

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

L'atomo di idrogeno: righe, serie e sua importanza in astrofisica

Tesi di laurea

Presentata da:
Emanuele Serra

Relatore:
Chiar.mo Prof. Daniele Dallacasa

Anno accademico 2020-2021

Sommario

L'idrogeno è l'elemento chimico avente numero atomico $Z=1$ e questo lo rende il primo elemento del sistema periodico. Esso riveste un ruolo di particolare importanza non solo in meccanica quantistica, per via dell'estrema semplicità che caratterizza la sua struttura, ma anche in astrofisica. L'idrogeno è infatti l'elemento chimico più comune dell'universo osservabile e prende parte ad una varietà di fenomeni astrofisici di grande interesse. Questo documento ha lo scopo di presentare l'atomo di idrogeno fornendo non solo una trattazione approfondita della sua struttura e dell'interazione di tale struttura con la radiazione elettromagnetica, ma anche una contestualizzazione dal punto di vista storico e dei processi astrofisici che lo coinvolgono. Nella prima parte di questo elaborato si presenterà l'atomo di idrogeno fornendone le caratteristiche principali e si procederà a delineare il percorso storico che ha condotto dal modello atomico di Bohr allo sviluppo della descrizione quanto-meccanica di tale atomo. Nella seconda parte di questo documento si presenterà il procedimento che, grazie all'introduzione di alcuni concetti base di meccanica quantistica, porta a ricavare le funzioni d'onda che descrivono gli orbitali dell'atomo di idrogeno e i relativi livelli energetici. Nella seconda parte dell'elaborato si procederà anche ad esaminare le transizioni energetiche dell'atomo di idrogeno introducendo ed analizzando dettagliatamente concetti chiave come l'approssimazione di dipolo elettrico e le relative regole di selezione. L'importanza in astrofisica dell'idrogeno sarà trattata nella terza e ultima parte del documento. A tal proposito, si citeranno ed analizzeranno brevemente: le reazioni nucleari negli interni stellari, la riga a 21cm dell'idrogeno neutro, la legge di Tully-Fisher e il concetto di nube molecolare.

Indice

	Pagina
1 Introduzione storica	1
2 L'idrogeno nella fisica moderna	3
2.1 Descrizione quanto-meccanica	3
2.2 Righe spettrali e regole di selezione	7
2.3 Correzioni ai livelli energetici	11
3 L'importanza in astrofisica	13
3.1 L'idrogeno molecolare	13
3.2 L'idrogeno neutro	14
3.3 L'idrogeno ionizzato	15
Bibliografia	16

1 INTRODUZIONE STORICA

L'idrogeno è l'elemento chimico più leggero in natura ed è caratterizzato dal numero atomico $Z = 1$. Il suo isotopo più comune è il prozio che, nella sua forma neutra, è composto da un solo elettrone legato a un nucleo costituito da un singolo protone. Come verrà mostrato nella terza parte di questo documento, l'idrogeno, in astrofisica, riveste un ruolo di prim'ordine per via della sua abbondanza; risulta essere infatti l'elemento chimico più comune dell'universo osservabile. La sua struttura ha sempre suscitato grande interesse e molti studi scientifici si sono, sin dall'inizio del secolo scorso, concentrati su di essa per via dell'estrema semplicità che la caratterizza. Il primo a studiare nel dettaglio non solo la struttura dell'atomo di idrogeno, ma anche le leggi che ne governano il comportamento fu Niels Bohr nel 1913. Bohr introdusse in quell'anno un modello atomico che nasceva dall'esigenza non solo di risolvere i problemi di stabilità che affliggevano il modello atomico di Rutherford, ma anche di spiegare le osservazioni che risultavano dagli studi di spettroscopia. Infatti, l'atomo di Rutherford presentava una struttura che lo avrebbe portato ad essere stabile, per la fisica classica, solo per tempi dell'ordine di 10^{-10} secondi e che non era in grado di spiegare l'esistenza di una emissione di luce dagli atomi che non fosse continua. Le osservazioni avevano mostrato che gli spettri atomici presentavano emissione o assorbimento di radiazione elettromagnetica solo a ben precise frequenze. Questo tipo di emissioni, in virtù del loro aspetto, presero il nome di righe spettrali. Inoltre, gli studi condotti dal matematico svizzero Johann Jakob Balmer misero in luce che le frequenze di alcune righe dello spettro dell'idrogeno potevano essere restituite dalla semplice formula

$$\nu_n = cR \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right), \quad \text{con: } n \in \mathbb{N} \quad | \quad n > 2, \quad (1)$$

dove: ν_n è la frequenza dell' n -esima riga, c è la velocità della luce e R una costante empirica che prende il nome di *costante di Rydberg*. Questa successione di righe prese il nome di *serie di Balmer*. Negli anni, serie comprendenti le altre righe dello spettro dell'idrogeno furono individuate e presero i nomi dei loro scopritori. Molto importante fu il contributo di Johannes Rydberg che riuscì a delineare la seguente formula (2) che racchiude in essa le serie precedentemente delineate e che quindi consente di ricavare le frequenze di tutte le linee spettrali che mostra lo spettro dell'idrogeno.

$$\nu_{m,n} = cR \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad \text{con: } m, n \in \mathbb{N} \quad | \quad m \geq 1; \quad n > m \quad (2)$$

Bohr, al fine di dare una spiegazione sia alla stabilità degli atomi sia alla presenza nei loro spettri di linee di emissione o assorbimento, assunse un modello che considerava un elettrone in orbita attorno ad un nucleo centrale e alcune ipotesi *ad hoc*. Egli impose che l'atomo avesse un sistema discreto di stati stazionari ciascuno caratterizzato da un proprio valore dell'energia e che l'elettrone in uno stato stazionario descrivesse un'orbita circolare

governata dalle leggi della meccanica classica che perdevano però di validità durante le transizioni da uno stato stazionario all'altro. Bohr impose anche che l'emissione e l'assorbimento di radiazione non avvenisse in forma continua, ma solo durante la transizione da un'orbita stabile a un'altra e che, in tale passaggio, venisse emesso o assorbito un fotone di energia pari alla differenza in valore assoluto tra le energie associate ai due stati tra i quali vi era la transizione. Infine, richiese che le orbite stazionarie fossero fissate dalla condizione che il modulo del momento angolare orbitale dell'elettrone fosse un multiplo intero della costante di Planck ridotta \hbar . Sotto queste assunzioni, il modello di Bohr restituiva valori per l'energia degli stati stazionari esprimibili dalla formula

