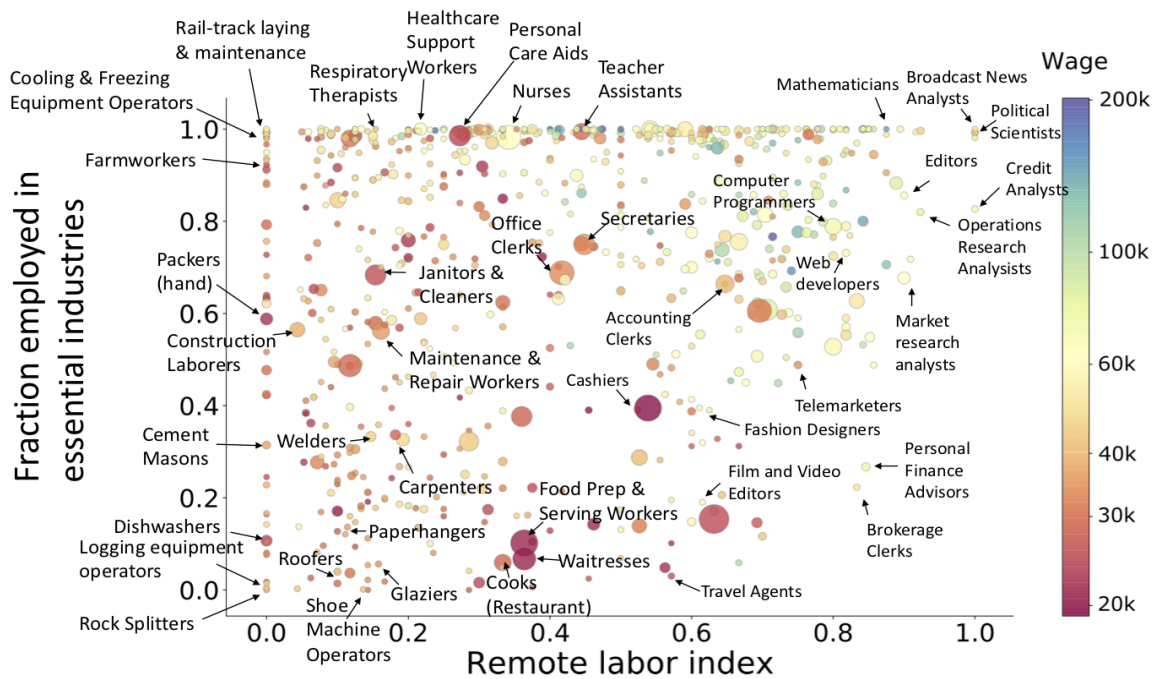


Figura 2.1: Frazione di Persone Impiegate nelle Industrie Essenziali e ILR.  
 Fonte: del Rio-Chanona et al. [2020]

Questa descrizione si è basata sui codici *NAICS*, ma effettivamente è possibile eseguirla in modo analogo considerando un altro sistema industriale. Infatti, aggregando le classificazioni *NAICS* in base ai codici di appartenenza è ammissibile trasferirle nel sistema di interesse associandole ai codici descrittivi la stessa tipologia di attività.

### 2.1.3 Shock nella fornitura

Definiti tutti gli indicatori che permettono di valutare i cambiamenti a livello industriale e nella manodopera a seguito delle restrizioni attuate per arginare la pandemia, è ora possibile determinare la variazione nel livello di produzione che ogni industria riesce a sostenere. Si trova la definizione e l'illustrazione di questo termine in Pichler and Farmer [Jan., 2021].

Si consideri un sistema economico composto da  $N$  industrie e sia  $i = 1, \dots, N$ .

Innanzitutto, è necessario definire la produzione totale che ogni settore industriale emette prima della pandemia. Sia essa  $x_{i,0} \quad \forall i = 1, \dots, N$ .

Sia  $e_i$  il grado di essenzialità della industria  $i$ -esima, come definito nella sezione (2.1.1),

e sia  $ILLR_i$  il relativo indice di lavoro da remoto, come definito nella sezione (2.1.2).

La variazione nella fornitura dell'industria  $i$  –esima è definita come

$$\epsilon_i^S = (1 - ILLR_i)(1 - e_i).$$

Dato questo shock nella fornitura, la produzione totale emessa varia ed essa raggiunge il livello massimo definito come

$$x_i^{MAX} = (1 - \epsilon_i^S)x_{i,0}.$$

Dunque, la produzione durante una situazione pandemica dell'industria  $i$  –esima risulta essere  $x_i^S \in [0, x_i^{MAX}]$  e ciò vale  $\forall i = 1, \dots, N$ .

## 2.2 Variazione nella domanda finale

A causa di una pandemia si può osservare un cambiamento anche nel lato *Domanda Finale* di dimensioni significative. Questo calo è dovuto al fatto che la popolazione, intimorita dall'infezione e dalla difficile situazione in cui vive, cambia le priorità ed il proprio stile di vita.

Dal Congressional Budget Office [2006] viene presentato un documento in cui si considera la crisi data dall'influenza Aviaria e si valutano tutti i cambiamenti nel sistema economico e le possibili soluzioni da adottare a livello governativo e medico al fine di riportare lo stile di vita a livelli consueti.

In quell'occasione le persone hanno modificato il proprio stile di vita, la propensione agli acquisti e la partecipazione attiva alla vita sociale da un lato per timore di contrarre il virus e dall'altro per via delle misure di contenimento messe in atto dal governo.

Nell'articolo viene proposta una stima degli effetti che la pandemia porta sul lato *Domanda Finale*. Innanzitutto, è necessario fare una distinzione dei settori industriali a cui si fa riferimento poichè essi non hanno risentito in maniera omogenea della situazione di criticità. Infatti ci sono settori che hanno visto un forte aumento della domanda finale ed altri, invece, che hanno affrontato un ingente calo. Per fare alcuni esempi basta



pensare al settore medico: esso ha avuto un così ingente e repentino cambiamento nel numero di persone bisognose di cure da trovarsi in difficoltà per soddisfare la richiesta. In opposizione, le attività ludiche e di svago sono state arrestate completamente.

Per valutare l'entità della variazione il Congressional Budget Office assume che le industrie che necessitano un contatto interpersonale per svolgere l'attività osservano il calo più forte nella domanda. In accordo stima che tutte le attività ricreative, culturali, di intrattenimento, di alloggio e di ristorazione hanno un calo dell'80% nella domanda (sulla base trimestrale) rispetto a quella dell'anno precedente la pandemia. Per le attività di commercio sia al dettaglio che all'ingrosso stima un declino nella domanda del 10%. Infine per tutte le attività del settore medico, che affrontano il repentino aumento, si stima che la domanda finale cresca del 15% rispetto al momento precedente la pandemia.

Ora è possibile definire la *Domanda finale* che ogni industria riceve a seguito dello shock causato dalla pandemia, come fatto in Pichler and Farmer.

Sia  $f_{i,0} \quad \forall i = 1, \dots, N$  la domanda finale per ogni industria prima della pandemia.

Sia  $\epsilon_i^D$  ( $\forall i = 1, \dots, N$ ) la variazione nella domanda finale che giunge all'industria  $i$  -esima. Per gli acquisti dei consumatori privati e per quelli delle associazioni senza scopo di lucro si considera la variazione presentata dal Congressional Budget Office; per il settore investimenti e quello esportazioni si assume una variazione del 10% rispetto ai valori precedenti la pandemia, come proposto in Pichler et al. [Feb., 2021].

Dato lo shock, la domanda finale che l' $i$  -esima industria deve affrontare varia ed essa raggiunge livello massimo pari a

$$f_i^{MAX} = (1 - \epsilon_i^D) f_{i,0}.$$

Dunque, così facendo, la domanda finale totale durante una pandemia per l'industria  $i$  -esima risulta essere  $f_i^D \in [0, f_i^{MAX}] \quad \forall i = 1, \dots, N$ .

## 2.3 Entità delle variazioni a livello di fornitura ed offerta

In questa sezione si vuole presentare la mappatura dei cambiamenti che sono stati affrontati a livello industriale durante la pandemia COVID-19 proponendo lo studio presentato nell'articolo Pichler et al. [Feb., 2021].

In questa sede si cerca di fare una valutazione degli effetti della pandemia e delle restrizioni attuate sull'economia del Regno Unito, andando a specificare per ogni settore economico quale sia stata l'entità della variazione sia a livello di fornitura che a livello di domanda finale. Per fare ciò si analizzano sei diversi possibili scenari di variazione nella fornitura ed il cambiamento lato domanda finale.

Innanzitutto è bene puntualizzare che in questo studio vengono elaborate due quantità già introdotte nelle sezioni precedenti quali  $ILR_i$  ed  $e_i$ . Ricordando che l'*Indice di Lavoro da Remoto* è stato definito sulla base delle codifiche industriali nordamericane, è necessario trasformare i codici NAICS nei codici corrispondenti all'economia del Regno Unito. Essi sono riportati nel *World-Input-Output-Database* (WIOD) in cui sono contenute le tabelle descrittive valori di fornitura e produzione annuali delle industrie, suddivise per stato di appartenenza ed a livello globale. La conversione si ottiene aggregando le classificazioni NAICS in base ai codici di appartenenza e portandole nel sistema usato nel WIOD; se una industria dovesse appartenere a più di un settore presente nel WIOD, si cerca di suddividere i lavoratori presenti nel codice NAICS in maniera uniforme tra i settori nel WIOD corrispondenti.

Ora si elencano questi possibili scenari a cui si è fatto riferimento per la fornitura e come venga determinata la variazione di domanda finale.

**Scenario 1 (S1):** In questo scenario sono presenti solo le decisioni da parte del governo del Regno Unito di restringere l'attività di alcuni settori industriali. Infatti tutte le realtà possono operare come di consueto, ossia viene attribuito un grado di essenzialità pari ad 1, eccetto alcuni settori specifici quali commercio di veicoli, commercio al dettaglio, cibo-alloggio ed altri servizi ricreativi e personali. Ad essi viene associato un grado di

essenzialità rispettivamente 0.64, 0.71, 0.05 e 0.07. Assumendo dunque  $ILLR_i$  ed  $e_i$  per ogni industria, si ottiene che lo shock nella fornitura è dato da

$$\epsilon_i^S = (1 - ILLR_i)(1 - e_i) \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

**Scenario 2 3 4 (S2 S3 S4):** In queste situazioni si considerano i problemi derivanti dal distanziamento sociale imposto dal governo del Regno Unito alla popolazione. Dunque, oltre agli ordini imparititi ai settori industriali, come in S1, ci sono anche queste linee guida da osservare rigidamente.

Per poter analizzare la variazione nella fornitura si introduce un ulteriore indice per ogni industria, in aggiunta ai due utilizzati in precedenza, definito essere l'*Indice di Prossimità Fisica* ( $IPF_i$ ). Esso indica la quantità di persone impiegate nell' $i$ -esimo settore industriale. Prendendo i dati riguardanti la composizione occupazionale dell' $i$ -esimo settore,  $IPF_i$  è definito grazie alla media pesata sulla composizione occupazionale del corrispondente settore. In questo caso si ottiene la variazione nella fornitura all'inizio del lockdown come

$$\epsilon_i^S = (1 - ILLR_i)(1 - e_i(1 - \iota \frac{IPF_i}{\max_i IPF_i})) \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

ove  $\iota$  è una costante che assume diversi valori per sottolineare il fatto che effettivamente solo una frazione di lavoratori può operare in presenza proporzionale all'*Indice di Prossimità Fisica*.  $\iota$  assume valori 0.1, 0.4, 0.7 ed attraverso questi si definiscono i diversi scenari S2, S3, S4 rispettivamente.

**Scenario 5 (S5):** In questo scenario si continuano ad usare  $ILLR_i$  ed  $e_i$ , ma con una modifica: il grado di essenzialità delle industrie è assunto essere quello attribuito ai settori tramite i provvedimenti emessi dal governo dello stato italiano. Dunque, ancora una volta, si ottiene una modifica nella fornitura per ogni industria data da

$$\epsilon_i^S = (1 - ILLR_i)(1 - e_i) \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

**Scenario 6 (S6):** In questo ultimo caso viene nuovamente cambiata l’assegnazione del grado di essenzialità di ogni industria. Ora si fa riferimento agli indici di essenzialità europei, introdotti nell’articolo Fana et al. [2020], ottenuti come la media degli indici di essenzialità degli stati europei Germania, Spagna ed Italia. Una volta assegnato il grado di essenzialità, l’entità dello shock si ricava come nello scenario S5.

La variazione nella domanda finale che viene considerata è quella proposta dal Congressional Budget Office e riportata nella sezione (2.2).

In appendice C si può trovare la tabella, riportata in Pichler et al. [Feb., 2021], che descrive l’entità delle variazioni sia nel lato fornitura, considerando i sei diversi casi introdotti, sia nel lato domanda finale osservate nel sistema industriale del Regno Unito a seguito degli effetti della pandemia COVID-19.

### 2.3.1 Dati analizzati

Nei prossimi capitoli si esaminano i sistemi industriali riguardanti gli stati europei Germania, Spagna ed Italia e si valutano i cambiamenti avvenuti in essi a causa e durante la pandemia COVID-19. Nello specifico si analizzano i valori di produzione di 55 settori industriali. Questa scelta è dovuta al fatto che per i suddetti soggetti sono presenti dati storici e ciò permette di stimare l’entità delle variazioni nella fornitura.

I dati analizzati sono raccolti nel *World-Input-Output-Database* (WIOD), già introdotto nella sezione 2.3, di cui è disponibile una guida per l’uso pubblicata da Timmer et al. [2015].

Questa banca dati serve in primo luogo per poter osservare la composizione della rete di produzione globale. Vengono proposte le tabelle di Input-Output nazionali descrittive il sistema economico, che risutano essere la *Tabella Input-Output* proposta da *Leontief*. Successivamente viene formata una tabella a livello mondiale contenente tutti gli stati e la suddivisione economica al fine di osservare le connessioni tra gli stati tramite i flussi commerciali bilaterali. Ancora una volta, l’unità di misura dei dati è quella monetaria con riferimento a milioni di dollari statunitensi.

Viene qui proposto un esempio di tabella Input-Output a livello mondiale.

			Use by country-industries						Final use by countries			Total use	
			Country 1			...	Country M			Country 1	...		Country M
			Industry 1	...	Industry N	...	Industry 1	...	Industry N		...		
Supply from country-industries	Country 1	Industry 1											
		...											
		Industry N											
	.....												
	Country M	Industry 1											
		...											
Industry N													
Value added by labour and capital													
Gross output													

Figura 2.2: Schema di una tabella Input-Output a livello mondiale.  
 Fonte: Timmer et al. [2015]

La tabella, letta per righe, descrive come la produzione totale dell'industria di un paese sia distribuita tra l'economia del paese stesso, tra le industrie degli altri paesi e tra le domande finali provenienti non solo dal paese in questione, ma anche dai paesi esteri. La lettura per colonna della stessa, invece, fornisce una stima dei costi che ogni industria deve sostenere al fine di poter ottenere tutto il materiale necessario per la produzione, proveniente sia dall'economia nazionale che dalle industrie degli altri paesi.

In appendice D viene citata la tabella che aggrega e riassume tutti gli indici e quantità necessarie per i successivi studi corrispondenti agli stati in oggetto. Vengono riportati i valori di produzione totale, variazione nella fornitura, grado di essenzialità, ILR, domanda finale e variazione nella domanda finale per ogni settore industriale considerato.

# Capitolo 3

## Analisi dei sistemi industriali attraverso il modello MEEM

Come introdotto nel paragrafo 2.3.1, in questo capitolo e nei seguenti si vuole proporre una analisi dei sistemi industriali e delle variazioni subite durante la pandemia da COVID-19 per gli stati europei Germania, Spagna ed Italia, come proposto in Pichler and Farmer [Jan., 2021].

Tutti i codici e dati per riprodurre le analisi ed i risultati sono disponibili ed accessibili <sup>1</sup>.

In primo luogo si applica ai sistemi il modello MEEM: se ne discute una trattazione teorica al fine di osservarne le criticità e poi si riportano i risultati ottenuti dagli studi eseguiti sui dati. Nei capitoli successivi l'obiettivo è quello di proporre modelli contenenti alcune modifiche al fine di fornire conclusioni con valori maggiormente attendibili.

### 3.1 Analisi teorica

Sia dato un sistema industriale composto da  $N$  settori produttivi suddivisi in due categorie: le industrie appartenenti all'insieme  $N^S$  sono quelle che osservano un cambiamento nel lato fornitura e quelle in  $N^D$  osservano una variazione nel lato domanda. Questa distinzione sia fatta in modo tale che  $N = N^S + N^D$ . Mantenendo inalterato l'esponente  $S$ , caratterizzante le industrie che subiscono una variazione lato fornitura, e l'esponente  $D$ ,

---

<sup>1</sup><https://www.doi.org/10.5281/zenodo.4326815>

per quelle con variazione lato domanda, è possibile definire i vettori  $\mathbf{x}^S$  e  $\mathbf{x}^D$  contenenti le componenti di produzione totale delle relative industrie, le matrici  $\mathbf{A}^{SS}$ ,  $\mathbf{A}^{SD}$ ,  $\mathbf{A}^{DS}$  ed  $\mathbf{A}^{DD}$  dei *Coefficienti Tecnici* ed i vettori contenenti le rispettive *Domande Finali*  $\mathbf{f}^S$  ed  $\mathbf{f}^D$ . Così, è lecito richiamare il sistema matriciale introdotto in (1.12) con le dovute simbologie

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^S \\ \mathbf{x}^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{SS} & \mathbf{A}^{SD} \\ \mathbf{A}^{DS} & \mathbf{A}^{DD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^S \\ \mathbf{x}^D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}^S \\ \mathbf{f}^D \end{bmatrix}.$$

Per poter procedere con l'applicazione del modello misto esogeno endogeno si assume che i vettori  $\mathbf{f}^S$  ed  $\mathbf{x}^D$  siano endogeni mentre i vettori  $\mathbf{x}^S$  ed  $\mathbf{f}^D$  siano esogeni. Riorganizzando il sistema precedente al fine di ottenere le variabili endogene in funzione di quelle esogene si ricava

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}^S \\ \mathbf{x}^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{SD} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} - \mathbf{A}^{DD} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{A}^{SS} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^{DS} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^S \\ \mathbf{f}^D \end{bmatrix}.$$

Ora, calcolando

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{SD} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} - \mathbf{A}^{DD} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \frac{-\mathbf{A}^{SD}}{\mathbf{I} - \mathbf{A}^{DD}} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{I} - \mathbf{A}^{DD}} \end{bmatrix},$$

si ottiene la soluzione del sistema tramite il modello MEEM come

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}^S \\ \mathbf{x}^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \frac{-\mathbf{A}^{SD}}{\mathbf{I} - \mathbf{A}^{DD}} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{I} - \mathbf{A}^{DD}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{A}^{SS} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^{DS} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^S \\ \mathbf{f}^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{SS})\mathbf{x}^S - \frac{\mathbf{A}^{SD}}{\mathbf{I} - \mathbf{A}^{DD}}(\mathbf{A}^{DS}\mathbf{x}^S + \mathbf{f}^D) \\ \frac{\mathbf{A}^{DS}\mathbf{x}^S + \mathbf{f}^D}{\mathbf{I} - \mathbf{A}^{DD}} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

**Osservazione 10.** Una industria presente nel sistema economico non è detto che durante una situazione di crisi, come quella pandemica, affronti variazioni solo nel lato della fornitura o nel lato della domanda finale, essa può dover far fronte contemporaneamente a cambiamenti in entrambe le parti. Ecco dunque che viene categorizzata come industria che subisce una variazione lato fornitura o lato domanda a seconda di quale sia, in termini assoluti, lo shock di maggiore entità.

Nel caso in cui si verifichi un cambiamento nella fornitura del settore  $i$  –esimo superiore rispetto a quello nella domanda finale a risentirne maggiormente è la produzione finale totale che osserva una variazione di entità

$$x_i^{SS} = x_{i,0} - x_i^{MAX} = x_{i,0} - (1 - \epsilon_i^S)x_{i,0} = \epsilon_i^S x_{i,0}.$$

Al contrario, nel caso in cui il cambiamento nella domanda finale che giunge al settore  $i$ –esimo risulti maggiore rispetto a quello nella fornitura, a risentirne di più è la domanda finale totale con una variazione pari a

$$f_i^{DS} = f_{i,0} - f_i^{MAX} = f_{i,0} - (1 - \epsilon_i^D)f_{i,0} = \epsilon_i^D f_{i,0}.$$

Ora, si può osservare che in alcuni casi questo modello porta a soluzioni economicamente non ammissibili.

Si consideri l'equazione descrittiva la domanda finale endogena riportata nel sistema (3.1)

$$\mathbf{f}^S = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{SS})\mathbf{x}^S - \frac{\mathbf{A}^{SD}}{\mathbf{I} - \mathbf{A}^{DD}}(\mathbf{A}^{DS}\mathbf{x}^S + \mathbf{f}^D). \quad (3.2)$$

Per via delle *Condizioni di Hawkins-Simon*, di cui si può trovare una spiegazione in appendice E, si può subito notare che i fattori  $\frac{\mathbf{A}^{SD}}{\mathbf{I} - \mathbf{A}^{DD}}$  ed  $(\mathbf{A}^{DS}\mathbf{x}^S + \mathbf{f}^D)$  risultano essere non negativi. Siccome  $\mathbf{f}_i^S \in [0, f_i^{MAX}] \forall i = 1, \dots, N^S$  per le osservazioni fatte nelle precedenti sezioni, affinché  $\mathbf{f}^S$  sia un vettore composto da componenti tutte non negative è necessario che il termine  $(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{SS})\mathbf{x}^S$  sia non negativo e che  $(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{SS})\mathbf{x}^S \geq \frac{\mathbf{A}^{SD}}{\mathbf{I} - \mathbf{A}^{DD}}(\mathbf{A}^{DS}\mathbf{x}^S + \mathbf{f}^D)$ .

In effetti, tramite alcuni esempi, come quello che segue, si dimostra che  $\mathbf{f}^S$  può anche assumere valore negativo e ciò contraddice le condizioni di esistenza, dal punto di vista economico, di questo elemento e dunque mette in discussione la validità della soluzione ottenuta tramite il presente modello.

**Esempio 1.** Sia dato un sistema economico composto da 2 settori industriali, indicati come  $i$  e  $j$ , categorizzati entrambi come settori che subiscono variazioni nel lato fornitura,



in cui sono ammessi scambi solo tra questi due settori.

Nel caso in cui  $x_i^{MAX} < A_{ij}^{SS} x_j^{MAX}$  si ottiene la domanda finale negativa.

Innanzitutto, si osserva che la relazione sopra descritta è plausibile dalla definizione delle quantità. Inoltre, siccome entrambi i settori presenti nel sistema qui descritto subiscono variazioni nel lato fornitura,  $\mathbf{f}^D = 0$  e, dato che non vi sono altri settori definiti che subiscono variazioni nel lato domanda, vale  $\mathbf{A}^{SD} = 0$ ,  $\mathbf{A}^{DS} = 0$ ,  $\mathbf{A}^{DD} = 0$  e  $\mathbf{A}^{SS} = \begin{bmatrix} 0 & A_{ij}^{SS} \\ A_{ji}^{SS} & 0 \end{bmatrix}$ .

L'equazione (3.2) diventa

$$\mathbf{f}^S = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{SS})\mathbf{x}^S$$

$$\begin{bmatrix} f_i^S \\ f_j^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -A_{ij}^{SS} \\ -A_{ji}^{SS} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i^S \\ x_j^S \end{bmatrix}.$$

Ora, data l'ipotesi  $x_i^{MAX} < A_{ij}^{SS} x_j^{MAX}$  ed assumendo che la produzione dopo la variazione sia pari al livello di produzione causato dallo shock ( $x_i^S = x_i^{MAX}$  e  $x_j^S = x_j^{MAX}$ ), segue che  $f_i^S = x_i^{MAX} - A_{ij}^{SS} x_j^{MAX} < 0$ , ma questo risultato non è accettabile in quanto si richiede che  $\mathbf{f}_i^S \in [0, f_i^{MAX}] \forall i = 1, \dots, N^S$ .

Per continuare sulla linea della non totale validità della soluzione ottenuta tramite l'approccio MEEM, si dimostra anche che, in alcuni casi, esso può restituire un valore di domanda finale superiore alla soglia definita da  $\mathbf{f}^{MAX}$ .

**Esempio 2.** Si consideri un sistema economico composto da 2 settori industriali,  $i$  e  $j$ , per cui il settore  $i$  risulta con variazioni maggiori nella fornitura e  $j$  risulta con variazioni di entità superiore nella domanda finale.

Nel caso in cui  $x_i^{SS} - f_i^{DS} < A_{ij}^{SD} f_j^{DS}$  si ottiene che  $f_i^S > f_i^{MAX}$ .

Si assuma che il settore  $i$  fornisca sia il settore  $j$  che la domanda finale, mentre il settore  $j$  fornisca solo la domanda finale.

Si ha che

$$\mathbf{x}^S = \begin{bmatrix} x_i^S \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^D = \begin{bmatrix} 0 \\ f_j^D \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{SS} = 0, \mathbf{A}^{DD} = 0, \mathbf{A}^{DS} = 0, \mathbf{A}^{SD} = \begin{bmatrix} 0 & A_{ij}^{SD} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Inserendo i dati in (3.2), si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^S &= \mathbf{x}^S - \mathbf{A}^{SD} \mathbf{f}^D \\ \begin{bmatrix} f_i^S \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_i^S \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & A_{ij}^{SD} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f_j^D \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} f_i^S \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_i^S \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{ij}^{SD} f_j^D \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dato che per ipotesi  $x_i^{SS} - f_i^{DS} < A_{ij}^{SD} f_j^{DS}$  si ha

$$x_i^{MAX} - A_{ij}^{SD} f_j^{MAX} > x_{i,0} - f_{i,0} + f_i^{MAX} - A_{ij}^{SD} f_{j,0}.$$

Assumendo che per il settore  $i$ -esimo la produzione dopo la variazione sia pari al livello di produzione causato dallo shock ( $x_i^S = x_i^{MAX}$ ) e per il settore  $j$ -esimo la domanda finale dopo la variazione sia pari al livello causato dallo shock ( $f_j^D = f_j^{MAX}$ ), da (3.3) si ottiene

$$f_i^S = x_i^{MAX} - A_{ij}^{SD} f_j^{MAX} > x_{i,0} - f_{i,0} + f_i^{MAX} - A_{ij}^{SD} f_{j,0}.$$

da cui

$$f_i^{MAX} < f_{i,0} + f_i^S - x_{i,0} + A_{ij}^{SD} f_{j,0}. \quad (3.4)$$

Nelle ipotesi in cui  $f_{i,0} - x_{i,0} + A_{ij}^{SD} f_{j,0} < 0$  la domanda finale a seguito della variazione risulta essere superiore alla domanda finale massima definita per il sistema

$$f_i^S > f_i^{MAX} - f_{i,0} + x_{i,0} - A_{ij}^{SD} f_{j,0} \quad (3.5)$$

da cui la tesi.

Osservando in (3.1) l'equazione descrittiva la produzione totale endogena che risulta

a seguito delle variazioni nella domanda finale

$$\mathbf{x}^D = \frac{\mathbf{A}^{DS}\mathbf{x}^S + \mathbf{f}^D}{\mathbf{I} - \mathbf{A}^{DD}}, \quad (3.6)$$

si può verificare che  $x_i^D \in [0, x_i^{MAX}] \forall i = 1, \dots, N^D$  solo se si verificano anche variazioni nella fornitura  $\epsilon_i^S > 0$ .

Tramite queste riflessioni, si è potuto dimostrare che la soluzione del modello MEEM vale solo a determinate condizioni e non per qualsiasi genere di dati riferiti al sistema economico in questione, dunque può fornire una soluzione non ammissibile.

### 3.1.1 Implementazione

Si consideri come stato la Germania. Nello script relativo, disponibile alla fonte sopra citata, come prima cosa si inizializzano i dati relativi al paese contenenti sia i valori di produzione e domanda per ognuno dei 55 settori industriali analizzati, disponibili nel *World Input-Output Database*, sia i valori delle variazioni subite da ogni parte; si ricorda che i valori sono in milioni e l'unità di misura utilizzata è il dollaro statunitense. In seguito, si richiama la funzione caratterizzante il modello *Input-Output Misto* che risolve il sistema lineare di equazioni. Così fatto si procede nella risoluzione del modello per questo sistema economico. In primis, è necessario categorizzare le industrie rispetto allo shock di maggiore entità che osservano e poi tutti gli elementi del modello vengono riorganizzati secondo questa distinzione. Ora, assumendo che la variazione esogena sia nei valori di produzione delle industrie categorizzate con modifiche nel lato offerta e nei valori di domanda finale per le industrie categorizzate con modifiche nel lato domanda finale, si risolve il modello MEEM.

Per gli stati Spagna ed Italia la realizzazione del codice è medesima a quella sopra descritta, variano solo le tabelle di dati in input.

## 3.2 Risultati

Si riportano i risultati ottenuti applicando il modello MEEM per i sistemi economici degli stati Germania, Spagna ed Italia con i dati inerenti alla situazione precedente la pandemia COVID-19 e quelli contenenti le variazioni a seguito dello shock subito. Successivamente si valuta il comportamento dei sistemi economici con la modifica nell'entità dello shock stesso.

### 3.2.1 Analisi dei dati inerenti alla Germania

I grafici sotto riportati mostrano i risultati ottenuti analizzando i dati riguardanti la Germania. In ascissa vengono riportati la produzione totale ed il consumo totale espressi in milioni di dollari statunitensi. I codici riportati in ordinata sono gli identificativi dei settori industriali, mentre i valori nella parte destra rappresentano la variazione rispetto alla situazione pre-shock in punti percentuali. Dei suddetti ultimi elementi vengono colorati in rosso quelli che risultano essere non ammissibili.

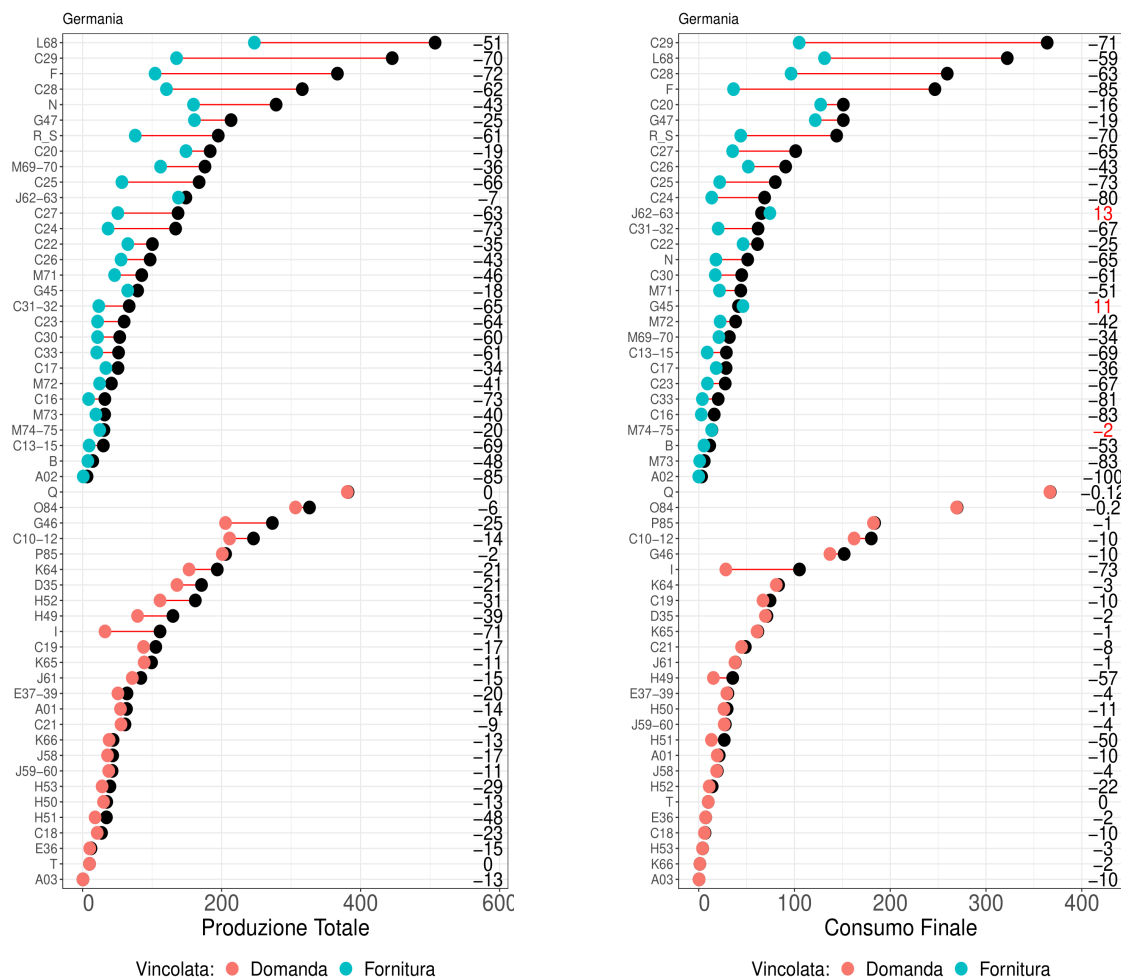


Figura 3.1: Variazioni per Germania

Il presente modello per la *Produzione Finale* fornisce valori tutti accettabili, non negativi e non superiori alla quantità massima. Per la *Domanda Finale*, invece, sebbene non siano presenti valori negativi, ve ne sono alcuni superiori all'entità massima possibile che risultano essere non accettabili.

### 3.2.2 Analisi dei dati inerenti alla Spagna

Ora, come stato, si consideri la Spagna. Si presentano i grafici riportanti le soluzioni ottenute. Ancora, in ascissa vengono riportati la produzione totale ed il consumo totale espressi in milioni di dollari statunitensi. In ordinata vi sono i codici identificativi dei settori industriali; i valori nella parte destra rappresentano la variazione rispetto alla situazione pre-shock in punti percentuali, di questi quelli in rosso risultano essere non ammissibili.

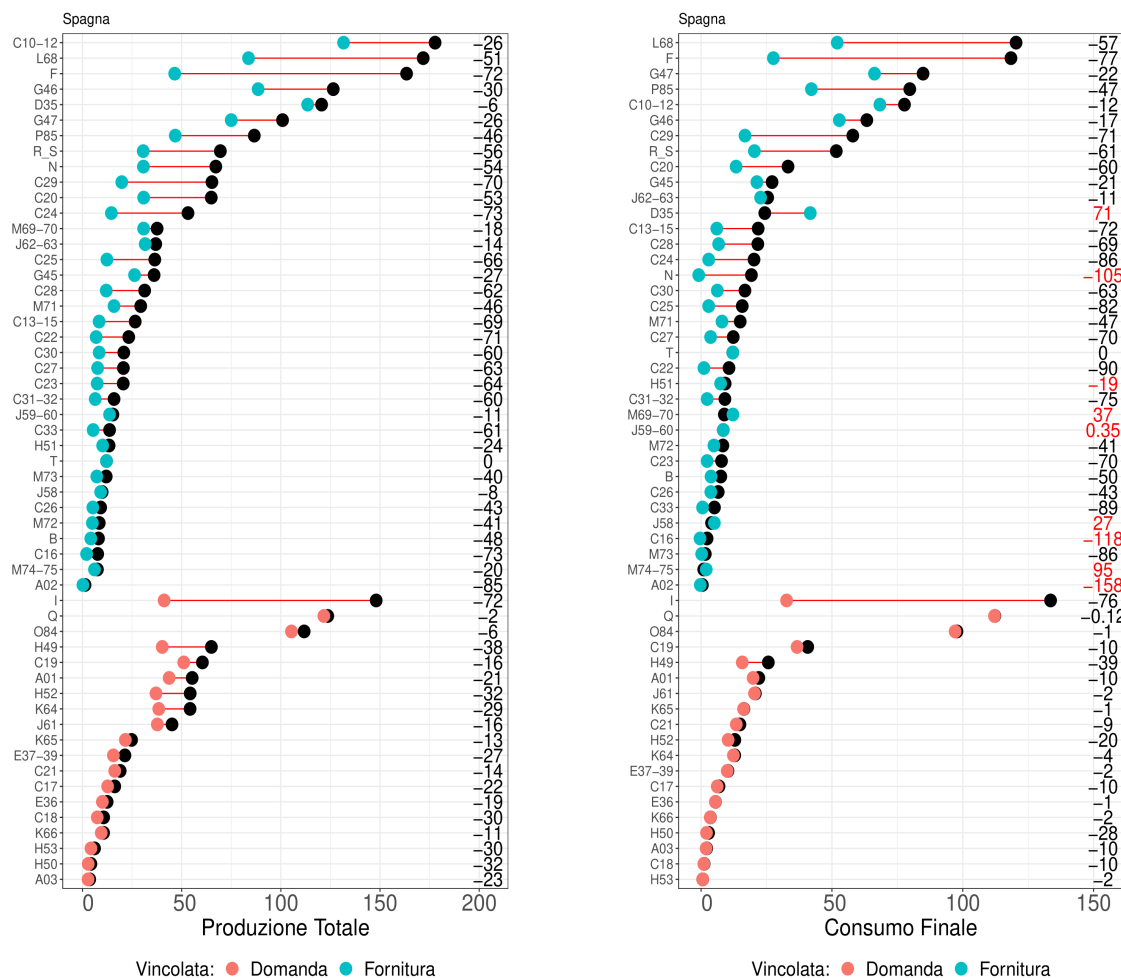


Figura 3.2: Variazioni per Spagna

I valori di *Produzione Finale* ottenuti sono tutti accettabili. Mentre, anche in questo caso, alcune componenti del vettore *Domanda Finale* risultano essere non accettabili, in quanto superiori alla domanda finale massima. Si può anche notare che la Spagna è lo stato che affronta variazioni non sostenibili per il sistema di maggiore entità tra i tre stati considerati.

### 3.2.3 Analisi dei dati inerenti all'Italia

Per ultimo, si considerino i dati inerenti all'Italia. Si presentano i risultati del modello, i grafici sono costruiti nello stesso modo dei precedenti. In analogia con gli altri risultati, i valori di *Produzione Finale* sono tutti accettabili. Il modello misto fornisce alcuni valori di *Domanda Finale* che risultano essere non ammissibili poichè sono superiori ai valori di domanda finale massima per il sistema economico italiano.

