

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

## Riduzione integranda per teorie efficaci

**Relatore:**  
Dott. Tiziano Peraro

**Presentata da:**  
Valerio Pinotti

Anno Accademico 2021/2022

## **Abstract**

In questa tesi verrà descritta la tecnica della riduzione integranda, la quale sarà poi applicata alle teorie efficaci. La riduzione integranda consiste di una tecnica per il calcolo di integrali di loop, i quali contribuiscono a fare previsioni teoriche nell'ambito dello studio delle interazioni fondamentali e della teoria quantistica dei campi.

In particolare estenderemo questa tecnica al caso in cui il numeratore dell'integrando presenta un grado di due unità superiore rispetto a quelli che si possono presentare nel Modello Standard. Ciò risulta utile per l'applicazione alle teorie efficaci, le quali consistono di approssimazioni a bassa energia di teorie valide fino a più alte energie. Questa applicazione rappresenta una generalizzazione della nota decomposizione di integrali a un loop.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Ampiezza di scattering</b>	<b>3</b>
2.1	La regola d'oro di Fermi . . . . .	4
2.2	Regole di Feynman . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Riduzione integranda</b>	<b>13</b>
3.1	Rinormalizzazione . . . . .	13
3.1.1	Teorie rinormalizzabili e non rinormalizzabili . . . . .	15
3.2	Regolarizzazione dimensionale . . . . .	17
3.3	Riduzione integranda per un loop . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Residui</b>	<b>23</b>
4.1	Caso $k=n$ . . . . .	23
4.2	Caso $k=n+1$ . . . . .	29
4.3	Caso $k=n+2$ . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>33</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>33</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

Lo scopo di questa tesi è quello di descrivere tecniche di calcolo per fare previsioni teoriche nell'ambito dello studio delle interazioni fondamentali nei processi d'urto. Per fare ciò si andranno innanzitutto a definire alcune grandezze fisiche, quali la sezione d'urto (totale e differenziale) e l'ampiezza di scattering relativa al processo in esame. Quest'ultima è necessaria al fine di poter calcolare la prima, o altre osservabili fisiche. Successivamente all'introduzione di queste grandezze fisiche, verranno poi presentati i concetti fondamentali relativi ai diagrammi di Feynman ed il loro collegamento con le grandezze precedentemente citate; in particolar modo verranno enunciate la regola d'oro di Fermi e, successivamente, le regole di Feynman, tramite le quali è possibile ricavare l'ampiezza di scattering che descrive il processo considerato. In particolare, al fine di poter definire l'ampiezza di scattering, verranno introdotti i diagrammi di Feynman; essi sono uno strumento di calcolo all'interno della teoria delle perturbazioni. Inoltre forniscono una rappresentazione grafica del processo studiato. L'ampiezza di scattering, nella teoria delle perturbazioni, può essere espansa in una serie perturbativa nella quale il primo termine (*leading order*) è caratterizzato da un'incertezza teorica molto alta. I termini successivi sono utili al fine di ottenere risultati più precisi e accurati. In particolar modo verranno considerati diagrammi con un loop i quali, generalmente, contribuiscono al secondo ordine perturbativo dell'espansione dell'ampiezza di scattering.

Tramite le regole di Feynman, a diagrammi con loop vengono associati degli integrali sui possibili stati intermedi, non osservati, nell'evoluzione temporale del sistema fisico analizzato.

Dopo aver applicato queste regole verrà studiato l'integrando dell'ampiezza di scattering al quale sarà applicato il metodo della riduzione integranda, tramite la quale lo si riscrive in maniera tale che risulti più semplice integrarlo per riuscire, così, a calcolare le osservabili fisiche.

Generalizzeremo questa tecnica al caso in cui il numeratore dell'integrando presenta un grado massimo superiore di due unità rispetto a teorie quali la *QCD* (*Quantum ChromoDynamics*) e il *Modello Standard* (*MS*). Questa generalizzazione risulta particolarmente utile per lo studio di uno specifico tipo di teorie: le *teorie efficaci*. Una teoria efficace consiste di un'approssimazione ad energie più basse, di una teoria valida fino a più elevate energie.

# Capitolo 2

## Ampiezza di scattering

Tra le più importanti grandezze fisiche per la fisica moderna, sicuramente è presente la sezione d'urto. Essa viene utilizzata per descrivere processi di interazione tra particelle, quali diffusione e assorbimento. Tramite la sezione d'urto di un processo è possibile quantificare la probabilità che uno stato iniziale si evolva, in seguito ad un qualche tipo d'interazione, in un nuovo stato. Al fine di poter calcolare la sezione d'urto di un processo è necessario, come si vedrà in questo capitolo, definire l'ampiezza di scattering. Quest'ultima verrà ottenuta tramite l'applicazione delle regole di Feynman ad un diagramma descrivente un processo d'interazione tra particelle.

La sezione d'urto, indicata con  $\sigma$ , è una grandezza che dipende in modo intrinseco dal tipo di processo e dalla forza che media l'interazione. Essa può essere interpretata, in analogia con la fisica classica, come l'area, "intorno" ad una particella bersaglio, entro la quale la presenza di una seconda particella induce interazione tra le due. Per questo motivo  $\sigma$  ha le dimensioni di un'area ed in particolare, per quanto riguarda la fisica moderna, dal momento che si ha a che fare con particelle subatomiche, si utilizza, come unità di misura, il *barn* ( $b$ ):

$$1b = 10^{-24} \text{cm}^2 \quad (2.1)$$

Le particelle subatomiche interagiscono, l'una con l'altra, tramite la presenza di tre differenti forze: elettromagnetica, debole e forte. Non andremo a descrivere in dettaglio queste tre interazioni. Semplicemente delineremo le principali caratteristiche di esse, quali carica e mediatori. Si ricorda che la carica relativa all'interazione elettromagnetica, è la carica elettrica e che questa forza viene mediata dai fotoni. Per quanto riguarda la forza debole, estremamente importante per quanto riguarda i decadimenti radioattivi, i mediatori sono i bosoni  $W^\pm$  e  $Z^0$ . Infine, la forza forte, è caratterizzata dalla carica di colore e le interazioni sono mediate dai gluoni.

In generale, considerando uno stato iniziale ed uno finale, esistono vari modi in cui il primo può evolvere nel secondo; ad esempio, può variare la forza che media l'interazione. Al fine di ottenere la sezione d'urto totale, è necessario sommare tutti i contributi relativi a ciascun processo possibile:

$$\sigma_{tot} = \sum_i \sigma_i. \quad (2.2)$$

Queste argomentazioni possono essere proposte anche per un'altra grandezza fisica estremamente rilevante in fisica delle particelle: il tasso di decadimento. Questa

grandezza fisica, usualmente indicata con  $\Gamma$ , rappresenta la probabilità, per unità di tempo, che una particella decada in un qualche stato finale. Generalmente una particella instabile può decadere in più di uno stato finale. Ciascun decadimento è caratterizzato da un diverso tasso di decadimento, e quindi da una diversa probabilità.

Ad esempio, se consideriamo la particella  $\pi^+$ , essa decade principalmente nel seguente modo:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, \quad (2.3)$$

però è possibile che decada, seppur con minor probabilità, anche nei seguenti modi:

$$\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e, \quad \pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu + \gamma, \quad \pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \pi^0 \quad (2.4)$$

Il tasso di decadimento totale, come per la sezione d'urto, è dato dalla somma dei tassi di decadimento per ogni processo:

$$\Gamma_{tot} = \sum_i \Gamma_i. \quad (2.5)$$

In questo modo è possibile stimare la vita media di una particella come l'inverso del suo tasso di decadimento totale:

$$\tau = \frac{1}{\Gamma_{tot}}. \quad (2.6)$$

## 2.1 La regola d'oro di Fermi

Al fine di poter calcolare osservabili fisiche, quali sezione d'urto e tasso di decadimento, è necessario valutare l'ampiezza di scattering  $M$ . Quest'ultima contiene al suo interno tutte le informazioni dinamiche del processo che viene considerato. Come si vedrà nella prossima sezione, essa viene calcolata trovando e valutando tutti i diagrammi di Feynman rilevanti e applicando, ad essi, le regole di Feynman.

La *regola d'oro di Fermi*, che prende il nome dal fisico italiano Enrico Fermi, è una formula che viene utilizzata per calcolare la probabilità, per unità di tempo, che avvenga una transizione da un autostato ad energia definita verso un insieme continuo di autostati dell'energia, in seguito ad una piccola perturbazione. Fintantoché la perturbazione non dipende dal tempo, anche la probabilità ne è indipendente.

La probabilità, per unità di tempo, è proporzionale al prodotto tra il modulo quadro dell'ampiezza di probabilità e lo spazio delle fasi accessibile al processo. Quest'ultimo fattore riflette quanto è possibile un processo: infatti, un processo è tanto più possibile se sono presenti molti "modi di disporsi" nello stato finale, il che avviene se la differenza tra massa finale ed iniziale, è grande.

Ad esempio, se consideriamo una particella pesante che decade in fotoni, questo processo ha un grande spazio delle fasi accessibile, dato che i fotoni non sono massivi. Invece il seguente decadimento,

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (2.7)$$

può accedere ad uno spazio delle fasi ridotto in quanto la differenza di massa è molto piccola. Infine, il decadimento

$$\Omega^- \rightarrow \Xi^- + \bar{K}^0 \quad (2.8)$$

non ha uno spazio delle fasi accessibile perché la somma delle masse del barione  $\Xi^-$  (composto da due quark strange ed un quark down) e del kaone  $\bar{K}^0$  (formato da un antiquark down ed un quark strange) è maggiore della massa del barione  $\Omega^-$  (composto da tre quark strange). Infatti processi come il (2.8) non vengono osservati.

Consideriamo un sistema che inizialmente si trova in un autostato  $|i\rangle$ , di una certa hamiltoniana  $\hat{H}_0$ , che ad un certo punto è soggetto ad una piccola perturbazione  $\hat{V}$ . La regola di Fermi afferma che la probabilità, per unità di tempo, che lo stato  $|i\rangle$  evolva in uno stato finale  $|f\rangle$  è data, espandendo al primo ordine della perturbazione, da:

$$P_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | \hat{V} | i \rangle|^2 \rho(E_f); \quad (2.9)$$

dove  $\rho(E_f)$  è la densità dello stato finale, di energia  $E_f$  e rappresenta, per quanto detto prima, lo spazio delle fasi accessibile al processo. Il termine  $\langle f | \hat{V} | i \rangle$  è l'elemento di matrice della perturbazione, tra i due stati e, quindi, viene identificato con l'ampiezza di probabilità  $M$ . La costante  $\frac{2\pi}{\hbar}$  è necessaria al fine di avere un risultato dimensionalmente coerente.

In questo modo, come si vedrà nella sezione 2.2, utilizzando le regole di Feynman, sarà possibile determinare l'ampiezza di probabilità  $M$ , tramite la quale, conoscendo stato iniziale e finale, con la regola d'oro, si ottiene la probabilità del processo.

L'ampiezza di scattering è legata ad uno strumento molto importante in teoria quantistica dei campi: la matrice  $S$ . Questa matrice consiste della somma di tutte le probabilità di transizione (i.e. le ampiezze di scattering) tra stati quantistici iniziali e finali, in processi d'urto tra particelle. In particolare, se si considerano come stato iniziale il ket  $|i\rangle$  e come stato finale il ket  $|f\rangle$ , si ha la seguente relazione:

$$M_{if} = \langle i | S | f \rangle \quad (2.10)$$

Questa matrice viene indicata con la lettera  $S$ , in quanto essa è anche chiamata *matrice di scattering*.

Per valutare l'ampiezza di probabilità,  $M$ , si utilizzano i diagrammi di Feynman, i quali furono introdotti per la prima volta nel 1948 dal fisico statunitense Richard P. Feynman. I diagrammi sono rappresentazioni grafiche dell'espressione matematica che descrive le interazioni di una o più particelle subatomiche.

Nella figura 2.1 è riportato un esempio di diagramma di Feynman: si vedono due particelle che si avvicinano al centro del diagramma, interagiscono, ed altre due particelle, uguali o diverse da quelle iniziali, che si allontanano. Generalmente si usa come convenzione quella di porre la linea temporale orizzontalmente, con il verso positivo diretto a destra. In qualunque diagramma di Feynman, le linee esterne rappresentano delle particelle reali, mentre le restanti linee, cioè quelle interne, rappresentano particelle virtuali. Per convenzione, una linea interna ondulata, come in figura, rappresenta un fotone; per questo motivo, un possibile processo, rappresentato dal diagramma in figura, è il seguente:

$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-, \quad (2.11)$$

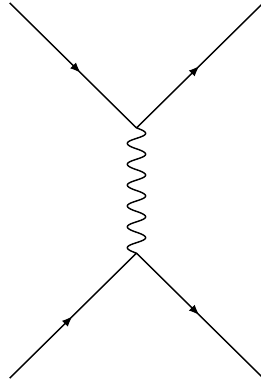


Figura 2.1: Esempio di diagramma di Feynman

nel quale due elettroni si avvicinano, uno dei due emette un fotone, il quale viene poi assorbito dall'altro, e poi si allontanano.

