

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea Triennale in Fisica

# ESPOSIZIONE DEL PROBLEMA DI EINSTEIN-STRAUS

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
ROBERTO CASADIO

Presentata da:  
ATTILIO BASILI

Anno Accademico 2020/2021



## Sommario

Il problema di Einstein-Straus, anche dopo anni dalla sua pubblicazione, risulta essere ancora oggi di grande interesse nella cosmologia moderna. Infatti, per quanto siano passati anni dalla pubblicazione del lavoro dei due fisici nel 1945, tuttora rimangono molti quesiti aperti che danno spunto a una grande varietà di ricerche anche nell'ambito delle ipotesi più recenti. In questa tesi si è cercato di esporre tale problema nella maniera più completa possibile, andando prima a definire gli elementi matematici e cosmologici utili, sia per comprendere in quali direzioni si stia muovendo lo studio dell'universo, sia per capire il lavoro svolto da Einstein-Straus, il quale viene trattato nell'ultimo capitolo dell'elaborato. Infine, nelle conclusioni sono stati descritti i problemi e i limiti che tale modello presenta e si è illustrato l'impatto che tale lavoro ha avuto e ha nella ricerca odierna, inserendo anche riferimenti ad articoli al fine di dare la possibilità di approfondire ulteriormente l'argomento.



# Indice

<b>Introduzione</b>	5
<b>1 Sorgente a simmetria sferica nel vuoto</b>	7
1.1 Trattazione della soluzione di Schwarzschild . . . . .	7
1.2 Singolarità nella metrica di Schwarzschild . . . . .	9
1.3 Coordinate di Eddington-Finkelstein . . . . .	10
1.4 Coordinate di Kruskal . . . . .	11
1.5 Diagrammi di Penrose . . . . .	14
<b>2 Elementi di Cosmologia</b>	19
2.1 Metrica di Robertson-Walker . . . . .	20
2.1.1 Distanze nella metrica di Robertson-Walker . . . . .	24
2.2 Equazioni di Friedmann . . . . .	27
2.2.1 Modelli di Freidmann . . . . .	29
2.2.2 Modello di Freidmann-Robertson-Walker . . . . .	31
2.2.3 Struttura conforme dello spazio-tempo di Robertson-Walker . . . . .	36
2.3 Modello di universo di de Sitter . . . . .	37
2.3.1 Orizzonte cosmologico e delle particelle in un universo di de Sitter . . . . .	38
2.3.2 Sistemi di coordinate e Geometria dello spazio di de Sitter . . . . .	40
<b>3 Sorgente a simmetria sferica in un universo in espansione</b>	45
3.1 Metrica di Schwarzschild nello spazio di de Sitter . . . . .	45
3.2 Il problema di Einstein-Straus . . . . .	50
<b>Conclusioni</b>	59
<b>Bibliografia</b>	62



# Introduzione

Lo scopo di questa tesi è quello di esporre nella maniera più chiara e completa il problema di Einstein-Straus, che presenta, anche a distanza di anni, un interesse particolare poiché risulta ancora una questione non risolta appieno, lasciando spazio a domande e questioni che tuttora risultano argomento di ricerca. Il problema in questione emerge nel momento in cui si va a descrivere il campo gravitazionale di una sorgente a simmetria sferica e statica, come una stella o un buco nero, immersa in un universo che si espande. Infatti, come si vedrà nell'elaborato, per descrivere la metrica della sorgente si utilizza la ben nota soluzione di Schwarzschild, che è statica, mentre per rappresentare la metrica di un universo in espansione si utilizza quella di Robertson-Walker, che risulta essere dipendente dal tempo. Il lavoro svolto da Einstein e Straus, quindi, è stato quello di trovare un modo per accordare tali metriche in una unica soluzione, al fine di poter avere una descrizione completa della sorgente posta in un universo che si espande. Il lavoro svolto, al fine di poter presentare un elaborato che tratti in maniera completa l'argomento, è stato quello di documentarsi attraverso l'ausilio di libri e articoli scientifici, da cui poi estrapolare i contenuti pertinenti al tema e riportarli nella seguente tesi. Tale procedimento di stesura, effettuato tramite un lavoro di analisi e rielaborazione, ha permesso di creare un articolo scorrevole ma allo stesso tempo approfondito riguardo al problema trattato. Al fine di guidare il lettore ad una chiara conoscenza del problema, si è deciso di sviluppare la tesi in tre capitoli. Nel primo viene esposta la soluzione di Schwarzschild per le equazioni di campo di Einstein nel vuoto riguardanti una sorgente a simmetria sferica, che risultano di estrema importanza per la comprensione dell'elaborato. In esso non vi è una semplice esposizione di tale argomento, ma anche un'analisi approfondita dei problemi inerenti a tale soluzione, che vengono affrontati nei vari paragrafi del capitolo. Infine, viene introdotto il metodo di costruzione dei diagrammi di Penrose, che risultano essere essenziali per riuscire a intendere i vari argomenti espressi nei capitoli successivi. Nel secondo capitolo viene fornita una visione introduttiva della cosmologia, cioè si introducono i vari principi su cui essa si basa e da essi viene sviluppato un discorso che porta alla costruzione della metrica di Robertson-Walker. Essa risulta molto importante al fine di una comprensione del problema di Einstein-Straus, in quanto descrive il modello di universo su cui viene immersa la sorgente. In aggiunta, per approfondire al meglio la descrizione della struttura dell'universo, vengono studiate le equazioni di Friedmann e i vari modelli di universo che si ottengono dalla loro trattazione. Fra questi

si pone una particolare attenzione a quello di de Sitter, che essendo privo di materia, e quindi senza fenomeni gravitazionali dati dalla presenza di quest'ultima, ci permette di studiare in maniera approfondita il fenomeno dell'espansione dell'universo rappresentato attraverso l'utilizzo di una costante detta *costante cosmologica*. Nel terzo capitolo, dopo aver analizzato lo spazio ottenuto dall'inserimento della metrica di Schwarzschild all'interno del modello di universo di de Sitter, si è finalmente esposto, attraverso una rigorosa trattazione, il problema di Einstein-Straus. Essi affrontarono tale problema immaginando di togliere dal continuum spazio-temporale di un universo, omogeneo e in espansione, una porzione sferica di materia e di riporla tutta al centro di tale sfera vuota, cosicché da avere all'interno di essa la metrica descritta da Schwarzschild e all'esterno quella di Robertson-Walker. Infine, il loro lavoro fu quello di accordare in maniera regolare le due metriche attraverso dei metodi perturbativi. Alla fine dell'elaborato, si è scritta una Conclusione in cui vengono esposte le varie osservazioni che emergono dallo studio di tale problema e si introducono i lavori svolti successivamente per cercare di risolverlo, nonché le tematiche ancora irrisolte.



# Capitolo 1

## Sorgente a simmetria sferica nel vuoto

In questo primo capitolo si esporrà la teoria relativa alla soluzione di Schwarzschild [2, 13]. Essa risulta essere la soluzione più generale delle equazioni di campo di Einstein nel vuoto, poiché descrive la geometria di una massa a simmetria sferica, non rotante e priva di carica in uno spazio-tempo statico. La staticità di quest'ultimo ci viene assicurata dal teorema di Birkhoff [2], che asserisce: una soluzione a simmetria sferica nel vuoto, nella regione esteriore, è necessariamente statica. Inoltre, si esporranno le coordinate di Eddington-Finkelstein, con cui si approfondirà lo studio della singolarità coordinata che emergerà da tale metrica. Infine, attraverso le coordinate di Kruskal si andrà a calcolare la massima estensione analitica della soluzione di Schwarzschild.

### 1.1 Trattazione della soluzione di Schwarzschild

Per trovare le soluzioni da noi cercate andiamo per prima cosa ad introdurre le equazioni di campo di Einstein, che descrivono il campo gravitazionale generato da una distribuzione di sorgenti. Esse sono:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

con :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (1.2)$$

dove  $T_{\mu\nu}$  è il tensore energia-impulso che descrive la sorgente in un campo gravitazionale, mentre  $G_{\mu\nu}$  è il tensore di Einstein, che descrive la curvatura dello spazio-tempo generata dalla sorgente. La soluzione di Schwarzschild si basa su una sorgente a simmetria sferica il cui elemento di linea in quattro dimensioni, utilizzando le coordinate polari  $(t, r, \theta, \phi)$ , è dato da:

$$ds^2 = A dt^2 - 2B dt dr - C dr^2 - D(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.3)$$

dove l'elemento  $(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$  è richiesto in tale forma dalla simmetria sferica, poiché non deve variare al variare di  $\theta$  e  $\phi$ . Inoltre, i coefficienti  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  dipendono dalle

coordinate  $r$  e  $t$  e, poiché la scelta del sistema di riferimento è arbitraria, si possono operare delle trasformazioni su tali coordinate al fine di ottenere un elemento di linea con  $B(t, r) = 0$ ,  $D(t, r) = r^2$  e  $A(t, r)$  e  $C(t, r)$  in forma esponenziale:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.4)$$

con  $\nu = \nu(t, r)$  e  $\lambda = \lambda(t, r)$ . Da ciò possiamo osservare, che la metrica covariante è nella forma:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(e^\nu, -e^\lambda, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta) \quad (1.5)$$

e poiché è diagonale, la sua forma controvariante è:

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(e^{-\nu}, -e^{-\lambda}, -r^{-2}, -r^{-2} \sin^{-2} \theta) \quad (1.6)$$

Ora, per determinare la soluzione di Schwarzschild dobbiamo trovare le funzioni  $\nu$  e  $\lambda$  introducendo le equazioni di campo di Einstein nel vuoto, che si ricavano ponendo il tensore  $T_{\mu\nu} = 0$ , presente nelle (1.1), da cui possiamo ricavarci che:

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad (1.7)$$

ottenendo tre equazioni indipendenti:

$$e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0 \quad (1.8)$$

$$e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0 \quad (1.9)$$

$$\dot{\lambda} = 0 \quad (1.10)$$

dove, denotiamo le derivate rispetto a  $t$  con il punto, mentre quelle rispetto ad  $r$  con il pedice. Ora, sommando la (1.8) con la (1.9) otteniamo:

$$\lambda' + \nu' = 0 \quad (1.11)$$

la cui integrazione ci dà:

$$\lambda + \nu = h(t) \quad (1.12)$$

con  $h$  funzione arbitraria di integrazione. Poiché  $\lambda$  è funzione solamente della coordinata  $r$ , abbiamo che:

$$(re^{-\lambda})' = 1 \quad (1.13)$$

da cui ricaviamo integrandola:

$$re^{-\lambda} = r + \text{costante} \quad (1.14)$$

Scegliendo poi come costante  $-2m$ , abbiamo che:

$$e^{-\lambda} = \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \quad (1.15)$$

invece, per eliminare  $e^{h(t)}$ , si trasforma la coordinata  $t$  in una nuova coordinata  $t'$  determinata dalla relazione:

$$t' = \int_c^t e^{\frac{1}{2}h(u)} du \quad (1.16)$$

con  $c$  costante arbitraria. Quindi, l'unica componente della metrica che cambia è:

$$g'_{00} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \quad (1.17)$$

Infine, siamo quindi giunti alla più generale soluzione a simmetria sferica delle equazioni di campo nel vuoto, detto elemento di linea di Schwarzschild [2]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.18)$$

Dal teorema di Birkhoff, enunciato sopra, sappiamo che tale soluzione è statica, cioè è simmetrica e invariante per traslazioni rispetto alla coordinata tempo. Inoltre, abbiamo una massa, detta geometrica, definita come  $m = \frac{GM}{c^2}$ , che in unità naturali diventa:  $m = M$ . È molto importante notare, che tale soluzione risulta essere asintoticamente piatta. Tale proprietà, ci assicura, che per  $r \rightarrow \infty$  la metrica si riduce a quella di Minkowski.

## 1.2 Singolarità nella metrica di Schwarzschild

In generale, quando si sceglie un sistema di coordinate, questo va a ricoprire solo una parte della varietà, lasciando delle zone scoperte dette punti di singolarità. Nelle coordinate di Schwarzschild infatti abbiamo che gli assi  $\theta = 0$  e  $\pi = 0$  risultano scoperti. Tali punti vengono definiti singolarità di coordinata, poiché possono essere rimossi come punti singolari cambiando il sistema di riferimento usato, motivo per cui sono removibili. Inoltre, vi sono anche altre due singolarità in  $r = 0$  e in  $r = 2m$ . Tale valore di  $r$ :  $r_s = 2m$  è detto raggio di Schwarzschild ed è anch'essa una singolarità di coordinata, poiché calcolando l'invariante scalare del tensore di Riemann otteniamo:  $R_{abcd}R^{abcd} = 48m^2r^{-6}$ , che è finito e quindi rimane lo stesso per qualsiasi sistema di riferimento. Al contrario, per  $r = 0$  abbiamo una singolarità non removibile, che quindi, non dipende dal sistema di coordinate scelto e viene definita singolarità intrinseca o di curvatura. Ritornando alla singolarità  $r_s = 2m$  possiamo vedere che essa è una ipersuperficie nulla che divide la varietà in due regioni disconnesse:

$$2m < r < \infty \quad (1.19)$$

$$0 < r < 2m \quad (1.20)$$

Se prendiamo un osservatore che dalla prima regione si muove verso l'origine, esso impiegherebbe una quantità infinita di tempo per raggiungere  $r_s = 2m$ . Invece, nella seconda

regione, abbiamo un'inversione delle caratteristiche di  $r$  e  $t$ , cioè  $r$  diventa una coordinata di tipo tempo e  $t$  di tipo spazio, facendo sì, che al trascorrere del tempo qualsiasi particella o fotone si trovi in tale regione cada inevitabilmente verso la singolarità  $r = 0$ , senza possibilità di uscire nella regione esterna. Poiché un osservatore inerziale esterno non può vedere ciò che accade nella regione interna, la superficie che si ha per  $r = r_s$  è detta orizzonte degli eventi. Se ora si vuole disegnare il diagramma spazio-tempo nelle coordinate di Schwarzschild, dobbiamo considerare le geodetiche radiali nulle definite richiedendo che:  $ds^2 = \dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$ . Da qui, otteniamo le curve che definiscono la congruenza delle geodetiche radiali nulle uscenti per  $r > 2m$  che sono:

$$t = r + 2m \ln|r - 2m| + \text{costante} \quad (1.21)$$

Similmente si ottiene per il segno negativo, le curve della congruenza delle geodetiche radiali nulle entranti:

$$t = -(r + 2m \ln|r - 2m| + \text{costante}) \quad (1.22)$$

### 1.3 Coordinate di Eddington-Finkelstein

Poiché come visto sopra la singolarità  $r = 2m$  è removibile, si possono operare dei cambiamenti di coordinate per rendere tale punto regolare. Tale procedimento fu effettuato da Eddington e Finkelstein attraverso un processo definito estensione analitica poiché si estende l'intervallo di regolarità delle coordinate da  $2m < r < \infty$  a  $0 < r < \infty$ . Le trasformazioni che operarono Eddington e Finkelstein si basano sull'idea di cambiare le geodetiche radiali nulle, presenti nella soluzione di Schwarzschild, in linee rette. Per fare ciò si operano due trasformazioni, che andiamo a descrivere. La prima, su  $t$  data da:

$$t \rightarrow \bar{t} = t + 2m \ln(r - 2m) \quad (1.23)$$

per  $r > 2m$ . Nel nuovo sistema di coordinate  $(\bar{t}, r, \theta, \phi)$ , l'equazione (1.22) diventa  $\bar{t} = -r + \text{costante}$  e  $d\bar{t} = dt + \frac{2m}{r-2m} dr$ . Sostituendo nell'elemento di linea (1.18), otteniamo la soluzione di Schwarzschild nella forma di Eddington e Finkelstein [2]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\bar{t}^2 - \frac{4m}{r} d\bar{t} dr - \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.24)$$

Tale soluzione non è più simmetrica nel tempo quindi, per ottenere le soluzioni nel tempo inverso, dobbiamo operare un'ulteriore trasformazione:

$$t \rightarrow t^* = -2m \ln(r - 2m) \quad (1.25)$$

e introducendo una coordinata nulla  $v = \bar{t} + r$ , detto per ragioni storiche parametro di tempo avanzato, si trova la soluzione di Eddington-Finkelstein in coordinate avanzate [2]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv^2 - 2dvdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.26)$$

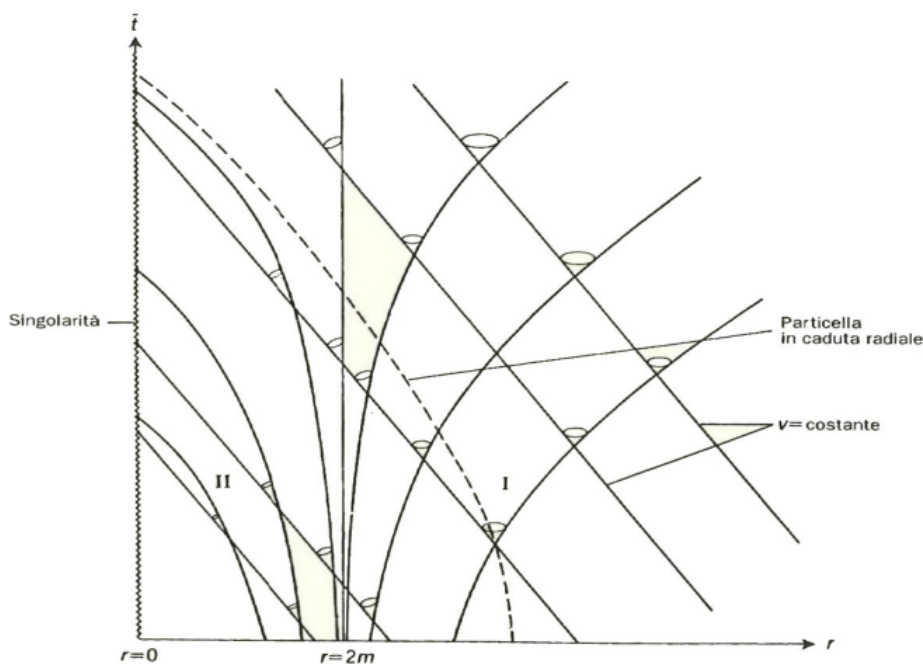


Figura 1.1. Soluzioni di Schwarzschild nelle coordinate avanzate di Eddington-Finkelstein [2]

Come si nota dalla figura 1.1 per  $r \rightarrow \infty$  abbiamo che lo spazio-tempo si avvicina sempre di più a quello di Minkowski, mentre per  $r = 2m$  abbiamo una sorta di membrana unidirezionale, che non lascia uscire dalla regione  $r < 2m$  nessuna informazione e può essere attraversata solo da fronti d'onda entranti, per questo, tale regione è detta buco nero. La seconda trasformazione è strutturata in maniera simile a quanto fatto sopra. Si introduce la coordinata nulla  $w = t^* - r$ , detta parametro di tempo ritardato, e si ottiene la soluzione di Eddington-Finkelstein in coordinate ritardate [2], graficate nella figura 1.2:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dw^2 + 2dwdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.27)$$

Anche qui nel grafico 1.2 abbiamo che per  $r \rightarrow \infty$  lo spazio-tempo si riconduce a quello di Minkowski. Invece, abbiamo al contrario di prima che la superficie per  $r = 2m$  può essere attraversata solamente da fronti d'onda uscenti, e per questo viene denominata regione di buco bianco.

