

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

Dalla Relatività Generale ai wormhole: i  
viaggi nello spazio-tempo

Relatore:  
Prof. Roberto Casadio

Presentata da:  
Giorgio Valeri

Anno Accademico 2021/2022

«A l'alta fantasia qui mancò possa;  
ma già volgeva il mio disio e 'l velle,  
sì come rota ch'igualmente è mossa,  
l'amor che move il sole e l'altre stelle.»

---

Dante Alighieri,  
*la Divina Commedia-Paradiso.*

# Abstract

Se al centro della nostra Galassia ci fosse un wormhole? Questa è una delle tante teorie che è nata dopo che la comunità scientifica è entrata in possesso della prima fotografia di un buco nero. Da tempo, nel mondo della scienza, era universalmente accettata l'idea che al centro della nostra Galassia ci fosse un buco nero supermassiccio; tuttavia ci si è resi conto che non è possibile distinguere un buco nero da un wormhole senza poter studiare da vicino cosa effettivamente accadrebbe qualora qualcosa o qualcuno entrasse al loro interno. In realtà sappiamo per certo che un buco nero ha una struttura fisica tale da attrarre a se qualsiasi oggetto (compresa la luce) che sia sufficientemente vicino (non tragga in inganno il termine appena utilizzato, parliamo comunque di distanze molto grandi che dipendono anche da tanti parametri quali la massa e le dimensioni del buco nero) quindi qualunque essere umano decidesse di avventurarsi al suo interno morirebbe a causa delle enormi forze gravitazionali a cui sarebbe sottoposto. Inoltre un qualsiasi oggetto che entrasse in un buco nero, superato l'orizzonte degli eventi, non sarebbe più in grado di riemergere (compresa la luce) e quindi qualsiasi tentativo di comunicare con l'esterno sarebbe vano. Stesso discorso però non vale per i wormhole che sono l'argomento centrale di questa tesi. I wormhole, anche chiamati ponti di Einstein-Rosen, sono cunicoli spazio-temporali che sembrano non essere più prerogativa degli autori fantascientifici bensì "oggetti" fisici e matematici concreti che potrebbero rivoluzionare il concetto di viaggio nello spazio e nel tempo.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>1 La teoria della Relatività Generale</b>	<b>6</b>
1.1 I principi base della Relatività Generale . . . . .	6
1.2 Le equazioni di Einstein . . . . .	8
1.3 La questione della costante cosmologica . . . . .	9
<b>2 La metrica di Schwarzschild</b>	<b>11</b>
2.1 La soluzione di Schwarzschild . . . . .	11
2.2 Il diagramma di Kruskal . . . . .	14
<b>3 I wormhole e il viaggio interstellare</b>	<b>19</b>
3.1 I buchi neri e i problemi per il viaggio interstellare . . . . .	19
3.2 I wormholes di Schwarzschild . . . . .	21
3.3 Wormhole attraversabili . . . . .	23
3.3.1 Proprietà di un wormhole attraversabile . . . . .	23
3.4 Struttura matematica di un wormhole attraversabile . . . . .	24
3.4.1 Forma della metrica . . . . .	24
3.4.2 Equazione di struttura del wormhole . . . . .	25
3.4.3 Geometria spaziale . . . . .	29
3.4.4 Assenza di orizzonte . . . . .	32
3.4.5 Forze gravitazionali mareali e tempo di attraversamento del wormhole . . . . .	32
3.4.6 Tensore energia impulso che genera la curvatura spazio-temporale	35
3.4.7 Stabilità del wormhole . . . . .	40
3.5 Soluzione specifica di un wormhole . . . . .	40
3.5.1 Soluzione con forze mareali nulle . . . . .	40
3.5.2 Soluzione con materia esotica confinata . . . . .	42
3.5.3 Soluzione con materia esotica confinata nelle vicinanze della gola .	47

<b>Conclusioni</b>	<b>51</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>53</b>

# Introduzione

Questa tesi ha come scopo quello di accompagnare il lettore in un percorso che risulti il più intuitivo possibile seguendo un ordine logico ben definito. Nel primo capitolo tratteremo i principi base della Relatività Generale per arrivare poi ad introdurre le equazioni di campo di Einstein che saranno il nostro punto di partenza per discutere dei wormhole. Nel secondo capitolo andremo a parlare di una delle più importanti soluzioni alle equazioni di campo, quella di Schwarzschild. Successivamente cercheremo di interpretare i suoi risultati facendo ricorso ad altri studi compiuti successivamente; qui noteremo che il concetto di wormhole inizia a prendere veramente forma. Questa analisi, che verrà affrontata abbastanza nel dettaglio, sarà il trampolino di lancio per il terzo e ultimo capitolo dove andremo a parlare nello specifico dei wormhole. Una volta introdotti questi magnifici e altrettanto misteriosi oggetti prenderemo in esame la loro natura in tutte le sue sfaccettature e ci accorgeremo che le problematiche legate ad essi non sono poche. Concluderemo con una riflessione su quanto sia veramente possibile che questi oggetti esistano nel nostro universo e quali implicazioni questo comporterebbe.

# Capitolo 1

## La teoria della Relatività Generale

Una volta formulata la teoria della relatività ristretta, che per comodità chiameremo da qui in avanti con l'acronimo RS (Relatività Speciale), rimase il compito di modificare e riformulare le leggi della fisica affinché fossero consistenti con la struttura dello spaziotempo data dalla nuova teoria. A differenza della teoria di Maxwell sull'elettromagnetismo, quella di Newton sulla gravità non era coerente con la RS in quanto prevedeva che i corpi si influenzassero istantaneamente <sup>1</sup>, concetto che va in netto contrasto con la RS la quale sancisce che la velocità della luce sia un limite massimo di velocità e che solo gli oggetti senza massa hanno il privilegio di poter raggiungere.

Uno degli approcci possibili, al fine di risolvere questo problema, poteva essere quello di modificare la teoria della gravitazione di Newton per adattarla alla struttura dello spaziotempo sancita dalla RS, tuttavia Einstein decise di non seguire questa strada ma piuttosto di cercare una nuova teoria dello spaziotempo e della gravitazione: la teoria della Relatività Generale (RG).

### 1.1 I principi base della Relatività Generale

Fondamentalmente due sono i postulati che stanno alla base della RG:

- Il *Principio di Equivalenza*: in presenza di un campo gravitazionale, considerato un determinato punto, è sempre possibile individuare, almeno localmente, un sistema di riferimento inerziale dove gli effetti della gravità sono nulli.

La Fisica risulta essere governata allora solo dalle restanti interazioni fondamentali (debole, forte ed elettromagnetica) e dunque è coerente con la RS. Questo implica sostanzialmente l'equivalenza tra forze inerziali e gravitazionali (e quindi anche tra massa inerziale e gravitazionale) e comporta che la gravità sia solo il risultato di una

---

<sup>1</sup>Nella concezione classica della gravitazione, ammettendo di poter rimuovere il sole dal nostro Sistema solare, immediatamente tutti i pianeti non risentirebbero più dell'attrazione gravitazionale.

trasformazione non inerziale la quale implica l'introduzione di una forza inerziale. La RS trattava solo di sistemi di riferimento inerziali, per questo la gravità non ne faceva parte.

- Il *Principio di Covarianza Generale* o *Principio di Relatività Generale*: un'equazione fisica vale in un generico campo gravitazionale se è valida in assenza di gravità, quindi vale nella RS, e se è covariante ovvero se è un'equazione tensoriale.

Un'equazione che soddisfa questi due requisiti risulta essere valida in ogni sistema di riferimento, inerziale e non.

Uno dei concetti più incredibili e rivoluzionari legati alla RG è sicuramente quello di spazio-tempo curvo. Per capire meglio di cosa si tratta si può portare all'attenzione il seguente esempio: si supponga di prendere una carica elettrica, essa genera un potenziale elettromagnetico che permea tutto lo spazio circostante. Se si considera una seconda carica, carica di prova, su di essa sarà esercitata una forza come conseguenza del potenziale e durante questo processo lo spazio-tempo di Minkowski, ovvero quello della RS, rimane piatto e invariato. Si supponga ora, invece, di prendere una massa che genera un campo gravitazionale e una seconda massa di prova: quello che accade a livello di forze esercitate può sembrare molto simile, se non del tutto analogo, ma la modalità con cui avviene il processo è completamente diversa. In questo caso lo spazio-tempo non è più piatto e la massa di prova non si curva a causa della forza esercitata bensì essa si muove liberamente su una superficie che risulta essere già curva. Pertanto, secondo questa interpretazione, il concetto di "campo gravitazionale" equivale a quello di "spazio-tempo curvo".

Il fatto sorprendente è che anche la luce si accoppia con i campi gravitazionali, quindi i fotoni, nonostante siano privi di massa, sono destinati e obbligati a seguire delle traiettorie curve. Uno dei postulati della RS sancisce che la velocità della luce, benché molto grande, sia una quantità finita ed è un limite massimo imposto dalla natura stessa del nostro Universo che deve essere rispettato da qualunque cosa, sia essa il moto dei corpi o la trasmissioni delle informazioni. Tutto ciò ha un significato molto profondo in quanto è strettamente correlato al *principio di causalità* ovvero al legame che c'è tra la causa di un evento e l'evento stesso (l'effetto)<sup>2</sup>. La RG eredita la struttura causale proveniente dalla RS ma è doveroso chiedersi, in uno spazio-tempo curvo, come appaiono i coni di luce. Essi erano stati "costruiti" a partire da uno spazio-tempo piatto, quello di Minkowski, dunque non possono ugualmente valere in uno spazio-tempo curvo infatti, essendo i fotoni soggetti a traiettorie curve, anche i coni di luce verranno piegati.

---

<sup>2</sup>È una regola della natura estremamente importante che, si crede, non possa essere violata in quanto, in caso contrario, permetterebbe di invertire l'effetto con la propria causa che è concettualmente assurdo. Avrà un ruolo cruciale quando si andrà a parlare di viaggi spazio-temporali.



## 1.2 Le equazioni di Einstein

Questa nuova teoria rivoluzionò il modo di vedere e di intendere lo spazio-tempo e tutti i fenomeni ad esso correlati, molti dei quali, ancora oggi, sono oggetto di studio.

Einstein fu in grado di racchiudere l'intera RG all'interno di un'unica ed elegante espressione, che prende il nome di *equazioni di campo*, la quale, nella sua forma originaria, si presentava nel seguente modo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

dove:

- $R_{\mu\nu}$  è il tensore di curvatura Ricci. Esso misura la curvatura di una varietà riemanniana<sup>3</sup>. È simmetrico e di tipo (0,2), proprio come il tensore metrico.
- $g_{\mu\nu}$  è un tensore metrico ovvero un campo tensoriale che caratterizza la geometria di una varietà. Tramite il tensore metrico è possibile definire le nozioni di distanza, di angolo e, inoltre, di lunghezza di una curva, di una geodetica o di una curvatura.
- $R$  è la curvatura scalare (o scalare di Ricci) ed è il più semplice invariante di curvatura di una varietà riemanniana. Ad ogni punto della varietà essa associa un numero reale determinato dalla geometria intrinseca della varietà intorno a quel punto. La curvatura scalare è definita a partire dal tensore di curvatura di Ricci, in particolare, è la sua traccia ovvero la somma degli elementi della diagonale principale.
- $G$  è la costante di gravitazione universale che compare anche nella legge della gravitazione di Newton
- $T_{\mu\nu}$  è il tensore energia-impulso e descrive il flusso di energia e quantità di moto associate a un campo.
- $c$  è la velocità della luce nel vuoto

Spesso il termine  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$  viene anche chiamato *tensore di Einstein* ed indicato con  $G_{\mu\nu}$ .

Definiamo inoltre i simboli di Christoffel  $\Gamma_{\beta,\gamma}^\alpha$  (coefficienti di connessioni affini) e le componenti  $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$  del tensore di curvatura di Riemann, rispettivamente, nel seguente modo

$$\Gamma_{\beta,\gamma}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(g_{\lambda\beta,\gamma} + g_{\lambda\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\lambda}) \quad (1.2)$$

---

<sup>3</sup>Una varietà riemanniana è una varietà differenziabile  $\mathcal{M}$  dotata di un tensore metrico  $g$  con cui definire un prodotto scalare definito positivo sullo spazio tangente di ogni punto di  $\mathcal{M}$ .

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\delta,\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{\alpha} + \Gamma_{\lambda\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\beta\delta}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\delta}^{\alpha} \Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda} \quad (1.3)$$

dove la virgola indica una derivata parziale (ad esempio  $g_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}$ ). Essi saranno fondamentali quando andremo a ricaveremo l'equazione di struttura di un wormhole attraversabile nella Sez.3.4.2.

### 1.3 La questione della costante cosmologica

Le equazioni di campo di Einstein furono in grado di descrivere il campo gravitazionale all'interno della sorgente stessa, dove  $T_{\mu\nu} = 0$ , e anche nelle sue vicinanze. Quando Einstein formulò la RG propose anche tre prove per verificarne la veridicità: la precessione del perielio di Mercurio, la deflessione dei raggi luminosi in un campo gravitazionale e il redshift gravitazionale. Egli inoltre cercò di applicare la sua teoria all'intero Universo in quanto era convinto che tutto l'Universo fosse e dovesse essere governato dalla RG. A quei tempi la Cosmologia era convinta che il nostro Universo si trovasse in una configurazione statica ma le equazioni di Einstein non prevedevano una soluzione di questo tipo dunque, al fine di rendere la nuova teoria coerente con il pensiero scientifico, modificò l'equazione di campo. Al primo membro dell'equazione venne aggiunto un termine che doveva avere dei requisiti ben specifici: doveva essere un tensore (0, 2), simmetrico, con  $G_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$  e in accordo con la legge di Newton nel limite newtoniano. L'unico modo per rispettare queste condizioni era quella di aggiungere un termine proporzionale alla metrica, il cosiddetto *termine cosmologico*, indicato con  $\Lambda g_{\mu\nu}$ , che è stato pensato per non avere effetti locali ma solo su scale cosmologiche (al fine di preservare appunto la validità del limite newtoniano). La nuova equazione di campo assunse la seguente forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.4)$$

Introdurre questo termine ad hoc aveva permesso di ricavare effettivamente delle soluzioni statiche ma questa nuova forma non era in accordo con l'idea che il campo gravitazionale fosse generato dalla materia in quanto se consideriamo le due versioni dell'equazione di campo nel vuoto:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \quad (1.5)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (1.6)$$

notiamo che l'Eq.(1.5) diventa triviale infatti se  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu,\nu}$ <sup>4</sup> otteniamo che il tensore di Riemann, il tensore di Ricci e lo scalare di Ricci sono tutti nulli. Nell'Eq.(1.6), invece, sempre supponendo che  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , si ottiene che  $-\Lambda_{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 0$ ; ovvero lo spazio tempo

---

<sup>4</sup> $\eta_{\mu\nu}$  è la metrica di Minkowski derivante dalla RS.

dovrebbe presentare curvature anche in assenza di sorgenti il che è un risultato chiaramente assurdo infatti solamente tempo dopo, con le scoperte di Hubble, la comunità scientifica si convinse della natura non statica dell'Universo e quindi l'idea di introdurre la costante cosmologica venne abbandonata perché non più necessaria.

Tuttavia, sempre grazie alle osservazioni di Hubble, si capì che la RG era comunque incompleta come teoria in quanto si fece una scoperta incredibile: l'Universo era effettivamente in espansione, come Einstein aveva predetto, ma questa espansione era accelerata mentre la RG sosteneva che questa espansione dovesse essere decelerata quindi anche in questa occasione la RG si mostrò incapace di spiegare le osservazioni sperimentali. Al fine di spiegare questo fenomeno si assunse l'ipotesi che ci fosse un qualche termine del tipo energia-impulso che non era stato preso in considerazione e quindi il problema non fosse il primo membro dell'equazione di campo, bensì il secondo e quindi si decise di reintrodurre la costante cosmologica ma questa volta interpretata come una sorta di tensore energia-impulso del vuoto: l'Energia Oscura. La nuova equazione di campo si presentava, dunque, come segue:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (1.7)$$

Possiamo dunque giungere alla conclusione che nelle equazioni di Einstein la materia determina la curvatura dello spazio-tempo e lo spazio-tempo curvo determina il moto della materia.

Una volta formulata la RG, con le conseguenti equazioni di campo, molti fisici e matematici del tempo incominciarono a cercare delle soluzioni che potessero spiegare i fenomeni dell'Universo. Questi studi, che si sono perpetuati fino ai giorni nostri<sup>5</sup>, hanno portato alla scoperta e alla teorizzazione di oggetti fisici di cui non si aveva nessuna evidenza sperimentale e che solo successivamente, con il progredire delle tecnologie, sono risultati essere più concreti di quanto si pensava possibile.

---

<sup>5</sup>Molte scoperte e molti premi Nobel per la fisica negli ultimi anni sono strettamente legate alla teoria della relatività generale: il premio Nobel 2020 Roger Penrose per la scoperta che la formazione dei buchi neri è una robusta previsione della RG, la prima immagine di un buco nero pubblicata nel 2019 che mostra una struttura luminosa ad anello e una regione centrale scura, i premi Nobel 2017 Rainer Weiss, Barry C. Barish e Kip S. Thorne per l'osservazione delle onde gravitazionali.