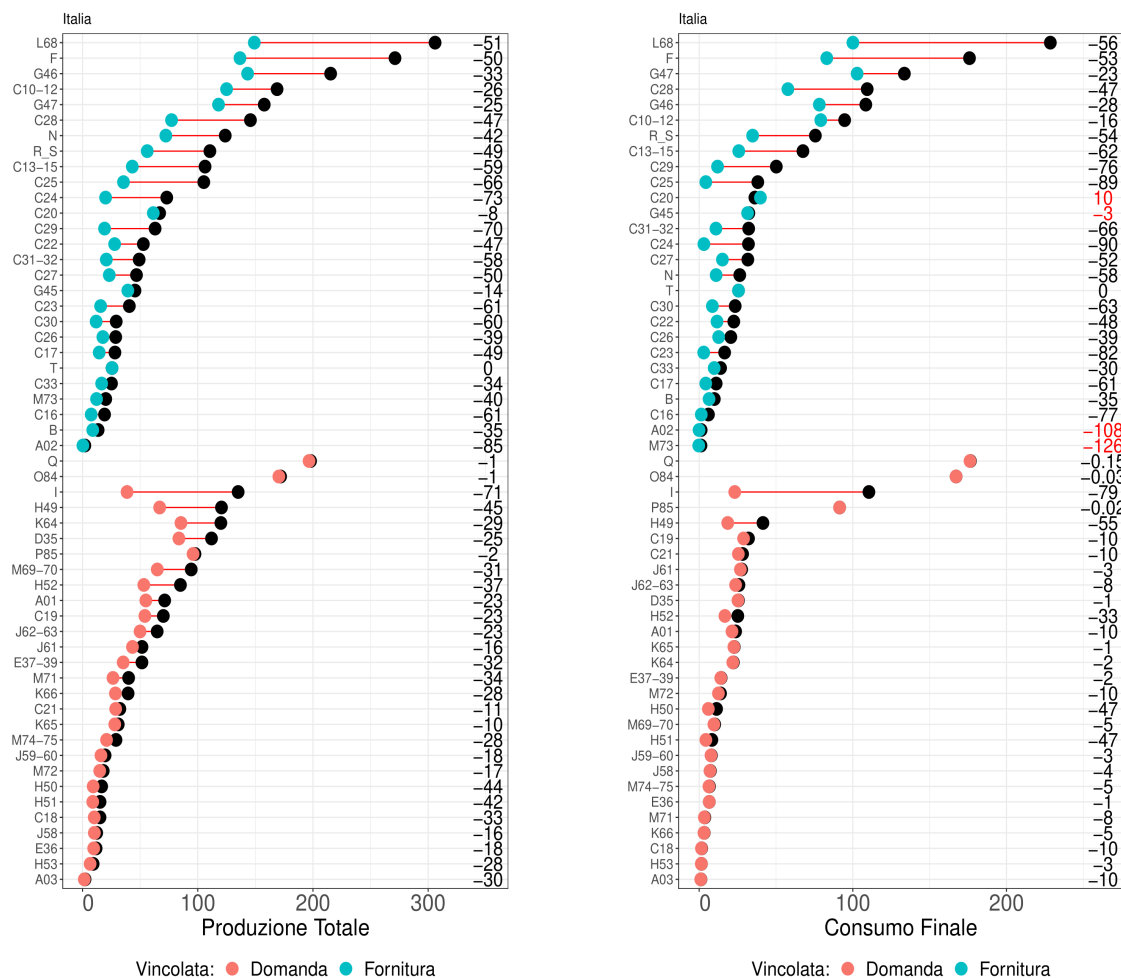


Figura 3.3: Variazioni per Italia

### 3.2.4 Variazione dell'entità degli shock

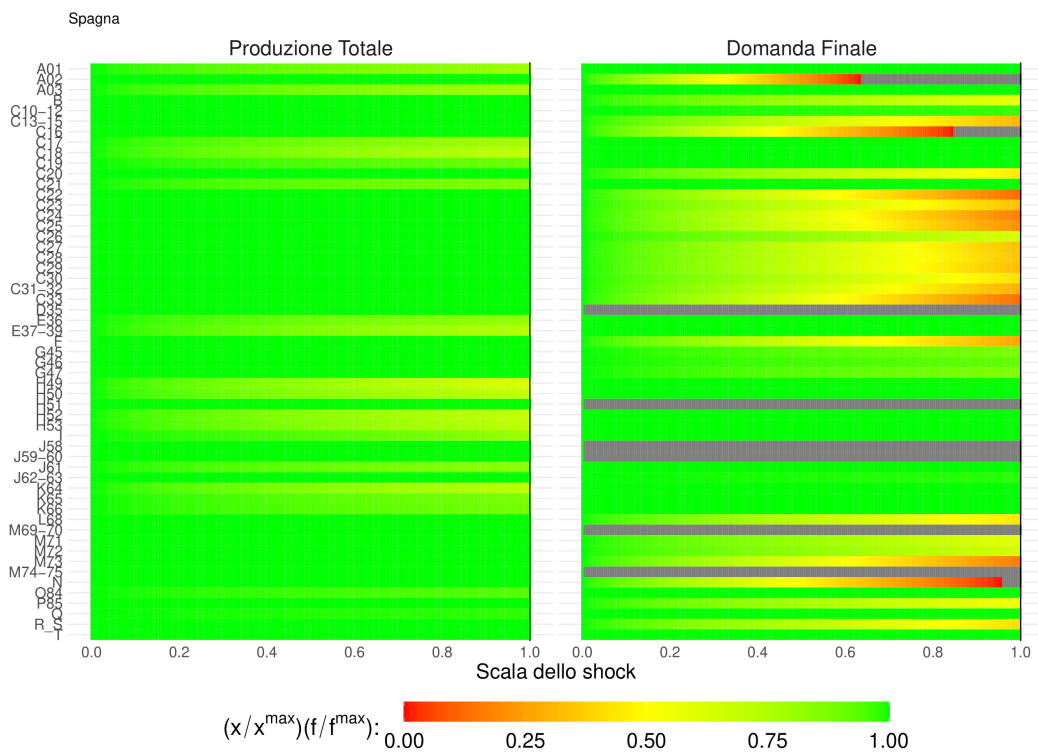
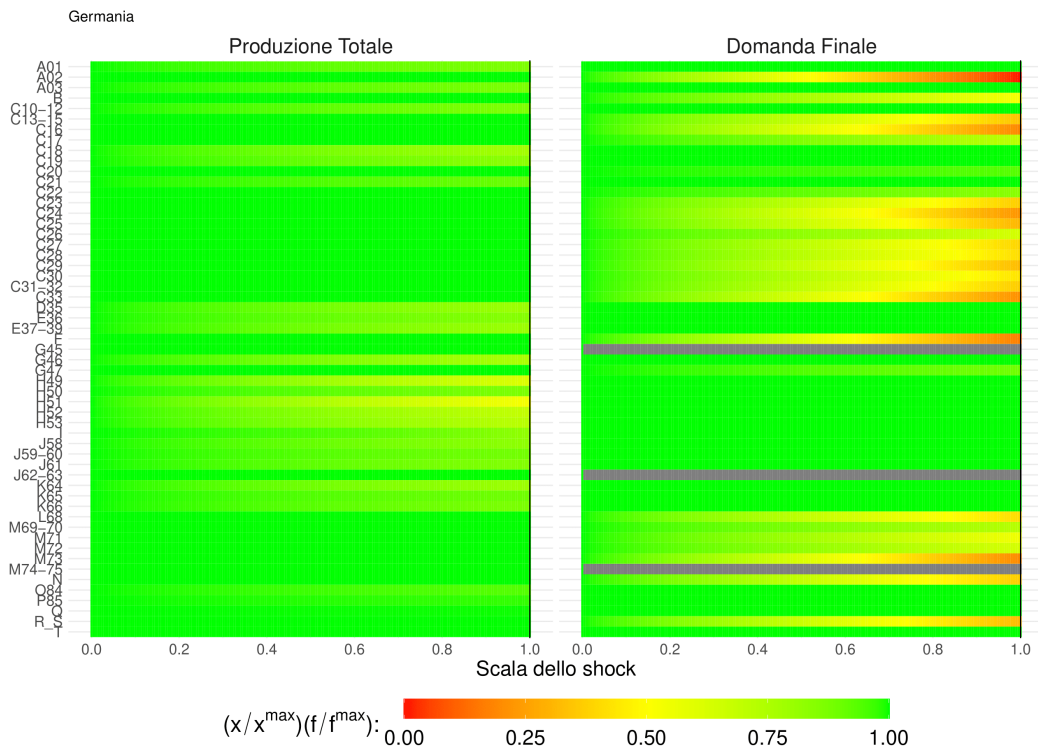
Così si è dimostrato che il modello MEEM non porta a risultati soddisfacenti ed ammissibili per il mercato in presenza simultanea di variazioni nel lato offerta e nel lato domanda poichè, in alcuni casi, restituisce soluzioni le cui componenti non sono appartenenti al dominio della domanda finale. Effettivamente, è possibile verificare che questa conclusione può essere tratta in qualunque situazione, anche in presenza di shock di piccola entità. Lo si può dimostrare riducendo l'entità delle variazioni in offerta ed in domanda tramite un parametro  $\delta \in [0,1]$ ; siano i nuovi valori di produzione e domanda finale massima definiti come

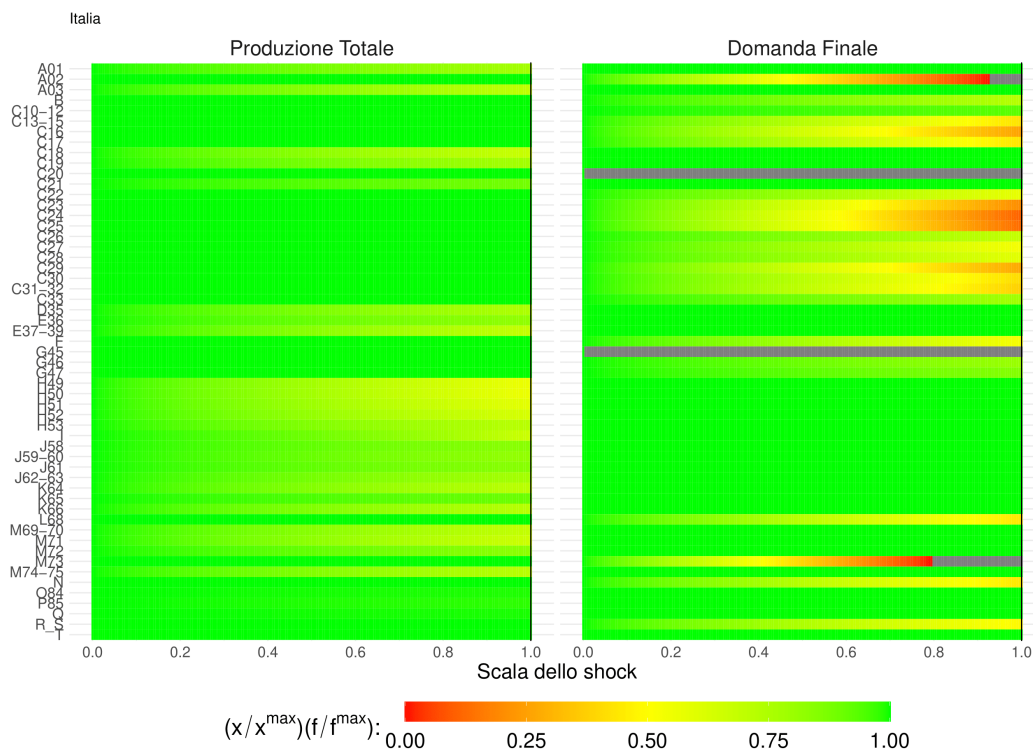
$$x_i^{MAX} = (1 - \delta\epsilon_i^S)x_{i,0},$$

$$f_i^{MAX} = (1 - \delta\epsilon_i^D)f_{i,0}.$$

Di seguito vengono riportati gli effetti dei cambiamenti tramite il parametro  $\delta$  che si registrano nella produzione totale e nella domanda finale per i tre stati. Nei grafici l'asse delle ascisse rappresenta l'entità del parametro  $\delta$  e l'ordinata descrive il codice del settore industriale a cui si fa riferimento. Nel grafico di sinistra viene rappresentato come varia l'intensità del rapporto  $\mathbf{x}/\mathbf{x}^{MAX}$  in cui  $\mathbf{x}$  è la soluzione del modello MEEM e  $\mathbf{x}^{MAX}$  è la produzione totale massima possibile dal sistema; nel grafico di destra viene rappresentato come varia l'intensità del rapporto  $\mathbf{f}/\mathbf{f}^{MAX}$  in cui  $\mathbf{f}$  è la domanda finale calcolata tramite il modello MEEM e  $\mathbf{f}^{MAX}$  è la domanda finale massima sostenibile dal sistema economico in questione. L'intensità del rapporto viene descritta tramite la scala di colori dal verde al rosso: risulta essere verde quando  $\delta = 0$ , ovvero quando non c'è variazione tra lo stato precedente allo shock e quello successivo ed il rapporto risulta essere uguale ad uno, e gradualmente diventa rossa quando  $\delta = 1$ , ovvero quando la variazione risulta massima ed il rapporto nullo. Nel caso in cui il modello MEEM fornisca una soluzione non accettabile, ovvero fuori dall'intervallo di definizione della quantità, il rapporto assume colore grigio.







Si può notare che anche in tutte queste situazioni il modello fornisce valori di *Produzione Finale* accettabili ed all'interno dell'intervallo di definizione, mentre per la *Domanda Finale* alcune componenti risultano essere problematiche nel caso di tutti e tre gli stati. Infatti, in alcuni casi, per  $\delta = 0$  il rapporto risulta essere pari ad 1 poi, con il crescere di  $\delta$ , risulta essere problematico fino ad arrivare al valore 0 o addirittura a diventare negativo, ossia non accettabile. In altri casi il rapporto risulta essere inammissibile per ogni valore di  $\delta$ .

## Capitolo 4

# Analisi dei sistemi industriali attraverso lo studio della propagazione di shock nella rete

I risultati ottenuti nel capitolo 3 dimostrano che il modello MEEM non offre buoni risultati per l'analisi dei sistemi industriali di Germania, Spagna ed Italia e per la propagazione delle variazioni nella rete durante la pandemia da COVID-19. Perciò di seguito si presentano metodi alternativi per eseguire questo studio. In primis si considera un metodo di ottimizzazione per massimizzare la produzione finale totale o la domanda finale totale che descrive la migliore situazione che si possa presentare: dato uno shock negativo si calcola la minima variazione nella produzione finale, o nella domanda finale, accettabili per le condizioni di ammissibilità della soluzione. In secondo luogo, si propongono diversi metodi di razionamento: se un settore industriale vede cambiamenti nel lato fornitura non è in grado di soddisfare pienamente la domanda proveniente dagli altri settori e dai consumatori finali, dunque vengono prese decisioni sulla modalità di distribuzione del prodotto emesso. Questa procedura di analisi calcola le dinamiche necessarie affinché il sistema torni ad essere in equilibrio.

## 4.1 Allocazioni Ottimali

Viene qui presentato un modello volto a calcolare la massima produzione e la massima domanda finale soddisfatta durante le restrizioni messe in atto per limitare la diffusione del COVID-19. Esso è composto da due problemi di ottimizzazione, in cui sono presenti le variazioni nella produzione finale e nella domanda finale esogene, per poter calcolare quale sia la produzione finale massima possibile e quale la domanda finale massima corrisposta. Ovviamente la soluzione trovata deve soddisfare il modello Input-Output definito da Leontief ed ogni componente deve appartenere al relativo dominio di definizione, dunque l'allocazione soluzione del modello  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{f}^*)$  è tale che  $\mathbf{x}^* = \mathbf{L}\mathbf{f}^*$  e  $\mathbf{x}^* \in [0, \mathbf{x}^{\text{MAX}}]$ ,  $\mathbf{f}^* \in [0, \mathbf{f}^{\text{MAX}}]$ .

Si ricorda il sistema economico considerato essere composto da  $N$  settori industriali. Come primo problema che definisce il modello, si considera la massimizzazione della produzione totale,  $\sum_{i=1}^N x_i$ , che, per come è definito il sistema Leontief, risulta essere una ottimizzazione lineare del tipo

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{f} \in [0, \mathbf{f}^{\text{MAX}}]} \quad & \mathbf{1}^T (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{f} \\ \text{subject to} \quad & (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{f} \in [0, \mathbf{x}^{\text{MAX}}]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Per massimizzare la produzione del sistema economico si determina il vettore contenente la domanda finale  $\mathbf{f}^*$  ed il vincolo assicura che la produzione emessa non può eccedere la capacità produttiva massima del sistema.

Come secondo problema, si considera quello che massimizza la domanda finale soddisfatta,  $\sum_{i=1}^N f_i$ . Esso è definito da un problema di ottimizzazione lineare del tipo

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in [0, \mathbf{x}^{\text{MAX}}]} \quad & \mathbf{1}^T (\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{x} \\ \text{subject to} \quad & (\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{x} \in [0, \mathbf{f}^{\text{MAX}}] \end{aligned} \quad (4.2)$$

in cui si determina il vettore contenente la produzione necessaria per corrispondere la richiesta. In questo caso, il vincolo assicura che il consumo finale non eccede la massima domanda finale possibile per il sistema.

Si osserva che l'allocazione ottimale definita dai due sottoproblemi ammette sempre una soluzione poichè quella banale  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{f}^*) = (0,0)$  esiste sempre. Nel concreto, visti i dati reali forniti in ingresso, si attendono valori positivi per  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{f}^*)$ .

### 4.1.1 Implementazione

Si consideri lo stato Germania; ora si analizza nel dettaglio come viene definito il modello e si mostra la soluzione ottenuta. In appendice F viene descritta la formulazione e la risoluzione dei problemi di programmazione lineare in forma generale.

Innanzitutto, vengono inizializzati i dati riguardanti lo stato. Per massimizzare la produzione totale, viene definito il vettore contenente i coefficienti che moltiplicano la variabile decisionale del problema. Ciò si ottiene sommando per colonne gli elementi di  $\mathbf{L}$ . Successivamente si definiscono i vincoli: la produzione totale minima e la domanda finale minima vengono assunte nulle. I quattro vincoli presenti richiedono che la produzione e la domanda finale siano nell'intervallo di definizione precedentemente descritto. Dunque si assumono la matrice contenente i coefficienti ed il vettore contenente i termini noti dei vincoli. Il modello viene risolto utilizzando la funzione *lp* di R.<sup>1</sup>

Per massimizzare la domanda finale soddisfatta, si definisce il vettore contenente i coefficienti che moltiplicano la variabile decisionale: essi sono trovati sommando gli elementi in colonna della matrice  $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ . Successivamente si definiscono i vincoli: la produzione totale minima e la domanda finale minima vengono assunte nulle. I quattro vincoli presenti richiedono che la produzione e la domanda finale siano nell'intervallo di definizione precedentemente descritto. Dunque si assumono la matrice contenente i coefficienti ed il vettore contenente i termini noti dei vincoli. Anche in questo caso il modello viene risolto utilizzando la funzione *lp* di R.<sup>1</sup>

I risultati ottenuti per la Germania attraverso questo metodo vengono riportati in appendice G.

Per gli altri stati considerati, Spagna ed Italia, la metodologia di implementazione del codice per la risoluzione è medesima a quella sopra descritta; ovviamente per ogni stato cambiano i dati in input. I risultati ottenuti vengono ancora presentati in appendice G. Si sottolinea subito che la produzione totale trovata tramite il metodo di massimizzazio-

---

<sup>1</sup><https://www.rdocumentation.org/packages/lpSolve/versions/5.6.15/topics/lp>

ne della produzione totale e quella trovata tramite il metodo di massimizzazione della domanda finale è la stessa, ma ciò è chiaro per i passi che vengono fatti nei due metodi e per l'equivalenza tra le definizioni delle componenti. Una situazione analoga si può osservare anche per la domanda finale totale.

## 4.2 Schemi di Razionamento

Nella sezione corrente vengono presentati diversi metodi di razionamento per la distribuzione dei prodotti finali che possono essere impiegati dai settori industriali nella loro attività. Ciò viene proposto poichè, data una economia regolata dal modello Input-Output proposto da Leontief in cui la produzione è in funzione della domanda totale che giunge, se un settore vede una riduzione nella produzione totale del bene che fabbrica, indipendentemente dalla causa che porta a questa situazione, allora non riesce a soddisfare totalmente la domanda ad esso pervenuta. Questo calo nella produzione è determinato esclusivamente dai settori industriali mentre la domanda finale non interviene; è importante osservare come il calo di produzione anche di un solo settore possa modificare l'intero sistema economico: siccome ogni settore richiede diversi tipi di materie prime per la produzione del bene fabbricato, se vede il calo della fornitura di un elemento allora riduce anche la richiesta degli altri componenti per non riceverne in eccesso. Dunque si osserva il calo della domanda anche per gli altri settori, che, a loro volta, riducono le richieste ai propri fornitori. Tale osservazione serve per poter comprendere come anche una sola riduzione nella produzione, determinata da qualsiasi causa, possa compromettere l'attività di tutto il sistema economico.

Di seguito si osservano diverse modalità di azione per affrontare gli effetti delle restrizioni messe in atto per contrastare la diffusione del COVID-19 sulla produzione di ogni settore. Vengono qui proposti quattro diversi metodi di razionamento: (1) razionamento proporzionale, (2) razionamento proporzionale prioritario, (3) razionamento prioritario basato sulla dimensione dell'ordine, (4) razionamento prioritario in ordine casuale. Gli algoritmi vengono iterati fino a convergenza e poi i risultati vengono confrontati.

In realtà gli schemi di razionamento proposti per valutare il sistema economico successivamente alle restrizioni imposte per limitare la diffusione del COVID-19 non sono di

recente formulazione, essi sono usuali in letteratura e sono stati impiegati in varie situazioni per affrontare cambiamenti drastici nel sistema. Di seguito, durante la trattazione di ogni procedimento, si fa riferimento ad altri contesti in cui trovare l'uso dello stesso metodo di razionamento.

## 1. Razionamento Proporzionale

Se un settore industriale osserva un calo nella produzione totale del bene e non riesce soddisfare completamente la domanda allora, per la distribuzione, può agire secondo un metodo di razionamento nel quale non viene fatta distinzione tra gli altri settori industriali e la domanda finale.

Sia dato un sistema economico composto da  $N$  settori industriali e di questi si consideri l' $i$ -esimo. Sia  $x_i$  la produzione totale emessa dal settore e  $d_i$  la domanda totale ad esso pervenuta.

Nel caso in cui  $x_i < d_i$ , si deve procedere con il razionamento ed il  $j$ -esimo settore riceverà una fornitura di entità  $Z_{ij} = O_{ij} \frac{x_i}{d_i}$ , dove  $O_{ij}$  quantifica la domanda di materie che il settore  $j$  fa al settore  $i$ .

Si può fare riferimento a diversi altri articoli presenti in letteratura in cui questa metodologia viene impiegata per far fronte a situazioni di disastro, cioè situazioni in cui si assume che venga compromessa solo la produzione totale e non la domanda finale. Un primo esempio può essere Henriët et al. [2012] in cui viene studiato l'effetto che disastri naturali, come l'uragano Katrina, hanno sul sistema economico. Per fare ciò, dopo aver definito tutti gli elementi presenti nel modello, assumono che lo schema di razionamento per la distribuzione sia proporzionale e senza distinzione tra la domanda finale e la domanda intermedia. Altri richiami a questo schema di razionamento, descrittivi la situazione analoga a quanto presentata nel presente documento, sono Guan et al. [2020] e Pichler et al. [2020]. Nel primo documento vengono descritti gli effetti delle misure di contenimento per contrastare il COVID-19 sulle catene produttive globali distinguendo tre possibili scenari: l'epidemia diffusa solo in Cina, l'epidemia diffusa in Europa e negli Stati Uniti d'America e l'epidemia diffusa globalmente; nel secondo documento si studiano gli effetti delle restrizioni sull'economia del Regno Unito ed i possibili scenari per la

ripartenza. In entrambi i modelli viene assunto uno schema di razionamento proporzionale, senza distinzione tra i consumatori intermedi e quelli finali.

L'algoritmo è così strutturato: si inizializza la domanda totale uguale al livello di produzione massimo che si può raggiungere a seguito dello shock senza vincoli di produzione,  $\mathbf{d} = \mathbf{L}\mathbf{f}^{\text{MAX}}$ . Successivamente, si valuta se il settore  $i$  –esimo riesce a soddisfare la domanda pervenuta totalmente o solo parzialmente definendo  $r_i = \frac{x_i^{\text{MAX}}}{d_i}$ . Se  $r_i \geq 1$  il settore soddisfa completamente la richiesta, invece se  $r_i < 1$  la soddisfa solo parzialmente e dunque creerà una riduzione nella fornitura agli altri settori. Siccome nel modello Input-Output di Leontief si assume che le industrie richiedano quantità fisse di materie per la produzione, il vincolo di produzione per il settore  $i$  –esimo è determinato in base alla fornitura che riceve dagli altri settori e dunque è definito essere  $s_i = \min_{j:A_{ji}>0} \{r_j, 1\}$ . Nel caso in cui  $s_i < 1$ , la produzione totale del settore  $i$  –esimo si riduce a  $x_i = \min_{j:A_{ji}>0} \left\{ x_i^{\text{MAX}}, \frac{s_i A_{ji} d_i}{A_{ji}} \right\} = \min \{ x_i^{\text{MAX}}, s_i d_i \} < d_i$ . Questo calo determina una riduzione della domanda finale soddisfatta, che si limita a  $f_i = \max \{ x_i - \sum_j A_{ij} x_j, 0 \}$ . Dunque, noto il nuovo vettore di domanda finale soddisfatta è possibile aggiornare il vettore che contiene la domanda,  $\mathbf{d} = \mathbf{L}\mathbf{f}$ , e procedere nuovamente con la valutazione se la domanda può essere soddisfatta per intero. Il procedimento viene iterato finchè tutta la domanda viene soddisfatta e non ci sono vincoli di produzione.

**Algoritmo 1:** razionamento proporzionale, non ci sono distinzioni tra i consumatori intermedi (settori industriali) ed i consumatori finali. Sia dato il vettore di domanda totale soddisfatta  $\mathbf{f}[0] = \mathbf{f}^{\text{MAX}}$ , da cui il vettore di domanda iniziale risulta essere  $\mathbf{d}[1] = \mathbf{L}\mathbf{f}[0]$ . Facendo un ciclo per l'indice  $t = \{1, 2, \dots\}$  si ha il sistema iterato in avanti

$$r_i[t] = \frac{x_i^{\text{MAX}}}{d_i[t]},$$

$$s_i[t] = \min_{j:A_{ji}>0} \{r_j[t], 1\},$$

$$x_i[t] = \min\{x_i^{\text{MAX}}, s_i[t]d_i[t]\},$$



$$f_i[t] = \max\{x_i[t] - \sum_j A_{ij}x_j[t], 0\},$$

$$d_i[t+1] = \sum_j L_{ij}f_j[t].$$

L'algoritmo converge ad una nuova allocazione ammissibile se  $\forall i = 1, \dots, N$   $d_i[t+1] = d_i[t]$ . I livelli di produzione e domanda finale soddisfatti risultano essere rispettivamente  $x_i = x_i[t+1] = d_i[t+1]$  e  $f_i = f_i[t+1]$ .

## 2. Razionamento Proporzionale Prioritario

In un sistema economico le relazioni che ci sono tra settori industriali produttivi possono essere ritenute di maggiore importanza rispetto alle relazioni tra i settori industriali e la domanda dei consumatori finali e perciò si può procedere dando una priorità agli ordini e soddisfacendo prima la domanda intermedia e poi la domanda finale. Questa scelta può essere dibattuta, come fatto nello stesso articolo di Pichler and Farmer [Jan., 2021], poichè la domanda finale comprende numerose categorie tra cui le esportazioni, gli investimenti e la richiesta da parte del governo o di associazioni, sebbene sia stata fatta in diversi articoli presenti in letteratura. Un esempio di ciò è l'articolo di Battiston et al. [2007] in cui viene descritto un modello per poter determinare le conseguenze di fallimenti o agglomerazione di aziende. Al fine di studiare come si propaghi il fallimento, viene considerato un sistema economico in cui le industrie sono raggruppate in base allo stadio ricoperto nella produzione del bene finale. Il processo produttivo inizia a seguito della richiesta dal consumatore finale, giunto al settore che copre l'ultimo stadio produttivo, ed ogni settore esegue la richiesta per le materie prime necessarie nella propria produzione. La strategia di consegna assunta per i settori produttivi risulta essere proporzionale all'ordine, dando la priorità ai consumatori intermedi poichè soltanto l'ultimo settore nel processo produttivo è in relazione con il consumatore finale. Un ulteriore riferimento all'uso di questo schema di razionamento è l'articolo di Li et al. [2013] nel quale si modelizza il recupero dell'economia a seguito di un ipotetico allagamento che investe Londra nel 2020. Ipotizzando una riduzione nella capacità produttiva, si assume uno schema proporzionale e prioritario per la distribuzione delle materie e si tenta di studiare in quali condizioni l'economia

possa ritornare ai livelli precedenti il disastro.

L'algoritmo è strutturato sulla base di quello in 1 utilizzando un metodo proporzionale. Solo una è la modifica: il modello viene attuato dando la priorità ai settori industriali, il vincolo di produzione è determinato solo in base alla richiesta intermedia e la domanda finale non ha nessun ruolo.

**Algoritmo 2:** razionamento proporzionale prioritario, viene fatta una distinzione tra i consumatori intermedi (settori industriali) ed i consumatori finali e quelli intermedi hanno la priorità. Sia dato il vettore di domanda totale soddisfatta  $\mathbf{f}[0] = \mathbf{f}^{\text{MAX}}$ , da cui il vettore di domanda iniziale risulta essere  $\mathbf{d}[1] = \mathbf{L}\mathbf{f}[0]$ . Facendo un ciclo per l'indice  $t = \{1, 2, \dots\}$  si ha il sistema iterato in avanti

$$\begin{aligned} r_i[t] &= \frac{x_i^{\text{MAX}}}{\sum_{j:A_{ji}>0} A_{ij}d_j[t]}, \\ s_i[t] &= \min_{j:A_{ji}>0} \{r_j[t], 1\}, \\ x_i[t] &= \min\{x_i^{\text{MAX}}, s_i[t]d_i[t]\}, \\ f_i[t] &= \max\{x_i[t] - \sum_j A_{ij}x_j[t], 0\}, \\ d_i[t+1] &= \sum_j L_{ij}f_j[t]. \end{aligned}$$

L'algoritmo converge ad una nuova allocazione ammissibile se  $\forall i = 1, \dots, N$   $d_i[t+1] = d_i[t]$ . I livelli di produzione e domanda finale soddisfatti risultano essere rispettivamente  $x_i = x_i[t+1] = d_i[t+1]$  e  $f_i = f_i[t+1]$ .

### 3. Razionamento Prioritario basato sulla dimensione dell'ordine

Gli schemi di razionamento fino ad ora presentati assumono che un settore industriale sia propenso a distribuire il prodotto in proporzione all'ordine ricevuto tra tutti i clienti, o tra i clienti intermedi nel caso prioritario. Tuttavia, non è sempre detto che la politica aziendale voglia utilizzare questo metodo per varie ragioni: l'interesse può essere quello di rifornire prima i clienti che portano più guadagno all'attività oppure, per tempistiche lavorative, è meglio completare per intero un

ordine e poi passare al successivo piuttosto che lasciarli tutti incompleti. Dunque, i clienti vengono ordinati in base alla dimensione dell'ordine effettuato e successivamente si inizia la distribuzione dalla richiesta più ingente a quella più piccola. Così facendo solo i clienti con ordini modesti risentono delle variazioni; ancora una volta viene assunto il metodo prioritario in modo tale che le richieste intermedie vengano corrisposte prima che la richiesta dai consumatori finali.

Anche la metodologia di uno schema prioritario basato su una qualche caratteristica del cliente è già stata applicata in altri contesti rintracciabili in letteratura. Un esempio è l'articolo di Inoue and Todo [2019]. In tale sede si vuole definire un modello per predire gli effetti sul sistema economico giapponese di un terremoto, di nome Nankai, previsto in un breve futuro. Per fare ciò si definisce il sistema economico sulla base di quello giapponese corrente al momento dello studio ed i parametri sono calibrati usando i dati relativi al terremoto che colpì il Giappone nel 2011. Lo schema di distribuzione dei prodotti risulta ancora essere prioritario, ma in tale sede l'ordinamento è basato sulla dimensione dell'ordine, senza fare distinzioni tra consumatori intermedi e finali.

**Algoritmo 3:** razionamento basato sulla dimensione dell'ordine e prioritario. Sia dato il vettore di domanda totale soddisfatta  $\mathbf{f}[0] = \mathbf{f}^{\text{MAX}}$ , da cui il vettore di domanda iniziale risulta essere  $\mathbf{d}[1] = \mathbf{L}\mathbf{f}[0]$ . Per ogni industria si deve definire l'ordine di consegna del prodotto; il settore  $i$  –esimo classifica ogni suo consumatore intermedio  $j$  in base alla dimensione della domanda:  $h_{ij} = \{k_{(1)}, k_{(2)}, \dots, k_{(j)} : A_{ik_{(1)}}d_{k_{(1)}}[1] \geq A_{ik_{(2)}}d_{k_{(2)}}[1] \geq \dots \geq A_{ik_{(j)}}d_{k_{(j)}}[1]\}$ . Facendo un ciclo per l'indice  $t = \{1, 2, \dots\}$  si ha il sistema iterato in avanti

$$\begin{aligned}
 r_{ij}[t] &= \frac{x_i^{\text{MAX}}}{\sum_{n \in h_{ij}} A_{in(j)} d_{n(j)}[t]}, \\
 s_i[t] &= \min_{j: A_{ji} > 0} \{r_{ji}[t], 1\}, \\
 x_i[t] &= \min\{x_i^{\text{MAX}}, s_i[t]d_i[t]\}, \\
 f_i[t] &= \max\{x_i[t] - \sum_j A_{ij}x_j[t], 0\},
 \end{aligned}$$

$$d_i[t+1] = \sum_j L_{ij} f_j[t].$$

L'algoritmo converge ad una nuova allocazione ammissibile se  $\forall i = 1, \dots, N$   $d_i[t+1] = d_i[t]$ . I livelli di produzione e domanda finale soddisfatti risultano essere rispettivamente  $x_i = x_i[t+1] = d_i[t+1]$  e  $f_i = f_i[t+1]$ .

#### 4. Razionamento Prioritario in ordine casuale

Il metodo di razionamento presentato in 3 può non essere congeniale per l'attività lavorativa dei settori industriali. Infatti, per esempio, si possono soddisfare gli ordini in base alla successione definita dal momento in cui sono stati ricevuti. Questa può sembrare una buona approssimazione di ciò che accade nella realtà poichè, per non arrestare l'attività, il settore inizia la distribuzione appena giunge una richiesta, tuttavia non risulta di facile modellizzazione in quanto non sono presenti sufficienti dati in materia. Così per generalizzare questo caso senza porre troppa attenzione alla scelta fatta per organizzare gli ordini, si definisce un modello nel quale i clienti vengono strutturati in maniera casuale. Fatta questa scelta dell'ordine, si procede analogamente come fatto precedentemente nel caso 3, dunque si assume ancora un metodo prioritario. In effetti, anche questa è una scelta che si può rintracciare in altre fonti bibliografiche. Un riferimento è il documento di Poledna et al. [2019] in cui viene presentato un modello contenente tutti i settori economici riconosciuti dal Sistema Europeo tramite cui, immessi in ingresso i dati relativi ai settori, fare previsioni sul valore di variabili macroeconomiche a seguito di cambiamenti. I parametri del modello sono definiti sulla base dei dati economici austriaci; si assume che la richiesta di ordini e la distribuzione dei prodotti avvenga in maniera del tutto casuale, ossia il richiedente ponga la domanda di forniture ed essa venga soddisfatta in base alla disponibilità della produzione. Questo modello è stato in seguito usato per prevedere gli effetti economici delle chiusure in Austria per contrastare la diffusione del COVID-19.

**Algoritmo 4:** razionamento basato sull'ordine casuale e prioritario. Sia dato il vettore di domanda totale soddisfatta  $\mathbf{f}[0] = \mathbf{f}^{\text{MAX}}$ , da cui il vettore di domanda

iniziale risulta essere  $\mathbf{d}[1] = \mathbf{Lf}[0]$ . Per ogni industria si deve definire l'ordine di consegna del prodotto; il settore  $i$  –esimo classifica ogni suo consumatore intermedio  $j$  in maniera casuale:  $h_{ij} = \{k_{(1)}, k_{(2)}, \dots, k_{(j)}\}$  è casuale. Facendo un ciclo per l'indice  $t = \{1, 2, \dots\}$  si ha il sistema iterato in avanti

$$\begin{aligned} r_{ij}[t] &= \frac{x_i^{MAX}}{\sum_{n \in h_{ij}} A_{in(j)} d_{n(j)}[t]}, \\ s_i[t] &= \min_{j: A_{ji} > 0} \{r_{ji}[t], 1\}, \\ x_i[t] &= \min\{x_i^{MAX}, s_i[t] d_i[t]\}, \\ f_i[t] &= \max\{x_i[t] - \sum_j A_{ij} x_j[t], 0\}, \\ d_i[t+1] &= \sum_j L_{ij} f_j[t]. \end{aligned}$$

L'algoritmo converge ad una nuova allocazione ammissibile se  $\forall i = 1, \dots, N$   $d_i[t+1] = d_i[t]$ . I livelli di produzione e domanda finale soddisfatti risultano essere rispettivamente  $x_i = x_i[t+1] = d_i[t+1]$  e  $f_i = f_i[t+1]$ .

Non è detto che questi algoritmi convergano, ma se succede allora le allocazioni ottenute sono automaticamente accettabili: ogni settore non ammette produzione totale negativa o produzione totale superiore ai limiti massimi, non soddisfa una domanda finale negativa o superiore alla domanda finale massima e non ci sono vincoli di produzione.

### 4.2.1 Implementazione

Si consideri lo stato Germania; si mostra nel dettaglio come vengono implementati questi algoritmi e la soluzione ottenuta.

Innanzitutto, vengono caricati i dati riguardanti i 55 settori economici analizzati dalla tabella contenuta nel *World Input Output Database* inerenti alla Germania. Successivamente vengono ad essi applicati i 4 metodi definiti tramite gli algoritmi descritti sopra. Nel caso dell'algoritmo 4 il metodo viene iterato più volte in modo tale da ottenere diverse configurazioni definite dai settori, che vengono ordinati in maniera casuale tramite la funzione *sample*. Così facendo, è possibile calcolare la media dei valori di produzione totale e di domanda finale totale soddisfatta ottenuti ed il primo e terzo quantile. Infine,

vengono definiti il valore totale di produzione emessa, ottenuto sommando la produzione di ogni settore, ed il valore totale di domanda soddisfatta, ottenuto in simil maniera. In appendice H vengono riportate le tabelle contenenti i valori per la Germania.

Per gli stati Spagna ed Italia l'implementazione dei metodi di razionamento e la procedura da seguire sono medesime a quelle descritte sopra cambiando solo le tabelle di dati in input; in appendice H vengono descritti i risultati ottenuti.

## **4.3 Risultati**

Si presentano i risultati aggregati ottenuti applicando i metodi di ottimizzazione e di razionamento sopra descritti ai dati inerenti ai tre stati in esame. In primis si mettono in relazione i dati riguardanti la situazione precedente alla pandemia COVID-19 e quelli con le variazioni a seguito dello shock; poi si valuta il comportamento dei sistemi economici con la modifica nell'entità dello shock stesso.

### **4.3.1 Analisi dei dati inerenti alla Germania**

Per poter comparare i risultati che sono stati ottenuti attraverso i metodi implementati per i dati che riguardano la Germania, si analizza un grafico contenente l'impatto dello shock diretto e di ogni metodo di azione, che sia la massimizzazione o il razionamento. Per valutare questo effetto si definisce, in ascissa, la percentuale di domanda finale soddisfatta nei livelli pre-shock che viene compiuta a seguito dello shock e, in ordinata, la percentuale di produzione totale nei livelli pre-shock realizzata a seguito dello shock. Si assume che un'allocazione risulta essere ammissibile se essa giace sul grafico della funzione identità, ossia se lo shock affrontato dal lato produzione risulta circa uguale a quello lato domanda; al contrario una allocazione è non ammissibile se vede uno squilibrio tra la variazione lato produzione e lato domanda.