Di seguito è proposto un esempio di come l'ampiezza di scattering è legata alla sezione d'urto. Questa trattazione segue le linee guida presenti all'interno di [2]. Nel caso generale di due particelle che collidono generando  $n-2$  particelle, cioè per processi del tipo  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots + n$  si ottiene il seguente risultato:

$$\sigma = \alpha \int |M|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - \dots - P_n) \prod_{j=3}^n 2\pi \delta(P_j^2 - m_j^2 c^2) \theta(P_j^0) \frac{d^4 P_j}{(2\pi)^4}, \quad (2.12)$$

dove  $\alpha$  è un coefficiente che dipende da massa ed impulso delle particelle iniziali ed ha la seguente espressione:

$$\alpha = \frac{S \hbar^2}{4\sqrt{(P_1 \cdot P_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}}. \quad (2.13)$$

$S$  è un fattore correttivo statistico che elimina eventuali ridondanze dovute alla presenza di particelle identiche nello stato finale. Per ogni sottogruppo di  $k$  particelle identiche,  $S$  presenta un fattore  $\frac{1}{k!}$ . Ad esempio, per un processo del tipo  $a \rightarrow b + b + c + c + c$ , si ha:

$$S = \frac{1}{2!} \frac{1}{3!} = \frac{1}{12}. \quad (2.14)$$

Nel caso in cui, nello stato finale, non vi siano particelle identiche, il quale è il caso più probabile, si ha  $S = 1$ . Nell'equazione (2.12) la funzione a scalino di Heaviside  $\theta(x)$  serve per garantire che le particelle nello stato finale abbiano energie positive in quanto:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se } x < 0 \\ 1 & , \quad \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Nel nostro caso  $x = P_j^0 = \frac{E_j}{c}$ , e consiste nella prima componente del quadrimpulso delle particelle finali.



Per risolvere l'integrale presente nell'espressione della sezione d'urto è conveniente separare il volume quadridimensionale in una parte temporale ed una spaziale. Omettendo gli indici  $j$  possiamo scrivere:

$$d^4 P = dP^0 d^3 \mathbf{p} \quad (2.15)$$

L'integrale in  $P^0$  può essere svolto semplicemente sfruttando la delta di Dirac presente all'interno della produttoria:

$$\delta(P^2 - m^2 c^2) = \delta((P^0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 c^2). \quad (2.16)$$

Sfruttando la seguente proprietà della delta di Dirac:

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} [\delta(x - a) + \delta(x + a)], \quad (2.17)$$

possiamo scrivere:

$$\theta(P^0) \delta[(P^0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 c^2] = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}} \delta(P^0 - \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}). \quad (2.18)$$

La funzione  $\theta$  elimina il contributo dato da  $P^0 = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}$  ed è uguale ad uno per  $P^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}$ . In questo modo la (2.12) può essere scritta nel seguente modo:

$$\sigma = \alpha \int |M|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - \dots - P_n) \prod_{j=3}^n \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{p}_j^2 + m_j^2 c^2}} \frac{d^3 \mathbf{p}_j}{(2\pi)^3}. \quad (2.19)$$

Considerando il processo  $A + A \rightarrow B + B$ , del quale ne è data una rappresentazione nella figura 2.4, abbiamo che la delta di Dirac diventa  $\delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - P_4)$  e gli unici indici possibili per la produttoria sono  $j=3$  e  $j=4$ .

A questo punto possiamo introdurre un sistema di riferimento solidale con il centro di massa, nel quale  $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$ ; in questo sistema di riferimento possiamo scrivere:

$$\sigma = \frac{S \hbar^2 c}{64\pi^2 (E_1 + E_2) |\mathbf{p}_1|} \int |M|^2 \frac{\delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - P_4)}{\sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_3^2 c^2} \sqrt{\mathbf{p}_4^2 + m_4^2 c^2}} d^3 \mathbf{p}_3 d^3 \mathbf{p}_4 \quad (2.20)$$

Se separiamo parte temporale e parte spaziale come fatto precedentemente, in questo caso possiamo scrivere la delta di Dirac come  $\delta(\frac{E_1 + E_2}{c} - P_3^0 - P_4^0) \delta^3(\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4)$ .

L'integrazione in  $\mathbf{p}_4$ , per la presenza della seconda delta di Dirac, porta  $\mathbf{p}_4$  in  $-\mathbf{p}_3$ ; per cui, ricordando che  $P^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}$ , si ottiene:

$$\sigma = \left( \frac{\hbar}{8\pi} \right)^2 \frac{Sc}{(E_1 + E_2) |\mathbf{p}_1|} \int |M|^2 \frac{\delta[\frac{E_1 + E_2}{c} - \sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_3^2 c^2} - \sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_4^2 c^2}]}{\sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_3^2 c^2} \sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_4^2 c^2}} d^3 \mathbf{p}_3 \quad (2.21)$$

Nella maggior parte dei casi, la grandezza fisica di interesse è la sezione d'urto differenziale, cioè  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ , dove  $d\Omega$  è l'elemento di angolo solido.

Per cui, passando in coordinate polari sferiche ( $d^3 \mathbf{p}_3 = r^2 dr d\Omega = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$ ,  $|\mathbf{p}_3| = r$ ):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{\hbar}{8\pi} \right)^2 \frac{Sc}{(E_1 + E_2) |\mathbf{p}_1|} \int_0^\infty |M|^2 \frac{\delta[\frac{E_1 + E_2}{c} - \sqrt{r^2 + m_3^2 c^2} - \sqrt{r^2 + m_4^2 c^2}]}{\sqrt{r^2 + m_3^2 c^2} \sqrt{r^2 + m_4^2 c^2}} r^2 dr \quad (2.22)$$

Calcolando l'integrale in  $r$  si trova il seguente risultato:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{S|M|^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|}, \quad (2.23)$$

dove  $|\mathbf{p}_f|$  è il modulo dell'impulso delle particelle dello stato finale e  $|\mathbf{p}_i|$  quello delle particelle iniziali.

Si può notare come, nel caso appena analizzato, non sia stato effettivamente necessario conoscere l'espressione esplicita dell'ampiezza di probabilità al fine di svolgere l'integrazione. Questa caratteristica è peculiare di processi nei quali, nello stato finale, sono presenti una o due particelle. Se, ad esempio, nel processo appena considerato, nello stato finale ci fosse stata una terza particella, di qualsivoglia tipo, non sarebbe stato possibile procedere con l'integrazione senza conoscere l'espressione di  $M$ .

In precedenza è stato detto che la sezione d'urto ha le dimensioni di un'area, in particolare si misura in barns. Così si mostra che:

$$\left[\frac{d\sigma}{d\Omega}\right] = [L]^2[sr]^{-1} = [L]^2, \quad (2.24)$$

dove  $[sr]$  è la dimensione dell'elemento di angolo solido, gli steradiani.

Per quanto riguarda, invece, l'ampiezza di probabilità  $M$ , la sua dimensione dipende dal numero di particelle coinvolte nell'interazione. Infatti, considerando un processo con  $n$  particelle coinvolte, si ha:

$$[M] = ([m][L][s]^{-1})^{4-n} \quad (2.25)$$

In particolare avrà le dimensioni di un impulso elevato alla  $4 - n$ . Nel caso che verrà analizzato in questa tesi, verranno considerati quattro impulsi esterni (non è necessario specificare se entranti o uscenti), per cui si avrà un'ampiezza di scattering adimensionale.

## 2.2 Regole di Feynman

Al fine di determinare  $M$ , attraverso i diagrammi di Feynman, è necessario introdurre le regole di Feynman. Esse sono delle regole che permettono il calcolo dell'ampiezza di probabilità di un processo partendo dai corrispondenti diagrammi di Feynman e possono essere formulate per ogni tipo di forza che media l'interazione in gioco. Le regole di Feynman permettono di tradurre in linguaggio matematico ciò che viene rappresentato da un diagramma. Il risultato dell'applicazione di queste regole ad un determinato diagramma, è l'ampiezza di probabilità relativa ad esso.

Queste regole variano in base all'interazione considerata, perciò di seguito ne viene riportata una formulazione relativa ad una teoria fisica nella quale si considerano particelle scalari, cioè aventi spin pari a zero, e si trattano diagrammi con vertici a tre particelle. Se si vuole considerare altre teorie, le regole possono essere generalizzate, pur restando molto simili.

Le regole che andremo a considerare possono essere riassunte come segue:

1. Indicare con  $P_1, P_2, \dots, P_n$  i quadrimpulsi delle particelle iniziali e finali e con  $q_1, q_2, \dots, q_m$ , quelli relativi alle particelle interne. Assegnare una freccia ad ogni linea per indicare il moto delle particelle, in accordo con l'evoluzione temporale;
2. Per ogni vertice scrivere un fattore  $(-ig)$ , dove  $g$  è detta costante di accoppiamento e dipende dalla forza che media l'interazione;
3. Per ogni linea interna scrivere un fattore

$$\frac{i}{q_j^2 - m_j^2 c^2}; \quad (2.26)$$

4. Per ogni vertice scrivere una delta di Dirac nella forma

$$(2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_i K_i\right), \quad (2.27)$$

dove  $K_i$  sono i quadrimpulsi delle particelle del vertice, sia reali che virtuali. Se la particella si allontana dal vertice allora il suo impulso è sottratto e non sommato;

5. Per ogni linea interna scrivere un fattore

$$\frac{1}{(2\pi)^4} d^4 q_j \quad (2.28)$$

e, successivamente integrare su tutti i momenti interni;

6. Il risultato dell'integrazione sarà caratterizzato da una delta di Dirac del tipo

$$(2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_i P_i\right) \quad (2.29)$$

(per la quale vale la stessa convenzione della regola 4 riguardo ai momenti uscenti). Eliminare questo fattore e moltiplicare per  $i$ .

Il risultato ottenuto è proprio l'ampiezza di probabilità  $M$  del diagramma considerato. Per ottenere quella totale si applicano le regole a tutti i diagrammi che descrivono il processo in esame.

La prima regola ha lo scopo di evitare, fin dall'inizio, eventuali ambiguità sulla creazione di un diagramma, impostando una sorta di convenzione.

Nella seconda regola è stata introdotta la costante di accoppiamento  $g$ . Essa è un indicatore dell'intensità della forza che media l'interazione. Un esempio è la costante di struttura fine  $\alpha$ , la quale è la costante di accoppiamento della forza elettromagnetica:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}, \quad (2.30)$$

dove  $e$  è la carica elettrica dell'elettrone,  $\epsilon_0$  la costante dielettrica del vuoto,  $\hbar$  la costante di Planck ridotta e  $c$  la velocità della luce nel vuoto. Se si va a definire, per esempio, la costante di accoppiamento per la forza forte, la quale è l'interazione fondamentale più intensa, si trova un valore approssimabile ad uno.

Nella regola numero 3, al denominatore si trova l'espressione  $q_j^2 - m_j^2 c^2$ , la quale è diversa da zero in quanto  $q_j$  sono i quadrimpulsi di particelle virtuali, dette propagatori, per le quali non è necessario che venga soddisfatta la conservazione di energia-impulso. La delta di Dirac presente nella quarta regola garantisce la conservazione di energia-impulso. per le particelle relative ad un vertice, in quanto la proprietà definente di tale "funzione" è la seguente:

$$\delta(x) \neq 0 \iff x = 0, \quad (2.31)$$

dove, nel nostro caso,  $x$  consiste della somma degli impulsi del vertice. La quinta regola aggiunge un fattore proporzionale al differenziale  $d^4 q_j$ , in seguito alla cui aggiunta si integra su tutti gli impulsi delle particelle interne.

Successivamente, in seguito all'integrazione, come scritto nell'ultima regola, è presente una delta di Dirac, la quale va sostituita con l'unità immaginaria. Risulta necessario rimuovere questa delta di Dirac in quanto all'interno della regola d'oro di Fermi (2.9) è presente il modulo quadro dell'ampiezza di probabilità ed il quadrato di  $\delta$  non è definito.

Un singolo diagramma di Feynman non è sufficiente per descrivere completamente un processo; se si va ad espandere l'ampiezza di scattering in una serie perturbativa, si ottiene un'espressione come la seguente:

$$M = \alpha^n (M_0 + \alpha M_1 + \alpha^2 M_2 + \dots) \quad (2.32)$$

Come è stato detto nell'Introduzione, il primo termine di questa espansione ( $M_0$ ) è caratterizzato da una grande incertezza teorica. Così è spesso necessario considerare anche altri termini. Per una previsione "esatta", sarebbe necessario considerare tutti i termini di tale espansione. In genere vengono considerati solo i primi termini, fino al secondo o terzo ordine della perturbazione, in quanto i successivi non forniscono contributi apprezzabili. Ciascun termine del tipo  $M_i$  può essere dato dal contributo di vari diagrammi di Feynman.