# Capitolo 2

## La metrica di Schwarzschild

Uno degli studi di maggior interesse fu sicuramente quello di Schwarzschild, il quale gettò le basi per lo studio dei buchi neri e che permise, ai suoi successori nel campo della fisica, di addentrarsi in argomenti tanto interessanti e affascinanti quanto complicati come, ad esempio, i wormhole e i viaggi nello spazio-tempo.

### 2.1 La soluzione di Schwarzschild

La soluzione di Schwarzschild rappresenta uno spazio tempo nel vuoto a simmetria sferica, al di fuori di un corpo massivo a simmetria sferica. La metrica di Schwarzschild può essere espressa nella seguente forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad r > 2m \quad (2.1)$$

Si può notare che questo spazio-tempo è statico ed a simmetria sferica. La soluzione è asintoticamente piatta, per grandi valori di  $r$ , dato che la metrica ha la forma  $g_{ab} = \eta_{ab} + O(1/r)$ . Confrontandola con la teoria di Newton, essa mostra che  $m$  dovrebbe essere considerata come la massa gravitazionale del corpo che genera il campo. Va sottolineata una questione molto importante ovvero che questa soluzione è unica: una qualsiasi altra soluzione delle equazioni di campo nel vuoto che abbia simmetria sferica deve essere necessariamente, almeno localmente, isometrica a quella di Schwarzschild (può tuttavia presentarsi in forme completamente diverse se viene utilizzato un sistema di coordinate differente). Normalmente, proprio per come è stato impostato il problema, si utilizza questa metrica per un qualche valore  $r_0 > 2m$  in quanto la metrica all'interno del corpo ( $r < r_0$ ) ha una forma diversa che dipende dal tensore energia-impulso relativo alla materia che compone il corpo stesso. Risulta, tuttavia, interessante studiare cosa

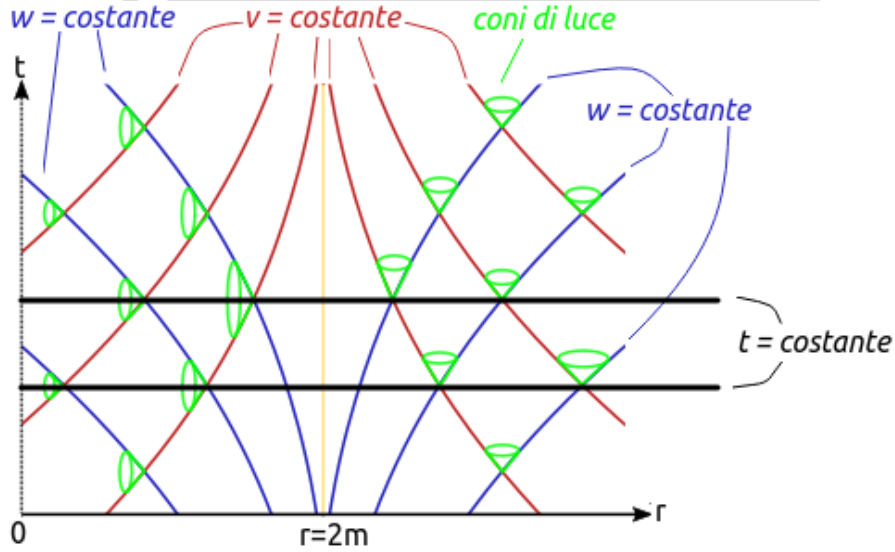


Figura 2.1: Metrica di Schwarzschild in coordinate di Schwarzschild  $(t, r)$ ; possiamo notare l'apparente singolarità per  $r = 2m$ .

succede quando la metrica è considerata come soluzione dello spazio vuoto per tutti i valori di  $r$ .

La metrica di Schwarzschild [Eq.(2.1)] è singolare quando  $r = 0$  e quando  $r = 2m$  (a queste bisogna anche aggiungere le singolarità dovute alle coordinate sferiche quindi  $\theta = 0, \pi$ ) quindi prima di tutto bisogna eliminare questi due valori dalla varietà definita dalle coordinate  $(t, r, \theta, \phi)$ . Eliminando la superficie  $r = 2m$  la varietà viene divisa in due componenti disconnesse: una per  $0 < r < 2m$  e una per  $2m < r < \infty$ . Dato che noi abbiamo supposto che la varietà dello spazio-tempo deve essere connessa considereremo una sola di queste due componenti e, chiaramente, prenderemo quella per  $r > 2m$  con la quale rappresentiamo il campo esterno. Ora bisogna chiedersi se questa varietà  $\mathcal{M}$  con la metrica di Schwarzschild  $g$  sia estendibile ovvero se esistono: una varietà più grande  $\mathcal{M}'$  nella quale  $\mathcal{M}$  possa essere inclusa e un'opportuna metrica differenziabile di Lorentz  $g'$  su  $\mathcal{M}'$  che coincida con  $g$  sull'immagine di  $\mathcal{M}$ . Possiamo dunque immaginare che  $\mathcal{M}$  possa essere estesa dove  $r \rightarrow 2m$ .

Calcoli mostrano che, nonostante la metrica sia singolare per  $r = 2m$  nelle coordinate di Schwarzschild, nessun polinomio scalare del tensore di curvatura o della metrica diverge per  $r \rightarrow 2m$ ; questo suggerisce che in realtà non sia una vera e propria singolarità fisica, ma sia dovuta ad una non ottimale scelta delle coordinate. Definiamo allora

$$r^* \equiv \int \frac{dr}{1 - 2m/r} = r + 2m \log(r - 2m) \quad (2.2)$$

e successivamente definiamo  $v \equiv t + r^*$  (coordinata nulla avanzata) e  $w \equiv t - r^*$

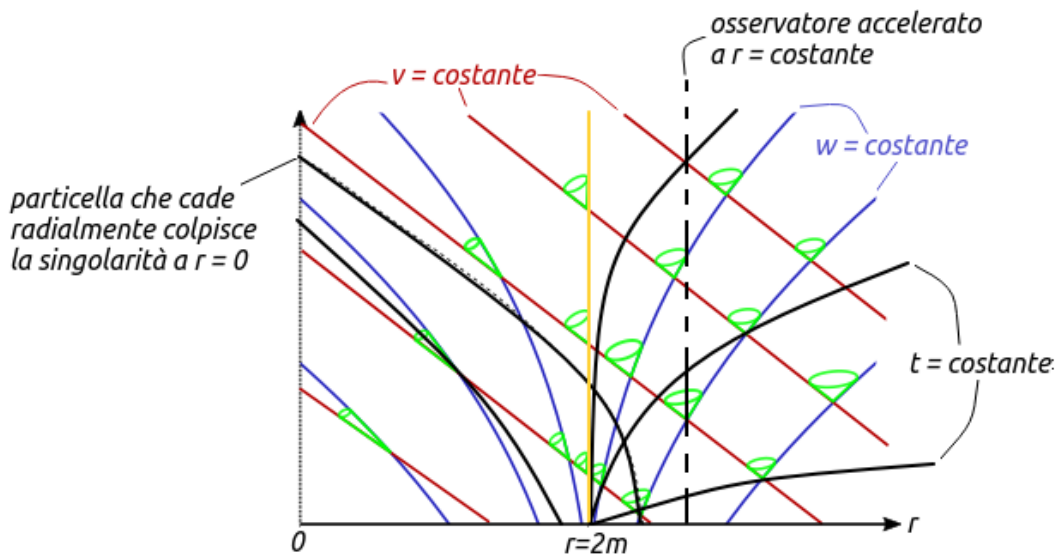


Figura 2.2: Metrica di Schwarzschild in coordinate di Eddington-Finkelstein  $(v, r)$ ; la superficie  $r = 2m$  risulta essere una superficie nulla

(coordinata nulla ritardata).

Utilizzando le coordinate  $(v, r, \theta, \phi)$  la metrica assume la forma di Eddington-Finkelstein, che indicheremo con  $g'$ , come segue

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (2.3)$$

La varietà  $\mathcal{M}$  rappresenta la regione  $2m < r < \infty$ , ma la metrica  $g'$  è non singolare e analitica sulla varietà più grande  $\mathcal{M}'$  dove  $0 < r < \infty$ ; inoltre la regione  $(\mathcal{M}', g')$ , per la quale  $0 < r < 2m$ , è isometrica alla metrica di Schwarzschild per la quale  $0 < r < 2m$ . Dunque usando coordinate diverse abbiamo esteso la metrica di Schwarzschild e questa risulta non essere più singolare in  $r = 2m$ .

Le Fig.2.1 e 2.2, che rappresentano una sezione dello spazio-tempo ( $\theta, \phi$  costanti), ci mostrano come cambia la rappresentazione della metrica di Schwarzschild con il cambio di coordinate, grazie al quale, siamo in grado di eliminare l'apparente singolarità in  $r = 2m$ . Questa rappresentazione ci mostra una caratteristica alquanto particolare: la metrica di Schwarzschild risulta essere asimmetrica rispetto al tempo e l'asimmetria più ovvia è che la superficie  $r = 2m$  funge da membrana unidirezionale che lascia attraversare le curve di tipo luce e di tipo tempo, dirette verso il futuro, solo dall'esterno ( $r > 2m$ ) verso l'interno ( $r < 2m$ ). Se da un lato abbiamo che nessuna curva di tipo luce o di tipo tempo, diretta verso il passato e con  $r = 2m$ , può raggiungere  $r=0$ , dall'altro abbiamo che qualsiasi curva di tipo luce o di tipo tempo, diretta verso il futuro e con  $r = 2m$ , è in grado, almeno teoricamente, di poterlo fare. Possiamo inoltre concludere che  $r = 0$

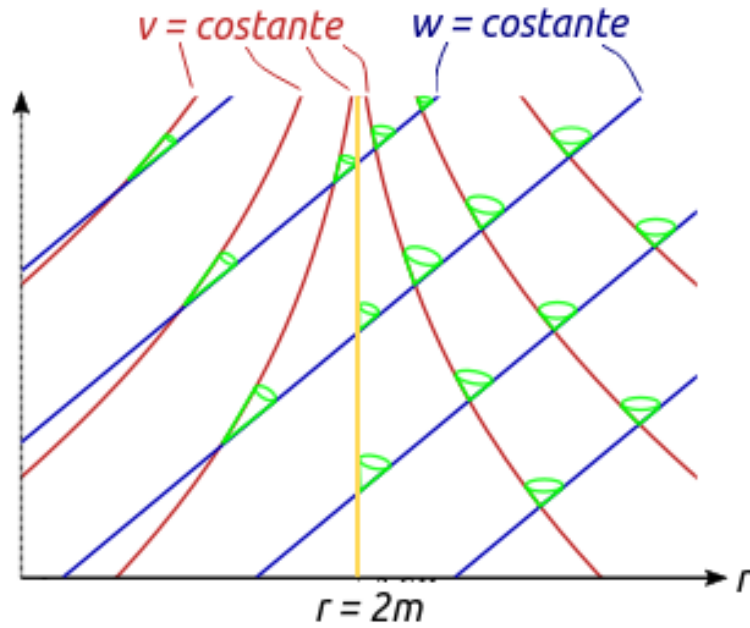


Figura 2.3: Metrica di Schwarzschild in coordinate di Eddington-Finkelstein  $(w, r)$

sia una vera singolarità.

Se invece utilizziamo la coordinata  $w$ , la metrica ottiene la forma di seguito riportata

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dw^2 - 2dwdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.4)$$

e, analogamente al caso precedente, abbiamo che: la metrica è analitica sulla varietà  $\mathcal{M}''$  descritta dalle coordinate  $(w, r, \theta, \phi)$  nella regione  $0 < r < \infty$ , la varietà  $\mathcal{M}$  rappresenta la regione  $2m < r < \infty$ , la nuova regione  $0 < r < 2m$  è isometrica alla regione  $0 < r < 2m$  della metrica di Schwarzschild e, infine, anche in questo caso la superficie  $r = 2m$  funge da membrana unidirezionale come si può notare dalla Fig.2.3. È necessario però fare una puntualizzazione: in quest'ultimo caso l'isometria inverte la direzione del tempo e anche la superficie  $r = 2m$  opera nell'altra direzione facendo dunque passare, dall'esterno ( $r > 2m$ ) all'interno ( $r < 2m$ ), solamente le curve di tipo luce e di tipo tempo orientate verso il passato.

## 2.2 Il diagramma di Kruskal

Risulta tuttavia possibile compiere entrambe le estensioni simultaneamente quindi esiste una varietà più grande  $\mathcal{M}^*$  con una metrica  $g^*$  all'interno della quale entrambe le estensioni possono essere comprese e questo è dovuto al fatto che le due estensioni coincidono sulla regione  $r > 2m$  la quale è isometrica a  $(\mathcal{M}, g)$ . Una costruzione di

questa varietà è stata fornita da Kruskal nel 1960. Considerando  $(\mathcal{M}, g)$  nelle coordinate  $(v, w, \theta, \phi)$  otteniamo la seguente metrica

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dvdw + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (2.5)$$

dove  $r$  si determina dalla seguente espressione:

$$\frac{1}{2}(v - w) = r + 2m \log(r - 2m)$$

L' Eq.(2.5) rappresenta uno spazio bidimensionale ( $\theta$  e  $\phi$  sono costanti) in coordinate piatte conformi nulle. La trasformazione di coordinate più generale che lascia questo spazio bidimensionale espresso nelle coordinate conformi nulle è  $v' = v'(v)$ ,  $w' = w'(w)$  dove  $v'$  e  $w'$  sono due arbitrarie funzioni  $C^1$ ; la metrica risultante è la seguente

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\frac{dv}{dv'}\frac{dw}{dw'}dv'dw' + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (2.6)$$

Essa può essere ridotta ad una forma corrispondente a quella per lo spazio-tempo di Minkowski: definendo  $x' = \frac{1}{2}(v' - w')$  e  $t' = \frac{1}{2}(v' + w')$  otteniamo la metrica nella sua forma finale

$$ds^2 = F^2(t', x')(-dt'^2 + dx'^2) + r^2(t', x')(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (2.7)$$

Possiamo dunque dedurre che la scelta delle funzioni  $v'$  e  $w'$  ne determina in maniera precisa la forma.

Kruskal scelse di utilizzare  $v' = \exp(v/4m)$  e  $w' = -\exp(-w/4m)$ ; possiamo dunque ricavare le espressioni di  $r$  e  $F$

$$(t')^2 - (x')^2 = -(r - 2m)e^{\frac{r}{2m}} \quad (2.8)$$

$$F^2 = e^{-\frac{r}{2m}} 16 \frac{m^2}{r} \quad (2.9)$$

Analizzando attentamente il diagramma di Kruskal riportato in Fig.2.4 possiamo fare diverse considerazioni:

- Sulla varietà  $\mathcal{M}^*$  definita dalle coordinate  $(t', x', \theta, \phi)$ , per  $t'^2 - x'^2 < 2m$ , le funzioni  $r$  e  $F$  sono positive e analitiche
- La regione definita da  $x' > |t'|$  (regione I), definendo la metrica  $g^*$ , è isometrica a  $(\mathcal{M}, g)$  ovvero alla regione della soluzione di Schwarzschild per la quale  $r > 2m$



- La regioni definite da  $x' > -t'$  (regioni I e II) sono isometriche all'estensione avanzata di Finkelstein
- La regioni definita da  $x' > t'$  (regioni I e II') sono isometriche all'estensione ritardata di Finkelstein
- Viene anche indicata una regione I', definita da  $x' < -|t'|$ , che risulta essere ancora isometrica con la parte esterna della soluzione di Schwarzschild. Questa può essere vista come un altro Universo asintoticamente piatto che si trova dall'altra parte della *gola* di Schwarzschild.<sup>1</sup>
- Le regioni I' e II sono isometriche all'estensione avanzata di Finkelstein della regione I' e, similmente, le regioni I' e II' sono isometriche all'estensione ritardata di Finkelstein della regione I'
- Non esistono curve di tipo luce o di tipo tempo che siano in grado di andare dalla regione I alla regione I'
- Tutte le curve di tipo luce o di tipo tempo, dirette verso il futuro, che attraversano la parte della superficie  $r = 2m$  (che in questo caso è rappresentata da  $t' = |x'|$ ) toccano la singolarità a  $t' = (2m + x'^2)^{1/2}$  dove  $r = 0$ . Analogamente tutte le curve di tipo luce o di tipo tempo, dirette verso il passato, che attraversano la parte della superficie  $t' = |x'|$  toccano un'altra singolarità a  $t' = -(2m + x'^2)^{1/2}$  dove  $r = 0$ .

L'estensione di Kruskal ( $\mathcal{M}^*, g^*$ ) risulta essere l'unica estensione analitica inestendibile, almeno localmente, della soluzione di Schwarzschild.

Possiamo ora costruire il diagramma di Penrose, riportato in Fig.2.5, dell'estensione di Kruskal definendo una nuova coordinata avanzata e una nuova coordinata ritardata:

$$v'' = \arctan(v'(2m)^{-\frac{1}{2}}) \quad w'' = \arctan(w'(2m)^{-\frac{1}{2}}) \quad (2.10)$$

Ora abbiamo futuro, passato e infiniti nulli per ognuna delle regioni asintoticamente piatte (I, I'). Diversamente dallo spazio di Minkowsky, la metrica conforme è continua ma non differenziabile nei punti  $i^0$ .