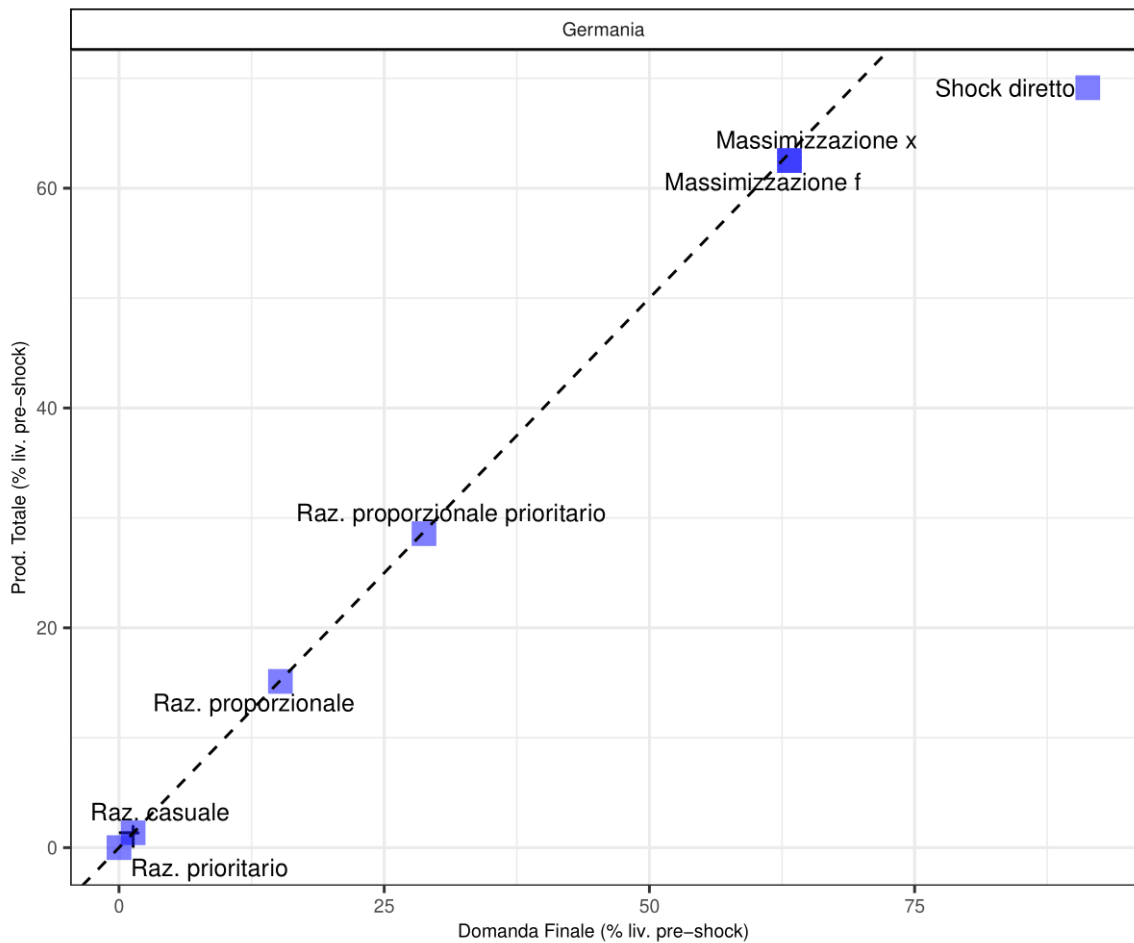


Figura 4.1: Comparazione dei metodi di propagazione dello shock per Germania

Si può subito notare che solo lo shock diretto fornisce una allocazione non ammissibile; inoltre, come atteso, i metodi di massimizzazione di produzione e domanda finale definiscono il limite superiore per le allocazioni ammissibili dei metodi di razionamento, anche se comunque riducono l'entità dello shock diretto passando dal 69% al 63% di produttività. I metodi di razionamento prioritario sia con un ordine basato sulla dimensione della richiesta che con un ordine casuale forniscono livelli di produzione e consumo pari a zero, dunque portano tutto il sistema economico al collasso. Infine, il metodo di razionamento proporzionale prioritario riduce la produttività di oltre il 70%, mentre il proporzionale fa quasi collassare il sistema economico portando la produttività a circa il 15%.

### 4.3.2 Analisi dei dati inerenti alla Spagna

Di seguito si riporta il grafico contenente i dati relativi alla Spagna.

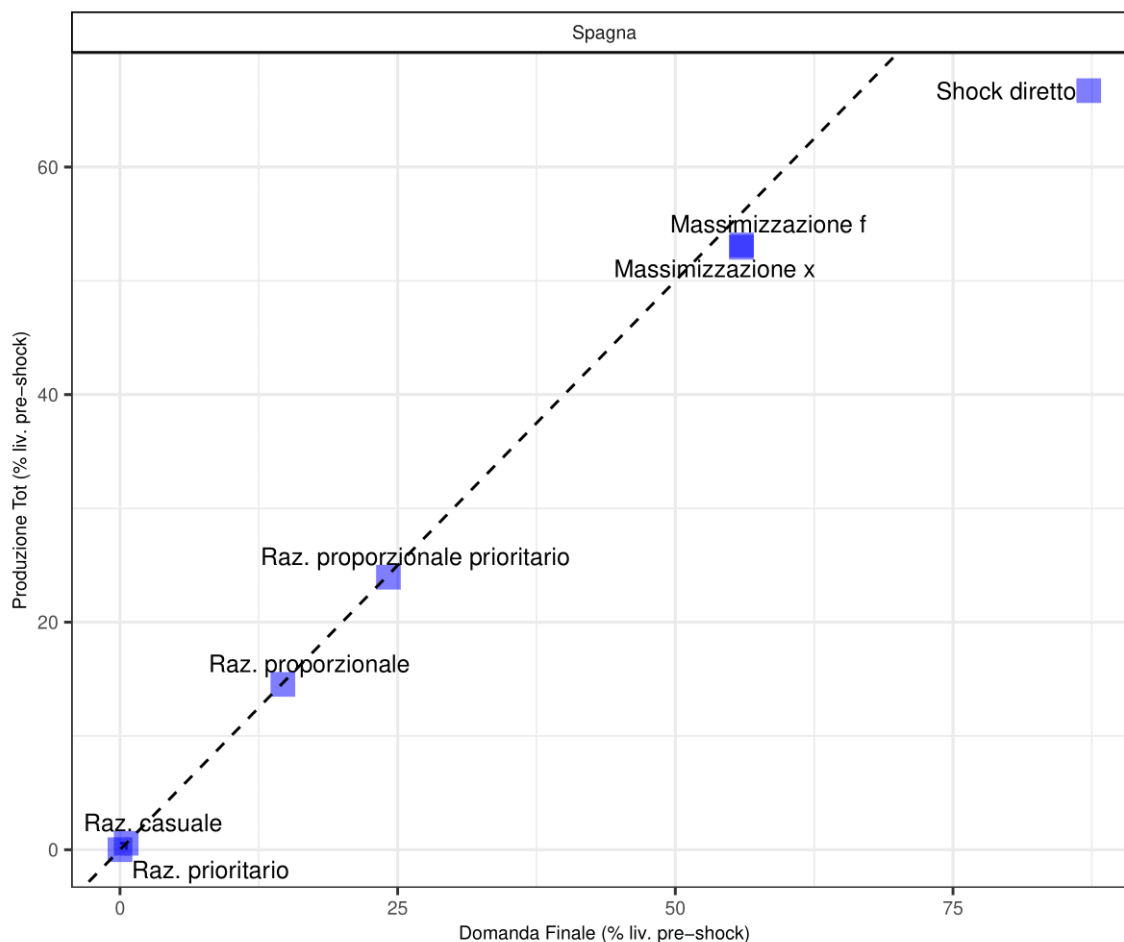


Figura 4.2: Comparazione dei metodi di propagazione dello shock per Spagna

Anche per la Spagna lo shock diretto fornisce una allocazione non ammissibile, mentre tutti i metodi di propagazione dello shock calcolano allocazioni ammissibili. Ancora, i metodi di massimizzazione definiscono il limite superiore per le allocazioni ammissibili ottenute tramite gli schemi di razionamento, anche se riducono la produttività del sistema dal 67% dello shock diretto al 53%, ed entrambi i metodi di razionamento prioritario portano il sistema economico al collasso. Il metodo di razionamento proporzionale prioritario riduce la produttività del sistema di oltre il 70%, mentre il proporzionale fa quasi collassare il sistema proporzionale portando la produttività a circa il 15%.



### 4.3.3 Analisi dei dati inerenti all'Italia

Si mostra il grafico con i dati relativi all'Italia.

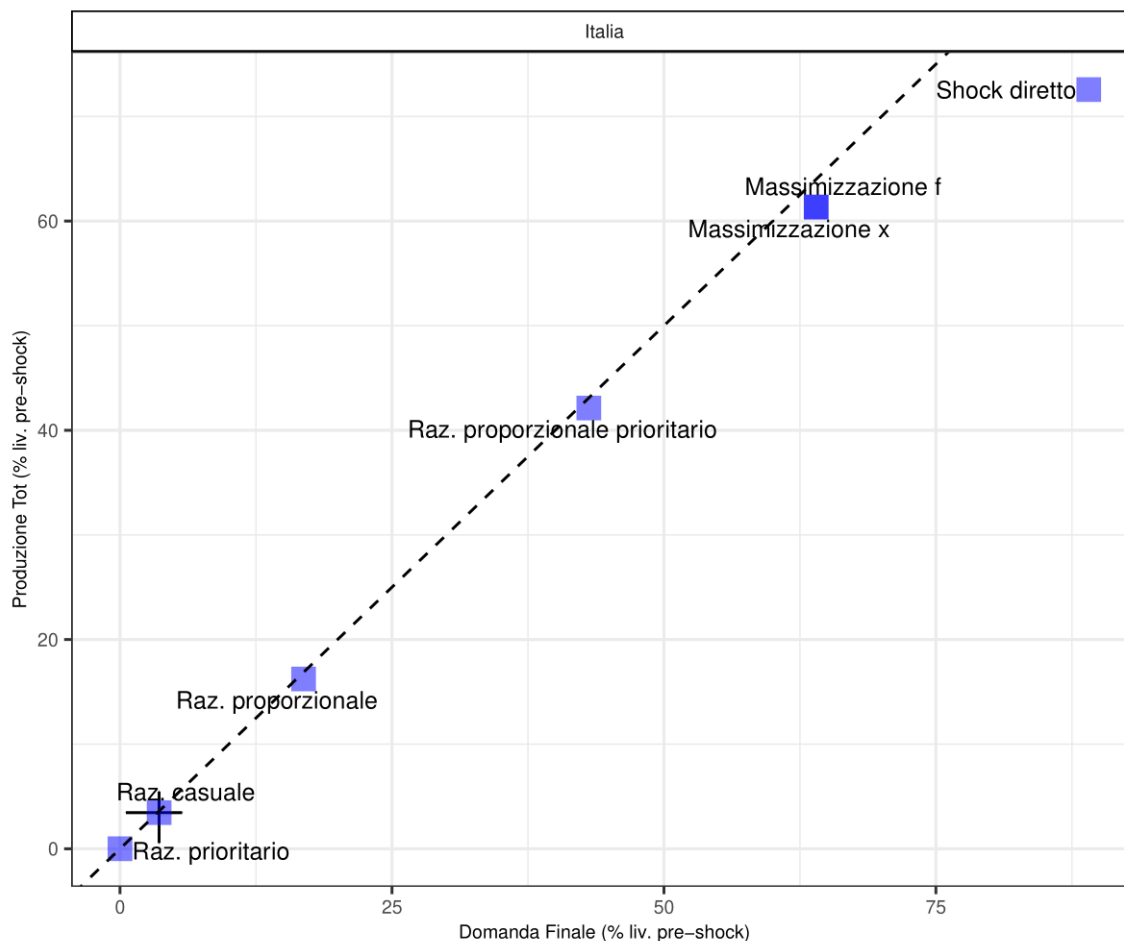


Figura 4.3: Comparazione dei metodi di propagazione dello shock per Italia

Nel caso dell'Italia, come per i precedenti stati, lo shock diretto attribuisce al sistema economico allocazioni non ammissibili, poichè l'entità della variazione in produzione differisce alquanto da quella nella domanda. I metodi di massimizzazione definiscono il limite superiore per le allocazioni ammissibili date dagli schemi di razionamento, comunque riducendo la produttività del sistema da oltre il 70% per lo shock diretto a quasi il 60%. Di nuovo, i metodi di razionamento prioritario basati sull'ordine casuale e sull'ordine derivante dall'entità della domanda portano livelli di produttività e richiesta pressochè nulli. Infine, il metodo di razionamento proporzionale porta il sistema pressochè al collasso con un'attività intorno al 15%, mentre il metodo di razionamento proporzionale prioritario riduce la produttività di circa il 60%.

Dunque, è chiaro che l'impatto che lo shock ha sul sistema economico dipende fortemente dalle decisioni prese per gestire la situazione.

#### 4.3.4 Variazione dell'entità degli shock

Come dimostrato nella precedente sezione, l'impatto economico della variazione in produzione emessa e domanda finale soddisfatta dipende dal metodo di azione scelto. Ora, si mostra che l'effetto economico dipende anche dall'entità degli shock stessi. Per fare questo si definiscono due parametri che riscalino gli shock e si applicano i metodi risolutivi ai nuovi dati per poterne analizzare i risultati.

Siano  $\delta^S$  e  $\delta^D \in [0,1]$  i due parametri e la produzione totale e la domanda finale siano definite come

$$\begin{aligned}x_i^{MAX} &= (1 - \delta^S \epsilon_i^S) x_{i,0}, \\f_i^{MAX} &= (1 - \delta^D \epsilon_i^D) f_{i,0}.\end{aligned}$$

Ora si mostra, per ogni stato, come varino le soluzioni di produzione totale e domanda finale ottenute applicando i diversi metodi di ottimizzazione e razionamento nel caso in cui sia presente solo lo shock lato produzione ( $\delta^D = 0$ ), solo shock lato domanda ( $\delta^S = 0$ ) o siano presenti entrambi ( $\delta^S \neq 0, \delta^D \neq 0$ ).

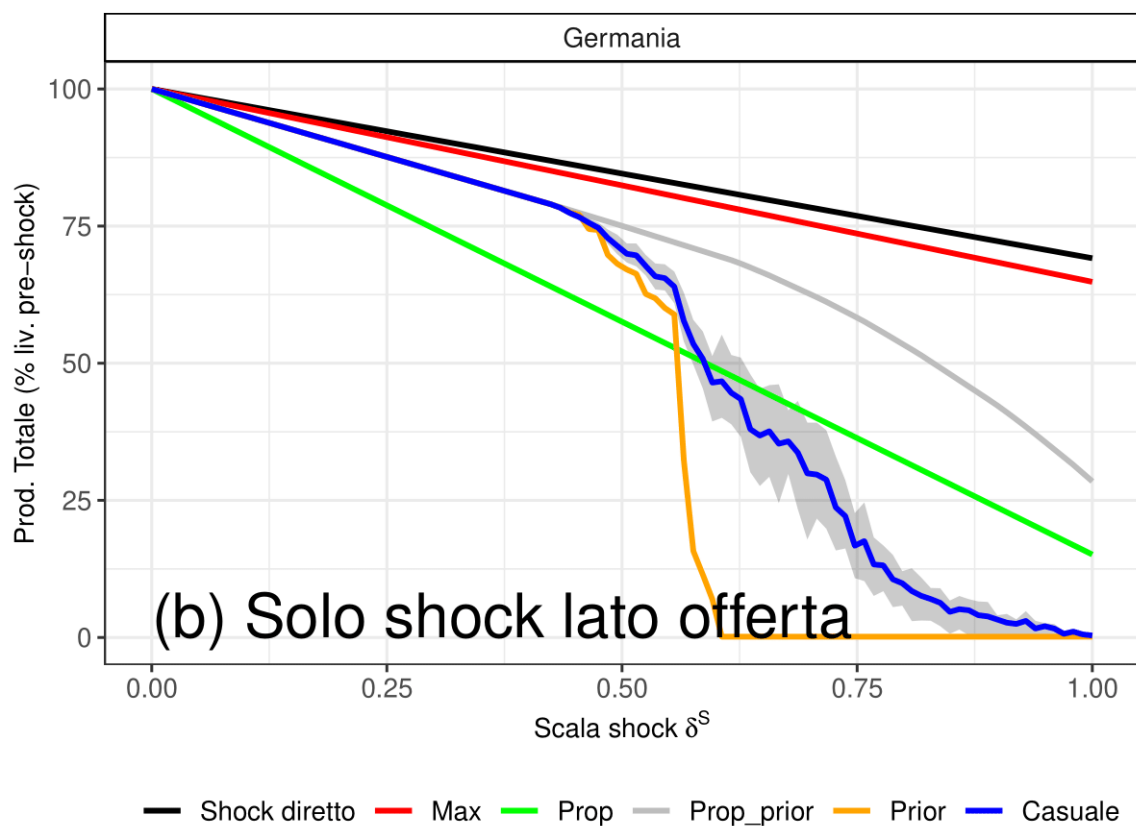
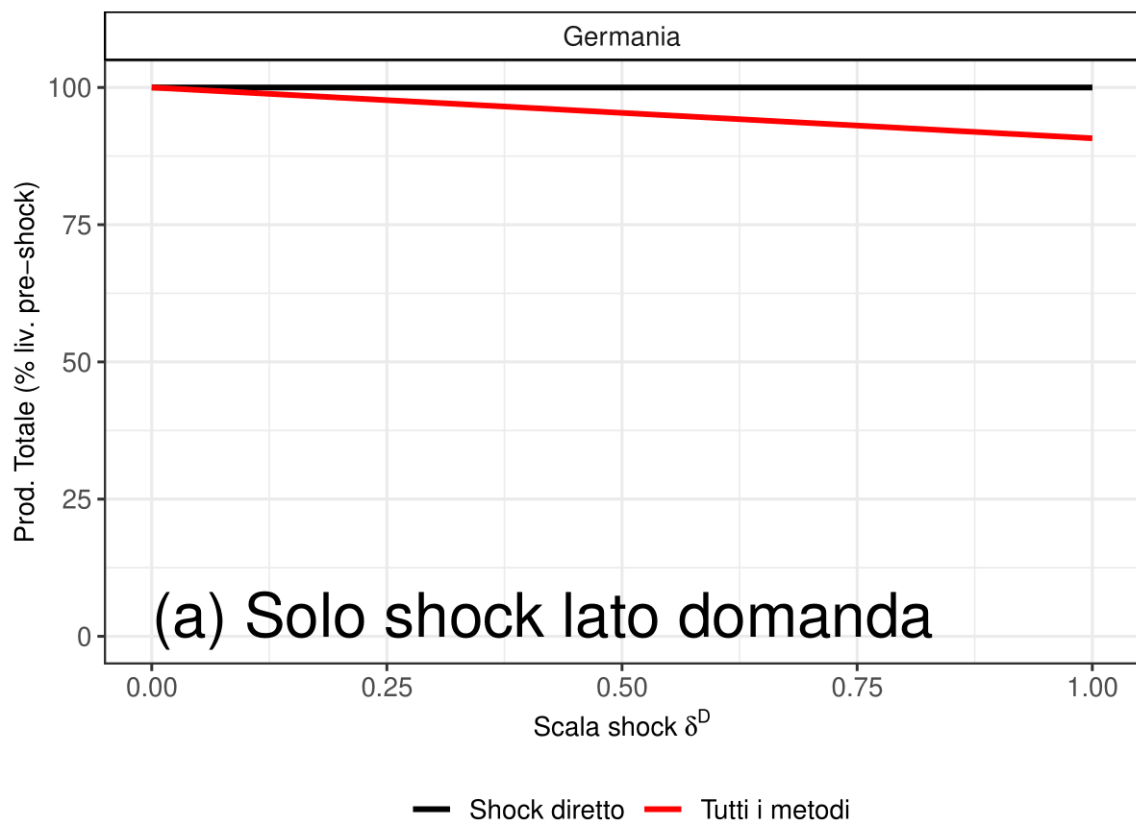


Figura 4.4: Comparazione shock nella produzione Germania

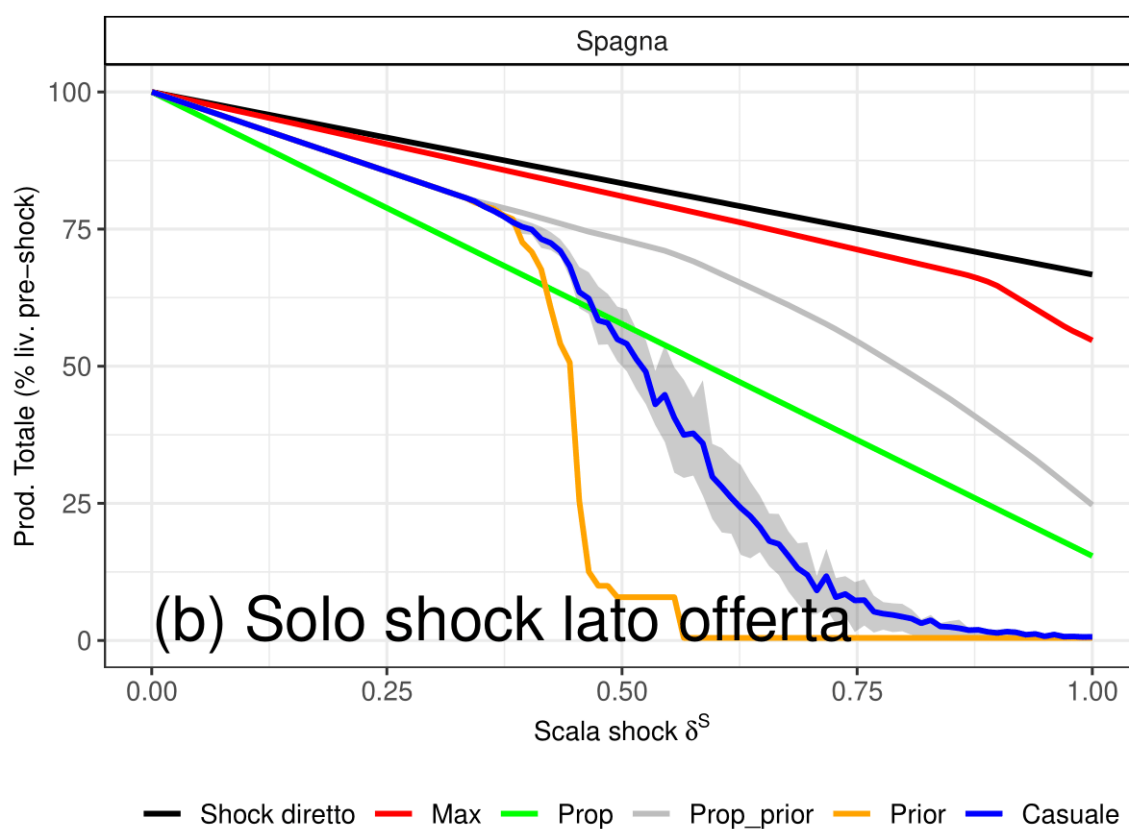
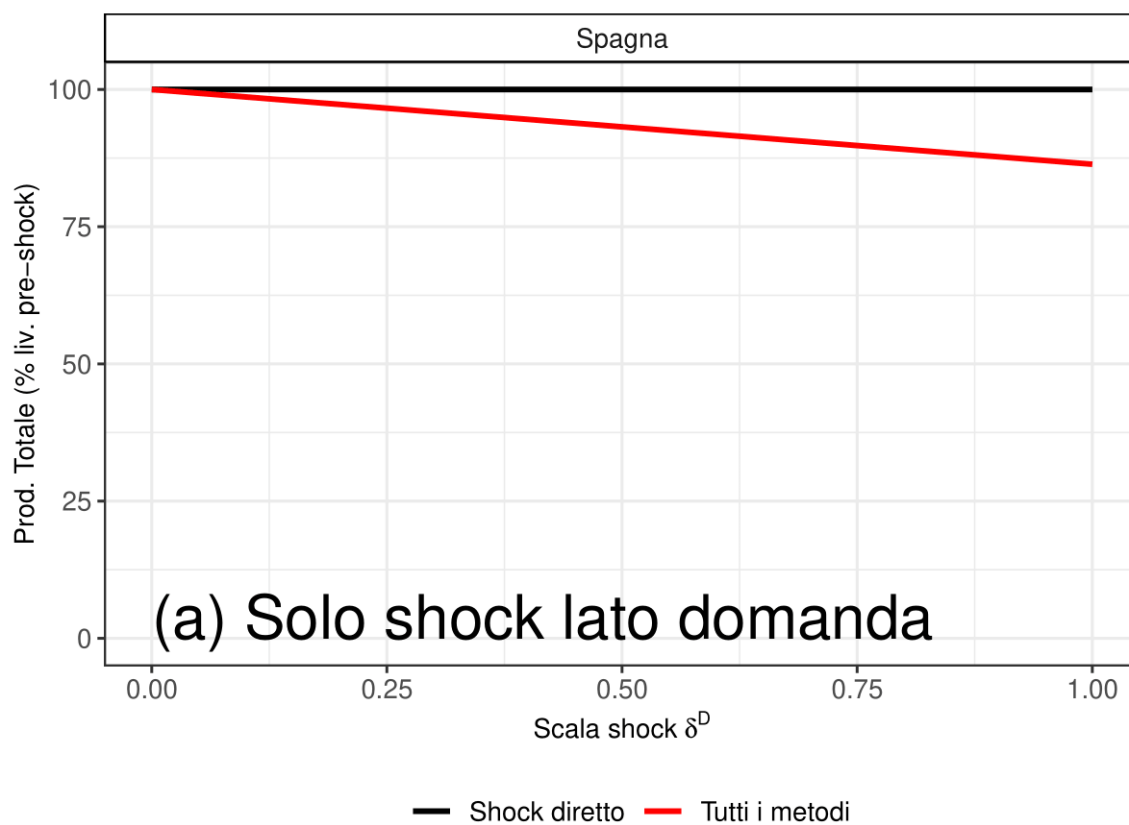


Figura 4.5: Comparazione shock nella produzione Spagna

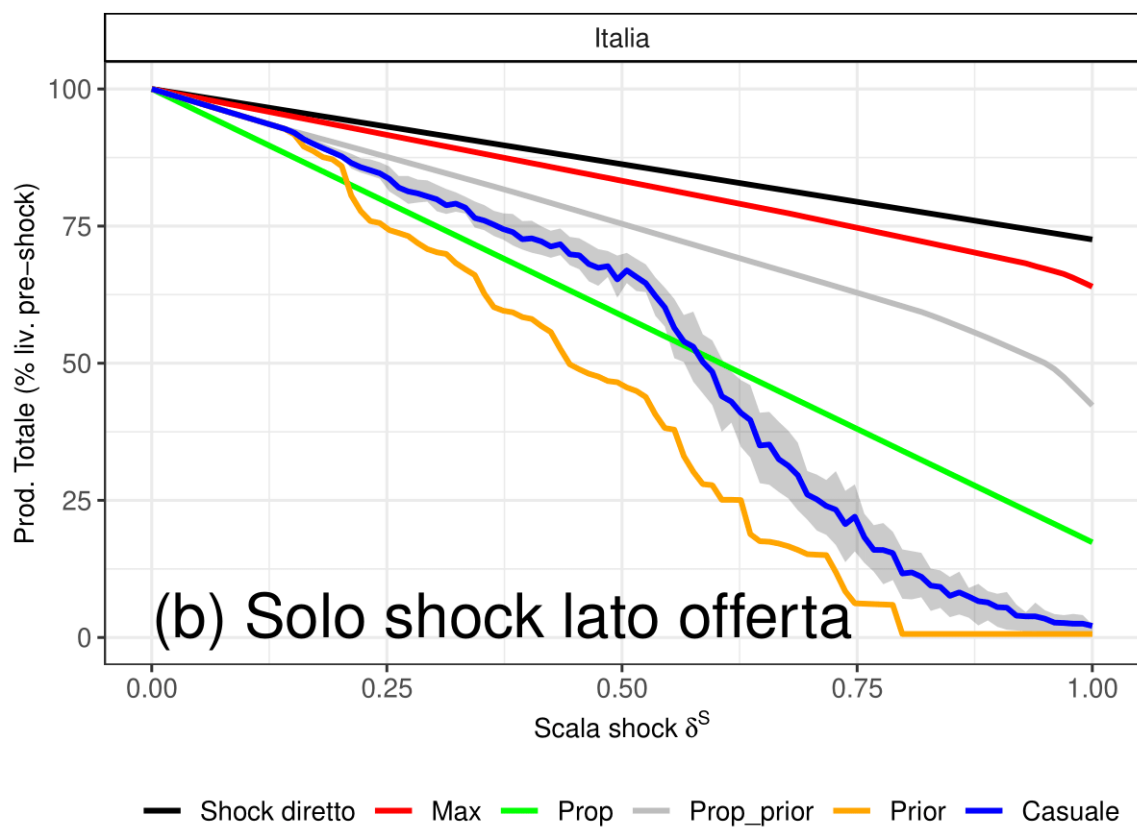
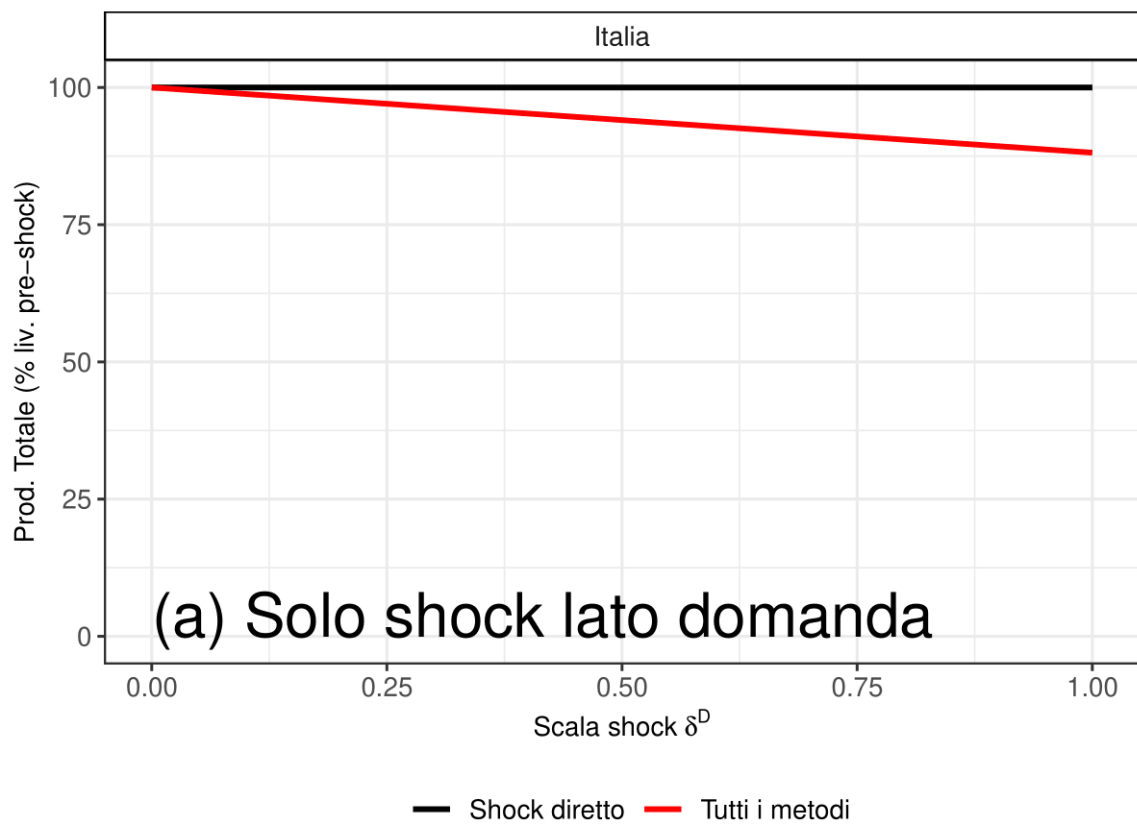


Figura 4.6: Comparazione shock nella produzione Italia

Considerando la produzione totale dei tre stati, si può notare un simile andamento in relazione alla dimensione dello shock. Infatti, nel caso in cui si verifichi solo variazione nel lato domanda finale, si osserva che tutti i risultati dei metodi di razionamento e di massimizzazione portano lo stesso andamento e dipendono linearmente dalla dimensione dello shock. Osservando la variazione nel lato produzione, invece, i livelli di produzione totale variano con i diversi metodi e lo shock diretto definisce il limite superiore per la soluzione e scala linearmente con la grandezza dello shock. Per piccole dimensioni di  $\delta^S$ , i risultati di tutti i metodi dipendono linearmente dalla grandezza del parametro, mentre per grandi dimensioni essi deviano fortemente. Il metodo di razionamento proporzionale prioritario dà la migliore soluzione tra quelle dei metodi di razionamento. Invece l'algoritmo di razionamento prioritario basato sulla dimensione dell'ordine porta velocemente il sistema economico al collasso; l'algoritmo di razionamento prioritario casuale porta l'economia al crollo anche se più lentamente.

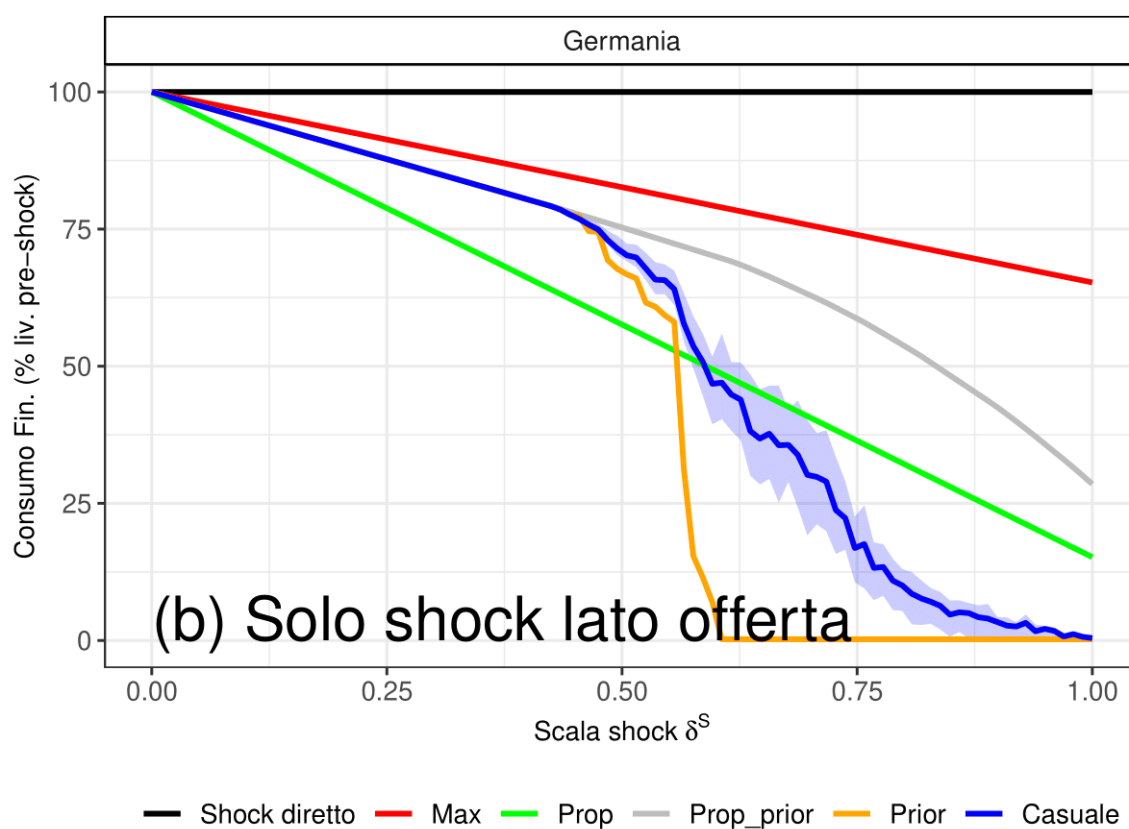
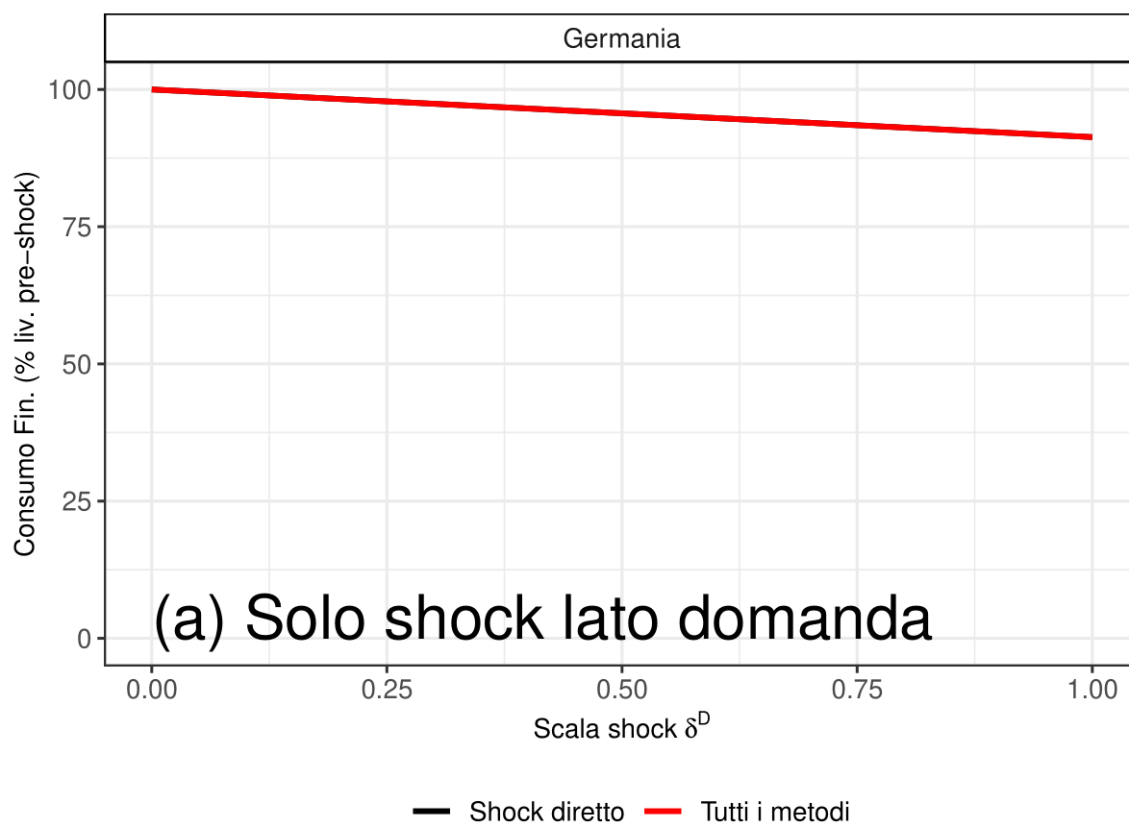


