

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica - Curriculum Applicativo

**Metodi per la correzione
delle superfici di suddivisione
di Catmull-Clark
intorno ai vertici straordinari**

Tesi di Laurea Magistrale in Metodi Numerici per la Grafica

Relatore:

**Chiar.mo Prof.
Giulio Casciola**

Co-relatore:

**Dott.ssa
Carolina Vittoria Beccari**

**Presentata da:
Michele Antonelli**

**Sessione II
Anno Accademico 2010-2011**

Metodi per la correzione delle superfici di suddivisione di Catmull-Clark intorno ai vertici straordinari

Michele Antonelli

antonelli.miki@gmail.com

Settembre 2011

Sommario

Presentiamo alcune proposte di modifica alle superfici di suddivisione di Catmull-Clark, per garantire la continuità del secondo ordine anche nei vertici straordinari e una buona qualità di forma. La ricerca di questi miglioramenti è motivata dal tentativo di integrazione delle superfici di suddivisione in un sistema di modellazione geometrica in contesto CAD/CAGD, il quale richiede che certi requisiti di regolarità e qualità siano soddisfatti.

Illustriamo due approcci differenti per la modifica della superficie limite. Il primo, proposto in [Lev06b] e in [Lev06a], prevede il blending tra la superficie originale e una superficie polinomiale approssimante, definita opportunamente, in modo tale da ottenere la regolarità desiderata. L'idea originale è stata rielaborata, estesa e migliorata. Il secondo metodo consiste nella sostituzione della superficie di Catmull-Clark con un complesso di patch di Gregory bicubici e adeguatamente raccordati, definiti adattando la costruzione presentata in [LSNC09] ai nostri scopi.

Insieme all'attività di analisi, riformulazione ed estensione di queste proposte, abbiamo realizzato una implementazione in codice C/C++ e OpenGL (con programmi accessori scritti in MATLAB e Mathematica), finalizzata alla sperimentazione e alla verifica delle caratteristiche dei metodi presentati.

Parole chiave: superfici di suddivisione, schema di Catmull-Clark, continuità della curvatura, qualità CAD, blending polinomiale, patch di Gregory.

Methods for the correction of Catmull-Clark subdivision surfaces around extraordinary vertices

Michele Antonelli

antonelli.miki@gmail.com

September 2011

Abstract

We propose some methods for the correction of Catmull-Clark subdivision surfaces, in order to achieve second-order smoothness also at extraordinary vertices and good shape quality. This research is motivated by the interest in integrating subdivision surfaces into a geometric modeling system to be used in the context of CAD/CAGD applications, where strict requirements on surface quality and regularity need to be met.

We illustrate two different approaches for the local correction of the limit surface. The former, originally proposed in [Lev06b], [Lev06a], consists in blending the original surface with an approximating polynomial, so that the blended surface has the desired regularity. In this thesis, we have extended and improved several aspects of the original idea. The latter approach is based on the idea of locally replacing the Catmull-Clark limit surface by a collection of suitably joined bicubic Gregory patches, defined by a proper modification of the construction in [LSNC09].

Along with the analysis, reformulation and extension of the considered methods, we have implemented test code in C/C++ and OpenGL (with additional programs in MATLAB and Mathematica), that has been exploited for the assessment of the obtained surfaces.

Keywords: subdivision surfaces, Catmull-Clark scheme, CAD quality, curvature continuity, polynomial blending, Gregory patches.

Indice

Indice	i
Ringraziamenti	v
Elenco delle figure	vii
Elenco delle tabelle	xi
Elenco degli algoritmi	xiii
Notazioni	xv
Introduzione	xix
1 Superfici di suddivisione	1
1.1 Contesti di utilizzo classici	2
1.2 Definizione	2
1.2.1 Rappresentazione degli schemi di suddivisione	4
1.3 Proprietà	6
1.4 Analisi spettrale in un vertice straordinario	9
1.4.1 Convergenza	10
1.4.2 Mappa caratteristica	10
1.4.3 Condizioni per la continuità C^k	12
1.5 Schemi più usati	12
1.5.1 Catmull-Clark	13
1.5.1.1 Regole di suddivisione	15
1.5.1.2 Matrice di suddivisione locale	16
1.5.1.3 Valore limite e normale limite	19
1.6 Superfici di suddivisione come superfici parametriche e loro valutazione	20
1.7 Richieste e problematiche per l'utilizzo in contesto CAD	24
1.7.1 Valutazione esatta	24
1.7.2 Regolarità	25
1.7.3 Qualità	25