I diagrammi come quelli in figura 2.1 sono detti *diagrammi ad albero* e, solitamente, rappresentano l'ordine zero dell'espansione, il quale è noto come *leading order (LO)*. Al fine di ottenere risultati più precisi, è necessario considerare anche altri termini dell'espansione. Nella maggior parte dei casi, i loop si presentano solo al successivo termine dell'espansione, detto *next-to-leading order (NLO)*. Nella figura 2.2 è riportato un esempio di diagramma con un loop. Questo tipo di diagrammi contiene correzioni

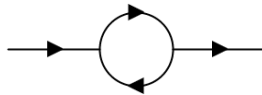


Figura 2.2: Esempio di diagramma di Feynman con un loop

quantistiche relative alla teoria dei campi classica. Maggiore è il numero di loop presenti nei diagrammi e più è trascurabile la correzione. Per questo motivo spesso si considerano solo i diagrammi che hanno al massimo due loop. Come è stato accennato sopra, sono presenti dei casi in cui il *LO* è rappresentato da un diagramma a loop e non da un diagramma ad albero. Un esempio è dato dall'interazione tra due fotoni:

$$\gamma + \gamma \rightarrow \gamma + \gamma. \quad (2.33)$$

In questo caso non è possibile rappresentare graficamente questa interazione utilizzando diagrammi ad albero ma solo tramite diagrammi con almeno un loop, come quello proposto nella seguente figura.

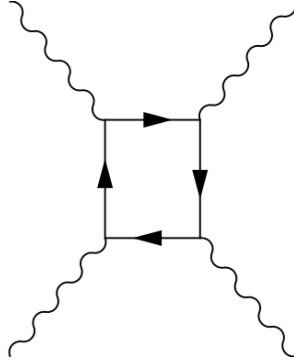


Figura 2.3: Diagramma relativo alla *fisica gamma-gamma*

A livello matematico i diagrammi a loop, o più precisamente l'integrale risultante dall'applicazione delle regole di Feynman ad un diagramma a loop, consistono dell'integrazione sui possibili stati intermedi che non vengono osservati nell'evoluzione temporale del sistema. Maggiore è il numero di loop e minore è il “peso” che tali contributi hanno perchè associati a potenze più alte di “ $\alpha^n$ ”.

Ritornando alla sezione d'urto, a questo punto la possiamo trattare come un indicatore della probabilità che un determinato processo avvenga: consideriamo un fascio di particelle identiche in moto verso una particella bersaglio. La sezione d'urto sarà proporzionale al numero di particelle del fascio che interagiscono con la particella bersaglio.

In questo modo si nota come l'ampiezza di probabilità, calcolata tramite le regole di Feynman, possa essere inserita all'interno della regola d'oro di Fermi al fine di calcolare una grandezza fisica come la sezione d'urto. Lo stesso può essere fatto anche per il tasso di decadimento ( $\Gamma$ ) di particelle instabili.

Di seguito viene proposta un'applicazione dei concetti precedentemente citati, ad un esempio semplice ma utile al fine di comprendere quanto è stato detto. I risultati riportati sono stati scritti seguendo quanto scritto in [2].

Consideriamo il seguente processo:

$$A + A \rightarrow B + B, \quad (2.34)$$

in cui due particelle identiche A collidono generando due particelle B. Un possibile diagramma di Feynman è quello presente in figura 2.4.

Questo diagramma è caratterizzato da due vertici e da una linea interna. Applicando le regole 2, 3, 4, e 5 otteniamo il seguente risultato:

$$(-ig)(-ig) \int \frac{i}{q^2 - m^2 c^2} (2\pi)^4 \delta^4(P_1 - q - P_3) (2\pi)^4 \delta^4(P_2 + q - P_4) \frac{1}{(2\pi)^4} d^4q, \quad (2.35)$$

dove  $P_1$  e  $P_2$  sono i momenti, rispettivamente, delle particelle A in basso ed in alto;  $q$  il quadrimpulso della particella virtuale C (di massa  $m$ ) e, infine,  $P_3$  e  $P_4$  delle particelle

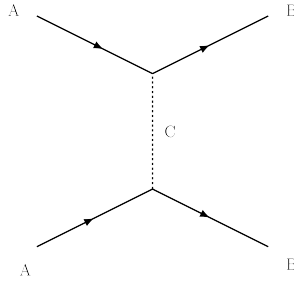


Figura 2.4: Diagramma di Feynman dello scattering  $A+A \rightarrow B+B$

B, rispettivamente, in basso ed in alto. Andando a semplificare si ottiene

$$-i(2\pi)^4 g^2 \int \frac{1}{q^2 - m^2 c^2} \delta^4(P_1 - P_3 - q) \delta^4(P_2 + q - P_4) d^4 q. \quad (2.36)$$

A questo punto, integrando, la seconda delta Dirac manda  $q$  in  $P_4 - P_2$  per la seguente proprietà di traslazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a). \quad (2.37)$$

Così il risultato dell'integrazione è:

$$-i g^2 \frac{1}{(P_4 - P_2)^2 - m^2 c^2} (2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - P_4). \quad (2.38)$$

Si nota come il risultato abbia un fattore  $(2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - P_4)$  il quale, applicando l'ultima delle regole di Feynman, deve essere sostituito con l'unità immaginaria. Così, dato che il risultato dell'applicazione delle regole di Feynman è l'ampiezza di probabilità  $M$  relativa al diagramma considerato, troviamo:

$$M = \frac{g^2}{(P_4 - P_2)^2 - m^2 c^2}. \quad (2.39)$$

Il diagramma di Feynman della figura 2.4, però, non è l'unico che rappresenta il processo  $A + A \rightarrow B + B$ . In particolare esso non è l'unico contributo all'ordine minore, cioè senza loop al suo interno. Se si scambiano le due particelle B nello stato finale, e quindi i momenti  $P_3$  e  $P_4$ , si ottiene un diagramma che fornisce un ulteriore contributo all'ampiezza di probabilità di questo processo. Così, applicando le regole di Feynman a questo secondo diagramma, e sommando il risultato a quello appena trovato, si trova:

$$M = \frac{g^2}{(P_4 - P_2)^2 - m^2 c^2} + \frac{g^2}{(P_3 - P_2)^2 - m^2 c^2}. \quad (2.40)$$

Lo scambio delle due particelle iniziali non fornisce nessun contributo nuovo in quanto ciò che ha importanza sono le particelle coinvolte nei vertici e questo scambio fornirebbe lo stesso risultato ottenuto scambiando le due particelle finali.

# Capitolo 3

## Riduzione integranda

Nel capitolo precedente abbiamo descritto come ricavare l'ampiezza di probabilità  $M$  di un processo partendo dai suoi diagrammi, applicando le regole di Feynman. L'ampiezza di probabilità così ottenuta è necessaria per calcolare osservabili fisiche quali la sezione d'urto totale e differenziale o il tasso di decadimento. In particolare abbiamo visto come la sezione d'urto totale si ottenga integrando il modulo quadro di  $M$  su tutto lo spazio delle fasi dello stato finale, diviso per il flusso in arrivo, dovuto alle particelle iniziali.

Un altro tipo di integrali si presenta invece quando vengono considerati diagrammi che presentano dei loop. La loro integrazione, al fine di ottenere l'ampiezza di scattering, può portare a risultati infiniti. Per questo motivo sono stati studiati metodi per eliminare questi infiniti; l'insieme di processi che ha come scopo quello di rimuovere tali divergenze, va sotto il nome di *rinormalizzazione*. Essa si compone di una parte, detta *regolarizzazione*, nella quale la teoria in esame viene modificata a livello matematico al fine di rimuovere gli infiniti, e di una seconda parte dove viene rimossa la regolarizzazione.

### 3.1 Rinormalizzazione

Provando a svolgere questo integrale si nota come, nella maggior parte dei casi, si presentino delle divergenze dovute all'integrazione sui momenti delle particelle virtuali:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \prod_i d^4 q_i \quad (3.1)$$

Considerando termini di questo tipo è possibile distinguere due tipi di divergenze: *ultraviolette* e *infrarosse*. Le prime si presentano in quanto le teorie che consideriamo non risultano valide ad energie, o impulsi, arbitrariamente alti su cui stiamo integrando. Quelle infrarosse, invece, derivano dal fatto che, come vedremo in seguito, il denominatore dell'integrando può annullarsi, portando, così, a risultati infiniti. In questo secondo caso si ha a che fare con impulsi interni al loop e impulsi esterni molto piccoli o paralleli gli uni con gli altri, con quelli esterni non massivi.

Le divergenze infrarosse vengono rimosse automaticamente se la quantità fisica, relativa ad esse, è ben definita. Al contrario, le divergenze ultraviolette necessitano di essere rimosse attraverso una ridefinizione dei parametri liberi della teoria.

Al fine di eliminare queste divergenze sono stati sviluppati diversi metodi. Questa serie di metodologie atte ad eliminare gli infiniti provenienti da questo tipo di integrali, prende il nome di *rinormalizzazione*.

Inizialmente la rinormalizzazione fu sviluppata ed utilizzata al fine di rimuovere le divergenze relative a determinati integrali nella trattazione perturbativa dell'elettrodinamica quantistica. Successivamente queste tecniche furono applicate anche ad altri campi della fisica moderna, con lo stesso fine.

Solitamente le divergenze nascono nel cosiddetto limite ultravioletto, cioè quando l'integrazione viene svolta su impulsi che possono assumere anche valori infiniti. Inizialmente fu proposto di "tagliare" l'integrazione e di svolgerla tra due estremi finiti:

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \prod_i d^4 q_i, \quad (3.2)$$

per poi calcolare osservabili fisiche dipendenti da questo parametro  $\Lambda$  e calcolarne il valore "reale" facendo il limite per  $\Lambda$  che tende all'infinito. Questo parametro "compensa" la nostra impossibilità di conoscere cosa succede a scale (energetiche, di lunghezza, ...) mai raggiunte (e.g. grandi energie e piccole lunghezze). Infatti risulta impossibile sapere cosa succede ad energie infinite o a lunghezze infinitamente piccole, perciò viene tagliata l'integrazione in modo da non considerare tali intervalli.

L'introduzione di questo valore di taglio, detto *cutoff*, è una tipologia di *regolarizzazione*, la quale consiste di una riformulazione matematica della teoria in esame, attraverso la quale si va a rendere i precedenti integrali convergenti. Più in dettaglio, il processo di regolarizzazione consiste nell'introduzione, all'interno di una teoria, di un parametro, detto *regolarizzatore*, tramite il quale le osservabili non presentano più valori infiniti.

Dopo che una teoria fisica viene regolarizzata, è necessario che venga anche rinormalizzata. La rinormalizzazione consiste nella rimozione della regolarizzazione introdotta, e quindi anche del regolarizzatore, riuscendo, però, a mantenere finiti i valori delle osservabili.

Più in dettaglio noi andremo ad analizzare dei sistemi caratterizzati da una lagrangiana ( $\mathcal{L}$ ), la quale dipenderà da determinati parametri, quali cariche elettriche, masse, costanti di accoppiamento, etc.:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(e_0, m_0, g_0, \dots), \quad (3.3)$$

dove i parametri con indice 0 consistono nei valori *nudi* di tali costanti. Infatti se, ad esempio, consideriamo la carica elettrica dell'elettrone, noi solitamente consideriamo la cosiddetta carica dell'elettrone *vestito*. Il valore così ottenuto è caratterizzato dal contributo delle coppie elettrone-positrone continuamente generate nel vuoto a partire dai fotoni che l'elettrone emette e poi riassorbe. I contributi relativi a questo tipo di emissione e riassorbimento dei fotoni, con la conseguente presenza di coppie  $e^-e^+$ , sono rappresentati dai diagrammi a loop di cui si è parlato nel precedente capitolo. In questo modo si ha che nello spazio intorno all'elettrone è presente una nuvola di cariche positive



e negative, la quale interferisce con la misura della carica elettrica. Se riuscissimo a misurare la carica dell'elettrone a distanze infinitamente piccole, allora misureremmo la carica dell'elettrone “nudo”, cioè  $e_0$ . La presenza di questa serie di coppie elettrone-positrone prende il nome di *polarizzazione del vuoto*. Ritornando alla formula (3.3), noi, quindi, abbiamo osservabili fisiche che dipendono dagli stessi parametri, cosicché, se ad esempio consideriamo la sezione d'urto, otteniamo:

$$\sigma = \sigma(e_0, m_0, g_0, \dots) = +\infty. \quad (3.4)$$

Se a questo punto “tagliamo” l'integrazione come in (3.2), otteniamo che la sezione d'urto dipende, oltre che dai parametri “reali”, anche da questo parametro:

$$\sigma = \sigma(e_0, m_0, g_0, \dots, \Lambda). \quad (3.5)$$

L'espressione di quantità misurabili (tipo la sezione d'urto) in funzione di altre (come carica elettrica, massa, costante di accoppiamento, ...) sempre misurabili, consiste del processo di regolarizzazione di cui abbiamo parlato sopra. Ponendo l'attenzione solo sulla misura della carica elettrica possiamo esprimere quella da noi misurata in funzione di quella dell'elettrone vestito, nel seguente modo:

$$e = e_0 + c(\Lambda)e_0^2 + \dots, \quad (3.6)$$

dove il termine  $c(\Lambda)$  viene calcolato tramite i diagrammi di Feynman, i quali, per  $\Lambda$  che va all'infinito, sono generalmente infiniti.