## 1.4 Coordinate di Kruskal

La massima estensione analitica della soluzione di Schwarzschild fu trovata da Kruskal e tale estensione risulta unica. Essa però pur essendo massima, non è completa, poiché presenta delle singolarità intrinseche. Per prima cosa dobbiamo definire il concetto di

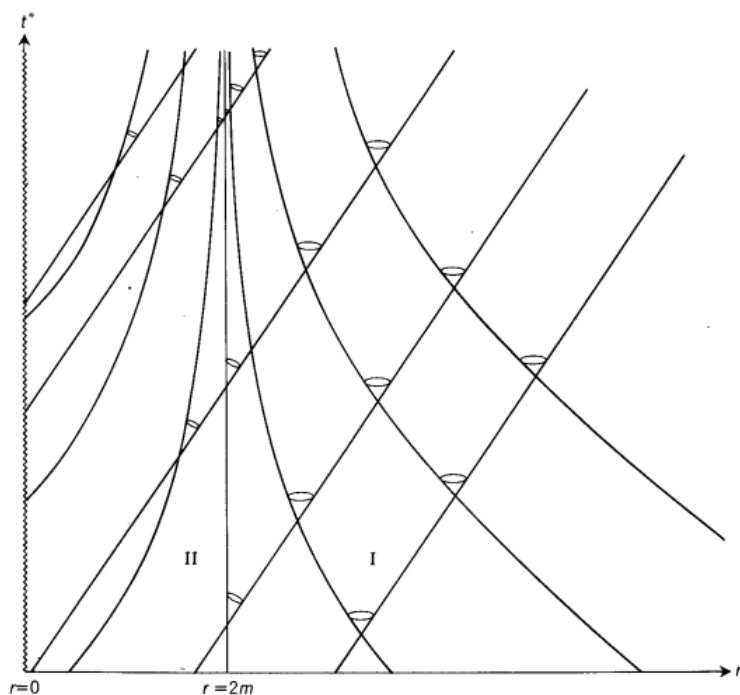


Figura 1.2. Soluzioni di Schwarzschild nelle coordinate ritardate di Eddington-Finkelstein [2]

varietà massima. Una varietà dotata di connessione affine o geometria metrica si dice massima, se ogni geodetica emanata da un punto arbitrario della varietà o termina in una singolarità intrinseca, oppure può essere estesa per valori infiniti del parametro affine in entrambe le direzioni lungo la geodetica. In quest'ultimo caso la varietà si dice geodeticamente completa. Il lavoro di Kruskal fu quello di unire i due tipi di coordinate di Eddington-Finkelstein, partendo dall'introdurre entrambe le coordinate nulle, quella avanzata  $v$  e quella ritardata  $w$ , in un unico sistema di coordinate  $(v, w, \theta, \phi)$ , ottenendo come elemento di linea di Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv dw - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.28)$$

dove  $r$  è implicitamente determinata da :

$$r^* = r + 2m \ln \left| \frac{r}{2m} - 1 \right| = \frac{1}{2} (v - w) \quad (1.29)$$

la metrica dello spazio 2-dimensionale con  $\theta = costante$   $\phi = costante$  è:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv dw \quad (1.30)$$

e siccome esiste un teorema che afferma: "ogni varietà Reimaniana 2-dimensionale è piatta in modo conforme", sappiamo che anche questa è conformemente piatta. La

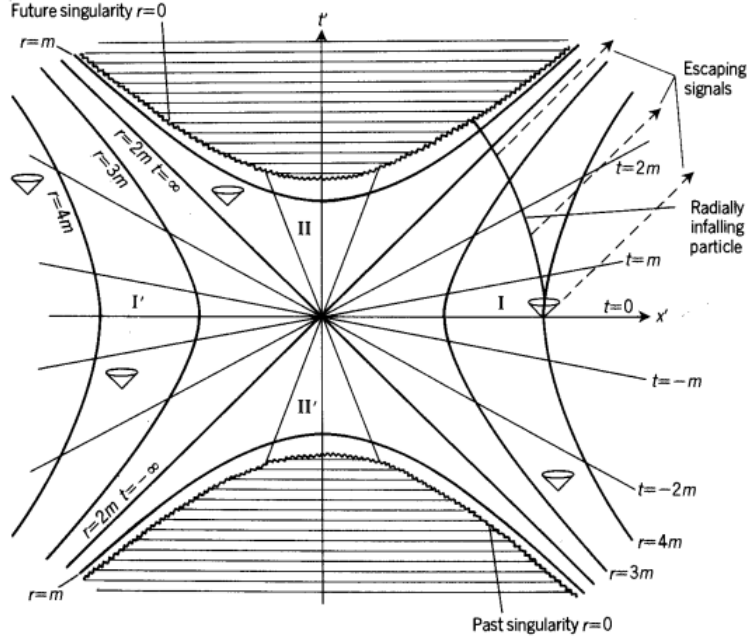


Figura 1.3. Grafico dello spazio-tempo nelle soluzioni di Kruskal [2]

trasformazione di coordinate più generale che possiamo fare ora è porre  $v \rightarrow V = V(v)$  e  $w \rightarrow U = U(w)$  con  $V$  e  $U$  arbitrari, da cui ci ricaviamo:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{dv}{dV} \frac{dw}{dU} dV dU \quad (1.31)$$

Kruskal scelse  $V$  e  $U$  in modo tale che tali coordinate determinassero una forma precisa dell'elemento di linea, Tale scelta fu:

$$V = e^{\left(\frac{v}{4m}\right)} \quad (1.32)$$

$$U = -e^{\left(\frac{-w}{4m}\right)} \quad (1.33)$$

Da qui otteniamo che:

$$dv = 4me^{\left(\frac{-v}{4m}\right)} dV \quad (1.34)$$

$$du = 4me^{\left(\frac{w}{4m}\right)} dU \quad (1.35)$$

che introdotte all'interno della (1.28) ci dà l'equazione:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (16m)^2 \exp\left(\frac{w-v}{4m}\right) dV dU - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.36)$$

Sostituendo in questa equazione la (1.29) si ottiene:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (16m)^2 \exp\left(\frac{-2r^*}{4m}\right) dV dU - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.37)$$

da cui otteniamo la forma finale dell'elemento di linea nelle coordinate di Kruskal:

$$ds^2 = \frac{32m^3}{r} \exp\left(\frac{-r}{2m}\right) dV dU - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.38)$$

ed introducendo  $t' = \frac{1}{2}(V + U)$  e  $x' = \frac{1}{2}(V - U)$ , si può riscrivere l'equazione (1.38) in tale forma [13]:

$$ds^2 = \frac{32m^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{2m}\right) dt'^2 - \frac{32m^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{2m}\right) dx'^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.39)$$

Graficando tale soluzione, come si vede dalla figura 1.3 possiamo notare che essa è divisa in quattro parti e che le regioni I e II corrispondono alle coordinate di Eddington-Finkelstein avanzate, mentre le regioni I' e II' corrispondono a quelle ritardate. La soluzione di singolarità intrinseca  $r = 0$  è rappresentata da due iperboli, che si trovano una nella regione II dove corrisponde alla soluzione di buco nero, l'altra nella regione II' dove corrisponde alla soluzione di buco bianco. Le regioni I e I' sono geometricamente identiche e corrispondono alla soluzione di Schwarzschild per  $r > 2m$  e quindi risultano asintoticamente piatte.

## 1.5 Diagrammi di Penrose

Introduciamo ora una tecnica di disegno dei diagrammi molto utile per comprendere la struttura causale delle diverse geometrie dello spazio-tempo. Tali diagrammi vengono detti di Penrose o di Carter-Penrose [5]. Questo metodo di creazione dei diagrammi parte dall'idea di disegnare l'intero spazio-tempo in un diagramma finito, che però conservi le proprietà causali della geometria originale. Tale realizzazione è possibile grazie alle trasformazioni conformi definite come:

$$ds^2 \rightarrow d\bar{s}^2 = \Omega(x^\mu) ds^2, \quad (1.40)$$

dove il fattore  $\Omega(x^\mu)$  deve essere in generale diverso da zero, positivo e dipende dal punto dello spazio-tempo. In tale procedimento si andrà a modificare le distanze tra i punti ma le traiettorie di tipo tempo, spazio e nulle rimarranno invariate. Inoltre, anche le geodetiche non saranno sempre preservate, ad eccezione di quelle nulle, che resteranno mappate allo stesso modo. Infatti, sotto la trasformazione conforme l'equazione delle geodetiche data da:

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} \bar{\nabla}_\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (1.41)$$

dove,  $\lambda$  è il parametro affine e  $\bar{\nabla}_\mu$  è la derivata covariante associata a  $\bar{g}_{\mu\nu}$ , diventa della forma:

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} \bar{\nabla}_\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 2 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \nabla_\alpha \ln \Omega - \left( g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right) g^{\nu\mu} \nabla_\mu \ln \Omega, \quad (1.42)$$



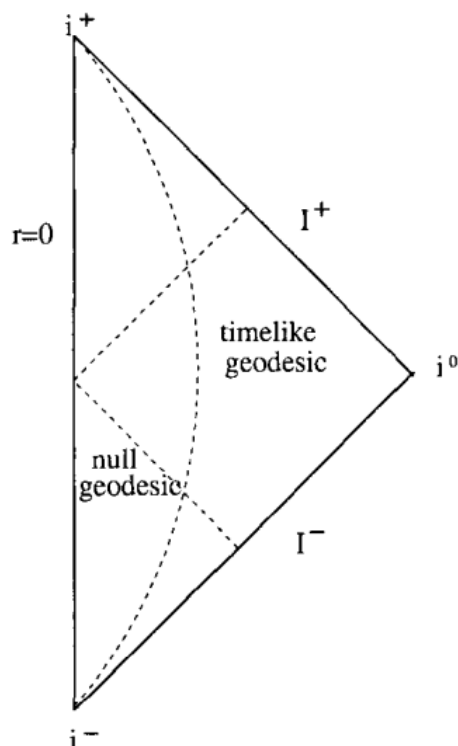


Figura 1.4. Diagramma di Penrose per lo spazio-tempo di Minkowski [5]

Nel caso nullo, dove:

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (1.43)$$

l'equazione trovata sopra ritorna ad essere di una geodetica nello spazio-tempo trasformato, in termini del parametro non-affine  $\lambda$ . Il nuovo parametro affine  $\bar{\lambda}$  è dato da :

$$\frac{d\bar{\lambda}}{d\lambda} = c\Omega^2 \quad (1.44)$$

con  $c$  che è una costante. In particolare, si utilizza per rappresentare i punti all'infinito con un diagramma finito attraverso l'utilizzo di  $\Omega^2$  tale che  $\Omega^2 \rightarrow 0$  asintoticamente. Questo perché la distanza affine infinita, presente nella (1.44) della metrica originale, viene trasformata in una finita nella nuova metrica. Perciò i punti all'infinito, che prima non venivano rappresentati, ora risultano presenti in tale compattificazione conforme. Vediamo quindi un esempio di come si costruisce il diagramma di Penrose per un dato spazio-tempo. Al fine di rendere il procedimento il più chiaro possibile useremo come modello quello di Minkowski che risulta essere il più semplice. Il primo procedimento da fare è scrivere la metrica di Minkowski in termini delle coordinate radiali nulle  $v = t + r$ ,

$u = t - r$  ottenendo [5]:

$$ds^2 = -dudv + \frac{(v-u)^2}{4}d\Omega^2 \quad (1.45)$$

dove abbiamo che  $-\infty < u < +\infty$  e  $-\infty < v < +\infty$ . La parte fisicamente rilevante del piano due-dimensionale  $(t-r)$  è quella per  $r > 0$ . Andiamo ora a identificare le varie regioni asintotiche prima di mapparle nel diagramma conforme:

- l'infinito passato di tipo tempo  $i^-$ : definito a  $r=\text{costante}$  da  $t \rightarrow -\infty$  o, equivalentemente,  $v \rightarrow -\infty$ ,  $u \rightarrow -\infty$ ;
- l'infinito futuro di tipo tempo  $i^+$ :  $t \rightarrow +\infty$  a  $r$  fissato o, equivalentemente,  $v \rightarrow +\infty$ ,  $u \rightarrow +\infty$ ;
- l'infinito di tipo spazio  $i^0$ :  $r \rightarrow +\infty$  a  $t$  fissato o, equivalentemente,  $v \rightarrow +\infty$ ,  $u \rightarrow -\infty$ ;
- l'infinito nullo passato  $I^-$ :  $r \rightarrow +\infty$ ,  $t \rightarrow -\infty$  con  $r+t$  fissato, o  $u \rightarrow -\infty$  e  $v$  fissato;
- l'infinito nullo futuro  $I^+$ :  $r \rightarrow +\infty$ ,  $t \rightarrow +\infty$  con  $t-r$  fissato, o  $v \rightarrow +\infty$  e  $u$  fissato;

Che riflettono i vari percorsi delle particelle massive che sono descritte dalle geodetiche di tipo tempo, dei raggi di luce descritti dalle geodetiche nulle e dalle geodetiche di tipo spazio per raggiungere l'infinito. Per motivare la scelta della funzione  $\Omega$  introduciamo il seguente cambio di coordinate:

$$\begin{aligned} v &= \tan^{-1} \bar{v} \\ u &= \tan^{-1} \bar{u} \end{aligned} \quad (1.46)$$

Il nuovo intervallo delle nuove coordinate è:  $-\frac{\pi}{2} < \bar{u}, \bar{v} < +\frac{\pi}{2}$ . Nelle nuove coordinate  $(\bar{u}, \bar{v})$  la metrica assume la forma:

$$ds^2 = (2 \cos \bar{u} \cos \bar{v})^{-2} [-4d\bar{u}d\bar{v} + \sin^2(\bar{v} - \bar{u})d\Omega^2]. \quad (1.47)$$

Ora il fattore conforme trasformato dalla (1.40) diventa:

$$\Omega^2 = (2 \cos \bar{u} \cos \bar{v})^2 \quad (1.48)$$

Con lo spazio-tempo trasformato dato dalla metrica:

$$d\bar{s}^2 = -4d\bar{u}d\bar{v} + \sin^2(\bar{u} - \bar{v})d\Omega^2 \quad (1.49)$$

La compattificazione conforme dello spazio-tempo di Minkowski [5], è ora ottenuta sommando a tutti i punti finiti tutte le regioni infinite descritte sopra, che andiamo a definire e che sono graficate sulla figura 1.4:

- $i^-$ :  $\bar{u} = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\bar{v} = -\frac{\pi}{2}$ ;

- $i^+$ :  $\bar{u} = \frac{\pi}{2}, \bar{v} = \frac{\pi}{2}$ ;
- $i^0$ :  $\bar{u} = -\frac{\pi}{2}, \bar{v} = \frac{\pi}{2}$ ;
- $I^+$ :  $\bar{u} \neq \frac{\pi}{2}, \bar{v} = \frac{\pi}{2}$ ;
- $I^-$ :  $\bar{u} = -\frac{\pi}{2}, \bar{v} \neq \pm\frac{\pi}{2}$ .

Nel grafico 1.4, ogni punto rappresentato rappresenta una 2-sfera di raggio  $\sin(\bar{v} - \bar{u})$ , l'origine  $r = 0$  è raffigurata dalla linea verticale  $\bar{u} = \bar{v}$  e la restrizione  $r \geq 0$  diventa  $\bar{v} \geq \bar{u}$ . Le geodetiche nulle sono raffigurate partendo dalla regione  $I^-$ , fino all'origine da dove poi riparte fino a  $I^+$ . Invece, le geodetiche di tipo tempo percorrono il diagramma dal passato definito da  $i^-$ , fino al futuro dato da  $i^+$ . Per ultimo, il punto  $i^0$  è la fine asintotica di tutte le geodetiche di tipo spazio. Tali diagrammi di Penrose risulteranno di grande importanza nei prossimi capitoli per comprendere al meglio i vari modelli di universo e metriche che andremo ad analizzare.



## Capitolo 2

# Elementi di Cosmologia

In questo capitolo andremo a studiare la struttura dell'universo, al fine di poter ottenere dei modelli e delle leggi in grado di descriverlo per poi utilizzarle nel contesto del problema di Einstein-Straus [?]. Le assunzioni, su cui si basa la cosmologia moderna e che risulteranno fondamentali per sviluppare una teoria consistente con la realtà, sono due:

1. **Il Principio Cosmologico:** su grandi scale, l'universo è con buona approssimazione omogeneo ed isotropo.
2. **Il Postulato di Weyl:** le particelle del substrato giacciono nello spazio-tempo su una congruenza di geodetiche di tipo tempo, che divergono da un punto nel passato finito o infinito

Il principio cosmologico quindi, richiede che in ogni ipersuperficie di tipo spazio non vi siano punti privilegiati ad un determinato istante di tempo  $t = costante$ , cioè deve risultare omogenea. Tecnicamente una ipersuperficie spaziale è detta omogenea se ammette un gruppo di isometrie che mappa ogni punto dello spazio in un altro. Inoltre, tale principio, richiede anche che su tale ipersuperficie non vi sia una direzione privilegiata, cioè deve risultare isotropa. Il postulato di Weyl viene introdotto per poter applicare la teoria della relatività generale, basata sulla covarianza generale e formulata per trattare l'equivalenza di osservatori in moto accelerato, alla struttura dell'universo. Quest'ultimo consiste in un unico sistema, che appare diverso ad osservatori in diverso stato di moto. L'idea di Weyl fu quella di assumere l'esistenza di un gruppo privilegiato di osservatori solidali con il moto medio delle galassie. Tale ipotesi, parte dal dato sperimentale che le velocità relative della materia in ogni gruppo di galassie sono piccole, ed è possibile introdurre un substrato in cui le galassie si muovono come particelle elementari. Inoltre, si richiede che le geodetiche non si intersechino ad esclusione di un punto singolare, facendo sì, che vi sia una sola geodetica passante per ogni punto dello spazio-tempo, con conseguente unicità della velocità su ognuno di essi. Da ciò si può assumere di considerare il substrato come un fluido perfetto, cosa che verrà introdotta per ricavarsi le equazioni di Friedmann.