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}, \quad \text{con: } n \in \mathbb{N} \quad | \quad n \geq 1, \quad (3)$$

dove: E_n è l'energia dell' n -esimo stato stazionario, m_e la massa dell'elettrone, e la carica elementare, ε_0 la costante dielettrica del vuoto e h la costante di Planck. Come si può notare, la (3) fornisce non solo una spiegazione alla forma analitica della (2) e quindi della (1), ma anche il valore esatto di R basandosi solo su costanti universali. Se si considera quindi lo spettro in emissione dell'atomo di idrogeno, le serie sono semplicemente spiegabili, in questo modello, come l'insieme delle righe spettrali che si originano da transizioni che condividono lo stesso livello energetico di arrivo, come mostrato nella Figura 1. Tuttavia, le ipotesi introdotte *ad hoc* rappresentavano un grande problema per il modello di Bohr perché erano presentate senza nessuna base teorica che le sostenesse se non quella di permettere al modello di riprodurre i risultati delle osservazioni. Per avere una teoria in grado non solo di prevedere i risultati degli esperimenti, ma anche di fornire una solida base teorica al comportamento dei sistemi su scala atomica bisognerà attendere l'avvento della meccanica quantistica.

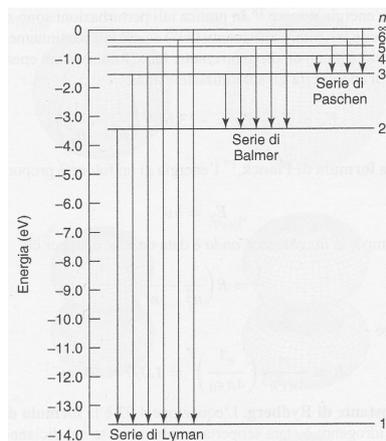


Figura 1: Schema dei livelli energetici del modello di Bohr e delle transizioni che danno origine alle differenti serie nello spettro dell'idrogeno. Fonte: Griffiths [4]

2 L'IDROGENO NELLA FISICA MODERNA

Lo sviluppo della meccanica quantistica segna il passaggio a una descrizione del mondo atomico e subatomico completamente diversa rispetto a quella della fisica classica. Il fisico francese Louis de Broglie suggerì, nel 1924, che particelle come elettroni e protoni potessero presentare anche proprietà ondulatorie. Propose quindi di estendere alla materia il concetto di dualismo onda-corpuscolo già noto per la radiazione elettromagnetica. Ripetendo l'esperimento della doppia fenditura di Young, prima con elettroni, poi con particelle più pesanti, fu possibile non solo confermare l'ipotesi di de Broglie, ma anche giungere alla conclusione che l'onda che si associava alle particelle non era da interpretarsi come un'onda di materia, bensì definiva la probabilità di localizzare la particella in una determinata regione di spazio. Il principio di indeterminazione che il fisico tedesco Werner Karl Heisenberg delineò nel 1927 rappresenta un'ulteriore tappa cardine dello sviluppo della meccanica quantistica. Tale principio sancisce che alcune grandezze non possono essere conosciute contemporaneamente con un'incertezza piccola a piacere. Se ad esempio si considerano posizione e quantità di moto di una particella, tanto più se ne determina con precisione una, tanto più grande sarà l'incertezza sull'altra. Unendo questo risultato all'ipotesi di de Broglie citata poc'anzi, si comprende come in meccanica quantistica il concetto di traiettoria e quindi anche il concetto di orbita sfruttato da Bohr siano da abbandonare completamente. La densità di probabilità legata alla localizzazione di una particella in una determinata posizione è definita dal modulo quadro di una funzione complessa che prende il nome di *funzione d'onda*, la cui evoluzione temporale è determinata da un'equazione che prende il nome di *equazione di Schrödinger*. Nella meccanica quantistica vengono anche introdotti operatori rappresentanti le grandezze fisiche, i quali, attraverso lo studio delle loro equazioni agli autovalori, possono restituire importanti informazioni sul sistema in esame. Nella descrizione quanto-meccanica dell'atomo di idrogeno, si generalizza quindi il concetto di orbita introducendo il concetto di orbitale. Ogni orbitale è rappresentato da una funzione d'onda che indica in quali regioni di spazio è più probabile individuare l'elettrone. Alla luce di questi nuovi concetti, si procede ora a mostrare come ricavare le funzioni d'onda e le energie associate agli orbitali dell'atomo di idrogeno.

2.1 Descrizione quanto-meccanica

Come già esposto all'inizio del primo capitolo, l'atomo di idrogeno è formato da due particelle di carica opposta, un elettrone e un protone, legate dall'interazione coulombiana. L'hamiltoniana di tale sistema sarà quindi

$$\mathcal{H} = \frac{|\vec{\mathbf{p}}_p|^2}{2m_p} + \frac{|\vec{\mathbf{p}}_e|^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{\mathbf{r}}_e - \vec{\mathbf{r}}_p|}, \quad (4)$$

dove si è aggiunto un pedice p alle grandezze riferite al protone, un pedice e alle grandezze riferite all'elettrone e si sono indicati con $\vec{\mathbf{r}}$ i vettori posizione, con m le masse e con $\vec{\mathbf{p}}$ le quantità di moto. A questo punto, se si opera un cambio di variabile sostituendo $\vec{\mathbf{r}}_e$ e $\vec{\mathbf{r}}_p$ con la posizione del centro di massa $\vec{\mathbf{r}}_{CM}$ e la posizione relativa dell'elettrone rispetto al nucleo $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_e - \vec{\mathbf{r}}_p$, si può riscrivere la (4) come

$$\mathcal{H} = \frac{|\vec{\mathbf{P}}|^2}{2M} + \frac{|\vec{\mathbf{p}}|^2}{2\mu} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (5)$$

dove $r = |\vec{\mathbf{r}}|$ è la distanza tra le cariche, $\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{p}}_p + \vec{\mathbf{p}}_e$ il momento totale, $M = m_p + m_e$ la massa totale e dove $\vec{\mathbf{p}}$ e μ sono rispettivamente il momento relativo e la massa ridotta, così definiti:

$$\vec{\mathbf{p}} = \frac{m_p \vec{\mathbf{p}}_e - m_e \vec{\mathbf{p}}_p}{m_p + m_e}, \quad \mu = \frac{m_p m_e}{m_p + m_e}.$$