A questo punto, invertendo la (3.6) e mandando questo parametro all'infinito, otteniamo:

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \sigma(e_0(e), \Lambda) = \sigma(e) < +\infty. \quad (3.7)$$

L'introduzione di un cutoff, però, presenta una problematica: l'integrale presente nella (3.2) non è più un invariante di Lorentz né di gauge. Quando viene svolto il limite per  $\Lambda$  che va all'infinito (rinormalizzazione), il risultato per  $\sigma$  torna ad essere un invariante. Nonostante ciò si preferisce non adottare questo tipo di regolarizzazione in quanto la perdita di simmetrie accennata sopra, rende molto complicati i calcoli. Inoltre, utilizzando questo tipo di regolarizzazione, vengono rimosse esclusivamente le divergenze ultraviolette. Per questo motivo viene spesso utilizzato un altro tipo di regolarizzazione, che verrà descritto nella sezione 3.2. Ma prima di fare ciò è utile soffermarsi brevemente sul concetto di teoria rinormalizzabile e non rinormalizzabile.

### 3.1.1 Teorie rinormalizzabili e non rinormalizzabili

Nella sezione precedente è stato introdotto il concetto della rinormalizzazione. In particolare è stato detto che una teoria è detta *rinormalizzabile* se essa presenta degli infiniti i quali, attraverso l'applicazione di una qualche tecnica di regolarizzazione e rinormalizzazione, possono essere eliminati ridefinendo un numero finito di quantità fisiche indipendentemente dal numero di loop.

Più in dettaglio, una teoria si dice rinormalizzabile quando, al fine di renderla finita, è necessario ridefinire (rinormalizzare) un numero finito di parametri. Questo numero

non dipende dal numero di loop che si considerano all'interno della teoria. Viceversa, una teoria è detta *non rinormalizzabile* se, per eliminare le divergenze, è necessario ridefinire un numero infinito di parametri. In particolare il numero di parametri cresce, tendendo all'infinito, man mano che cresce il numero di loop. Un'ulteriore differenza tra una teoria rinormalizzabile ed una non rinormalizzabile consiste nel fatto che le prime sono caratterizzate da costanti di accoppiamento adimensionali; invece le teorie non rinormalizzabili hanno costanti di accoppiamento che si possono scrivere come  $\frac{g}{M^n}$ , dove  $g$  è adimensionale e  $M$  (non è l'ampiezza di scattering ma una scala energetica tipica della teoria considerata) ha le dimensioni di un'energia. Invece  $n$  è un numero intero positivo.

Può risultare che questo genere di teorie non abbia un'utilità in quanto non è possibile rimuovere le relative divergenze. Seppur ciò risulta essere vero, è comunque possibile utilizzare queste teorie per ottenere dei risultati. Perché ciò accada, è necessario introdurre il concetto di *teoria efficace*. Questo tipo di teorie consistono di approssimazioni a basse energie o a scale tipiche di interazione piccole rispetto alla scala  $M$ . Quest'ultimo, per quanto concerne le teorie efficaci, rappresenta una scala che viene definita dalla teoria stessa.

Un esempio di questo tipo di teorie è dato dalla teoria di Fermi per il decadimento debole, nota anche come teoria di Fermi del decadimento beta. Questa teoria fu inizialmente proposta nel 1933 da Enrico Fermi. Questa teoria ha come obiettivo quello di descrivere il decadimento beta, nel quale un neutrone decade in un protone, un elettrone ed un antineutrino elettronico. Fermi descrisse questo processo ipotizzando la presenza di una particella che mediasse l'interazione.

Questa teoria, nonostante fosse incompleta rispetto al Modello Standard, per via dell'assenza di un mediatore, portò ugualmente dei risultati e permise di fare delle previsioni teoriche importanti.

Successivamente, la teoria di Fermi del decadimento beta venne sostituita dalla teoria dell'interazione debole. Questa teoria descriveva il decadimento beta introducendo il bosone  $W^-$ , ovvero uno dei tre mediatori dell'interazione debole.

La teoria di Fermi è valida a basse energie ed è quindi considerata la teoria efficace di quella dell'interazione debole presente nel Modello Standard. Infatti, espandendo a basse energie, si può riscrivere quest'ultima in modo da avere un numero finito di parametri così da ottenere risultati finiti rilevanti.

Un altro esempio di teoria efficace consiste in una teoria nella quale il bosone di Higgs viene fatto interagire direttamente con dei gluoni, a differenza di quanto viene descritto nel Modello Standard, nel quale essi interagiscono tramite un loop, nel quale si trova un quark pesante, solitamente il quark top. Questa teoria risulta valida fino a quando la massa del top viene considerata "grande" rispetto a quella del bosone di Higgs. Nella realtà le loro masse non differiscono molto; infatti il top ha una massa di circa 173 GeV mentre quella del bosone 125 GeV. Se la massa del quark top viene considerata più "molto" più grande di quella del bosone di Higgs, la teoria proposta prima semplifica i conti in quanto rimuove un loop e permette ugualmente previsioni teoriche accurate.

Un ulteriore esempio di queste teorie è data dalla cosiddetta SMEFT (*Standard Model Effective Field Theory*). Questa teoria fornisce una descrizione di possibili effetti

di particelle o interazioni oltre il Modello Standard che noi non conosciamo o non possiamo osservare direttamente (ad esempio perchè sarebbero necessarie energie più alte di quelle da noi raggiungibili al fine di poterle generare o osservare). All'interno di questa teoria esistono solo interazioni tra le particelle del Modello Standard; la “nuova fisica” studiata e teorizzata è conseguenza dell'aggiunta di ulteriore vertici di interazione non rinormalizzabili tra le particelle.

Per questa teoria il parametro  $\Lambda$  sopra citato consiste nella scala di energia oltre la quale si osserverebbe la nuova fisica oltre il Modello Standard.

## 3.2 Regolarizzazione dimensionale

Una tra le più fruttuose e comuni scelte di regolarizzazione consiste nella cosiddetta *regolarizzazione dimensionale*. Questo processo venne introdotto dai fisici Giambiagi e Bollini ed in maniera indipendente da 't Hooft e Veltman, al fine di regolarizzare gli integrali provenienti dall'applicazione delle regole di Feynman ad un diagramma. Questo procedimento di regolarizzazione si basa sull'idea di non svolgere l'integrazione in uno spazio dei momenti quadridimensionale, bensì in uno spazio di dimensione generica  $d$ . Le osservabili fisiche sono finite per  $d \rightarrow 4$ , mentre, in genere, gli integrali visti sopra, non lo sono. In particolare, essi presentano dei poli per  $d = 4$ , i quali fanno divergere l'integrale, rendendo le osservabili fisiche infinite.

L'integrando di questi integrali consiste di una funzione razionale, in particolare di un rapporto tra due polinomi, i quali verranno descritti più precisamente in seguito. Lo scopo di questa tecnica consiste nel definire una sorta di base di integrandi (noti) nella quale poter decomporre ciascun integrando proveniente dall'applicazione delle regole di Feynman a diagrammi con un qualsiasi numero di gambe esterne. L'utilità di espandere un integrando in questa “base” risiede nel fatto che, almeno con un loop, si sa come integrare tali integrandi della base. I coefficienti presenti in seguito alla decomposizione dipendono dal processo considerato e, quindi, vanno calcolati ogni volta che si considera un processo diverso.

In questa tesi verranno trattati integrali rappresentanti processi ad un loop come quello presente nella figura 3.1. In questa immagine si vedono quattro gambe esterne,

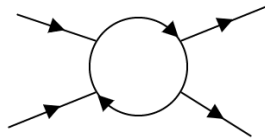


Figura 3.1: Diagramma di Feynman con un loop

cioè impulsi esterni (relativi a particelle reali), dei quali due entranti nel loop e due uscenti, più un quinto impulso interno al loop. Per quanto riguarda la trattazione che andremo a fare, ciascuna linea esterna può rappresentare una o più particelle; ciò che ha importanza è che di ogni linea ne venga specificato il quadrimpulso esterno, sia che

esso sia dato da una somma di momenti o da uno singolo. Nel capitolo precedente avevamo visto che l'integrando, ottenuto applicando le regole di Feynman, dipende dalle componenti dei momenti di loop, cioè quelli relativi alla linea interna. In particolare il numeratore sarà polinomiale in queste componenti mentre il denominatore dipenderà in maniera quadratica da esse.

In questo modo un generico contributo all'ampiezza di probabilità può essere scritto nel seguente modo:

$$M = \int \frac{N}{D} d^d q_1 d^d q_2 \cdots d^d q_l. \quad (3.8)$$

Generalmente la dimensione  $d$  viene scelta pari a  $4 - 2\epsilon$ , dove  $\epsilon$  è un valore generico che successivamente verrà fatto tendere a zero. L'indice  $l$  è relativo al numero di loop del diagramma. Nel caso che andremo a considerare avremo  $l = 1$ . Invece il numeratore ed il denominatore, presenti nella precedente espressione, possono essere indicizzati tramite i momenti dei propagatori del loop. Infatti, nonostante ci sia un solo loop, possiamo andare a considerare vari propagatori con momento pari a un generico momento di loop  $K$ , al quale andrà sottratto o sommato un contributo pari al momento relativo ai bracci esterni.

Perciò, se ad esempio, in una parte del loop, avremo un momento  $K$ , nel tratto successivo ad un braccio esterno, di quadrimomento  $P_1$ , avremo un impulso  $K \pm P_1$  e così via per tutti i bracci esterni, fino a quando non si ritorna al punto iniziale del loop.

Come era stato detto precedentemente, i momenti del loop, non sono quadridimensionali, come quelli dei bracci esterni, bensì sono di dimensione  $d = 4 - 2\epsilon$ . In questo modo è possibile distinguere un contributo di dimensione 4 ed uno di dimensione  $-2\epsilon$ , così che ogni momento interno possa essere scritto nel seguente modo:

$$q = q_{[4]} + \vec{\mu}, \quad (3.9)$$

tale che, considerando due diversi momenti interni e assumendo la seguente convenzione per la metrica dello spaziotempo

$$\eta = \text{diag}(+1, -1, -1, \dots, -1), \quad (3.10)$$

si trova:

$$q_i \cdot q_j = q_{[4]i} \cdot q_{[4]j} - \mu_{ij}, \quad (3.11)$$

con  $\mu_{ij} = \vec{\mu}_i \cdot \vec{\mu}_j$ .

In questo modo è immediato notare che l'integrando dell'espressione (3.8) dipende da cinque variabili, quattro relative alla parte quadridimensionale e una relativa a  $\vec{\mu}$ . Infatti esso consiste di un rapporto tra polinomi nelle variabili del loop, le quali sono espresse secondo la relazione (3.9). Più in generale, nel caso in cui si considerasse un diagramma con  $n$  loop, si avrebbe un integrando dipendente da

$$c = 4n + \frac{n(n+1)}{2} \quad (3.12)$$

variabili.

Come detto, il numeratore presente nell'integrale dell'espressione dell'ampiezza di probabilità è polinomiale nelle componenti dei propagatori e il denominatore è

proporzionale al loro quadrato. In particolare, un generico denominatore assume la seguente forma:

$$D_i = (q_i + P_i)^2 - m_i^2, \quad (3.13)$$

dove  $q_i$  e  $m_i$  sono, rispettivamente, gli impulsi e le masse dei propagatori, mentre  $P_i$  i momenti delle particelle esterne (più precisamente una combinazione lineare di momenti di particelle esterne, come già accennato). Si può notare come la forma di questi denominatori sia pressoché la stessa di quelli presenti nella terza regola di Feynman (2.26).

L'obiettivo della riduzione integranda è quello di riuscire a scrivere l'integrando della (3.8) nel seguente modo:

$$I = \frac{N}{\prod_i D_i} = \sum_{k=1}^n \sum_{i_1 \dots i_k} \frac{\Delta_{i_1 \dots i_k}}{D_{i_1} \dots D_{i_k}}. \quad (3.14)$$

Nel caso che stiamo analizzando abbiamo che  $n$ , cioè il numero di variabili dal quale dipende l'integrando, è pari a cinque. Invece, la somma relativa agli indici  $i_k$  va su tutti i sottoinsiemi di denominatori; così essa va a definire dei contributi ad  $I$ , i quali dipendono ciascuno da un numero definito di denominatori, da un minimo di uno ad un massimo di cinque. Questi contributi sono riportati di seguito per una migliore comprensione:

$$\frac{\Delta_{i_1}}{D_{i_1}}, \frac{\Delta_{i_1 i_2}}{D_{i_1} D_{i_2}}, \frac{\Delta_{i_1 i_2 i_3}}{D_{i_1} D_{i_2} D_{i_3}}, \frac{\Delta_{i_1 i_2 i_3 i_4}}{D_{i_1} D_{i_2} D_{i_3} D_{i_4}}, \frac{\Delta_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5}}{D_{i_1} D_{i_2} D_{i_3} D_{i_4} D_{i_5}}. \quad (3.15)$$

Così si vede che, alla fine,  $I$  sarà dato dalla somma di questi cinque tipi di termini.