## 2.1 Metrica di Robertson-Walker

Partendo dagli enunciati sopra esposti è ora possibile andare a definire un elemento di linea che descriva l'universo. Se introduciamo le coordinate  $(t, x^1, x^2, x^3)$ , poiché il postulato di Weyl richiede che le geodetiche siano ortogonali ad una famiglia di ipersuperfici di tipo spazio, allora per  $t=\text{costante}$  abbiamo tali ipersuperfici spaziali le cui coordinate  $x^\alpha = (x^1, x^2, x^3)$ , sono costanti lungo le geodetiche e per tale motivo esse sono dette coordinate comoventi. Per le condizioni di ortogonalità possiamo allora scegliere la forma dell'elemento di linea come [2]:

$$ds^2 = dt^2 - h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (2.1)$$

con  $\alpha$  e  $\beta$  che vanno da 1 a 3 e  $h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}(t, x)$ . La coordinata  $t$  ha il ruolo di tempo di mondo, che definisce il concetto di simultaneità. Si può quindi andare a definire la mappa universale che è la distribuzione degli eventi sulle superfici di simultaneità, mentre il quadro dell'universo, è l'aspetto dell'universo presentato all'osservatore ad un qualunque istante di tempo cosmico, costituito dagli eventi visti attraverso il cono di luce passato. Poiché dal principio cosmologico sappiamo che lo spazio è isotropo e omogeneo, allora la dipendenza del parametro  $h_{\alpha\beta}$  dal tempo è data solo tramite un fattore comune, in modo tale che i rapporti delle distanze corrispondenti a piccoli spostamenti possono essere sempre gli stessi. Tale deduzione ci porta alla forma:

$$h_{\alpha\beta} = S(t)^2 g_{\alpha\beta}(x^\alpha) \quad (2.2)$$

con  $S(t)$  detto fattore di scala poiché il rapporto tra due suoi valori presi in due tempi diversi ci dà il fattore di ingrandimento. Definiamo inoltre, lo spazio che stiamo trattando, come uno spazio a curvatura costante. Tale definizione deriva dalla sua isotropia e omogeneità e dal fatto che è indipendente dal tempo. Matematicamente tale spazio è caratterizzato dall'equazione del tensore di Riemann [2]:

$$R_{abcd} = K(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \quad (2.3)$$

Dove  $K$  è definita come costante di curvatura. E contraendolo con  $g^{ac}$  otteniamo il tensore di Ricci:

$$g^{ac}R_{abcd} = K(3g_{bd} - g_{bd}) = 2Kg_{bd} = R_{bd} \quad (2.4)$$

con gli indici che variano da 1 a 3 come detto sopra. Ora poiché lo spazio 3-dimensionale in cui ci troviamo è isotropo, esso è di conseguenza descritto da un'elemento di linea che definisce una simmetria sferica rispetto ad ogni punto. Analogamente a quanto fatto per ottenere l'equazione (1.18), reintroduciamo l'equazione (1.4) escludendo però la parte temporale, ottenendo:

$$d\sigma = e^\lambda dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.5)$$

dove  $\lambda = \lambda(r)$ . Le componenti non nulle del tenore di ricci risultano:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{\lambda'}{r}, \\ R_{22} &= \sin^2 \theta R_{33}, \\ R_{33} &= 1 + \frac{1}{2} r e^{-\lambda} \lambda' - e^{-\lambda} \end{aligned} \quad (2.6)$$

da cui otteniamo insieme alle condizioni trovate nella (2.4):

$$\begin{aligned} 2K e^\lambda &= \frac{\lambda'}{r}, \\ 2K r^2 &= 1 + \frac{1}{2} r e^{-\lambda} \lambda' - e^{-\lambda} \end{aligned} \quad (2.7)$$

La soluzione di tali equazioni è data da :

$$e^{-\lambda} = 1 - K r^2 \quad (2.8)$$

trovando così l'elemento di linea:

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - K r^2} + r^2 (d\theta + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.9)$$

dove  $K$  può essere positivo, negativo o nullo. Ora per avere una migliore forma di tale equazione, affinché l'arbitrarietà della grandezza di  $K$  sia assorbita all'interno della coordinata radiale e nel fattore di scala, assumiamo  $K \neq 0$  e definiamo  $k$  come  $K = |K|k$  in modo che sia uguale a  $\pm 1$  a seconda che  $K$  sia positivo o negativo. Per fare ciò riscalamo sia la coordinata radiale  $r$  introducendo:

$$r^* = |K|^{\frac{1}{2}} r \quad (2.10)$$

sia il fattore di scala; definendo una nuova funzione di scala  $a(t)$ :

$$a(t) = \frac{S(t)}{|K|^{\frac{1}{2}}} \text{ se } K \neq 0 \quad (2.11)$$

$$a(t) = S(t) \text{ se } K = 0 \quad (2.12)$$

Andando a inserire anche la coordinata tempo e ponendo da ora in poi per comodità  $r^* = r$ , possiamo andare a scrivere nella forma finale l'elemento di linea di Robertson-Walker [8]:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - k r^2} + r^2 (d\theta + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \quad (2.13)$$

Dove  $k$  assume i valori di  $\pm 1$  e 0. Approfondiamo ora la geometria a tre dimensioni con curvatura costante nei diversi casi determinati dal valore di  $k$ . Ad ogni epoca  $t = t_0$  abbiamo che la geometria è descritta da :

$$d\sigma^2 = a_0^2 \left( \frac{dr^2}{1 - k r^2} + r^2 (d\theta + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \quad (2.14)$$

Dove abbiamo definito  $a_0 = a(t_0)$  con  $t_0$  che definisce il tempo dell'epoca che si sta considerando.

**Caso 1**  $k = 0$ :

Inizialmente trattiamo il caso più semplice introducendo l'insieme di coordinate:

$$x = a_0 r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = a_0 r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = a_0 r \cos \theta$$

così da ottenere la (2.14) nella seguente forma:

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.15)$$

con  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ . La topologia dello spazio-tempo è la stessa di quello di uno spazio Euclideo in quattro dimensioni, detto  $\mathbb{R}^4$  ed è chiamato **aperto**.

**Caso 2**  $k = +1$ :

In tale caso poiché per  $r \rightarrow 1$ ,  $dr^2$  diventa singolare, allora dobbiamo introdurre una nuova coordinata  $\chi$  definita:

$$r = \sin \chi \quad (2.16)$$

ottenendo che  $dr = \cos \chi d\chi = (1 - r^2)^{\frac{1}{2}} d(\arcsin r)$  ottenendo così la (2.14) nella forma:

$$d\sigma^2 = a_0^2 [(d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2))] \quad (2.17)$$

ora possiamo immergere tale superficie tridimensionale nello spazio Euclideo quadridimensionale con coordinate:

$$w = a_0 \cos \chi$$

$$x = a_0 \sin \chi \sin \theta \cos \phi$$

$$y = a_0 \sin \chi \sin \theta \sin \phi$$

$$z = a_0 \sin \chi \cos \theta$$

Tale incorporamento è possibile perché:

$$d\sigma^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = a_0^2 [(d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2))] \quad (2.18)$$

ottenendo così una sfera tridimensionale detta 3-sfera posta in una superficie Euclidea quadridimensionale, di equazione:

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a_0^2 \quad (2.19)$$



Tale 3-sfera è definita negli intervalli:  $0 \leq \chi \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ .

Ponendo  $\chi = \text{costante}$  otteniamo una 2-sfera di area:

$$A_\chi = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} (a_0 \sin \chi d\theta)(a_0 \sin \chi \sin \theta d\phi) = 4\pi a_0^2 \sin^2 \chi \quad (2.20)$$

mentre il volume è dato da:

$$V = \int_{\chi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} (a_0 d\chi)(a_0 \sin \chi d\theta)(a_0 \sin \chi \sin \theta d\phi) = 2\pi^2 a_0^3(t_0) \quad (2.21)$$

da dove si deduce il motivo per cui  $a(t_0)$  è definito come "raggio dell universo". In tale caso, la topologia dello spazio è detta **chiusa**, mentre quella dello spazio-tempo è definita dal prodotto  $\mathbb{R} \times S^3$  dove,  $\mathbb{R}$  rappresenta la dimensione del tempo cosmico. La forma dello spazio-tempo risulta essere cilindrica.

### Caso 3 $k = -1$ :

Come sopra, introduciamo una nuova coordinata  $\chi$  definita questa volta con il seno iperbolico:

$$r = \sinh \chi \quad (2.22)$$

ottenendo che  $dr = \cosh \chi d\chi = (1+r^2)^{\frac{1}{2}} d(\text{arcsinh } r)$  che ci dà la (2.14) nella forma:

$$d\sigma^2 = a_0^2[(d\chi^2 + \sinh^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2))] \quad (2.23)$$

diversamente da come fatto sopra, non possiamo immergere tale superficie tridimensionale nello spazio Euclideo quadridimensionale ma dobbiamo inserirla in uno spazio piatto di Minkowski, con segnatura +2. Se consideriamo le coordinate:

$$w = a_0 \cosh \chi$$

$$x = a_0 \sinh \chi \sin \theta \cos \phi$$

$$y = a_0 \sinh \chi \sin \theta \sin \phi$$

$$z = a_0 \sinh \chi \cos \theta$$

otteniamo l'equazione desiderata:

$$d\sigma^2 = -dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.24)$$

Tale equazione implica che la superficie tridimensionale considerata sia un'iperboloido in uno spazio di Minkowski quadridimensionale dato da :

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = a_0^2 \quad (2.25)$$

Tale ipersuperficie è definita negli intervalli:  $0 \leq \chi < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ . Se ora analogamente al procedimento del Caso 2 poniamo  $\chi = \text{costante}$ , otteniamo una 2-sfera di area:

$$A_\chi = 4\pi a_0^2 \sinh^2 \chi \quad (2.26)$$

Per grandi  $\chi$  l'area di superficie aumenta molto rapidamente rispetto a come accadrebbe se avessimo una ipersuperficie piatta. In tale caso, la topologia è data da  $\mathbb{R}^4$  ed è **aperta**.

### 2.1.1 Distanze nella metrica di Robertson-Walker

Nella metrica di Robertson-Walker è particolarmente utile definire la *distanza propria*. Se consideriamo come origine del sistema di coordinate comoventi  $(r, \theta, \phi)$  un punto  $P_0$ , allora la distanza propria da  $P_0$  a  $P$ , è definita come la distanza misurata al tempo  $t$  da una catena di osservatori, che collegano  $P$  a  $P_0$  data da [8]:

$$d_{pr} = \int_0^r \frac{adr'}{(1 - kr'^2)^{\frac{1}{2}}} = af(r) \quad (2.27)$$

con  $f(r)$  data da:  $\arcsin r, r, \sinh r^{-1}$  rispettivamente per  $k = 1, 0, -1$ . Se consideriamo  $d_{pr}(t_0)$  la distanza propria al tempo attuale possiamo scrivere la relazione:

$$d_{pr}(t_0) = a_0 f(r) = \frac{a_0}{a} d_{pr}(t) \quad (2.28)$$

Poiché il parametro  $a$  è dipendente dal tempo, allora avremo che la distanza propria di una sorgente varia. Per descrivere la velocità con cui quest'ultima si muove rispetto all'origine, si utilizza la legge di Hubble:

$$v_r = \dot{a}f(r) = \frac{\dot{a}}{a}af(r) = \frac{\dot{a}}{a}d_{pr} \quad (2.29)$$

dove la quantità:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.30)$$

è detta *costante di Hubble* al tempo  $t$  [8], ed ha la dimensione inversa di un tempo. Se introduciamo ora il *parametro di decelerazione* al tempo  $t$ , definito come [8]:

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}(t)a}{\dot{a}(t)^2} \quad (2.31)$$

abbiamo un'espressione per poter misurare di quanto l'espansione dell'universo sia rallentata. Un'ulteriore distanza di rilievo è la *distanza di luminosità*. Prima di esporre la sua definizione è opportuno però soffermarsi sulla propagazione della luce in cosmologia relativistica. Consideriamo quindi un osservatore  $O$  posto all'origine del sistema di coordinate  $r = 0$  e assumiamo che gli intervalli di tempo siano omogenei nello spazio tridimensionale. Se supponiamo, che all'osservatore  $O$  arrivi un raggio di luce proveniente da una galassia che si sta allontanando, allora dalla (2.13) e inserendo le condizioni dette sopra, in quelle per una geodetica radiale nulla, date da:

$$ds^2 = d\theta = d\phi = 0 \quad (2.32)$$

troviamo che:

$$\frac{dt}{a(t)} = \pm \frac{dr}{(1 - kr^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.33)$$

dove il segno + corrisponde ad un raggio di luce che si allontana, mentre quello - ad uno che si avvicina. Consideriamo meglio tale situazione, cioè: dato un raggio di luce emanato al tempo  $t_1$  da una galassia  $P$  con linea di mondo  $r = r_1$ , ricevuto da un'osservatore  $O$  al tempo  $t_0$ , usando la formula (2.33) possiamo ricavarci:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = - \int_{r_1}^0 \frac{dr}{(1 - kr^2)^{\frac{1}{2}}} = f(r_1) \quad (2.34)$$

con:

$$f(r_1) = \begin{cases} \sin^{-1} r_1 & \text{se } k = +1. \\ r_1 & \text{se } k = 0. \\ \sinh^{-1} r_1 & \text{se } k = -1. \end{cases} \quad (2.35)$$

Se inoltre, consideriamo che da  $P$  vengono emanati due raggi successivi al tempo  $t_1$  e  $t_1 + dt_1$ , che sono ricevuti da  $O$  al tempo  $t_0$  e  $t_0 + dt_0$  rispettivamente. Otteniamo, considerando l'equazione (2.34):

$$\int_{t_1+dt_1}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (2.36)$$

poichè ogni lato è uguale alla stessa funzione  $f(r_1)$ . Quindi, possiamo scrivere:

$$\int_{t_1+dt_1}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_1}^{t_1+dt_1} \frac{dt}{a(t)} = 0 \quad (2.37)$$

e assumendo che  $a(t)$  non vari molto all'interno degli intervalli  $dt_1$  e  $dt_0$ , così da poterla tirare fuori dagli integrali nell'ultima equazione, possiamo scrivere:

$$\frac{dt_0}{a(t_0)} = \frac{dt_1}{a(t_1)} \quad (2.38)$$

Poichè tutte le particelle fondamentali o galassie del substrato, hanno linee di mondo descritte da coordinate con  $r$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  costanti e poichè dalla (2.13) abbiamo che  $ds^2 = dt^2$ , possiamo affermare che  $t$  misura il tempo proprio lungo le linee di mondo del substrato. Possiamo notare, che dalla (2.38) l'intervallo misurato in  $O$ , è  $\frac{a(t_0)}{a(t_1)}$  volte l'intervallo misurato in  $P$ , perchè l'universo si espande, abbiamo che:

$$t_0 > t_1 \Rightarrow a(t_0) > a(t_1) \quad (2.39)$$

Da cui segue, che l'osservatore  $O$  sperimenterà il *red shift*  $z$ , che risulta essere un'ulteriore variabile molto importante nella cosmologia, poichè in linea di principio, è direttamente

osservabile e legata al parametro di espansione  $a$ . Tale red shift è quindi definito come [8]:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_s}{\lambda_s} \quad (2.40)$$

dove  $\lambda_s$  è la lunghezza d'onda della sorgente emessa al tempo  $t$  situata alla coordinata  $r$  dall'origine, mentre  $\lambda_0$  è la lunghezza d'onda osservata nell'origine al tempo  $t_0$ . La relazione che lega il parametro di espansione e la variabile redshift è la seguente:

$$1 + z = \frac{a_0}{a} \quad (2.41)$$

Naturalmete, se al contrario l'universo non si stesse espandendo ma contraendo, avremmo un'effetto di *blue shift*. Se ora consideriamo  $P$  "vicino" a  $O$ , cioè che il tempo cosmico dell'emissione e della ricezione differiscono di una quantità piccola  $dt$ , tale che  $t_0 = t_1 + dt$ , otteniamo che la (2.41) diventa:

$$\frac{a(t_0)}{a(t_0 - dt)} \simeq \frac{a(t_0)}{a(t_0) - \dot{a}(t_0)dt} \simeq 1 + \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}dt \quad (2.42)$$

al primo ordine in  $dt$ . Inoltre:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_1+dt} \frac{dt}{a(t)} \simeq \frac{dt}{a(t_1)} = \frac{dt}{a(t_0 - dt)} \simeq \frac{dt}{a(t_0)} \quad (2.43)$$

Se consideriamo  $r$  piccolo, utilizzando la (2.35) abbiamo:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = f(r_1) \simeq r_1 \Rightarrow \frac{dt}{a(t_0)} \simeq r_1 \quad (2.44)$$

combinando tale risultato con la (2.41), otteniamo che per ogni epoca il red shift  $z$  è proporzionale alla distanza  $r_1$ :

$$z \simeq \dot{a}(t_0)r_1 \quad (2.45)$$

Possiamo ora andare a definire la distanza di luminosità accennata precedentemente. Tale distanza indicata con  $d_L$  è definita dall'equazione [2]:

$$d_L = \frac{E}{4\pi I(1+z)^2} \quad (2.46)$$

dove indichiamo con  $E$  l'energia irradiata per unità di tempo da una nebula e  $I$  l'intensità della radiazione ricevuta per unità di tempo e superficie. Per ottenere il risultato scritto sopra, bisogna fare delle determinate osservazioni. Prima di tutto, si assume che l'energia sia distribuita in maniera uniforme in una sfera nello spazio Euclideo e escluso il red shift, la distanza viene data da  $(\frac{E}{4\pi I})^{\frac{1}{2}}$ . Inoltre, in virtù del Doppler shift, poiché ci troviamo in universo in espansione, l'intervallo di tempo durante il quale un certo quantitativo di energia viene ricevuta, risulta più lungo rispetto a quello di emissione. Cioè il numero

di fotoni ricevuti viene ridotto di un fattore  $(1+z)$ . E poichè abbiamo che l'energia è la componente temporale di un quadrivettore, allora la trasformazione tra un'osservatore e un'altro introduce un fattore  $(1+z)$ , cioè l'energia di ogni fotone emesso si riduce di tale quantità. È possibile riscrivere la distanza di luminosità nei termini delle coordinate di Robertson-Walker. Per fare ciò, consideriamo un raggio luminoso emanato da una galassia in P al tempo  $t_1$  che raggiunge un'osservatore nel tempo attuale  $t = t_0$  con  $t_1 < t_0$  posto in  $O_0$ . Il raggio si propaga quindi lungo la superficie di una sfera con centro in  $P_0$  ( $t = t_0, r = r_1$ ) passante per l'evento  $O_0$  ( $t = t_0, r = r_0$ ), che risulta di area identica, data l'omogeneità della 3-sfera, a quella della sfera centrata in  $O_0$  passante per  $P_0$ . L'elemento di linea della sfera per  $(t = t_0, r = r_1)$  è della forma:

$$ds^2 = -[a(t_0)r_1]^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.47)$$

ed ha area:  $4\pi a^2(t_0)r_1^2$ . L'intensità ricevuta dall'osservatore è:

$$I = \frac{E}{4\pi a^2(t_0)r_1^2(1+z)^2} \quad (2.48)$$

e sostituendo tale valore di  $I$  nella (2.46) si ottiene [2]:

$$d_L = a(t_0)r_1 \quad (2.49)$$

da cui possiamo ottenere ricordandoci la relazione (2.45) la legge di Hubble in funzione di  $d_L$ :

$$z \simeq H(t_0)d_L \quad (2.50)$$

## 2.2 Equazioni di Friedmann

Le equazioni di Freedman si ricavano unendo tre importanti concetti:

1. La linea di elemento di Robertson-Walker:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right) \quad (2.51)$$

2. Il postulato di Weyl, che introduce il concetto di substrato approssimato da un fluido perfetto e che viene espresso tramite il tensore energia-impulso:

$$T_{ij} = (\rho + p)u_i u_j - pg_{ij} \quad (2.52)$$

dove  $p$  è la pressione,  $\rho$  è la densità di energia inclusa l'energia della massa a riposo e  $u_i$  è la quadrivelocità del fluido.