Se consideriamo il cono di luce futuro di un qualsiasi punto esterno a  $r = 2m$ , la geodetica radiale uscente raggiunge l'infinito, ma quella entrante raggiunge la singolarità futura; se invece il punto si trova all'interno di  $r = 2m$ , entrambe le geodetiche colpiscono la singolarità e l'intero futuro del punto viene annullato dalla singolarità. La singolarità

---

<sup>1</sup>La gola di Schwarzschild è uno degli elementi fondamentali che costituisce un wormhole; in particolare collega due regioni asintoticamente piatte dello stesso Universo o di due Universi diversi. Vedremo in seguito, più nello specifico, che proprietà ha e quali parametri fisici deve rispettare.

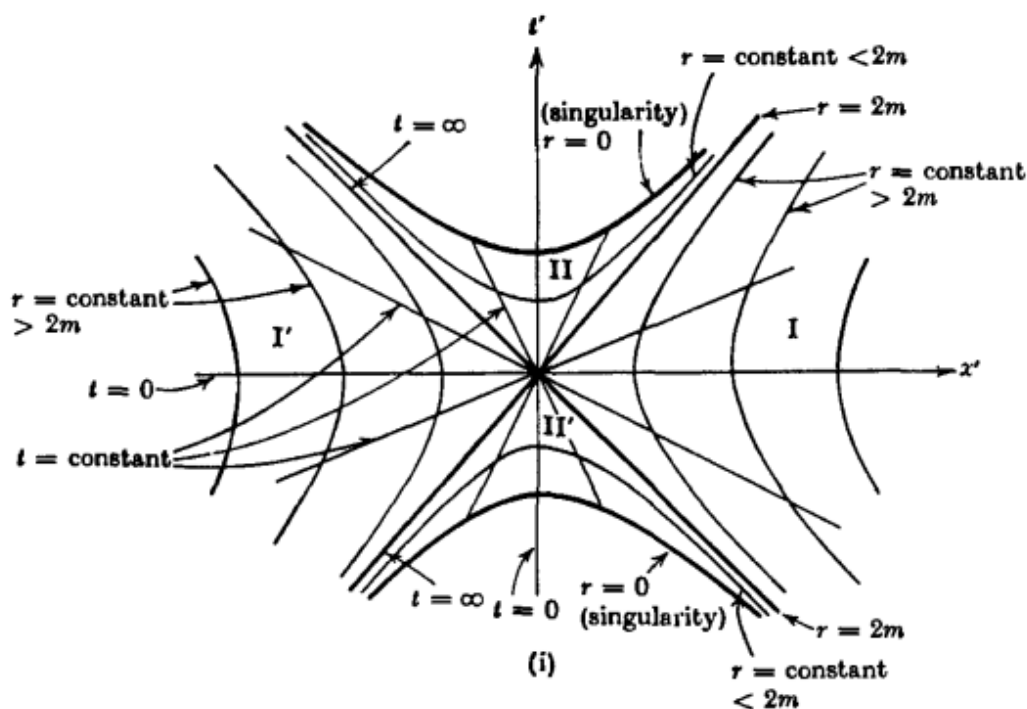


Figura 2.4: S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, 1973.

Diagramma di Kruskal; esso mostra le regioni I e I', asintoticamente piatte, e le regioni II e II' per le quali  $r < 2m$ . Le coordinate  $\theta$  e  $\phi$  sono soppresse e le linee di tipo luce sono inclinate di  $45^\circ$ .

può essere dunque evitata da qualunque particella esterna a  $r = 2m$ , ma qualora una particella cadesse all'interno di  $r = 2m$  (nella regione II) non potrà eluderla. Questo fatto risulta essere strettamente correlato alla seguente proprietà: ogni punto all'interno della regione II rappresenta una sfera bidimensionale, dunque una superficie chiusa, intrappolata nella regione stessa.

Analizzando la Fig.2.5, consideriamo:

- una sfera bidimensionale  $p$
- due sfere bidimensionali  $q$  e  $s$ . Esse sono fotoni emessi radialmente da  $p$ , in un certo istante di tempo, dall'interno verso l'esterno

Se tutte e tre giacciono nella regione  $r > 2m$  (I') avremo che l'area di  $q$  sarà maggiore dell'area di  $p$ , mentre quella di  $s$  sarà minore. Nel caso in cui invece tutte e tre giacciono nella regione  $r < 2m$  (II), sia l'area di  $q$  che quella di  $s$  saranno minori di quella di  $p$  in quanto nella regione II la variabile  $r$  decresce muovendosi dal basso verso l'alto. In questo caso diremo che  $p$  è una superficie chiusa intrappolata. Per quanto riguarda la regione II' avremo che ogni punto al suo interno rappresenta una superficie chiusa intrappolata ma

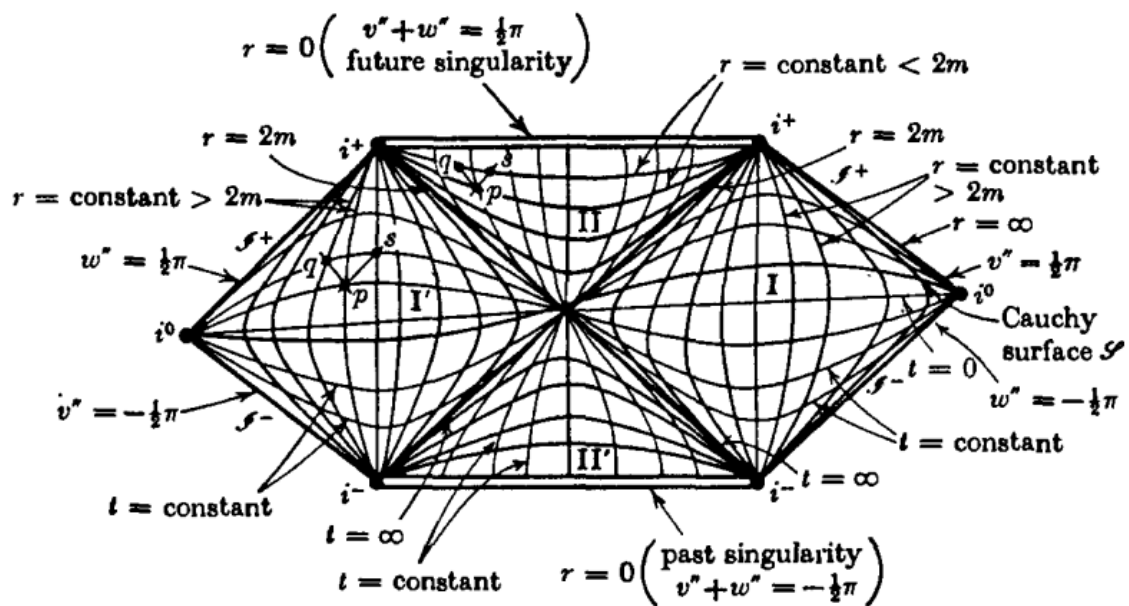


Figura 2.5: S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, 1973.

Diagramma di Penrose; esso mostra l'infinito conforme e le due singolarità. Anche in questo caso le coordinate  $\theta$  e  $\phi$  sono soppresse e le linee di tipo luce sono inclinate di  $45^\circ$ .

a tempo inverso e dunque tutte le particelle in questa regione devono necessariamente provenire dalla singolarità nel passato.

# Capitolo 3

## I wormhole e il viaggio interstellare

Nel capitolo precedente abbiamo analizzato nel dettaglio la soluzione di Schwarzschild delle equazioni di campo di Einstein, la quale ci ha portato, dopo una serie di cambi di coordinate, a definire il diagramma di Penrose. Questa è la base su cui andremo a sviluppare l'argomento principale di questa sezione: i wormhole e il loro impiego nel viaggio interstellare. Andremo dunque a definire che caratteristiche deve avere un wormhole affinché possa essere utilizzato per il viaggio nello spazio-tempo e termineremo con alcune riflessioni sulla concreta possibilità che essi esistano e, nel caso, dove potrebbero effettivamente trovarsi.

### 3.1 I buchi neri e i problemi per il viaggio interstellare

L'orizzonte degli eventi di un buco nero è la superficie che separa la regione interna confinata, la quale non può in alcun modo comunicare con l'esterno, dall'Universo esterno dove noi viviamo. Studiando le caratteristiche fisiche di un buco nero possiamo trovare molteplici motivazioni che sostengono l'impossibilità di utilizzare questi oggetti per il viaggio interstellare:

- Sull'orizzonte di un buco nero di massa  $M$  vi sono delle forze gravitazionali mareali (dovute alla inhomogeneità della gravità) che producono enormi accelerazioni relative tra la testa e i piedi di un avventuriero. A meno che il buco nero in questione non sia più massivo di  $10^4$  soli e che il suo orizzonte non sia più largo di  $10^5 km$ , l'avventuriero morirebbe ancor prima di raggiungere l'orizzonte.
- L'orizzonte risulta esser dunque una membrana unidirezionale; gli oggetti possono cadere al suo interno ma niente può emergere dunque il viaggio in due direzioni è vietato.

- Se il viaggiatore, una volta entrato in un buco nero, dovesse emergere dall'altra parte allora chiaramente l'oggetto da cui il nostro avventuriero emergerebbe non potrebbe in alcun modo essere un altro buco nero per i motivi di cui sopra. Dovrebbe dunque esserci necessariamente un oggetto molto particolare come ad esempio un buco bianco. Questo presunto buco bianco dovrebbe allora possedere una sorta di "orizzonte degli eventi passato" o "antiorizzonte" che funge, come quello del buco nero, da membrana unidirezionale ma nel verso opposto ovvero da esso gli oggetti possono solo emergere ma non entrare. Oggetti ottenuti dalle equazioni di campo di Einstein, che rispettano queste caratteristiche, risultano essere molto instabili per piccole perturbazioni. Supponendo che in un qualche modo si formi un buco bianco e preso un pacchetto d'onda di luce con energia arbitrariamente bassa, essa cadendo verso il buco bianco diventerebbe sempre più bluishiftata e sempre più energetica tanto più cade verso il buco bianco. Questo processo porterebbe a convertire l'antiorizzonte in un orizzonte normale e dunque il nostro avventuriero non sarebbe più in grado di emergere.
- Si potrebbe dunque pensare di provare ad attraversare un buco nero di Kerr. La metrica di Kerr descrive buchi neri rotanti che possiedono al loro interno percorsi verso altre regioni asintoticamente piatte dello spazio-tempo ("tunnel attraverso l'iperspazio" verso altri Universi o verso altre regioni dello stesso Universo) ma questi tunnel quasi certamente in natura non si presentano per i seguenti motivi:
  1. Una volta che un buco rotante neonato si stabilisce in uno stato indipendente dal tempo, esso deve avere la forma Kerr, ma questa si applica solo alla regione dello spaziotempo all'esterno dell'orizzonte e sull'orizzonte stesso, non all'interno. Quindi non c'è alcun motivo per aspettarsi che un collasso stellare che formi un buco nero di Kerr formi anche un interno di Kerr con un tunnel verso altre regioni dello spazio-tempo.
  2. Anche se si dovessero formare tunnel di Kerr, non potrebbero vivere a lungo: essi possiedono orizzonti noti per essere altamente instabili per piccole perturbazioni. Supponendo un pacchetto d'onda di luce che cade in un buco nero di Kerr, con il tunnel al suo interno, essa diventerà sempre più bluishiftata e sempre con più energia man mano che si avvicina all'orizzonte e questa energia presumibilmente creerebbe campi gravitazionali mareali a crescita esponenziale che sigillerebbero il tunnel e lo convertirebbero in una singolarità.<sup>1</sup> Quindi è quasi certo che l'interno dei buchi neri in realtà non possiede tunnel verso al-

---

<sup>1</sup>Non possiamo essere certi che questo risultato sia veritiero perché questa instabilità, a differenza di quella degli antiorizzonti dei buchi bianchi, è stata analizzata solo al primo ordine nella teoria perturbativa, tuttavia tutti gli studi condotti e tutte le intuizioni fisiche portano a suddetta conclusione.

tre regioni dello spaziotempo ma, piuttosto, singolarità di campi gravitazionali mareali quasi infinitamente forti.

3. Se i tunnel di Kerr dovessero formarsi in qualche modo e fossero in qualche modo stabilizzati per impedire ai campi in caduta e alle particelle di sigillarli, essi possederebbero singolarità a forma di anello. Se la fisica fosse totalmente classica, se il buco nero fosse sufficientemente massiccio e se avesse una velocità di rotazione sufficientemente alta allora un avventuriero sarebbe in grado di passare indenne attraverso il centro di una tale singolarità. Tuttavia la teoria dei campi quantizzati prevede che queste singolarità debbano rilasciare un intenso flusso di particelle ad alta energia nel tunnel che quasi certamente irradierebbe e ucciderebbe qualsiasi avventuriero che tenti di attraversarlo e altrettanto sicuramente sigillerebbe il tunnel.
4. Se qualora, in qualche modo, un avventuriero dovesse passare indenne attraverso un tunnel di Kerr ed emergere in qualche regione lontana del nostro Universo, egli potrebbe emergere nell'istante di tempo che più desidera quindi tardi nell'evoluzione dell'Universo o, cosa più interessante, abbastanza presto per tornare sulla Terra e uccidere la sua stessa madre prima che lo generi e questo comporterebbe la violazione del principio di causalità.

Queste obiezioni fanno sembrare estremamente improbabile che i buchi neri potranno mai essere utilizzati, da persone o da altri esseri intelligenti, per i viaggi interstellari.

## 3.2 I wormholes di Schwarzschild

I wormhole sembrano fornire un valido metodo alternativo per un rapido viaggio interstellare. La Fig.3.1 mostra, per mezzo di un diagramma di embedding, due tipologie di wormhole; entrambe sono descritte dalla stessa soluzione delle equazioni di campo di Einstein ma differiscono nelle topologie.<sup>2</sup>

La cosa interessante è che i wormhole hanno incominciato ad essere oggetto di studio della Relatività ben prima dei buchi neri infatti, entro un anno dalla formulazione finale delle sue equazioni di campo da parte di Einstein, il fisico viennese Ludwig Flamm riconobbe che la soluzione di Schwarzschild rappresentava un wormhole. Possibili ruoli del wormhole di Schwarzschild e di altri wormhole sono stati poi ipotizzati nella fisica negli anni '20 da Herman Weyl, negli anni '30 da Einstein e Nathan Rosen e negli anni '50 da John Wheeler. Tuttavia tutte le speranze che i wormhole di Schwarzschild possano esistere nell'Universo reale e possano essere usati per rapidi viaggi interstellari vengono a mancare a causa di una serie di considerazioni:

---

<sup>2</sup>Le equazioni di campo di Einstein non vincolano la topologia di una soluzione.

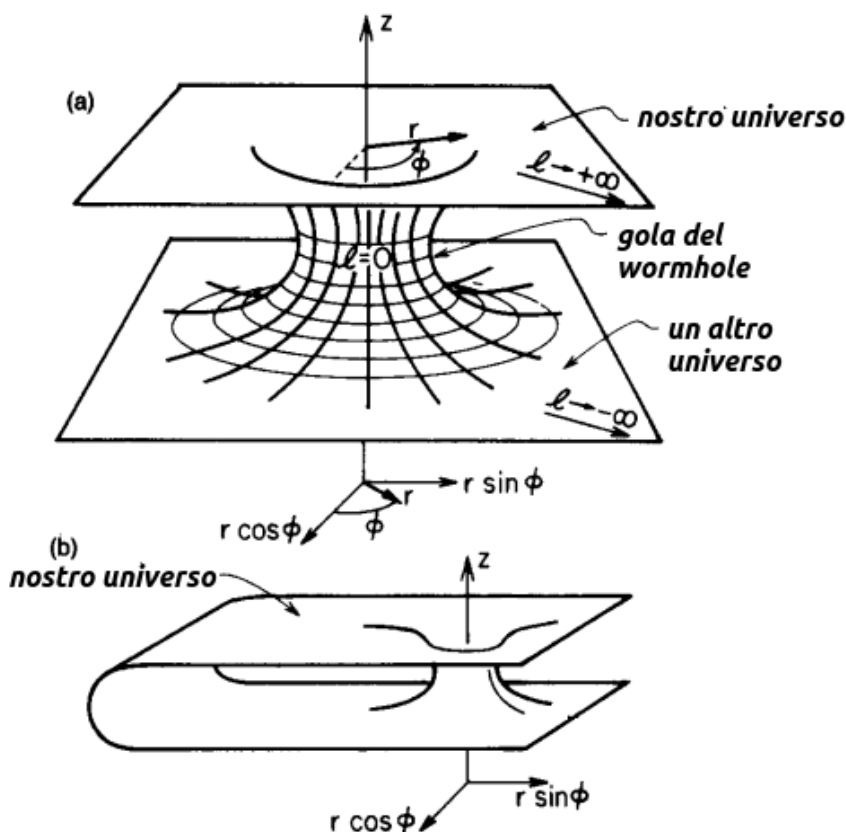


Figura 3.1: M. S. Morris and K. S. Thorne, Am. J. Phys. 56, 395 (1988)

Diagramma di embedding di due wormholes: il primo collega due diversi universi mentre il secondo collega due regioni distanti dello stesso universo. Ciascun diagramma rappresenta la geometria di una fetta equatoriale ( $\theta = \pi/2$ ) dello spazio in un momento specifico ( $t$  costante).