Questa particolare riscrittura dell'integrando è nota come *decomposizione OPP* (Oppola-Papadopoulos-Pittau) ([4],[1]) e ne è data una rappresentazione grafica nella figura 3.2

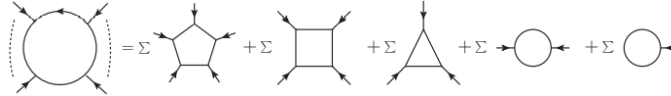


Figura 3.2: Decomposizione OPP; immagine presa da [5].

Di seguito verrà tralasciata la notazione con indici del tipo  $i_j$  in quanto andremo a considerare processi con un solo loop, quindi sarà necessario specificare un solo indice  $i$  che assumerà i valori da uno a cinque.

I  $\Delta$  sono detti residui e consistono di polinomi irriducibili, cioè di polinomi i quali non contengono termini che dipendono dal relativo denominatore. In questo modo si avrà una funzione razionale in cui il numeratore, o una sua parte, non potrà essere semplificato con il denominatore.

A ciascun denominatore, cioè a ciascun prodotto di termini del tipo  $D_i$ , possono essere associate determinate condizioni che prendono il nome di *taglio multiplo*. Queste condizioni risultano utili, come si vedrà in seguito, a ricavare i residui  $\Delta$ . Esse consistono nel mettere *on-shell* i corrispondenti propagatori:

$$D_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, k. \quad (3.16)$$

Questa serie di condizioni consistono nell'applicazione del principio di conservazione di energia-impulso per le particelle interne.

In questo modo, indicando con  $K$  l'impulso del propagatore relativo al loop, abbiamo che una generica condizione di taglio, si può scrivere in maniera esplicita nel seguente modo:

$$D_i = (K + P_i)^2 - m_i^2 = 0. \quad (3.17)$$

Questa equazione è analoga alla (3.13) ma l'impulso del propagatore è stato indicato con  $K$  e non con  $q_i$ .

Avendo definito i termini (3.15) e le condizioni di taglio, ora è possibile andare a delineare quelle che sono le tecniche relative alla riduzione integranda. Successivamente, nel capitolo 4, queste tecniche verranno esplicitamente applicate a tre casistiche che si differenziano l'una dall'altra per il grado massimo del numeratore. In particolare ci si focalizzerà sul caso in cui il grado massimo del numeratore è superiore di due unità rispetto al numero di coordinate del loop, le quali si ricorda che sono cinque.

### 3.3 Riduzione integranda per un loop

L'obiettivo della riduzione integranda, come è stato detto, è quello di trovare un modo di riscrivere l'integrando, presente nell'espressione di un generico contributo all'ampiezza di scattering  $M$ , come una funzione razionale. In particolare si propone come obiettivo quello di scrivere numeratore e denominatore di tale funzione in una forma particolarmente semplice da integrare: questa funzione razionale sarà data da una somma di vari termini razionali ((3.15), con denominatore dato da (3.17). Invece ciascun numeratore,  $\Delta$ , consisterà di un polinomio irriducibile (i.e. che non dipende dai relativi denominatori) nelle componenti del momento del loop.

Se si considera l'anello  $P[\mathbf{c}]$ , con  $\mathbf{c}$  dato da (3.12), di tutti i polinomi nelle variabili  $\mathbf{c}$ , cioè le variabili del loop, allora è possibile definire l'*ideale*  $J_i$  come l'insieme di tutti questi polinomi che possono essere scritti in funzione dei denominatori  $D_i$ :

$$J_i = \langle D_1, \dots, D_5 \rangle = \{h(\mathbf{c})D_i(\mathbf{c}) : h(\mathbf{c}) \in P[\mathbf{c}]\} \quad (3.18)$$

Per questo motivo i denominatori  $D_i$  prendono il nome di *generatori*.

La condizione di irriducibilità dei  $\Delta$  può essere tradotta in linguaggio algebrico affermando che essi non contengono contributi appartenenti al relativo ideale. A questo punto è possibile enunciare un risultato della geometria algebrica, tramite il quale viene assicurata la possibilità di esprimere il nostro integrando nella maniera sopra proposta: il *criterio di riducibilità*. Questo criterio è una conseguenza diretta del *teorema degli zeri di Hilbert*.

Quest'ultimo è un importante risultato dell'algebra commutativa; esso mette in relazione insiemi algebrici e ideali di anelli di polinomi.

Il criterio di riducibilità afferma, nel nostro particolare caso, che i numeratori  $N_i$  sono completamente riducibili quando appartengono all'ideale generato dai relativi denominatori. In alcuni casi l'ideale  $J_i$  coincide con l'intero anello dei polinomi  $P[\mathbf{c}]$ ,

perciò ogni integrando  $I$  è completamente riducibile, qualunque sia la forma esplicita del suo numeratore. Il teorema degli zeri di Hilbert assicura che ciò avviene solo se il sistema di equazioni del corrispondente taglio multiplo ( $D_1 = \dots = D_k = 0$ ), non ha soluzioni. L'ipotesi di questo criterio è soddisfatta se il numero di denominatori del loop indipendenti è maggiore del numero di variabili del loop. Per il caso ad un loop si considerano cinque variabili del loop, quattro quadridimensionali ed una di dimensione  $-2\epsilon$ .

In un particolare caso, quando il numero di denominatori è esattamente uguale al numero di variabili del loop, si può enunciare un terzo risultato molto importante: il *teorema del massimo taglio*. Quando il numero di denominatori eguaglia quello delle coordinate, il taglio multiplo consiste, sempre nel caso ad un loop, di un sistema di cinque equazioni in cinque incognite ed avrà, perciò, un numero finito di soluzioni. In questo caso il taglio multiplo prende il nome di *massimo taglio*. Il teorema afferma che se un massimo taglio ha un numero finito  $r$  di soluzioni, ciascuna con molteplicità uno, allora il relativo residuo sarà un polinomio parametrizzato da  $r$  coefficienti.

Nel caso che considereremo, con un loop in  $d = 4 - 2\epsilon$ , il taglio massimo ha cinque denominatori e le relative equazioni hanno una sola soluzione, come si vedrà nel prossimo capitolo. Di conseguenza il residuo potrà essere parametrizzato da un solo coefficiente, cioè da una costante. Invece in  $d = 4$  dimensioni si hanno solo quattro coordinate ed il massimo taglio è quello relativo a quattro denominatori ma, a differenza del caso precedente, le equazioni avranno due soluzioni. Perciò il residuo sarà parametrizzabile tramite due coefficienti.

In questo modo si nota che, al fine di ottenere polinomi irriducibili al numeratore, è necessario prestare particolare attenzione alla scelta delle variabili 4-D, nelle quali verrà espanso il momento di loop  $K$ . In particolare, come si vedrà nel capitolo 4, semplifica i calcoli scegliere una base di momenti non massivi, cioè tali che:

$$P_i^2 = 0 \tag{3.19}$$

In seguito all'aver trovato l'espressione dei residui  $\Delta$ , essi devono essere sostituiti all'interno della formula 3.15 per poi andare a valutare l'ampiezza di scattering  $M$ .

La valutazione dei numeratori può essere svolta utilizzando il cosiddetto approccio del *fit sul taglio*. Tramite questo approccio, come è stato detto, i numeratori vengono valutati sui tagli multipli, cioè sottinsiemi di denominatori che si annullano. Questo processo è rappresentato graficamente nella figura 3.3.

La maggior parte dei termini ottenuti tramite questo approccio presenta dei termini spurii, cioè che si annullano in seguito all'integrazione e, perciò, non contribuiscono all'ampiezza di scattering. Così, rimuovendo questi termini, rimangono solo quelli non spurii. In questo modo il risultato finale, cioè  $M$ , consiste di una combinazione lineare dei cosiddetti *Master Integrals*, cioè di integrali che hanno come funzione integranda proprio i termini non spurii citati sopra. All'interno di questa tesi ci occuperemo esclusivamente della valutazione dei residui  $\Delta$ , perciò non analizzeremo l'espressione dei Mater Integrals.

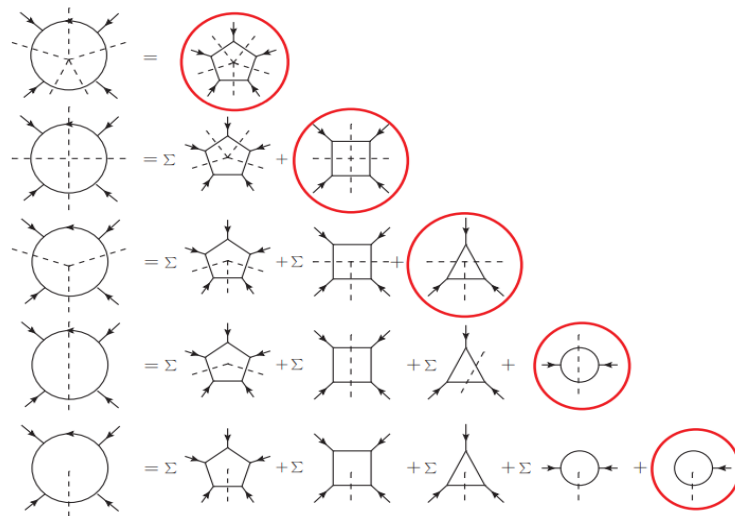


Figura 3.3: Rappresentazione grafica dell'approccio del fit sul taglio; immagine presa da [5]



# Capitolo 4

## Residui

Come è stato detto nel precedente capitolo, i residui  $\Delta$  consistono di polinomi irriducibili, cioè polinomi i quali non contengono contributi proporzionali a denominatori. Questi polinomi vengono scritti in funzione di prodotti scalari tra l'impulso interno al loop,  $K$ , e gli impulsi della base nella quale è stata espansa la parte 4-d di  $K$  ( $K_{[4]}$ ), il quale è un impulso di dimensione  $d = 4 - 2\epsilon$ . Il grado di questi polinomi è, per teorie rinormalizzabili, pari al numero di denominatori relativi ad un particolare residuo. Per teorie non rinormalizzabili il grado è più alto del numero dei denominatori. Ciò è diretta conseguenza dell'applicazione delle regole di Feynman; infatti, come viene detto nella seconda regola, per ogni vertice viene aggiunto un contributo pari a  $(-ig)$ , dove  $g$  è una costante di accoppiamento. Nel precedente capitolo, nella sezione 3.1.1, viene detto che le teorie non rinormalizzabili sono caratterizzate da costanti di accoppiamento che vanno come  $\frac{g}{M^n}$ , perciò per ogni vertice sarà presente un contributo di quel tipo. In questo modo, perchè tutto sia dimensionalmente coerente, è necessario che al numeratore sia presente qualcosa con le dimensioni di un'energia (o impulso o massa, se si usano le unità naturali e si pone  $c = 1$ ), che compensi le potenze di  $M$  al denominatore. In generale ciò che andrà a compensare saranno degli impulsi e, visto che si ha a che fare con un loop, essi diventeranno impulsi di loop. Così si vede che maggiore è il numero di vertici non rinormalizzabili e maggiore deve essere il grado del numeratore. In particolare, in questa tesi, verrà data particolare importanza al caso in cui  $k = n + 2$ , dove  $k$  è il grado del polinomio e  $n$  è il numero di denominatori. Di seguito sono riportati anche i risultati relativi ai casi in cui  $k = n$  e  $k = n + 1$ . I risultati relativi a questi ultimi due casi citati possono essere ritrovati in maniera più approfondita in [5] e [3]. Il terzo caso, a differenza degli altri due che erano noti, è stato ottenuto applicando i metodi che verranno descritti successivamente. Esso costituisce un risultato originale e può essere considerato come una generalizzazione dei due precedenti.