3. La relatività Generale, il cui contributo è dato dalle equazioni di campo di Einstein;

$$G_{ij} = 8\pi T_{ij} \quad (2.53)$$

Per arrivare alle equazioni di Friedmann, introduciamo la metrica di Robertson-Walker da cui otteniamo le seguenti soluzioni dall'equazione di campo di Einstein:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p)a \quad (2.54)$$

per la componente tempo-tempo;

$$\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2kc^2 = 4\pi(\rho + p)a^2 \quad (2.55)$$

per la componente spazio-spazio. Eliminando  $\ddot{a}$  dalle equazioni (2.54) e (2.55) otteniamo:

$$\dot{a}^2 + k = \frac{8\pi}{3}\rho a^2 \quad (2.56)$$

Le equazioni (2.54) e (2.56) non sono indipendenti, e vengono denominate *equazioni di Friedmann* [8]. Poichè in quei tempi l'universo era considerato statico, nel tentativo di Einstein di descrivere tramite la sua formula (2.53) tale caratteristica, decise di introdurre un nuovo parametro detto *costante cosmologica*  $\Lambda$ , ottenendo le equazioni di campo nella loro forma più generale [2]:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R - \Lambda g_{ij} = 8\pi T_{ij} \quad (2.57)$$

Questa modifica, non v`a a cambiare l'equazione di conservazione  $T_{;j}^{ij} = 0$  (dove il punto e virgola rappresenta la derivata covariante rispetto al pedice j) e non va ad intaccare il carattere covariante delle equazioni. L'unica richiesta sulla struttura di  $\Lambda$  e che sia piccolo in modo tale da non influire eccessivamente sulla descrizione dei moti dei pianeti, che invece vengono ben descritti dalle equazioni (2.53). È possibile riscrivere le equazioni (2.57) trasformando il tensore  $T_{ij}$  in una nuova variabile:

$$\tilde{T}_{ij} = T_{ij} + \frac{\Lambda}{8\pi}g_{ij} = -\tilde{p}g_{ij} + (\tilde{p} + \tilde{\rho})u_i u_j \quad (2.58)$$

dove  $\tilde{\rho}$  e  $\tilde{p}$  sono dette rispettivamente densità e pressione "efficaci", e sono legate alle loro omonime del fluido perfetto dalle relazioni:

$$\tilde{p} = p - \frac{\Lambda}{8\pi}, \quad \tilde{\rho} = \rho + \frac{\Lambda}{8\pi} \quad (2.59)$$

da cui possiamo ricavare che  $|\Lambda|^{-\frac{1}{2}}$  ha le dimensioni di una lunghezza. Inserendo nella (2.57) i valori di  $\tilde{p}$  e  $\tilde{\rho}$  appena trovati otteniamo delle equazioni analoghe alle (2.54) e (2.56):

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}(\tilde{\rho} + 3\tilde{p})a \quad (2.60)$$

$$\dot{a}^2 + k = \frac{8\pi}{3}\tilde{\rho}a^2 \quad (2.61)$$

## 2.2.1 Modelli di Freidmann

Se andiamo a considerare la relazione [8]:

$$p = w\rho \quad (2.62)$$

che descrive l'equazione di stato dei fluidi espressa in maniera esatta o approssimata. Il parametro  $w$  è costante e compreso nell'intervallo di Zeldovich:

$$0 \leq w \leq 1 \quad (2.63)$$

Introducendo poi il *parametro di densità*, definito al tempo  $t_0$ :

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{0critica}} \quad (2.64)$$

con:

$$\rho_{0critica} = \frac{3H_0^2}{8\pi} \quad (2.65)$$

con  $H$  costante di Hubble. Possiamo quindi riscrivere l'equazione di Freidmann senza costante cosmologica (2.56) come:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H_0^2 a_0^2} \quad (2.66)$$

con  $H_0 = H(t_0)$  e  $a_0 = a(t_0)$ . Quindi, al variare del valore del parametro  $\rho$  possiamo determinare la geometria dell'universo:

•

$$\rho < \rho_{critica} \iff \Omega < 1 \iff k = -1 \iff \text{Universo Aperto} \quad (2.67)$$

•

$$\rho = \rho_{critica} \iff \Omega = 1 \iff k = 0 \iff \text{Universo Piatto} \quad (2.68)$$

•

$$\rho > \rho_{critica} \iff \Omega > 1 \iff k = 1 \iff \text{Universo Chiuso} \quad (2.69)$$

In tale elaborato, ci limiteremo a considerare i casi in cui  $w = \text{costante}$ . Otterremo quindi riprendendo l'equazione (2.62) tre casi:

1. Il caso con  $w = 0$  rappresenta un universo di polvere. Un gas perfetto di particelle non relativistiche ha un'equazione di stato:

$$p = \frac{k_B T}{m_p} \rho_m = \frac{k_B T}{m_p} \frac{\rho}{1 + \left[ \frac{k_B T}{(\gamma-1)m_p} \right]} = w(T)\rho \quad (2.70)$$

con massa  $m_p$ , temperatura  $T$ , densità  $\rho_m$  ed indice adiabatico  $\gamma$ . Dall'equazione scritta sopra risulta che  $w(T) \simeq \text{costante} \ll 1$  cioè abbiamo ( $w \simeq 0$ ) che rappresenta un'universo di materia. Per tali motivi il gas perfetto può essere approssimato ad un fluido di polvere. Se ora consideriamo l'equazione che esprime la condizione di adiabaticità dell'espansione dell'universo:

$$d(\rho a^3) = -3pa^2 da \quad (2.71)$$

e l'equazione (2.62) possiamo ricavarci la formula:

$$\rho a^{3(1+w)} = \text{costante} = \rho_{0w} a_0^{3(1+w)} \quad (2.72)$$

In questo caso in cui  $w = 0$  o al massimo ( $w \simeq 0$ ) abbiamo:

$$\rho a^3 \equiv \text{costante} \quad (2.73)$$

2. Se invece  $w = \frac{1}{3}$ , allora stiamo considerando un gas di fotoni dato da un fluido di particelle ultrarelativistiche, non degeneri e in equilibrio termodinamico descritto da:

$$p = \frac{1}{3}\rho \quad (2.74)$$

Un universo descritto da un fluido con queste caratteristiche è definito di tipo radiativo e la (2.72) diventa:

$$\rho a^4 \equiv \text{costante} \quad (2.75)$$

3. Il caso con un fluido con  $w = 1$  è detto di stiff matter e rappresenta un fluido incompressibile dove la (2.72) diventa:

$$\rho a^6 \equiv \text{costante} \quad (2.76)$$

Per gli universi sopra descritti ma anche per quelli ricavabili con  $-\frac{1}{3} < w \leq 0$ , possiamo dedurre una proprietà interessante dalle equazioni ottenute considerando la (2.66) e la (2.71) [8]:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = H_0^2 \left[ \Omega \left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^{(1+3w)} + (1 - \Omega) \right] \quad (2.77)$$

$$H^2(t) = H_0^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \left[ \Omega \left(\frac{a_0}{a}\right)^{(1+3w)} + (1 - \Omega) \right] \quad (2.78)$$

Se ora consideriamo un'istante  $t = t_0$  otterremmo che  $\dot{a}(t_0) > 0$  da cui segue la disequazione  $a(t_0 - dt) < a(t_0)$  e applicando la (2.77) si ha come risultato:  $\dot{a}(t_0 - dt) > \dot{a}(t_0) > 0$ , dovuto al fatto che  $(1 - 3w) > 0$ . Se applichiamo tale ragionamento prendendo valori di  $t_0$  sempre più piccoli, vedremo che  $a(t)$  risulterà crescente per  $t < t_0$ . Allora, esisterà un'istante  $t = 0$  tale per cui  $a(0) = 0$  e la densità diventa infinita. Tale istante è detto di big-bang, ed è una singolarità presente nei modelli di universo isotropo e omogeneo



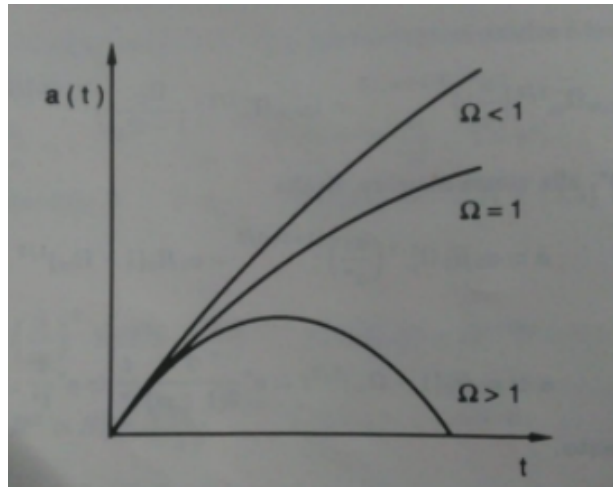


Figura 2.1. Rappresentazione grafica dell'evoluzione del parametro  $a(t)$  per  $\Omega > 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\Omega < 1$ . È possibile notare nell'origine la singolarità di big-bang e, per  $a(t) = 0$  e  $t > 0$  in  $\Omega < 1$ , quella di big-crunch [8]

con  $\Lambda = 0$ . Questa singolarità è data solamente dalle condizioni iniziali, caratteristiche di questo modello di universo, detto Modello Standard, che approfondiremo meglio più avanti. C'è inoltre da considerare che vi sono delle ulteriori condizioni iniziali compatibili con il principio cosmologico, che descrivono un collasso isotropo dell'universo in una singolarità opposta rispetto a quella del big-bang, denominata big-crunch. Quanto descritto finora è graficato nella figura 2.1. Tale singolarità di big-bang non risulta tuttora evitabile; infatti è un problema ancora aperto, insieme a quello dell'evoluzione dell'universo per  $t < 0$ . Tali problemi sono indicati come: *problema dell'origine dell'universo*

## 2.2.2 Modello di Friedmann-Robertson-Walker

Le attuali osservazioni dell'universo hanno determinato, che la pressione presente in esso è molto bassa rispetto alla densità di energia  $\rho$ , data dalla materia. Quindi, possiamo considerare di porre  $p = 0$  per descrivere l'universo attuale con buona approssimazione, ottenendo un universo il cui substrato è composto da polvere. Se ora riscriviamo le equazioni di Friedmann nella loro forma più generale, quindi con all'interno la costante cosmologica, otteniamo [2]:

$$8\pi\rho = 3\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} - \Lambda \quad (2.79)$$

$$-8\pi p = \frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{a^2} - \Lambda \quad (2.80)$$

dove la dipendenza da  $\Lambda$  è esplicitata e imponendo la condizione  $p = 0$ , possiamo integrare la (2.80) ottenendo:

$$a(\dot{a}^2 + k) - \frac{1}{3}\Lambda a^3 = C \quad (2.81)$$

con  $C$  costante di integrazione. Utilizzando la (2.79) possiamo ricavarci il valore di  $C$ :

$$C = \frac{8}{3}\pi a^3 \rho \quad (2.82)$$

Infine, possiamo sostituire  $C$  nella (2.79) per trovare l'equazione di Freidmann, che descrive la variazione del parametro di espansione nel tempo [2]:

$$\dot{a}^2 = \frac{C}{a} + \frac{1}{3}\Lambda a^2 - k \quad (2.83)$$

Questo modello di universo viene definito: Modello di Friedman-Robertson-Walker. Si richiede che i parametri siano caratterizzati dalle seguenti condizioni:

$$C > 0, \quad -\infty < \Lambda < +\infty, \quad k = -1, 0, 1$$

Riconducendoci ai modelli di Freidmann sopra esposti, andiamo ad analizzare il caso con  $k = 0$ , cioè quello di un universo piatto che risulterà rilevante nei fini dello studio del problema di Einstein-Straus. Quindi la (2.83) diventa:

$$\dot{a}^2 = \frac{C}{a} + \frac{1}{3}\Lambda a^2 \quad (2.84)$$

Andiamo ora a studiare tale equazione nei tre casi determinati dal variare della costante cosmologica  $\Lambda$ :

1.  $\Lambda > 0$ .

In questa situazione è opportuno introdurre una nuova variabile  $u$  definita da:

$$u = \frac{2\Lambda}{3C}a^3 \quad (2.85)$$

derivando poi la (2.85) rispetto al tempo otteniamo:

$$\dot{u} = \frac{2\Lambda}{C}a^2\dot{a} \quad (2.86)$$

e inserendo quest'ultima nella (2.84) troviamo:

$$\dot{u}^2 = \frac{4\Lambda^2}{C^2}a^4\left(\frac{C}{a} + \frac{1}{3}\Lambda a^2\right) = 6\Lambda u + 3\Lambda u^2 = 3\Lambda(2u + u^2) \quad (2.87)$$

da cui ci ricaviamo che:

$$\dot{u} = \pm \sqrt{(3\Lambda)^{\frac{1}{2}}(2u + u^2)} \quad (2.88)$$

Se ora imponiamo le condizioni del modello di big-bang, cioè  $a = 0$  e  $t = 0$ , otteniamo che anche per  $u$  inizialmente la condizione è  $u = 0$ . Integrando per parti la soluzione positiva della (2.88) si trova:

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{(2u+u^2)}} = \int_0^t \sqrt{3\Lambda} dt = (3\Lambda)^{\frac{1}{2}} t \quad (2.89)$$

Se ora completiamo il quadrato presente nell'integrale di  $u$  e introduciamo due nuove variabili definite come  $v = u + 1$  e  $\cosh w = v$  abbiamo:

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{(u+1)^2 - 1}} = \int_0^v \frac{du}{\sqrt{(v^2 - 1)}} = \int_0^w \frac{\sinh w dw}{\sqrt{(\cosh^2 w - 1)}} = \int_0^w dw = w \quad (2.90)$$

da cui possiamo ricavarci la soluzione della (2.84):

$$a^3 = \frac{3C}{2\Lambda} [\cosh \sqrt{3\Lambda} t - 1] \quad (2.91)$$

### 2. $\Lambda < 0$ .

Anche in questo caso introduciamo una nuova variabile  $u$  definita come:

$$u = -\frac{2\Lambda}{3C} a^3 \quad (2.92)$$

e attraverso un procedimento analogo a quello utilizzato nel caso  $\Lambda > 0$  otteniamo come soluzione della (2.84):

$$a^3 = \frac{3C}{2(-\Lambda)} [1 - \cos \sqrt{3(-\Lambda)} t] \quad (2.93)$$

### 3. $\Lambda = 0$

In tale caso, ci troviamo nel modello detto di Einstein-de Sitter e possiamo ottenere la soluzione della (2.84) sostituendo il valore di  $\Lambda$ :

$$\dot{a}^2 = \frac{C}{a} \quad (2.94)$$

da cui otteniamo:

$$\dot{a} = \pm \sqrt{\frac{C}{a}} \quad (2.95)$$

e, come sopra, scegliamo la soluzione positiva, ottenendo un'equazione separabile data da:

$$\sqrt{a} da = \sqrt{C} dt \quad (2.96)$$

ed integrandola con le condizioni iniziali di  $a$  e  $t$  date dal modello del big-bang si ha:

$$\frac{2}{3} \sqrt[3]{a} = \sqrt{C}t \quad (2.97)$$

ottenendo infine la soluzione cercata:

$$a = \sqrt[3]{\frac{9}{4}Ct^2} \quad (2.98)$$

Approfondiamo tale modello di universo ricavandoci le equazioni per trovare le variabili che lo caratterizzano. Per iniziare, riscriviamo la (2.77) nelle condizioni di universo piatto  $\Omega = 1$ :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = H_0^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w} = H_0^2 (1+z)^{1+3w} \quad (2.99)$$

dove abbiamo usato anche il parametro  $z$  che rappresenta il redshift. Integrando la (2.99) otteniamo:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}} \quad (2.100)$$

da cui possiamo affermare, che in tale modello l'espansione dura indefinitamente nel futuro. Possiamo riscrivere la (2.100) in funzione del tempo cosmologico e del redshift:

$$t = t_0(1+z)^{-\frac{3(1+w)}{2}} \quad (2.101)$$

Ora grazie alle equazioni: (2.100), (2.101) e richiamando la (2.72), possiamo ricavarci le variabili cercate nel modello studiato, cioè con  $w = 0$  [8]:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = H_0 \frac{t_0}{t} = H_0(1+z)^{\frac{3(1+w)}{2}} = H_0(1+z)^{\frac{3}{2}} \quad (2.102)$$

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (2.103)$$

$$q \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = \frac{1+3w}{2} = \frac{1}{2} \quad (2.104)$$

$$t = t_0(1+z)^{-\frac{3}{2}} \quad (2.105)$$

$$t_0 = \frac{2}{3(1+w)H_0} = \frac{2}{3H_0} \quad (2.106)$$

$$\rho_m = \rho_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2} = \frac{1}{6(1+w)\pi t^2} = \frac{1}{6\pi t^2} \quad (2.107)$$

Quindi, riassumendo, abbiamo che per gli universi piatti, il parametro di espansione  $a$  cresce indefinitamente nel tempo, con decelerazione costante.