- Le forze gravitazionali mareali nella gola sono della stessa intensità di quelle di un orizzonte degli eventi di un buco nero di Schwarzschild.
- Un wormhole di Schwarzschild non è statico ma dinamico. Col passare del tempo la gola si espande da un minimo di circonferenza nullo (due universi disconnessi) ad una circonferenza massima per poi ricontrarsi nuovamente. Questo processo è così rapido che anche muovendosi a velocità luce non si potrebbe passare attraverso il wormhole senza subire gli effetti della contrazione e della gravità.
- Un wormhole di Schwarzschild possiede un orizzonte degli eventi passato (o "anti-orizzonte") che, come quello di un buco bianco, è instabile per piccole perturbazioni. Questa instabilità accelera ulteriormente la contrazione della gola rendendone ancora più complicato l'attraversamento.

### 3.3 Wormhole attraversabili

Si scopre che ci sono soluzioni molto semplici ed esatte delle equazioni di campo di Einstein che descrivono wormhole che non hanno nessuno dei problemi di cui sopra. Se, in qualche modo, una civiltà avanzata potesse costruire tali wormhole, essi potrebbero essere usati come sistema di trasporto galattico o intergalattico e potrebbero anche essere usati per viaggiare nel passato. Come vedremo in seguito, oggi non è chiaro se le leggi della fisica proibiscano o consentano effettivamente la costruzione di tali "varchi attraversabili", ma nulla di ciò che conosciamo li fa sembrare impossibili quanto lo sono invece il buco nero o il wormhole di Schwarzschild.

#### 3.3.1 Proprietà di un wormhole attraversabile

Abbiamo visto nella sezione precedente una serie di obiezioni ai sistemi di trasporto interstellari basati su buchi neri e wormhole di Schwarzschild. Queste ci permette di elencare tutta una serie di proprietà che crediamo siano necessarie affinché un wormhole sia effettivamente attraversabile:

1. La metrica dovrebbe essere a simmetria sferica e statica (indipendente dal tempo). Questo requisito viene imposto solo per semplificare i calcoli, ma è doveroso tenere a mente che il wormhole potrebbe essere instabile per perturbazioni sferiche o non sferiche.
2. La soluzione deve obbedire ovunque alle equazioni di campo di Einstein. Stiamo dunque assumendo la correttezza della teoria della Relatività Generale.
3. La soluzione deve comprendere una gola che connette due regioni asintoticamente piatte dello spazio-tempo dunque costruendo un diagramma di embedding equatoriale dovremmo ottenere una forma qualitativamente molto simile alla Fig.3.1.
4. Bisogna che sia garantito il viaggio in entrambe le direzioni e dunque è strettamente necessario che non ci siano orizzonti poiché la loro presenza lo impedirebbe.
5. Le forze gravitazionali mareali, alle quali un potenziale viaggiatore sarebbe sottoposto, devono essere sopportabili e quindi tendenzialmente piccole.
6. Un viaggiatore deve poter attraversare il wormhole in un tempo proprio finito e ragionevolmente piccolo; altrettanto piccolo deve essere il tempo misurato da osservatori che rimangono indietro o che l'attendono al di fuori dal wormhole.



7. La materia e i campi che generano la curvatura spazio-temporale del wormhole devono avere un tensore energia-impulso fisicamente ragionevole. Tuttavia scopriremo che questo tensore è fortemente vincolato dalle sei proprietà precedenti e quindi, dovendole rispettare, si ottiene una forma del tensore che è tutt'altro che fisicamente ragionevole. Andremo dunque a discutere sulla sua concreta esistenza e cercheremo di ridurre al minimo la violazione della ragionevolezza fisica.
8. La soluzione dovrebbe essere perturbativamente stabile (soprattutto durante il passaggio di un'astronave che intende compiere questo viaggio). Rispettare questo requisito potrebbe implicare un'analisi dipendente dal tempo e non sferica.
9. Dovrebbe essere possibile assemblare il wormhole. L'assemblaggio, ad esempio, dovrebbe richiedere sia molto meno della massa dell'Universo sia molto meno dell'età dell'Universo. Sebbene non si conosca abbastanza per consentire un'analisi quantitativa, le attuali conoscenze sulla gravità quantistica suggeriscono che l'assemblaggio potrebbe essere possibile.

Le proprietà dalla 1 alla 4 fanno riferimento a caratteristiche del wormhole affinché possa esistere e possa essere utilizzato per il viaggio interstellare e quindi le raggrupperemo sotto il nome di "*criteri di base del wormhole*". Le proprietà 5 e 6 invece riguardano il comfort fisiologico di un eventuale essere umano che decide di avventurarsi all'interno del wormhole quindi le raggrupperemo sotto il nome di "*criteri di utilizzabilità*". Attraverso la proprietà 7, infine, regoleremo i parametri affinché la materia che compone il wormhole sia il più possibile compatibile con le varie forme della materia ad oggi consentite dalle leggi della fisica. Sostanzialmente quello che andremo a fare è costruire una soluzione delle equazioni di Einstein attraverso i criteri di base del wormhole e, successivamente, regolare i parametri del wormhole cercando un equilibrio tra i criteri di utilizzabilità e la proprietà 7.

## 3.4 Struttura matematica di un wormhole attraversabile

### 3.4.1 Forma della metrica

La proprietà 1 richiede che la metrica dello spazio-tempo del wormhole sia esprimibile in forma statica e a simmetria sferica dunque utilizzeremo la seguente metrica

$$ds^2 = -e^{2\Phi} c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.1)$$

dove:  $\Phi = \Phi(r)$  e  $b = b(r)$  sono due funzioni arbitrarie dipendenti solo dal raggio mentre  $c$  è la velocità della luce.  $b(r)$  determina la forma spaziale del wormhole quindi la chiameremo "*funzione di forma*" e  $\Phi(r)$  determina il redshift gravitazionale, quindi la chiameremo "*funzione di redshift*". Si noti che la coordinata radiale ha un significato geometrico ben specifico infatti:  $2\pi r$  è la circonferenza di un cerchio centrato sulla gola del wormhole e quindi è equivalente alla coordinata radiale in Fig.3.1.  $r$  risulta essere dunque non monotona: decresce da  $+\infty$  ad un valore minimo  $b_0$  man mano che ci si sposta attraverso il wormhole e nella gola, poi incrementa nuovamente da  $b_0$  a  $+\infty$  quando ci si muove fuori dalla gola e nell'Universo superiore.

### 3.4.2 Equazione di struttura del wormhole

#### Tensori di Riemann, Ricci e Einstein

Al fine di imporre le equazioni di campo di Einstein a la fine di valutare le forze mareali a cui i viaggiatori sono sottoposti, necessiteremo dei tensori di Einstein e di Riemann per la metrica [Eq.(3.1)]. Dalla nostra metrica nella forma

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad x^0 = ct, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \phi \quad (3.2)$$

Applicando le Eq.(1.2)e(1.3) alla metrica appena scritta otteniamo le 24 componenti non nulle del tensore di Riemann dove il carattere " ' " denota una derivazione rispetto alla coordinata  $r$  e i vettori di base, associati al sistema di coordinate  $(ct, r, \theta, \phi)$ , sono

$(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$ .

$$\begin{aligned}
R_{rtr}^t &= -R_{rrt}^t = (1 - b/r)^{-1} e^{-2\Phi} R_{ttr}^r \\
&= -(1 - b/r)^{-1} e^{-2\Phi} R_{trt}^r \\
&= -\Phi'' + (b'r - b)[2r(r - b)]^{-1} \Phi' - (\Phi')^2 \\
R_{\theta t\theta}^t &= -R_{\theta\theta t}^t = r^2 e^{-2\Phi} R_{tt\theta}^\theta = -r^2 e^{-2\Phi} R_{t\theta t}^\theta \\
&= -r\Phi'(1 - b/r) \\
R_{\phi t\phi}^t &= -R_{\phi\phi t}^t = r^2 e^{-2\Phi} \sin^2 \theta R_{tt\phi}^\phi \\
&= -r^2 e^{-2\Phi} \sin^2 \theta R_{t\phi t}^\phi \\
&= -r\Phi'(1 - b/r) \sin^2 \theta \\
R_{\theta r\theta}^r &= -R_{\theta\theta r}^r = -r^2(1 - b/r) R_{rr\theta}^\theta \\
&= r^2(1 - b/r) R_{r\theta r}^\theta \\
&= \frac{b'r - b}{2r} \\
R_{\phi r\phi}^r &= -R_{\phi\phi r}^r = -r^2(1 - b/r) \sin^2 \theta R_{rr\phi}^\phi \\
&= r^2(1 - b/r) \sin^2 \theta R_{r\phi r}^\phi \\
&= (b'r - b) \frac{\sin^2 \theta}{2r} \\
R_{\phi\theta\phi}^\theta &= -R_{\phi\phi\theta}^\theta = \sin^2 \theta R_{\theta\phi\theta}^\phi = -\sin^2 \theta R_{\theta\theta\phi}^\phi \\
&= (b/r) \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{3.3}$$

A questo punto passiamo ad un insieme di vettori di base ortonormale che rappresenta il sistema di riferimento proprio di un gruppo di osservatori che rimane sempre fermo nel sistema di coordinate  $(r, \theta, \phi)$  costanti):

$$\mathbf{e}_{\hat{t}} = e^{-\Phi} \mathbf{e}_t \quad \mathbf{e}_{\hat{r}} = (1 - b/r)^{1/2} \mathbf{e}_r \quad \mathbf{e}_{\hat{\theta}} = r^{-1} \mathbf{e}_\theta \quad \mathbf{e}_{\hat{\phi}} = (r \sin \theta)^{-1} \mathbf{e}_\phi \tag{3.4}$$

Grazie al nuovo insieme di vettori di base, la metrica assume la forma standard della RS

$$g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \mathbf{e}_{\hat{\alpha}} \cdot \mathbf{e}_{\hat{\beta}} = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

mentre le 24 componenti non nulle del tensore di Riemann assumono la seguente forma semplificata

$$\begin{aligned}
R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}}^{\hat{t}} &= -R_{\hat{r}\hat{t}\hat{t}}^{\hat{t}} = R_{\hat{t}\hat{t}\hat{r}}^{\hat{r}} = -R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}}^{\hat{r}} \\
&= (1 - b/r)(-\Phi'' + (b'r - b)(2r(r - b))^{-1}\Phi' - (\Phi')^2) \\
R_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}}^{\hat{t}} &= -R_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{t}}^{\hat{t}} = R_{\hat{t}\hat{t}\hat{\theta}}^{\hat{\theta}} = -R_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}}^{\hat{\theta}} = -(1 - b/r)\frac{\Phi'}{r} \\
R_{\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}}^{\hat{t}} &= -R_{\hat{\phi}\hat{t}\hat{t}}^{\hat{t}} = R_{\hat{t}\hat{t}\hat{\phi}}^{\hat{\phi}} = -R_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}}^{\hat{\phi}} = -(1 - b/r)\frac{\Phi'}{r} \\
R_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}}^{\hat{r}} &= -R_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{r}}^{\hat{r}} = R_{\hat{r}\hat{r}\hat{\theta}}^{\hat{\theta}} = -R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}}^{\hat{\theta}} = \frac{b'r - b}{2r^3} \\
R_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}}^{\hat{r}} &= -R_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{r}}^{\hat{r}} = R_{\hat{r}\hat{r}\hat{\phi}}^{\hat{\phi}} = -R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}}^{\hat{\phi}} = \frac{b'r - b}{2r^3} \\
R_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}}^{\hat{\theta}} &= -R_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\theta}}^{\hat{\theta}} = R_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{\phi}}^{\hat{\phi}} = -R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}}^{\hat{\phi}} = \frac{b}{r^3}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Possiamo ora contrarre il tensore di Riemann per calcolare il tensore di curvatures e lo scalare di Ricci rispettivamente

$$R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = R_{\hat{\mu}\hat{\alpha}\hat{\nu}}^{\hat{\alpha}} \tag{3.7}$$

$$R = g^{\hat{\mu}\hat{\nu}} R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \tag{3.8}$$

i quali ci permettono di ricavare il Tensore di Einstein

$$G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{2}Rg_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \tag{3.9}$$

Questo calcolo ci restituisce solamente le componenti non nulle del tensore di Einstein che riportiamo di seguito

$$\begin{aligned}
G_{\hat{t}\hat{t}} &= \frac{b'}{r^2} \\
G_{\hat{r}\hat{r}} &= -\frac{b'}{r^3} + 2\left(1 - \frac{b}{r}\right)\frac{\Phi'}{r} \\
G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} &= \left(1 - \frac{b}{r}\right)\left(\Phi'' - \frac{b'r - b}{2r(r - b)}\Phi' + (\Phi')^2 + \frac{\Phi'}{r} - \frac{b'r - b}{2r^2(r - b)}\right)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

## Tensore energia-impulso

Il teorema di Birkhoff afferma che dalle equazioni di campo di Einstein è consentito un solo tipo di wormhole sferico nel vuoto ovvero un wormhole di Schwarzschild che però abbiamo visto non essere attraversabile. Quindi un wormhole attraversabile deve essere formato da materia o campi con un tensore energia-impulso diverso da zero. Poiché le equazioni di campo di Einstein richiedono che il tensore energia-impulso sia proporzionale

al tensore di Einstein, nella nostra base ortonormale il tensore energia-impulso deve avere la stessa struttura algebrica di  $G_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  riportato nell'Eq.(3.10) dunque le sole componenti diverse da zero dovranno essere:  $T_{\hat{t}\hat{t}}$ ,  $T_{\hat{r}\hat{r}}$  e  $T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\phi}\hat{\phi}}$ . Poiché i vettori di base sono quelli definiti nell'Eq.(3.4), ciascuna di queste componenti ha un'interpretazione fisica in termini di misurazioni che gli osservatori statici potrebbero fare:

$$T_{\hat{t}\hat{t}} = \rho(r)c^2, \quad T_{\hat{r}\hat{r}} = -\tau(r), \quad T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = p(r) \quad (3.11)$$

dove  $\rho(r)$  è la densità massa-energia totale,  $\tau(r)$  la tensione per unità di area in direzione radiale e  $p(r)$  la pressione in direzione laterale (ortogonale alla direzione radiale).

### Equazioni di campo di Einstein

Data le equazioni di campo di Einstein

$$G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \quad (3.12)$$

utilizziamo i valori del tensore di Einstein e del tensore energia-impulso che abbiamo ricavato precedentemente e otteniamo

$$b' = \frac{8\pi G}{c^2} r^2 \rho \quad (3.13a)$$

$$\Phi' = \frac{(-\frac{8\pi G}{c^4} \tau r^3 + b)}{2r(r-b)} \quad (3.13b)$$

$$\tau' = (\rho c^2 - \tau)\Phi' - 2\frac{p + \tau}{r} \quad (3.13c)$$

dove l'Eq.(3.13a) e l'Eq.(3.13b) rappresentano rispettivamente la parte temporale e radiale mentre l'Eq.(3.13c) è la parte laterale. Nel nostro studio dei wormhole attraversabili cerchiamo soluzioni con determinate proprietà dunque dobbiamo controllare le funzioni  $b(r)$  e  $\Phi(r)$  in modo tale da modellare il wormhole secondo le nostre specifiche e, di conseguenza, dobbiamo lasciare libere le relazioni tra  $\rho$ ,  $\tau$  e  $p$ , affinché siano fissate, in un secondo momento, dalle equazioni di campo stesse e dalle nostre restrizioni. Seguendo questo ragionamento risulta dunque conveniente riscrivere le equazioni di campo nel seguente modo

$$\rho = \frac{b' - c^2}{r^2 8\pi G} \quad (3.14a)$$

$$\tau = \left[ \frac{b}{r} - 2(r-b)\Phi' \right] \frac{c^4}{8\pi G r^2} \quad (3.14b)$$

$$p = \frac{r}{2} [(\rho c^2 - \tau)\Phi' - \tau'] - \tau \quad (3.14c)$$

### Condizioni al contorno

In alcuni casi potremmo voler lasciare che il tensore energia-impulso, che genera la curvatura spazio-temporale del wormhole, si estenda per distanze arbitrariamente grandi. In altri, invece, potremmo volerlo confinare all'interno di una sfera di raggio  $r = R_S$ ; ciò equivarrebbe a richiedere che  $\rho$ ,  $\tau$  e  $p$  si annullino per  $r > R_S$ . In quest'ultimo caso le equazioni di campo richiedono che la tensione radiale  $\tau$  tenda a zero dolcemente quando  $r$  tende a  $R_S$  dal basso, ma consentirebbero a  $\rho$  e  $p$  di azzerarsi attraverso una discontinuità a salto in  $r = R_S$ . Le Eq.(3.13a)-(3.13c), valutate nella regione del vuoto  $r > R_S$ , vincolano la geometria dello spaziotempo esterno ad avere la tipica forma di Schwarzschild. Potremmo anche voler disporre più strati, di materiali diversi, sferici e concentrici e in tal caso le equazioni di campo imporrebbero la continuità di  $\tau$ ,  $b$  e  $\Phi$  fra gli strati, ma permetterebbero a  $\rho$  e  $p$  di presentare discontinuità a salto.

Ricordiamo che anche se non imponiamo alcun raggio limite per il tensore energia-impulso, dobbiamo comunque richiedere che  $T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$  vada a zero con la distanza abbastanza rapidamente da rendere lo spazio-tempo asintoticamente piatto; questo si traduce nel richiedere che  $b/r$  e  $\Phi$  tendano a zero per  $r$  che tende ad infinito.