### 4.1 Caso $k = n$

Il primo  $\Delta$  è associato a tutti e cinque i denominatori. Il taglio multiplo relativo a questo residuo si compone di cinque equazioni (4.1), nelle quali tutti e cinque i denominatori sono posti uguali a zero, condizione necessaria per mettere *on-shell* il propagatore corrispondente al *pentagono* ( $\Delta_{12345}$ ). Per quanto è stato detto nel

precedente capitolo si evince che questo taglio consiste nel taglio massimo in quanto si compone di cinque equazioni, pari al numero di coordinate del loop; in particolare, il teorema del taglio massimo assicura che queste equazioni abbiano una sola soluzione ed il residuo sarà parametrizzabile tramite una costante.

$$\begin{aligned}
D_1 &= K^2 - m_1^2 = 0 \\
D_2 &= (K - P_1)^2 - m_2^2 = 0 \\
D_3 &= (K - P_1 - P_2)^2 - m_3^2 = 0 \\
D_4 &= (K - P_1 - P_2 - P_3)^2 - m_4^2 = 0 \\
D_5 &= (K - P_1 - P_2 - P_3 - P_4)^2 - m_5^2 = 0
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Dove  $m_i$  sono le masse delle particelle interne al loop di quadrimomenti  $K$ ,  $(K - P_1)$ ,  $(K - P_1 - P_2)$  e così via. I momenti  $P_i$  sono quadrimpulsi "esterni". Ciascuno di questi impulsi può essere dato dalla somma di impulsi di particelle esterne, quindi non necessariamente corrisponde ad una singola particella.

Con cinque denominatori si considerano quattro impulsi esterni non massivi, quindi è possibile espandere  $K_{[4]}$  in una base formata da questi quadrivettori. Dal sistema di equazioni (4.1) è facile osservare che i prodotti scalari  $(K \cdot P_i)$  sono funzioni di costanti; infatti dalla prima equazione si vede che  $K^2$ , sul taglio massimo, è uguale a  $m_1^2$ , la quale è costante. Sostituendo questo risultato nella seconda equazione si mostra che

$$D_2 = K^2 + P_1^2 - 2K \cdot P_1 - m_2^2 = m_1^2 - m_2^2 - 2K \cdot P_1 = 0 \tag{4.2}$$

Dove, nell'ultimo passaggio, si è posto uguale a zero il quadrato di  $P_1$ , in quanto è un impulso non massivo. In questo modo, da (4.2), si vede che il prodotto scalare tra  $K$  e  $P_1$  è costante.

Ripetendo questi ragionamenti per le restanti equazioni si riesce a dimostrare che tutti i prodotti del tipo  $K \cdot P_i$  sono costanti, in quanto i vari prodotti  $P_i \cdot P_j$  sono costanti, essendo i quattro impulsi esterni noti.

In generale  $K^2$  sarà dato dalla somma di  $m_1^2$  e  $D_1$ , quindi di una costante ed un denominatore. Sostituendo nella seconda equazione e sviluppando il quadrato, si vede che, essendo  $(P_1 \cdot P_2)$  costante,  $(K \cdot P_1)$  sarà dato dalla somma di termini costanti. Al di fuori del taglio massimo esso sarà dato dalla somma di costanti e di denominatori. Ripetendo lo stesso ragionamento per le altre equazioni, è immediato verificare che anche  $(K \cdot P_2)$ ,  $(K \cdot P_3)$  e  $(K \cdot P_4)$  sono dati da costanti lungo il taglio e da una somma di costanti e denominatori, al di fuori di esso.

In questo modo si può vedere come, non essendoci prodotti scalari non fissati, il più generale polinomio, cioè  $\Delta_{12345}$ , sia dato semplicemente da una costante  $c_0$ . In particolare è conveniente porlo proporzionale a  $\mu^2$ , in quanto, dopo l'integrazione, il contributo dato da questo residuo, si annulla:

$$\Delta_{12345} = c_0 \mu^2. \tag{4.3}$$

Per quanto riguarda  $\Delta_{1234}$  (*box*) invece si ha che, avendo quattro impulsi esterni, ce ne saranno solo tre indipendenti in quanto avremo superato, lungo il loop, uno dei bracci esterni; sarà, perciò, necessario introdurre un quarto quadrimpulso  $V$  ortogonale ai tre dati:

$$V^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_{1\nu} P_{2\rho} P_{3\sigma} \tag{4.4}$$

Conseguentemente, mettendo *on-shell* il relativo propagatore, e quindi ponendo uguali a zero tutti e quattro i denominatori:

$$\begin{aligned}
D_1 &= K^2 - m_1^2 = 0 \\
D_2 &= (K - P_1)^2 - m_2^2 = 0 \\
D_3 &= (K - P_1 - P_2)^2 - m_3^2 = 0 \\
D_4 &= (K - P_1 - P_2 - P_3)^2 - m_4^2 = 0,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

non sarà possibile scrivere il prodotto scalare tra  $V$  e  $K$ , il quale è stato espanso in una base 4-d formata dai tre impulsi indipendenti  $(P_1, P_2, P_3)$  e da  $V$ , in funzione di una somma di costanti e denominatori.

Utilizzando l'espressione di  $K$ , espanso nella base 4-d, e sfruttando l'ortogonalità tra  $V$  e i restanti vettori di base si ottiene:

$$K \cdot V = x_4 V^2 \tag{4.6}$$

In questo modo è possibile ricavare:  $x_4 = \frac{K \cdot V}{V^2}$ , dove il denominatore, essendo il quadrato di un vettore noto, è costante.

Se a questo punto si calcola  $K^2$  si trova

$$K^2 = K_{[4]}^2 - \mu^2 = \left( \sum_{i=1}^3 x_i P_i + x_4 V \right)^2 - \mu^2. \tag{4.7}$$

Sviluppando il quadrato si trova una somma di termini dati da prodotti scalari del tipo  $(P_i \cdot P_j)$ , con  $i, j = [1, 2, 3]$ , i quali sono ovviamente delle costanti. Gli altri termini sono dati da prodotti scalari tra  $K$  e i quattro impulsi della base: tre di questi prodotti sono costanti, in base a quanto visto nel sistema (4.5). In particolare, ricordando la prima equazione, si può scrivere

$$(K \cdot V)^2 = \mu^2 + O(D_i) + \text{cost.} \tag{4.8}$$

dove  $O(D_i)$  è un termine proporzionale ai denominatori, e non ha peso in quanto, nell'espressione degli integrandi, quando si definisce l'ampiezza di probabilità, esso viene semplificato con i denominatori stessi. Invece, il termine *cost.* raggruppa tutti i termini costanti, quali  $m_1^2$  e tutti i prodotti scalari del tipo  $P_i^2$  e  $(P_i \cdot P_j)$  con  $i, j = [1, 2, 3]$ .

A questo punto è possibile definire  $\Delta_{1234}$ . Esso consiste della più generale somma di monomi nella variabile  $(K \cdot V)$ , con grado massimo pari al numero di denominatori, quindi quattro:

$$\Delta_{1234} = c_0 + c_1(K \cdot V) + c_2(K \cdot V)^2 + c_3(K \cdot V)^3 + c_4(K \cdot V)^4 \tag{4.9}$$

Se in questa espressione andiamo a sostituire  $\mu^2$  a  $(K \cdot V)^2$ , omettendo di riportare termini del tipo  $O(D_i)$ , si trova

$$\Delta_{1234} = c'_0 + c'_1(K \cdot V) + c'_2 \mu^2 + c'_3 \mu^2 (K \cdot V) + c'_4 \mu^4 \tag{4.10}$$

Si nota che è stato necessario modificare le costanti moltiplicative in quanto il termine  $(K \cdot V)^2$  è uguale a  $\mu^2$  solo a meno di termini proporzionali a denominatori.

Con ragionamenti analoghi si andrà a calcolare  $\Delta_{123}$ . In questo caso, che prende il nome di *triangolo* si avranno tre denominatori, quindi tre impulsi esterni, dei quali solo due indipendenti. Sarà necessario aggiungerne due in modo da creare una base nella quale espandere  $K_{[4]}$ . Andando a scegliere come sistema di riferimento quello centrato nel centro di massa, una possibile scelta è la seguente

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

dove  $i$  è l'unità immaginaria. Se si fosse scelto un sistema di riferimento diverso da quello del centro di massa, sarebbe bastato applicare una trasformazione di Lorentz ai due impulsi per poi svolgere conti analoghi a quelli svolti nel centro di massa.

Gli impulsi  $e_3, e_4$  sono stati scelti con le seguenti proprietà:

$$P_1, P_2 \perp e_3, e_4, \quad e_{3,4}^2 = 0, \quad e_3 \cdot e_4 \neq 0 \quad (4.12)$$

Avendo tre denominatori, le condizioni del taglio multiplo saranno le seguenti:

$$\begin{aligned} D_1 &= K^2 - m_1^2 = 0 \\ D_2 &= (K - P_1)^2 - m_2^2 = 0 \\ D_3 &= (K - P_1 - P_2)^2 - m_3^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Gli unici prodotti scalari che non si riuscirà ad esprimere in funzione di una somma di costanti e denominatori saranno proprio quelli tra  $K$  e i due nuovi impulsi. Infatti, espandendo  $K$  nella base  $[P_1, P_2, e_3, e_4]$ , si trova

$$K = \sum_{i=1}^2 x_i P_i + x_3 e_3 + x_4 e_4. \quad (4.14)$$

A questo punto è facile calcolare i prodotti scalari tra  $K$  e gli impulsi  $e_3, e_4$ :

$$K \cdot e_3 = x_4 e_4 \cdot e_3, \quad K \cdot e_4 = x_3 e_3 \cdot e_4 \quad (4.15)$$

In questo modo si riesce a ricavare i coefficienti  $x_4$  e  $x_3$ , allo stesso modo con cui si è calcolato  $x_4$  nel caso precedente. Se ora si va a calcolare  $K^2$ , si trovano termini costanti ( $x_1^2 P_1^2, x_2^2 P_2^2$  e  $2x_1 x_2 P_1 \cdot P_2$ ), termini nulli ( $x_3^2 e_3^2, x_4^2 e_4^2, 2x_1 x_3 P_1 \cdot e_3, 2x_2 x_3 P_2 \cdot e_3, 2x_1 x_4 P_1 \cdot e_4, 2x_2 x_4 P_2 \cdot e_4$ ) ed il termine ( $2x_3 x_4 e_3 e_4 - \mu^2$ ). Se dall'equazione (4.15) si ricavano  $x_4$  e  $x_3$  e li si sostituisce nell'ultimo termine di  $K^2$ , si trova:

$$K^2 = 2x_3 x_4 e_3 e_4 - \mu^2 + \text{cost.} = 2 \frac{(K \cdot e_4)(K \cdot e_3)}{e_4 \cdot e_3} - \mu^2 + \text{cost.} \quad (4.16)$$

Dalla prima equazione di (4.13) vediamo che  $K^2$  è uguale ad una costante; così notiamo che il termine  $(K \cdot e_3)(K \cdot e_4)$ , quindi anche  $x_3 x_4$ , è proporzionale a  $(\mu^2 + \text{cost.})$ .

$\Delta_{123}$  è il più generale polinomio di terzo grado nelle variabili  $(K \cdot e_3)$  e  $(K \cdot e_4)$  che sono rispettivamente proporzionali a  $x_4$  e  $x_3$ , come si vede da (4.15). Perciò:

$$\Delta_{123} = c_0 + c_1 x_4 + c_2 x_4^2 + c_3 x_4^3 + c_4 x_3 + c_5 x_3^2 + c_6 x_3^3 + c_7 x_4 x_3 + c_8 x_4^2 x_3 + c_9 x_3^2 x_4 \quad (4.17)$$

Andando a sostituire  $\mu^2$  al posto di  $x_3x_4$ , facendo attenzione a modificare i coefficienti, si ottiene il seguente risultato:

$$\Delta_{123} = c'_0 + c'_1x_4 + c'_2x_4^2 + c'_3x_4^3 + c'_4x_3 + c'_5x_3^2 + c'_6x_3^3 + c'_7\mu^2 + c'_8\mu^2x_4 + c'_9\mu^2x_3 \quad (4.18)$$

Nel caso di  $\Delta_{12}$ , detto *bolla*, sono presenti due denominatori e, quindi, è possibile definire due momenti esterni, dei quali solo uno indipendente. Si possono distinguere due casistiche: nella prima si hanno i due momenti esterni massivi, per cui, nel centro di massa, andremo a espandere  $K$  nella seguente base quadridimensionale:

$$P_1 = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Questi impulsi sono caratterizzati dalle seguenti relazioni:

$$P_1^2 = E^2 \neq 0, \quad V_\perp \perp P_1, e_3, e_4, \quad P_1 \perp e_3, e_4, \quad e_3^2 = e_4^2 = 0, \quad e_3 \cdot e_4 \neq 0. \quad (4.20)$$

In entrambi i casi si ha che i denominatori, e le condizioni di taglio, sono:

$$\begin{aligned} D_1 &= K^2 - m_1^2 = 0 \\ D_2 &= (K - P_1)^2 - m_2^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