Se ora consideriamo le equazioni di Freidmann (2.83), in cui imponiamo  $\Lambda = 0$ , ottenendo:

$$\dot{a}^2 = \frac{C}{a} - k \quad (2.108)$$

con  $C$  costante determinata precedentemente, da cui possiamo studiare i casi con  $k = \pm 1$  poichè il caso  $k = 0$  è stato già esposto sopra. Per  $k = +1$  abbiamo:

$$\dot{a}^2 = \frac{C}{a} - 1 \quad (2.109)$$

Per trovare le soluzioni di questo caso è opportuno effettuare un cambio di variabile:  $u^2 = \frac{a}{C}$  da cui si ricava che:  $2u\dot{u} = \frac{\dot{a}}{C}$ , che sostituita nella (2.109) ci da:

$$\dot{u}^2 = \frac{\dot{a}^2}{4C^2u^2} = \frac{1}{4C^2u^2} \left( \frac{1}{u^2} - 1 \right) \quad (2.110)$$

Utilizzando un procedimento analogo a quello svoltosi sopra, cioè considerando solo la radice quadrata positiva, che risulta essere separabile, possiamo integrarla imponendo le condizioni iniziali di big-bang:

$$2 \int_0^u \frac{u^2}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}} du = \frac{1}{C} \int_0^t dt = \frac{t}{C} \quad (2.111)$$

Per invece risolvere l'integrale di sinistra, dobbiamo ridefinire la varibile  $u$  in tal modo:  $u = \sin \theta$ , ottenendo:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^u \frac{u^2}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}} du &= 2 \int_0^\theta \frac{\sin^2 \theta \cos \theta d\theta}{(1-\sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} \\ &= 2 \int_0^\theta \sin^2 \theta d\theta = \theta - \sin \theta \cos \theta = \sin^{-1} u - u(1-u^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.112)$$

da cui otteniamo la soluzione espressa in funzione di  $a$  per  $k = +1$  [2]:

$$C \left[ \sin^{-1} \left( \frac{a}{C} \right)^{\frac{1}{2}} - \left( \frac{a}{C} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{a}{C} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = t \quad (2.113)$$

La soluzione per  $k = -1$ , si ottiene attraverso un procedimento analogo a quello appena descritto, risultando essere della forma [2]:

$$C \left[ \left( \frac{a}{C} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{a}{C} \right)^{\frac{1}{2}} - \sinh^{-1} \left( \frac{a}{C} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = t \quad (2.114)$$

. Tali risuktati risultano utili per la graficazione dei modelli dei vari tipi di universo. E inoltre, risultano utili nella discussione delle coordiante conformi che andremo a studiare più avanti.

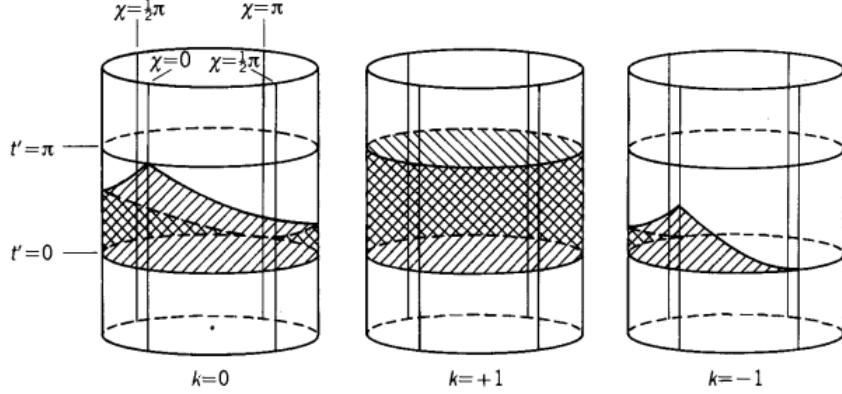


Figura 2.2. Rappresentazione grafica dello spazio-tempo di Robertson-Walker per  $\Lambda = 0$  [2]

### 2.2.3 Struttura conforme dello spazio-tempo di Robertson-Walker

I 3 casi analizzati nel paragrafo riguardante la metrica di Robertson-Walker, possono essere inseriti all'interno di una un'unica formula generale, in cui è introdotta anche la coordinata temporale [2]:

$$ds^2 = dt^2 - a_0^2[(d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (2.115)$$

dove  $f(\chi)$  è determinata dal valore di  $k$  nel seguente modo:

$$\begin{aligned} k = 0, \quad r = \chi = f(\chi), \quad \text{con } 0 < \chi < \infty \\ k = +1, \quad r = \sin \chi = f(\chi), \quad \text{con } 0 < \chi < 2\pi \\ k = -1, \quad r = \sinh \chi = f(\chi), \quad \text{con } 0 < \chi < \infty \end{aligned} \quad (2.116)$$

Ora, andiamo a definire una nuova coordinata temporale:

$$d\tau = \frac{dt}{a(t)} \quad (2.117)$$

tale per cui ho che la (2.115) diventa:

$$ds^2 = a^2(\tau)d\bar{s}^2 \quad (2.118)$$

con:

$$d\bar{s}^2 = d\tau^2 - d\chi^2 - f^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.119)$$

Se ora ci focalizziamo per i modelli standard, cioè quelli con  $\Lambda = 0$ , otteniamo che  $a(\tau)$  è descritta da una delle equazioni (2.98), (2.113), (2.114), trovate precedentemente. Se consideriamo  $k = 1$  l'elemento di linea (2.119) descrive precisamente lo spazio statico di Einstein, dove i tre modelli vanno a mappare a seconda del valore assunto da  $\tau$ , che varia

da:  $0 < \tau < \pi$ , differenti porzioni di tale spazio. Nel caso invece si consideri  $k = 0$ , si deve applicare una procedura che risulta essere identica a quella per ottenere la struttura conforme dello spazio-tempo di Minkowski, eccetto che ora  $0 < \tau < \infty$ . Infine, la regione di spazio che risulta conforme per  $k = -1$  è data da:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\pi &\leq t' + r' \leq \frac{1}{2}\pi \\ -\frac{1}{2}\pi &\leq t' - r' \leq \frac{1}{2}\pi \\ t' &\geq 0 \end{aligned}$$

Tali regioni sono graficate nella figura 2.2

## 2.3 Modello di universo di de Sitter

È opportuno ora soffermarsi sul modello di universo di de Sitter, che ci permette di approfondire il significato di  $\Lambda$  all'interno delle equazioni di campo di Einstein, poichè risulta non appartenere alla cosmologia relativistica in quanto è privo di materia. Infatti, le condizioni su cui si basa tale modello sono  $\rho = p = k = 0$ , cioè esso risulta vuoto e piatto. Partendo dalle equazioni (2.59) e inserendoci le condizioni citate sopra si ha:

$$\tilde{p} = -\rho = -\frac{\Lambda}{8\pi} \quad (2.120)$$

che inserita nella (2.61) ci da:

$$\dot{a}(t)^2 = \frac{\Lambda}{3} a^2 \quad (2.121)$$

da cui si può notare che  $\Lambda > 0$ . Inoltre possiamo anche riscrivere la (2.121) come:

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \left(\frac{1}{3}\Lambda\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.122)$$

Integrando la (2.121) otteniamo [8]:

$$a(t) = A \exp\left[\left(\frac{1}{3}\Lambda\right)^{\frac{1}{2}} t\right] \quad (2.123)$$

dove abbiamo che  $A$  è una costante di integrazione. Per eliminare la costante  $A$ , possiamo o riscalare  $r$  in modo che essa venga assorbita al suo interno, oppure, poichè la scelta dell'origine della curva è arbitraria, possiamo scegliere:  $R = 1$  quando  $t = 0$  così da ottenere  $A = 1$ . Fatto ciò otteniamo l'equazione che ci descrive il modello di de Sitter graficato nella figura 2.3:

$$a(t) = \exp\left[\left(\frac{1}{3}\Lambda\right)^{\frac{1}{2}} t\right] \quad (2.124)$$

Inoltre, ricordando la definizione della costante di Hubble (2.30), possiamo riscrivere la

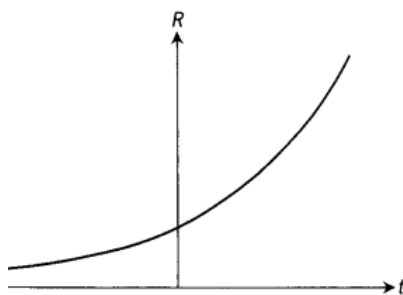


Figura 2.3. Rappresentazione del modello di de Sitter [2]

(2.124) come:

$$a(t) = e^{Ht} \quad (2.125)$$

da cui ci ricaviamo che [2]:

$$H = \left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.126)$$

Possiamo quindi affermare, per quanto scritto sopra, che in un universo di de Sitter, poichè  $H$  è costante sia nello spazio che nel tempo, viene rispettato il *principio cosmologico perfetto* che afferma: l'universo presenta per grandi scale un aspetto immutabile. Tale modello per quanto inizialmente avesse un'importanza puramente storica, oggi si è riniziato a considerarlo all'interno del contesto di modello di universo inflazionario dove, per un determinato intervallo di tempo, l'espansione è descritta da una legge uguale alla (2.123) con equazione di stato  $p \simeq -\rho$  come espresso nella (2.120), che si riconduce alle proprietà quantistiche del vuoto.

### 2.3.1 Orizzonte cosmologico e delle particelle in un universo di de Sitter

L'orizzonte cosmologico, per un osservatore  $O$ , è un'ipersuperficie con caratteristiche simili a quelle di un orizzonte degli eventi di un buco nero. Per ricavarci l'equazione che descrive tale ipersuperficie, bisogna prima trovare quella che ci descrive un cono di luce passato. Ponendoci nelle condizioni che ci permettono di descrivere la propagazione della luce attraverso l'equazione (2.33), possiamo ottenere, per un universo di de Sitter, che tale formula diventi della forma:

$$\frac{dt}{e^{Ht}} = \pm dr \quad (2.127)$$

Per un raggio entrante con  $r = 0$  a  $t = t_0$ , otteniamo:

$$r = \frac{e^{-Ht} - e^{-Ht_0}}{H} \quad (2.128)$$



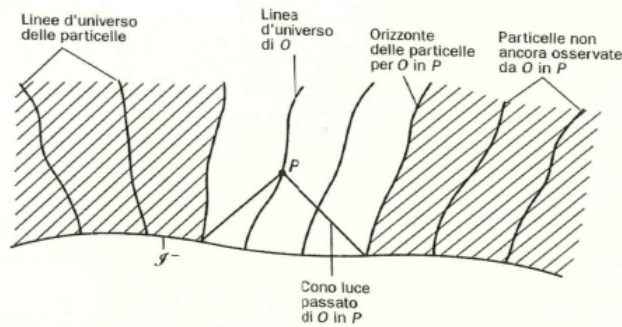


Figura 2.4. Orizzonte di una particella per  $J^-$  di tipo spazio [2]

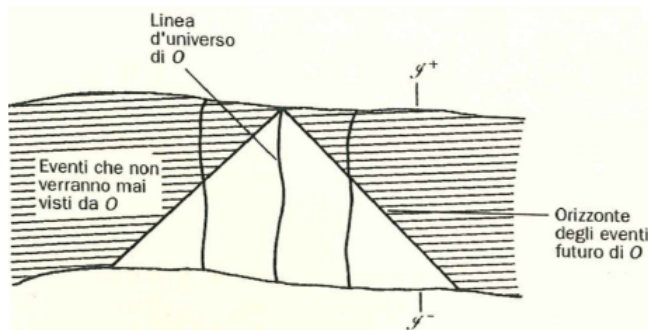


Figura 2.5. Orizzonte di una particella per  $J^-$  e  $J^+$  di tipo spazio [2]

la quale risulta essere l'equazione del cono di luce passato al punto  $r = 0$  e  $t = t_0$ . Abbiamo che ad ogni tempo particolare l'informazione, che può essere ricevuta dall'osservatore, deve appartenere solamente ad eventi presenti all'interno di tale cono. Infatti, se poniamo il limite  $t_0 \rightarrow \infty$  all'equazione (2.128), possiamo notare che un'osservatore con linea di mondo  $r = 0$  non riceve nessuna informazione proveniente da eventi accaduti al di fuori dell'ipersuperficie:

$$r = \frac{e^{-Ht}}{H} \quad (2.129)$$

motivo per cui viene associata all'orizzonte degli eventi di un buco nero e viene anche detta *orizzonte degli eventi* per  $O$ . Questa è una particolarità dello spazio di de Sitter  $dS_d$ , cioè ad ogni singolo osservatore viene impedito l'accesso dell'intero spazio-tempo [2]. Vi sono vari tipi di orizzonte degli eventi. Infatti, se consideriamo una linea di mondo di un osservatore  $O$ , che si muove lungo una geodetica di tipo tempo nello spazio-tempo dove  $J^-$  è di tipo spazio, allora per ogni punto  $P$ , della linea di mondo di  $O$ , il cono di luce passato a  $P$  è l'insieme di eventi nello spazio-tempo che possono essere osservati da  $O$  in quel determinato istante. Questa divisione delle particelle, che possono essere viste o non viste da  $O$  in  $P$ , da origine al cosiddetto *orizzonte delle particelle* di  $O$  in  $P$  raffigurato

in figura 2.4. Se consideriamo, invece, lo spazio-tempo, dove sia  $J^-$  che  $J^+$  sono di tipo spazio, allora se guardiamo a tutta la storia di  $O$  il cono di luce passato dell'osservatore in  $P$  su  $J^+$  è detto *orizzonte degli eventi futuro*, poichè nessuno degli eventi al di fuori di esso sarà mai visto dall'osservatore  $O$ , come si può vedere dalla figura 2.5. Se, invece, consideriamo  $J^-$  nullo, come accade per uno spazio-tempo di Minkowski, allora tutte le particelle sono visibili da  $O$  in  $P$ . Invece, se poniamo  $J^+$  nullo, cosa che è analoga a ciò che avviene in uno spazio-tempo di Minkowski, abbiamo una situazione diversa. Infatti, se  $O$  si muove su una geodetica di tipo tempo allora non presenta un'orizzonte futuro degli eventi. Al contrario, se si muove con un'accelerazione uniforme che tende asintoticamente a portare la velocità di  $O$  vicino a quella della luce, cioè si ha che la sua linea di mondo finisce in  $J^+$ , allora possiede un orizzonte degli eventi futuro. Notiamo, che tali orizzonti dipendono dall'osservatore, mentre quello di un buco nero no. Per tale motivo quest'ultimo viene detto assoluto.

### 2.3.2 Sistemi di coordinate e Geometria dello spazio di de Sitter

Lo spazio di de Sitter  $d$ -dimensionale  $dS_d$  è descritto da un'ipersuperficie nello spazio piatto  $d + 1 - \text{dimensionale}$  di Minkowski  $M^{d,1}$  determinata dall'equazione:

$$X_0^2 - X_1^2 - \dots - X_d^2 = l^2 \quad (2.130)$$

dove,  $l$  è un parametro detto: *raggio di de Sitter*, che ha l'unità di misura di una lunghezza. Tale ipersuperficie risulta essere un'iperboloide nello spazio piatto di Minkowski, come si può vedere dalla figura 2.6. Inoltre,  $dS_s$  risulta essere una varietà di Einstein con  $a(t) > 0$  e tensore di Einstein che soddisfa:

$$G_{ij} + \Lambda g_{ij} = 0 \quad (2.131)$$

dove la costante cosmologia viene definita dall'equazione:

$$\Lambda = \frac{(d-2)(d-1)}{2l^2} \quad (2.132)$$

Possiamo per comodità, senza perdere di generalità, porre  $l = 1$ . Andiamo ora a discutere dei vari sistemi di coordinate, che si possono adottare al fine di poter esaminare i diversi aspetti della struttura spaziale  $dS_d$  [10]. Al fine di non appesantire la trattazione, poichè se ne farà un ampio uso, è utile introdurre per prime le coordinate sferiche su  $S^{d-1}$ . Tali coordinate sono parametrizzate da:

$$\begin{aligned} w^1 &= \cos \theta_1 \\ w^2 &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ &\vdots \\ w^{d-1} &= \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{d-2} \cos \theta_{d-1} \\ w^d &= \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{d-2} \sin \theta_{d-1} \end{aligned} \quad (2.133)$$

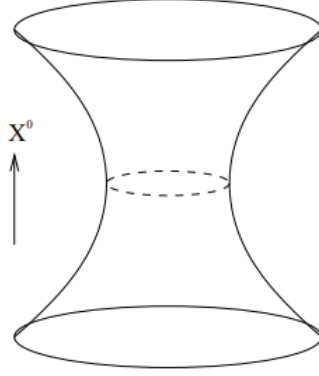


Figura 2.6. Illustrazione dello spazio di de Sitter. La linea tratteggiata rappresenta il volume estremo  $S^{d-1}$  [10]

dove  $0 \leq \theta_i < \pi$  con  $1 \leq i \leq d-1$ , ma  $0 \leq \theta_{d-1} < 2\pi$ . Quindi è chiaro che  $\sum_{i=1}^d (w^i)^2 = 1$ , e la metrica in  $S^{d-1}$  è:

$$d\Omega_{d-1}^2 = \sum_{i=1}^d (dw^i)^2 = d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2 + \cdots + \sin^2 \theta_1 \cdots \sin^2 \theta_{d-2} d\theta_{d-1}^2 \quad (2.134)$$