Figura 4.7: Comparazione shock nella domanda Germania

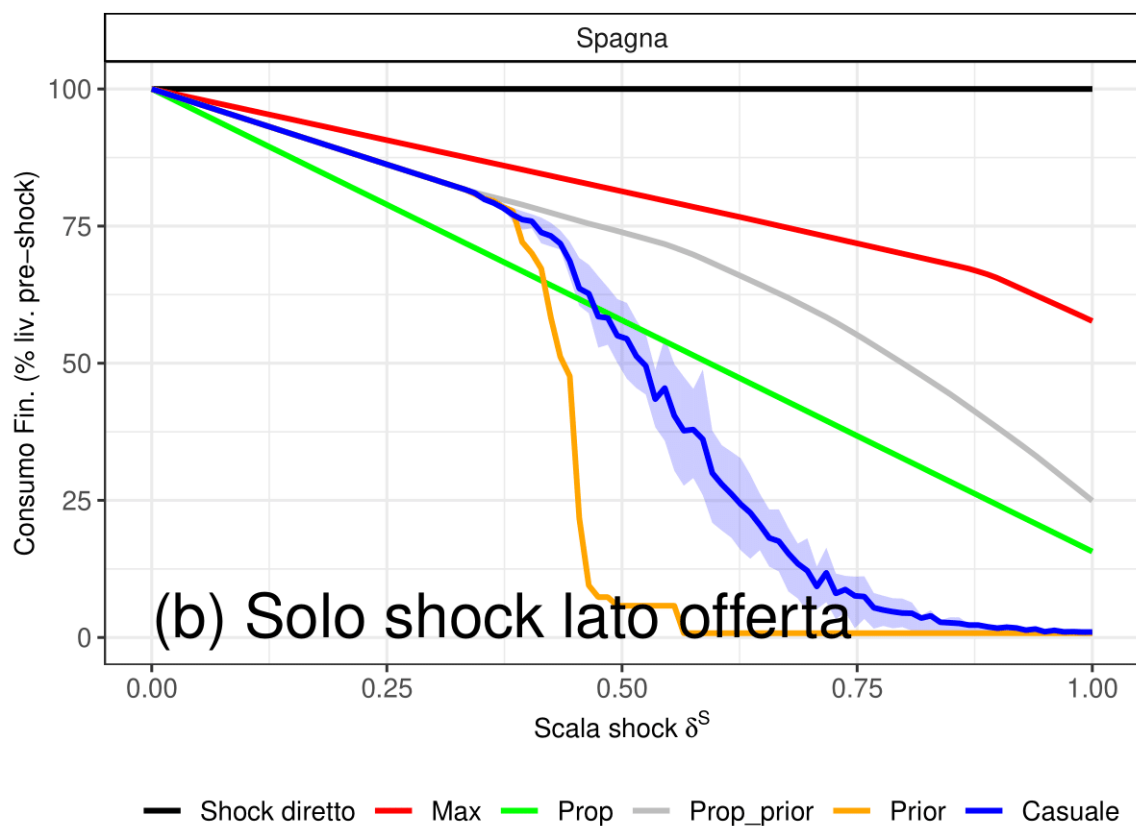
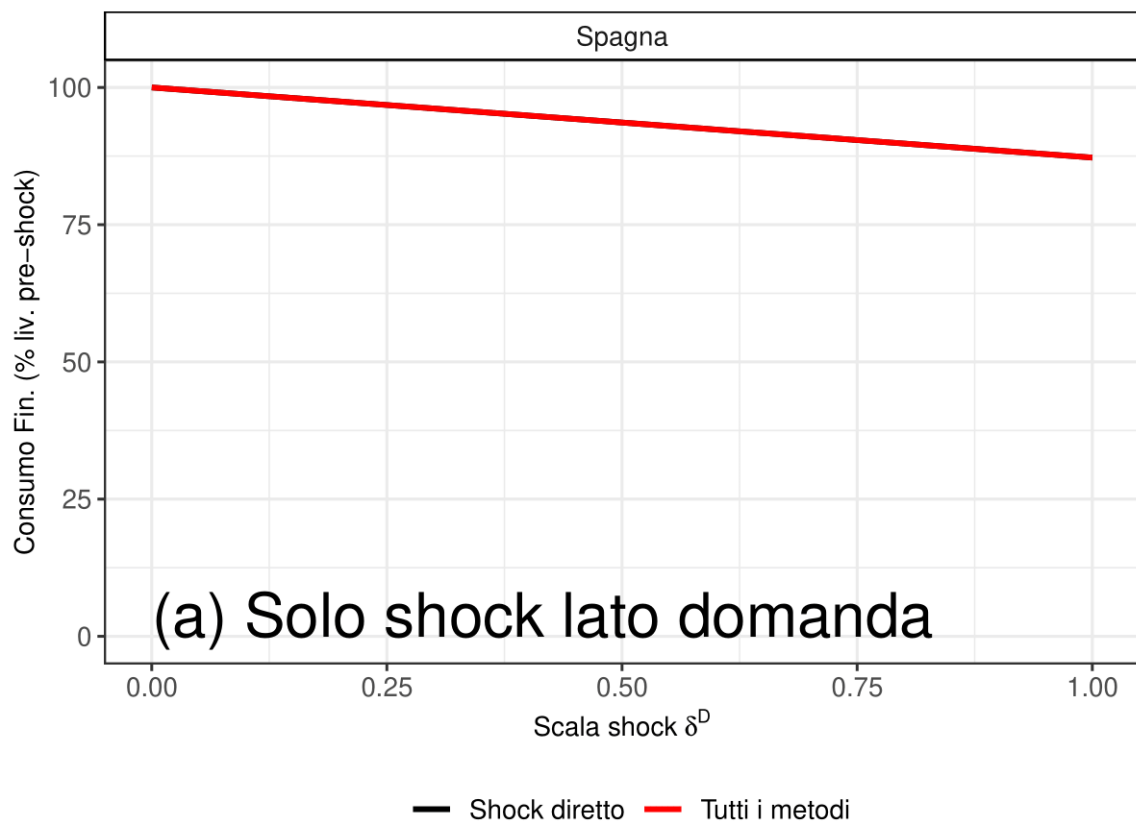


Figura 4.8: Comparazione shock nella domanda Spagna



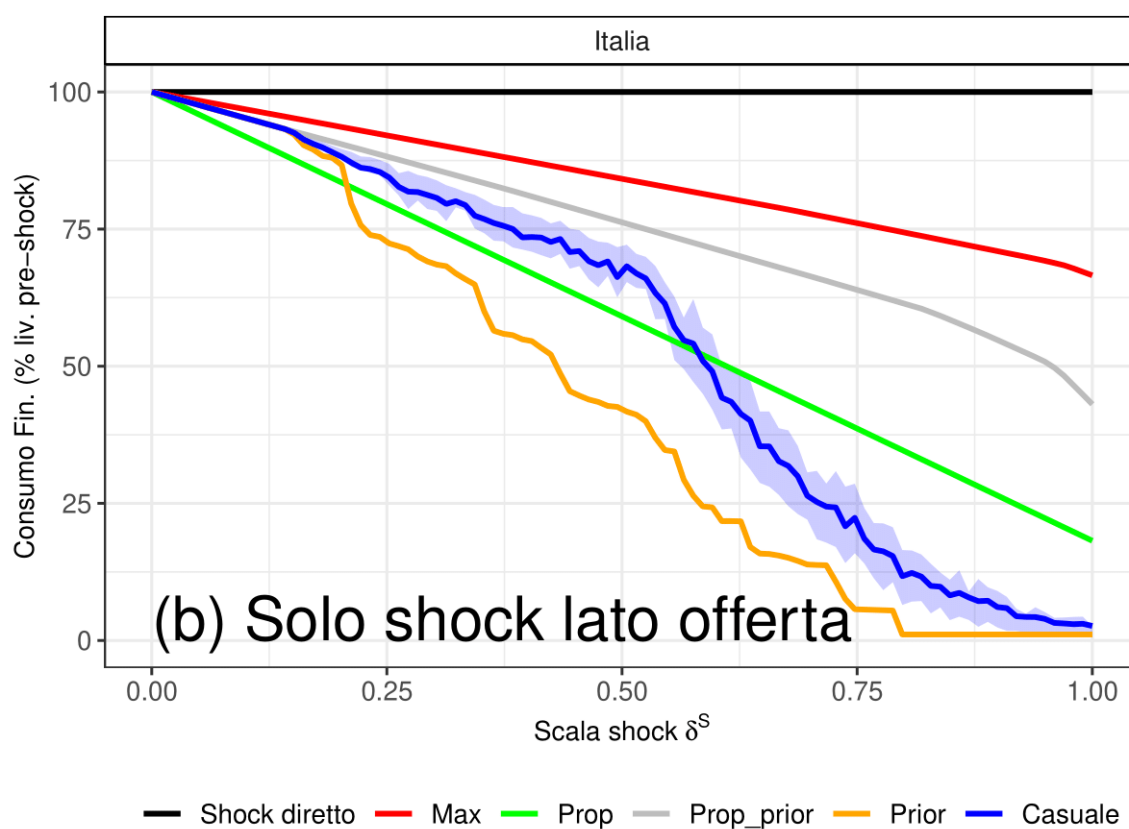
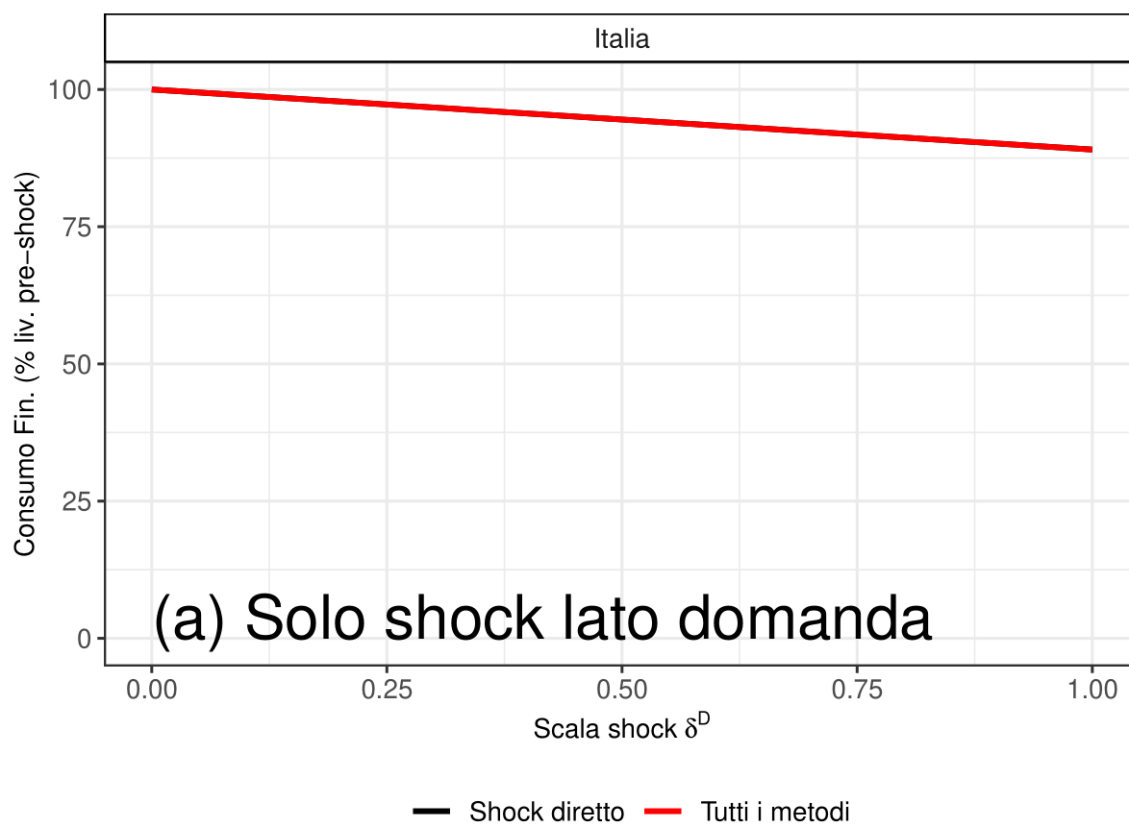


Figura 4.9: Comparazione shock nella domanda Italia

Anche esaminando i grafici relativi ai tre stati relativi all'andamento della domanda finale in relazione a shock nella domanda o nella produzione totale si può osservare un simil trend dei risultati ottenuti tramite i metodi. Infatti, se c'è una variazione nella stessa domanda il consumo non presenta un diretto cambiamento, mentre i metodi di massimizzazione e razionamento forniscono per ognuno degli stati risultati uguali che dipendono linearmente dalla dimensione di  $\delta^D$ . Invece, valutando il consumo finale in relazione a  $\delta^S$  non nulli, per piccoli valori di esso i risultati scalano linearmente con la sua dimensione, mentre per alti valori la direzione varia. Il metodo di razionamento proporzionale prioritario dà anche in questa situazione la migliore soluzione tra quelle dei metodi di razionamento ed, ancora, gli algoritmi di razionamento prioritario portano il sistema economico collasso, sebbene quello casuale sia più dolce.

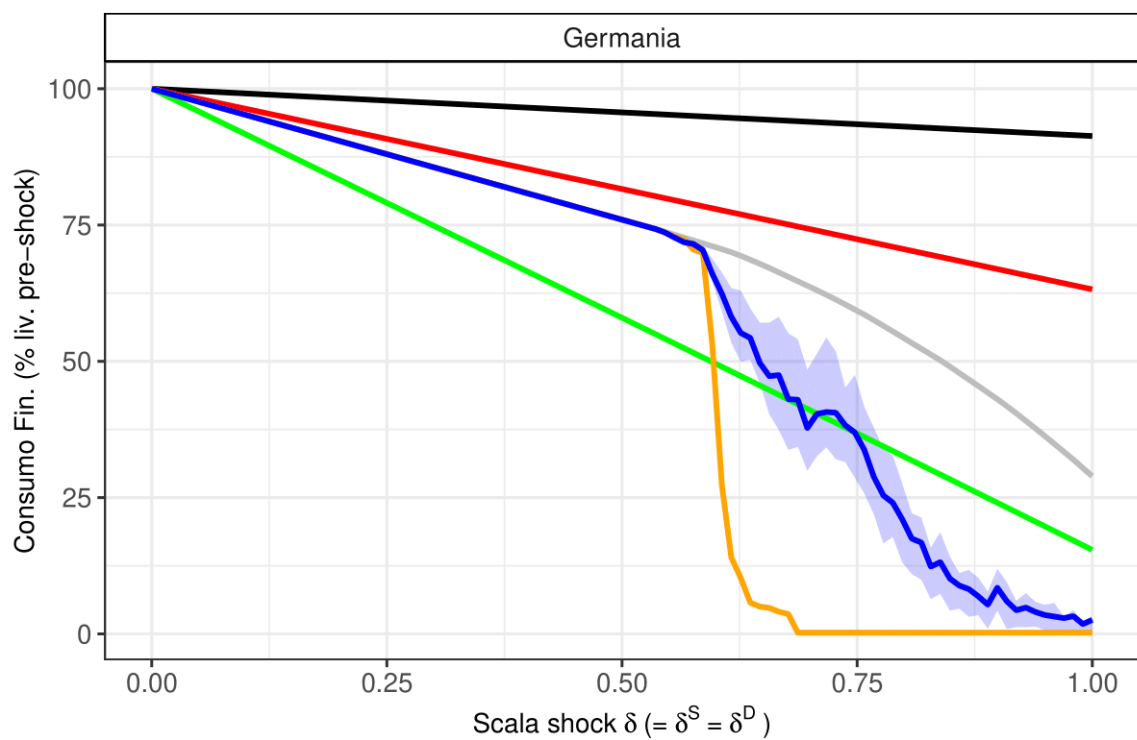
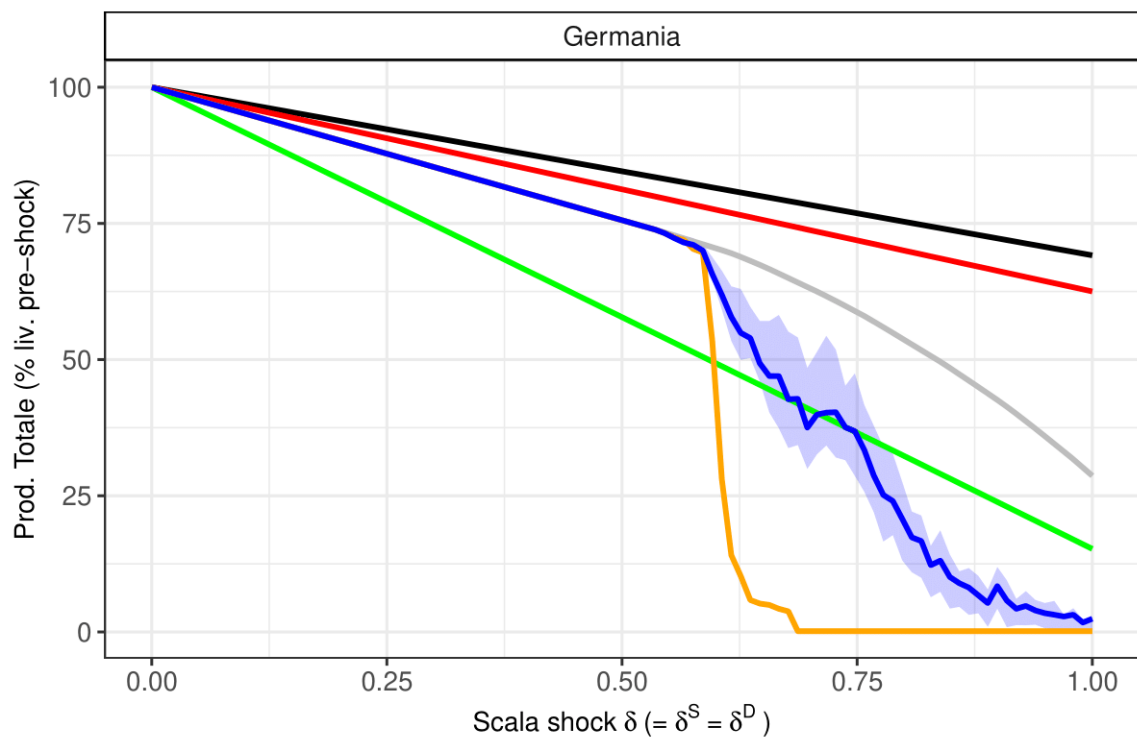
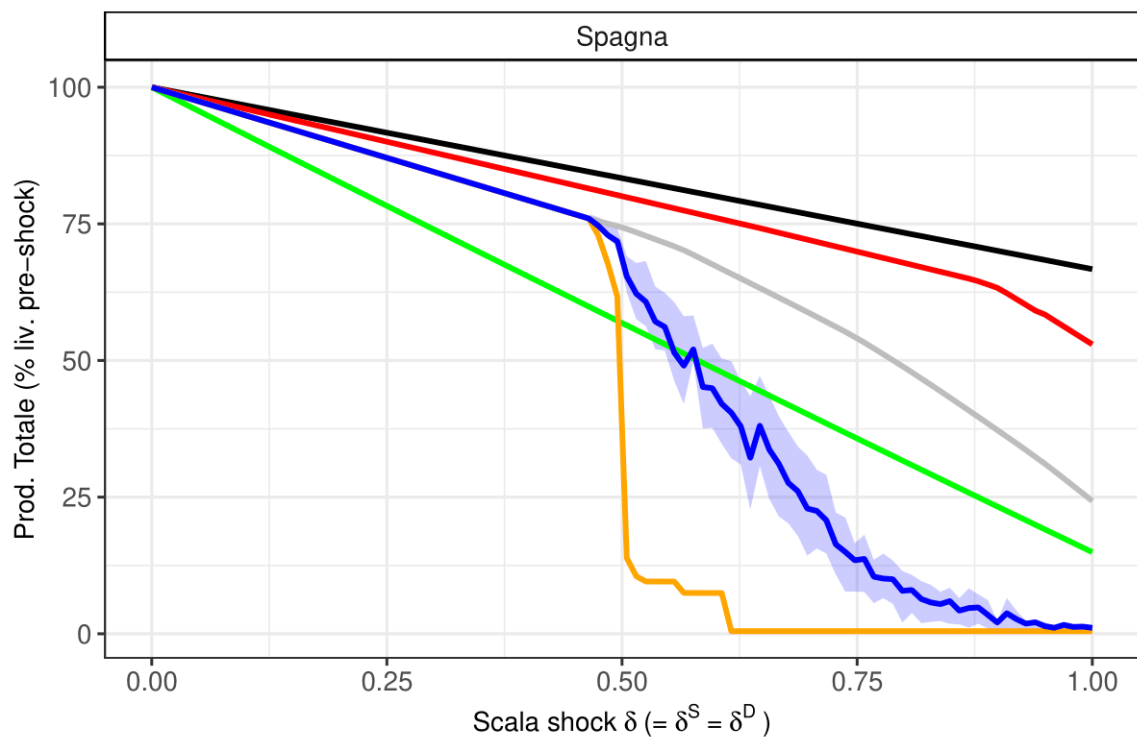
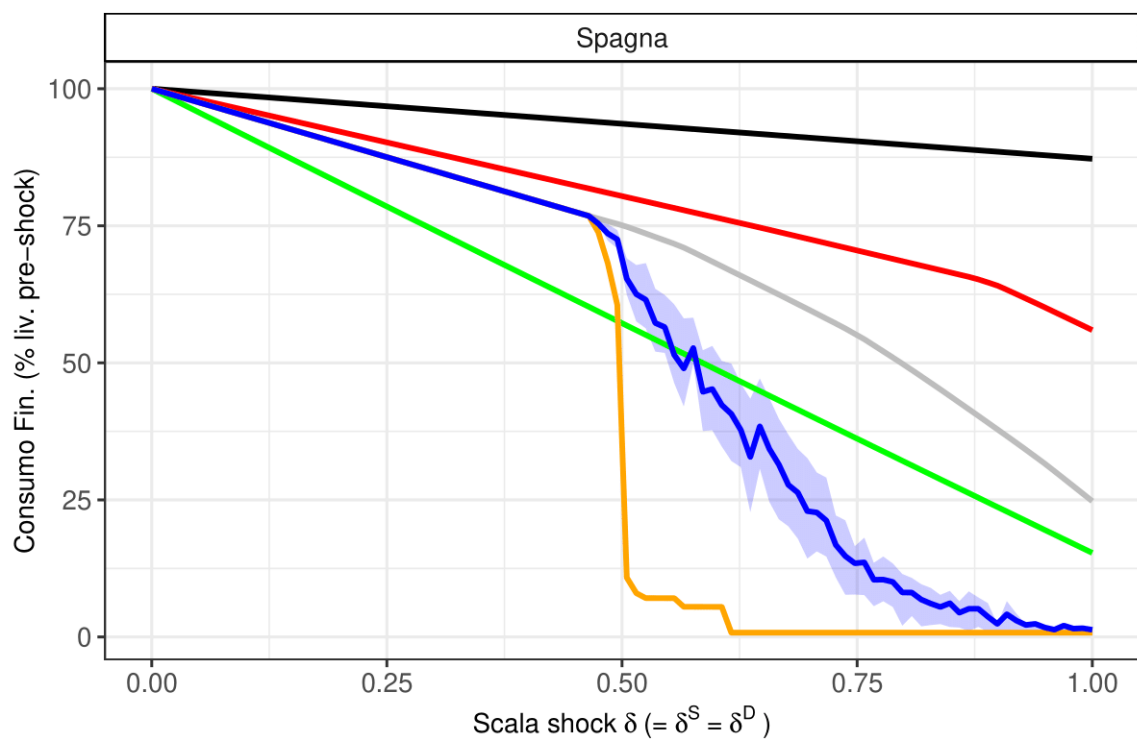


Figura 4.10: Comparazione shock sia nella produzione sia nella domanda Germania

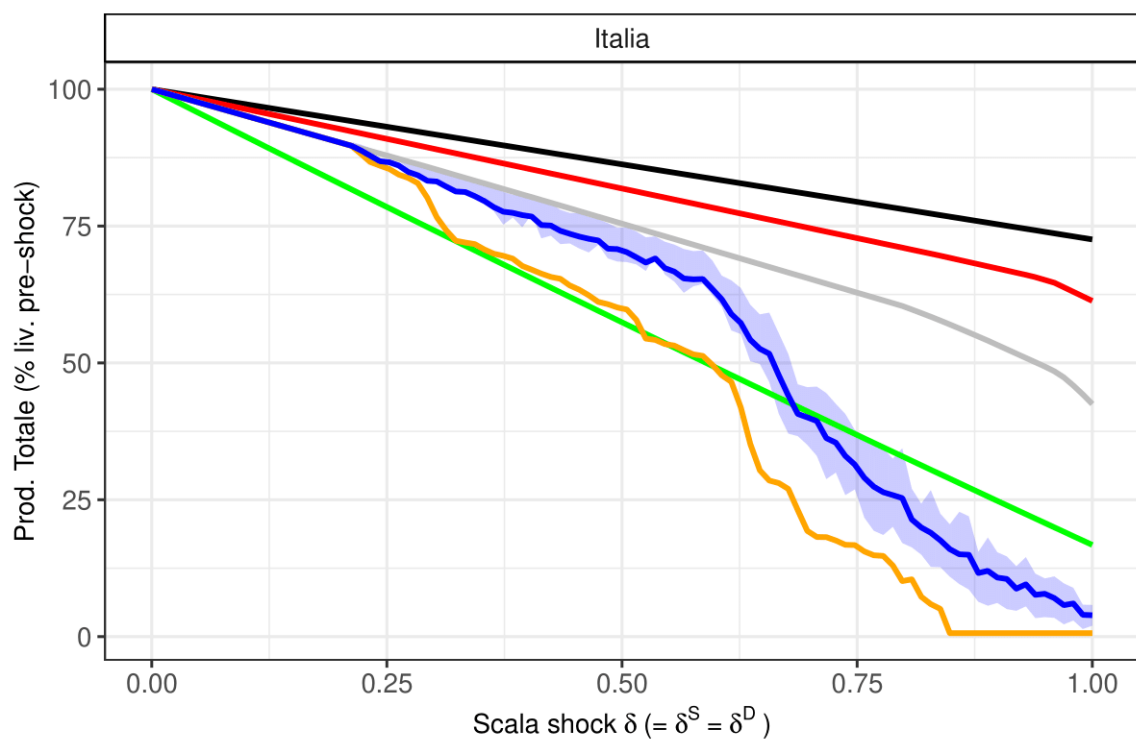


— Shock diretto — Max — Prop — Prop\_prior — Prior — Casuale

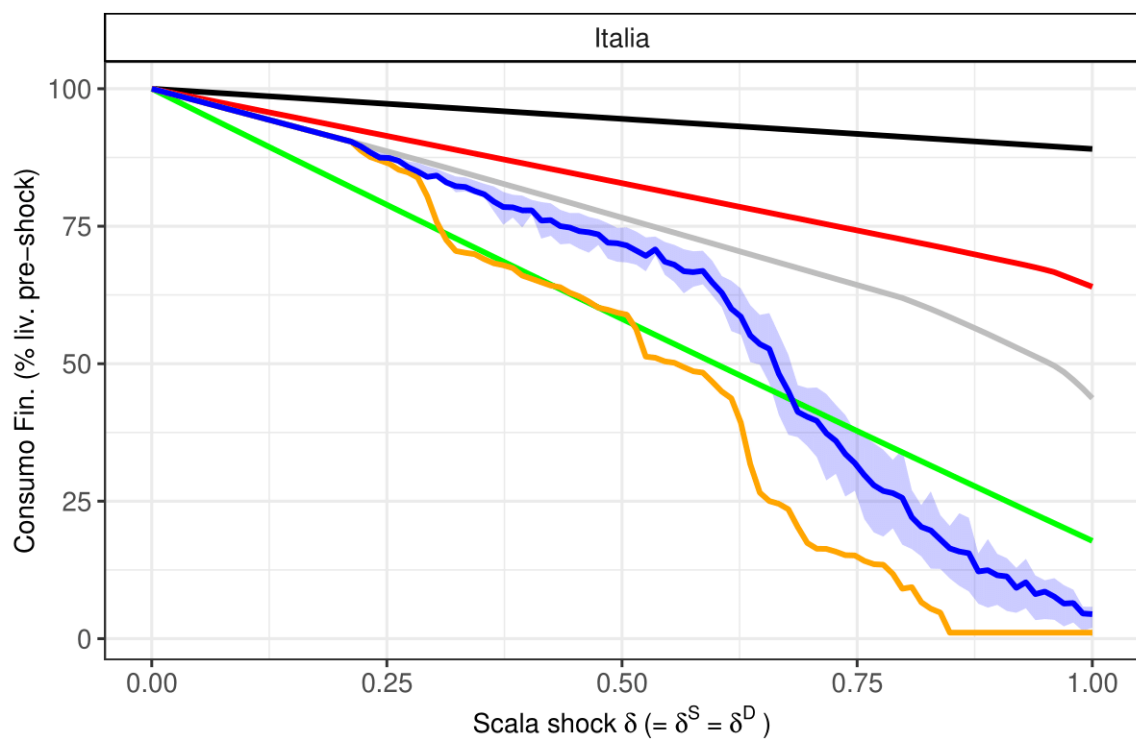


— Shock diretto — Max — Prop — Prop\_prior — Prior — Casuale

Figura 4.11: Comparazione shock sia nella produzione sia nella domanda Spagna



— Shock diretto — Max — Prop — Prop\_prior — Prior — Casuale



— Shock diretto — Max — Prop — Prop\_prior — Prior — Casuale

Figura 4.12: Comparazione shock sia nella produzione sia nella domanda Italia

Infine, valutando la situazione in cui i settori economici osservano cambiamenti sia nella produzione che nella domanda, la produzione totale ed il consumo finale totale hanno un andamento simile, sebbene esso vari da stato a stato.

Nel caso della Germania e della Spagna, per piccoli valori di  $\delta^S$  e  $\delta^D$  tutti i metodi forniscono soluzioni sia di produzione sia di domanda che scalano linearmente con la grandezza del parametro: i metodi di massimizzazione definiscono un limite superiore per le soluzioni, mentre il metodo proporzionale, secondo il quale ogni consumatore conosce il calo in proporzione alla domanda, definisce il limite inferiore dei valori di produzione totale e consumo finale. Per valori di  $\delta^S$  e  $\delta^D$  uguali o superiori a 0.50, invece, si verifica la deviazione negli andamenti: il metodo proporzionale continua a scalare linearmente con la grandezza del parametro, mentre i metodi di razionamento prioritario portano il sistema economico al collasso. Il metodo prioritario basato sulla dimensione dell'ordine porta a valori di produzione totale e domanda finale uguali a zero per  $\delta^S$  e  $\delta^D$  inferiori a 0.75, mentre quello casuale per valori di  $\delta^S$  e  $\delta^D$  uguali ad 1. Comunque sia, il metodo proporzionale prioritario fornisce la migliore soluzione tra quelle dei metodi di razionamento.

Considerando l'Italia, invece, solo per valori di  $\delta^S$  e  $\delta^D$  inferiori a 0.25 i metodi forniscono soluzioni di produzione totale e domanda finale che scalano linearmente con la grandezza del parametro. Per valori dei parametri superiori i metodi di razionamento prioritario hanno un andamento oscillante e portano il sistema al crollo, sebbene in maniera più lenta rispetto ai precedenti stati: il prioritario basato sulla dimensione dell'ordine restituisce valori di produzione totale e domanda finale uguali a zero per  $\delta^S$  e  $\delta^D$  superiori a 0.75, mentre quello casuale per valori di  $\delta^S$  e  $\delta^D$  uguali ad 1. Anche in questo caso il metodo proporzionale prioritario fornisce la migliore soluzione tra quelle dei metodi di razionamento sia per la produzione totale che per la domanda finale.

## Capitolo 5

# Analisi della rete industriale

Nel precedente capitolo, inerente agli esiti dei metodi di ottimizzazione e razionamento applicati alle reti industriali, si è potuto notare come ogni soluzione dipenda sia dall'algoritmo usato per affrontare la situazione di crisi sia dall'entità della variazione. Ora si mostra come i risultati dipendano anche da un ulteriore fattore: la composizione della rete industriale. La struttura del sistema definisce come i diversi settori siano tra loro collegati, come avvengono le interazioni e con quale entità.

In termini matematici la configurazione è descritta da una rete, o grafo, i cui nodi identificano i settori industriali ed i bordi descrivono il flusso monetario che avviene dal settore venditore verso quello acquirente. Diversi sono gli studi eseguiti in materia ed in appendice I vengono illustrate le definizioni ed alcune proprietà richiamate nel seguito.

Considerando i sistemi industriali in questione, si può subito notare che la matrice  $\mathbf{Z}$ , definita in (1.3), è la matrice di adiacenza della rete descrittiva la modalità e l'entità con cui avvengono i flussi tra i settori. Per questo motivo la matrice di adiacenza risulta essere una matrice pesata poichè ogni componente  $z_{ij}$  di  $\mathbf{Z}$  rappresenta il valore monetario scambiato dall'azienda  $i$  -esima alla  $j$  -esima. Inoltre la rete è direzionata in quanto i flussi avvengono in una direzione ben precisa, ossia dal lato venditore verso il lato acquirente, e non è possibile che, data una coppia di settori tra cui esiste una compravendita, ogni settore risulti essere contemporaneamente sia compratore che fornitore. Tuttavia si osserva che, dati due settori industriali, nulla vieta l'esistenza del bordo in una direzione con una certa entità e nella direzione opposta con peso diverso.

Data una rete è utile studiare la densità  $\rho$  che la caratterizza. Per quanto assunto fino ad ora,  $N$  è il numero totale dei settori industriali presenti nei tre sistemi considerati e sia  $m$  il numero di collegamenti esistenti all'interno della rete. La densità della rete direzionata è definita come

$$\rho = \frac{m}{N(N-1)}.$$

Nota la densità, una rete può essere catalogata come *densa* o *sparsa*. Una rete si dice densa se all'aumentare del numero di nodi presenti la densità rimane non nulla, ossia la matrice di adiacenza continua ad avere un numero significativo di componenti diverse da zero; viceversa se la densità tende a zero all'aumentare del numero di nodi la rete si dice sparsa e ciò significa che l'insieme delle componenti non nulle della matrice di adiacenza tende a diventare vuoto. E' di facile intuizione che se la rete industriale oggetto di studio risulta essere densa allora variazioni si diffondono tra tutti i settori ed in maniera abbastanza veloce; al contrario nel caso essa sia sparsa il cambiamento è localizzato e la propagazione risulta più lenta.

In letteratura sono presenti diversi documenti in cui la rete industriale viene studiata ed analizzata in questi termini e ciò è indicatore del fatto che la scelta fatta in Pichler and Farmer [Jan., 2021] sia di rilevante importanza. Come esempi si possono considerare gli articoli di Cerina et al. [2015] e di McNerney et al. [2013] in cui la rete industriale viene analizzata per studiarne le proprietà a livello locale, regionale o globale attraverso il calcolo di diverse quantità, come per esempio la simmetria. Inoltre, grazie alla composizione della rete, si può valutare il livello di aggregazione dei settori: è necessario poter stimare la quantità di flusso di prodotto che un settore industriale abbia con se stesso. Ciò rappresenta gli scambi che aziende appartenenti ad un settore abbiano con aziende appartenenti allo stesso settore: non è detto che esse producano lo stesso articolo, ma non sono abbastanza diverse per essere definite come appartenenti a settori industriali distinti. La valutazione dei flussi tra settori industriali intermedi di questo genere indica il livello di aggregazione della rete.

Illustrato il motivo della rappresentazione matematica assunta per i sistemi industriali



di Germania, Spagna ed Italia, si presenta come essi siano definiti e caratterizzati.

Per quanto riguarda la Germania, il sistema industriale contiene 55 settori ed è descritto dalla matrice  $\mathbf{Z}$  non simmetrica. Sono presenti in totale 2.893 collegamenti attivi tra i settori e  $\mathbf{Z}$  ha elementi diagonali tutti eccetto uno diversi da zero, ciò caratterizza l'alto livello aggregativo della rete. Per ultimo, la densità è pari a 0,97.

Esaminando la Spagna, la rete conta sempre 55 settori e la matrice di adiacenza risulta non simmetrica. Sono presenti 2.900 collegamenti di cui solo un settore non prevede scambi con aziende appartenenti a se stesso; la densità è 0,98.

In riguardo all'Italia nel sistema industriale sono presenti 55 settori, la matrice  $\mathbf{Z}$  risulta non simmetrica e 2.900 sono i collegamenti attivi. Solo un settore non prevede interazioni con se stesso. La densità della rete è 0,98.

Si nota che in tutti e tre i casi il settore che non presenta un flusso con se stesso è quello che identifica le attività domestiche.

Nel seguito due sostanziali modifiche vengono apportate alla densità delle reti industriali per poter studiare gli effetti che esse portino. In primis si analizzano le reti a cui vengono rimossi alcuni nodi casualmente; poi si esaminano le reti eliminando da esse i nodi che portano collegamenti di piccola entità. Ovviamente, data la situazione di crisi che si sta studiando, non si analizza il caso in cui vengano aggiunti ulteriori nodi alla rete poichè surreale.

## 5.1 Rete industriale con nodi rimossi in maniera casuale

Si definisce un metodo che possa controllare la densità della rete industriale in modo tale che, definito il livello del parametro, si eliminano casualmente interazioni tra i settori industriali, senza esaminare quali nodi vengano modificati.

Ciò si ottiene variando i valori della matrice  $\mathbf{Z}$  descrittiva il consumo intermedio: si prendono casualmente alcune componenti definite positive e si pongono uguali a zero senza portare cambiamenti ad altri valori del sistema industriale. Ricordando la definizione di produzione totale per il settore *i-esimo* richiamando l'equazione 1.1

$$x_i = z_{i1} + \dots + z_{ij} + \dots + z_{in} + f_i,$$

si osserva che modifiche nelle componenti  $z_{ij}$ , senza variazioni nel valore del consumo finale, portano ad una riduzione della produzione totale emessa dal settore in questione. Al contrario, se cambiamenti nella produzione intermedia venissero assorbiti dalla componente di consumo finale, la produzione totale risulterebbe immutata.

Ottenuta la nuova matrice  $\mathbf{Z}$  descrittiva il sistema industriale, si bilanciano tutte le quantità in modo tale che esso risulti ancora in equilibrio, ossia in modo tale che l'equazione descrittiva il sistema sia ancora soddisfatta, e si eseguono i metodi di ottimizzazione e razionamento presentati nel precedente capitolo.

### 5.1.1 Implementazione

Per ottenere questo risultato, in primis si inizializzano i dati inerenti agli stati contenuti nel WIOD ed una sequenza di valori tra 0 ed 1 che corrispondono ai valori di densità richiesta. Ad ogni iterazione, in cui si definisce il livello di densità, si calcola il numero di scambi a livello intermedio da eliminare in funzione di essa. Noto questo valore, si estrae dalla matrice  $\mathbf{Z}$  un campione casuale di valori non nulli di tale dimensione e lo si pone a zero. Così è stata definita la nuova matrice contenente gli scambi a livello intermedio e si procede calcolando i nuovi valori di produzione, di produzione massima e della matrice contenente i coefficienti tecnici.

Ora al nuovo sistema industriale creato si applicano i metodi di ottimizzazione e di razionamento.

### 5.1.2 Risultati

Si presentano i risultati tramite grafici dove sono rappresentate la produzione totale ed il consumo finale totale in funzione della densità del sistema industriale.