Osservando la (5), si può notare che il primo termine di tale equazione descrive il moto del centro di massa come particella libera, mentre gli altri due il moto relativo delle due cariche. Scegliere un sistema di riferimento solidale col centro di massa equivale a trascurare il primo termine della (5) e permette di ridursi allo studio del problema dei soli moti relativi. Attraverso la sostituzione nella (5) delle quantità classiche con gli operatori quanto-meccanici, si può quindi impostare la seguente equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{\mathbf{r}}, t) = \underbrace{\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_{\vec{\mathbf{r}}}^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right]}_{\text{Operatore hamiltoniano } H} \Psi(\vec{\mathbf{r}}, t). \quad (6)$$

Dal momento che l'hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo, è possibile procedere a studiare l'equazione di Schrödinger appena scritta con il metodo della separazione delle variabili, ossia cercando soluzioni del tipo $\Psi(\vec{\mathbf{r}}, t) = \psi(\vec{\mathbf{r}})\phi(t)$ che permettano, sostituendole nella (6), di liberarsi della parte temporale pervenendo alla seguente equazione di Schrödinger stazionaria:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_{\vec{\mathbf{r}}}^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \psi(\vec{\mathbf{r}}) = E\psi(\vec{\mathbf{r}}). \quad (7)$$

L'equazione (7) appena ottenuta non è altro che l'equazione agli autovalori dell'operatore hamiltoniano associato al problema dei moti relativi. Lo studio della (7) permette quindi di ricavare gli autovalori e i corrispondenti autostati di H . Questo è molto importante perché i postulati alla base della meccanica quantistica affermano che un sistema fisico quantistico può assumere una varietà di stati, rappresentati da raggi in uno spazio di Hilbert, che possono avere o non avere associata una ben definita energia. Quando si esegue una misura di tipo energetico, uno stato generico viene proiettato su un autovettore dell'operatore hamiltoniano e il risultato della misura è il valore del corrispondente

autovalore. Questo vuol dire che risolvendo la (7) è possibile ricavare non solo i livelli energetici dell'atomo di idrogeno, ma anche i relativi stati stazionari. A questo punto, si può notare esaminando la (7) che il potenziale dipende esclusivamente da $r = |\vec{r}|$. Risulta quindi essere molto più conveniente trattare questo problema in coordinate sferiche (r, θ, ϕ) piuttosto che in coordinate cartesiane (x, y, z) . Ricordando quindi le relazioni

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi \\y &= r \sin \theta \sin \phi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

e la forma del laplaciano in tale sistema di coordinate

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right),$$

si riscrivere la (7) in coordinate sferiche come

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right) \right] + V\psi = E\psi, \quad (8)$$

dove, per non appesantire eccessivamente la notazione, si è preferito omettere le dipendenze e indicare semplicemente con V l'energia potenziale coulombiana. Anche per lo studio della (8) ci si avvale del metodo risolutivo della separazione delle variabili cercando soluzioni separabili in una parte radiale e in una angolare nella forma $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$. Sostituendo nella (8), si ottengono le seguenti due nuove equazioni differenziali che coinvolgono separatamente $R(r)$ e $Y(\theta, \phi)$:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2\mu r^2}{\hbar^2} [V(r) - E] = l(l+1) \quad (9)$$

$$\frac{1}{Y} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] = -l(l+1) \quad (10)$$

Le funzioni che risolvono la (10) sono note come armoniche sferiche e, se normalizzate, assumono la seguente forma

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \epsilon \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta), \quad \text{con } \epsilon = \begin{cases} (-1)^m & \text{per } m \geq 0 \\ 1 & \text{per } m \leq 0 \end{cases}, \quad (11)$$

dove P_l^m non è altro che la funzione associata di Legendre definita come

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}} \left(\frac{d}{dx} \right)^{|m|} P_l(x)$$

nella quale $P_l(x)$ è l' l -esimo polinomio di Legendre definito dalla formula di Rodrigues

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l.$$

Ora, perché la formula di Rodrigues abbia senso e si riscontri la periodicità di 2π che ci si aspetta in coordinate sferiche rispetto all'angolo azimutale ϕ , è necessario che l sia un numero intero non negativo e m un numero intero per cui valga la condizione $|m| \leq l$. Le funzioni che invece risolvono la (9), se normalizzate, hanno forma

$$R_{nl}(r) = \sqrt{\left(\frac{2}{na_\mu} \right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n [(n+l)!]^3}} e^{-\frac{r}{na_\mu}} \left(\frac{2r}{na_\mu} \right)^l L_{n-l-1}^{2l+1} \left(\frac{2r}{na_\mu} \right), \quad \text{con } a_\mu = a_0 \frac{m_e}{\mu} \quad (12)$$

dove $a_0 \approx 0.53\text{\AA}$ è il raggio di Bohr e L_{n-l-1}^{2l+1} è il polinomio associato di Laguerre definito come

$$L_{q-p}^p(x) = (-1)^p \left(\frac{d}{dx} \right)^p L_q(x)$$

nel quale $L_q(x)$ è il q -esimo polinomio di Laguerre esprimibile come

$$L_q(x) = e^x \left(\frac{d}{dx} \right)^q (e^{-x} x^q).$$

Perché la definizione del polinomio associato di Laguerre abbia senso, è necessario che n sia un numero intero positivo e che per esso valga la condizione $n \geq l+1$. Dalla risoluzione della (9) ricaviamo anche i seguenti valori permessi per l'energia:

$$E_n = - \left[\frac{\mu}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \right] \frac{1}{n^2}. \quad (13)$$

Ora, esaminando la (13), si può notare che i livelli energetici sono fissati esclusivamente da n e questo permette di capire che la condizione $n \geq l+1$ va riletta come una restrizione sui possibili valori di l una volta fissato n . I numeri n , l e m , ai quali ci si riferisce come *numeri quantici*, possono quindi assumere i seguenti valori:

$$n, l, m \in \mathbb{Z} \quad | \quad n > 0; \quad 0 \leq l < n; \quad |m| \leq l. \quad (14)$$