- **Coordinate planari**  $(t, x^i)$ , con  $i = 1, \dots, d-1$ . Per definire tali coordinate assumiamo:

$$X^0 = \sinh t - \frac{1}{2} x_i x^i e^{-t}$$

$$X^i = x^i e^{-t}, \quad i = 1, \dots, d-1$$

$$X^d = \cosh t - \frac{1}{2} x_i x^i e^{-t}$$

da cui otteniamo la metrica nella seguente forma:

$$ds^2 = dt^2 - e^{-2t} dx_i dx^i \quad (2.135)$$

- **Coordinate statiche**  $(t, r, \theta_a)$ ,  $a = 1, \dots, d-2$ . In queste coordinate è importante sottolineare due cose: la prima, è che il  $t$  presente non è lo stesso delle coordinate planari analizzate precedentemente e la seconda, è che tali coordinate parametrizzano  $S^{d-2}$  e non  $S^{d-1}$ . Tale sistema è costruito affinché un vettore di Killing temporale  $\frac{\partial}{\partial t}$  generi una simmetria  $t \rightarrow t + \text{costante}$ . Se poniamo:

$$X^0 = \sqrt{1-r^2} \sinh t$$

$$X^a = r w^a, \quad a = 1, \dots, d-1$$

$$X^d = \sqrt{1-r^2} \cosh t$$

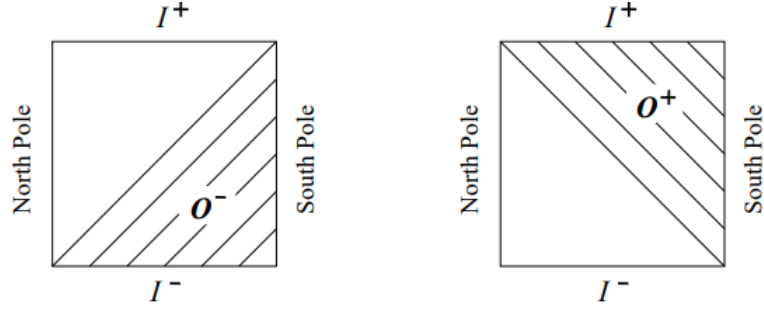


Figura 2.7. Diagrammi di Penrose delle regioni  $O^-$  e  $O^+$  corrispondenti al passato e futuro causale di un'osservatore posto nel polo sud [10]

la metrica allora assume la forma:

$$ds^2 = (1 - r^2)dt^2 - \frac{dr^2}{1 - r^2} - r^2 d\Omega_{d-2}^2 \quad (2.136)$$

Tali coordinate non ricoprono interamente lo spazio di de Sitter ma solo la regione  $O^-$  e risultano appropriate per un'osservatore al polo sud, come si può vedere dalla figura 2.7.

- **Coordinate Globali**  $(\tau, \theta_i)$ . Per ottenere tali coordinate dobbiamo impostare:

$$X^0 = \sinh \tau,$$

$$X^i = w^i \cosh \tau, \quad i = 1, \dots, d$$

dove,  $-\infty < \tau < \infty$  e  $w^i$  sono dati dalle equazioni (2.133). Come possiamo notare esse soddisfano l'equazione (2.130) per ogni punto  $(\tau, w_i)$ . Otteniamo dalla metrica piatta  $M^{d,1}$ :

$$ds^2 = dX_0^2 - dX_1^2 - \dots - dX_d^2 \quad (2.137)$$

che l'elemento di linea è:

$$ds^2 = d\tau^2 - (\cosh^2 \tau) d\Omega_{d-1}^2 \quad (2.138)$$

In queste coordinate  $dS_d$  è uguale a una  $d - 1$ -sfera, che a  $\tau = -\infty$  è infinitamente larga, si restringe al minimo valore per  $\tau = 0$  e ritorna a crescere per  $\tau \rightarrow \infty$ .

- **Coordinate conformi**  $(t', \theta_i)$  Tali coordinate sono legate alle coordinate globali dalla relazione:

$$\cosh \tau = \frac{1}{\cos t'} \quad (2.139)$$

dove abbiamo  $-\frac{\pi}{2} < t' < \frac{\pi}{2}$ . Ottenendo la seguente forma della metrica:

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 t'} (dt'^2 - d\Omega_{d-1}^2) \quad (2.140)$$

Tale sistema di coordinate è particolarmente utile, poichè ci permette di comprendere al meglio la struttura causale dello spazio di de Sitter. Se le geodetiche sono nulle rispetto alla metrica (2.140), allora considerando uno spazio 4-dimensionale, lo sono anche per quella di Einstein di un universo statico la cui topologia è cilindrica [10]:

$$d\bar{s}^2 = dt'^2 - dr'^2 - \sin^2 r' d\Omega_2^2 \quad (2.141)$$

In tali coordinate, l'unica differenza rispetto alle (2.140) è che la coordinata radiale non è stata né fissata né normalizzata. Quindi, possiamo graficare le coordinate conformi di de Sitter nel modo descritto dalla figura 2.8 dove, si può notare la presenza di due ipersuperfici nulle  $J^-$  e  $J^+$  dove tutte le geodetiche nulle hanno origine e fine. Tali ipersuperfici vengono dette: *infinito nullo passato* ( $J^-$ ) e *infinito nullo futuro* ( $J^+$ ). La struttura causale di  $dS_s$  è descritta nei diagrammi di Penrose graficati nella figura 2.7. In tale diagramma abbiamo che ogni punto è come  $dS_d^{d-2}$ , eccetto per i punti a destra e sinistra, i quali giacciono sul polo sud e nord rispettivamente. Inoltre, si nota che i raggi di luce sono rappresentati da linee inclinate di  $45^\circ$ , mentre le superfici di tipo tempo sono disegnate molto più in verticale rispetto che in orizzontale e quelle di tipo spazio sono disegnate molto più in orizzontale rispetto che in verticale.

- **Coordinate iperboliche**  $(\bar{\tau}, \varphi, \theta_a)$ . Finora abbiamo visto che lo spazio di de Sitter è stato ricoperto attraverso le coordinate globali con delle sfere, mentre con le coordinate planari con dei piani. Ora, invece, ricopriremo lo spazio di de Sitter con spazi a curvatura costante negativa, usando le coordinate iperboliche;

$$X^0 = \sinh \bar{\tau} \cosh \varphi$$

$$X^a = w^a \sinh \bar{\tau} \sinh \varphi$$

$$X^d = \cosh \bar{\tau}$$

da cui si ottiene la metrica:

$$ds^2 = d\bar{\tau}^2 - \sinh^2 \bar{\tau} (d\varphi^2 + \sinh^2 \varphi d\Omega_{d-2}^2) \quad (2.142)$$

Possiamo notare, che le superfici ottenute imponendo:  $\bar{\tau} = \text{costante}$  sono piani iperboliche  $d - 1$ -dimensionali

- **Coordinate di Eddington-Finkelstein**  $(v, r, \theta_a)$ . Tale sistema di riferimento, nello spazio di de Sitter, è l'analogo delle coordinate (avanzate) di Eddington-Finkelstein per un buco nero di Schwarzschild. Partiamo definendo la coordinata  $v$  attraverso l'equazione:

$$dt = dv + \frac{dr}{1 - r^2} \quad (2.143)$$

che risolvendola otteniamo:

$$v = t + \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} \quad (2.144)$$

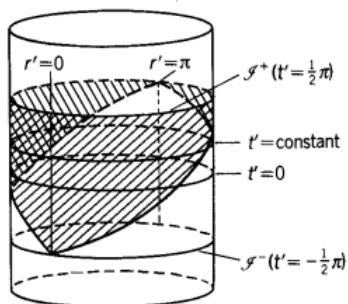


Figura 2.8. Illustrazione dello spazio di de Sitter nelle coordinate conformi [2]

da cui otteniamo la metrica:

$$ds^2 = (1 - r^2)dv^2 + 2dvdr - r^2 d\Omega_{d-2}^2 \quad (2.145)$$

Possiamo analogamente definire le coordinate ritardate date da:

$$u = t - \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} \quad (2.146)$$

da cui la metrica:

$$ds^2 = (1 - r^2(v, u))dvdu - r^2 d\Omega_{d-2}^2 \quad (2.147)$$

dove  $r = \tanh \frac{v-u}{2}$

- **Coordinate di Kruskal** ( $V, U, \theta_a$ ). Per tale sistema consideriamo:

$$v = -\ln(-V), \quad u = \ln(U)$$

Da cui ricaviamo l'elemento di linea [6] :

$$ds^2 = \frac{1}{(UV - 1)^2} (-4dUdV + (1 + UV)^2 d\Omega_{d-2}^2) \quad (2.148)$$

Possiamo notare, che questo tipo di coordinate ricopre tutto lo spazio di de Sitter e risulteranno particolarmente utili nel capitolo seguente.

## Capitolo 3

# Sorgente a simmetria sferica in un universo in espansione

In questo capitolo si racchiude la parte centrale della tesi, infatti, in esso si esporrà e analizzerà il problema di Einstein-Straus. Inizialmente, andremo a studiare il comportamento di un universo descritto dal modello di de Sitter con al suo interno la metrica di Schwarzschild, vedendo come esso è strutturato. In seguito, andremo ad esporre il modello che Einstein e Straus svilupparono per descrivere una sorgente di massa  $m$ , a simmetria sferica e statica, in un universo che si espande, analizzando i vari metodi utilizzati al fine di risolvere tale problema.

### 3.1 Metrica di Schwarzschild nello spazio di de Sitter

Al fine di esporre una trattazione esaustiva, risulta fondamentale ricavare fin da subito la metrica di Schwarzschild-de Sitter [6]. Riprendendo le equazioni di campo di Einstein con la costante cosmologica scritte nella forma:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R + \Lambda g_{ij} = 8\pi T_{ij} \quad (3.1)$$

con  $\Lambda > 0$  e  $T_{ij} = 0$  ottenendo:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R + \Lambda g_{ij} = 0 \quad (3.2)$$

poichè ci troviamo in uno spazio di de Sitter avremo che  $d = 4$  e si otterrà  $dS_d = dS_4$ . Ricordiamo, che la soluzione di Schwarzschild descrive usualmente un buco nero di massa  $m$ , in uno spazio asintoticamente piatto e per  $\Lambda \neq 0$ , può essere considerata come la più semplice generalizzazione di un buco nero di massa  $m$ , in uno spazio asintoticamente di de Sitter. Per trovare tale metrica, si utilizza un'approccio simile a quello svolto per trovare la soluzione di Schwarzschild nel Capitolo 1, solo che ora, le equazioni di campo nel

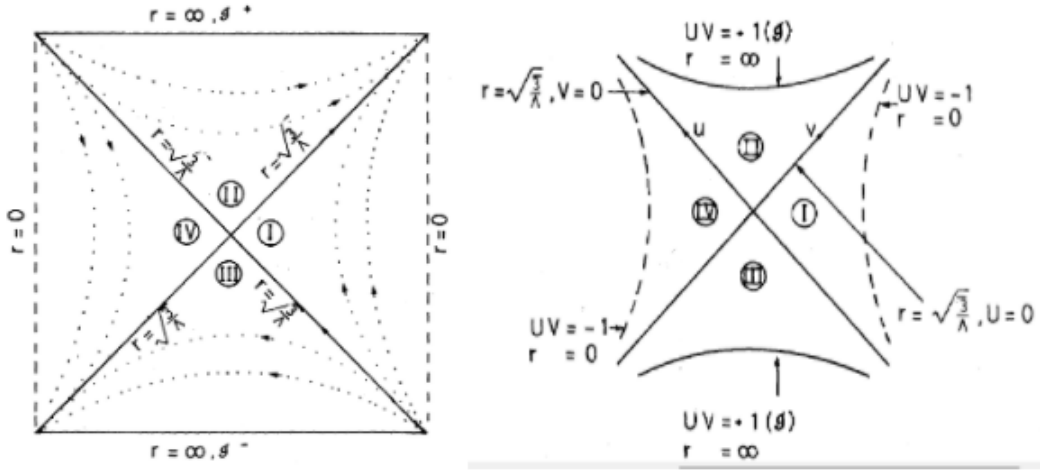


Figura 3.1. Nel grafico a destra troviamo il diagramma dello spazio di de Sitter nelle coordinate di Kruskal mentre a sinistra quello di Penrose-Carter [6]

vuoto sono (3.2). Da cui, facendo la traccia, possiamo ricavarci il valore della curvatura scalare  $R$ :

$$g^{ij} \left[ R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R + \Lambda g_{ij} \right] = 0 \Rightarrow R - 2R + 4\Lambda = -R + 4\Lambda = 0 \quad (3.3)$$

dalla quale ci ricaviamo che:

$$R = 4\Lambda \quad (3.4)$$

Sostituendo tale risultato nella (3.2) essa risulta della forma:

$$R_{ij} = \Lambda g_{ij} \quad (3.5)$$

Analogamente al Capitolo 1, partiamo dallo scrivere la formula più generale di una metrica statica a simmetria sferica:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.6)$$

con  $\nu = \nu(r)$  e  $\lambda = \lambda(r)$ . Ora per calcolare le varie componenti del tensore di Ricci, si utilizza la connessione affine data da :

$$\Gamma_{ij}^\rho = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \left( \frac{\partial g_{i\sigma}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{\sigma j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\sigma} \right) \quad (3.7)$$

Da cui si ottiene che il tensore di Ricci è descritto da:

$$R_{ij} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^\lambda}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma_{i\lambda}^\lambda}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda - \Gamma_{i\lambda}^\eta \Gamma_{j\eta}^\lambda \quad (3.8)$$



Quindi, possiamo calcolarci esplicitamente le varie componenti escludendo quelle il cui valore è zero:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -e^{\nu-\lambda} \left( \frac{1}{2} \nu'' - \frac{1}{4} \nu' \lambda' + \frac{1}{4} (\nu')^2 + \frac{\nu'}{r} \right) \\ R_{rr} &= \frac{1}{2} \nu'' - \frac{1}{4} \nu' \lambda' + \frac{1}{4} (\nu')^2 - \frac{\lambda'}{r} \\ R_{\theta\theta} &= e^{-\lambda} \left( 1 + \frac{1}{2} r (\nu' - \lambda') \right) - 1 \\ R_{\phi\phi} &= R_{\theta\theta} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (3.9)$$

dove abbiamo assunto  $\nu' = \frac{d\nu}{dr}$  e  $\lambda' = \frac{d\lambda}{dr}$ . Inserendo tali equazioni nella (3.5), otteniamo per le componenti  $(tt)$  e  $(rr)$ :

$$\Lambda e^\nu = -e^{\nu-\lambda} \left( \frac{1}{2} \nu'' - \frac{1}{4} \nu' \lambda' + \frac{1}{4} (\nu')^2 + \frac{\nu'}{r} \right) \quad (3.10)$$

$$-\Lambda e^\lambda = \frac{1}{2} \nu'' - \frac{1}{4} \nu' \lambda' + \frac{1}{4} (\nu')^2 - \frac{\lambda'}{r} \quad (3.11)$$

sottraendo la (3.10) alla (3.11) troviamo che:

$$\lambda' + \nu' = 0 \quad (3.12)$$

e integrandola, si trova che:

$$\nu + \lambda = C \quad (3.13)$$

dove la costante  $C$  risulta nulla poichè:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \nu(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda(r) = 0 \quad (3.14)$$

Da ciò, possiamo ricavarci dalla equazione  $(tt)$ , la seguente formula:

$$e^\nu (r\nu' + 1) = 1 - \Lambda r^2 \quad (3.15)$$

introducendo ora un parametro  $\alpha$ , definito come:  $\alpha \equiv e^\nu$ , da cui otteniamo l'equazione differenziale:

$$\alpha + r\alpha' = 1 - \Lambda r^2 \quad (3.16)$$

ottenendo:

$$\frac{d}{dr}(r\alpha) = \frac{d}{dr} \left( r - \frac{\Lambda}{3} r^3 \right) \quad (3.17)$$

da cui ricaviamo:

$$r\alpha = r - \frac{\Lambda}{3} r^3 + M \quad (3.18)$$

con  $M$  costante di integrazione, la quale viene scelta opportunamente con valore:  $M = -2m$ . Infine, otteniamo quindi la metrica di Schwarzschild-de Sitter:

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.19)$$

Possiamo ora ricavarci il valore di  $\Lambda$ . Poichè lo spazio di de Sitter ha una curvatura costante, possiamo definire il tensore di Reimann in talmodo:

$$R_{ijkl} = \frac{1}{\beta^2}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \quad (3.20)$$

con  $\beta$  raggio di de Sitter. Siccome possiamo normalizzare il raggio di de Sitter, ottenendo che  $\beta = 1$ , allora facendo la traccia della (3.20) otteniamo il tensore di Ricci con la seguente formulazione:

$$\begin{aligned} R_{jl} &= g^{ik}(g_{ij}g_{kl} - g_{il}g_{jk}) \\ &= 4g_{jl} - g_{jl} \\ &= 3g_{jl} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Sostituendo tale valore all'interno della (3.5), otteniamo il valore di  $\Lambda$ :

$$\Lambda = 3 \quad (3.22)$$

Da cui possiamo ricavarci la forma finale dell'elemento di linea di Schwarzschild-de Sitter [6]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} - r^2\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} - r^2} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.23)$$

Riprendendo la (3.19) possiamo notare che se imponiamo  $m = 0$  otteniamo lo spazio di de Sitter [6]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\Lambda r^2}{3}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.24)$$

invece con  $\Lambda = 0$  abbiamo la metrica di Schwarzschild [2]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.25)$$

Le coordinate di Kruskal, introdotte nel capitolo precedente, risultano utili per trattare in modo rigoroso le soluzioni esatte con gli orizzonti degli eventi cosmologici. Riprendendo la (3.24), si può notare, che esiste una singolarità in  $r = \left(\frac{3}{\Lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$ , la quale risulta essere removibile, cioè si può eliminare attraverso un cambio di coordinate. Come già fatto nel Capitolo 1 di tale elaborato, al fine di togliere tale singolarità, si sceglie di adottare le *coordinate di Kruskal*. Questa volta non imposteremo  $l = 1$  ma bensì verrà definito come:  $l \equiv \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ . Dopo tali premesse, possiamo riscrivere la metrica (3.24) nelle nuove coordinate con l'aggiunta questa volta del parametro  $l$  [6]:

$$ds^2 = \frac{3}{\Lambda} \frac{1}{(UV - 1)^2} [-4dUdV + (1 + UV)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \quad (3.26)$$

dove:  $r = \left(\frac{3}{\Lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1+UV}{1-UV}$  e  $e^{2\left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{\frac{1}{2}}t} = -UV^{-1}$  Tale struttura è graficata in 3.1 dove abbiamo che le curve tratteggiate, corrispondenti ai valori  $UV = -1$ , sono di tipo tempo e rappresentano l'origine delle coordinate polari, mentre nel punto agli antipodi una 3-sfera. Per i valori  $UV = -1$ , abbiamo delle curve di tipo spazio, che rappresentano l'infinito futuro  $J^+$  e passato  $J^-$ . Le geodetiche radiali nulle, date da  $U = 0$  e  $V = 0$ , sono graficate come curve inclinate di  $\pm 45^\circ$  rispetto alla verticale. Su tali superfici il vettore di Killing  $K = \frac{\partial}{\partial t}$  è nullo, ed esse sono l'orizzonte degli eventi futuro e passato per ogni osservatore con linea di mondo che rimane nella regione I, in particolare, per quelli che si muovono in essa con  $r = costante$ . Analizziamo ora le varie regioni. La regione I, data da  $U < 0, V > 0, UV > -1$  in cui i vettori di Killing sono di tipo tempo e orientati nel futuro, mentre nella regione IV  $U > 0, V < 0, UV > -1$ , i vettori di Killing sono di tipo spazio ma diretti nel passato. Invece, nelle regioni II e III, cioè quelle date da  $0 < UV < 1$ , i vettori di Killing sono di tipo spazio. Se applichiamo ora una trasformazione conforme, tale da rendere il diagramma di Kruskal finito, lo convertiamo nella forma di Penrose-Carter che è raffigurato in figura 3.1. Grazie alla libertà del fattore conforme, possiamo descrivere l'origine delle coordinate polari  $r = 0$ , l'infinito futuro e passato  $J^+$  e  $J^-$ , con delle linee rette.