In questo modo è possibile esprimere  $K \cdot P_1$ , e di conseguenza anche  $x_1$ , in funzione di costanti e denominatori ed espandere  $K$ , nel primo caso, nel seguente modo:

$$K_{[4]} = x_1P_1 + x_2V_\perp + x_3e_3 + x_4e_4 \quad (4.22)$$

Così, andando a calcolare i prodotti scalari  $K \cdot V_\perp$ ,  $K \cdot e_3$  e  $K \cdot e_4$ , si riescono a ricavare i coefficienti  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$ :

$$x_2 = \frac{K \cdot V_\perp}{V_\perp^2}, \quad x_4 = \frac{K \cdot e_3}{e_4 \cdot e_3}, \quad x_3 = \frac{K \cdot e_4}{e_4 \cdot e_3} \quad (4.23)$$

Se, a questo punto, si va a calcolare  $K^2$ , si trova:

$$\begin{aligned} K^2 &= x_1^2P_1^2 + x_2^2V_\perp^2 + x_3^2e_3^2 + x_4^2e_4^2 + 2x_1x_2P_1 \cdot V_\perp + 2x_1x_3P_1 \cdot e_3 \\ &+ 2x_1x_4P_1 \cdot e_4 + 2x_2x_3V_\perp \cdot e_3 + 2x_2x_4V_\perp \cdot e_4 + 2x_3x_4e_3 \cdot e_4 - \mu^2 = \\ &x_1^2P_1^2 + x_2^2V_\perp^2 + 2x_3x_4e_3 \cdot e_4 - \mu^2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Nell'ultimo passaggio sono state usate le relazioni (4.20), (4.21) e (4.23) di modo da poter poi esprimere  $(K \cdot V_\perp)^2$ , e quindi anche  $x_2^2$ , come somma di  $\mu^2$ ,  $(K \cdot e_3)(K \cdot e_4)$ , costanti e denominatori. Così, andando a definire  $\Delta_{12}$ , il quale è un polinomio di secondo grado nelle variabili  $K \cdot V_\perp$ ,  $K \cdot e_3$  e  $K \cdot e_4$ , si ottiene:

$$\Delta_{12_a} = c_0 + c_1x_2 + c_2x_2^2 + c_3x_3 + c_4x_3^2 + c_5x_4 + c_6x_4^2 + c_7x_2x_3 + c_8x_2x_4 + c_9x_3x_4 \quad (4.25)$$

Andando a sostituire  $x_2^2$  con  $(\mu^2 + x_3x_4)$  e modificando i relativi coefficienti:

$$\Delta_{12_a} = c_0 + c_1x_2 + c'_2\mu^2 + c_3x_3 + c_4x_3^2 + c_5x_4 + c_6x_4^2 + c_7x_2x_3 + c_8x_2x_4 + c'_9x_3x_4 \quad (4.26)$$

Nel secondo caso, invece, si ha che  $P_1^2 = 0$  ed è perciò possibile trovare un sistema di riferimento nel quale

$$P_1 = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Così, al posto di  $V_\perp$ , del caso precedente, si aggiungerà

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

tale che

$$e_2^2 = 0, \quad e_2 \perp e_3, e_4, \quad e_2 \cdot P_1 \neq 0. \quad (4.29)$$

In questo modo si espande  $K$  nel seguente modo:

$$K_{[4]} = x_1 P_1 + \sum_{i=2}^4 x_i e_i \quad (4.30)$$

Andando a calcolare i prodotti scalari tra  $K$  e gli impulsi della base si trovano gli stessi risultati del caso precedente, con  $e_2$  sostituito al posto di  $V_\perp$ . Quindi, andando a scrivere  $K^2$ , ricordando le relazioni (4.21) e (4.29), si ottiene:

$$K^2 = 2x_1 x_2 P_1 \cdot e_2 + 2x_3 x_4 e_3 \cdot e_4 - \mu^2 + \text{cost.} = 0 \quad (4.31)$$

Da cui è facile osservare che  $x_3 x_4$ , perciò  $(K \cdot e_3)(K \cdot e_4)$ , è proporzionale a  $(\mu^2 - x_1 x_2)$ . In questo modo si può scrivere il residuo:

$$\Delta_{12_b} = c_0 + c_1 x_2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3 + c_4 x_3^2 + c_5 x_4 + c_6 x_4^2 + c_7 x_2 x_3 + c_8 x_2 x_4 + c_9 \mu^2 \quad (4.32)$$

Si nota come i due risultati ottenuti nei casi considerati, per quanto simili, siano differenti.

Per quanto riguarda  $\Delta_1$ , detto *tadpole*, si hanno zero impulsi indipendenti, in quanto è presente un solo denominatore; quindi è necessario definire quattro nuovi quadrivettori. Per convenienza vengono scelti in modo che siano a massa nulla, cioè tali che:

$$e_i^2 = 0, \quad \forall i = 1, \dots, 4 \quad (4.33)$$

Una possibile scelta per questi impulsi è la seguente:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

In questo caso non è possibile fissare nessun prodotto scalare del tipo  $(K \cdot e_i)$ , in quanto l'unica condizione proveniente dal taglio, è

$$D_1 = K^2 - m_1^2 = 0. \quad (4.35)$$

Andando ad espandere  $K$  nella base formata dai quadrimpulsi  $e_i$  si possono calcolare tutti i prodotti scalari, come nei precedenti casi:

$$K \cdot e_1 = x_2 e_2 \cdot e_1, \quad K \cdot e_2 = x_1 e_1 \cdot e_2, \quad K \cdot e_3 = x_4 e_4 \cdot e_3, \quad K \cdot e_4 = x_3 e_3 \cdot e_4. \quad (4.36)$$

$\Delta_1$  è un polinomio di primo grado nelle variabili  $(K \cdot e_1)$ ,  $(K \cdot e_2)$ ,  $(K \cdot e_3)$  e  $(K \cdot e_4)$  le quali sono, rispettivamente, proporzionali a  $x_2$ ,  $x_1$ ,  $x_4$  e  $x_3$ . Inoltre si dimostra, usando (4.34) e calcolando esplicitamente  $K^2$ , che  $[(K \cdot e_1)(K \cdot e_2) - (K \cdot e_3)(K \cdot e_4)]$  è proporzionale a  $\mu^2$ . Questo risultato, però, diventa rilevante solo quando il grado del polinomio è maggiore del numero di denominatori; infatti, in questo caso, si ha

$$\Delta_1 = c_0 + c_1 x_2 + c_2 x_1 + c_3 x_4 + c_4 x_3 \quad (4.37)$$

## 4.2 Caso $k=n+1$

I casi in cui il grado massimo dei polinomi è maggiore di una o due unità rispetto al numero di denominatori sono relativi a teorie non rinormalizzabili. Il primo di questi due casi, che viene molto brevemente considerato in questo paragrafo, è trattato più dettagliatamente in [5]. In entrambi i casi i ragionamenti algebrici fatti in precedenza continuano a valere, per cui non è necessaria alcuna modifica. L'unica differenza si ritrova nella forma finale dei  $\Delta$ ; infatti, se si considera ad esempio  $\Delta_{123}$ , prima esso era un polinomio di terzo grado, mentre nell'attuale caso esso è di quarto grado, e nel successivo di quinto. Per il pentagono si ottiene lo stesso risultato trovato in precedenza, in quanto si riesce a fissare ogni prodotto scalare.

$$\Delta'_{12345} = \Delta_{12345} \quad (4.38)$$

Nei restanti casi, invece, il risultato ottenuto è diverso rispetto a quello trovato nel caso  $k=n$ .

$\Delta'_{1234}$  è un polinomio di quinto grado nella variabile  $(K \cdot V)$ , per cui, aggiungendo il termine  $(K \cdot V)^5$  e sostituendo  $\mu^4$  a  $(K \cdot V)^4$ :

$$\Delta'_{1234} = \Delta_{1234} + c_5 \mu^4 (K \cdot V) \quad (4.39)$$

Per  $\Delta'_{123}$  si otterrà un polinomio di quarto grado nelle variabili  $(K \cdot e_3)$  e  $(K \cdot e_4)$ :

$$\Delta'_{123} = \Delta_{123} + c_{10} x_4^4 + c_{11} x_3^4 + c_{12} x_4^3 x_3 + c_{13} x_3^3 x_4 + c_{14} x_4^2 x_3^2 \quad (4.40)$$

Se ora si sostituisce  $\mu^2$  ai termini  $x_4 x_3$  si trova, facendo attenzione a modificare le costanti:

$$\Delta'_{123} = \Delta_{123} + c_{10} x_4^4 + c_{11} x_3^4 + c'_{12} \mu^2 x_4^2 + c'_{13} \mu^2 x_3^2 + c'_{14} \mu^4 \quad (4.41)$$

Andando a considerare la bolla, è necessario analizzare i risultati per i due diversi casi che si erano considerati in precedenza per  $k=n$ . Nel primo caso, in cui  $P_1 = -P_2$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \Delta'_{12a} = \Delta_{12a} + c_{10} x_2^3 + c_{11} x_3^3 + c_{13} x_4^3 + c_{13} x_2^2 x_3 + c_{14} x_2^2 x_4 \\ + c_{15} x_3^2 x_2 + c_{16} x_3^2 x_4 + c_{17} x_4^2 x_2 + c_{18} x_4^2 x_3 + c_{19} x_2 x_3 x_4 \end{aligned} \quad (4.42)$$

Ricordando la relazione presente tra  $x_2^2$ ,  $\mu^2$  e  $x_3x_4$ , è possibile scrivere:

$$\begin{aligned}\Delta'_{12_a} = & \Delta_{12_a} + \mu^2(c'_{10}x_2 + c'_{13}x_3 + c'_{14}x_4) + c_{11}x_3^3 + c_{13}x_4^3 \\ & + c_{15}x_3^2x_2 + c_{20}x_3^2x_4 + c_{17}x_4^2x_2 + c_{21}x_4^2x_3 + c_{22}x_2x_3x_4\end{aligned}\quad (4.43)$$

Per il secondo caso, in cui si aveva  $P_1^2 = 0$ , si ottiene:

$$\begin{aligned}\Delta'_{12_b} = & \Delta_{12_b} + c_{10}x_2^3 + c_{11}x_3^3 + c_{12}x_4^3 + c_{13}x_2^2x_3 \\ & + c_{14}x_2^2x_4 + c_{15}x_3^2x_2 + c_{16}x_4^2x_2 + \mu^2(c_{17}x_2 + c_{18}x_3 + c_{19}x_4)\end{aligned}\quad (4.44)$$

Il tadpolo risulta essere un polinomio di secondo grado nelle variabili  $x_1, x_2, x_3, x_4$ :

$$\Delta'_1 = \Delta_1 + c_5x_1x_2 + c_6x_1x_3 + c_7x_1x_4 + c_8x_2x_3 + c_9x_2x_4 + c_{10}x_3x_4 + c_{11}x_1^2 + c_{12}x_2^2 + c_{13}x_3^2 + c_{14}x_4^2\quad (4.45)$$

Essendo  $(x_1x_2 - x_3x_4)$  proporzionale a  $\mu^2$  (a meno di denominatori), si può sostituire, ad esempio, il termine proporzionale a  $x_1x_2$  con un secondo proporzionale a  $(\mu^2 + x_3x_4)$ ; così verrà modificata anche la costante moltiplicativa di  $x_3x_4$ . Facendo ciò si trova:

$$\Delta'_1 = \Delta_1 + c'_5\mu^2 + c_6x_1x_3 + c_7x_1x_4 + c_8x_2x_3 + c_9x_2x_4 + c'_{10}x_3x_4 + c_{11}x_1^2 + c_{12}x_2^2 + c_{13}x_3^2 + c_{14}x_4^2\quad (4.46)$$

### 4.3 Caso $k=n+2$

In questo caso i residui risultano essere dei polinomi di grado superiore di due unità rispetto al numero dei denominatori; per questo motivo risulta essere una generalizzazione dei due precedenti casi e ne verranno solo riportati i risultati con le sostituzioni necessarie già applicate. Si avrà ancora uguaglianza nel caso con cinque denominatori:

$$\Delta''_{12345} = \Delta'_{12345} = \Delta_{12345},\quad (4.47)$$

Per la box si otterrà:

$$\Delta''_{1234} = \Delta'_{1234} + c_6\mu^6\quad (4.48)$$

$\Delta''_{123}$  è un polinomio di quinto grado, cosicché:

$$\Delta''_{123} = \Delta'_{123} + c_{15}x_4^5 + c_{16}x_3^5 + c_{17}\mu^2x_3^3 + c_{18}\mu^4x_3 + c_{19}\mu^4x_4 + c_{20}\mu^2x_4^3\quad (4.49)$$