Le funzioni d'onda complete e normalizzate dell'atomo di idrogeno ψ , ottenibili dal prodotto della (12) per la (11), sono quindi identificate da tre numeri quantici che etichettano un orbitale di ben definita energia. L'energia degli orbitali è fissata solo da n , chiamato *numero quantico principale*, e questo ci fa capire, prestando attenzione alla (14), che per ogni livello energetico si riscontra un grado di degenerazione pari a n^2 . Ci si riferisce invece a l come *numero quantico orbitale*. l definisce infatti la forma tridimensionale

dell'orbitale e fissa a $l(l+1)\hbar^2$ il quadrato del momento angolare orbitale dell'elettrone. Il numero quantico m è invece identificato come *numero quantico magnetico*, definisce l'orientazione spaziale dell'orbitale e fissa a $m\hbar$ il valore della componente diretta lungo l'asse z del momento angolare della particella. Analizzando bene, a questo punto, la (13), si osserva che essa non è altro che la formula (3) che Bohr ottenne nel 1913, tranne che per la presenza della massa ridotta al posto di quella dell'elettrone. Risulta quindi chiaro che i concetti introdotti da Niels Bohr per la spiegazione della formazione di serie e righe spettrali non sono da rigettare completamente; è solo necessario rivederli considerando gli orbitali appena ricavati invece delle orbite del modello di Bohr e sostituendo le energie della formula (3) con quelle mostrate nella (13).

2.2 Righe spettrali e regole di selezione

Con l'obbiettivo di indagare più a fondo il fenomeno della formazione delle righe spettrali, si procede con lo studio delle interazioni tra atomo e radiazione elettromagnetica. A tal fine, si sceglie di introdurre una approssimazione semi-classica, ossia di trattare il campo di radiazione classicamente e descrivere l'atomo di idrogeno attraverso la meccanica quantistica. Questo approccio è giustificato in tutti i casi in cui il numero di fotoni è così alto da poter essere trattato come variabile continua. In questa analisi si definiscono tre tipi di processi: l'assorbimento, l'emissione spontanea e quella stimolata. Nell'assorbimento l'atomo sottrae fotoni dal campo di radiazione portandosi in livelli energetici di maggiore energia. Nell'emissione spontanea invece l'atomo decade spontaneamente ad un livello energetico di minor energia emettendo fotoni. L'emissione stimolata è un processo analogo all'emissione spontanea con la differenza che il decadimento non avviene spontaneamente ma sotto l'influenza del campo di radiazione. Il campo di radiazione può essere descritto attraverso un potenziale vettore nella forma

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = A_0 \hat{\varepsilon} \cos(\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} - \omega t + \delta_\omega) \quad (15)$$

dove: $\hat{\varepsilon}$ è il vettore di polarizzazione, $\vec{\mathbf{k}}$ il vettore d'onda di modulo $\frac{2\pi}{\lambda}$ con λ lunghezza d'onda della radiazione e δ_ω un termine di fase. Ora, l'hamiltoniana dovrà considerare termini aggiuntivi per descrivere l'interazione tra l'atomo di idrogeno e la radiazione elettromagnetica. Al fine di semplificare la trattazione, si assume infinita la massa del nucleo per evitare effetti di massa ridotta e si trascura l'interazione tra radiazione elettromagnetica e nucleo. L'operatore hamiltoniano della (6) può essere quindi riscritto come

$$H = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}}_{H_0} \underbrace{-\frac{i\hbar e}{m_e} \vec{\mathbf{A}} \cdot \nabla + \frac{e^2}{2m_e} A^2}_{H'} \quad (16)$$

nel quale si pongono in evidenza due parti: l'hamiltoniano dell'atomo di idrogeno H_0 e l'hamiltoniano di interazione H' . Si considera di seguito il caso di campo debole, ossia che

il numero di fotoni sia abbastanza alto da permettere di trattare il campo classicamente, ma allo stesso tempo abbastanza basso da rendere il termine quadratico nel potenziale vettore trascurabile rispetto a quello lineare. L'operatore hamiltoniano d'interazione si riduce quindi al solo termine

$$H' = -\frac{i\hbar e}{m_e} \vec{\mathbf{A}} \cdot \nabla. \quad (17)$$

L'hamiltoniana di interazione può essere trattata come una perturbazione dell'hamiltoniana dell'atomo di idrogeno. Per studiare questo caso è possibile quindi ricorrere alla teoria perturbativa dipendente dal tempo. Con essa si intende calcolare le probabilità di transizione per unità di tempo, o *transition rates*, da uno stato iniziale ad uno finale. Per questo scopo, si esprime come combinazione lineare degli autostati dell'hamiltoniano imperturbato H_0 un generico stato iniziale

$$|\alpha, t = 0\rangle = \sum_m c_m(t = 0) |m\rangle \quad (18)$$

che, considerando l'evoluzione temporale degli stati di ben definita energia, potrà essere riscritto ad un istante successivo $t \neq 0$ come

$$|\alpha, t\rangle = \sum_m c_m(t) e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} |m\rangle. \quad (19)$$

Andando a riprendere a questo punto H_0 come riportato nella (16) e H' come riportato nella (17) si procede a scrivere l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha, t\rangle = (H_0 + H') |\alpha, t\rangle. \quad (20)$$

Sostituendo in essa la (19), si ottiene

$$i\hbar \dot{c}_n = \sum_m c_m H'_{nm} e^{i\omega_{nm}t}, \quad \text{con} \quad H'_{nm} = \langle n | H' | m \rangle \quad \text{e} \quad \omega_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar}, \quad (21)$$

ossia un sistema di equazioni differenziali che accoppia i coefficienti $c(t)$ e dove i pedici m e n si riferiscono a due diversi autovettori generici di H_0 . A questo punto, per entrare nel vivo dell'approccio perturbativo, si introduce un'espansione in ampiezze di ordine crescente nella perturbazione H' dei coefficienti $c(t)$ in modo da esprimerli come segue:

$$c(t) = c^{(0)} + c^{(1)}(t) + c^{(2)}(t) + \dots$$

Se a questo punto si tronca l'espansione al primo ordine, si possiamo riscrivere la (21) come:

$$i\hbar \dot{c}_n^{(1)} = \sum_m c_m^{(0)} H'_{nm} e^{i\omega_{nm}t}. \quad (22)$$