È importante ora, andare a studiare la metrica di Schwarzschild-de Sitter che descrive la geometria dello spaziotempo nella vicinanza di una massa  $m$ , non rotante e scarica. La soluzione di Schwarzschild, come visto nel Capitolo 1, descrive una simmetria sferica nello spazio-tempo vuoto quando  $\Lambda = 0$ . Tale metrica, come visto in precedenza, è data dalla (3.25) e presenta una singolarità per  $r = 2m$  che può essere rimossa ricorrendo alle coordinate di Kruskal da cui si ottiene l'equazione:

$$ds^2 = \frac{32m^3}{r} e^{-\frac{r}{2m}} dUdV - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.27)$$

dove abbiamo:  $UV = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) e^{-\frac{r}{2m}}$  e  $(UV)^{-1} = -e^{-\frac{t}{2m}}$ . Il diagramma di Penrose-Carter, che descrive tale metrica, è raffigurato in figura 3.2 dove la regione I è asintoticamente piatta e delimitata a destra dall'infinito nullo passato e futuro  $J^-$  e  $J^+$ , mentre a sinistra dalle superfici  $U = 0$  e  $V = 0$ , con  $r = 2m$ , che risultano essere gli orizzonti degli eventi di un'osservatore che rimane al di fuori di tale valore di  $r$ . Le linee ondulate, invece, rappresentano le singolarità passate e future per  $r = 0$ . Anche la regione IV è asintoticamente piatta, analogamente alla regione I. I vettori di Killing hanno, invece, un comportamento identico a quanto descritto per la figura 3.1. Andiamo ora a studiare la forma dello spazio-tempo dato da un buco nero di massa  $m$ , che asintoticamente tende allo spazio di de Sitter. Richiamando l'equazione (3.19) e considerando il caso in cui  $\Lambda > 0$  e  $9\Lambda m^2 < 1$  [6]. Da tali assunzioni si può vedere che la condizione:

$$1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} = 0 \quad (3.28)$$

è soddisfatta per due valori positivi di  $r$  denominati:  $r_+$  e  $r_{++}$  con  $r_+ < r_{++}$ . Possiamo quindi, considerare  $r_+$  come la posizione dell'orizzonte degli eventi del buco nero, mentre

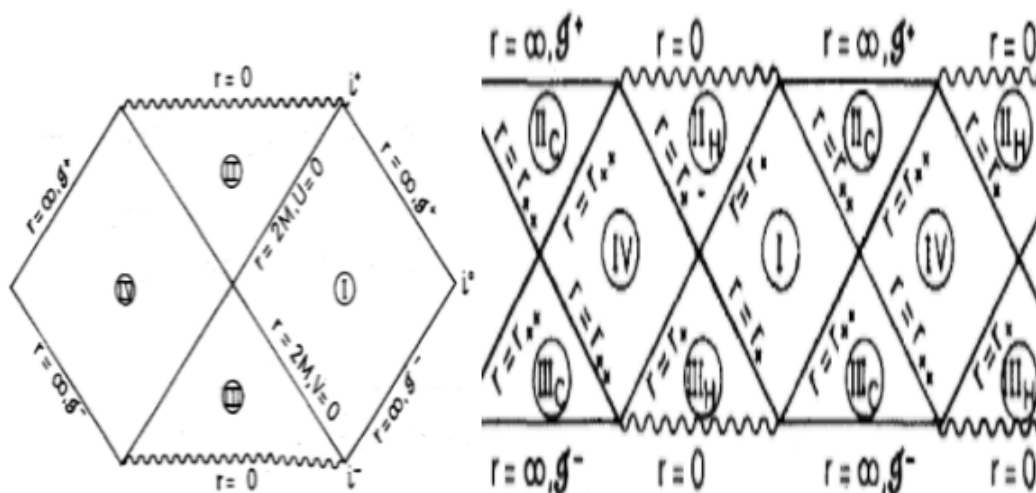


Figura 3.2. A sinistra abbiamo il diagramma di Penrose-Carter per la soluzione di Schwarzschild, mentre a destra quello che descrive lo spazio di Schwarzschild-de Sitter [6]

$r_{++}$  rappresenta, per osservatori con linee di mondo  $r = costante$  comprese tra  $r_+$  e  $r_{++}$ , la posizione dell'orizzonte degli eventi cosmologico. Anche in questo caso, l'ausilio delle coordinate di Kruskal ci permette di rimuovere le singolarità removibili nella metrica ad  $r_+$  e ad  $r_{++}$ . La struttura generale, che descrive tale spazio, ci viene data dal diagramma di Penrose-Carter posto sulla destra nella figura 3.2. Da essa, possiamo notare, che a differenza del diagramma di sinistra rappresentato in 3.2, le regioni dove i vettori di Killing  $K = \frac{\partial}{\partial t}$  sono di tipo tempo non sono solo due (I-IV) ma bensì una sequenza infinita di esse, che dipendono solo dal fatto che  $K$  sia diretto verso il futuro o il passato. Inoltre, è anche possibile osservare, che si ha una sequenza infinita di singolarità per  $r = 0$  e di infiniti di tipo spazio  $J^-$  e  $J^+$

## 3.2 Il problema di Einstein-Straus

Finora abbiamo descritto il campo gravitazionale nei pressi di una singola sorgente cosmologica di massa  $m$ , non rotante e scarica, attraverso la soluzione data da Schwarzschild per un campo a simmetria sferica statico, immersa in un universo piatto, che allontanandosi dalla massa della sorgente, tende asintoticamente ad uno spazio di Minkowski. Tali condizioni però, non descrivono la reale forma dell'universo, infatti, come abbiamo già visto in precedenza, affinché vi sia una densità media non nulla, si deve avere la condizione, trovata grazie alle equazioni di campo, che l'universo sia in espansione. Tale espansione dell'universo fa sì, che le condizioni al contorno di una sorgente in realtà non siano statiche, come assunto per la soluzione di Schwarzschild ma dipendenti dal tempo. Quindi ci aspettiamo che il campo circostante una singola stella, in un universo in

espansione, risulti dipendente dal tempo. Il problema di descrivere quindi una sorgente di massa  $m$ , immersa in un universo in espansione, viene affrontato per la prima volta da Einstein e Straus attraverso il metodo che ora andremmo ad esporre [4].

Il modello adottato da Einstein-Straus per trattare una sorgente a simmetria sferica, non rotante e scarica, in un universo in espansione, prevede di considerare un fluido cosmologico con pressione  $p = 0$  da cui si toglie una porzione sferica di materia, ottenendo così una regione di vuoto, che si pone tutta nell'origine di tale cavità. In questa maniera, vicino all'origine, la metrica sarà descritta da quella di Schwarzschild, mentre allontanandosi da essa, avremo quella di Robertson-Walker. Più precisamente, considereremo di togliere una regione  $G$  dal continuum spazio-temporale nella maniera che segue. Andiamo inizialmente a considerare una serie di 2-sfere con raggio costante e indipendente dal tempo, costruite intorno all'origine di ciascuna sezione temporale. La regione comune, che si viene a creare all'interno di queste sfere, è la nostra regione 4-dimensionale  $G$ . In tale zona, consideriamo la metrica cosmologica sostituita da quella data per una massa generatrice (che è rappresentata da una singolarità della metrica) posta nell'origine spaziale  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . Mentre al di fuori della singolarità abbiamo una regione di vuoto che soddisfa l'equazione [2]:

$$R_{ij} = 0 \tag{3.29}$$

per  $\bar{r}(t) = \bar{r}_0(t)$ , che sono le coordinate di curvatura le quali descrivono l'ipersuperficie che divide la regione  $G$  con l'esterno, la metrica interna passa con continuità a quella che descrive un fluido cosmologico. In tale passaggio  $g_{ij}$  e le sue derivate prime rimangono continue. La metrica al di fuori della regione  $G$  viene descritta, nel caso di una distribuzione di materia omogenea e isotropa, a partire dall'elemento di linea standard di Robertson-Walker che ricordiamo essere della forma:

$$ds^2(t, r') = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr'^2}{(1 - kr'^2)} + r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \tag{3.30}$$

con:  $k$  costante di curvatura che può assumere i valori di  $-1, 0, +1$ ,  $a(t)$  fattore di scala dipendente dal tempo ed  $r'$  coordinata radiale comovente. Da tale equazione possiamo ricavarci attraverso un cambio di variabili definito come:

$$r' = \frac{r}{1 + k\frac{r^2}{4}} \tag{3.31}$$

la forma finale della metrica di Robertson-Walker utile per svolgere i calcoli fatti da Einstein e Strauss [2]:

$$ds^2(t, r) = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)}{(1 + k\frac{r^2}{4})^2} \right] \tag{3.32}$$

la coordinata radiale di curvatura è legata da quella comovente da:

$$r(t) = a(t)r \tag{3.33}$$

che sulla varietà  $\bar{r}(t) = \bar{r}_0(t)$  diventa:  $\bar{r}_0(t) = a(t)r_0$ , da cui possiamo ricavarci l'equazione che descrive la superficie di separazione in coordinate comoventi, data da:

$$r = r_0 \quad (3.34)$$

Per calcolarci le equazioni di campo all'interno della regione  $G$  e le condizioni al contorno per la transizione nello spazio esterno, andiamo a considerare la forma più generale di un campo a simmetria sferica, non per forza statico:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\mu dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.35)$$

dove  $\nu = \nu(t, r)$  e  $\mu = \mu(t, r)$ . Le equazioni di campo  $R_{ij} = 0$  con  $(i, j = 1, \dots, 4)$  diventano:

$$\begin{aligned} \mu'' + \nu'' - \frac{1}{2}(\mu'^2 - \nu'^2) - \mu'\nu' &= 0; \\ r(\mu'' + \frac{1}{2}\mu'^2 + \frac{1}{2}\mu'\nu') + (2\mu' + \frac{1}{2}\nu') - \frac{1}{2}e^{\mu-\nu}(\ddot{\mu} + \frac{3}{2}\dot{\mu}^2 - \frac{1}{2}\dot{\mu}\dot{\nu}) &= 0; \\ 2\dot{\mu}' - \dot{\mu}\nu' &= 0; \\ r(\nu'' + \frac{1}{2}\nu'^2 + \frac{1}{2}\mu'\nu') + \frac{3}{2}\nu' - \frac{3}{2}e^{\mu-\nu}(\ddot{\mu} + \frac{1}{2}\dot{\mu}^2 - \frac{1}{2}\dot{\mu}\dot{\nu}) &= 0; \end{aligned} \quad (3.36)$$

dove abbiamo denotato con il punto le derivate rispetto alla variabile  $t$  e con il pedice quelle rispetto alla variabile  $r$ . Il restante spazio è descritto dalla metrica data dalla equazione (3.32) vista sopra. Se ora imponiamo la condizione di continuità della metrica e delle sue derivate prime, sulla superficie  $r = r_0$  troviamo [4]:

$$\begin{aligned} e^\mu|_{r=r_0} &= \frac{a^2}{(1 + k\frac{r_0^2}{4})^2} \\ \mu'e^\mu|_{r=r_0} &= \frac{-ka^2}{(1 + k\frac{r_0^2}{4})^3} \\ e^\nu|_{r=r_0} &= 1 \\ \nu'e^\nu &= 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Da tali equazioni possiamo ricavarci i valori dei parametri  $\mu$ ,  $\nu$ , e quelli delle loro derivate prime e seconde rispetto a  $t$  e  $r$ . Inserendo tali valori all'interno delle equazioni (3.36), troviamo per  $r = r_0$ ;

$$\begin{aligned} \mu'' + \nu'' - \frac{k^2}{2C^2} &= 0, \\ r\left(\mu'' + \frac{k^2}{2C}\right) - \frac{2k}{C} - \frac{1}{C^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) &= 0, \\ r\nu'' - \frac{3}{C^2}a\ddot{a} &= 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Dove è stato posto  $C = 1 + \frac{1}{4}kr$  per comodità. Se ora eliminiamo  $\mu''$  e  $\nu''$  da esse otteniamo:

$$a\ddot{a} + \frac{1}{2}\dot{a}^2 = -\frac{k}{2} \quad (3.39)$$

e differenziando quest'ultima ne segue che:

$$2\dot{a}\ddot{a} + a\ddot{\dot{a}} = 0 \quad (3.40)$$

dove abbiamo posto  $\ddot{\dot{a}} = \frac{d^3 a(t)}{dt^3}$ . Integrando l'equazione (3.40), possiamo ricavarci la seguente formula:

$$a^2\ddot{a} = -\frac{\zeta}{2} \quad (3.41)$$

sostituendo quest'ultima equazione nella (3.39) possiamo ricavarci:

$$\dot{a}^2 = \frac{(\zeta - ka)}{a} \quad (3.42)$$

Questa equazione risulta essere quella di Freidmann per un universo di polvere con costante cosmologica nulla [8]. Richiamando l'equazione (2.83) del secondo capitolo e confrontandola con questa, si ricava il valore della costante:

$$\zeta = \frac{8}{3}\pi a^3 \bar{\rho} \quad (3.43)$$

dove  $\bar{\rho}$  indica la densità media dell'universo. Andiamo ora ad esporre la soluzione adottata da Einstein e Straus. Tale soluzione viene ricavata approssimando le equazioni di campo e le condizioni al contorno per una regione sufficientemente vicina al confine di  $G$ . Impostiamo, come prima approssimazione:

$$e^\mu = -a^{*2} + \sigma \quad (3.44)$$

e:

$$e^\nu = 1 + \tau \quad (3.45)$$

dove abbiamo considerato:

$$\sigma = \frac{\alpha_1}{r^{\frac{1}{2}}} + \alpha_2 r \quad (3.46)$$

$$\tau = \frac{\beta_1}{r^{\frac{1}{2}}} + \beta_2 r \quad (3.47)$$

dove  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  e  $a^*$  sono funzioni dipendenti dal tempo  $t$ . Inoltre, si deve avere che  $\sigma$  e  $\tau$  siano infinitesimi al primo ordine e che la differenziazione rispetto al tempo faccia aumentare quest'ordine di un fattore  $\frac{1}{2}$ . Considerando le equazioni (3.44) e (3.45), oltre al termine indipendente dalla coordinata radiale, possiamo notare che contengono implicitamente sia un termine proporzionale a  $r^{-\frac{1}{2}}$ , che corrisponde al campo generato da una massa puntiforme immersa nello spazio Euclideo (cioè piatto), sia un termine lineare in  $r$ , che

risulta legato all'omogeneità del campo dovuto al fatto che ci troviamo in un fluido cosmologico. Tale termine, appare, poichè in tale caso non ci troviamo in uno spazio Euclideo. Se escludiamo i termini di ordine più alto, abbiamo che le equazioni di campo (3.36) diventano:

$$\begin{aligned}
 \sigma'' - a^{*2}\tau'' &= 0 \\
 2r\sigma'' + 4\sigma' - a^{*2}\tau' + 2a^{*2}(2a^{*'} + a^*a^{*''}) &= 0 \\
 \frac{a^{*'}}{a^*}(a^{*2}\tau' - 2\sigma') + \sigma' &= 0 \\
 r\tau'' - \frac{3}{2}\tau' - 3a^*a^{*''} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Se separiamo tali equazioni in accordo con le potenze di r, otteniamo:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= a^{*2}\beta_1 \\
 4\alpha_2 - a^*\beta_2 + 2a^{*2}(2a^{*'} + a^*a^{*''}) &= 0 \\
 \frac{a^{*'}}{a^*}(a^{*2}\beta_1 - 2\alpha_1) + \alpha_1' &= 0 \\
 \frac{a^{*'}}{a^*}(a^{*2}\beta_2 - 2\alpha_2) + \alpha_2' &= 0 \\
 \beta_2 - 2a^*a^{*''} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \zeta_1 a^*, \\
 \alpha_2 &= -a^{*2}a^{*'}^2, \\
 \beta_1 &= \zeta_1 a^{*-1}, \\
 \beta_2 &= 2a^*a^{*''}
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Da qui le condizioni al contorno date dalle equazioni (3.37) diventano, se escludiamo l'ordine di grandezza più alto di  $r_0$ :

$$\begin{aligned}
 a^{*2} - \zeta_1 a^* r_0^{-\frac{1}{2}} + a^{*2}a^{*'}^2 r_0 &= a^2 - k a^2 r_0, \\
 \frac{1}{2}\zeta_1 a^* r_0^{-\frac{3}{2}} + a^{*2}a^{*'}^2 &= -k a^2, \\
 \zeta_1 a^{*-1} r_0^{-\frac{1}{2}} + 1 a^* a^{*''} r_0 &= 0, \\
 -\frac{1}{2}\zeta_1 a^{*-1} r_0^{-\frac{3}{2}} + 2a^* a^{*''} &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Da ciò ne segue che  $a^*$  differisce da  $a$  solamente per termini di primo ordine e la costante  $\zeta$  della (3.42) è data in prima approssimazione da:

$$\zeta = \left( -\frac{\zeta_1}{2} \right) r_0^{-\frac{3}{2}} \tag{3.52}$$



In tale caso, le equazioni(3.51) sono soddisfatte. Ora possiamo vedere che il campo è determinato dalla forma:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= (1 + \zeta_1 a^{*-1} r^{-\frac{1}{2}} + 2a^* a^{**} r) dt^2 + (-a^{*2} + \zeta_1 a^* r^{-\frac{1}{2}} + \\
 &\quad - a^{*2} a^{*'2} r) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\
 &= (1 + \zeta_1 a^{*-1} r^{-\frac{1}{2}} - \zeta a^{*-1} r) dt^2 + (-a^{*2} + \zeta_1 a^* r^{-\frac{1}{2}} - a^* (\zeta - k a^*) r) dr^2 + \\
 &\quad - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Consideriamo ora questa soluzione in un piccolo intervallo di tempo intorno a  $t = t_0$  e applicando una trasformzaione sulle coordinate  $(t, r)$ , in maniera tale che la metrica resti conformemente Euclidea, ed il coefficiente di  $dr^2$  sia uguale a  $-1$  escludendo i termini di ordine inferiore. Con tale premessa otteniamo la soluzione data da [4]:

$$ds^2 = (1 + \zeta_1 \tilde{r}^{-\frac{1}{2}}) d\tilde{t}^2 - (1 - \zeta_1 \tilde{r}^{-\frac{1}{2}}) d\tilde{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \tag{3.54}$$