### 3.4.3 Geometria spaziale

#### La matematica dell'embedding

Utilizzeremo i diagrammi di embedding per aiutarci a imporre la richiesta che la metrica dello spaziotempo descriva un wormhole. Di particolare interesse è la geometria tridimensionale dello spazio ad un certo istante di tempo fissato. Questa geometria è a simmetria sferica quindi, senza una significativa perdita di informazioni, possiamo concentrare l'attenzione su una fetta equatoriale con  $\theta = \pi/2$ . L'elemento di linea relativo si ottiene imponendo  $t = \text{costante}$  e  $\theta = \pi/2$  nell'Eq.(3.1)

$$ds^2 = (1 - b/r)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (3.15)$$

L'obiettivo è quello di costruire, nello spazio euclideo tridimensionale, una superficie bidimensionale con la stessa geometria di questa fetta; cioè vogliamo visualizzare questa fetta come se fosse stata rimossa dallo spazio-tempo e incorporata nello spazio euclideo.

Nello spazio euclideo di embedding introduciamo le coordinate cilindriche  $z$ ,  $r$  e  $\phi$  dunque la metrica euclidea dello spazio di embedding assume la seguente forma

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (3.16)$$

e dato che la superficie avrà una simmetria assiale, allora potrà essere descritta dalla singola funzione  $z = z(r)$ . Su tale superficie l'elemento di linea sarà

$$ds^2 = \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (3.17)$$

Questo elemento di linea sarà lo stesso della nostra sezione equatoriale attraverso il wormhole [Eq.(3.15)]. Se identifichiamo le coordinate  $(r, \phi)$  dello spazio di embedding con  $(r, \phi)$  dello spazio-tempo del wormhole e se richiediamo che la funzione  $z(r)$ , che descrive la superficie, soddisfi la seguente relazione

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left( \frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{-1/2} \quad (3.18)$$

allora la superficie  $z = z(r)$  è quella mostrata in Fig.3.1(a) e l'Eq.(3.18) mostra il modo in cui la funzione  $b = b(r)$  modella la geometria spaziale del wormhole.

### Wormhole di Schwarzschild

Consideriamo l'esempio specifico del wormhole di Schwarzschild per il quale  $b(r) =$  costante  $= B$ . In questo caso la superficie di embedding, Eq.(3.16), assume la seguente forma

$$z(r) = \pm 2B \left( \frac{r}{B} - 1 \right)^{1/2} \quad (3.19)$$

La gola del wormhole si trova dunque localizzata in  $r = B$ , anche chiamato "*raggio di Schwarzschild*", mentre notiamo che  $dz/dr$  diverge sulla gola, ma questa è una caratteristica valida per tutti i tipi di wormhole, non solo per quello di Schwarzschild, in quanto un valore  $dz/dr = \infty$  indica una pendenza verticale della superficie di embedding che è precisamente quello che noi definiamo come "*gola*".

Dato che  $dz/dr = \infty$  sulla gola possiamo allora dire che  $r$  non sia la miglior coordinata da utilizzare nelle vicinanze della gola; risulta sicuramente più conveniente utilizzare la

distanza propria misurata da un osservatore statico

$$dl = \pm \left(1 - \frac{B}{r}\right)^{-1/2} \quad (3.20)$$

da cui otteniamo

$$l = \pm \left[ \sqrt{r(r-B)} + B \ln \left( \sqrt{\frac{r}{B}} + \sqrt{\frac{r}{B} - 1} \right) \right] \quad (3.21)$$

Questa distanza radiale è positiva sopra alla gola (Universo superiore) e negativa sotto la gola (Universo inferiore).

Molto lontani dalla gola di Schwarzschild la superficie di embedding diventa piatta

$$\frac{dz}{dr} \xrightarrow{l \rightarrow \pm\infty} 0 \quad (3.22)$$

che corrisponde alle due regioni asintoticamente piatte ( $l \rightarrow +\infty$ ,  $l \rightarrow -\infty$ ) collegate dal wormhole.

### Wormhole generico

Ogni wormhole, per la definizione stessa di wormhole, deve avere un raggio minimo  $r = b_0$  (rappresenta la gola) in corrispondenza del quale si ha una superficie di embedding verticale ovvero in corrispondenza del quale l'Eq.(3.18) risulta essere divergente. Richiediamo dunque che  $r$  e  $b$  assumano lo stesso valore  $b_0$  in corrispondenza della gola.

La coordinata radiale presenta dei problemi vicino alla gola ma la distanza radiale propria, riportata di seguito, deve essere ben definita ovunque.

$$l(r) = \pm \int_{b_0}^r \frac{dr}{[1 - b(r)/r]^{1/2}} \quad (3.23)$$

Richiediamo dunque che  $l(r)$  sia finita attraverso lo spazio-tempo.

Lontano dalla gola, in entrambe le direzioni radiali, lo spazio deve diventare asintoticamente piatto dunque richiediamo che  $b/r \xrightarrow{l \rightarrow \pm\infty} 0$

Notiamo che le Eq.(3.18) e (3.23) implicano quanto segue

$$\frac{dz}{dl} = \pm \sqrt{\frac{b}{r}}, \quad \frac{dr}{dl} = \pm \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \quad (3.24)$$

La Fig.3.2 rappresenta la forma di un wormhole generico e il significato geometrico dell'Eq.(3.24).



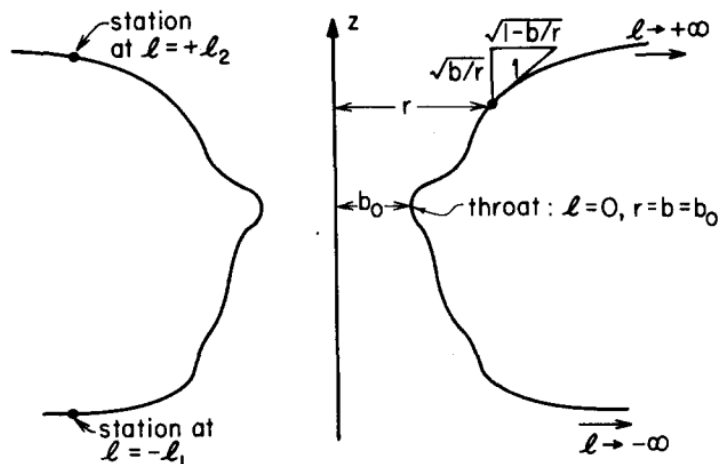


Figura 3.2: M. S. Morris and K. S. Thorne, Am. J. Phys. 56, 395 (1988).

Diagramma di embedding di un wormhole generico visto di profilo. Per essere completo si immagini di ruotare la figura rispetto l'asse  $z$ .

### 3.4.4 Assenza di orizzonte

In ogni spazio-tempo asintoticamente piatto, inclusa quindi anche la gola del wormhole, l'orizzonte degli eventi si identifica come la superficie fisicamente non singolare per la quale  $g_{00} = -2^{2\Phi} \rightarrow 0$ . Noi abbiamo richiesto che un wormhole, per essere attraversabile, non possieda un orizzonte degli eventi e questo si traduce con il richiedere che  $\Phi(r)$  sia finita ovunque.

### 3.4.5 Forze gravitazionali mareali e tempo di attraversamento del wormhole

Facendo riferimento alla Fig.3.2 poniamo l'attenzione sul seguente esperimento mentale: supponiamo un avventuriero che, inizialmente fermo in una stazione spaziale nell'universo inferiore dove  $l = -l_1$ , viaggia radialmente attraverso la gola del wormhole per arrivare a fermarsi in una seconda stazione spaziale nell'universo superiore dove  $l = l_2$ . Definendo  $v(r)$  la velocità radiale del viaggiatore misurata da un osservatore statico e  $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$  come nella RS, possiamo dunque esprimere  $v(r)$  in termini di: distanza percorsa  $dl$ , raggio percorso  $dr$ , coordinata del lasso di tempo  $dt$ , coordinata del lasso di tempo proprio del viaggiatore  $d\tau_T$

$$v = \frac{dl}{e^\Phi dt} = \mp \frac{dr}{(1 - b/r)^{1/2} e^\Phi dt} \quad (3.25a)$$

$$v\gamma = \frac{v}{[1 - (v/c)^2]^{-1/2}} = \frac{dl}{d\tau_T} = \mp \frac{dr}{(1 - b/r)^{1/2} d\tau_T} \quad (3.25b)$$

Il segno "-" si riferisce alla prima metà del viaggio (nell'Universo inferiore), mentre il segno "+" si riferisce alla seconda metà del viaggio (Universo superiore).

Siccome il viaggio inizia e termina nelle stazioni che sono ferme avremo che  $v = 0$  per  $l = -l_1, +l_2$  mentre  $v > 0$  per  $-l_1 < l < +l_2$ . Le stazioni devono essere sufficientemente lontane dalla gola affinché gli effetti gravitazionali del wormhole siano piccoli, in particolare:

- la geometria dello spazio deve essere praticamente piatta quindi  $b/r \ll 1$
- il redshift gravitazionale del segnale mandato dalla stazione verso l'infinito deve essere piccolo quindi

$$\frac{\Delta \text{lunghezza d'onda}}{\text{lunghezza d'onda}} = e^{-\Phi} - 1 \simeq -\Phi \ll 1$$

- L'accelerazione di gravità misurata sulla stazione deve essere minore o dello stesso ordine di grandezza di quella percepita sulla Terra

$$g = -(1 - b/r)^{1/2} \Phi' c^2 \simeq -\Phi' c^2 \leq g_{\oplus}$$

Se il viaggio nel wormhole deve essere compiuto da un essere umano allora deve avere delle caratteristiche tali da renderlo confortevole ovvero deve soddisfare tre condizioni:

1. L'intero viaggio deve durare meno o circa un anno, misurato sia dal viaggiatore che dalle persone che vivono nella stazione spaziale quindi devono valere

$$\Delta\tau_1 = \int_{-l_1}^{l_2} \frac{dl}{v\gamma} \leq 1 \text{ anno} \quad (3.26a)$$

$$\Delta t = \int_{-l_1}^{l_2} \frac{dl}{ve^{\Phi}} \leq 1 \text{ anno} \quad (3.26b)$$

2. Il viaggiatore deve essere sottoposto ad una accelerazione  $\mathbf{a}$  che non ecceda quella della Terra
3. La differenza di accelerazione  $\Delta\mathbf{a}$  tra le varie parti del corpo del viaggiatore non deve eccedere quella terrestre

Per aiutarci nella discussione delle accelerazioni avvertite dal viaggiatore introduciamo una base ortonormale del suo sistema di riferimento,  $(\mathbf{e}_{\hat{0}'}, \mathbf{e}_{\hat{1}'}, \mathbf{e}_{\hat{2}'}, \mathbf{e}_{\hat{3}'})$ , che può essere espresse in funzione della base ortonormale di un osservatore statico,  $(\mathbf{e}_{\hat{t}}, \mathbf{e}_{\hat{r}}, \mathbf{e}_{\hat{\theta}}, \mathbf{e}_{\hat{\phi}})$ ,

attraverso le trasformazioni di Lorentz della RS:

$$\mathbf{e}_{\hat{0}'} = \mathbf{u} = \gamma \mathbf{e}_{\hat{t}} \mp \gamma(v/c) \mathbf{e}_{\hat{r}} \quad (3.27a)$$

$$\mathbf{e}_{\hat{1}'} = \mp \gamma \mathbf{e}_{\hat{r}} + \gamma(v/c) \mathbf{e}_{\hat{t}} \quad (3.27b)$$

$$\mathbf{e}_{\hat{2}'} = \mathbf{e}_{\hat{\theta}} \quad (3.27c)$$

$$\mathbf{e}_{\hat{3}'} = \mathbf{e}_{\hat{\phi}} \quad (3.27d)$$

dove  $\mathbf{u}$  rappresenta la quadri-velocità del viaggiatore e  $\mathbf{e}_{\hat{1}'}$  punta in direzione del moto (verso il crescere di  $l$ ).

La quadri-accelerazione a cui il corpo è sottoposto è  $a^{\hat{\alpha}'} = u^{\hat{\alpha}'}_{;\hat{\beta}'} u^{\hat{\beta}'}$ . Dato che la quadri-accelerazione è sempre ortogonale alla quadri-velocità avremo che  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_{\hat{0}'} = a_{\hat{0}'} = -a^{\hat{0}'}$  svanisce, inoltre, dato che il viaggiatore si muove in direzione radiale, avremo che la sua accelerazione dovrà essere radiale dunque  $a_{\hat{2}'} = a_{\hat{3}'} = 0$  e  $\mathbf{a} = a \mathbf{e}_{\hat{1}'}$  (dove  $a$  è il modulo dell'accelerazione). Il procedimento più facile per il calcolo del modulo  $a$  è il seguente: scrivere  $u$  in funzione di  $r$ , calcolare  $a_t/c^2 = u_{t;\alpha} u^\alpha = u_{t,r} u^r - \Gamma_{\alpha t \beta} u^\alpha u^\beta$  nel sistema di coordinate  $(ct, r, \theta, \phi)$  e notare che  $a_t = \mathbf{a} \mathbf{e}_t = (a \mathbf{e}_{\hat{1}'}) \cdot (\mathbf{e}_t) = -\gamma(v/c) e^\Phi a$ . Seguendo questo ragionamento si ottiene il seguente valore

$$a = \mp \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} e^{-\Phi} (\gamma e^\Phi)' c^2 = e^{-\Phi} \frac{d}{dl} (\gamma e^\Phi) c^2 \quad (3.28)$$

Imponendo dunque la condizione 2 otteniamo che

$$\left| e^{-\Phi} \frac{d}{dl} (\gamma e^\Phi) \right| \leq \frac{g_\oplus}{c^2} \simeq \frac{1}{0.971 \text{ a.l.}} \quad (3.29)$$

dove "a.l." sta per anno-luce.<sup>3</sup>

Passiamo ora alle forze gravitazionali mareali a cui il viaggiatore è sottoposto. Denotiamo con  $\boldsymbol{\xi}$  il vettore di separazione tra due parti del corpo del viaggiatore (ad esempio la testa e i piedi);  $\boldsymbol{\xi}$  è puramente spaziale nel sistema di riferimento del viaggiatore infatti  $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u} = -\xi^{\hat{0}'} = 0$ . L'accelerazione relativa fra due parti del corpo è dunque la seguente (il fatto che il viaggiatore sia accelerato non ha nessuna influenza sull'accelerazione relativa della quale egli risente)

$$\Delta a^{\hat{\alpha}'} = -c^2 R^{\hat{\alpha}'}_{\hat{\beta}' \hat{\gamma}' \hat{\delta}'} u^{\hat{\beta}'} \xi^{\hat{\gamma}'} u^{\hat{\delta}'} \quad (3.30)$$

Dato che  $u^{\hat{\alpha}'} = u^{\hat{\alpha}'}$  e  $\xi^{\hat{0}'} = 0$  nel sistema di riferimento del viaggiatore e dato che  $R^{\hat{\alpha}'}_{\hat{\beta}' \hat{\gamma}' \hat{\delta}'}$  è antisimmetrico per i primi due indici,  $\Delta a^{\hat{\alpha}'}$  risulta puramente spaziale con

<sup>3</sup>L'anno-luce è un'unità di misura dello spazio e rappresenta la spazio percorso dalla luce in un anno solare; corrisponde a circa  $9.461 \times 10^{12}$  km.

componenti

$$\Delta a^{\hat{j}'} = -c^2 R_{\hat{0}'\hat{k}'\hat{0}'}^{\hat{j}'} \Delta a^{\hat{k}'} = -c^2 R_{\hat{j}'\hat{0}'\hat{k}'\hat{0}'} \Delta a^{\hat{k}'} \quad (3.31)$$

Trasformando le componenti riportate in Eq.(3.6) dal sistema di riferimento dell'osservatore statico ( $\mathbf{e}_{\hat{t}}, \mathbf{e}_{\hat{r}}, \mathbf{e}_{\hat{\theta}}, \mathbf{e}_{\hat{\phi}}$ ) al sistema di riferimento del viaggiatore ( $\mathbf{e}_{\hat{0}'}, \mathbf{e}_{\hat{1}'}, \mathbf{e}_{\hat{2}'}, \mathbf{e}_{\hat{3}'}$ ) otteniamo

$$\begin{aligned} R_{\hat{1}'\hat{0}'\hat{1}'\hat{0}'} &= R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}\hat{t}} = -\left(1 - \frac{b}{r}\right) \left(-\Phi'' + \frac{b'r - b}{2r(r-b)}\Phi' - (\Phi')^2\right) \\ R_{\hat{2}'\hat{0}'\hat{2}'\hat{0}'} &= \gamma^2 R_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}} + \gamma^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 R_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}} = \frac{\gamma^2}{2r^2} \left[ \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(b' - \frac{b}{r}\right) + 2(r-b)\Phi' \right] \\ R_{\hat{3}'\hat{0}'\hat{3}'\hat{0}'} &= R_{\hat{2}'\hat{0}'\hat{2}'\hat{0}'} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Essendo queste le uniche componenti non nulle, allora l'accelerazione mareale dell'Eq.(3.31) assume la seguente forma

$$\begin{aligned} \Delta a^{\hat{1}'} &= -c^2 R_{\hat{1}'\hat{0}'\hat{1}'\hat{0}'} \xi^{\hat{1}'} \\ \Delta a^{\hat{2}'} &= -c^2 R_{\hat{2}'\hat{0}'\hat{2}'\hat{0}'} \xi^{\hat{2}'} \\ \Delta a^{\hat{3}'} &= -c^2 R_{\hat{3}'\hat{0}'\hat{3}'\hat{0}'} \xi^{\hat{3}'} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Supposto  $|\xi| \simeq 2$  m (dimensione del corpo del viaggiatore), combinando le Eq.(3.32) e le Eq.(3.33) con la condizione 3 otteniamo i seguenti vincoli:

$$|R_{\hat{1}'\hat{0}'\hat{1}'\hat{0}'}| = \left| \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left(-\Phi'' + \frac{b'r - b}{2r(r-b)}\Phi' - (\Phi')^2\right) \right| \leq \frac{g_{\oplus}}{2mc^2} \simeq \frac{1}{(1 \times 10^{10} \text{ cm})^2} \quad (3.34a)$$

$$|R_{\hat{2}'\hat{0}'\hat{2}'\hat{0}'}| = \left| \frac{\gamma^2}{2r^2} \left[ \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(b' - \frac{b}{r}\right) + 2(r-b)\Phi' \right] \right| \leq \frac{g_{\oplus}}{2mc^2} \simeq \frac{1}{(1 \times 10^{10} \text{ cm})^2} \quad (3.34b)$$

Il vincolo mareale radiale [Eq.(3.34a)] può essere visto come un vincolo sul coefficiente  $\Phi$  della metrica mentre quello mareale laterale [Eq.(3.34b)] può essere visto come un vincolo sulla velocità  $v$  con la quale il viaggiatore attraversa il wormhole.