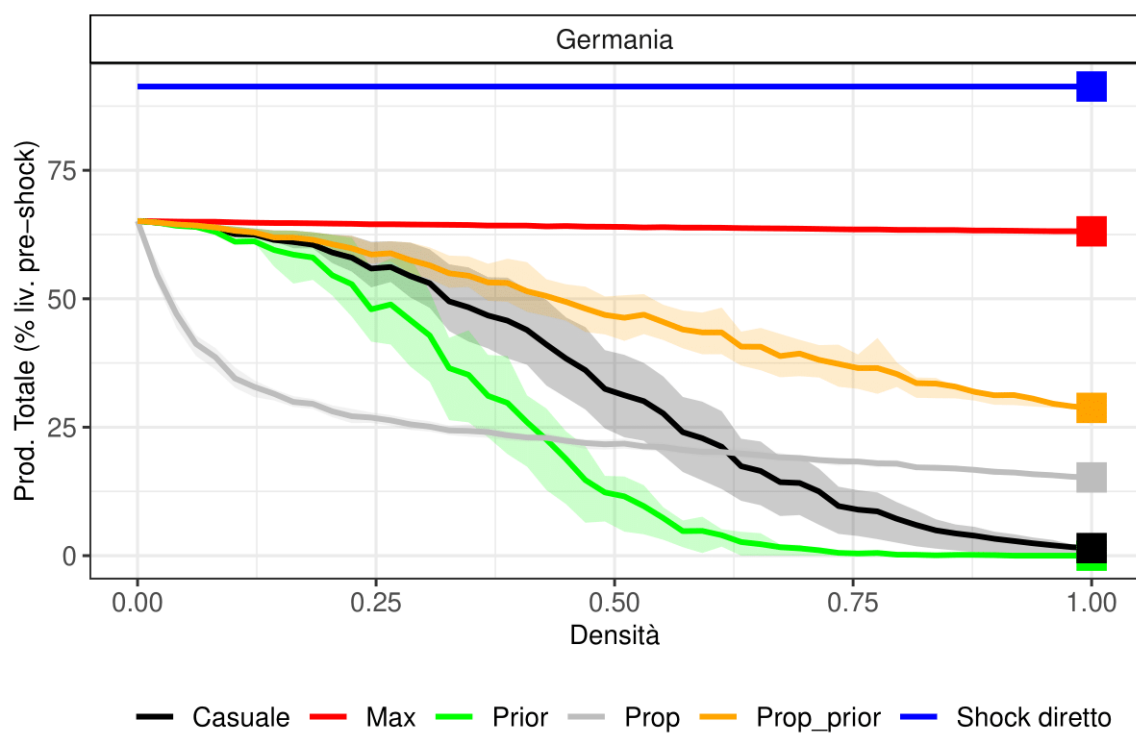


Figura 5.1: Comparazione della produzione finale di Germania con rete industriale ridotta da nodi rimossi in maniera casuale

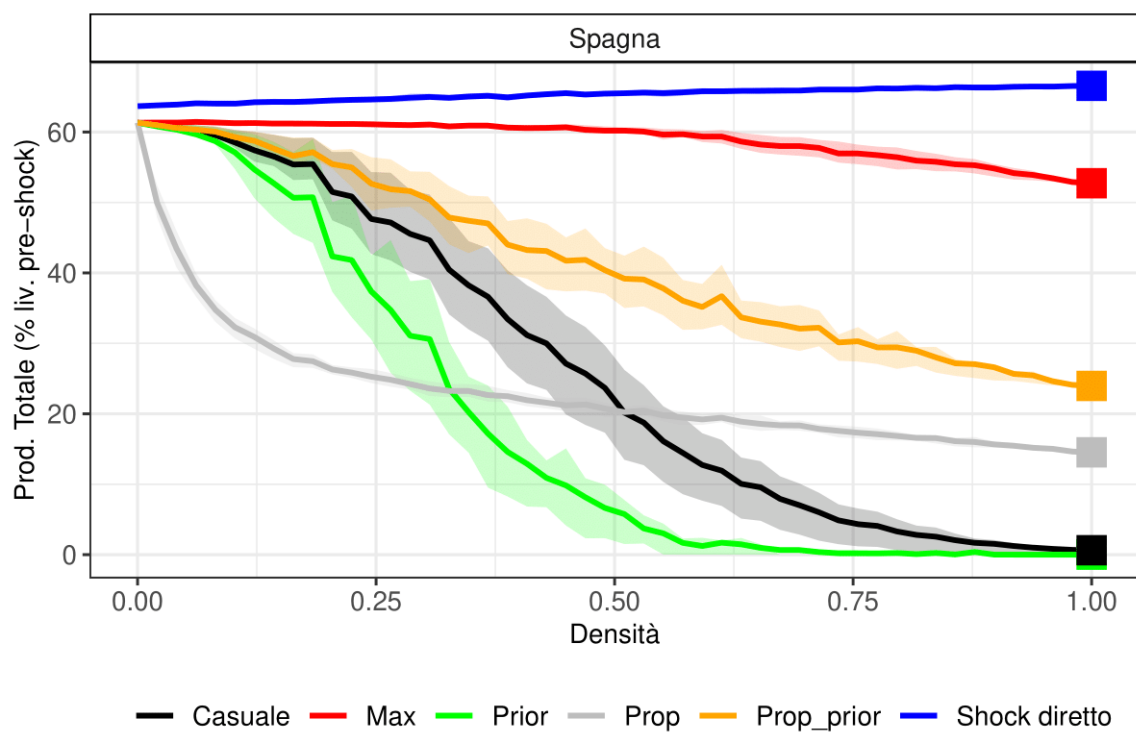


Figura 5.2: Comparazione della produzione finale di Spagna con rete industriale ridotta da nodi rimossi in maniera casuale

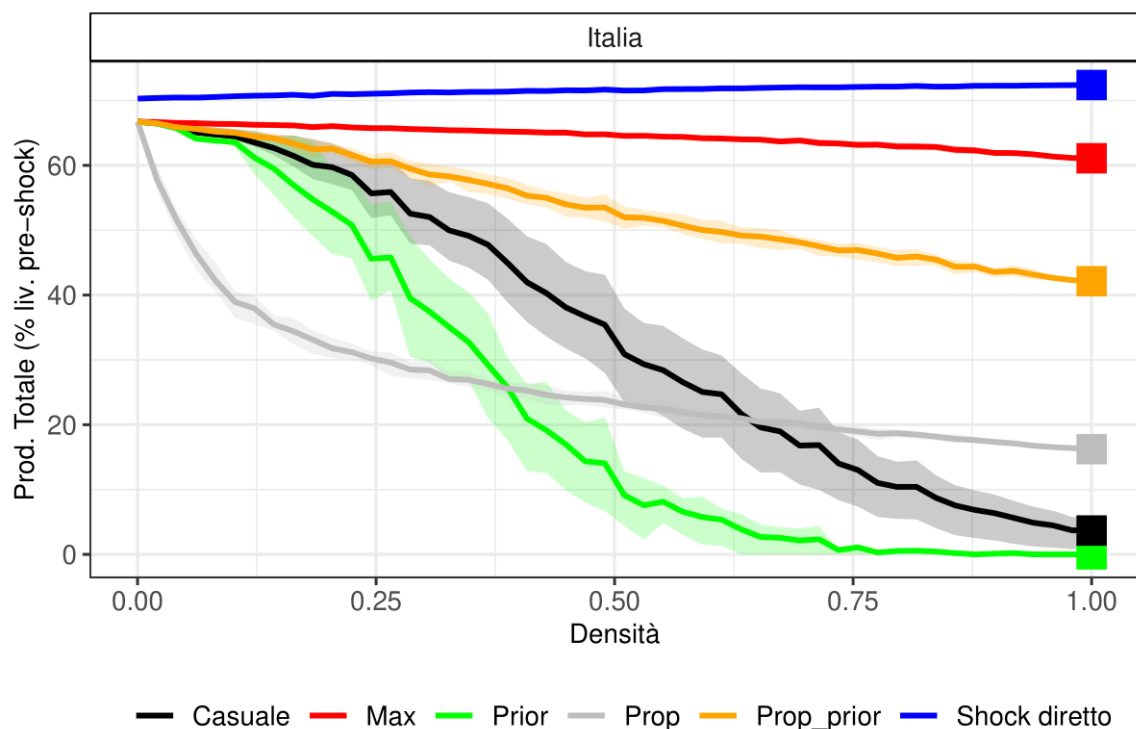


Figura 5.3: Comparazione della produzione finale di Italia con rete industriale ridotta da nodi rimossi in maniera casuale

Per la produzione totale dei tre sistemi industriali analizzati si può trovare un simile andamento. Infatti, lo shock diretto resta immutato o di valore leggermente crescente per tutti i valori di densità analizzati ed i metodi di massimizzazione definiscono il limite superiore per le soluzioni dei metodi di razionamento. Il metodo di razionamento proporzionale porta i sistemi ad un calo nella produzione per bassi livelli di densità ed in questo caso porta ai risultati più pessimistici. Come intuibile dalle precedenti analisi, anche in tale circostanza i metodi di razionamento prioritario portano ai valori di produttività dei sistemi più bassi. Infatti nel caso del razionamento prioritario il sistema collassa per valori di densità intorno a 0.75, mentre per il prioritario casuale collassa per densità pari ad 1, simbolo che solo il sistema completamente in funzione avverte problemi. Il metodo di razionamento proporzionale prioritario continua a dare i migliori livelli tra i metodi di razionamento di produzione totale per ogni valore di densità del sistema in tutti gli stati. Esso ha circa una dipendenza lineare dalla densità seppur vari la pendenza nei tre contesti.

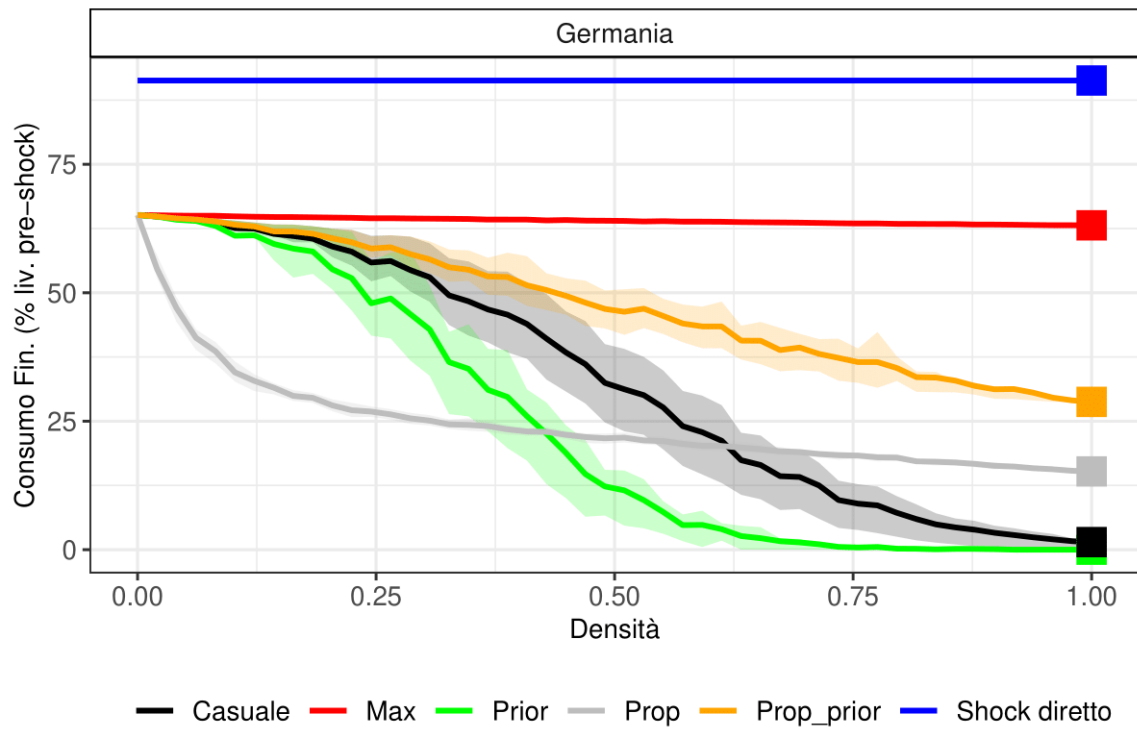


Figura 5.4: Comparazione del consumo finale di Germania con rete industriale ridotta da nodi rimossi in maniera casuale

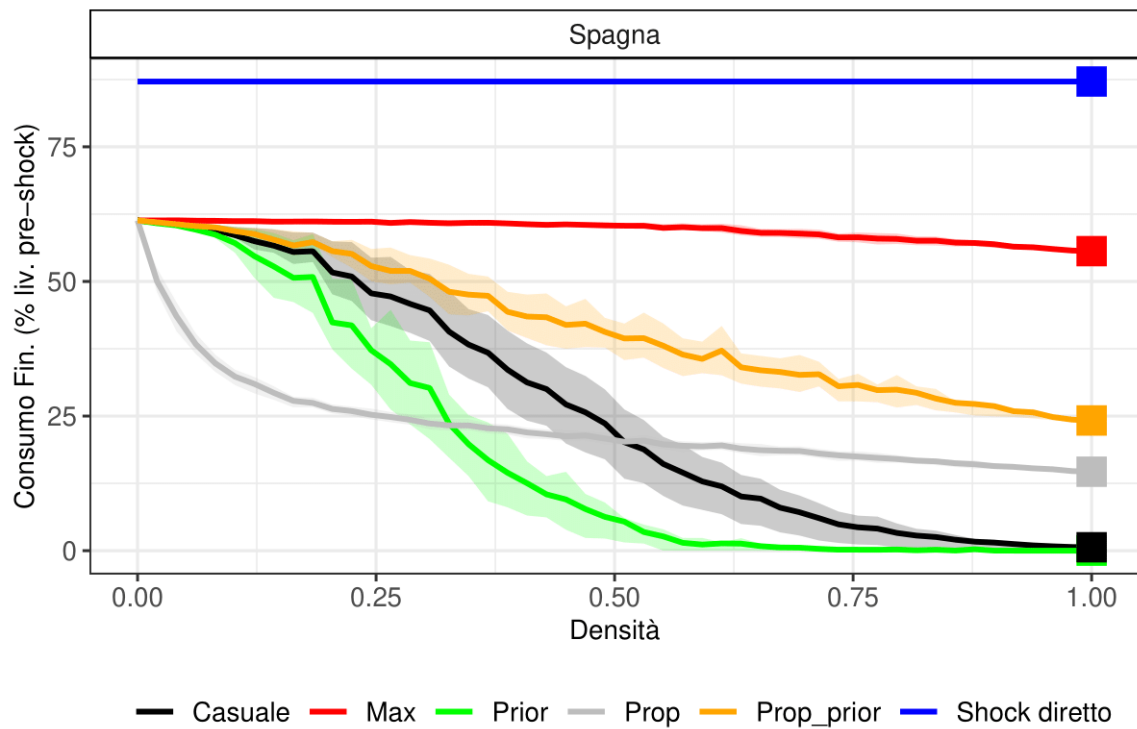


Figura 5.5: Comparazione del consumo finale di Spagna con rete industriale ridotta da nodi rimossi in maniera casuale

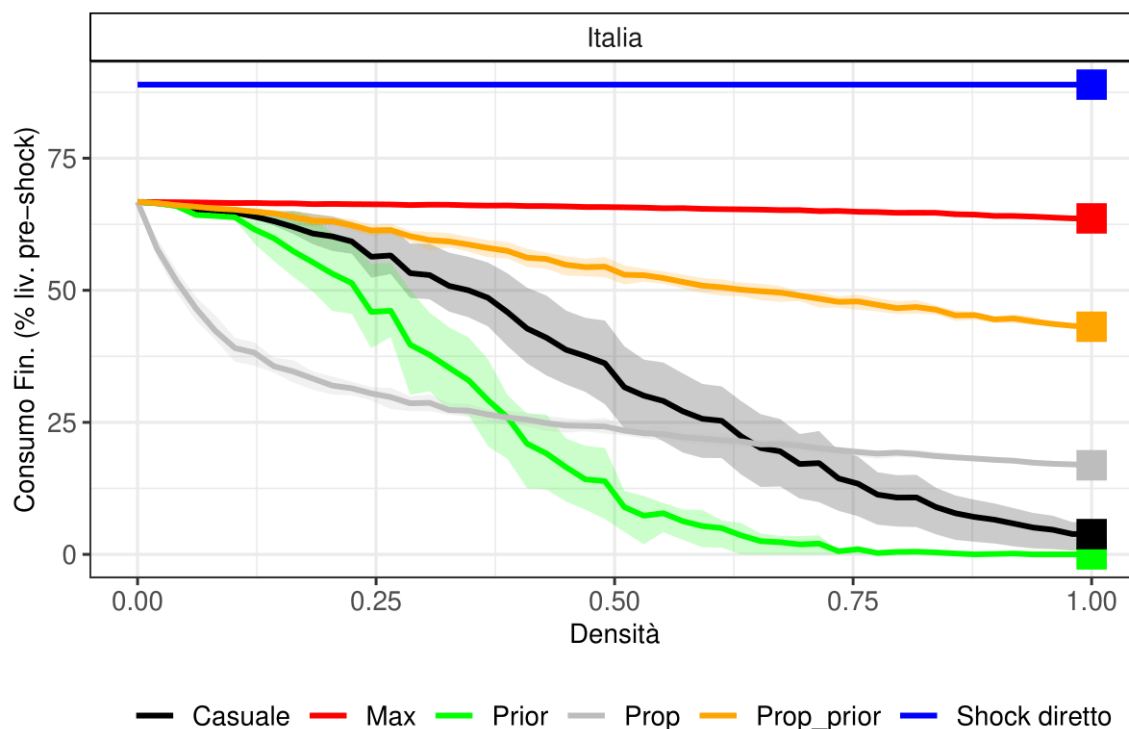


Figura 5.6: Comparazione del consumo finale di Italia con rete industriale ridotta da nodi rimossi in maniera casuale

Nell'analisi del consumo finale totale si osserva ancora un simil andamento nei risultati forniti dai metodi per i tre stati in esame. Lo shock diretto resta immutato nei diversi valori di densità dei sistemi industriali ed i metodi di massimizzazione definiscono il limite superiore per i risultati dei metodi di razionamento. Anche per il consumo finale, bassi livelli di densità del sistema portano il metodo di razionamento proporzionale a fornire i peggiori risultati, che poi all'aumentare della densità si stabilizzano. I metodi di razionamento prioritario portano i sistemi al collasso ed il prioritario casuale lo fa in maniera più lenta rispetto al prioritario. Infine, il metodo di razionamento proporzionale prioritario dà i migliori risultati tra i metodi di razionamento che dipendono circa linearmente dalla densità. Il caso dello stato italiano è quello che vede il maggiore livello di consumo finale in tutto l'intervallo di definizione della densità.

Per ultimo si mostrano i grafici contenenti l'andamento di importanti misure per l'economia in funzione della densità dei sistemi industriali. Queste quantità sono il moltiplicatore, la produzione intermedia e la produzione finale totale. Il moltiplicatore è

definito come la media dei valori delle componenti della matrice Leontief inversa ottenuta dopo il ribilanciamento del sistema,  $\sum_{ij} L_{ij}/N$ . Esso descrive l'andamento della produzione totale a fronte di una domanda finale omogenea su tutti i richiedenti. La produzione intermedia è ottenuta come la quantità di consumo intermedio sulla produzione totale a seguito del ribilanciamento,  $\sum_{ij} Z_{ij} / \sum_{ij} x_i$ , e la produzione finale è calcolata come la produzione totale dopo il ribilanciamento diviso per la produzione totale del sistema economico iniziale.

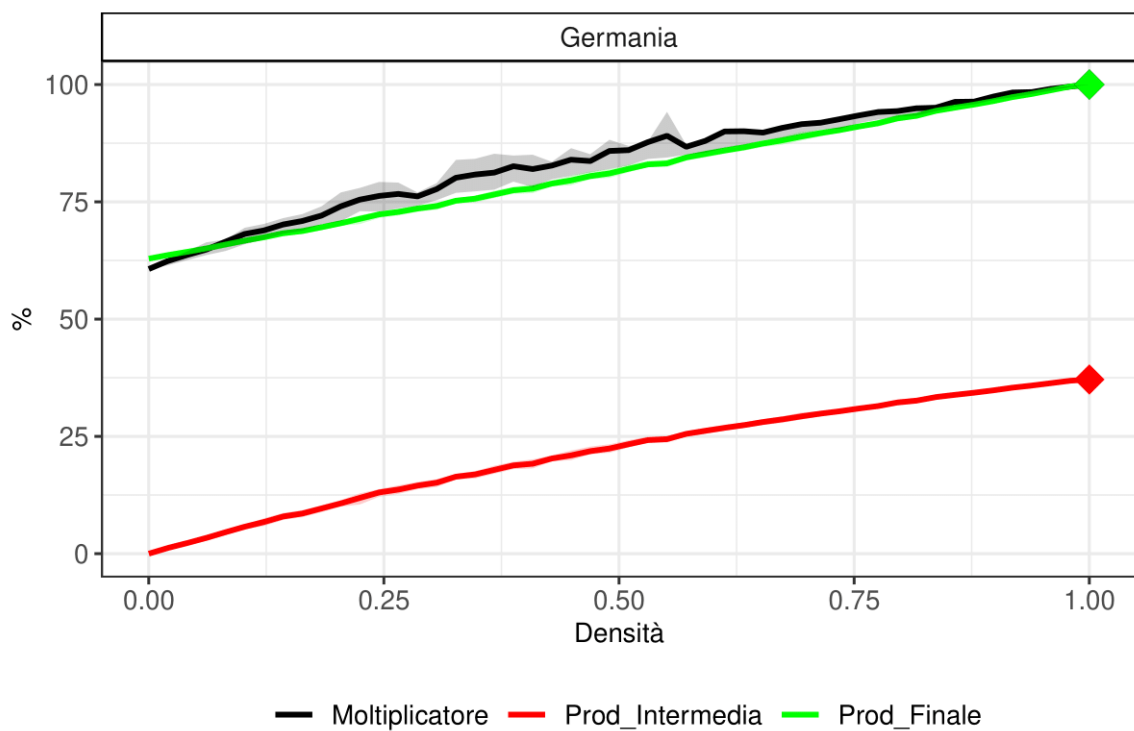


Figura 5.7: Moltiplicatori della rete industriale di Germania con nodi rimossi in maniera casuale

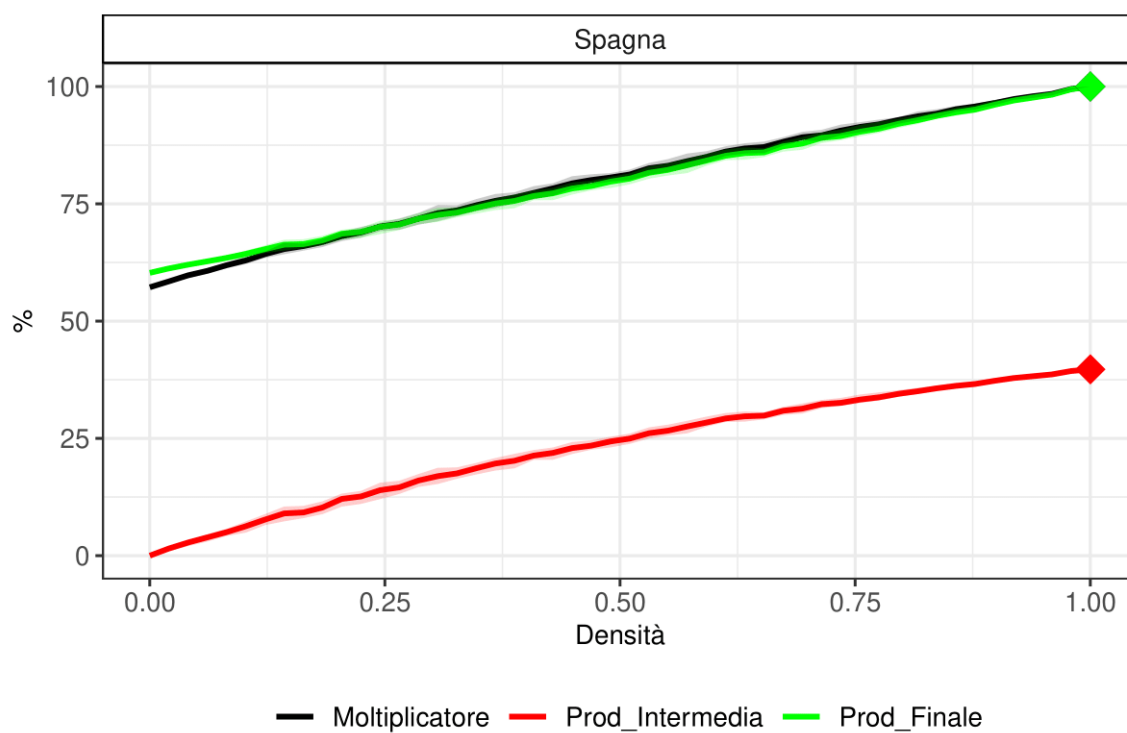


Figura 5.8: Moltiplicatori della rete industriale di Spagna con nodi rimossi in maniera casuale

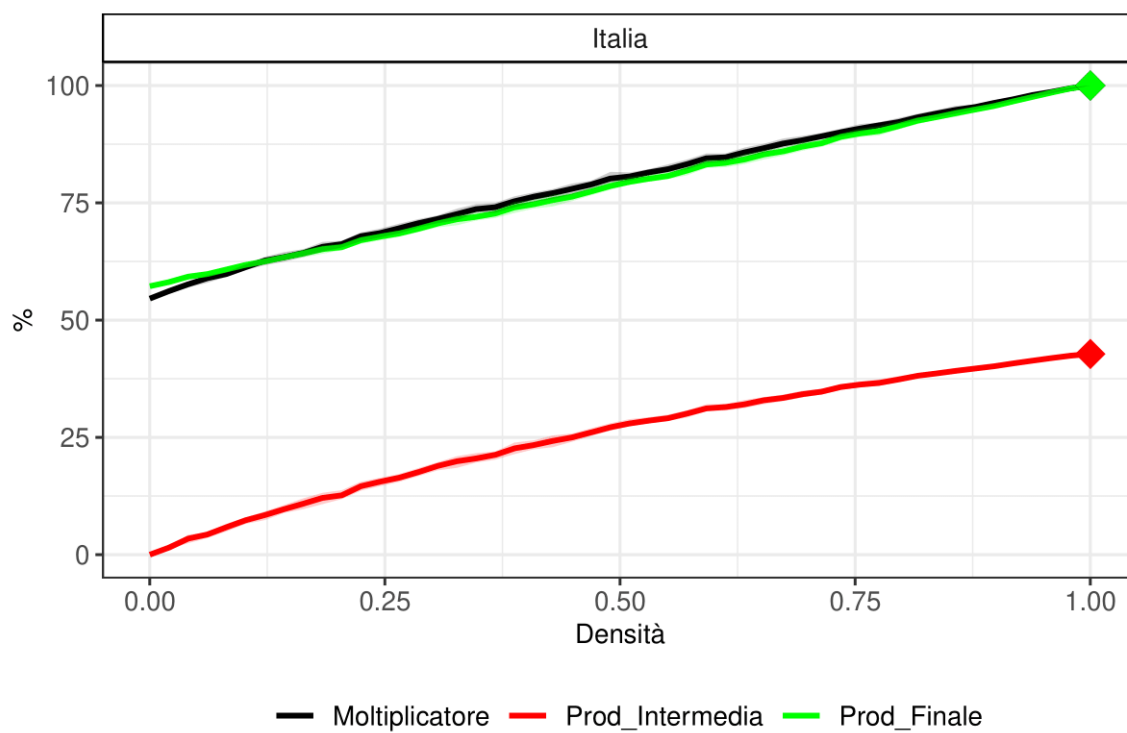


Figura 5.9: Moltiplicatori della rete industriale di Italia con nodi rimossi in maniera casuale



Si osserva che i tre grafici variano circa linearmente in funzione della densità della rete industriale in tutti i sistemi considerati: la produzione intermedia decresce quando la rete industriale è sparsa così come il moltiplicatore e la produzione finale.

## 5.2 Rete industriale con nodi rimossi in maniera selettiva

In questa sede si analizza un metodo che, definita la densità della rete desiderata, possa eliminare alcuni scambi in modo tale da raggiungerla. Ora le interazioni non sono eliminate casualmente, bensì le rimosse sono quelle che prevedono gli scambi di entità monetaria più piccola.

Il tutto si ottiene lavorando sulle componenti della matrice  $\mathbf{Z}$  non nulle: vengono poste in ordine crescente in base alla quantità di flusso monetario che prevedono e le rimosse sono quelle di valore minore. Ne vengono eliminate fino ad ottenere il livello di densità desiderato. Anche in questo contesto, essendo modificate solo le componenti di  $\mathbf{Z}$ , necessariamente la produzione totale diminuisce per via della definizione di equilibrio del sistema come in 1.1.

### 5.2.1 Implementazione

Prima di tutto si inizializzano i dati inerenti agli stati contenuti nel WIOD e si definisce una sequenza di valori tra 1 e la somma delle componenti di  $\mathbf{Z}$  non nulle che corrispondono al numero di collegamenti tra settori da eliminare. Ad ogni iterazione si definisce il numero di scambi a livello intermedio da eliminare, si pongono le componenti della matrice  $\mathbf{Z}$  in ordine crescente, evitando di considerare quelle nulle, e dalla prima al numero richiesto si pongono uguali a zero. Così è stata definita la nuova matrice contenente gli scambi a livello intermedio e si procede calcolando i nuovi valori di produzione, di produzione massima e della matrice contenente i coefficienti tecnici.

Ora si applicano i metodi di ottimizzazione e di razionamento al nuovo sistema industriale definito.

## 5.2.2 Risultati

Si illustrano i grafici contenenti i risultati di produzione totale e consumo finale totale in funzione della densità della rete per i tre stati in esame.

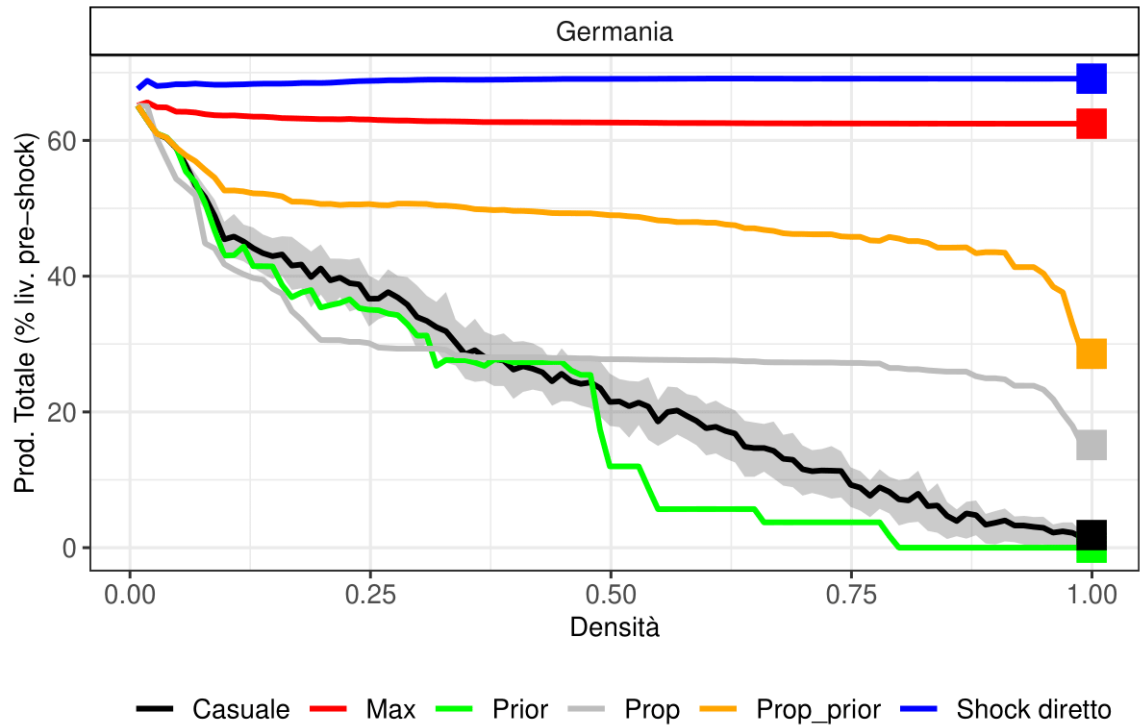


Figura 5.10: Comparazione della produzione finale di Germania con rete industriale ridotta da nodi di piccola quantità rimossi

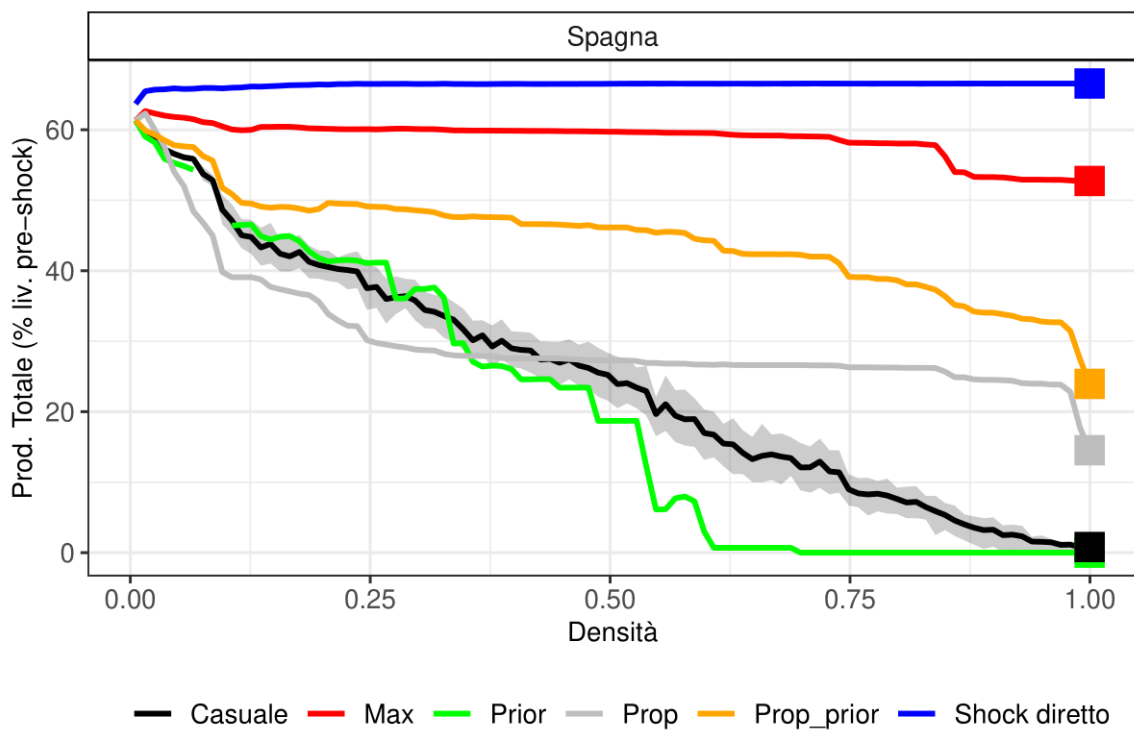


Figura 5.11: Comparazione della produzione finale di Spagna con rete industriale ridotta da nodi di piccola quantità rimossi

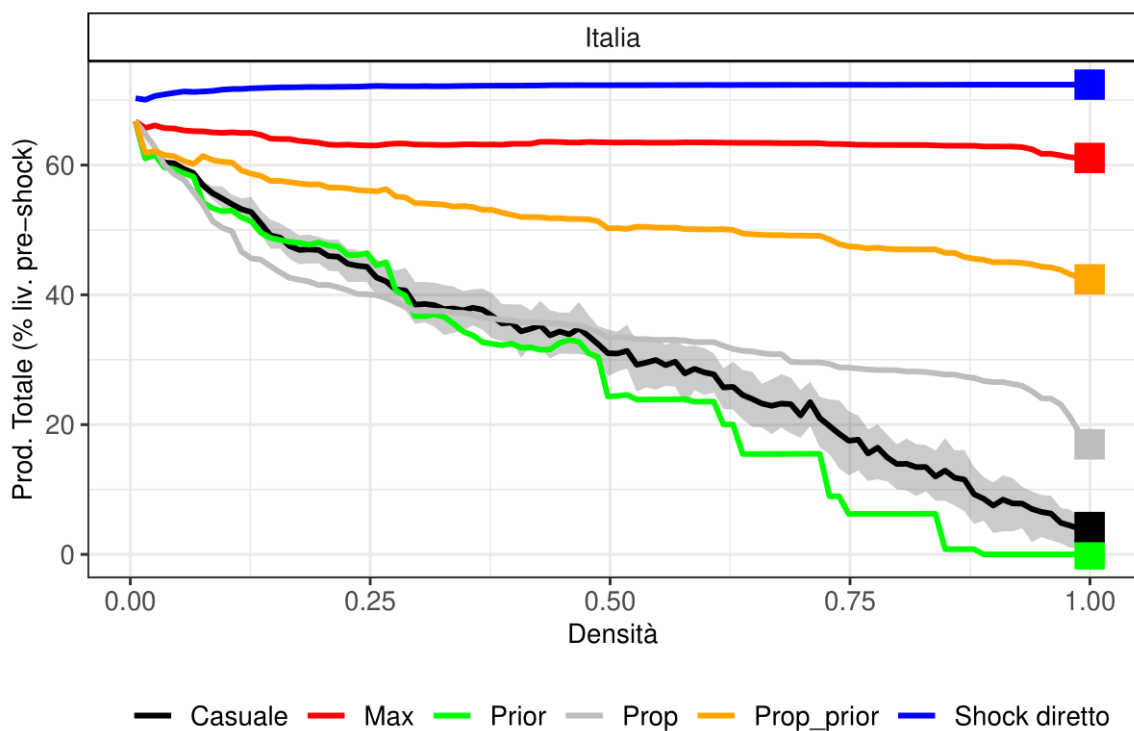


Figura 5.12: Comparazione della produzione finale di Italia con rete industriale ridotta da nodi di piccola quantità rimossi

Per la produzione finale i risultati forniti dallo shock diretto e dai metodi di massimizzazione ed ottimizzazione forniscono per gli stati andamenti simili. Ancora una volta lo shock diretto è immutato rispetto al variare del parametro di densità delle rete. I metodi di massimizzazione sempre definiscono il limite superiore per i risultati dei metodi di razionamento, per Germania ed Italia danno un risultato che è quasi costante, mentre la Spagna presenta un visibile calo per valori di densità tra 0.75 ed 1. Per bassi valori di densità il metodo di razionamento proporzionale fornisce il peggiore risultato; tuttavia anche in questo caso sono i metodi di razionamento prioritario a portare i sistemi al collasso: il prioritario casuale restituisce valori di produzione nulli per densità pari ad 1, mentre il prioritario lo fa per valori di densità superiori a 0.75 nel caso di Germania ed Italia e di poco superiori a 0.50 per la Spagna. Il metodo di razionamento proporzionale prioritario fornisce il miglior livello di produzione tra gli algoritmi di razionamento e la migliore situazione si ha per Italia.