Tale risultato è di notevole importanza, poichè rappresenta un campo statico che in prima approssimazione può essere ricondotto alla soluzione di Schwarzschild. Infatti, esso suggerisce che all'interno della zona  $G$  la metrica sia descritta proprio da quella di Schwarzschild. Ora, al fine di esporre una trattazione rigorosa del problema, andremo a verificare che la metrica presente in  $G$  sia proprio quella di Schwarzschild. Partiamo dal riscrivere la soluzione statica di Schwarzschild nella forma conforme Euclidea:

$$ds^2 = \frac{b^2}{z^2} d\tilde{t}^2 - z^4 \delta_{ij} d\tilde{x}_i d\tilde{x}_j \tag{3.55}$$

dove abbiamo posto:

$$\begin{aligned}
 z &= 1 + \frac{m}{\tilde{r}^{\frac{1}{2}}}; \\
 b &= 1 - \frac{m}{\tilde{r}^{\frac{1}{2}}}.
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

E riscriviamo anche l'equazione (3.35) in coordinate conformi Euclidee nella forma:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\mu \delta_{ij} dx_i dx_j \tag{3.57}$$

La trasformazione generale che lascerà il campo (3.55) simmetrico è data da:  $\tilde{x}_i = P x_i$ ;  $\tilde{t} = Q$  con  $P = P(t, r)$  e  $Q = Q(t, r)$  ottenedo il campo (3.55) nella forma:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \left( -2r z^4 \dot{P}^2 + \frac{b^2}{z^2} \dot{Q}^2 \right) dt^2 + \left( -z^4 \dot{P} (P + 2r P') + \frac{b^2}{z^2} Q' \dot{Q} \right) x_i dx_i dt + \\
 &\quad + \left( -2z^4 P' (P + r P') + \frac{b^2}{z^2} Q'^2 \right) x_i x_j dx_i dx_j - z^4 P^2 \delta_{ij} dx_i dx_j.
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

dove abbiamo:  $z = 1 + \frac{m}{P r^{\frac{1}{2}}}$ ; e  $b = 1 - \frac{m}{P r^{\frac{1}{2}}}$ ; Ora, ciò che andremo a dimostrare sarà che, scegliendo opportunamente  $P$  e  $Q$ , si potrà ricondurre l'equazione (3.55) in forma uguale

a quella di (3.57) e che allo stesso tempo le condizioni al contorno, date dalle (3.37), sono soddisfatte. Allora, poichè tali condizioni implicano l'unicità della soluzione all'interno della regione  $G$  e che essa altro non è che quella di Schwarzschild, avremo che la nostra ipotesi risulterà verificata. Per cercare di ricondurre la (3.55) nella forma della (3.57) dobbiamo avere:

$$-2z^4 P'(P + rP') + \frac{b^2}{z^2} Q'^2 = 0, \quad (3.59)$$

$$-z^4 \dot{P}(P + 2r\dot{P}) + \frac{b^2}{z^2} Q'\dot{Q} = 0. \quad (3.60)$$

La soluzione di Schwarzschild ha ora la forma:

$$ds^2 = \left( -2rz^4 \dot{P}^2 + \frac{b^2}{z^2} \dot{Q}^2 \right) dt^2 - z^4 P^2 \delta_{ij} dx_i dx_j. \quad (3.61)$$

con le condizioni (3.37) in  $r = r_0$  che diventano nella forma:

$$z^4 P^2 = \frac{a^2}{C^2} \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(z^2 P) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{a}{C} \right) \quad (3.63)$$

$$-2rz^4 \dot{P}^2 + \frac{b^2}{z^2} \dot{Q}^2 = 1 \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( -2rz^4 \dot{P}^2 \frac{b^2}{a^2} \dot{Q}^2 \right) = 0 \quad (3.65)$$

dove abbiamo posto  $C = 1 + \frac{kr}{4}$ . Le equazioni scritte sopra sono le quattro condizioni al contorno per le equazioni (3.2) e (3.60). Dai teoremi di esistenza, per le equazioni differenziali, sappiamo che le equazioni (3.2) e (3.60) insieme a quelle per le condizioni al contorno (3.62) e (3.64) hanno una una soluzione unica. Per provare che  $P$  e  $Q$  soddisfino tutte le condizioni date dalle (3.2) e (3.60) con le (3.37), dobbiamo mostrare che le (3.63) e (3.65) si ricavano dalle condizioni (3.2), (3.60), (3.62) e (3.64). Quindi, richiamando la (3.60) ne segue:

$$Q' = \frac{z^6 \dot{P}}{b^2 \dot{Q}} (P + 2rP') \quad (3.66)$$

e sostituendola nella (3.2) abbiamo:

$$-2P'(P + rP') + \frac{z^6 \dot{P}^2}{b^2 \dot{Q}^2} (P + 2rP')^2 = 0 \quad (3.67)$$

Dalle condizioni al contorno (3.37) per  $r = r_0$  otteniamo:

$$a = z^2 CP \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned}\dot{P} &= \frac{a'}{zbC}; \\ \dot{P}^2 &= \frac{\zeta - kz^2CP}{z^4b^2C^3P}; \\ P' &= \frac{2mr^{-\frac{3}{2}} - kP}{2bC}.\end{aligned}\tag{3.69}$$

$$P + rP' = \frac{2P - kmr^{\frac{1}{2}}}{2bC}; \quad P + 2rP' = \frac{zdP}{bC}\tag{3.70}$$

$$\dot{V}^2 = \frac{z^2}{b^2}(1 + 2rz^4\dot{P}^2) = \frac{z^2}{b^2} \frac{2r\zeta + CP(b^2C^2 - 2krz^2)}{b^2C^3P}\tag{3.71}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\dot{Q}^2) = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{z^2}{b^2}(1 + 2rz^4\dot{P}^2) \right]\tag{3.72}$$

dove abbiamo posto per comodità  $d = 1 - \frac{kr}{4}$ . Se ora sostituiamo le equazioni dalla (3.69) alla (3.71) nella (3.67), otteniamo un'espressione che svanisce identicamente in  $P$  se:

$$\zeta = 2m \left( 1 + \frac{kr_0}{4} \right)^3 r_0^{-\frac{3}{2}}\tag{3.73}$$

verificando che l'equazione (3.63) deriva dalle equazioni (3.2), (3.60), (3.62) e (3.64) [4]. Ora, invece, dimostreremo che anche la (3.65) sia una conseguenza delle (3.2), (3.60), (3.62) e (3.64). Per fare ciò sostituiamo la (3.66) e la (3.72) nell'equazione:

$$Q' \frac{\partial}{\partial r}(\dot{Q}^2) - \dot{Q}' \frac{\partial}{\partial r}(Q'^2) = 0\tag{3.74}$$

e considerando anche il valore di  $\zeta$  dato nella (3.73) otteniamo per  $r = r_0$ :

$$\frac{z^7 dP}{b^3 C} \frac{\dot{P}}{\dot{Q}} \frac{\partial}{\partial r}(\dot{Q}^2) - \dot{Q}' \frac{\partial}{\partial P}(Q'^2) \dot{P} = 0\tag{3.75}$$

o

$$\frac{z^7 dP}{b^3 C} \frac{\partial}{\partial r}(\ln \dot{Q}^2) - \frac{\partial}{\partial P}(Q'^2) = 0\tag{3.76}$$

che è di nuovo un'identità per  $P$  confermando l'ipotesi detta sopra [4]. Quindi, possiamo affermare, che la metrica presente all'interno della regione  $G$  si può considerare in "coordinate locali", come quella di un campo statico, la cui soluzione è quella di Schwarzschild. Da quanto appena descritto in questo paragrafo, possiamo quindi dire, che la dipendenza dal tempo dovuta all'espansione dell'universo, non intacca la soluzione interna alla regione  $G$ , che rimane statica ma va a rendere dipendenti dal tempo il contorno tra i due spazi interno ed esterno, dove si ha che la metrica di Schwarzschild, entra in contatto con quella del campo generato da una distribuzione omogenea di materia.



# Conclusioni

Riassumendo, il problema di Einstein-Straus nasce nel cercare di descrivere una sorgente a simmetria sferica, non rotante e scarica, all'interno di un universo in espansione. In pratica, il lavoro svolto da Einstein e Strauss, come detto sopra, è stato quello di considerare l'universo fatto di solo polvere, cioè come un fluido perfetto con densità omogenea e pressione nulla, e in questo scavare una regione sferica, per poi inserire la materia tolta nell'origine di tale cavità. La porzione di spazio che rimane vuota viene definita "vacuolo di Einstein-Straus". Dopo tale assunzione, il procedimento dei due fisici è stato, attraverso metodi perturbativi, quello di accordare, sul contorno di tale regione sferica, le metriche presenti all'interno e all'esterno della cavità. Tali metriche sono: all'interno quella data dalla soluzione di Schwarzschild per le equazioni di campo di Einstein e all'esterno quella di Robertson-Walker. Dai calcoli da loro svolti si verifica che la metrica che descrive l'interno della cavità non viene influenzata dall'espansione dell'universo e risulta rimanere quella di Schwarzschild, al contrario dell'ipersuperficie che separa i due spazi, la quale è dipendente dal tempo. Questo lavoro fu di fondamentale importanza per la cosmologia, poiché fu il primo studio che verificò l'impatto dell'espansione cosmica su sistemi locali. Inoltre, la soluzione trovata da Einstein e Straus viene considerata esatta, poiché non è effettivamente possibile rilevare l'espansione dell'universo facendo delle osservazioni vicino ad una stella, rendendo corretta l'assunzione di utilizzare in quella regione la metrica di Schwarzschild. È interessante citare, in tale contesto, i lavori che altri fisici hanno svolto per migliorare la soluzione trovata da Einstein e Straus. Essi sono: Schücking (per approfondire si veda [12]), che riuscì ad ottenere una forma esatta della metrica in coordinate di curvatura nel caso di un universo con costante cosmologica nulla, e Balbinot, Bergamini e Comastri (per ulteriori informazioni si veda [1]), i quali estesero i risultati di Schücking, considerando anche il contributo di una costante cosmologica positiva. Il problema di Einstein-Straus risulta, come accennato nell'introduzione di questa tesi, un importante lavoro anche per la ricerca odierna sullo studio dell'universo. Infatti, bisogna considerare che nella realtà il cosmo non è omogeneo, bensì disomogeneo, e tale caratteristica è molto difficile da descrivere in maniera rigorosa attraverso un modello matematico, come fatto finora. Se, tuttavia, consideriamo un universo di polvere omogeneo e prendiamo al suo interno vari vacuoli di Einstein-Straus, cosa che è possibile fare proprio in virtù di tale omogeneità, è allora possibile creare un universo che risulta essere disomogeneo, essendovi punti al suo interno vuoti e altri invece più

densi, ricordando la forma di un "formaggio svizzero". Questo è un grande contributo nella ricerca di un modello cosmologico che si avvicini sempre di più a descrivere quello reale. Infatti, tali vacuoli non vanno considerati solamente della grandezza di una stella, ma è possibile generalizzare la loro forma, introducendoli in una scala di grandezze più ampia. Tale generalizzazione consiste, infatti, nel considerare le porzioni di materia estratte come sezioni di universo, che possono essere, invece di una stella, dei sistemi planetari o addirittura galassie. Questo fa sì che si possano considerare grandi sezioni nell'universo come vuote, mentre altre piene, aumentando di molto la realtà con cui si va a descrivere il cosmo. Dagli ultimi dati si pensa, infatti, che la nostra galassia si trovi all'interno di una di queste regioni di vuoto e che essa sia molto grande rispetto a quelle riscontrate in altre zone. Tale generalizzazione dei vacuoli, comunque presi a simmetria sferica, è possibile poiché risulta che neanche le orbite dei pianeti, e quindi i sistemi planetari, risentano dell'espansione dell'universo. Tale risultato è stato verificato grazie al lavoro di McVittie [9], il quale ha trovato una soluzione per un modello liscio, che descrive una massa a simmetria sferica inserita in uno spazio piatto di FLRW. Inoltre, si è sostituito, attraverso altre geometrie sfericamente simmetriche, il vacuolo originale di Einstein-Straus, utilizzando generalmente quella di Lemaître-Tolman-Bondi o regioni di Szekeres a forma sferica (per ulteriori dettagli si veda [3] [7]), così da descrivere su scala extra-galattica il modello di Einstein-Straus "generalizzato", rendendo possibile prendere in considerazione grandi porzioni di cosmo per creare i cosiddetti vacuoli. Andiamo ora ad esporre i vari problemi e limiti che si riscontrano nel modello di Einstein-Straus, per poter effettuare un'analisi completa di tale argomento. Esso presenta due importanti restrizioni. La prima è che il raggio di tale regione  $G$  risulta essere statico e fissato in modo univoco. Tale fattore fa sì che il lavoro svolto da Einstein-Straus risulti poco flessibile nei vari casi presenti in cosmologia. Infatti, le dimensioni della regione citata precedentemente molte volte non si adattano ai vari raggruppamenti della materia presente nell'universo. L'altro fattore restrittivo di tale modello risulta essere la richiesta di una simmetria sferica. Poiché la soluzione di Einstein-Straus ha come grande pregio la capacità di combinare l'espansione dell'universo su larga scala, senza andare ad intaccare la geometria locale, che risulta al suo interno, come già visto, statica. Partendo da ciò, al fine di risolvere il limite della simmetria sferica, i fisici Senovilla e Vera, il cui lavoro è esposto in [11], ipotizzarono di poter realizzare una regione sempre statica ma a simmetria cilindrica, senza restrizioni sulla materia del modello, in una cosmologia dinamica FLRW. Purtroppo il risultato del loro lavoro non ebbe esito positivo, portando alla conclusione che non era possibile creare un tale modello. Aldilà dei limiti esposti, oggi si ritiene che tale soluzione di un universo con dei buchi possa essere una risposta al perché l'espansione di quest'ultimo risulti più accelerata del previsto. Infatti, negli ultimi tempi si è notata una discrepanza riguardo la luce proveniente dalle stelle più lontane, che risulta più attenuata rispetto a quanto previsto dalle attuali leggi cosmologiche. Per tale motivo si è pensato che l'universo si espandesse in maniera molto più veloce rispetto a quanto previsto e che tale accelerazione fosse causata da energia e materia presente in esso non misurabile dall'uomo, dette materia e energia oscura. Tuttavia, se consideriamo

un modello cosmologico con al suo interno i vuoti, si potrebbe avere una risposta a tale discrepanza, dovuta al fatto che tali regioni di spazio possano comportarsi come delle lenti concave nei confronti dei raggi di luce, rendendoli più attenuati. In conclusione, possiamo quindi affermare che, a distanza di anni, il problema di Einstein-Straus risulta ancora oggi di grande interesse, sia nell'ambito di una sua possibile generalizzazione, sia nel campo di ricerche che coinvolgono l'attuale struttura dell'universo.

# Bibliografia

- [1] R. Balbinot, R. Bergamini, A. Comastri, *Solution of the Einstein-Strauss problem with a  $\Lambda$  term*, Phys. Rev. D 38, 2415 (1988).
- [2] R. D’Inverno *Introducing Einstein’s relativity*, Clarendon Press (1992).
- [3] G. Ellis, R. Maartens and M. MacCallum, *Relativistic Cosmology*(Cambridge University Press 2012).
- [4] A. Einstein, E.G. Straus, *The influence of the expansion of space on the gravitational fields surrounding the individual stars*, Rev. Mod. Phys. 17, 120 (1945).
- [5] A. Fabbri, *Modeling black hole evaporation*, Imperial College Press (2005).
- [6] S.W. Hawking, G.W. Gibbons, *Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation*, Phys. Rev. D 15, 2738 (1977).
- [7] A. Krasinski, *Inhomogeneous cosmological models* (Cambridge University Press 1997).
- [8] F.B. Lucchin, *Introduzione alla cosmologia*, Zanichelli (1998).
- [9] G. McVittie (1933) *The mass-particle in an expanding universe*. Mon. Not. Roy. Astr. Soc. 93 325–339.
- [10] M. Spradlin, A. Strominger, A. Volovich, *Les Houches lectures on de Sitter space*, arXiv.org:hep-th/0110007 (2001).
- [11] J. Senovilla and R. Vera (1997) *Impossibility of the Cylindrically Symmetric Einstein Straus Model*. Phys. Rev. Lett. 78 2284–2287.
- [12] E. Schücking, *Zeitschrift für Physik* A 137, 595 (1954).



- [13] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, Publisher LPI (1998).