### 3.4.6 Tensore energia impulso che genera la curvatura spazio-temporale

I vincoli che abbiamo posto sulla funzione di forma  $b(r)$  danno origine, tramite le equazioni di campo Eq.(3.13), a restrizioni sulla densità di massa  $\rho$ , sulla tensione radiale  $\tau$  e sulla pressione laterale  $p$  le quali determinano la curvatura dello spazio-tempo.

## Vincoli sulla tensione e sulla densità di massa della gola

I vincoli più severi li troviamo proprio sulla gola del wormhole. Il fatto che  $r = b = b_0$ , unito al fatto che  $(r-b)\Phi' \rightarrow 0$  (essendo  $\rho$  finita anche  $b'$  lo sarà e, inoltre, avendo imposto che non ci siano orizzonti,  $\Phi$  risulterà finita), otteniamo dalla Eq.(3.14b) che la tensione nella gola dovrebbe essere

$$\tau_0 = \frac{c^4}{8\pi G b_0^2} \simeq 5 \times 10^{41} \text{ dyn cm}^{-2} \left( \frac{10 \text{ m}}{b_0} \right)^2 \simeq 5 \times 10^{41} \text{ dyn cm}^{-2} \left( \frac{11 \text{ a.l.}}{b_0} \right)^2 \quad (3.35)$$

dove "dyn" è l'unità di misura della forza nel sistema CGS.<sup>4</sup> Questa risulta essere una tensione esageratamente alta (supponendo  $b_0 \simeq 3 \text{ km}$  essa raggiunge lo stesso valore di pressione che ritroviamo al centro di una stella di neutroni molto massiva). Se anche considerassimo gole di dimensioni notevolmente maggiori, ad esempio  $b_0 = 11 \text{ a.l.}$ , al fine di ridurre la tensione  $\tau_0$ , otterremmo che sarebbe necessario avere un campo magnetico di intensità  $1 \times 10^6 \text{ G}$  (Gauss).

In prossimità della gola possiamo investigare su un altro aspetto chiave di questa tensione definendo la seguente funzione adimensionale

$$\zeta \equiv \frac{\tau - \rho c^2}{|\rho c^2|} = \frac{b/r - b' - 2(r-b)\Phi'}{|b'|} \quad (3.36)$$

dove abbiamo utilizzato le Eq.(3.14a) e (3.14b) per scrivere  $\tau$  e  $\rho$  in funzione delle loro controparti geometriche  $b$  e  $\Phi$ . Il requisito che vincola il wormhole ad essere connesso ad uno spazio-tempo asintoticamente piatto, implica che in prossimità della gola la superficie di embedding svasi verso l'esterno come mostrato nelle Fig.3.1 e 3.2. Il flaring verso l'esterno, matematicamente, si traduce con l'imporre che l'inverso della funzione di embedding  $r(z)$  abbia derivata seconda fatta rispetto a  $z$  maggiore di zero sulla gola o in prossimità di essa dove  $b = r$ . Dunque invertendo la (3.18) e differenziando rispetto a  $z$  otteniamo una prima versione della condizione di flaring-out

$$\frac{dr}{dz} = \pm \left( \frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{1/2} \rightarrow \frac{d^2r}{dz^2} = \frac{b - b'r}{2b^2} > 0 \quad (3.37)$$

Una seconda versione può essere ottenuta combinando la Eq.(3.36) e la Eq.(3.37), per scrivere  $\zeta$  in funzione di  $r$ , e imponendo le condizioni di finitezza sopra citate

$$\zeta = \frac{2b^2}{r|b'|} \frac{d^2r}{dz^2} - 2(r-b) \frac{\Phi'}{|b'|} \xrightarrow[\rho, b' < +\infty]{(r-b)\Phi' \rightarrow 0} \zeta_0 = \frac{\tau_0 - \rho_0 c^2}{|\rho_0 c^2|} > 0 \quad (3.38)$$

---

<sup>4</sup>Rappresenta la forza che bisogna applicare ad un oggetto di massa 1 g affinché esso acceleri di una quantità  $1 \text{ cm s}^{-2}$ . È legato al Newton, unità di misura della forza nel SI, tramite la seguente relazione:  $1 \text{ N} = 1 \times 10^5 \text{ dyn}$ .

la quale vale sulla gola o in prossimità di essa dove  $r = b = b_0$ .

### Problematiche relative alla condizione di flaring-out

La condizione di flaring-out riportata nella Eq.(3.38) implica che  $\tau_0 - \rho_0 c^2 > 0 \Rightarrow \tau_0 > \rho_0 c^2$  la quale sancisce che nella gola la tensione deve essere così grande da superare la densità di massa-energia: chiameremo il materiale che possiede questa proprietà con il nome di "esotico". La natura esotica del materiale che compone la gola del wormhole risulta essere particolarmente problematica soprattutto per quanto riguarda le misure effettuate da un osservatore che si muove attraverso la gola con una velocità radiale prossima alla velocità della luce ( $\gamma \gg 1$ ). Suddetto osservatore misurerebbe una densità di energia pari a quanto riportato di seguito

$$T_{\hat{0}'\hat{0}'} = \gamma^2 T_{\hat{t}\hat{t}} \mp 2\gamma^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 T_{\hat{t}\hat{r}} + \gamma^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 T_{\hat{r}\hat{r}} = \gamma^2 \left[ \rho_0 c^2 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \tau_0 \right] = \gamma^2 (\rho_0 c^2 - \tau_0) + \tau_0 \quad (3.39)$$

Se l'osservatore si muovesse sufficientemente veloce allora misurerebbe una densità di massa-energia negativa.

Ora potremmo decidere di fare in modo che non siano solo gli osservatori che viaggiano attraverso la gola a misurare una densità di massa-energia negativa, bensì qualsiasi osservatore sia esso in quiete o in moto. Altra opzione potrebbe essere quella di imporre come possibile vincolo che  $\rho c^2 \geq 0$  ovunque, il quale ci permetterebbe di ridurre l'esoticità del materiale che compone la gola del wormhole.<sup>5</sup>

Negli anni '60 e all'inizio degli anni '70 la maggior parte dei fisici considerava quasi sacra l'affermazione che «nessun osservatore dovrebbe mai essere in grado di misurare una densità di energia negativa». Essa porta il nome di "condizione di energia debole" e quando vengono aggiunti ulteriori vincoli prende il nome di "condizione di energia dominante" o "condizione di energia forte". Queste condizioni energetiche, le quali sono tutte violate dalla materia che ha  $\tau > \rho c^2$ , sono alla base di una serie di importantissimi teoremi:

- Il "teorema della massa positiva" il quale afferma che gli oggetti composti da materia che soddisfa la condizione di energia dominante non potranno mai antigravitare cioè non potranno mai respingere gravitazionalmente altri corpi.
- Una varietà di teoremi che predicono che se una o l'altra delle condizioni di energia è soddisfatta allora saranno create singolarità spazio-temporali in situazioni cosmologiche e in collasso gravitazionale

---

<sup>5</sup>Il fisico Don Nelson Page notò che non solo le gole di wormhole statici e sferici devono essere composte da materia esotica, bensì quelle di qualsiasi wormhole attraversabile sia esso anche non statico e non sferico.

- La "*seconda legge della meccanica dei buchi neri*", la quale sancisce che se tutto il tensore energia-impulso, vicino all'orizzonte di un buco nero, soddisfa la condizione di energia forte, allora la superficie dell'orizzonte non potrà mai diminuire.

Tuttavia il fisico Stephen William Hawking scoprì nel 1974 che i buchi neri non rotanti possono evaporare e, di conseguenza, le aree delle loro superfici possono ridursi violando così la seconda legge della meccanica dei buchi neri. Supponiamo, ad esempio, che un osservatore statico ed isolato (circondato dal vuoto) si trovi appena sopra l'orizzonte di un buco nero di Schwarzschild; egli misurerà un valore di aspettazione della densità di energia che è negativo. Questo valore è associato alla creazione di particelle in prossimità dell'orizzonte le quali, in seguito, evaporeranno e, di conseguenza, un flusso di energia negativa attraverserà l'orizzonte rimpicciolandolo. Questo ha costretto i fisici ad affrontare il fatto che i campi quantizzati possono violare le condizioni energetiche o, più precisamente, esistono stati quantici in cui il valore di aspettazione (rinormalizzato) del tensore energia-impulso viola tutte le condizioni di energia. Un esempio molto generale a riprova di tali violazioni è la creazione quanto-meccanica di particelle come appena descritto nell'evaporazione di buchi neri. Quanto detto ci porta a pensare che sarebbe sbagliato supporre a priori l'impossibilità dell'esistenza del materiale esotico richiesto per la gola di un wormhole attraversabile. Non è da escludere che le leggi fondamentali della fisica vietino materiale esotico sulle scale macroscopiche richieste per la costruzione di wormhole ma non esiste, ad oggi, alcun modo per dimostrarlo e, in effetti, non saremmo sorpresi nel scoprire che le teorie dei campi quantizzati prevedono l'esistenza di tale materiale.

### **Modi per minimizzare l'uso di materia esotica**

Poiché il materiale esotico è così problematico, è nostro dovere cercare di utilizzarne il meno possibile nella soluzioni del wormhole. Utilizzando la funzione  $\zeta(r) = (\tau - \rho c^2)/\rho c^2$  per quantificare la materia esotica possiamo fare affidamento su tre diversi metodi per limitarne l'utilizzo:

1. Utilizzare materia esotica ( $\zeta > 0$ ) in tutto il wormhole, ma insistere sul fatto che la densità di tale materia diminuisca rapidamente con il raggio quando ci si allontana dalla gola. Un esempio potrebbe essere:  $b = \text{costante}$ ,  $\Phi = 0$  e con il tensore

energia-impulso che presenta il seguente profilo

$$\begin{aligned}
\rho(r) &= 0 \\
\tau(r) &= \frac{b_0 c^4}{8\pi G r^3} \\
p(r) &= \frac{b_0 c^4}{16\pi G r^3} \\
\zeta &= \infty
\end{aligned} \tag{3.40}$$

2. Utilizzare la materia esotica come unica fonte della curvatura, ma annullarla completamente per un certo  $r = R_S$ . Quindi avremo:

$$\begin{aligned}
\zeta &> 0 \text{ per } r < R_S \\
\rho c^2 = \tau = p &= 0 \text{ per } r > R_S
\end{aligned} \tag{3.41}$$

3. Confinare la materia esotica in una piccola regione centrale  $-l_c < l < +l_c$  intorno alla gola e circondarla di materia normale:

$$\begin{aligned}
\zeta &> 0 \text{ per } |l| < l_c \\
\zeta &\leq 0 \text{ per } |l| \geq l_c
\end{aligned} \tag{3.42}$$

### Accoppiamento fisico della materia del wormhole con il viaggiatore

Potrebbe risultare estremamente pericoloso per un viaggiatore umano interagire con un materiale che ha tensioni così grandi come descritto nell'Eq.(3.35). Abbiamo due possibili strade da seguire per proteggere il viaggiatore da tale interazione:

1. Si potrebbe interrompere la simmetria sferica del wormhole facendo passare un tubo a vuoto con diametro  $\ll b_0$  lungo il wormhole e applicando delle tensioni sulle pareti del tubo al fine di trattenere la materia esotica al di fuori. L'unico modo per verificarne la fattibilità sarebbe quello di studiare soluzioni di wormhole non sferici che però esula dallo scopo di questa tesi.
2. Potremmo decidere di utilizzare come materia che mantiene aperto il wormhole un tipo di materiale che, come ad esempio neutrini e onde gravitazionali, si accoppia solo debolmente con il corpo umano. Dunque, nonostante l'enorme tensione e la nonostante la sua densità, la materia potrebbe penetrare il corpo del viaggiatore senza esercitare su di esso forze evidenti.



### 3.4.7 Stabilità del wormhole

In assenza di una comprensione dettagliata della materia esotica che permea la gola del wormhole, è impossibile dire qualcosa di concreto sulla stabilità del wormhole per piccole o grandi perturbazioni come potrebbero essere quelle prodotte da un'astronave in transito. Tuttavia si dovrebbe tenere a mente che, anche se il wormhole potrebbe essere naturalmente instabile, una civiltà avanzata potrebbe essere in grado di monitorare la sua struttura e utilizzare forze di feedback per prevenire la crescita delle instabilità. Si noti infatti che un wormhole, se naturalmente stabile o stabilizzato artificialmente, ha una struttura spaziale che persiste nel tempo e dunque risulta essere parecchio diverso dall'antiorizzonte di un buco bianco o da un orizzonte di un tunnel di Kerr. La differenza è quella di un'entità di tipo tempo (wormhole) rispetto a un'entità di tipo luce (antiorizzonte o orizzonte di un tunnel di Kerr) e questo fatto potrebbe rendere molto più semplice, per una civiltà avanzata, stabilizzare un wormhole piuttosto che un antiorizzonte o un orizzonte di un tunnel di Kerr.

## 3.5 Soluzione specifica di un wormhole

Di seguito studieremo tre soluzioni specifiche delle equazioni di Einstein [Eq.3.14a-3.14c]; ciascuna di esse, costruita per soddisfare tutte le restrizioni che sono state discusse fino ad adesso, verrà affrontata con una diversa metodologia per limitare l'utilizzo di materia esotica.

### 3.5.1 Soluzione con forze mareali nulle

Una classe di soluzioni si ottiene quando settiamo  $\Phi$  e  $b(r)$  in modo tale che un osservatore stazionario non misuri nessuna forza mareale. Abbiamo dunque:

$$\Phi = 0 \quad (3.43a)$$

$$b = b(r) = (b_0 r)^{1/2} \quad (3.43b)$$

$$\rho(r) = \frac{b'(r)c^2}{8\pi G r^2} \quad (3.43c)$$

$$\tau(r) = \frac{b(r)c^4}{8\pi G r^3} \quad (3.43d)$$

$$p(r) = \frac{(b - b'r)c^4}{16\pi G r^3} \quad (3.43e)$$

$$z(r) = \pm \int_{b_0}^r \frac{dr}{[r/b(r) - 1]^{1/2}} \quad (3.43f)$$

$$\zeta(r) = \frac{b - b'r}{|b'r|} \quad (3.43g)$$

dove la funzione di forma  $b(r)$  deve chiaramente rispettare le condizioni di forma descritte nella Sez.3.4.3 e, per come è stata appena definita, avremo che la materia del wormhole si estenderà dalla gola fino a  $l = \pm\infty$  e sarà ovunque esotica ( $\tau > \rho c^2 > 0$ ). Per quanto riguarda  $\rho$ ,  $\tau$  e  $p$  avremo che  $(\rho, \tau, p) \xrightarrow{l \rightarrow \pm\infty} 0$  e quindi il contributo della materia esotica, a distanze sufficientemente grandi, sarà pressoché nullo o comunque trascurabile.