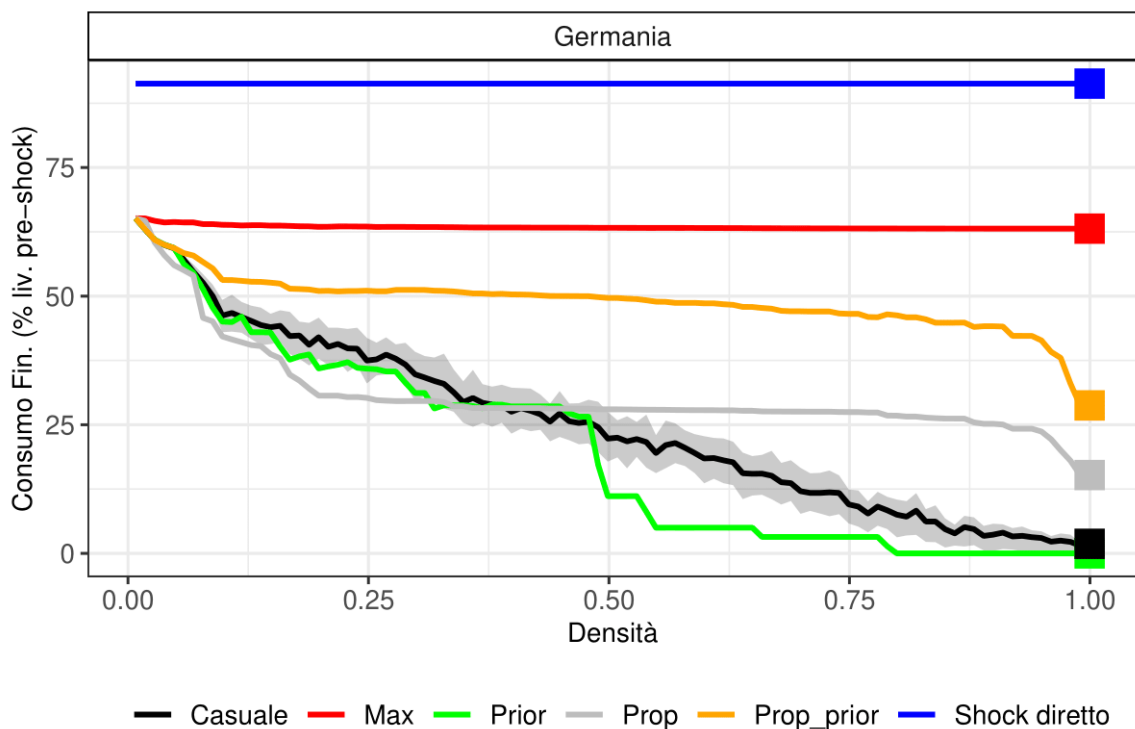


Figura 5.13: Comparazione del consumo finale di Germania con rete industriale ridotta da nodi di piccola quantità rimossi

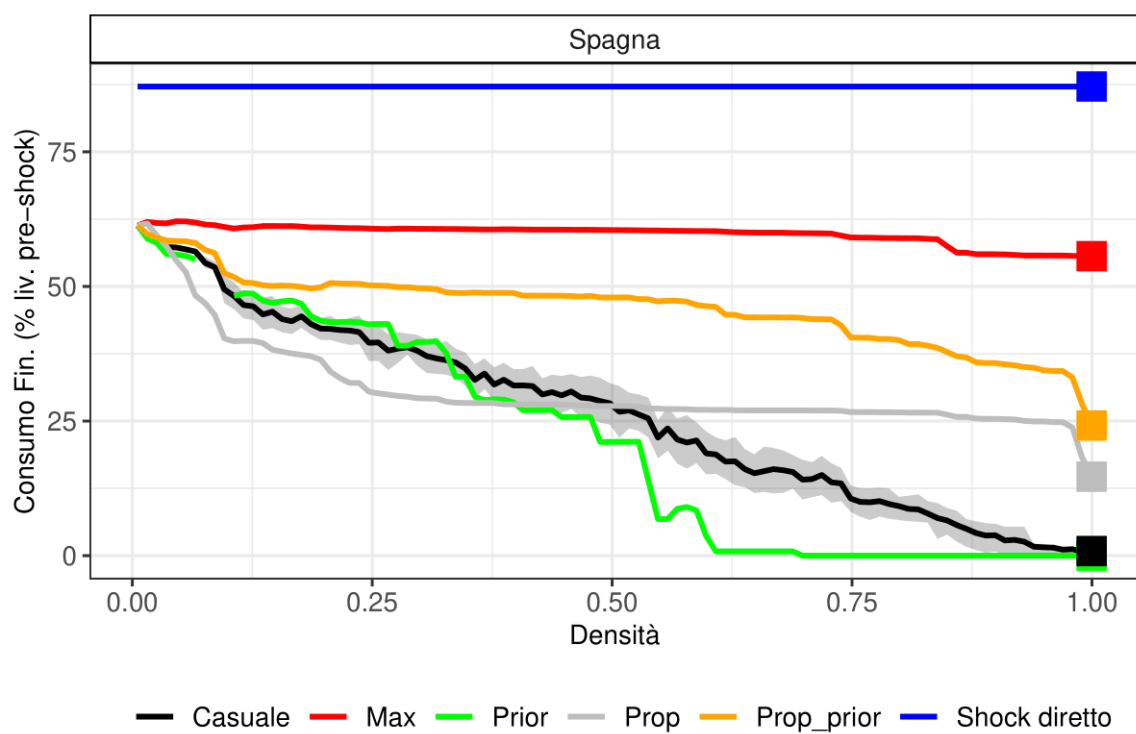


Figura 5.14: Comparazione del consumo finale di Spagna con rete industriale ridotta da nodi di piccola quantità rimossi

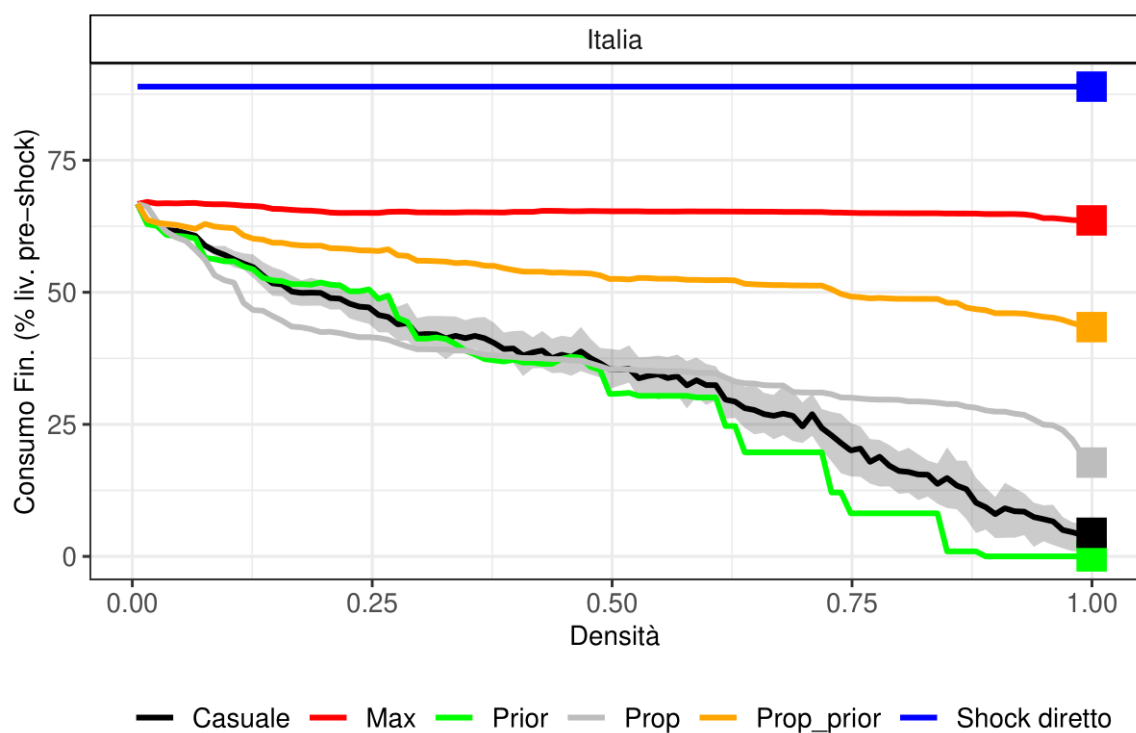


Figura 5.15: Comparazione del consumo finale di Italia con rete industriale ridotta da nodi di piccola quantità rimossi

Nel caso del consumo finale totale la rimozione dei piccoli link fornisce risultati più o meno simili per i tre stati, anche se in riguardo all'Italia è doveroso notare una eccezione. Lo shock diretto è costante in tutti i casi e, come ottenuto fino ad ora, i metodi di massimizzazione forniscono il limite superiore per i metodi di razionamento ed in questo caso i risultati sono circa costanti. Un'altra volta i metodi di razionamento prioritario portano il sistema al collasso: in tutti e tre i casi con il prioritario casuale accade quando la densità è pari ad uno, mentre per il prioritario vi sono differenze. Infatti prendendo la Spagna ciò accade per densità poco superiori a 0,50, per la Germania si hanno densità poco superiori a 0,75, mentre per l'Italia si osserva che accade per densità vicino a 0,90. Ancora una volta, il metodo di razionamento proporzionale prioritario fornisce il miglior risultato tra i metodi di razionamento.

Si mostrano, in ultimo, i grafici rappresentanti le misure considerate nella precedente sezione e definite in maniera analoga.

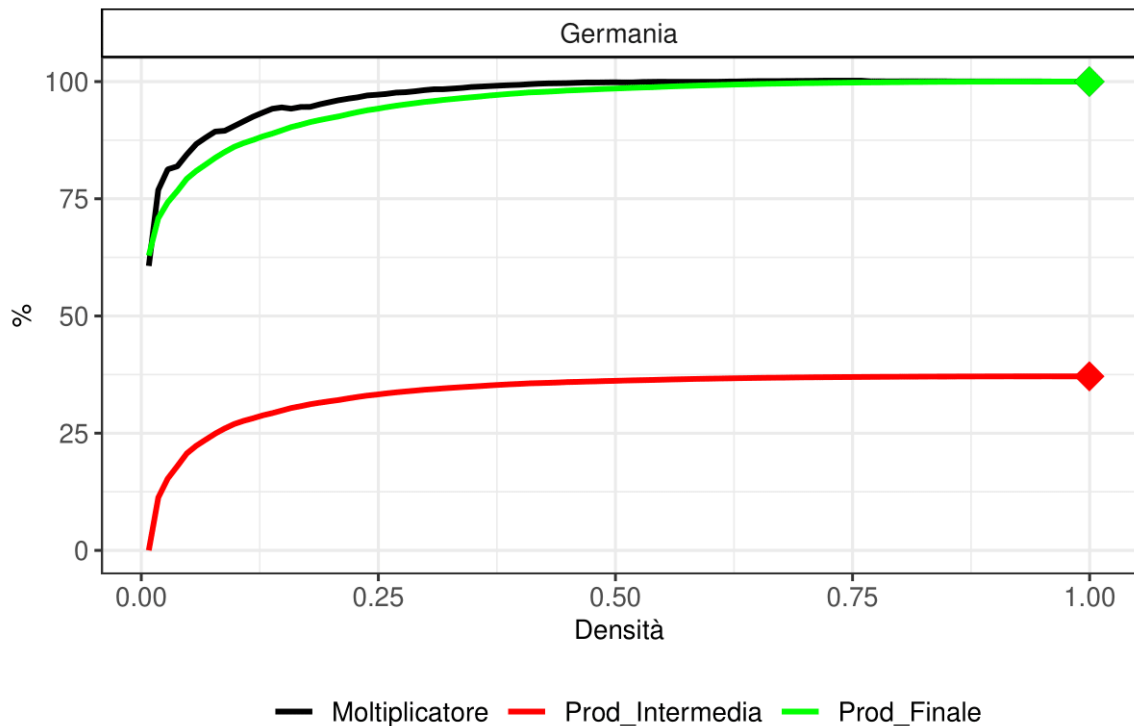


Figura 5.16: Moltiplicatori della rete industriale di Germania con nodi di piccola quantità rimossi

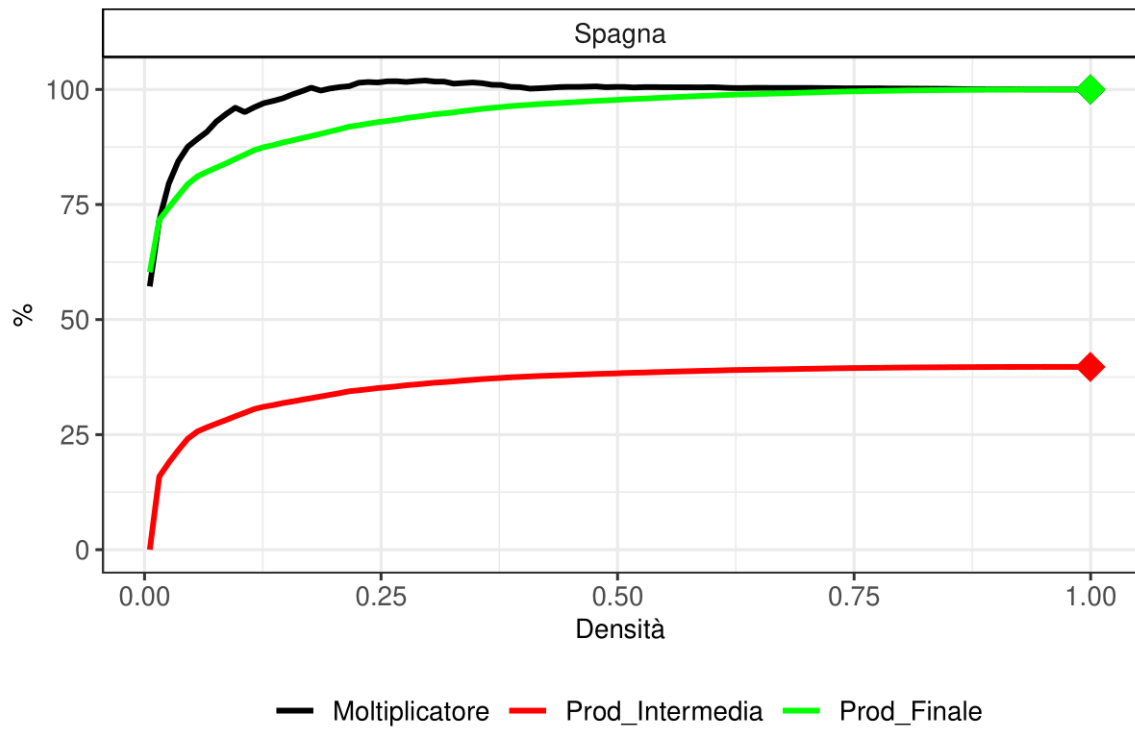


Figura 5.17: Moltiplicatori della rete industriale di Spagna con nodi di piccola quantità rimossi

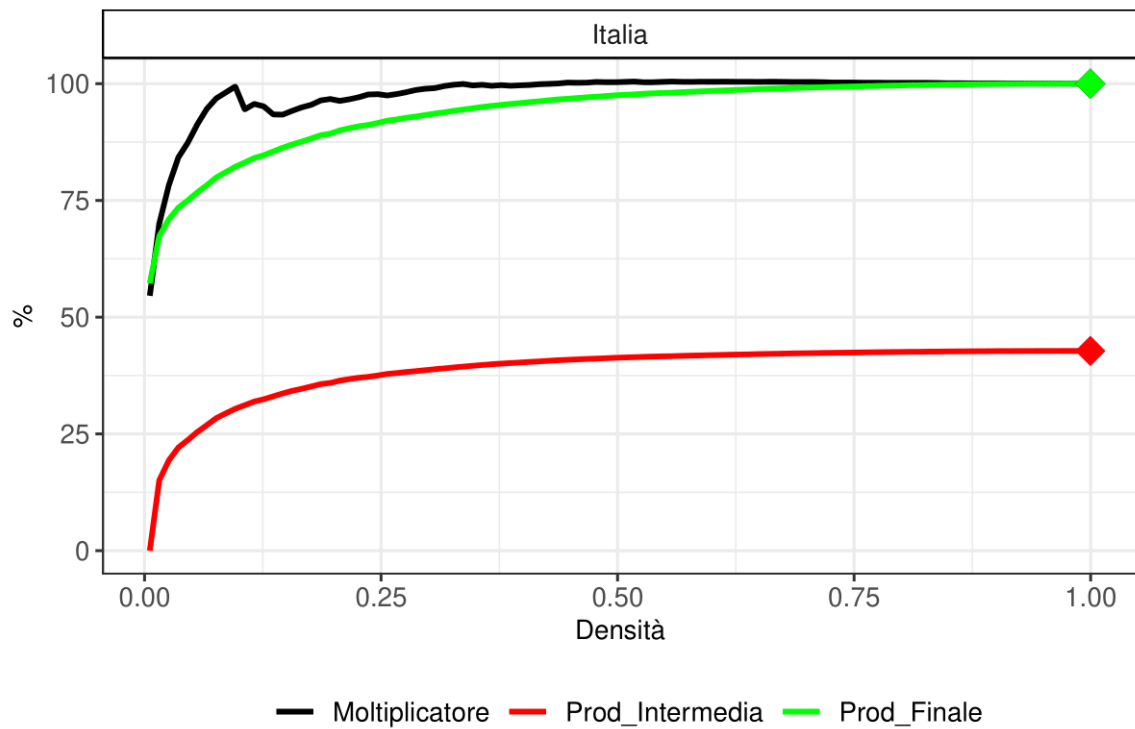


Figura 5.18: Moltiplicatori della rete industriale di Italia con nodi di piccola quantità rimossi

Si osserva che esse variano in maniera non lineare rispetto alla densità delle reti industriali.



# Conclusioni

In questo elaborato si è voluto analizzare l'effetto economico dovuto alle restrizioni imposte dai governi per contrastare la diffusione della pandemia da COVID-19 percepito nei sistemi industriali di Germania, Spagna ed Italia.

Per questo scopo sono stati introdotti alcuni modelli matematici presenti in letteratura utili nello studio. La base dell'analisi si poggia sul modello *Input-Output* definito da Leontief nel quale viene descritto il funzionamento globale della struttura produttiva nel quale si evidenziano gli scambi, e le relative entità, tra i singoli settori e con i consumatori finali. Questo modello si fonda sulla ipotesi che il sistema sia in grado di produrre e distribuire tanti prodotti quanti necessitano per soddisfare pienamente la domanda.

Tuttavia, in casi reali, è ammissibile si presenti sia una situazione in cui la produzione è regolata dalla richiesta proveniente dai consumatori che un momento nel quale la produzione deve sottostare a determinate regole e decisioni e la domanda finale soddisfatta è in funzione di quest'ultima. Perciò il modello Leontief non è uno strumento opportuno per valutare il contesto e viene in aiuto il modello misto esogeno endogeno che distingue le variabili produzione finale indipendenti dalla domanda finale, e le relative componenti di richiesta soddisfatta endogene, dalle variabili di produzione che risultano essere dipendenti dalla richiesta finale e le relative variabili di domanda finale esogene. Questo approccio in verità non si mostra pienamente soddisfacente in quanto solo sotto determinati valori di produzione e domanda finale mostra risultati accettabili.

Ecco dunque che si passa a considerare metodi di ottimizzazione per definire i massimi livelli di produzione finale e di domanda finale soddisfatta possibili. Comunque, essendo in una situazione di crisi e di non piena operatività dei sistemi viste le difficoltà nello svolgimento delle attività lavorative, vengono definiti quattro diversi schemi

di razionamento utili per potere distribuire gli articoli prodotti. In primis si valuta un razionamento di tipo proporzionale basato sulla dimensione dell'ordine giunto dai consumatori per poi passare ad un razionamento proporzionale in cui viene data la priorità di fornitura ai settori industriali intermedi nella catena produttiva. Di seguito vengono proposti due metodi di razionamento prioritario in cui si decide di servire prima i clienti intermedi per la totalità del loro ordine. Il primo metodo prevede di ordinare in modo crescente i clienti in base alla dimensione della richiesta, il secondo procedimento prevede un ordinamento casuale.

Dato lo studio dei sistemi basato sui dati a disposizione è anche utile potere osservare le modiche conseguenti a diversi valori di entità delle variazioni. Perciò si analizzano diverse situazioni in cui sono presenti solo shock nel lato della fornitura, solo shock nel lato della richiesta e shock da entrambe le parti.

In ultimo, data la struttura di rete per i sistemi industriali, si analizza la composizione delle tre catene produttive e si valuta come esse rispondano a modifiche ad esse apportate. Si rimuovo settori industriali prima con una regola basata sulla dimensione dell'ordine e poi con un criterio casuale, scelte ancora coerenti con la situazione di crisi analizzata.

Si conclude dunque che i metodi di massimizzazione forniscono un limite superiore per i risultati di tutti gli schemi di razionamento e ciò si spiega osservando che essi forniscono il massimo di livello di produzione finale e domanda soddisfatta possibile, ma essendo i sistemi economici soggetti ad un forte stress non si trovano nelle condizioni di potere lavorare a pieno regime. Osservando i risultati degli schemi di razionamento si trovano livelli di produzione e domanda finale soddisfatta di molto inferiori rispetto ai livelli pre pandemia. Addirittura in tutti i tre sistemi industriali considerati i metodi di razionamento prioritario portano al collasso mentre il razionamento proporzionale prioritario è quello che fornisce i migliori risultati.

Da un'analisi più raffinata concentrata sulla dimensione dello shock emerge che i metodi di ottimizzazione dipendono quasi linearmente dalla dimensione delle variazioni; ciò vale anche per i metodi di razionamento considerando basse entità di alterazione. All'aumentare della grandezza degli shock i metodi di razionamento deviano gli andamenti: gli schemi prioritari portano i sistemi industriali al collasso, mentre il metodo di raziona-

mento proporzionale prioritario porta ancora ai migliori livelli di produzione e richiesta soddisfatta.

Anche nei risultati ottenuti tramite lo studio delle reti e delle modifiche ad esse apportate si osserva che essi dipendono dalla composizione dei sistemi industriali. I metodi di ottimizzazione forniscono livelli di produzione totale e di richiesta soddisfatta quasi costanti che fanno da limite superiore per i metodi di razionamento; all'aumentare del parametro densità della rete i metodi di razionamento prioritario portano i sistemi al collasso ed è ancora il metodo di razionamento proporzionale prioritario a fornire i migliori livelli di produzione totale e consumo finale soddisfatto per tutte le misure di densità.

# Bibliografia

- S. Battiston, D. Delli Gatti, M. Gallegati, B. Greenwald, and J. E. Stiglitz. Credit chains and bankruptcy propagation in production networks. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31(6):2061–2084, 2007.
- F. Cerina, Z. Zhu, A. Chessa, and M. Riccaboni. World Input-Output Network. *PloS ONE*, 10(7), 2015.
- R. M. del Rio-Chanona, P. Mealy, A. Pichler, F. Lafond, and J. D. Farmer. Supply and demand shocks in the COVID-19 pandemic: An industry and occupation perspective. *Covid Economics*, (6):65–103, 2020.
- M. Fana, S. Tolan, S. Torrejon, M. C. U. Brancati, and E. F. Macias. The COVID confinement measures and EU labour markets. *Technical Report, Joint Research Centre*, 2020.
- A. Ghosh. Input-Output Approach in an Allocation System. *Economica*, 25(97):58–64, Feb., 1958.
- D. Guan, D. Wang, S. Hallegatte, S. J. Davis, J. Huo, S. Li, Y. Bai, T. Lei, Q. Xue, D. Coffman, D. Cheng, P. Chen, X. Liang, B. Xu, X. Lu, S. Wang, K. Hubacek, and P. Gong. Global supply-chain effects of COVID-19 control measures. *Nature Human Behaviour*, 4:577–587, 2020.
- D. Hawkins and H. A. Simon. Note: some conditions of macroeconomic stability. *Econometrica*, 17(3/4):245–248, 1949.

- F. Henriet, S. Hallegatte, and L. Tabourier. Firm-network characteristics and economic robustness to natural disasters. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 36(1): 150–167, 2012.
- H. Inoue and Y. Todo. Firm-level simulation of the propagation of economic shocks through supply-chain networks. *Nature Sustainability*, 2(9):841–847, 2019.
- H. Inoue and Y. Todo. The propagation of the economic impact through supply chains: The case of a mega-city lockdown against the spread of COVID-19. *Covid Economics*, (2):43–59, 2020.
- Wassily W. Leontief. *Input-Output economics*. Oxford University Press, New York, 2nd edition, 1986.
- Wassily W. Leontief. Quantitative Input and Output Relations in the Economic Systems of the United States. *The Review of Economics and Statistics*, 18(3):105–125, Aug., 1936.
- J. Li, D. Crawford-Brown, M. Syddall, and D. Guan. Modeling imbalanced economic recovery following a natural disaster using input-output analysis. *Risk analysis*, 33(10):1908–1923, 2013.
- J. McNerney, B. D. Fath, and G. Silverberg. Network structure of inter-industry flows. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 392(24):6427–6441, 2013.
- R. E. Miller and P. D. Blair. *Input-Output Analysis: Foundations and Extensions*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2009.
- M. Newman. *Networks*. Oxford University Press, 2nd edition, 2018.
- Congressional Budget Office. A Potential Influenza Pandemic: Possible Macroeconomic Effects and Policy Issues. 2006.
- C. H. Papadimitriou and K. Steiglitz. *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Dover, 1998.
- A. Pichler and D. Farmer. Modeling simultaneous supply and demand shocks in input-output networks. Jan., 2021.

- A. Pichler, M. Pangallo, R. M. del Rio-Chanona, F. Lafond, and J. D. Farmer. Production networks and epidemic spreading: How to restart uk economy? *Covid Economics*, 23: 79–151, 2020.
- A. Pichler, M. Pangallo, R. M. del Rio-Chanona, F. Lafond, and D. Farmer. In and out of lockdown: Propagation of supply and demand shocks in a dynamic input-output model. Feb., 2021.
- S. Poledna, M. G. Miess, and C. Hommes. Economic Forecasting with an Agent-based Model. 2019.
- M. P. Timmer, E. Dietzenbacher, B. Los, R. Stehrer, and G. J. De Vries. An Illustrated User Guide to the World Input-Output Database: the Case of Global Automotive Production. *Review of International Economics*, 23(3):575–605, 2015.

# Appendice A

## Generalizzazione matematica per

## l'analisi strutturale del modello

## Input-Output proposto da Leontief

Al fine di comprendere al meglio come poter analizzare quali cause abbiano portato ad una variazione nella produzione finale di un'industria, è necessario mostrare una generalizzazione matematica dello studio fatto per la funzione di produzione totale  $\mathbf{x}$  nel capitolo 1.1.3.

Sia data una funzione di due variabili  $\mathbf{x}_1$  ed  $\mathbf{x}_2$  dipendente dal tempo  $\mathbf{y}^t = \mathbf{x}_1^t \mathbf{x}_2^t$ .

Considerando due soli istanti temporali  $t = 0, 1$  si può definire la variazione delle variabili prese singolarmente come  $\Delta \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1^1 - \mathbf{x}_1^0$  e  $\Delta \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2^1 - \mathbf{x}_2^0$  e quella della funzione  $\mathbf{y}^t$  come

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{x}_1^1 \mathbf{x}_2^1 - \mathbf{x}_1^0 \mathbf{x}_2^0. \quad (\text{A.1})$$

Nelle ipotesi in cui la funzione  $\mathbf{x}_1$  risulta nota all'istante  $t = 1$  e  $\mathbf{x}_2$  risulta nota all'istante  $t = 0$  si ha che  $\mathbf{x}_1^0 = \mathbf{x}_1^1 - \Delta \mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2^1 = \mathbf{x}_2^0 + \Delta \mathbf{x}_2$ . Dunque la variazione di  $\Delta \mathbf{y}$  risulta

$$\Delta \mathbf{y} = \Delta \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^0 + \mathbf{x}_1^1 \Delta \mathbf{x}_2. \quad (\text{A.2})$$

Invece, nelle ipotesi in cui  $\mathbf{x}_1$  è nota per  $t = 0$  ed  $\mathbf{x}_2$  lo è per  $t = 1$ , procedendo in maniera analoga alla precedente, si ottiene che

$$\Delta \mathbf{y} = \Delta \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^1 + \mathbf{x}_1^0 \Delta \mathbf{x}_2. \quad (\text{A.3})$$

Ora, sommando i contributi in (A.2) ed in (A.3), è possibile definire la variazione  $\Delta \mathbf{y}$  come

$$\Delta \mathbf{y} = (1/2)(\Delta \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2^0 + \mathbf{x}_2^1) + (1/2)(\Delta \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1^0 + \mathbf{x}_1^1). \quad (\text{A.4})$$

Estendendo ancora l'applicazione, sia data una funzione di  $n$  variabili dipendente dal tempo  $\mathbf{y}^t = \mathbf{x}_1^t \mathbf{x}_2^t \dots \mathbf{x}_n^t$  e la si valuti per  $t = 0, 1$ . Allora

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{x}_1^1 \dots \mathbf{x}_n^1 - \mathbf{x}_1^0 \dots \mathbf{x}_n^0.$$

In più definendo  $\Delta \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i^1 - \mathbf{x}_i^0 \quad \forall i = 1, \dots, n$  è lecito osservare come viene definita la variazione  $\Delta \mathbf{y}$  nel caso in cui tutte le variabili siano note all'istante iniziale

$$\Delta \mathbf{y} = (\Delta \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2^0 \dots \mathbf{x}_n^0) + \mathbf{x}_1^1 (\Delta \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_3^0 \dots \mathbf{x}_n^0) + \dots + (\mathbf{x}_1^1 \dots \mathbf{x}_{n-1}^1)(\Delta \mathbf{x}_n) \quad (\text{A.5})$$

ed in quello terminale

$$\Delta \mathbf{y} = (\Delta \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2^1 \dots \mathbf{x}_n^1) + \mathbf{x}_1^0 (\Delta \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_3^1 \dots \mathbf{x}_n^1) + (\mathbf{x}_1^0 \dots \mathbf{x}_{n-1}^0) \Delta \mathbf{x}_n. \quad (\text{A.6})$$

Come fatto in precedenza, sommando le due componenti è possibile ricavare l'espressione di  $\Delta \mathbf{y}$  come

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{y} = & (1/2)(\Delta \mathbf{x}_1)[(\mathbf{x}_2^0 \dots \mathbf{x}_n^0) + (\mathbf{x}_2^1 \dots \mathbf{x}_n^1)] + \\ & + (1/2)[\mathbf{x}_1^0 (\Delta \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_3^1 \dots \mathbf{x}_n^1) + \mathbf{x}_1^1 (\Delta \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_3^0 \dots \mathbf{x}_n^0)] + \\ & + \dots + (1/2)[(\mathbf{x}_1^0 \dots \mathbf{x}_{n-1}^0) + (\mathbf{x}_1^1 \dots \mathbf{x}_{n-1}^1)](\Delta \mathbf{x}_n). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$



# Appendice B

## Grado di Essenzialità delle industrie

La tabella che segue, tratta dal documento Fana et al. [2020], mostra il grado di essenzialità che è stato attribuito ad ogni settore industriale di Germania, Spagna ed Italia. Si definisce l'indice di essenzialità caratterizzante ogni settore come la media aritmetica dei precedenti valori e lo si riporta nella colonna *Index*.

Sector	DE	ES	IT	<i>Index</i>
1 Crop and Animal Production, Hunting and	1	1	1	1.00
3 Fishing and Aquaculture	1	1	1	1.00
6 Extraction of Crude Petroleum and Natura	1	1	1	1.00
10 Manufacture of Food Products	1	1	1	1.00
11 Manufacture of Beverage	1	1	1	1.00
18 Printing and Reproduction of Recorded Me	1	1	1	1.00
21 Manufacture of Basic Pharmaceutical Prod	1	1	1	1.00
36 Water Collection, Treatment and Supply	1	1	1	1.00
37 Sewerage	1	1	1	1.00
38 Waste Collection, Treatment and Disposal	1	1	1	1.00
39 Remediation Activities and Other Waste M	1	1	1	1.00
49 Land Transport and Transport Via Pipelin	1	1	1	1.00
50 Water Transport	1	1	1	1.00
52 Warehousing and Support Activities for T	1	1	1	1.00
53 Postal and Courier Activities	1	1	1	1.00
60 Programming and Broadcasting Activities	1	1	1	1.00
61 Telecommunications	1	1	1	1.00
75 Veterinary Activities	1	1	1	1.00
86 Human Health Activities	1	1	1	1.00
87 Residential Care Activities	1	1	1	1.00
88 Social Work Activities Without Accomoda	1	1	1	1.00
63 Information Service Activities	1	1	1	1.00
64 Financial Service Activities, Except Ins	1	1	1	1.00
65 Insurance and Pension Funding, Except Co	1	1	1	1.00
66 Activities Auxiliary to Financial Servic	1	1	1	1.00
84 Public Administration and Defence; Compu	1	1	1	1.00
35 Electricity, Gas, Steam and Air Conditio	1	0.9	1	0.97
19 Manufacture of Coke and Refined Petroleu	1	0.9	1	0.97
58 Publishing Activities	1	0.75	1	0.92
51 Air Transport	1	0.66	1	0.89
59 Motion Picture, Video and Television Pro	1	0.5	1	0.83
85 Education	1	0	1	0.67
69 Legal and Accounting Activities	0	1	1	0.67
80 Security and Investigation Activities	1	0.33	0.67	0.67
45 Wholesale and Retail Trade and Repair of	0.67	0.5	0.75	0.64

17	Manufacture of Paper and Paper Products	0.5	1	0.29	0.60
20	Manufacture of Chemicals and Chemical Pr	0.7	0.17	0.87	0.58
46	Wholesale Trade, Except of Motor Vehicle	1	0.4	0.33	0.58
47	Retail Trade, Except of Motor Vehicles a	0.51	0.49	0.5	0.50
81	Services of Buildings and Landscape Acti	0.5	0.33	0.67	0.50
62	Computer Programming, Consultancy and Re	0.5	0	1	0.50
9	Mining Support Service Activities	0.5	0.5	0.5	0.50
5	Mining of Coal and Lignite	0	0	1	0.33
12	Manufacture of Tobacco Products	1	0	0	0.33
97	Activities of Households As Employers of	0	0	1	0.33
94	Activities of Membership Organisations	0	0	1	0.33
70	Activities of Head Offices; Management C	0	0	1	0.33
71	Architectural and Engineering Activities	0	0	1	0.33
72	Scientific Research and Development	0	0	1	0.33
74	Other Professional, Scientific and Techn	0	0	1	0.33
22	Manufacture of Rubber and Plastic Produc	0.5	0	0.33	0.28
78	Employment Activities	0.5	0	0.33	0.28
42	Civil Engineering	0	0	0.67	0.22
33	Repair and Installation of Machinery and	0	0	0.44	0.15
32	Other Manufacturing	0	0.17	0.22	0.13
95	Repair of Computers and Personal and Hou	0	0	0.37	0.12
43	Specialised Construction Activities	0	0	0.25	0.08
77	Rental and Leasing Activities	0	0.25	0	0.08
28	Manufacture of Machinery and Equipment N	0	0	0.24	0.08
13	Manufacture of Textiles	0	0	0.2	0.07
14	Manufacture of Wearing Apparel	0	0	0.2	0.07
27	Manufacture of Electrical Equipment	0	0	0.2	0.07
16	Manufacture of Wood and of Products of W	0	0	0.17	0.06
26	Manufacture of Computer, Electronic and	0	0	0.1	0.03
23	Manufacture of Other Non-Metallic Minera	0	0	0.04	0.01
2	Forestry and Logging	0	0	0	0.00
7	Mining of Metal Ores	0	0	0	0.00
8	Other Mining and Quarrying	0	0	0	0.00
15	Manufacture of Leather and Related Produ	0	0	0	0.00
24	Manufacture of Basic Metals	0	0	0	0.00
25	Manufacture of Fabricated Metal Products	0	0	0	0.00
29	Manufacture of Motor Vehicles, Trailers	0	0	0	0.00
30	Manufacture of Other Transport Equipment	0	0	0	0.00
31	Manufacture of Furniture	0	0	0	0.00
41	Construction of Buildings	0	0	0	0.00
99	Activities of Extraterritorial Organisat	0	0	0	0.00
73	Advertising and Market Research	0	0	0	0.00
96	Other Personal Service Activities	0	0.6	0	0.20
82	Office Administrative, Office Support an	0	0	0.43	0.14
55	Accommodation	0	0	0.25	0.08
68	Real Estate Activities	0	0	0	0.00
79	Travel Agency, Tour Operator and Other R	0	0	0	0.00
98	Undifferentiated Goods- and Services-Pro	0	0	0	0.00
56	Food and Beverage Service Activities	0	0	0	0.00
90	Creative, Arts and Entertainment Activit	0	0	0	0.00
91	Libraries, Archives, Museums and Other C	0	0	0	0.00
92	Gambling and Betting Activities	0	0	0	0.00
93	Sports Activities and Amusement and Recr	0	0	0	0.00

Tabella B.1: **Grado di Essenzialità dei Settori Industriali per gli stati Europei Germania, Spagna, Italia.** Colonna DE specifica l'indice per Germania, colonna ES l'indice per Spagna e colonna IT l'indice per Italia. La colonna *Index* fornisce l'indice medio.

Fonte: Fana et al. [2020]

# Appendice C

## Valori della variazione nella offerta e nella domanda per i settori industriali

ISIC	Sector	$x$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$
A01	Agriculture	0.8	0.0	4.1	16.3	28.6	0.0	0.0
A02	Forestry	0.0	0.0	3.2	12.7	22.2	85.0	85.0
A03	Fishing	0.1	0.0	5.3	21.4	37.4	0.0	0.0
B	Mining	1.3	0.0	5.2	20.9	36.6	35.3	18.4
C10.C12	Manuf. Food-Beverages	2.8	0.0	6.2	25.0	43.7	0.6	0.0
C13.C15	Manuf. Textiles	0.4	0.0	5.1	20.4	35.7	37.1	64.5
C16	Manuf. Wood	0.2	0.0	5.2	20.8	36.4	61.1	68.9
C17	Manuf. Paper	0.4	0.0	4.9	19.7	34.5	7.5	27.6
C18	Media print	0.3	0.0	4.2	16.7	29.2	6.0	0.0
C19	Manuf. Coke-Petroleum	0.9	0.0	4.7	18.8	32.9	18.3	2.1
C20	Manuf. Chemical	1.1	0.0	4.5	18.1	31.6	2.6	26.6
C21	Manuf. Pharmaceutical	0.7	0.0	4.2	16.8	29.4	1.1	0.0
C22	Manuf. Rubber-Plastics	0.7	0.0	5.3	21.1	36.9	28.3	51.0
C23	Manuf. Minerals	0.5	0.0	4.8	19.2	33.6	50.3	63.1
C24	Manuf. Metals-basic	0.6	0.0	5.4	21.6	37.8	57.7	72.6
C25	Manuf. Metals-fabricated	1.1	0.0	4.8	19.1	33.4	54.8	66.3
C26	Manuf. Electronic	0.8	0.0	2.8	11.4	19.9	38.5	41.6
C27	Manuf. Electric	0.4	0.0	4.6	18.3	32.1	33.3	58.9
C28	Manuf. Machinery	1.1	0.0	4.4	17.6	30.8	49.7	56.9
C29	Manuf. Vehicles	1.6	0.0	5.1	20.5	35.8	22.6	69.7
C30	Manuf. Transport-other	1.0	0.0	4.2	17.0	29.7	48.8	59.7
C31_C32	Manuf. Furniture	0.6	0.0	4.8	19.2	33.5	36.6	60.5
C33	Repair-Installation	0.4	0.0	4.9	19.7	34.5	3.3	51.8
D35	Electricity-Gas	3.2	0.0	4.5	17.9	31.3	0.0	1.9
E36	Water	0.2	0.0	4.8	19.4	33.9	0.0	0.0
E37.E39	Sewage	0.8	0.0	4.8	19.3	33.8	0.0	0.0
F	Construction	7.9	0.0	6.1	24.2	42.4	35.6	66.3
G45	Vehicle trade	1.7	19.7	22.4	30.8	39.1	31.6	19.7
G46	Wholesale	3.5	0.0	3.6	14.4	25.3	23.6	21.1
G47	Retail	4.7	14.6	17.8	27.3	36.8	30.5	25.2
H49	Land transport	2.0	0.0	5.3	21.2	37.1	11.1	0.0
H50	Water transport	0.6	0.0	5.7	22.8	39.9	12.4	0.0
H51	Air transport	0.6	0.0	7.1	28.5	49.9	0.1	8.1
H52	Warehousing	1.4	0.0	5.3	21.0	36.8	0.5	0.0
H53	Postal	0.7	0.0	5.1	20.5	35.9	0.0	0.0
I	Accommodation-Food	2.9	61.4	61.7	62.7	63.6	60.8	63.2
J58	Publishing	0.6	0.0	2.0	7.9	13.8	14.4	2.5
J59_J60	Video-Sound-Broadcasting	0.9	0.0	3.4	13.5	23.7	32.8	5.0
J61	Telecommunications	1.6	0.0	3.3	13.1	22.9	0.9	0.0
J62_J63	IT	2.3	0.0	1.8	7.4	12.9	0.2	12.6

ISIC	Sector	$x$	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>4</sub>	S <sub>5</sub>	S <sub>6</sub>
K64	Finance	4.3	0.0	1.9	7.6	13.3	0.0	0.0
K65	Insurance	3.2	0.0	1.9	7.5	13.2	0.0	0.0
K66	Auxil. Finance-Insurance	1.1	0.0	1.9	7.6	13.2	0.0	0.0
L68	Real estate	7.8	0.0	3.9	15.6	27.3	4.8	51.3
M69_M70	Legal	2.8	0.0	2.2	8.9	15.5	2.0	18.9
M71	Architecture-Engineering	1.7	0.0	3.0	12.2	21.3	0.0	30.6
M72	R&D	0.5	0.0	2.6	10.3	17.9	0.0	27.4
M73	Advertising	0.6	0.0	2.9	11.8	20.6	22.5	39.7
M74_M75	Other Science	0.7	0.0	2.8	11.1	19.4	3.0	22.0
N	Private Administration	4.4	0.0	5.1	20.5	36.0	34.9	51.3
O84	Public Administration	4.8	0.0	4.4	17.4	30.5	1.1	0.0
P85	Education	4.2	0.0	4.0	16.2	28.3	0.0	15.3
Q	Health	7.0	0.0	6.3	25.3	44.2	0.1	0.0
R_S	Other Service	3.2	56.9	57.3	58.4	59.5	34.5	57.7
T	Household activities	0.2	0.0	5.0	20.0	35.0	0.0	51.0

Tabella C.1: **Dettaglio della Variazione nella Offerta per i Settori Industriali.** Colonna  $x$  riporta la frazione relativa alla produzione lorda. Gli shock nella fornitura  $\epsilon_i^S$  caratterizzanti i differenti scenari sono dettagliati nelle colonne S<sub>1</sub> ... S<sub>6</sub>. Tutti i valori sono espressi in %.