I risultati ottenuti per le due casistiche della bolla sono i seguenti:

$$\begin{aligned}\Delta''_{12_a} = & \Delta'_{12_a} + c_{20}\mu^4 + c_{21}x_3^2x_4^2 + c_{22}\mu^2x_3x_4 + c_{23}x_3^4 + c_{24}x_4^4 + c_{25}\mu^2x_2x_3 \\ & + c_{26}x_3^2x_2x_4 + c_{27}\mu^2x_2x_4 + c_{28}x_4^2x_2x_3 + c_{29}x_3^3x_2 + c_{30}x_3^3x_4 \\ & + c_{31}x_4^3x_2 + c_{32}x_4^3x_3 + c_{33}\mu^2x_3^2 + c_{34}\mu^2x_4^2\end{aligned}\quad (4.50)$$

e

$$\begin{aligned}\Delta''_{12_b} = & \Delta'_{12_b} + c_{18}x_2^4 + c_{19}x_3^4 + c_{20}x_4^4 + c_{21}x_2^2x_3^2 + c_{22}x_2^2x_4^2 + c_{23}\mu^4 + c_{24}x_2^3x_3 + c_{25}x_2^3x_4 \\ & + c_{26}x_3^3x_2 + c_{27}x_3^2\mu^2 + c_{28}x_4^3x_2 + c_{29}x_4^2\mu^2 + c_{30}x_2^2\mu^2 + c_{31}x_2x_3\mu^2 + c_{32}x_2x_4\mu^2\end{aligned}\quad (4.51)$$



Infine per il tadpolo si ottiene:

$$\begin{aligned}\Delta_1'' &= \Delta_1' + c_{15}x_1^3 + c_{16}x_2^3 + c_{17}x_3^3 + c_{18}x_4^3 + c_{19}x_1x_2x_3 + c_{20}x_1x_2x_4 + c_{21}x_1x_3x_4 \\ &\quad + c_{22}x_2x_3x_4 + c_{23}x_1x_2^2 + c_{24}x_1x_3^2 + c_{25}x_1x_4^2 + c_{26}x_2x_1^2 + c_{27}x_3x_1^2 + c_{28}x_4x_1^2 \\ &\quad + c_{29}x_3x_2^2 + c_{30}x_4x_2^2 + c_{31}x_2x_3^2 + c_{32}x_2x_4^2 + c_{33}x_3x_4^2 + c_{34}x_4x_3^2\end{aligned}\quad (4.52)$$

Andando a fare le dovute sostituzioni e modifiche, analogamente a quanto fatto nei precedenti casi, si trova:

$$\begin{aligned}\Delta_1'' &= \Delta_1' + c_{15}x_1^3 + c_{16}x_2^3 + c_{17}x_3^3 + c_{18}x_4^3 + c_{19}\mu^2x_3 + c_{20}'\mu^2x_4 + c_{21}x_1x_3x_4 \\ &\quad + c_{22}x_2x_3x_4 + c_{23}'\mu^2x_2 + c_{24}x_1x_3^2 + c_{25}x_1x_4^2 + c_{26}'\mu^2x_1 + c_{27}x_3x_1^2 + c_{28}x_4x_1^2 \\ &\quad + c_{29}x_3x_2^2 + c_{30}x_4x_2^2 + c_{31}x_2x_3^2 + c_{32}x_2x_4^2 + c_{33}'x_3x_4^2 + c_{34}'x_4x_3^2\end{aligned}\quad (4.53)$$

I residui così ottenuti possono essere utilizzati al fine di valutare i Master Integrals, i quali servono per poter calcolare l'ampiezza di scattering  $M$ . Dato che il grado del numeratore è superiore di due unità rispetto al numero di coordinate del loop, questi risultati vengono applicati a teorie non rinormalizzabili, in particolar modo a teorie efficaci per lo studio di fisica oltre il Modello Standard.

Questi risultati, come è stato detto all'inizio di questo capitolo, costituiscono un risultato originale, il quale è una generalizzazione dei due precedenti. Di seguito vengono riportati tutti i risultati di modo da poterli confrontare gli uni con gli altri. Per il caso in cui il grado massimo è pari al numero di coordinate del loop, si sono trovati i seguenti residui:

$$\begin{aligned}\Delta_{12345} &= c_0\mu^2, \\ \Delta_{1234} &= c_0' + c_1'(K \cdot V) + c_2'\mu^2 + c_3'\mu^2(K \cdot V) + c_4'\mu^4, \\ \Delta_{123} &= c_0' + c_1'x_4 + c_2'x_4^2 + c_3'x_4^3 + c_4'x_3 + c_5'x_3^2 + c_6'x_3^3 + c_7'\mu^2 + c_8'\mu^2x_4 + c_9'\mu^2x_3, \\ \Delta_{12_a} &= c_0 + c_1x_2 + c_2'\mu^2 + c_3x_3 + c_4x_3^2 + c_5x_4 + c_6x_4^2 + c_7x_2x_3 + c_8x_2x_4 + c_9'x_3x_4, \\ \Delta_{12_b} &= c_0 + c_1x_2 + c_2x_2^2 + c_3x_3 + c_4x_3^2 + c_5x_4 + c_6x_4^2 + c_7x_2x_3 + c_8x_2x_4 + c_9\mu^2, \\ \Delta_1 &= c_0 + c_1x_2 + c_2x_1 + c_3x_4 + c_4x_3\end{aligned}\quad (4.54)$$

Se il grado del numeratore è di una unità superiore rispetto al numero di coordinate del loop, si trovano i seguenti risultati:

$$\begin{aligned}\Delta_{12345}' &= \Delta_{12345}, \\ \Delta_{1234}' &= \Delta_{1234} + c_5\mu^4(K \cdot V), \\ \Delta_{123}' &= \Delta_{123} + c_{10}x_4^4 + c_{11}x_3^4 + c_{12}'\mu^2x_4^2 + c_{13}'\mu^2x_3^2 + c_{14}'\mu^4, \\ \Delta_{12_a}' &= \Delta_{12_a} + \mu^2(c_{10}'x_2 + c_{13}'x_3 + c_{14}'x_4) + c_{11}x_3^3 + c_{13}x_4^3 \\ &\quad + c_{15}x_3^2x_2 + c_{20}x_3^2x_4 + c_{17}x_4^2x_2 + c_{21}x_4^2x_3 + c_{22}x_2x_3x_4, \\ \Delta_{12_b}' &= \Delta_{12_b} + c_{10}x_2^3 + c_{11}x_3^3 + c_{12}x_4^3 + c_{13}x_2^2x_3 \\ &\quad + c_{14}x_2^2x_4 + c_{15}x_3^2x_2 + c_{16}x_4^2x_2 + \mu^2(c_{17}x_2 + c_{18}x_3 + c_{19}x_4), \\ \Delta_1' &= \Delta_1 + c_5'\mu^2 + c_6x_1x_3 + c_7x_1x_4 + c_8x_2x_3 + c_9x_2x_4 \\ &\quad + c_{10}'x_3x_4 + c_{11}x_1^2 + c_{12}x_2^2 + c_{13}x_3^2 + c_{14}x_4^2\end{aligned}\quad (4.55)$$

Infine, per il caso  $k = n + 2$  ho valutato i seguenti residui:

$$\begin{aligned}
\Delta''_{12345} &= \Delta'_{12345} = \Delta_{12345}, & \Delta''_{1234} &= \Delta'_{1234} + c_6\mu^6, \\
\Delta''_{123} &= \Delta'_{123} + c_{15}x_4^5 + c_{16}x_3^5 + c_{17}\mu^2x_3^3 + c_{18}\mu^4x_3 + c_{19}\mu^4x_4 + c_{20}\mu^2x_4^3, \\
\Delta''_{12_a} &= \Delta'_{12_a} + c_{20}\mu^4 + c_{21}x_3^2x_4^2 + c_{22}\mu^2x_3x_4 + c_{23}x_3^4 + c_{24}x_4^4 + c_{25}\mu^2x_2x_3 \\
&\quad + c_{26}x_3^2x_2x_4 + c_{27}\mu^2x_2x_4 + c_{28}x_4^2x_2x_3 + c_{29}x_3^3x_2 + c_{30}x_3^3x_4 \\
&\quad + c_{31}x_4^3x_2 + c_{32}x_4^3x_3 + c_{33}\mu^2x_3^2 + c_{34}\mu^2x_4^2, & (4.56) \\
\Delta''_{12_b} &= \Delta'_{12_b} + c_{18}x_2^4 + c_{19}x_3^4 + c_{20}x_4^4 + c_{21}x_2^2x_3^2 + c_{22}x_2^2x_4^2 + c_{23}\mu^4 + c_{24}x_2^3x_3 + c_{25}x_2^3x_4 \\
&\quad + c_{26}x_3^3x_2 + c_{27}x_3^2\mu^2 + c_{28}x_4^3x_2 + c_{29}x_4^2\mu^2 + c_{30}\mu^2x_2^2 + c_{31}x_2x_3\mu^2 + c_{32}x_2x_4\mu^2, \\
\Delta''_1 &= \Delta'_1 + c_{15}x_1^3 + c_{16}x_2^3 + c_{17}x_3^3 + c_{18}x_4^3 + c_{19}\mu^2x_3 + c'_{20}\mu^2x_4 + c_{21}x_1x_3x_4 \\
&\quad + c_{22}x_2x_3x_4 + c'_{23}\mu^2x_2 + c_{24}x_1x_3^2 + c_{25}x_1x_4^2 + c'_{26}\mu^2x_1 + c_{27}x_3x_1^2 + c_{28}x_4x_1^2 \\
&\quad + c_{29}x_3x_2^2 + c_{30}x_4x_2^2 + c_{31}x_2x_3^2 + c_{32}x_2x_4^2 + c'_{33}x_3x_4^2 + c'_{34}x_4x_3^2
\end{aligned}$$

In questo modo è semplice notare, confrontando 4.54, 4.55 e 4.56, che i residui da me ottenuti, generalizzano i risultati precedenti.

Infatti, rimuovendo i termini di grado superiore nelle 4.56, si ottengono i residui nei casi in cui  $k = n + 1$  e  $k = n$ . Queste tre serie di risultati sono utili al fine di valutare i Master Integrals, tramite i quali si ottiene l'ampiezza di scattering  $M$ . Quest'ultima è fondamentale al fine di valutare osservabili fisiche, quali sezione d'urto (totale o differenziale) e tasso di decadimento.

# Capitolo 5

## Conclusioni

In questa tesi abbiamo visto come, partendo da dei diagrammi di Feynman con un loop e un numero arbitrario di gambe esterne sia possibile ottenere degli oggetti utili per calcolare delle osservabili fisiche. Per fare ciò abbiamo innanzitutto utilizzato le regole di Feynman al fine di ricavare l'ampiezza di scattering  $M$ . Questa quantità, agli ordini perturbativi più alti, consiste di un'integrazione su tutti gli stati intermedi che non vengono osservati nell'evoluzione temporale di un sistema fisico. Questo integrale può divergere ed è, perciò, necessario rinormalizzare tale teoria. In questa tesi ci siamo concentrati su teorie non rinormalizzabili, introducendo il concetto di teoria efficace come di un'approssimazione, a bassa energia, di una teoria valida ad alte energie. Per quanto riguarda questo tipo di teorie, l'integrando nell'espressione di  $M$  può presentare un numeratore con grado di due unità superiore rispetto al numero di denominatori del loop. Tramite la tecnica della riduzione integranda è stato possibile espandere l'integrando in una "base" di integrandi noti, che si sa come integrare. Così, avendo ricavato l'espressione per questa "base", è possibile decomporre un generico integrale e quindi ottenere l'ampiezza di probabilità, la quale, attraverso la regola d'oro di Fermi è legata a quantità fisiche come la sezione d'urto o il tasso di decadimento.

Avendo generalizzato la decomposizione al caso  $k = n + 2$ , dove  $k$  è il grado massimo del numeratore e  $n$  il numero di denominatori, abbiamo esteso le possibilità di fare previsioni teoriche in teorie efficaci quali la SMEFT.

# Bibliografia

- [1] R.K Ellis, W.T Giele e Z Kunszt. «A numerical unitarity formalism for evaluating one-loop amplitudes». In: *Journal of High Energy Physics* 2008.03 (2008), pp. 003–003. ISSN: 1029-8479. DOI: [10.1088/1126-6708/2008/03/003](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2008/03/003). URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2008/03/003>.
- [2] D. Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. Wiley, 2020. ISBN: 9783527834648. URL: <https://books.google.it/books?id=dGIOEAAAQBAJ>.
- [3] Pierpaolo Mastrolia, Edoardo Mirabella e Tiziano Peraro. «Integrand reduction of one-loop scattering amplitudes through Laurent series expansion». In: *Journal of High Energy Physics* 2012.6 (2012). ISSN: 1029-8479. DOI: [10.1007/jhep06\(2012\)095](https://doi.org/10.1007/jhep06(2012)095). URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP06\(2012\)095](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP06(2012)095).
- [4] Giovanni Ossola, Costas G. Papadopoulos e Roberto Pittau. «Reducing full one-loop amplitudes to scalar integrals at the integrand level». In: *Nuclear Physics B* 763.1–2 (2007), pp. 147–169. ISSN: 0550-3213. DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2006.11.012](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2006.11.012). URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2006.11.012>.
- [5] T. Peraro. *Advanced methods for scattering amplitudes in gauge theories*. 2014. URL: <https://inspirehep.net/files/0193e4e248dab72f0f210fe1adde3041>.