Ora, ricordando che l'interesse di questa analisi verte sulla formazione delle righe spettrali, si può semplificare la trattazione considerando che lo stato iniziale $|\alpha, t = 0\rangle$ sia un autostato dell'hamiltoniana, ossia, indicando $|\alpha, t = 0\rangle$ con $|i\rangle$, deve valere la condizione: $H_0 |i\rangle = E_i |i\rangle$. Questo permette, sostituendo nella (22), di esplicitare le ampiezze di ordine 1 nella forma:

$$c_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{ni}(t') e^{i\omega_{ni}t'} dt'. \quad (23)$$

A questo punto, riprendendo la forma dell'operatore hamiltoniano mostrato nella (17) e del potenziale vettore (15) rappresentante il campo di radiazione, è possibile risolvere la (23) ottenendo:

$$c_n^{(1)}(t) = \frac{eA_0}{2m_e} \left\{ \underbrace{\frac{1 - e^{i(\omega_{ni}-\omega)t}}{\omega_{ni} - \omega} \langle n | e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{\varepsilon} \cdot \nabla | i \rangle}_{\text{Assorbimento}} \overset{M_{ni}}{}} + \underbrace{\frac{1 - e^{i(\omega_{ni}+\omega)t}}{\omega_{ni} + \omega} \langle n | e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{\varepsilon} \cdot \nabla | i \rangle}_{\text{Emissione stimolata}} \overset{\widetilde{M}_{ni}}{}} \right\}. \quad (24)$$

Come si vede evidenziato nella (24), la formula si compone di due termini: uno rappresentante l'assorbimento e uno parametrizzante il processo di emissione stimolata. Si indicano con M_{ni} e \widetilde{M}_{ni} gli elementi di matrice coinvolti nei due termini evidenziati. Analogamente a quanto già visto per le funzioni d'onda, la probabilità di trovare il sistema nello stato $|n\rangle \neq |i\rangle$ è data semplicemente da:

$$P(i \rightarrow n) = |c_n^{(1)}(t)|^2.$$

I tempi considerati in questa trattazione sono abbastanza lunghi da soddisfare non solo la condizione $t \gg \frac{2\pi}{\omega}$, ossia t molto maggiore del periodo della radiazione incidente, ma anche $t \gg \frac{2\pi}{\omega_{ni}}$. Inoltre, si noti che il termine parametrizzante l'assorbimento nella (24) ha un massimo quando $E_n - E_i = \hbar\omega > 0$, mentre il secondo termine invece quando $E_n - E_i = -\hbar\omega < 0$. Questo permette di trattare i due termini separatamente e di introdurre la *transition rate* per l'assorbimento e la *transition rate* per l'emissione stimolata. Le *transition rates* rappresentano rispettivamente la probabilità di assorbimento e di emissione stimolata per unità di tempo. Esse possono essere ricavate calcolando

$$\frac{d}{dt} \lim_{t \rightarrow \infty} |c_n^{(1)}(t)|^2, \quad (25)$$

chiaramente sostituendo a $c_n^{(1)}(t)$ o il primo o il secondo termine della (24). Considerando ora due soli livelli a e b tali che $b > a$, risulta possibile dimostrare che $\widetilde{M}_{ab} = -M_{ba}^*$ e quindi, procedendo a calcolare la (25) con i rispettivi termini, si riscontra che le *transition rates* per assorbimento ed emissione stimolata assumono forma:

$$W_{ba} = \widetilde{W}_{ab} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{e}{m_e} \right)^2 A_0^2 |M_{ba}|^2 \delta(\omega - \omega_{ba}), \quad (26)$$

dove: W_{ba} è la *transition rate* per l'assorbimento, \widetilde{W}_{ab} la *transizione rate* per l'emissione stimolata e δ la funzione delta di Dirac. Se invece che ad un'approssimazione semi-classica ci si fosse rivolti all'elettrodinamica quantistica trattando quantisticamente anche il potenziale vettore, si sarebbe potuto dimostrare anche che la transition rate per l'emissione spontanea assume forma:

$$W_{ab}^s = \frac{4\pi^2}{m_e^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\hbar}{V\omega_{ba}} |M_{ba}|^2 \delta(\omega - \omega_{ba}). \quad (27)$$

Risulta interessante notare che la (26) e la (27) dipendono entrambe linearmente da $|M_{ba}|^2$. Si introduce ora un'approssimazione alla quale ci si riferisce come *approssimazione di dipolo elettrico*. Ricordando la forma dell'elemento di matrice M_{ba} , tale approssimazione si concretizza nell'espansione in serie di Taylor-Maclaurin dell'esponenziale $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$. Prendendo in considerazione transizioni che emettono o assorbono luce visibile, si ha che l'estensione delle funzioni d'onda atomiche è dell'ordine del raggio di Bohr, ossia $r \sim 1\text{\AA}$, mentre la lunghezza d'onda della radiazione incidente è dell'ordine di 10^3\AA , ossia $\lambda \sim 10^3\text{\AA}$, di conseguenza $\vec{k}\cdot\vec{r} \sim \frac{2\pi r}{\lambda} \ll 1$, che giustifica il nostro operato. L'approssimazione di dipolo elettrico consiste nel troncamento dell'espansione dell'esponenziale all'ordine 0, ossia $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \approx 1$, permettendo di riscrivere l'elemento di matrice M_{ba} come

$$M_{ba}^D = \frac{m_e\omega_{ba}}{e\hbar} \hat{\epsilon} \cdot D_{ba}, \quad (28)$$