Fonte: Pichler et al. [Feb., 2021].

ISIC	Sector	$c$	$\epsilon_i^D$	$f$	$f$ shock
A01	Agriculture	0.9	10.0	0.3	13.8
A02	Forestry	0.0	10.0	0.0	11.9
A03	Fishing	0.0	10.0	0.1	14.8
B	Mining	0.1	10.0	1.5	15.3
C10.C12	Manuf. Food-Beverages	2.4	10.0	1.4	15.0
C13.C15	Manuf. Textiles	0.1	80.0	0.5	13.4
C16	Manuf. Wood	0.1	10.0	0.1	11.2
C17	Manuf. Paper	0.1	10.0	0.2	14.1
C18	Media print	0.1	66.0	0.1	9.4
C19	Manuf. Coke-Petroleum	1.4	10.0	0.7	14.8
C20	Manuf. Chemical	0.3	25.0	1.7	14.7
C21	Manuf. Pharmaceutical	0.3	10.0	1.2	14.9
C22	Manuf. Rubber-Plastics	0.1	10.0	0.6	14.0
C23	Manuf. Minerals	0.1	10.0	0.2	13.0
C24	Manuf. Metals-basic	0.0	10.0	1.7	15.0
C25	Manuf. Metals-fabricated	0.1	10.0	0.8	14.4
C26	Manuf. Electronic	0.2	100.0	1.5	14.9
C27	Manuf. Electric	0.1	10.0	0.8	14.9
C28	Manuf. Machinery	0.2	10.0	2.2	15.0
C29	Manuf. Vehicles	1.2	100.0	2.8	14.8
C30	Manuf. Transport-other	0.1	10.0	2.6	15.1
C31_C32	Manuf. Furniture	0.2	40.0	0.8	14.7
C33	Repair-Installation	0.0	10.0	0.0	11.8
D35	Electricity-Gas	3.4	0.0	0.1	14.8
E36	Water	0.5	0.0	0.0	14.8
E37.E39	Sewage	0.5	0.0	1.1	7.6
F	Construction	0.3	10.0	12.1	15.2
G45	Vehicle trade	1.9	10.0	0.6	15.0
G46	Wholesale	3.1	10.0	4.5	15.0
G47	Retail	15.5	10.0	0.6	14.1
H49	Land transport	2.5	67.0	0.2	14.9
H50	Water transport	0.6	67.0	0.7	15.0
H51	Air transport	1.2	67.0	0.5	15.0
H52	Warehousing	0.1	67.0	0.4	15.0
H53	Postal	0.1	0.0	0.1	14.8
I	Accommodation-Food	7.9	80.0	0.8	15.0
J58	Publishing	0.5	0.0	0.6	14.7
J59_J60	Video-Sound-Broadcasting	1.0	0.0	1.2	9.9
J61	Telecommunications	1.8	0.0	0.8	15.0
J62_J63	IT	0.2	0.0	2.7	13.6
K64	Finance	3.0	0.0	3.1	14.9
K65	Insurance	6.0	0.0	1.6	14.9
K66	Auxil. Finance-Insurance	0.1	0.0	2.1	15.0
L68	Real estate	23.8	0.0	1.0	15.0
M69_M70	Legal	0.1	0.0	1.4	14.4
M71	Architecture-Engineering	0.1	0.0	1.4	15.1
M72	R&D	0.0	0.0	1.1	14.9
M73	Advertising	0.0	0.0	0.3	14.0
M74_M75	Other Science	0.4	0.0	1.0	14.6
N	Private Administration	1.0	0.0	2.8	14.1
O84	Public Administration	0.5	0.0	12.5	0.7
P85	Education	4.7	0.0	6.4	1.8
Q	Health	3.7	0.0	14.8	0.2
R_S	Other Service	6.7	5.0	1.3	8.5
T	Household activities	0.7	0.0	0.0	14.8

Tabella C.2: **Dettaglio della Variazione nella Domanda per i Settori Industriali.** Colonna  $c$  riporta la frazione relativa alla domanda proveniente dai consumatori finali e  $\epsilon_i^D$  rappresenta l'entità del relativo shock. La colonna  $f$  riporta la frazione relativa alla domanda finale proveniente dalle altre parti e  $f$  shock è il relativo shock. Tutti i valori sono espressi in %.

Fonte: Pichler et al. [Feb., 2021].

# Appendice D

## Dati riassuntivi degli stati Germania, Spagna ed Italia

ISIC	Sector	$x_i$			$\epsilon_i^S$			$e_i$			$ILL_i$
		DEU	ESP	ITA	DEU	ESP	ITA	DEU	ESP	ITA	
A01	Agriculture	0.9	2.2	1.7	0.0	0.0	0.0	100.0	100.0	100.0	13.6
A02	Forestry	0.1	0.0	0.0	85.0	85.0	85.0	0.0	0.0	0.0	15.0
A03	Fishing	0.0	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	100.0	100.0	100.0	35.7
B	Mining	0.2	0.3	0.3	48.3	48.3	34.5	30.0	30.0	50.0	31.0
C10-C12	Manuf. Food-Beverages	3.5	6.9	4.1	0.0	26.0	26.0	100.0	66.7	66.7	22.1
C13-C15	Manuf. Textiles	0.4	1.0	2.6	68.5	68.5	59.4	0.0	0.0	13.3	31.5
C16	Manuf. Wood	0.5	0.3	0.5	73.1	73.1	60.6	0.0	0.0	17.0	26.9
C17	Manuf. Paper	0.7	0.6	0.7	34.3	0.0	48.7	50.0	100.0	29.0	31.5
C18	Media print	0.4	0.4	0.4	0.0	0.0	0.0	100.0	100.0	100.0	39.0
C19	Manuf. Coke-Petroleum	1.5	2.4	1.7	0.0	6.4	0.0	100.0	90.0	100.0	36.0
C20	Manuf. Chemical	2.6	2.5	1.6	19.0	52.5	8.2	70.0	17.0	87.0	36.7
C21	Manuf. Pharmaceutical	0.9	0.7	0.8	0.0	0.0	0.0	100.0	100.0	100.0	40.3
C22	Manuf. Rubber-Plastics	1.4	0.9	1.3	35.3	70.5	47.2	50.0	0.0	33.0	29.5
C23	Manuf. Minerals	0.8	0.8	1.0	63.9	63.9	61.4	0.0	0.0	4.0	36.1
C24	Manuf. Metals-basic	1.9	2.1	1.8	72.6	72.6	72.6	0.0	0.0	0.0	27.4
C25	Manuf. Metals-fabricated	2.4	1.4	2.6	66.3	66.3	66.3	0.0	0.0	0.0	33.7
C26	Manuf. Electronic	1.4	0.4	0.7	43.1	43.1	38.8	0.0	0.0	10.0	56.9
C27	Manuf. Electric	1.9	0.8	1.1	63.1	63.1	50.5	0.0	0.0	20.0	36.9
C28	Manuf. Machinery	4.5	1.2	3.6	61.8	61.8	47.0	0.0	0.0	24.0	38.2
C29	Manuf. Vehicles	6.3	2.5	1.5	69.7	69.7	69.7	0.0	0.0	0.0	30.3
C30	Manuf. Transport-other	0.8	0.8	0.7	59.7	59.7	59.7	0.0	0.0	0.0	40.3
C31-C32	Manuf. Furniture	0.9	0.6	1.2	65.2	59.7	58.0	0.0	8.5	11.0	34.8
C33	Repair-Installation	0.7	0.5	0.6	60.6	60.6	34.0	0.0	0.0	44.0	39.4
D35	Electricity-Gas	2.4	4.7	2.7	0.0	5.8	0.0	100.0	90.0	100.0	41.6
E36	Water	0.2	0.5	0.3	0.0	0.0	0.0	100.0	100.0	100.0	33.5
E37-E39	Sewage	0.9	0.8	1.3	0.0	0.0	0.0	100.0	100.0	100.0	29.8
F	Construction	5.2	6.4	6.7	71.6	71.6	49.6	0.0	0.0	30.7	28.4
G45	Vehicle trade	1.1	1.4	1.1	18.0	27.3	13.7	67.0	50.0	75.0	45.4
G46	Wholesale	3.9	4.9	5.3	0.0	30.0	33.5	100.0	40.0	33.0	50.1
G47	Retail	3.0	3.9	3.9	24.7	25.7	25.2	51.0	49.0	50.0	49.7
H49	Land transport	1.8	2.5	3.0	0.0	0.0	0.0	100.0	100.0	100.0	31.4
H50	Water transport	0.5	0.2	0.4	0.0	0.0	0.0	100.0	100.0	100.0	35.3
H51	Air transport	0.5	0.5	0.4	0.0	24.2	0.0	100.0	66.0	100.0	28.8
H52	Warehousing	2.3	2.1	2.1	0.0	0.0	0.0	100.0	100.0	100.0	29.6
H53	Postal	0.6	0.2	0.2	0.0	0.0	0.0	100.0	100.0	100.0	35.6
I	Accommodation-Food	1.6	5.8	3.3	64.6	64.6	56.6	0.0	0.0	12.5	35.4
J58	Publishing	0.6	0.4	0.3	0.0	7.6	0.0	100.0	75.0	100.0	69.8
J59-60	Video-Sound-Broadcasting	0.6	0.6	0.5	0.0	11.0	0.0	100.0	75.0	100.0	56.1
J61	Telecommunications	1.2	1.8	1.3	0.0	0.0	0.0	100.0	100.0	100.0	55.1
J62-63	IT	2.1	1.4	1.6	7.2	14.4	0.0	75.0	50.0	100.0	71.1

ISIC	Sector	$x_i$			$\epsilon_i^S$			$e_i$			$ILL_i$
		DEU	ESP	ITA	DEU	ESP	ITA	DEU	ESP	ITA	
K64	Finance	2.7	2.1	2.9	0.0	0.0	0.0	100.0	100.0	100.0	71.4
K65	Insurance	1.4	1.0	0.8	0.0	0.0	0.0	100.0	100.0	100.0	71.3
K66	Auxil. Finance-Insurance	0.6	0.4	1.0	0.0	0.0	0.0	100.0	100.0	100.0	71.7
L68	Real estate	7.2	6.7	7.5	51.3	51.3	51.3	0.0	0.0	0.0	48.7
M69-70	Legal	2.5	1.1	2.3	36.3	18.1	0.0	0.0	50.0	100.0	63.7
M71	Architecture-Engineering	1.2	1.1	1.0	45.9	45.9	0.0	0.0	0.0	100.0	54.1
M72	R&D	0.6	0.3	0.4	41.1	41.1	0.0	0.0	0.0	100.0	58.9
M73	Advertising	0.4	0.5	0.5	39.7	39.7	39.7	0.0	0.0	0.0	60.3
M74-75	Other Science	0.4	0.3	0.7	19.6	19.6	0.0	50.0	50.0	100.0	60.8
N	Private Administration	3.9	2.6	3.0	42.7	54.3	41.6	33.3	15.2	35.0	36.0
O84	Public Administration	4.6	4.4	4.2	0.0	0.0	0.0	100.0	100.0	100.0	44.6
P85	Education	2.9	3.4	2.4	0.0	46.0	0.0	100.0	0.0	100.0	54.0
Q	Health	5.4	4.8	4.9	0.0	0.0	0.0	100.0	100.0	100.0	36.0
R_S	Other Service	2.8	2.7	2.7	61.2	56.0	49.2	0.0	8.6	19.6	38.8
T	Household activities	0.1	0.5	0.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	50.0	100.0

Tabella D.1: **Dettaglio della Variazione nella Offerta per i Settori Industriali.** Colonna  $x$  riporta la frazione relativa alla totale produzione lorda del settore. Gli shock nella fornitura sono riportati nella colonna  $\epsilon_i^S$ ; in  $e_i$  c'è il grado di essenzialità riferito al settore ed in  $ILL_i$  l'indice di lavoro da remoto. Tutti i valori sono espressi in %.  
Fonte: Pichler and Farmer [Jan., 2021].

ISIC	Sector	$f_i$			$\epsilon_i^D$		
		DEU	ESP	ITA	DEU	ESP	ITA
A01	Agriculture	0.5	1.4	1.0	10.0	9.9	10.0
A02	Forestry	0.1	0.0	0.1	10.0	8.6	3.8
A03	Fishing	0.0	0.1	0.0	10.0	10.0	10.0
B	Mining	0.3	0.5	0.4	10.0	10.0	10.0
C10-C12	Manuf. Food-Beverages	4.1	5.0	4.0	10.0	10.0	10.0
C13-C15	Manuf. Textiles	0.6	1.4	2.9	10.0	10.0	10.0
C16	Manuf. Wood	0.4	0.1	0.3	10.0	10.0	9.9
C17	Manuf. Paper	0.6	0.4	0.5	10.0	10.0	10.0
C18	Media print	0.1	0.1	0.1	10.0	9.9	10.0
C19	Manuf. Coke-Petroleum	1.7	2.6	1.4	10.0	10.0	10.0
C20	Manuf. Chemical	3.4	2.1	1.5	9.9	9.9	10.0
C21	Manuf. Pharmaceutical	1.1	1.0	1.2	8.1	9.3	9.8
C22	Manuf. Rubber-Plastics	1.4	0.7	1.0	10.0	9.9	10.0
C23	Manuf. Minerals	0.6	0.5	0.7	10.0	10.0	10.0
C24	Manuf. Metals-basic	1.5	1.3	1.4	10.0	10.0	10.0
C25	Manuf. Metals-fabricated	1.8	1.0	1.6	10.0	10.0	10.0
C26	Manuf. Electronic	2.0	0.4	0.9	9.9	9.9	10.0
C27	Manuf. Electric	2.3	0.8	1.4	10.0	10.0	10.0
C28	Manuf. Machinery	5.8	1.4	4.7	10.0	10.0	10.0
C29	Manuf. Vehicles	8.2	3.7	2.1	10.0	10.0	10.0
C30	Manuf. Transport-other	1.0	1.1	1.0	9.9	9.9	10.0
C31-C32	Manuf. Furniture	1.4	0.6	1.4	9.9	9.9	10.0
C33	Repair-Installation	0.5	0.3	0.6	10.0	10.0	10.0
D35	Electricity-Gas	1.6	1.6	1.1	2.3	0.8	1.2
E36	Water	0.2	0.4	0.3	1.5	0.9	0.6
E37-E39	Sewage	0.7	0.7	0.6	3.6	2.5	1.7
F	Construction	5.5	7.6	7.5	10.0	9.9	9.9
G45	Vehicle trade	0.9	1.7	1.4	10.0	10.0	10.0
G46	Wholesale	3.4	4.1	4.6	9.8	9.5	9.9
G47	Retail	3.4	5.5	5.7	9.5	9.5	9.8
H49	Land transport	0.8	1.7	1.8	56.9	38.8	55.2
H50	Water transport	0.7	0.2	0.5	11.4	27.5	47.3
H51	Air transport	0.6	0.6	0.4	50.3	24.7	47.3
H52	Warehousing	0.3	0.8	1.1	22.3	19.7	33.5
H53	Postal	0.1	0.0	0.1	3.4	2.2	3.4
I	Accommodation-Food	2.4	8.6	4.7	73.1	75.5	79.1
J58	Publishing	0.4	0.3	0.3	3.8	5.4	4.0
J59-60	Video-Sound-Broadcasting	0.6	0.5	0.3	4.3	3.8	3.5
J61	Telecommunications	0.9	1.3	1.2	1.1	1.6	3.0
J62-63	IT	1.5	1.6	1.1	8.8	9.5	8.5
K64	Finance	1.9	0.8	0.9	2.9	3.8	1.6
K65	Insurance	1.4	1.1	1.0	1.3	0.8	1.1
K66	Auxil. Finance-Insurance	0.0	0.2	0.1	2.0	1.9	4.9
L68	Real estate	7.2	7.8	9.8	0.2	0.1	0.5
M69-70	Legal	0.7	0.6	0.4	9.3	7.9	5.2
M71	Architecture-Engineering	1.0	1.0	0.2	9.4	9.3	8.4
M72	R&D	0.9	0.5	0.6	8.3	7.9	9.8
M73	Advertising	0.1	0.1	0.1	10.0	9.1	9.2
M74-75	Other Science	0.3	0.1	0.3	3.5	3.5	5.0
N	Private Administration	1.2	1.2	1.1	4.2	4.2	4.9
O84	Public Administration	6.1	6.3	7.1	0.2	0.7	0.0
P85	Education	4.1	5.1	3.9	0.7	1.0	0.0
Q	Health	8.3	7.2	7.5	0.1	0.1	0.1
R_S	Other Service	3.2	3.3	3.2	4.3	4.3	4.7
T	Household activities	0.2	0.8	1.1	0.0	0.0	0.0

Tabella D.2: **Dettaglio della Variazione nella Domanda per i Settori Industriali.** Colonna  $f_i$  riporta la frazione di domanda finale che giunge al settore ed  $\epsilon_i^D$  rappresenta l'entità totale del relativo shock. Tutti i valori sono espressi in %.

Fonte: Pichler and Farmer [Jan., 2021].



# Appendice E

## Condizioni di Hawkins-Simon

Dato un sistema economico definito da  $N$  settori industriali, le *Condizioni di Hawkins-Simon* sono condizioni necessarie e sufficienti che assicurano che la produzione finale di ogni settore sia definita positiva. Quest'ultima risulta essere una condizione necessaria e sufficiente affinché il vettore contenente le produzioni finali di tutti i settori presenti nel sistema assuma un significato economicamente valido.

Le condizioni risultano essere derivate come corollario di un ulteriore teorema e per la spiegazione e dimostrazione del risultato si può fare riferimento all'articolo di Hawkins and Simon [1949].

Considerando il modello Leontief, è possibile assumere che il settore industriale  $i$  –esimo ammetta una produzione totale del bene fabbricato  $x_i$  e che essa sia distribuita uniformemente tra gli altri settori e la domanda finale. Perciò vale

$$\sum_{j=1}^N \omega_{ij} x_j = f_i \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (\text{E.1})$$

in cui il coefficiente  $\omega_{ij}$  risulta essere definito come  $\delta_{ij} - \alpha_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, N$ . Ricordando la definizione di coefficiente tecnico  $\alpha_{ij}$  e la sua non negatività, si osserva che  $\omega_{ij} < 0$  se  $i \neq j$  e che  $\omega_{ii} > 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$ .

La relazione in E.1 risulta essere economicamente significativa solo nel caso in cui la produzione totale di ogni settore industriale risulti essere definita positiva.

**Teorema E.0.1.** *Teorema di Hawkins Simon, 1949*

Una condizione necessaria e sufficiente affinché la produzione totale dell' $i$ -esimo settore  $x_i$ , che soddisfa l'equazione (E.1), sia definita positiva  $\forall i = 1, \dots, N$  è che tutti i minori principali della matrice  $\Omega$  di componenti  $\omega_{ij}$  siano definiti positivi.

**Dimostrazione:** Si consideri la matrice aumentata di componenti  $\omega_{ij} - f_i$  e si proceda con trasformazioni lineari per riga per ridurla ad una matrice triangolare superiore. Per ottenere questa rappresentazione è sufficiente eseguire la somma di ogni riga con una appropriata combinazione lineare delle righe precedenti e la procedura può essere iterata fino a quando non si trova una riga contenente un elemento diagonale non positivo. Ciò non altera la soluzione del sistema ed i valori dei minori principali composti da  $i$  righe ed  $i$  colonne  $\forall i = 1, \dots, N$ .

Dall'osservazione precedente sul segno delle componenti della matrice  $\Omega$  si ha che tutti gli elementi della prima colonna eccetto il primo risultano negativi e dunque possono essere resi nulli addizionando ad ogni riga un multiplo positivo della prima riga adeguato. Gli altri elementi di ogni riga escluso quelli diagonali continuano ad essere negativi; l'elemento diagonale  $\omega_{22}$  può essere sia positivo che negativo a seconda della trasformazione attuata. Considerando la seconda colonna si procede rendendo nulli il terzo elemento ed i successivi sommando ad ogni riga un multiplo opportuno della seconda riga. Nel caso generale, se i primi  $i$  elementi della diagonale principale sono positivi dopo  $i-1$  passi della triangolazione, al passo  $i$ -esimo si procede addizionando multipli positivi della riga  $i$ -esima alle righe restanti, altrimenti si procede addizionando multipli negativi della riga  $i$ -esima. Per lo scopo della dimostrazione si continua fino al raggiungimento di un elemento diagonale non positivo.

Al termine delle iterazioni si presentano due possibili casi: (A) la matrice ottenuta contiene elementi diagonali tutti positivi oppure (B) la matrice ottenuta contiene almeno un elemento diagonale non positivo.

Nel caso (A) tutti i minori principali della matrice sono positivi e  $x_i$  sono tutte positive per  $i = 1, \dots, N$ .

Per dimostrare questa affermazione si risolve il sistema di equazioni all'indietro per  $x_N, x_{N-1}, \dots, x_1$  in funzione di  $f_i$  per  $i = 1, \dots, N$ . Siccome  $f_N > 0$  si ha che  $x_N > 0$ . Dato che  $f_{N-j} > 0$ , se tutte  $x_{N-i} > 0$  per  $i > j$  segue che  $x_{N-j} > 0$ . Dunque, per induzione,

le  $x_i$  risultano positive  $\forall i = 1, \dots, N$ . Essendo la matrice in questione triangolare superiore ed essendo il determinante di essa uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale principale, tutti i minori principali definiti da  $k$  righe e  $k$  colonne sono positivi per  $k = 1, \dots, N$ . Ma i minori principali di questa matrice aumentata sono uguali ad i minori principali della matrice  $\Omega$  di partenza.

Nel caso (B) la matrice, contenendo almeno un elemento diagonale non positivo, presenta almeno un minore principale non positivo ed almeno una componente  $x_i$  negativa.

Siano tutti gli elementi della  $j$ -esima riga a destra della diagonale principale negativi ed il termine diagonale non positivo. Si suppone che  $x_i > 0 \forall i > j$ . Dato che  $f_j$  è positivo,  $x_j$  deve essere negativo. Il minore principale composto dalle prime  $j$  righe e colonne della matrice triangolare è negativo o nullo se il  $j$ -esimo elemento diagonale è non positivo e tutti gli altri sono positivi; dunque anche il corrispondente minore della matrice  $\Omega$  risulta non positivo.

Perciò si è dimostrato che nel caso (A) tutti i minori principali della matrice  $\Omega$  sono positivi e ciò conclude la prova.

**Corollario E.0.2.** *Condizioni di Hawkins Simon, 1949*

*Una condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le componenti del vettore produzione finale  $\mathbf{x}$ , risolvete il sistema (E.1), siano definite positive, per ogni vettore domanda finale  $\mathbf{f}$  definito positivo, è che tutti i minori principali della matrice  $\Omega$  siano definiti positivi.*

Questo corollario segue dal teorema precedente e dalla considerazione che le componenti della matrice  $\Omega$  sono indipendenti dal vettore  $\mathbf{f}$ .

# Appendice F

## Metodo di programmazione lineare

Il metodo di *Programmazione Lineare* è un procedimento risolutivo di problemi di ottimizzazione vincolata a lungo studiati e di cui si può trovare descrizione in [Papadimitriou and Steiglitz, 1998].

Un generico problema di ottimizzazione vincolata è descritto da variabili decisionali, una funzione obiettivo ed una regione ammissibile all'interno della quale trovare il valore delle variabili decisionali tale che la funzione obiettivo risulti ottimizzata.

**Definizione 1.** (*Problema di Ottimizzazione*)

Sia data una coppia  $(\mathbb{F}, c)$ .  $\mathbb{F}$  risulta essere l'insieme di dominio dei punti ammissibili ed è descritto come  $\mathbb{F} = \{ x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad h_j(x) = 0 \quad j = 1, \dots, p \}$ ;

$c$  è una funzione  $c : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$  detta funzione costo.

Il problema di ottimizzazione consiste nel trovare  $f \in \mathbb{F}$  tale che

$$c(f) \leq c(y) \quad \forall y \in \mathbb{F}.$$

Il punto  $f$  è detto soluzione ottima del problema.

**Definizione 2.** (*Problema di Ottimizzazione Lineare*)

Data una coppia  $(\mathbb{F}, c)$  il problema di ottimizzazione viene definito lineare se

1. la funzione  $c : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$  è lineare
2. la regione ammissibile  $\mathbb{F}$  è definita da vincoli lineari.

Sia data una matrice  $\mathbf{A}$  di interi  $m \times n$  di righe  $a_i^T$  per  $i = 1, \dots, m$ . Sia  $M$  l'insieme degli indici di righe di  $\mathbf{A}$  corrispondenti ai vincoli di uguaglianza e sia  $\overline{M}$  l'insieme degli indici di righe corrispondenti ai vincoli di disuguaglianza. Sia dato il vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  contenente le variabili. Sia  $N$  l'insieme di indici di colonne della matrice corrispondenti alle variabili vincolate e sia  $\overline{N}$  l'insieme di indici di colonne della matrice corrispondenti alle variabili libere.

Dato un vettore  $\mathbf{c}$  di dimensione  $n \times 1$  di interi ed un vettore  $\mathbf{d}$  di dimensione  $m \times 1$  di interi, un problema di programmazione lineare in **forma generale** è definito come

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 \text{subject to} \quad & a_i^T x = d_i \quad i \in M \\
 & a_i^T x \geq d_i \quad i \in \overline{M} \\
 & x_j \geq 0 \quad j \in N \\
 & x_j \geq 0 \quad j \in \overline{N}
 \end{aligned} \tag{F.1}$$

Un problema di programmazione lineare può essere definito anche in **forma canonica** come

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 \text{subject to} \quad & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{d} \\
 & \mathbf{x} \geq 0
 \end{aligned} \tag{F.2}$$

o in **forma standard**

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 \text{subject to} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{d} \\
 & \mathbf{x} \geq 0.
 \end{aligned} \tag{F.3}$$

Le formulazioni risultano tra loro equivalenti, ossia data una espressione la si può trasformare in un'altra applicando trasformazioni. Infatti, dato un vincolo di uguaglianza del tipo  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = d_i$  per trasformarlo in vincolo di disuguaglianza è sufficiente sostituire

l'equazione con  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq d_i$  e  $\sum_{j=1}^n (-a_{ij})x_j \geq (-d_i)$ . Viceversa, dato un vincolo del tipo  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq d_i$ , per passare ad una formulazione standard si aggiunge una variabile ausiliaria  $x^S$  semidefinita positiva tale che  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_i^S = d_i$ . Nel caso in cui il vincolo sia  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq d_i$  la variabile ausiliaria semidefinita positiva è tale che  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_i^S = d_i$ . In ultimo, data una variabile  $x_j$  libera nella formulazione generale, per passare alla formulazione canonica si definiscono due variabili  $x_j^+$  e  $x_j^-$  semidefinite positive in modo tale che  $x_j = x_j^+ - x_j^-$ .

Le scritture essendo tra loro equivalenti ammettono la stessa soluzione.

Per un problema di ottimizzazione lineare, la regione ammissibile è definita tramite i vincoli imposti dal problema ed essa risulta essere un poliedro limitato.

**Osservazione 11.** [Papadimitriou and Steiglitz, 1998, cap.1]

Dato un problema di programmazione lineare con regione ammissibile non vuota e limitata, esiste sempre almeno un vertice che realizza l'ottimo della funzione obiettivo.

Si presenta ora un metodo risolutivo di questa categoria di problemi: l'**ALGORITMO DEL SIMPLESSO**.

Esso risulta essere un metodo iterativo volto a calcolare le coordinate del punto appartenente alla regione ammissibile che realizza il minimo valore della funzione obiettivo. Come prima cosa si inizializza il metodo identificando un vertice ammissibile e si calcola il valore della funzione obiettivo in quel punto. Successivamente si esaminano i vertici ad esso adiacenti; nel caso in cui non esistano altri vertici il metodo termina. Se esiste un vertice che realizza il valore della funzione obiettivo inferiore, allora ci si sposta in quel vertice e si riprende l'analisi fino a che il procedimento non termina.

**Osservazione 12.** E' necessario assumere che il problema di ottimizzazione lineare sia definito in forma standard e che la matrice  $\mathbf{A}$  sia una matrice  $n \times m$ , con  $n > m$ , di rango  $m$ .

**Definizione 3.** (*Base di  $\mathbf{A}$* )

Una base della matrice  $\mathbf{A}$  è data dalle colonne di  $\mathbf{A}$  linearmente indipendenti

$$B = \{A_{\beta(1)}, \dots, A_{\beta(m)}\}.$$

**Osservazione 13.** E' possibile permutare le colonne di  $\mathbf{A}$  in modo tale che le prime colonne siano quelle corrispondenti alla base della matrice e poi vengano quelle fuori base. Definendo  $\mathbf{A} = [ \mathbf{B} \mid \mathbf{F} ]$ , il sistema  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{d}$  diventa

$$[\mathbf{B}|\mathbf{F}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_F \end{bmatrix} = \mathbf{d}$$

da cui

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{d} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_F.$$

**Definizione 4.** (*Soluzione Base*)

Una soluzione base del problema di programmazione lineare è data da

$$\mathbf{x}^T = \begin{cases} x_j = 0 & \text{se } A_j \notin B \\ x_{\beta(k)} = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{d})_k & k = 1, \dots, m \end{cases}$$

Una soluzione base può essere trovata scegliendo una base per  $\mathbf{A}$ , ponendo a zero le componenti di  $\mathbf{x}$  corrispondenti a colonne non appartenenti alla base di  $\mathbf{A}$  e risolvendo le restanti  $m$  equazioni per calcolare il valore delle rispettive componenti di  $\mathbf{x}$ .

Una *soluzione base* si dice *ammissibile* se essa appartiene alla regione ammissibile del problema.

**Lemma F.0.1.** [*Papadimitriou and Steiglitz, 1998, cap.2*]

*Sia data  $\mathbf{x}$  soluzione base ammissibile di*

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{d}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

*corrispondente alla base  $B$  di  $\mathbf{A}$ . Esiste un vettore costo  $\mathbf{c}$  tale che  $\mathbf{x}$  sia la soluzione ottima ed unica del problema di programmazione lineare*

$$\min \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\begin{aligned} \text{subject to} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{d} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

**Dimostrazione:** definendo il vettore  $\mathbf{c}$  come

$$\mathbf{c}_j = \begin{cases} 0 & \text{se } A_j \in B \\ 1 & \text{se } A_j \notin B \end{cases} \quad (\text{F.4})$$

se  $\mathbf{x}$  è soluzione base ammissibile, il valore di  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$  risulta essere nullo ed  $\mathbf{x}$  è ottimo poichè tutte le componenti di  $\mathbf{c}$  sono non negative.

Sia  $\mathbf{y}$  un'altra soluzione ammissibile; dunque il vettore costo risulta ancora nullo per le componenti di  $\mathbf{y}$  in base e  $\mathbf{y}_j = 0 \forall A_j \notin B$ . Allora deve essere  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$  ed  $\mathbf{x}$  è l'unica soluzione ottimale.

**Osservazione 14.** (*Condizione di Ottimalità*) [Papadimitriou and Steiglitz, 1998, cap.2]

Per stabilire se la soluzione base ammissibile trovata risulti essere quella ottima è necessario analizzare  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ . Si nota che le componenti di  $\mathbf{c}$  corrispondenti a quelle di  $\mathbf{x}$  in base sono nulle per via di (F.4). La soluzione risulta ottima se tutte le componenti di  $\mathbf{c}$  corrispondenti a componenti di  $\mathbf{x}$  non in base sono di valore positivo. Se così non fosse è doveroso fare entrare queste componenti di  $\mathbf{x}$  in base.

Per scegliere la modalità di azione sulle componenti di  $\mathbf{x}$  con valore di  $\mathbf{c}$  negativo si usa la **Regola di Bland**: le operazioni da eseguire devono fare in modo di portare per prima in base la componente di  $\mathbf{x}$  relativa al valore di  $\mathbf{c}$  negativo di indice minimo.

Il procedimento si itera fino a quando tutte le componenti di  $\mathbf{c}$  risultino essere maggiori o uguali a zero ed utilizzando questo metodo l'algoritmo termina in un numero finito di passi.

Quando il metodo di ottimizzazione si arresta si è ottenuto il vettore  $\mathbf{x}$  che realizza il minimo valore della funzione obiettivo.

Una ultima analisi riguarda l'inizializzazione del metodo; essa impiega l'algoritmo stesso per individuare la soluzione base iniziale.



Si definisce un problema ausiliario in forma standard ottenuto aggiungendo a (F.3) un vettore artificiale  $\mathbf{y}$  di  $m$  componenti. I vincoli di tale problema sono

$$\begin{aligned}\mathbf{Ax} + \mathbf{Iy} &= \mathbf{d} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \\ \mathbf{y} &\geq 0.\end{aligned}$$

Una soluzione base del nuovo problema definito è certamente il vettore  $\mathbf{y} = \mathbf{I}$ , che soddisfa la condizione  $\mathbf{y} \geq 0$ . Tuttavia, essa risulta molto distante da quella cercata per (F.3) che non prevede componenti del vettore  $\mathbf{y}$ . Dunque, una soluzione a questo inconveniente può essere definire la funzione obiettivo come  $\mathbf{I}^T \mathbf{y}$  e un problema di ottimizzazione lineare del tipo

$$\begin{aligned}\min \quad & \mathbf{I}^T \mathbf{y} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{Ax} + \mathbf{Iy} = \mathbf{d} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \\ & \mathbf{y} \geq 0.\end{aligned} \tag{F.5}$$

Per procedere nella risoluzione di questo problema di ottimizzazione si attua nello stesso modo descritto precedentemente; è necessario osservare attentamente la soluzione per capire se il problema di ottimizzazione lineare iniziale (F.3) ammetta soluzione. Infatti, se essa esiste significa che (F.5) fornisce come soluzione il vettore  $\mathbf{y}$  identicamente nullo; se così non fosse il problema iniziale non ammette soluzione.

Si termina la descrizione dando una ultima definizione ed osservando il legame tra il problema di ottimizzazione con minimizzazione definito in (F.1) ed un simile problema di ottimizzazione con massimizzazione.

**Definizione 5.** (*Problema Primale e Problema Duale*)

Sia dato un vettore  $\pi \in \mathbb{R}^m$  in cui  $m$  è il numero di righe della matrice  $\mathbf{A}$  iniziale.

Identificando il *Problema Primale* con il problema di ottimizzazione lineare in forma

generale definito come

$$\begin{array}{ll}
 \min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 \text{subject to} & a_i^T x = d_i \quad i \in M \\
 & a_i^T x \geq d_i \quad i \in \overline{M} \\
 & x_j \geq 0 \quad j \in N \\
 & x_j \geq 0 \quad j \in \overline{N},
 \end{array}$$

ad esso si può associare un altro problema di ottimizzazione lineare, detto *Problema Duale*, definito da

$$\begin{array}{ll}
 \max & \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{d} \\
 \text{subject to} & \pi_i \geq 0 \quad i \in M \\
 & \pi_i \geq 0 \quad i \in \overline{M} \\
 & \boldsymbol{\pi}^T A_j \leq c_j \quad j \in N \\
 & \boldsymbol{\pi}^T A_j = c_j \quad j \in \overline{N},
 \end{array} \tag{F.6}$$

in cui  $\boldsymbol{\pi}$  risulta definito da  $\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ , contenendo  $\mathbf{c}_B^T$  le componenti di  $\mathbf{c}$  relative alle componenti di  $\mathbf{x}$  in base, ed  $A_j$  rappresenta la  $j$ -esima colonna di  $\mathbf{A}$ .

**Teorema F.0.2.** (*Dualità Debole*)/[Papadimitriou and Steiglitz, 1998, cap.3]

Sia data una coppia di problemi di ottimizzazione lineare primale e duale. Definita  $X$  la regione ammissibile del problema primale e  $\Pi$  la regione ammissibile del problema duale,  $\forall \mathbf{x} \in X$  e  $\forall \boldsymbol{\pi} \in \Pi$  vale

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{d}.$$

**Dimostrazione:**

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{Ax} \geq \mathbf{d}, \quad \boldsymbol{\pi} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{Ax} \geq \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{d} \\
 \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T, \quad \mathbf{x} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{Ax} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}
 \end{array}$$

da cui segue che

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \pi^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq \pi^T \mathbf{d}.$$

**Teorema F.0.3.** *(Dualità Forte)[Papadimitriou and Steiglitz, 1998, cap.3]*

*Sia data una coppia di problemi di ottimizzazione lineare primale e duale. Se il primale ammette soluzione ottima finita allora*

- 1. anche il duale ammette soluzione ottima finita;*
- 2. i valori delle due soluzioni sono uguali.*

**Dimostrazione:** Siano  $\mathbf{x}$  e  $\pi$  le soluzioni rispettivamente del problema primale e duale.

Per il teorema della Dualità Debole  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \pi^T \mathbf{d}$ . Dunque il problema duale non può avere soluzione illimitata. Inoltre, noto che  $\pi^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ , il problema duale non è impossibile ed ammette soluzione ottima finita.

Ancora dalla definizione di  $\pi^T$  si ha  $\pi^T \mathbf{d} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{d} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$  che dimostra la seconda tesi.

# Appendice G

## Risultati ottenuti tramite il metodo di ottimizzazione

Vengono riportate le tabelle per gli stati considerati contenenti i valore di produzione massima e domanda finale soddisfatta massima ottenuti applicando il metodo di ottimizzazione lineare presentato in capitolo 4.1.

Le tabelle descrittive la produzione finale contengono questi valori: in colonna 1 è presente il codice identificativo del settore industriale, la colonna  $\mathbf{x}$  riporta il livello di produzione del settore prima delle restrizioni per contrastare la diffusione del COVID-19, in colonna  $\mathbf{x\_min}$  e  $\mathbf{x\_max}$  sono presenti i livelli di produzione minimo e massimo a seguito delle restrizioni, in  $\mathbf{x\_max\_F}$  c'è la produzione massima ottenuta tramite il metodo di ottimizzazione della domanda finale ed in colonna  $\mathbf{x\_max\_X}$  è presente la produzione massima ottenuta tramite il metodo di ottimizzazione della produzione finale, calcolata moltiplicando la matrice  $\mathbf{L}$  per la domanda finale massima soluzione del metodo.