Consideriamo ora un'astronave che si muove radialmente attraverso il wormhole a motori spenti. Dato che il viaggiatore non risente di nessuna accelerazione allora dalla Eq.(3.28) deduciamo che l'astronave viaggia a  $\gamma e^\Phi$  costante. Dato che abbiamo supposto  $\Phi = 0$  allora avremo che  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$  sarà costante, il che implica che  $v = dl/dt$  sarà costante per un osservatore statico. Inserendo l'Eq.(3.43b) nelle Eq.(3.43c)-(3.43e) otteniamo la seguente equazione di stato per la materia esotica

$$\frac{\tau}{2} = 2p = \rho c^2 \quad \rho > 0 \text{ ovunque} \quad (3.44)$$

Possiamo inoltre integrare l'Eq.(3.43f) per trovare la seguente equazione di embedding

$$z(r) = \pm 4b_0 \left[ \frac{(\sqrt{r/b_0} - 1)^{3/2}}{3} + \left( \sqrt{\frac{r}{b_0}} - 1 \right)^{1/2} \right] \quad (3.45)$$

Allo stesso modo possiamo determina la distanza propria attraverso il wormhole partendo dalla Eq.(3.23)

$$\begin{aligned} l(r) &= \pm 4b_0 \left[ \left( \frac{r}{b_0} \right)^{3/4} \frac{(\sqrt{r/b_0} - 1)^{1/2}}{4} \right] \\ &\pm \frac{3}{2} b_0 \left( \frac{r}{b_0} \right)^{1/4} \left( \sqrt{\frac{r}{b_0}} - 1 \right)^{1/2} \\ &\pm \frac{3}{2} b_0 \ln \left[ \left( \frac{r}{b_0} \right)^{1/4} + \left( \sqrt{\frac{r}{b_0}} - 1 \right)^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (3.46)$$

Posizioniamo le nostre due stazioni spaziali ad una distanza grande abbastanza per considerare che il fattore  $[1 - b(r)/r]$  differisca dall'unità solo dell'1% quindi avremo rispettivamente le posizioni radiali delle due stazioni  $r_1 = r_2 = 10^4 b_0$  alle quali corrispondono  $l_1 = l_2 \simeq 10^4 b_0$ . Possiamo dunque procedere al calcolo della velocità con cui il viaggiatore può attraversare il wormhole dalla stazione 1 in  $-l_1$  nell'Universo inferiore alla stazione 2 in  $+l_2$  nell'Universo superiore come mostrato in Fig.3.2. Consideriamo i vincoli sull'accelerazione [Eq.(3.29)] e sulle forze mareali [Eq.(3.34a),(3.34b)] ignorando l'accelerazione iniziale per partire dalla prima stazione e la decelerazione finale per fermarsi nella seconda stazione (consideriamo che il viaggiatore si muova a velocità costante lungo tutto il percorso). Essendo  $\Phi = 0$  e  $\gamma = \text{costante}$  allora l'Eq.(3.29) è banalmente

soddisfatta e l'Eq.(3.34a), che rappresenta l'accelerazione mareale radiale, è nulla. Avremo quindi che solo l'Eq.(3.34b), nella quale sostituiamo le soluzioni particolari riportate in Eq.(3.43), limita le forze mareali associate al moto attraverso il tunnel; otteniamo dunque quanto segue

$$\frac{\gamma^2}{4r^3} \left(\frac{v}{c}\right)^2 (b_0 r)^{1/2} \leq \frac{1}{(1 \times 10^{10} \text{ cm})^2} \quad (3.47)$$

che nella gola ( $r = b_0$ ) può essere riscritta in questo modo

$$\frac{\gamma v}{c} \leq 2 \times 10^{-8} b_0 \text{ m}^{-1} \quad (3.48)$$

Nel limite non relativistico ( $v/c \ll 1$ ,  $\gamma \simeq 1$ ) otteniamo

$$v \leq 6b_0 \text{ s}^{-1} \quad (3.49)$$

Quindi la corrispondente durata del viaggio [Eq.(3.43)] è la stessa sia per il viaggiatore che per gli osservatori statici nelle stazioni e vale

$$\Delta\tau_T \simeq \Delta t \simeq \int_{-l_1}^{l_2} \frac{dl}{v} \simeq 2 \times 10^4 \frac{b_0}{v} \simeq \frac{2 \times 10^4}{6} \text{ s} \simeq 3.3 \times 10^3 \text{ s} \simeq 1 \text{ h} \quad (3.50)$$

### 3.5.2 Soluzione con materia esotica confinata

Presentiamo ora una soluzione del problema dove consideriamo la materia esotica confinata in una regione finita intorno al wormhole. In particolare uniremo due soluzioni: una soluzione a forze mareali nulle valida all'interno di una superficie di raggio  $R_S$  (quindi una soluzione formalmente identica a quella appena trovata nella Sez.3.5.1) e una soluzione di Schwarzschild valida per l'esterno della superficie. Scegliamo dunque

$$\Phi = \Phi_0 = \text{costante per } b_0 \leq r < R_S \quad (3.51a)$$

$$b = b_0 \left(\frac{r}{b_0}\right)^{1-\eta} \quad \text{con } 0 < \eta = \text{costante} < 1 \quad (3.51b)$$

Sostituendo le Eq.(3.51) nelle Eq.(3.14) otteniamo il profilo del tensore energia-impulso per l'interno della superficie ( $r < R_S$ ) dove ipotizziamo di confinare la materia

esotica

$$\rho(r) = \frac{(1-\eta)b(r)c^2}{8\pi Gr^3} \quad (3.52a)$$

$$\tau(r) = \frac{\rho c^2}{1-\eta} \quad (3.52b)$$

$$p(r) = \frac{\eta\rho c^2}{2(1-\eta)} \quad (3.52c)$$

Di conseguenza avremo che l'esoticità  $\zeta(r)$ , fornita dalla Eq.(3.36), sarà costante e varrà

$$\zeta(r) = \frac{\eta}{1-\eta} \quad (3.53)$$

Anche questa soluzione continua a rispettare tutti vincoli che abbiamo imposto affinché fosse possibile, per un essere umano, attraversare il wormhole: è presente una gola per  $r = b_0$ , non vi è nessun orizzonte degli eventi (dato che  $\Phi$  è costante ovunque) e il diagramma di embedding "svasa" verso l'esterno dato che  $\eta > 0$ . Si noti che questa è una soluzione più generale di quella trovata nella sezione precedente [Sez.3.5.1] infatti se ponessimo  $\Phi_0 = 0$  e  $\eta = 1/2$  riottenremmo le Eq.(3.43) già affrontate e discusse. Per semplicità proseguiremo nella nostra risoluzione imponendo che  $\eta = 1/2$ .

Ricordiamo che per quanto detto nella Sez.3.4.2, le equazioni di Einstein permettono che  $\rho(r)$  e  $p(r)$  presentino delle discontinuità ma vincolano  $\tau(r)$  ad essere continua dunque dovrà tendere a zero quando si avvicina alla superficie di raggio  $R_S$ . Per fare ciò risulta conveniente introdurre uno strato di transizione  $R_S + \Delta R$  fra la regione interna alla superficie e quella esterna; in particolare uniremo la soluzione interna con lo strato di transizione in  $r = R_S$  e successivamente uniremo lo strato di transizione con il vuoto esterno in  $r = R_S + \Delta R$ . Per questa regione di spazio utilizziamo il seguente materiale:

$$\rho(r) = \frac{\tau(R_S)}{c^2} \frac{R_S}{\Delta R} \quad (3.54a)$$

$$\tau(r) = \tau(R_S) - \frac{\tau(R_S)}{\Delta R}(r - R_S) \quad (3.54b)$$

che prevedono una densità costante e una lineare decrescita di  $\tau$  verso il valore nullo.

Per quanto riguarda le equazioni di Einstein [Eq.(3.13a),(3.13b) e (3.14c)]; esse im-

plicano quanto segue

$$b(r) = \frac{8\pi G}{c^4}(r^3 - R_S^3) \frac{R_S \tau(R_S)}{\Delta R} + b(R_S) \quad (3.55a)$$

$$\Phi'(r) = \frac{-8\pi G c^{-4} \tau r^3 + b(r)}{2r(r - b(r))} \quad (3.55b)$$

$$p(r) = \frac{r}{2} [(\rho c^2 - \tau)\Phi' - \tau'] - \tau \quad (3.55c)$$

Supponiamo per semplicità che lo spessore dello strato di transizione sia  $\Delta R = b(R_S)$  e assumiamo che esso giaccia lontano dalla gola,  $R_S \gg b_0$ , dunque  $\Delta R = b(R_S) \ll R_S$ . Le Eq.(3.54) e (3.55) implicano, a meno di un errore dell'ordine di  $\Delta R/R_S \ll 1$ , che  $b$ ,  $\Phi'$  e  $\tau$  varino linearmente attraverso lo spessore dove invece  $p$  e  $\rho$  rimangono costanti; dunque possiamo scrivere

$$b(r) = b(R_S) + \frac{r - R_S}{\Delta R} b(R_S) \Rightarrow B = b(R_S + \Delta R) = 2b(R_S) \quad (3.56a)$$

$$\Phi'(r) = \frac{r - R_S}{\Delta R} \left( \frac{B}{2R_S^2} \right) \Rightarrow \Phi'(R_S + \Delta R) = \frac{B}{2R_S^2} \quad (3.56b)$$

$$\tau(r) = \tau(R_S) - \frac{r - R_S}{\Delta R} \tau(R_S) \Rightarrow \tau(R_S + \Delta R) = 0 \quad (3.56c)$$

$$p(r) = \frac{R_S}{2\Delta R} \tau(R_S) \quad (3.56d)$$

$$\rho(r) = \frac{R_S}{\Delta R} \frac{\tau(R_S)}{c^2} \quad (3.56e)$$

dove:

- le Eq.(3.56a) e (3.56b) garantiscono una unione, in  $r = R_S$ , tra la soluzione interna alla superficie e quella esterna (che non è nient'altro che la soluzione di Schwarzschild nel vuoto che ci viene data dalle Eq.(3.13a)-(3.13c) valutate appunto nel vuoto della regione esterna  $r > R_S$ ).
- Le Eq.(3.56c) e (3.56d) ci mostrano che nello spessore è presente un'enorme pressione volta a controbilanciare il gradiente radiale di  $\tau$ . Comparata ad esse, la forza gravitazionale nello spessore risulta trascurabile.
- Le Eq.(3.56c)-(3.56e) ci forniscono l'equazione di stato del materiale nello strato di transizione, la quale risulta indipendente da  $\tau$  e può essere scritto come  $p = \rho/2$ . La scelta della densità  $\rho$  [Eq.(3.54a)] del materiale che compone lo strato di transizione è determinata dalla nostra richiesta che il materiale sia non esotico in questa regione.

Possiamo localizzare le stazioni spaziali ai bordi della regione di Schwarzschild ( $r_1 = r_2 = R_S + \Delta R$ ) e richiediamo che il viaggiatore sia in grado di fermarsi in esse senza che sia schiacciato dalle forze gravitazionali.

Il vincolo sull'accelerazione riportato in Eq.(3.29) risulta essere più restrittivo

$$|\Phi'(R_S + \Delta R)| = \frac{B}{2R_S^2} \leq \frac{1}{9.2 \times 10^{15} \text{ m}} \quad (3.57)$$

dove abbiamo utilizzato l'Eq.(3.56b) ponendo  $B/2 = \Delta R \ll R_S$ . L'Eq.(3.51a), posto  $\eta = 1/2$ , fornisce la seguente condizione sul valore di  $R_S$

$$R_S > 1 \times 10^{11} \text{ m} \left( \frac{b_0}{10 \text{ m}} \right)^{1/3} \simeq 0.6 \text{ u.a.} \left( \frac{b_0}{10 \text{ m}} \right)^{1/3} \quad (3.58)$$

dove "u.a." sta per "unità astronomica".<sup>6</sup> Abbiamo reso la superficie di raggio  $R_S$  molto grande al fine di ridurre l'accelerazione di gravità sulle stazioni spaziali. Questo valore di  $R_S$  implica, attraverso le Eq.(3.29) e (3.56a), che

$$B \equiv b(R_S + \Delta R) = 2b(R_S) \simeq 1.9 \times 10^6 \text{ m} \left( \frac{b_0}{10 \text{ m}} \right)^{2/3} \quad (3.59)$$

Quando la soluzione esterna di Schwarzschild, riportata di seguito,

$$b(r) = B, \quad \Phi(r) = \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{B}{r} \right) \text{ per } r > R_S + \Delta R \quad (3.60)$$

viene accoppiata con lo strato di transizione [Eq.(3.56)] troviamo che, a meno di correzioni dell'ordine di  $\Delta R/R_S \ll 1$ ,  $\Phi$  deve assumere il seguente valore all'interno del wormhole

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{B}{R_S} \right) \simeq \frac{B}{2R_S} \quad (3.61)$$

Questo ci permette di osservare che  $e^{2\Phi_0} = (1 - B/R_S)$  differisce di poco dall'unità e quindi il tempo proprio misurato da un osservatore statico risulta praticamente lo stesso di quello misurato attraverso il wormhole.

L'analisi riguardante il viaggio che è stata affrontata nella precedente sezione rimane valida anche in questo caso; in particolare un viaggio confortevole richiede che nella gola  $v \leq 6b_0 \text{ s}^{-1}$ . Nella sezione precedente ci eravamo potuti permettere che la velocità potesse rimanere costante lungo tutto il percorso, ma ora, essendo che le stazioni spaziali si trovano ad una distanza che è circa  $10^6$  volte più grande di quella nel caso precedente

---

<sup>6</sup>L'unità astronomica è un'unità di misura della lunghezza e rappresenta la distanza media tra il Sole e la Terra e vale circa  $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ .

(distanza che è stata forzata dalla richiesta che l'accelerazione di gravità nelle stazioni spaziali fosse trascurabile) dobbiamo richiedere che il viaggiatore debba poter variare la propria velocità durante il percorso. Tuttavia questa variazione non è arbitraria, essa dipende dal vincolo sulla gravità mareale fornitaci dalla Eq.(3.34b) dunque

$$\left| \frac{\gamma^2}{2r^2} \left( \frac{v}{c} \right)^2 \left( b' - \frac{b}{r} \right) \right| \leq \frac{1}{(1 \times 10^8 \text{ m})^2} \quad (3.62)$$

la quale si riduce, considerando  $\eta = 1/2$  nell'Eq.(3.51) e  $\gamma \simeq 1$ , a

$$\frac{v}{c} \leq \left( \frac{2r}{1 \times 10^8 \text{ m}} \right) \left( \frac{r}{b_0} \right)^{1/4} \implies v \leq 6b_0 \left( \frac{r}{b_0} \right)^{5/4} \text{ s}^{-1} \quad (3.63)$$

Tuttavia la sua velocità è anche vincolata dalla richiesta che egli non risenta di un'accelerazione troppo grande [Eq.(3.29) con  $\gamma \simeq 1$ ,  $\Phi$  costante e  $v \simeq dl/dt$ ] quindi

$$\left| \frac{dv}{dt} \right| = \left| \frac{d^2l}{dt^2} \right| \leq g_{\oplus} \quad (3.64)$$

Ora ipotizziamo un andamento dell'accelerazione radiale in modo da permettere al viaggiatore di arrivare a riposo sia nella gola che nella stazione spaziale superiore ricordando che  $R_S/2$  rappresenta circa metà della distanza fra stazione inferiore e gola o, analogamente, fra gola e stazione superiore (dato che  $R_S \gg b_0$ )

$$\frac{d^2l}{dt^2} = \begin{cases} +g_{\oplus} & \text{dalla stazione inferiore fino ad } R_S/2 \\ -g_{\oplus} & \text{da } R_S/2 \text{ fino alla gola} \\ +g_{\oplus} & \text{dalla gola fino a } R_S/2 \\ -g_{\oplus} & \text{da } R_S/2 \text{ fino alla stazione superiore} \end{cases} \quad (3.65)$$

Seguendo questo schema la velocità massima raggiunta sarà

$$v_{max} = \sqrt{\frac{1}{2} g_{\oplus} R_S} = 7 \times 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \left( \frac{R_S}{1 \times 10^{11} \text{ m}} \right)^{1/2} \quad (3.66)$$

che ci fornisce un valore  $\gamma \simeq 1$ , come supposto, fintanto che  $R_S \ll 1 \times 10^{16} \text{ m}$

Il profilo di velocità  $v(r)$  associato allo schema (3.65) soddisfa pienamente, per qualsiasi valore di  $r$ , i vincoli mareali riportati in Eq.(3.63) e ci permette di calcolare il tempo totale impiegato per andare da una stazione all'altra

$$\Delta\tau_T = \Delta t = \sqrt{\frac{32R_S}{g_{\oplus}}} \simeq 7 \text{ giorni} \left( \frac{R_S}{1 \times 10^{11} \text{ m}} \right)^{1/2} \quad (3.67)$$

Anche questa tipologia di wormhole, ammesso e concesso che esista la materia esotica, si presenta come un ottimo candidato per i viaggi interstellari.