nella quale si è aggiunto un apice D per indicare l'approssimazione e D_{ba} è l'elemento di matrice tra gli stati $|b\rangle$ e $|a\rangle$ dell'operatore dipolo elettrico così definito: $D = -er$. A questo punto, risulta chiaro che è possibile introdurre una discriminazione delle transizioni fra stati sulla base dell'elemento di matrice dell'operatore D . Se D_{ba} risulta non nullo, la transizione tra gli stati $|a\rangle$ e $|b\rangle$ è detta *permessa* in approssimazione di dipolo elettrico o E1. Se D_{ba} è nullo, la transizione sarà invece *proibita* in approssimazione di dipolo elettrico, ma questo non vuol dire che la transizione non possa comunque avvenire. Ci possono essere dei termini di ordine superiore dello sviluppo di $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ che porterebbero ad ottenere elementi di matrice non nulli. Tuttavia, i termini successivi al primo nello sviluppo dell'esponenziale sono molto minori di 1 ed il loro valore diminuisce all'aumentare dell'ordine considerato. Questo porta a concludere, guardando la (26) e la (27), che le transizioni di questo tipo sono possibili, ma con minore probabilità, il che si traduce in righe meno intense. Se per esempio si considera il termine di ordine 1 dello sviluppo dell'esponenziale, esso dà origine alle transizioni di dipolo magnetico, dette M1, e di quadrupolo elettrico, dette E2. Chiaramente, se l'elemento di matrice M_{ba} in forma non approssimata è nullo, ciò significa che la transizione è strettamente proibita al primo ordine perturbativo. Bisognerà quindi considerare termini di ordine più elevato per la trattazione di questi casi. Solo a titolo di esempio, si sottolinea che al secondo ordine perturbativo la transizione può avvenire tramite l'emissione o l'assorbimento simultaneo di due fotoni. Questo richiede

però campi molto intensi e bisognerebbe, di conseguenza, tenere in considerazione anche il termine quadratico nel potenziale vettore. Per capire quali transizioni sono permesse in approssimazione di dipolo elettrico bisogna chiaramente studiare il prodotto scalare $\hat{\varepsilon} \cdot r_{ba}$ e, per farlo, è conveniente scriverlo in termini delle componenti sferiche ε_q e r_q con $q = 0, \pm 1$ definite sulla base delle loro componenti cartesiane come:

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\varepsilon}_x + i\hat{\varepsilon}_y); \quad \varepsilon_0 = \hat{\varepsilon}_z; \quad \varepsilon_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\varepsilon}_x - i\hat{\varepsilon}_y) \quad (29)$$

$$r_1 = r \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}} Y_1^1(\theta, \phi); \quad r_0 = r \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}} Y_1^0(\theta, \phi); \quad r_{-1} = r \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}} Y_1^{-1}(\theta, \phi) \quad (30)$$

che permettono di riscrivere il prodotto $\hat{\varepsilon} \cdot r_{ba}$ nella forma

$$\hat{\varepsilon} \cdot r_{ba} = \sum_{q=0,\pm 1} \varepsilon_q^* I_{n'l'm',nlm}^q \quad (31)$$

dove

$$I_{n'l'm',nlm}^q = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\int_0^{+\infty} r^3 R_{n'l'}(r) R_{nl}(r) dr}_{\text{Integrale radiale}} \underbrace{\int Y_{l'}^{*m'}(\theta, \phi) Y_1^q(\theta, \phi) Y_l^m(\theta, \phi) d\Omega}_{\text{Integrale angolare}}. \quad (32)$$

Si sottolinea che nella (31) e nella (32) i numeri quantici n, l, m e n', l', m' sono quelli relativi agli stati generici $|a\rangle$ e $|b\rangle$. Mentre l'integrale radiale è sempre diverso da zero, l'integrale angolare è diverso da zero solo per alcuni precisi valori dei numeri quantici in gioco e questo da vita a quelle alle quali ci si riferisce come *regole di selezione*. Dallo studio dell'integrale angolare della (32) si ottengono infatti le seguenti regole:

$$\begin{aligned} \Delta n & \text{ qualunque} \\ \Delta l & = \pm 1 \\ \Delta m & = 0, \pm 1. \end{aligned} \quad (33)$$

Le regole (33) appena ricavate determinano quindi le transizioni più probabili e che presentano, di conseguenza, righe più intense nello spettro dell'idrogeno.

2.3 Correzioni ai livelli energetici

Nel 1922, i fisici tedeschi Otto Stern e Walther Gerlach condussero un importante esperimento che dimostrò non solo che l'elettrone deve essere dotato di un momento angolare intrinseco, ma anche che tale momento angolare deve essere necessariamente quantizzato. Ci si riferisce a questa quantità con il termine *spin* e non si deve pensare che la trattazione portata avanti nelle sezioni precedenti di questo documento non venga modificata

dalla sua presenza. Lo *spin* ha un impatto molto importante perché non solo aggiunge un grado di libertà ed un quarto numero quantico m_s alla descrizione dell'atomo di idrogeno, ma va anche a modificare la definizione dei livelli energetici degli stati legati mostrati nella formula (13). Risulta infatti possibile dimostrare che vi è un'interazione chiamata *interazione spin-orbita* tra il momento angolare di *spin* e il momento angolare orbitale dell'elettrone che comporta l'introduzione di energia potenziale. Scelto un determinato asse di quantizzazione, l'esperimento di Stern e Gerlach ha dimostrato che il momento angolare di *spin* dell'elettrone può assumere due valori: $m_s\hbar$ dove $m_s = \pm\frac{1}{2}$. L'introduzione di questa nuova quantità impone quindi di considerare una perturbazione per i livelli energetici della (13) esprimibile come:

$$\Delta E_{SO} = -E_n \frac{\alpha^2}{2nl(l+\frac{1}{2})(l+1)} \times \left\{ \begin{array}{ll} l & \text{se } j = l + \frac{1}{2} \\ -l - 1 & \text{se } j = l - \frac{1}{2} \end{array} \right\}, \quad (34)$$

dove α è una costante nota come *costante di struttura fine*, E_n è l' n -esimo livello energetico della (13) e dove si è introdotto il numero quantico j per descrivere il momento angolare totale dell'elettrone. Osservando la (34), si nota che ogni livello energetico della (13) viene quindi separato in due nuovi livelli, tuttavia, risulta importante sottolineare che questo non avviene per i livelli caratterizzati da $l = 0$ in quanto privi di momento angolare orbitale. Se si considera oltre al termine spin-orbita anche altre due correzioni molto importanti per gli atomi ad un solo elettrone, ossia un termine che rappresenta una correzione relativistica all'energia cinetica e un termine conosciuto come termine di Darwin, è possibile ridefinire i livelli energetici dell'atomo di idrogeno come:

$$E_{nj} = E_n \left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) \right]. \quad (35)$$