Le tabelle descrittive la domanda finale sono così strutturate: in colonna 1 è presente il codice identificativo del settore industriale considerato, in colonna  $\mathbf{f}$  è presente il livello di domanda finale al settore antecedente le restrizioni, in  $\mathbf{f\_min}$  e  $\mathbf{f\_max}$  sono presenti i livelli di domanda finale minimo e massimo al settore soddisfatti a seguito delle restrizioni, la colonna  $\mathbf{f\_max\_F}$  descrive la domanda finale soddisfatta massima ottenuta tramite il metodo di ottimizzazione della produzione ed in  $\mathbf{f\_max\_X}$  c'è la domanda finale soddisfatta massima ottenuta tramite il metodo di ottimizzazione della

domanda finale soddisfatta, calcolata moltiplicando la matrice  $\mathbf{I} - \mathbf{A}$  per la produzione finale massima soluzione del metodo.

Si evidenzia che tutti i prossimi valori contenuti nelle tabelle sono espressi in milioni di dollari americani.

	x	x_min	x_max	x_max_F	x_max_X
A01	6,32E+19	0	6,32E+19	5,45E+19	5,45E+19
A02	6,43E+18	0	9,64E+17	9,64E+17	9,64E+17
A03	4,89E+17	0	4,89E+17	4,25E+17	4,25E+17
B	1,46E+19	0	7,56E+18	7,56E+18	7,56E+18
C10-12	2,46E+20	0	2,46E+20	2,11E+20	2,11E+20
C13-15	2,99E+19	0	9,40E+18	9,40E+18	9,40E+18
C16	3,20E+19	0	8,62E+18	8,62E+18	8,62E+18
C17	5,10E+19	0	3,35E+19	3,35E+19	3,35E+19
C18	2,73E+19	0	2,73E+19	2,09E+19	2,09E+19
C19	1,05E+20	0	1,05E+20	8,76E+19	8,76E+19
C20	1,84E+20	0	1,49E+20	1,49E+20	1,49E+20
C21	6,10E+19	0	6,10E+19	5,52E+19	5,52E+19
C22	1,00E+20	0	6,50E+19	6,50E+19	6,50E+19
C23	5,98E+19	0	2,15E+19	2,15E+19	2,15E+19
C24	1,34E+20	0	3,66E+19	3,66E+19	3,66E+19
C25	1,68E+20	0	5,66E+19	5,66E+19	5,66E+19
C26	9,72E+19	0	5,53E+19	5,53E+19	5,53E+19
C27	1,37E+20	0	5,07E+19	5,07E+19	5,07E+19
C28	3,16E+20	0	1,21E+20	1,21E+20	1,21E+20
C29	4,45E+20	0	1,35E+20	1,35E+20	1,35E+20
C30	5,34E+19	0	2,15E+19	2,15E+19	2,15E+19
C31-32	6,70E+19	0	2,33E+19	2,33E+19	2,33E+19
C33	5,17E+19	0	2,04E+19	2,04E+19	2,04E+19
D35	1,71E+20	0	1,71E+20	1,36E+20	1,36E+20
E36	1,21E+19	0	1,21E+19	1,02E+19	1,02E+19
E37-39	6,39E+19	0	6,39E+19	5,08E+19	5,08E+19
F	3,67E+20	0	1,04E+20	1,04E+20	1,04E+20
G45	7,92E+19	0	6,49E+19	5,58E+19	5,58E+19
G46	2,73E+20	0	2,73E+20	2,05E+20	2,05E+20
G47	2,14E+20	0	1,61E+20	1,61E+20	1,61E+20
H49	1,30E+20	0	1,30E+20	7,89E+19	7,89E+19
H50	3,47E+19	0	3,47E+19	3,01E+19	3,01E+19
H51	3,43E+19	0	3,43E+19	1,80E+19	1,80E+19
H52	1,62E+20	0	1,62E+20	1,11E+20	1,11E+20
H53	3,93E+19	0	3,93E+19	2,80E+19	2,80E+19
I	1,11E+20	0	3,94E+19	3,22E+19	3,22E+19
J58	4,33E+19	0	4,33E+19	3,57E+19	3,57E+19
J59-60	4,25E+19	0	4,25E+19	3,76E+19	3,76E+19
J61	8,38E+19	0	8,38E+19	7,13E+19	7,13E+19
J62-63	1,49E+20	0	1,38E+20	1,20E+20	1,20E+20
K64	1,94E+20	0	1,94E+20	1,53E+20	1,53E+20
K65	9,92E+19	0	9,92E+19	8,85E+19	8,85E+19
K66	4,39E+19	0	4,39E+19	3,81E+19	3,81E+19
L68	5,07E+20	0	2,47E+20	2,47E+20	2,47E+20
M69-70	1,76E+20	0	1,12E+20	1,12E+20	1,12E+20
M71	8,51E+19	0	4,60E+19	4,60E+19	4,60E+19
M72	4,15E+19	0	2,44E+19	2,44E+19	2,44E+19
M73	3,17E+19	0	1,91E+19	1,91E+19	1,91E+19
M74-75	3,07E+19	0	2,47E+19	2,44E+19	2,44E+19
N	2,78E+20	0	1,60E+20	1,60E+20	1,60E+20
O84	3,26E+20	0	3,26E+20	3,06E+20	3,06E+20
P85	2,06E+20	0	2,06E+20	2,01E+20	2,01E+20
Q	3,82E+20	0	3,82E+20	3,81E+20	3,81E+20
R_S	1,95E+20	0	7,57E+19	7,57E+19	7,57E+19
T	9,96E+18	0	9,96E+18	9,96E+18	9,96E+18

Figura G.1: Ottimizzazione della produzione finale per Germania

	f	f_min	f_max	f_max_F	f_max_X
A01	2,15E+19	0	1,93E+19	1,93E+19	1,93E+19
A02	3,03E+18	0	2,73E+18	2,43E+15	2,43E+15
A03	3,66E+17	0	3,30E+17	3,30E+17	3,30E+17
B	1,15E+19	0	1,04E+19	5,46E+18	5,46E+18
C10-12	1,80E+20	0	1,62E+20	1,62E+20	1,62E+20
C13-15	2,89E+19	0	2,60E+19	8,85E+18	8,85E+18
C16	1,62E+19	0	1,46E+19	2,73E+18	2,73E+18
C17	2,86E+19	0	2,57E+19	1,83E+19	1,83E+19
C18	6,63E+18	0	5,97E+18	5,97E+18	5,97E+18
C19	7,45E+19	0	6,71E+19	6,71E+19	6,71E+19
C20	1,51E+20	0	1,36E+20	1,27E+20	1,27E+20
C21	4,87E+19	0	4,47E+19	4,47E+19	4,47E+19
C22	6,14E+19	0	5,53E+19	4,64E+19	4,64E+19
C23	2,77E+19	0	2,49E+19	9,13E+18	9,13E+18
C24	6,88E+19	0	6,19E+19	1,36E+19	1,36E+19
C25	8,00E+19	0	7,20E+19	2,20E+19	2,20E+19
C26	9,08E+19	0	8,18E+19	5,18E+19	5,18E+19
C27	1,01E+20	0	9,11E+19	3,55E+19	3,55E+19
C28	2,60E+20	0	2,34E+20	9,65E+19	9,65E+19
C29	3,64E+20	0	3,28E+20	1,05E+20	1,05E+20
C30	4,49E+19	0	4,04E+19	1,73E+19	1,73E+19
C31-32	6,20E+19	0	5,58E+19	2,04E+19	2,04E+19
C33	2,04E+19	0	1,83E+19	3,87E+18	3,87E+18
D35	7,13E+19	0	6,96E+19	6,96E+19	6,96E+19
E36	7,30E+18	0	7,19E+18	7,19E+18	7,19E+18
E37-39	3,05E+19	0	2,94E+19	2,94E+19	2,94E+19
F	2,47E+20	0	2,22E+20	3,65E+19	3,65E+19
G45	4,15E+19	0	3,74E+19	3,74E+19	3,74E+19
G46	1,52E+20	0	1,37E+20	1,37E+20	1,37E+20
G47	1,51E+20	0	1,37E+20	1,22E+20	1,22E+20
H49	3,55E+19	0	1,53E+19	1,53E+19	1,53E+19
H50	2,98E+19	0	2,64E+19	2,64E+19	2,64E+19
H51	2,67E+19	0	1,33E+19	1,33E+19	1,33E+19
H52	1,41E+19	0	1,10E+19	1,10E+19	1,10E+19
H53	4,12E+18	0	3,98E+18	3,98E+18	3,98E+18
I	1,05E+20	0	2,83E+19	2,83E+19	2,83E+19
J58	1,94E+19	0	1,87E+19	1,87E+19	1,87E+19
J59-60	2,78E+19	0	2,66E+19	2,66E+19	2,66E+19
J61	3,83E+19	0	3,79E+19	3,79E+19	3,79E+19
J62-63	6,56E+19	0	5,98E+19	5,98E+19	5,98E+19
K64	8,34E+19	0	8,10E+19	8,10E+19	8,10E+19
K65	6,18E+19	0	6,10E+19	6,10E+19	6,10E+19
K66	1,24E+18	0	1,22E+18	1,22E+18	1,22E+18
L68	3,22E+20	0	3,21E+20	1,32E+20	1,32E+20
M69-70	3,21E+19	0	2,91E+19	2,15E+19	2,15E+19
M71	4,40E+19	0	3,98E+19	2,18E+19	2,18E+19
M72	3,85E+19	0	3,54E+19	2,24E+19	2,24E+19
M73	5,83E+18	0	5,24E+18	1,16E+18	1,16E+18
M74-75	1,38E+19	0	1,33E+19	1,33E+19	1,33E+19
N	5,12E+19	0	4,90E+19	1,86E+19	1,86E+19
O84	2,70E+20	0	2,69E+20	2,69E+20	2,69E+20
P85	1,84E+20	0	1,82E+20	1,82E+20	1,82E+20
Q	3,67E+20	0	3,67E+20	3,67E+20	3,67E+20
R_S	1,44E+20	0	1,38E+20	4,40E+19	4,40E+19
T	9,96E+18	0	9,96E+18	9,96E+18	9,96E+18

Figura G.2: Ottimizzazione della domanda finale per Germania

	x	x_min	x_max	x_max_F	x_max_X
A01	5,53E+19	0	5,53E+19	2,70E+19	2,91E+19
A02	1,28E+18	0	1,92E+17	1,92E+17	1,92E+17
A03	3,63E+18	0	3,63E+18	2,32E+18	2,38E+18
B	8,06E+18	0	4,17E+18	4,17E+18	4,17E+18
C10-12	1,78E+20	0	1,32E+20	2,80E+19	4,14E+19
C13-15	2,66E+19	0	8,36E+18	8,36E+18	8,36E+18
C16	7,65E+18	0	2,06E+18	1,88E+18	1,86E+18
C17	1,63E+19	0	1,63E+19	3,48E+18	3,30E+18
C18	1,07E+19	0	1,07E+19	4,86E+18	4,88E+18
C19	6,04E+19	0	5,66E+19	4,90E+19	4,90E+19
C20	6,49E+19	0	3,08E+19	3,08E+19	3,08E+19
C21	1,90E+19	0	1,90E+19	2,15E+18	2,17E+18
C22	2,33E+19	0	6,88E+18	4,41E+18	4,48E+18
C23	2,05E+19	0	7,40E+18	7,40E+18	7,40E+18
C24	5,32E+19	0	1,46E+19	1,46E+19	1,46E+19
C25	3,64E+19	0	1,23E+19	1,23E+19	1,23E+19
C26	9,14E+18	0	5,20E+18	5,20E+18	5,20E+18
C27	2,06E+19	0	7,61E+18	7,61E+18	7,61E+18
C28	3,13E+19	0	1,20E+19	1,20E+19	1,20E+19
C29	6,52E+19	0	1,98E+19	1,98E+19	1,98E+19
C30	2,08E+19	0	8,39E+18	8,39E+18	8,39E+18
C31-32	1,59E+19	0	6,41E+18	3,76E+18	3,75E+18
C33	1,36E+19	0	5,37E+18	5,37E+18	5,37E+18
D35	1,21E+20	0	1,14E+20	7,81E+19	7,83E+19
E36	1,24E+19	0	1,24E+19	9,39E+18	9,21E+18
E37-39	2,14E+19	0	2,14E+19	1,45E+19	3,32E+18
F	1,63E+20	0	4,65E+19	4,65E+19	4,65E+19
G45	3,61E+19	0	2,62E+19	2,62E+19	2,62E+19
G46	1,26E+20	0	8,85E+19	8,51E+19	8,54E+19
G47	1,01E+20	0	7,50E+19	7,50E+19	7,50E+19
H49	6,50E+19	0	6,50E+19	3,53E+19	3,56E+19
H50	4,23E+18	0	4,23E+18	2,79E+18	2,79E+18
H51	1,34E+19	0	1,02E+19	9,47E+18	9,47E+18
H52	5,43E+19	0	5,43E+19	3,39E+19	3,40E+19
H53	6,06E+18	0	6,06E+18	3,87E+18	3,87E+18
I	1,48E+20	0	5,23E+19	4,07E+19	4,07E+19
J58	9,89E+18	0	9,14E+18	3,40E+18	3,41E+18
J59-60	1,53E+19	0	1,36E+19	1,29E+19	1,29E+19
J61	4,51E+19	0	4,51E+19	3,58E+19	3,58E+19
J62-63	3,69E+19	0	3,16E+19	3,14E+19	3,14E+19
K64	5,42E+19	0	5,42E+19	3,61E+19	3,62E+19
K65	2,47E+19	0	2,47E+19	2,12E+19	2,12E+19
K66	1,06E+19	0	1,06E+19	9,29E+18	9,29E+18
L68	1,72E+20	0	8,37E+19	8,37E+19	8,37E+19
M69-70	3,76E+19	0	3,08E+19	2,41E+19	2,40E+19
M71	2,93E+19	0	1,59E+19	1,59E+19	1,59E+19
M72	8,45E+18	0	4,98E+18	4,98E+18	4,98E+18
M73	1,19E+19	0	7,20E+18	7,20E+18	7,20E+18
M74-75	7,51E+18	0	6,04E+18	4,37E+18	4,38E+18
N	6,72E+19	0	3,07E+19	3,07E+19	3,07E+19
O84	1,12E+20	0	1,12E+20	1,04E+20	1,04E+20
P85	8,66E+19	0	4,68E+19	4,68E+19	4,68E+19
Q	1,24E+20	0	1,24E+20	1,21E+20	1,21E+20
R_S	6,95E+19	0	3,06E+19	3,06E+19	3,06E+19
T	1,21E+19	0	1,21E+19	1,21E+19	1,21E+19

Figura G.3: Ottimizzazione della produzione finale per Spagna



	f	f_min	f_max	f_max_F	f_max_X
A01	2,21E+19	0	1,99E+19	1,99E+19	1,99E+19
A02	4,91E+17	0	4,49E+17	0,00E+00	3,44E+04
A03	2,14E+18	0	1,92E+18	1,92E+18	1,92E+18
B	7,54E+18	0	6,79E+18	3,85E+18	3,85E+18
C10-12	7,77E+19	0	7,00E+19	9,01E+18	5,43E+06
C13-15	2,18E+19	0	1,96E+19	6,34E+18	6,35E+18
C16	2,30E+18	0	2,07E+18	0,00E+00	1,28E+05
C17	6,86E+18	0	6,18E+18	0,00E+00	-3,43E+05
C18	1,17E+18	0	1,05E+18	0,00E+00	-1,85E+06
C19	4,07E+19	0	3,67E+19	3,67E+19	3,67E+19
C20	3,32E+19	0	2,99E+19	1,68E+19	1,68E+19
C21	1,48E+19	0	1,35E+19	0,00E+00	-1,61E+05
C22	1,07E+19	0	9,61E+18	0,00E+00	-1,35E+06
C23	7,82E+18	0	7,04E+18	2,90E+18	2,93E+18
C24	2,02E+19	0	1,82E+19	3,55E+18	3,32E+18
C25	1,57E+19	0	1,42E+19	4,55E+18	4,21E+18
C26	6,55E+18	0	5,90E+18	3,89E+18	3,89E+18
C27	1,23E+19	0	1,11E+19	4,11E+18	4,12E+18
C28	2,17E+19	0	1,95E+19	7,49E+18	7,48E+18
C29	5,80E+19	0	5,22E+19	1,70E+19	1,70E+19
C30	1,68E+19	0	1,51E+19	6,46E+18	6,46E+18
C31-32	9,10E+18	0	8,20E+18	0,00E+00	9,12E+05
C33	5,11E+18	0	4,60E+18	1,25E+18	1,25E+18
D35	2,43E+19	0	2,41E+19	2,41E+19	2,41E+19
E36	5,52E+18	0	5,47E+18	5,47E+18	5,47E+18
E37-39	1,03E+19	0	1,00E+19	0,00E+00	9,50E+18
F	1,18E+20	0	1,07E+20	2,88E+19	2,87E+19
G45	2,71E+19	0	2,44E+19	2,18E+19	2,17E+19
G46	6,33E+19	0	5,73E+19	5,73E+19	5,73E+19
G47	8,48E+19	0	7,68E+19	6,73E+19	6,74E+19
H49	2,57E+19	0	1,57E+19	1,57E+19	1,57E+19
H50	2,87E+18	0	2,08E+18	2,08E+18	2,08E+18
H51	9,21E+18	0	6,93E+18	6,93E+18	6,93E+18
H52	1,29E+19	0	1,03E+19	1,03E+19	1,03E+19
H53	6,45E+17	0	6,30E+17	6,30E+17	6,30E+17
I	1,34E+20	0	3,27E+19	3,27E+19	3,27E+19
J58	4,00E+18	0	3,78E+18	0,00E+00	-1,21E+05
J59-60	8,47E+18	0	8,15E+18	8,15E+18	8,15E+18
J61	2,08E+19	0	2,04E+19	2,04E+19	2,04E+19
J62-63	2,54E+19	0	2,30E+19	2,30E+19	2,30E+19
K64	1,28E+19	0	1,23E+19	1,23E+19	1,23E+19
K65	1,63E+19	0	1,62E+19	1,62E+19	1,62E+19
K66	3,57E+18	0	3,50E+18	3,50E+18	3,50E+18
L68	1,20E+20	0	1,20E+20	5,39E+19	5,40E+19
M69-70	8,88E+18	0	8,18E+18	8,18E+18	8,18E+18
M71	1,50E+19	0	1,36E+19	8,73E+18	8,71E+18
M72	8,32E+18	0	7,66E+18	4,90E+18	4,90E+18
M73	1,62E+18	0	1,47E+18	1,04E+18	1,08E+18
M74-75	1,01E+18	0	9,77E+17	9,77E+17	9,77E+17
N	1,92E+19	0	1,84E+19	3,16E+18	3,33E+18
O84	9,78E+19	0	9,71E+19	9,71E+19	9,71E+19
P85	7,98E+19	0	7,90E+19	4,28E+19	4,28E+19
Q	1,12E+20	0	1,12E+20	1,12E+20	1,12E+20
R_S	5,17E+19	0	4,95E+19	2,13E+19	2,13E+19
T	1,21E+19	0	1,21E+19	1,21E+19	1,21E+19

Figura G.4: Ottimizzazione della domanda finale per Spagna

	x	x_min	x_max	x_max_F	x_max_X
A01	7,13E+19	0	7,13E+19	4,27E+19	4,27E+19
A02	1,98E+18	0	2,97E+17	2,97E+17	2,97E+17
A03	2,17E+18	0	2,17E+18	1,47E+18	1,47E+18
B	1,35E+19	0	8,85E+18	8,85E+18	8,85E+18
C10-12	1,69E+20	0	1,25E+20	6,44E+19	6,44E+19
C13-15	1,06E+20	0	4,32E+19	4,32E+19	4,32E+19
C16	1,91E+19	0	7,51E+18	5,56E+18	5,56E+18
C17	2,81E+19	0	1,44E+19	8,55E+18	8,55E+18
C18	1,51E+19	0	1,51E+19	9,75E+18	9,75E+18
C19	7,01E+19	0	7,01E+19	5,25E+19	5,25E+19
C20	6,69E+19	0	6,14E+19	5,21E+19	5,21E+19
C21	3,24E+19	0	3,24E+19	2,86E+19	2,86E+19
C22	5,28E+19	0	2,78E+19	2,78E+19	2,78E+19
C23	4,06E+19	0	1,57E+19	1,57E+19	1,57E+19
C24	7,31E+19	0	2,00E+19	2,00E+19	2,00E+19
C25	1,05E+20	0	3,55E+19	3,55E+19	3,55E+19
C26	2,88E+19	0	1,76E+19	1,76E+19	1,76E+19
C27	4,68E+19	0	2,32E+19	2,32E+19	2,32E+19
C28	1,46E+20	0	7,72E+19	7,72E+19	7,72E+19
C29	6,30E+19	0	1,91E+19	1,91E+19	1,91E+19
C30	2,92E+19	0	1,18E+19	1,18E+19	1,18E+19
C31-32	4,91E+19	0	2,06E+19	2,06E+19	2,06E+19
C33	2,51E+19	0	1,66E+19	1,66E+19	1,66E+19
D35	1,12E+20	0	1,12E+20	8,04E+19	8,04E+19
E36	1,18E+19	0	1,18E+19	9,48E+18	9,48E+18
E37-39	5,15E+19	0	5,15E+19	3,45E+19	3,45E+19
F	2,71E+20	0	1,37E+20	1,37E+20	1,37E+20
G45	4,55E+19	0	3,93E+19	3,66E+19	3,66E+19
G46	2,15E+20	0	1,43E+20	1,43E+20	1,43E+20
G47	1,58E+20	0	1,18E+20	1,18E+20	1,18E+20
H49	1,21E+20	0	1,21E+20	6,29E+19	6,29E+19
H50	1,66E+19	0	1,66E+19	8,98E+18	8,98E+18
H51	1,52E+19	0	1,52E+19	8,68E+18	8,68E+18
H52	8,50E+19	0	8,50E+19	5,16E+19	5,16E+19
H53	9,19E+18	0	9,19E+18	6,45E+18	6,45E+18
I	1,35E+20	0	5,87E+19	3,84E+19	3,84E+19
J58	1,23E+19	0	1,23E+19	1,02E+19	1,02E+19
J59-60	1,96E+19	0	1,96E+19	1,58E+19	1,58E+19
J61	5,16E+19	0	5,16E+19	4,31E+19	4,31E+19
J62-63	6,48E+19	0	6,48E+19	4,93E+19	4,93E+19
K64	1,20E+20	0	1,20E+20	8,37E+19	8,37E+19
K65	3,10E+19	0	3,10E+19	2,78E+19	2,78E+19
K66	3,95E+19	0	3,95E+19	2,79E+19	2,79E+19
L68	3,06E+20	0	1,49E+20	1,49E+20	1,49E+20
M69-70	9,43E+19	0	9,43E+19	6,37E+19	6,37E+19
M71	4,00E+19	0	4,00E+19	2,59E+19	2,59E+19
M72	1,79E+19	0	1,79E+19	1,48E+19	1,48E+19
M73	2,01E+19	0	1,21E+19	1,21E+19	1,21E+19
M74-75	2,90E+19	0	2,90E+19	2,05E+19	2,05E+19
N	1,24E+20	0	7,23E+19	7,23E+19	7,23E+19
O84	1,72E+20	0	1,72E+20	1,70E+20	1,70E+20
P85	9,76E+19	0	9,76E+19	9,59E+19	9,59E+19
Q	1,98E+20	0	1,98E+20	1,97E+20	1,97E+20
R_S	1,11E+20	0	5,61E+19	5,61E+19	5,61E+19
T	2,56E+19	0	2,56E+19	2,56E+19	2,56E+19

Figura G.5: Ottimizzazione della produzione finale per Italia

	f	f_min	f_max	f_max_F	f_max_X
A01	2,37E+19	0	2,13E+19	2,13E+19	2,13E+19
A02	1,29E+18	0	1,24E+18	0,00E+00	7,09E+04
A03	1,14E+18	0	1,03E+18	1,03E+18	1,03E+18
B	9,85E+18	0	8,87E+18	6,50E+18	6,50E+18
C10-12	9,47E+19	0	8,52E+19	3,34E+19	3,34E+19
C13-15	6,75E+19	0	6,08E+19	2,60E+19	2,60E+19
C16	6,04E+18	0	5,44E+18	0,00E+00	-1,72E+06
C17	1,11E+19	0	9,96E+18	0,00E+00	-3,17E+06
C18	1,65E+18	0	1,48E+18	1,48E+18	1,48E+18
C19	3,21E+19	0	2,89E+19	2,89E+19	2,89E+19
C20	3,62E+19	0	3,26E+19	3,26E+19	3,26E+19
C21	2,83E+19	0	2,55E+19	2,55E+19	2,55E+19
C22	2,25E+19	0	2,03E+19	1,23E+19	1,23E+19
C23	1,66E+19	0	1,49E+19	3,56E+18	3,56E+18
C24	3,21E+19	0	2,89E+19	3,24E+18	3,24E+18
C25	3,82E+19	0	3,43E+19	4,67E+18	4,67E+18
C26	2,06E+19	0	1,85E+19	1,27E+19	1,27E+19
C27	3,17E+19	0	2,85E+19	1,52E+19	1,52E+19
C28	1,09E+20	0	9,84E+19	5,81E+19	5,81E+19
C29	5,02E+19	0	4,52E+19	1,22E+19	1,22E+19
C30	2,34E+19	0	2,11E+19	8,63E+18	8,63E+18
C31-32	3,22E+19	0	2,90E+19	1,11E+19	1,11E+19
C33	1,39E+19	0	1,25E+19	1,00E+19	1,00E+19
D35	2,56E+19	0	2,52E+19	2,52E+19	2,52E+19
E36	6,58E+18	0	6,54E+18	6,54E+18	6,54E+18
E37-39	1,43E+19	0	1,40E+19	1,40E+19	1,40E+19
F	1,76E+20	0	1,59E+20	8,37E+19	8,37E+19
G45	3,23E+19	0	2,91E+19	2,91E+19	2,91E+19
G46	1,08E+20	0	9,78E+19	8,28E+19	8,28E+19
G47	1,34E+20	0	1,21E+20	1,05E+20	1,05E+20
H49	4,15E+19	0	1,86E+19	1,86E+19	1,86E+19
H50	1,13E+19	0	5,97E+18	5,97E+18	5,97E+18
H51	8,26E+18	0	4,36E+18	4,36E+18	4,36E+18
H52	2,52E+19	0	1,67E+19	1,67E+19	1,67E+19
H53	1,46E+18	0	1,41E+18	1,41E+18	1,41E+18
I	1,10E+20	0	2,31E+19	2,31E+19	2,31E+19
J58	7,30E+18	0	7,00E+18	7,00E+18	7,00E+18
J59-60	7,95E+18	0	7,67E+18	7,67E+18	7,67E+18
J61	2,76E+19	0	2,68E+19	2,68E+19	2,68E+19
J62-63	2,59E+19	0	2,37E+19	2,37E+19	2,37E+19
K64	2,22E+19	0	2,19E+19	2,19E+19	2,19E+19
K65	2,28E+19	0	2,26E+19	2,26E+19	2,26E+19
K66	3,26E+18	0	3,10E+18	3,10E+18	3,10E+18
L68	2,29E+20	0	2,27E+20	1,01E+20	1,01E+20
M69-70	1,01E+19	0	9,56E+18	9,56E+18	9,56E+18
M71	3,68E+18	0	3,38E+18	3,38E+18	3,38E+18
M72	1,39E+19	0	1,25E+19	1,25E+19	1,25E+19
M73	1,18E+18	0	1,08E+18	7,72E+17	7,72E+17
M74-75	6,68E+18	0	6,35E+18	6,35E+18	6,35E+18
N	2,64E+19	0	2,51E+19	1,25E+19	1,25E+19
O84	1,67E+20	0	1,67E+20	1,67E+20	1,67E+20
P85	9,14E+19	0	9,14E+19	9,14E+19	9,14E+19
Q	1,77E+20	0	1,76E+20	1,76E+20	1,76E+20
R_S	7,56E+19	0	7,21E+19	3,54E+19	3,54E+19
T	2,56E+19	0	2,56E+19	2,56E+19	2,56E+19

Figura G.6: Ottimizzazione della domanda finale per Italia

# Appendice H

## Risultati ottenuti tramite gli schemi di razionamento

Si riportano i valori di produzione totale e di domanda totale soddisfatta dai sistemi economici di Germania, Spagna ed Italia. Si ricorda che l'algoritmo 1 è quello con razionamento proporzionale, l'algoritmo 2 prevede il razionamento proporzionale prioritario, l'algoritmo 3 è con razionamento prioritario basato sulla dimensione dell'ordine e il 4 con razionamento prioritario in ordine casuale. Essendo l'algoritmo 4 eseguito più volte, data la sua natura aleatoria, del risultato totale si forniscono media, primo quantile e terzo quantile.

Germania	Liv. % di x
Algoritmo_1	15.12%
Algoritmo_2	28.57%
Algoritmo_3	0.00%
Algoritmo_4 (media)	1.41%
Algoritmo_4 (I quant.)	0.00%
Algoritmo_4 (III quant.)	1.78%

Figura H.1: Livello di produzione totale per Germania

Germania	Liv. % di f
Algoritmo_1	15.22%
Algoritmo_2	28.75%
Algoritmo_3	0.00%
Algoritmo_4 (media)	1.44%
Algoritmo_4 (I quant.)	0.00%
Algoritmo_4 (III quant.)	1.80%

Figura H.2: Livello di domanda totale soddisfatta per Germania

Spagna	Liv. % di x
Algoritmo_1	14.53%
Algoritmo_2	23.95%
Algoritmo_3	0.00%
Algoritmo_4 (media)	0.60%
Algoritmo_4 (I quant.)	0.00%
Algoritmo_4 (III quant.)	0.53%

Figura H.3: Livello di produzione totale per Spagna

Spagna	Liv. % di f
Algoritmo_1	14.66%
Algoritmo_2	24.17%
Algoritmo_3	0.00%
Algoritmo_4 (media)	0.63%
Algoritmo_4 (I quant.)	0.00%
Algoritmo_4 (III quant.)	0.48%

Figura H.4: Livello di domanda totale soddisfatta per Spagna

Italia	Liv. % di x
Algoritmo_1	16.22%
Algoritmo_2	42.13%
Algoritmo_3	0.00%
Algoritmo_4 (media)	3.89%
Algoritmo_4 (I quant.)	0.53%
Algoritmo_4 (III quant.)	6.32%

Figura H.5: Livello di produzione totale per Italia

Italia	Liv. % di f
Algoritmo_1	16.88%
Algoritmo_2	43.10%
Algoritmo_3	0.00%
Algoritmo_4 (media)	4.08%
Algoritmo_4 (I quant.)	0.50%
Algoritmo_4 (III quant.)	6.80%

Figura H.6: Livello di domanda totale soddisfatta per Italia

# Appendice I

## Analisi della rete industriale a livello matematico

Per poter presentare le prime definizioni e proprietà che caratterizzano una rete si fa riferimento al testo Newman [2018].

### **Definizione 6.** (*Rete*)

Una *rete*, chiamata anche *grafo*, è definita da una collezione di nodi, anche detti vertici, collegati da bordi.

Nel seguito si considera una rete composta da  $n$  nodi ed  $m$  bordi.

Una rete può contenere un solo bordo che colleghi una data coppia di nodi, oppure può presentare più di un bordo a collegamento di due stessi nodi ed, in questo caso, è detta *multi-bordo*. Ancora, la rete può contenere un bordo, o più bordi, che connettano un vertice a se stesso, detti *autoconnessioni*.

Una rete che non contiene nè autoconnessioni nè multi-bordi è detta *rete semplice*; in caso contrario essa è una *rete multipla*.

In primo luogo una rete viene descritta tramite la matrice di adiacenza.

### **Definizione 7.** (*Matrice di Adiacenza*)

Sia data una rete semplice definita da  $n$  nodi. Si identifichino i nodi con etichette contenenti i numeri interi  $1, \dots, n$  in modo tale che ognuna sia ripetuta una sola volta. La *matrice di adiacenza*  $\mathbf{A}$  che rappresenta la rete è una matrice di dimensioni  $n \times n$  e

di elementi  $A_{ij}$  definiti come

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se esiste il bordo che connette } i \text{ e } j \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Si osserva che la matrice di adiacenza risulta essere una matrice simmetrica poichè, se esiste il bordo che connette il nodo  $i$  al  $j$ -esimo, per definizione esiste anche quello che collega  $j$  ad  $i$ . Inoltre, nel caso in cui la rete non contenga autoconnessioni, la matrice di adiacenza corrispondente ha elementi diagonali nulli. Viceversa, se esistono autoconnessioni, il relativo elemento della matrice  $A_{ii}$  risulta essere di valore 2 in quanto ogni bordo viene contato due volte: se esiste il collegamento tra  $i$  e  $j$  allora  $A_{ij} = A_{ji} = 1$  e così viene fatto anche per il bordo che collega  $i$  ad  $i$  stesso.

Se la rete fosse tale da presentare bordi multipli allora  $A_{ij}$  conta la molteplicità ed  $A_{ii}$  è tale che  $A_{ii} = 2 \times$  molteplicità del bordo.

In alcune circostanze è sufficiente descrivere la rete attraverso la matrice di adiacenza sopra descritta; in altri contesti può essere di maggiore interesse utilizzare una *matrice di adiacenza pesata* in cui ogni elemento  $A_{ij}$  rappresenta l'entità della transazione tra i nodi  $i$  e  $j$ . Solitamente questo valore è positivo per via del significato conferitogli, ma, in termini matematici, nulla vieta che sia di segno negativo.

**Definizione 8.** (*Rete direzionata*)

Una *rete direzionata*, o *grafo direzionato*, è una rete in cui i bordi hanno una direzione da un nodo verso un altro. Questi stessi bordi sono detti *bordi direzionati*, o *archi*, e sono rappresentati tramite frecce che indicano il verso di percorrenza.

**Definizione 9.** (*Matrice di Adiacenza con direzione*)

La *matrice di adiacenza*  $\mathbf{A}$  che rappresenta una rete direzionata è definita sempre come una matrice di dimensioni  $n \times n$  i cui gli elementi  $A_{ij}$  sono

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se esiste il bordo da } j \text{ ad } i \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (\text{I.2})$$



In questo caso la matrice di adiacenza non è simmetrica poichè l'esistenza del bordo che connette il nodo  $j$  ad  $i$  non implica che esista anche il bordo da  $i$  a  $j$ .

Similmente, in caso di autoconnessioni, il termine  $A_{ii}$  risulta di valore pari ad 1 e non di valore pari a 2 come accade nel caso di reti senza direzione.

**Definizione 10.** (*Grado di un nodo*)

In una rete senza direzione il grado di un nodo è definito come il numero di bordi collegati ad esso. Nel caso in cui la rete contenga  $n$  nodi, il grado del nodo  $i$ -esimo, indicato da  $k_i$ , è definito in termini della matrice di adiacenza come

$$k_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}. \quad (\text{I.3})$$

In una rete semplice senza direzione ogni bordo che collega due nodi ha due punti di arrivo poichè, considerando i nodi  $i$  e  $j$ , esiste sia il bordo da  $i$  a  $j$  che quello da  $j$  ad  $i$ . Dunque, assumendo che esistano in totale  $m$  bordi, vale

$$2m = \sum_{i=1}^n k_i = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}. \quad (\text{I.4})$$

Per una rete direzionata ogni nodo ha due gradi: *in-degree* è il numero di bordi che terminano nel nodo, mentre *out-degree* è il numero di bordi che partono dal nodo. Assumendo che per il nodo  $i$ -esimo ci siano bordi sia entranti che uscenti, essi sono definiti come

$$k_i^{in} = \sum_{j=1}^n A_{ij}, \quad k_j^{out} = \sum_{i=1}^n A_{ij}. \quad (\text{I.5})$$

In una rete così fatta il numero totale di bordi  $m$  risulta essere uguale al numero totale di bordi entranti o, equivalentemente, al numero totale di bordi uscenti:

$$m = \sum_{i=1}^n k_i^{in} = \sum_{j=1}^n k_j^{out} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}. \quad (\text{I.6})$$

**Definizione 11.** (*Grado medio*)

Data una rete senza direzione, si definisce il *grado medio* come

$$c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i. \quad (\text{I.7})$$

Combinando (I.7) con (I.4) si ricava

$$c = \frac{2m}{n}. \quad (\text{I.8})$$

Data, invece, una rete direzionata si definiscono il *grado medio in entrata* ed il *grado medio in uscita* come

$$c_{in} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i^{in} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n k_j^{out} = c_{out}. \quad (\text{I.9})$$

Questa volta combinando (I.9) con (I.6) si ottiene

$$\tilde{c} = c_{in} = c_{out} = \frac{m}{n}. \quad (\text{I.10})$$

**Definizione 12.** (*Densità di una rete*)

Data una rete semplice contenente  $n$  nodi, il massimo numero possibile di bordi presenti nella rete è  $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ . La *densità*  $\rho$  di una rete è data dalla frazione di bordi effettivamente presenti

$$\rho = \frac{m}{\binom{n}{2}} = \frac{2m}{n(n-1)} = \frac{c}{n-1}, \quad (\text{I.11})$$

che, per reti contenenti un numero di nodi sufficientemente grande, può essere approssimata come

$$\rho \simeq \frac{c}{n}. \quad (\text{I.12})$$

Si osserva che la quantità  $\rho$  è tale che  $0 \leq \rho \leq 1$ . Infatti, dalla definizione, se il numero di nodi tende ad  $\infty$  allora  $\rho \rightarrow 0$  mentre se il numero di nodi tende a 2, che è il più piccolo numero necessario per definire una rete,  $\rho \rightarrow 1$ .

Data una rete direzionata contenente  $n$  nodi, la *densità*  $\rho$  della rete è

$$\rho = \frac{\tilde{c}}{n}, \quad (\text{I.13})$$

ricordando la definizione di  $\tilde{c}$  in (I.10).

**Definizione 13.** (*Rete densa e rete sparsa*)

Sia data una sequenza di reti definite da un numero di nodi  $n$  crescente. Se la densità della rete rimane non nulla all'aumentare di  $n$  la rete si dice *densa*. In questo caso l'insieme delle componenti non nulle della matrice di adiacenza non diventa vuoto all'aumentare di  $n$ . Se la densità è tale che  $\rho \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$  la rete è detta *sparsa* e la frazione delle componenti non nulle della matrice di adiacenza tende a zero.

# Ringraziamenti

Vorrei essere grata a chi mi ha affiancato nell'elaborazione di questo scritto e a tutti coloro con cui ho condiviso il percorso.

In primis ringrazio il professore Giacomo Bormetti che ancora una volta mi ha dato l'opportunità di confronto e di svolgere insieme l'analisi. Ancora prima che per il lavoro svolto lo ringrazio per essere riuscito a comprendere in quale direzione io volessi andare: l'intenzione era quella di potere sperimentare cosa significasse applicare gli studi eseguiti negli anni universitari alla realtà industriale. Inoltre, a seguito dei drastici e presenti cambiamenti dovuti al COVID-19, l'argomento più attuale era di certo questa pandemia. Ecco quanto, tutto quello che io avevo in mano come proposta ed obiettivo per questa tesi e da qui siamo giunti ad analizzare i sistemi industriali del nostro stato e di altri vicini. In più il periodo di studio è stato ricco di confronti e suggerimenti e non potrei essermi trovata meglio. Grazie.

Ringrazio anche Laura con cui ho condiviso gli anni universitari a Bologna. Sicuramente il supporto e confronto che ci siamo date a vicenda durante la pandemia e non solo è stato molto importante.

Grazie mamma e grazie babbo per avermi sostenuto ed appoggiato sempre con tanta forza ed entusiasmo anche nel terzo percorso di laurea.

Grazie Riccardo per essermi sempre stato vicino, per avermi spronato ed aiutato anche solo con la sua presenza.

Per ultimo, ma non meno importante, ringrazio me stessa per la tenacia, la forza di volontà e la testardaggine che ho messo in tutto il percorso fatto, nelle decisioni prese e nella realizzazione di questo elaborato.