### 3.5.3 Soluzione con materia esotica confinata nelle vicinanze della gola

Se ipotizziamo di utilizzare materia esotica con densità di energia negativa, misurata da un osservatore statico, possiamo decidere di confinarla in una regione arbitrariamente piccola della gola ottenendo così un wormhole assurdamente perfetto. Un esempio è il seguente:

$$b(r) = b_0 \left[ 1 - \frac{r - b_0}{a_0} \right], \quad \Phi(r) = 0 \text{ per } b_0 \leq r \leq b_0 + a_0 \quad (3.68a)$$

$$b = \Phi = 0 \text{ per } r \geq b_0 + a_0 \quad (3.68b)$$

Utilizziamo le equazioni di Einstein [Eq.(3.14a)-(3.14c)] per capire che tipo di materiale dovrebbe essere necessario affinché si produca un tale wormhole:

- per  $b_0 \leq r \leq b_0 + a_0$  il materiale dovrà necessariamente avere

$$\rho(r) = \left[ -\frac{b_0 c^2}{a_0 4\pi G r^2} \right] \left[ 1 - \frac{r - b_0}{a_0} \right] < 0 \quad (3.69a)$$

$$\tau(r) = \frac{b_0 c^4 \left[ 1 - \frac{r - b_0}{a_0} \right]^2}{8\pi G r^3} \quad (3.69b)$$

$$p(r) = \frac{1}{2} [\tau(r) - \rho(r) c^2] \quad (3.69c)$$

- per  $r \geq b_0 + a_0$  lo spazio-tempo è piatto [Eq.(3.68b)] e vuoto dunque avremo  $\rho = \tau = p = 0$

Dato che  $\Phi = 0$  ovunque, se un viaggiatore si muovesse a velocità costante allora non ci sarebbero forze che generano accelerazione e le forze mareali sarebbero sopportabili fintanto che viene rispettato il vincolo datoci dalla Eq.(3.34b)

$$\left| \frac{\gamma^2}{2r^2} \left( \frac{v}{c} \right)^2 \left( b' - \frac{b}{r} \right) \right| \leq \frac{1}{(1 \times 10^8 \text{ m})^2} \quad (3.70)$$

che si riduce, utilizzando le Eq.(3.68), ad avere

$$\left( \frac{v}{c} \right) \leq \frac{a_0 b_0}{(1 \times 10^8 \text{ m})^2} \text{ per } b_0 \leq r \leq b_0 + a_0 \quad (3.71)$$



Quindi il tempo totale di attraversamento, finché  $v/c \ll 1$ , sarà

$$\Delta\tau_T \simeq \Delta t \simeq \frac{\pi a}{v} \geq \left( \sqrt{\frac{a_0}{b_0}} \right) s \quad (3.72)$$

Indipendentemente da quanto sarà la circonferenza del wormhole ( $2\pi b_0$ ), scegliendo  $a_0$  arbitrariamente piccola saremmo in grado di confinare la materia esotica in una regione anch'essa arbitrariamente piccola; questo ci assicurerebbe che il wormhole sia attraversabile e che il viaggio, compiuto in un tempo arbitrario, soddisferebbe tutti i requisiti per poter intrapreso da un essere umano.

Sfortunatamente, quando  $\rho c^2$  è vincolato ad essere positivo, la materia esotica non può essere confinata in una regione arbitrariamente piccola e produrrebbe comunque un significativo svasamento verso l'esterno dell'embedding. Una strategia per ottenere un wormhole con il massimo confinamento della materia esotica sarebbe la seguente: per prima cosa dovremmo permettere alla materia esotica di dominare la regione centrale del wormhole intorno alla gola e dovremmo usare una quantità sufficiente di questo materiale per ottenere un considerevole flaring-out nella funzione della geometria dell'embedding  $z(r)$ , successivamente dovremmo accoppiare questa regione di materia esotica ad una regione di materia quasi-esotica<sup>7</sup> e infine, ad un dato raggio  $R_S$  sufficientemente grande da rendere confortevoli le forze gravitazionali di Schwarzschild, dovremmo usare uno strato superficiale di spessore  $\Delta R$  da accoppiare alla soluzione di Schwarzschild per l'esterno vuoto.

Tuttavia sembra impossibile ottenere un considerevole flaring verso l'esterno su piccole scale (inferiori alla dimensione della gola  $b_0$ ) senza ricorrere ad una  $\rho$  negativa. Per vedere questo richiamiamo l'equazione che descrive la pendenza dell'embedding [Eq.(3.18)]

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left( \frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{-1/2} \quad (3.73)$$

Se per un qualche valore  $r_c = b_0 + \Delta r$ , suddetta pendenza dovesse valere 1 (il che corrisponderebbe ad un pendenza di  $45^\circ$  rispetto alla superficie piatta dell'embedding e quindi ad un significativo flaring dalla gola) allora noi dovremmo avere

$$\frac{b_0 + \Delta r}{b(b_0 + \delta r)} = 2 \quad (3.74)$$

Se fosse poi possibile richiedere che  $\Delta r/b_0 \ll 1$  allora potremmo sviluppare in serie di

---

<sup>7</sup>Materia il cui tensore energia-impulso obbedisce a tutte le condizioni di energia ma dista poco dal violarle; in questo modo potremmo allontanarci ed avere come conseguenza solo un piccolo, se non nullo, flaring-back-in.

Taylor rispetto  $\Delta r/b_0$  e ottenere

$$\frac{b_0 + \Delta r}{b_0 + \Delta r b'(b_0)} = \frac{1 + \Delta r/b_0}{1 + (\Delta r/b_0)b'} = 1 + 1 + \frac{\Delta r}{b_0}(1 - b') \simeq 2 \quad (3.75)$$

e questo è chiaramente impossibile se  $b'$  non è negativo (che implicherebbe anche un valore di  $\rho$  negativo come si può dedurre dall'Eq(3.13a))

Se ci vogliamo attenere a soluzioni che mantengono  $\rho$  positivo dobbiamo necessariamente consentire alla materia esotica di occupare una regione di spazio macroscopicamente ampia ( $\Delta r \geq b_0$ ). Come esempio di tale wormhole poniamo che la nostra soluzione interna, valida sia dentro che intorno alla gola, abbia la stessa forma esotica vista nelle due sezioni precedenti [ $b(r) = (b_0 r)^{1/2}$ ,  $\Phi = \Phi_0$  per  $b_0 \leq r \leq r_c$ ] e vogliamo unire, in  $r = r_c$ , questa materia con quella non esotica. Si scopre che sia la dimensione del wormhole che il tempo di attraversamento risultante sono dominati dal valore della pendenza dell'embedding in  $r = r_c$  e, di conseguenza, l'utilizzabilità impone che la pendenza sia scelta piuttosto piccola. Scegliamo dunque  $dz/dr(r_c) = 10^{-1}$  che fornisce  $r_c = 10^4 b_0$  e, per  $r_c \leq r \leq R_S$ , scegliamo  $b(r) = 10^{-2}$ ,  $\Phi = \Phi_0$  che ci forniscono il tensore energia-impulso  $\tau = \rho c^2$ ,  $p = 0$ . Infine, per  $r = R_S$ , mandiamo  $\tau$  a zero in uno strato superficiale di spessore  $\Delta R = b(R_S)$  e densità di massa  $\rho = R_S \tau(R_S) / \Delta R c^2$ . Questo crea un gradiente, in  $\Phi$ , sul bordo esterno dello strato

$$\Phi' = \frac{B}{2R_S^2} = 10^{-2} R_S \quad (3.76)$$

che implica  $B = R_S/50$  nella regione esterna di Schwarzschild. Se, come nella sezione precedente, posizioniamo le stazioni spaziali appena fuori dallo strato di transizione, allora la richiesta che l'accelerazione gravitazionale sulle stazioni sia sopportabile implica, indipendentemente dal valore di  $b_0$ , che sia

$$R_S \geq 9.2 \times 10^{13} \text{ m} \simeq 600 \text{ u.a.} \quad (3.77)$$

Quindi il raggio della superficie deve essere sufficientemente grande da mantenere confortevole la vita nelle stazioni che è il motivo che ci ha spinto ad assumere un valore di  $r_c$  così elevato.

Possiamo ora scrivere la soluzione completa del wormhole

$$b(r) = \begin{cases} (b_0 r)^{1/2} & \text{per } b_0 \leq r \leq r_c = 10^4 b_0 \\ 1 \times 10^{-2} r & \text{per } r_c \leq r \leq r_S \simeq 9.2 \times 10^{13} \text{ m} \\ \frac{1}{3} \frac{r^3 - R_S^3}{R_S^2} + \frac{R_S}{100} & \text{per } R_S \leq r \leq R_S + \Delta R \text{ con } \Delta R = \frac{R_S}{100} \\ B \equiv \frac{R_S}{50} & \text{per } r \geq R_S + \Delta R \end{cases} \quad (3.78a)$$

$$\Phi(r) = \begin{cases} \Phi_0 \simeq -10^{-2} & \text{per } b_0 \leq r \leq R_S + \Delta R \\ \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{B}{r} \right) & \text{per } r \geq R_S + \Delta R \end{cases} \quad (3.78b)$$

$$\begin{cases} \zeta = 1 \quad \rho c^2 = \frac{\tau}{2} = 2p & \text{per } b_0 \leq r \leq r_c \\ \zeta = 0 \quad \rho c^2 = \tau, \quad p = 0 & \text{per } r_c \leq r \leq R_S \\ \rho = \frac{R_S \tau (R_S)}{\Delta R c^2} & \text{per } R_S \leq r \leq R_S + \Delta R \\ \rho c^2 = \tau = p = 0 & \text{per } r \geq R_S + \Delta R \end{cases} \quad (3.78c)$$

Si può benissimo verificare che se il wormhole fosse attraversato seguendo lo stesso schema riportato in Eq.(3.65) allora il viaggio sarebbe completamente confortevole per un viaggiatore umano, però richiederebbe un tempo totale di percorrenza di circa 200 giorni.

# Conclusioni

Da una parte le soluzioni alle equazioni di Einstein presentate in questa tesi risultano essere una concreta possibilità, per una civiltà sufficientemente avanzata, di una vera e propria costruzione di wormhole attraversabili. Dall'altra, tuttavia, qualsiasi speranza che essi possano essere costruiti, o quantomeno osservati, deve fare affidamento sulla futura scoperta o di un campo esotico o di uno stato quantico, di campi già noti, con una tensione che supera la densità di massa-energia su scale di lunghezza macroscopiche.

Partendo da questa considerazione si presenta una sequenza a cascata di innumerevoli ostacoli che potrebbero impedirci di realizzare o osservare i wormhole

1. Dobbiamo essere pronti all'eventualità che l'esistenza di tali campi o stati esotici possa essere esclusa per motivi microfisici fondamentali e che tale esclusione vanificherebbe qualsiasi teoria sui wormhole.
2. Supponendo l'esistenza di un campo o di uno stato quantico esotico, l'assemblaggio di un wormhole potrebbe sembrare particolarmente scoraggiante. Esso comporterebbe un cambiamento nella topologia dello spazio e per quanto riguarda la RG classica tali cambiamenti, probabilmente, comporterebbero singolarità spazio-temporali. Quest'ultime potrebbero essere comprese correttamente qualora la gravità venisse completamente quantizzata con successo. D'altra parte vi sono forti ragioni per ritenere che su scale di lunghezza dell'ordine della lunghezza di Planck-Wheeler,  $l_{P-W} \equiv (G\hbar/c^3)^{1/2}$ , gli effetti della gravità quantistica dominino e producano una struttura spazio-temporale moltepliciamente connessa. Dunque si potrebbe immaginare una civiltà estremamente avanzata che estrae un wormhole da questo spazio-tempo quanto-meccanico e submicroscopico per poi ingrandirlo e spostarne le aperture finché non avrà assunto le dimensioni, la forma e la posizione richieste per uno specifico progetto di viaggio interstellare. Oggi chiaramente siamo molto lontani dal poter analizzare, anche solo teoricamente, un simile processo e, ricordiamo, che qualsiasi analisi di questo tipo richiederebbe una comprensione affidabile della gravità quantistica che non è ancora stata formalmente teorizzata con successo, nonostante ci siano molti studi a riguardo.

3. Qualora la meccanica quantistica riuscisse a prevedere questa particolare topologia, i wormhole potrebbero essere instabili, o peggio, instabilizzabili e questo ne impedirebbe l'utilizzo per i viaggi interstellari.
4. Entrando in contatto con un wormhole stabile il campo esotico esistente potrebbe interagire solo fortemente con la materia ordinaria il che ne impedirebbe l'attraversamento da parte di esseri umani e di qualsiasi macchina costruita dall'uomo.

Amnesso e concesso che le precedenti condizioni siano tutte verificate, consideriamo il seguente esperimento mentale. Supponiamo di avere un wormhole che collega due regioni dello spazio-tempo piatto e supponiamo inoltre che la distanza esterna tra le "bocche" del wormhole sia sufficientemente grande mentre la distanza interna, attraverso la gola, sia sufficientemente piccola. Dato l'evento "1", che rappresenta un viaggiatore che entra in una bocca, e l'evento "2", che rappresenta lo stesso viaggiatore che esce dal wormhole dall'altra bocca, essi saranno visti dagli osservatori al di fuori del wormhole come eventi con una separazione di tipo spazio. Supponiamo ora che ci sia un sistema di riferimento inerziale che si muove ad alta velocità dalla prima bocca verso la seconda esternamente; in questo sistema di riferimento l'evento di uscita precederebbe l'evento d'entrata. Se ci fosse dunque un secondo wormhole in questo sistema di riferimento ad alta velocità, il viaggiatore all'uscita dal primo wormhole potrebbe accelerare fino a raggiungere la velocità delle bocche del secondo wormhole, quindi immergersi in esso e tornare al punto di partenza prima che avvenga l'evento 1. A questo punto potrebbe convincere il se stesso del passato a non entrare nel wormhole e qualora ci riuscisse si creerebbe un paradosso (non essendo mai entrato non avrebbe mai potuto convincere il se stesso del passato a non farlo). Da quanto appena detto sembrerebbe che se una civiltà, sufficientemente avanzata, fosse in grado di costruire più wormhole con velocità relative regolabili, allora tale civiltà potrebbe impiegarli per viaggi a ritroso nel tempo violando così il principio di causalità. Tuttavia l'esistenza di wormhole multipli è vincolata solamente dall'esistenza dei singoli wormhole perché non esiste a priori nessuna ragione per escludere che si possano creare wormhole multipli. A differenza delle altre problematiche, le quali possono essere "superate" ipotizzando che le leggi della fisica non siano del tutto complete, questo sembra essere un ostacolo insormontabile perché ammettere la possibilità di viaggiare a ritroso nel tempo vorrebbe dire far cadere il principio di causalità, principio che è universalmente riconosciuto per essere alla base di qualsiasi legge fisica ragionevolmente valida.

Quello della materia esotica, affrontato nel dettaglio nel capitolo precedente, risulta essere solo il primo di una lunga serie di problemi con i quali ci scontreremmo se decidessimo di portare avanti gli studi sui wormhole. Tuttavia, ad oggi, non abbiamo sufficienti conoscenze per affermare o confutare che le difficoltà sopra citate siano effettivamente

concrete quindi, anche se le leggi della fisica sembrano escludere tutto ciò che riguarda i wormhole, non sarebbe corretto pensare che questi non possano in alcun modo esistere.

All'inizio del nostro percorso ci siamo lasciati con una domanda: "*Se al centro della nostra Galassia ci fosse un wormhole?*". Come ben sappiamo in un buco nero è presente un "punto di non ritorno", l'orizzonte degli eventi, e una singolarità spazio-temporale nel suo centro mentre un wormhole attraversabile possiede la peculiare caratteristica di poter essere attraversato senza particolari ripercussioni. Esso dunque consentirebbe alle particelle e ai campi di attraversarlo quindi le perturbazioni gravitazionali causate da oggetti massicci sull'altro lato del wormhole influenzerebbero il movimento di oggetti, come possono essere le stelle, che si trovano dalla nostra parte. Dal momento che non possiamo inviare sonde e veicoli spaziali attraverso un wormhole o un buco nero l'unico modo per distinguerli è osservare il moto di suddette stelle che quindi potrebbe aiutarci a capire se si tratta effettivamente di un buco nero oppure di un wormhole. La stella più studiata, in orbita attorno a quello che si ritiene essere un buco nero supermassiccio al centro della nostra Galassia, è la stella S2 di cui conosciamo il moto con grande precisione. Eventuali deviazioni dall'orbita prevista potrebbero portarci a pensare che l'oggetto centrale supermassiccio sia un wormhole. Tuttavia le perturbazioni gravitazionali di S2 potrebbero essere causate da altri oggetti che non siamo in grado di vedere, come ad esempio buchi neri più piccoli. Se si dovessero osservare delle deviazioni si dovrebbe costruire un modello più accurato per individuare quale sia realmente la fonte delle perturbazioni. Questo studio potrebbe, tuttavia, portare ad escludere la presenza di un wormhole al centro della nostra galassia ma non permetterebbe di escludere che questi oggetti possano esistere in qualche altra regione dell'Universo che ci circonda.

Dato che tutte le considerazioni fatte fin'ora non sono di buon auspicio per chiunque voglia incominciare uno studio sui wormhole, vorrei concludere, al fine di diffondere un po' di speranza nel lettore, portando all'attenzione il seguente fatto: tra il marzo del 1869 e il giugno del 1870 venne pubblicato per la prima volta un romanzo intitolato "*Vingt mille lieues sous les mers: Tour du monde sous-marin*" meglio conosciuto come "*Ventimila leghe sotto il mare*". Tale romanzo, considerato all'epoca fantascientifico, riportava una descrizione molto accurata di un sottomarino; così dettagliata da presentare svariate caratteristiche che ritroviamo nei sottomarini odierni. L'autore di quest'opera, Jules Verne, fu senza dubbio uno dei più importanti precursori dei viaggi sotto il livello del mare ma non è detto che avesse messo in conto che una tale tecnologia da lui "inventata" sarebbe poi un giorno diventata realtà. Risulta chiaro che non si può fare una perfetta analogia tra quanto accaduto per i sottomarini e la complicata analisi fisica dei wormhole, però chi può che tutti gli studi sui wormhole fatti fino ad ora non permetteranno, un giorno, ad un'umanità più evoluta di compiere viaggi interstellari?

# Bibliografia

- [1] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, J. Wiley, 1972.
- [2] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, 1973.
- [3] M. S. Morris and K. S. Thorne, *Am. J. Phys.* 56, 395 (1988)
- [4] <https://www.sciencefocus.com/news/is-there-a-wormhole-hiding-at-the-centre-of-the-milky-way/>.