La (35) rappresenta quella che viene chiamata *struttura fine dei livelli energetici* che, come si osserva, non dipende più esclusivamente dal numero quantico principale n . Nel 1924, il fisico austriaco Wolfgang Ernst Pauli introdusse, analogamente al concetto di spin dell'elettrone, il concetto di spin nucleare. Questo significava che non solo vi era un momento angolare intrinseco quantizzato associato all'elettrone, ma anche uno associato al nucleo e che, ragionevolmente, richiedeva l'introduzione di un nuovo numero quantico I per la sua rappresentazione. Appare chiaro che la presenza di uno spin nucleare va a perturbare ulteriormente i livelli energetici dell'atomo. Le correzioni introdotte, essendo nettamente di minor entità rispetto a quelle di struttura fine, danno origine a quella che è conosciuta come *struttura iperfine dei livelli energetici*. Per il nucleo dell'atomo di idrogeno, I vale $\frac{1}{2}$ e questo implica, per via della composizione dei momenti angolari, che ogni livello di struttura fine origina due livelli di struttura iperfine. Per etichettare i livelli iperfini si ricorre ad un numero quantico F descrivente il momento angolare totale

dell'atomo. Risulta importante sottolineare che, come spiegato nelle sezioni precedenti di questo documento, le righe spettrali si originano proprio da transizioni tra livelli energetici differenti. Questo significa che tutte le correzioni introdotte in questa sezione vanno ad avere un impatto importante sulla formazione delle righe spettrali dividendole in più componenti rilevabili con una spettroscopia ad alta definizione.

3 L'IMPORTANZA IN ASTROFISICA

Come accennato all'inizio di questo documento, l'idrogeno, in astrofisica, riveste un ruolo di grandissima importanza. Esso è infatti l'elemento chimico che al termine della nucleosintesi primordiale rappresentava la frazione più grande di massa. Si stima che l'abbondanza primordiale dell'idrogeno fosse circa il 75% e questo permette di capire come questo elemento sia coinvolto in molti fenomeni astrofisici di grande interesse.

3.1 L'idrogeno molecolare

La molecola omonucleare H_2 , formata da due atomi di idrogeno neutro, risulta essere la molecola più comune dell'universo osservabile. H_2 è il principale componente delle nubi molecolari, ossia strutture del *cold neutral medium* associate alla formazione di nuove stelle. Il *cold neutral medium* è la fase del mezzo interstellare caratterizzata dalle più basse temperature e dalle più alte densità. Le nubi molecolari infatti hanno temperature comprese tra $10K$ e 10^3K e densità fino a 10^{10} molecole al centimetro cubo. Quando la massa di queste nubi supera una massa critica conosciuta come *massa di Jeans*, esprimibile nella forma

$$M_J \approx 3 \times 10^4 \sqrt{\frac{T^3}{n}} M_\odot, \quad \text{con} \quad [n] = m^{-3} \quad \text{e} \quad [T] = K, \quad (36)$$

dove n rappresenta la densità numerica e T la temperatura, la nube inizia a contrarsi e questo processo porta alla nascita di nuove stelle. Per quanto detto fino ad ora, non risulta affatto controintuitivo comprendere che, allo stesso modo della nube che le ha generate, anche le stelle che si accenderanno al termine di questo processo saranno composte per la maggior parte di idrogeno. Risulta, poi, interessante sottolineare che nelle nubi molecolari l'idrogeno è presente anche in forma di ione molecolare H_2^+ . Questo ione può formarsi in tali ambienti per via della ionizzazione di H_2 ad opera dei raggi cosmici. Lo studio della molecola H_2^+ dal punto di vista della meccanica quantistica risulta molto importante, analogamente all'atomo di idrogeno neutro, per via della sua semplicità. Lo ione molecolare H_2^+ è infatti la molecola dalla struttura più semplice possibile e questo permette, attraverso l'applicazione di metodi come la *Linear Combination of Atomic Orbitals* o LCAO, di studiare la formazione degli orbitali molecolari, conoscenza che, attraverso metodi come quello di Hund-Milliken, può poi essere estesa alla comprensione della struttura e del comportamento della molecola neutra H_2 .

3.2 L'idrogeno neutro

Anche la forma neutra dell'idrogeno atomico, indicata anche come HI, riveste in astrofisica un ruolo di primaria importanza. Infatti, la struttura iperfine del suo livello energetico di più bassa energia risulta essere di grande interesse. Il livello di struttura fine di minor energia dell'atomo di idrogeno è individuato dai numeri quantici $n = 1$, $l = 0$, $j = \frac{1}{2}$ e viene separato in due livelli iperfini caratterizzati da $F = 1$ e $F = 0$, dove quest'ultimo rappresenta il livello di minor energia tra i due. La transizione radiativa tra i livelli $F = 1$ e $F = 0$ comporta l'emissione di un fotone di lunghezza d'onda $\lambda \approx 21\text{cm}$. La riga spettrale corrispondente a questa transizione viene a tal proposito identificata come *riga a 21 cm dell'idrogeno neutro* e riveste un ruolo cardine nello studio della dinamica delle galassie a spirale. Grazie all'effetto Doppler infatti, può essere ricavata la velocità radiale del gas che si sta osservando attraverso la seguente formula:

$$v_R = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} c \quad (37)$$

dove: c è la velocità della luce, λ_o è la lunghezza d'onda osservata, λ_e è la lunghezza d'onda emessa e v_R è la velocità di recessione che può essere positiva o negativa a seconda che l'oggetto si stia allontanando o avvicinando all'osservatore. Studiando una galassia a spirale, la possibilità di misurare la velocità di recessione del gas che si osserva permette, nelle giuste condizioni, di ricavare i valori che assume la velocità tangenziale a differenti distanze dal centro galattico e quindi di delineare la curva di rotazione della galassia in esame. La riga a 21cm è particolarmente indicata per questo tipo di analisi perché la polvere del mezzo interstellare è completamente trasparente ad una radiazione caratterizzata da una così grande lunghezza d'onda. Studi condotti sulle galassie a spirale con questo tipo di approccio hanno mostrato che le curve di rotazione di questo tipo di oggetti sono essenzialmente connotate da una crescita in corrispondenza delle regioni centrali che si stabilizza e mantiene un valore pressoché costante per distanze dal centro galattico maggiori del raggio del *bulge*. Questo esito è sorprendente perché chiaramente ci si aspetterebbe una caduta kepleriana al di fuori del disco galattico che invece non si riscontra. Questo risultato decisamente controintuitivo ha portato la comunità scientifica a ipotizzare l'esistenza di un tipo materia non rilevabile in altro modo se non osservandone l'interazione gravitazionale con la materia ordinaria e che, modificando il profilo di densità delle galassie a spirale analizzate, impedisce di osservare la caduta kepleriana attesa. A causa delle sue proprietà, ci si riferisce a questo tipo di materia come *materia oscura*. Risulta inoltre importante sottolineare che lo studio della curva di rotazione delle galassie a spirale non ha solo permesso di teorizzare la presenza di materia oscura, ma anche di delineare per questi corpi celesti un nuovo modo di determinarne la distanza. Richard Brent Tully e James Richard Fisher furono in grado di formalizzare una legge empirica che legasse la luminosità intrinseca del disco galattico al valore della parte piatta della curva di rotazione ottenuto grazie all'HI. Questa relazione può essere espressa nella forma $L \propto v_{HI}^p$ dove l'esponente p dipende dalla banda di osservazione.

3.3 L'idrogeno ionizzato

Come anticipato nella sezione 3.1 descrivendo l'abbondanza della molecola H_2 nelle strutture che popolano il mezzo interstellare freddo, il componente principale delle stelle è, ancora una volta, l'idrogeno. Nel nucleo o *core* di una stella, ossia la regione più interna di questo tipo di corpi celesti, l'idrogeno è presente in forma ionizzata a causa delle alte temperature che caratterizzano questo ambiente. L'idrogeno ionizzato ricopre un ruolo fondamentale nella vita di una stella perché è il primo elemento ad essere coinvolto in una catena completa di reazioni nucleari dopo la formazione dell'astro. Infatti, nei *core* stellari, le condizioni di temperatura e pressione permettono l'innesco di reazioni termonucleari di fusione che consentono al corpo celeste di supplire alle perdite di energia per irraggiamento. Le reazioni di combustione dell'idrogeno si innescano quando il nucleo della stella raggiunge temperature dell'ordine di $10^7 K$ e proseguono fino a quando la quantità, nel *core*, di tale carburante non risulta così esigua da non permettere nuove reazioni di fusione. La principale catena per la combustione dell'idrogeno è conosciuta come *catena protone-protone*. Essa ha inizio, come lascia intuire il nome, con la reazione di due protoni, ossia due nuclei di prozio, e porta alla formazione di He^4 . La catena protone-protone si può concretizzare in tre differenti forme chiamate: ramo PPI, ramo PPII e ramo PPIII. Tutti i rami della protone-protone, rappresentati nelle figure 2a, 2b e 2c, portano alla formazione di nuclei di He^4 partendo da nuclei di H^1 , ma seguendo ciascuno una successione di reazioni differente. La catena protone-protone nel suo complesso impiega quattro nuclei di H^1 per formare un singolo nucleo di He^4 liberando energia nell'ambiente. Questa catena di reazioni non è l'unica che porta alla produzione di elio a partire da nuclei di idrogeno, tuttavia, è particolarmente importante perché il suo innesco segna l'entrata della stella nella sequenza principale.

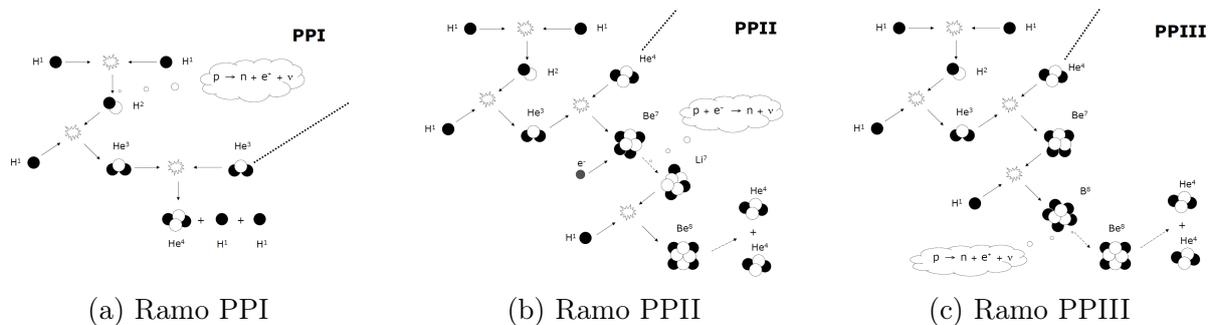


Figura 2: I tre rami della catena protone-protone. Fonte: F. R. Ferraro, 2020. Dispense per il corso di Astrofisica Stellare. Corso di Laurea in Astronomia. Università di Bologna.

Bibliografia

- [1] Giuseppe Bertin. *Dynamics of Galaxies*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2014.
- [2] B.H. Bransden and C.J. Joachain. *Physics of Atoms and Molecules*. Prentice Hall, 2nd edition, 2003.
- [3] Carla Fanti and Roberto Fanti. Una finestra sull’universo “invisibile”, 2012. Lezioni di radioastronomia di Carla & Roberto Fanti.
- [4] David J. Griffiths. *Introduzione alla meccanica quantistica*. Casa Editrice Ambrosiana, 2020.
- [5] Hannu Karttunen, Pekka Kröger, Heikki Oja, Markku Poutanen, and Karl Johan Donner. *Fundamental Astronomy*. Springer, 6th edition, 2017.
- [6] M. Padovani, D. Galli, and A. E. Glassgold. Cosmic-ray ionization of molecular clouds. *A&A*, 501(2):619–631, July 2009. doi: 10.1051/0004-6361/200911794.
- [7] Luca Pasquini, 2021. Dispense per il corso di Struttura della Materia. Corso di Laurea in Astronomia. Università di Bologna.
- [8] Francesco Ravanini. Meccanica quantistica per il corso di istituzioni di fisica teorica, Settembre 2019. Dispense per il corso di Istituzioni di Fisica Teorica. Corso di Laurea in Astronomia. Università di Bologna.