1.7.3.1	Curve	26
1.7.3.2	Superfici	26
1.7.4	Questioni da affrontare	28
2	Modifica C^2 di superfici di suddivisione mediante blending polinomiale	33
2.1	Blending à la Levin	34
2.1.1	Parametrizzazione locale	34
2.1.2	Proposta originale	36
2.1.3	Rielaborazione	36
2.2	Regione di blending	37
2.3	Dettagli implementativi	37
2.3.1	Mappa caratteristica	38
2.3.2	Vertici straordinari interni	39
2.3.3	Vertici straordinari sul bordo	39
2.3.4	Calcolo delle derivate della superficie blending	40
2.3.5	Algoritmo di valutazione della superficie blending	42
2.4	Scelta della funzione peso e continuità della superficie blending	43
2.4.1	1D	43
2.4.2	2D	44
2.4.3	Dimostrazione della continuità C^2	45
2.5	Definizione del polinomio di approssimazione	48
2.5.1	Metodo dei minimi quadrati	49
2.5.1.1	Determinazione dei coefficienti del polinomio	49
2.5.1.2	Determinazione del valore della superficie nei punti di campionamento	51
2.5.1.3	Analisi dei risultati	53
2.5.2	Metodo di fairing	57
2.5.2.1	Motivazione	57
2.5.2.2	Funzionale di fairness	58
2.5.2.3	Determinazione dei coefficienti del polinomio	60
2.5.2.4	Interpolazione di altri punti oltre al vertice straordinario	62
2.5.2.5	Dettagli implementativi	64
2.5.2.6	Analisi dei risultati	68
2.5.3	Confronto dei metodi e conclusioni	73
3	Approssimazione di superfici di suddivisione mediante patching locale	75
3.1	Overview dei metodi per n -sided hole filling	76
3.2	Patching con overlap patch di Várady	76
3.2.1	Overview	76
3.2.2	Costruzione dell'overlap patch	77

3.2.2.1	Vertex patch	79
3.2.2.2	Origine e punto centrale dell'overlap patch	82
3.2.3	Analisi della continuità per il raccordo di overlap patch adiacenti	84
3.2.3.1	Derivate prime	84
3.2.3.2	Continuità VC^1 tra overlap patch adiacenti	85
3.2.4	Dettagli implementativi	88
3.2.5	Analisi dei risultati	91
3.2.5.1	Determinazione dei parametri locali con il me- todo di Newton-Raphson	91
3.2.5.2	Esempi	91
3.2.5.3	Patching della superficie di Catmull-Clark	91
3.2.5.4	Conclusioni	94
3.3	Patching con patch di Gregory	95
3.3.1	Overview	95
3.3.2	Patch di Gregory	96
3.3.2.1	Espressione	96
3.3.2.2	Comportamento sui bordi	99
3.3.2.3	Gestione delle singolarità nei vertici	99
3.3.2.4	Derivate	100
3.3.2.5	Proprietà	102
3.3.3	Costruzione dei patch	102
3.3.3.1	Estrazione delle informazioni dalla superficie limite	103
3.3.3.2	Condizioni per il raccordo G^1	104
3.3.4	Analisi dei risultati	114
3.3.5	Conclusioni	115
Conclusioni e sviluppi futuri		119
A Richiami di geometria differenziale di curve e superfici		123
A.1	Curve parametriche	123
A.1.1	Lunghezza	124
A.1.2	Curvatura e torsione	124
A.1.3	Riferimento di Frenet	125
A.2	Superfici parametriche	125
A.2.1	Normale alla superficie	126
A.2.2	Prima e seconda forma fondamentale	126
A.2.3	Curvature principali e direzioni principali	126
A.2.4	Indicatrice di Dupin	127
A.2.5	Curvature Gaussiana e media	127
A.2.6	Classificazione dei punti di una superficie	128
A.2.7	Raccordo tra superfici	128

B Strumenti per l'analisi della qualità delle superfici	131
B.1 Resa della superficie	131
B.2 Curve isoparametriche	132
B.3 Normale alla superficie	133
B.4 Mappa delle curvatures Gaussiana e media	134
B.5 Curvature needles	134
B.6 Segni di curvatura	135
B.7 Curvatura delle curve isoparametriche	136
B.8 Isofote e linee di riflessione	137
B.9 Reflection mapping	140
Bibliografia	143

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il Professor Giulio Casciola, per avermi introdotto con passione nel mondo della Modellazione geometrica e della Grafica al calcolatore, per la disponibilità e i tanti stimoli che ha saputo offrirmi in questi anni. Ringrazio inoltre la Dottoressa Carolina Vittoria Beccari, per la pazienza e l'attenzione con cui mi ha seguito nel lungo lavoro di preparazione e di redazione della tesi.

Ringrazio i miei colleghi e amici con i quali ho condiviso il percorso di studi, in particolare Candia Riga, Elena Scardovi e Chiara Bartolucci.

Un grazie ai miei genitori Mara e Giovanni e a mio fratello Stefano, che mi hanno sempre supportato e sopportato.

Elenco delle figure

1.1	Esempio del processo di suddivisione.	3
1.2	Parametrizzazione naturale di una superficie di Catmull-Clark intorno a un vertice straordinario interno.	11
1.3	Primi passi di suddivisione per lo schema di Catmull-Clark.	14
1.4	Stencil per lo schema di Catmull-Clark.	16
1.5	Numerazione dei punti del 2-ring intorno a un vertice centrale.	18
1.6	Esempio di un passo di suddivisione di Catmull-Clark.	18
1.7	Sequenza infinita di ring spline intorno a un vertice straordinario.	20
1.8	Comportamento della superficie di suddivisione sul bordo.	22
1.9	Esempio di superficie G^1 ma di qualità discutibile.	27
1.10	Comportamento delle curve isoparametriche della superficie di Catmull-Clark in prossimità dei vertici straordinari.	28
1.11	Comportamento della superficie di Catmull-Clark intorno a un vertice straordinario.	30
1.12	Superfici di Catmull-Clark con patch contenenti almeno un vertice straordinario.	31
2.1	Divisione in settori e numerazione adottata per i vertici della mappa caratteristica.	35
2.2	Regioni di blending.	38
2.3	Parametrizzazione intorno a un vertice straordinario di bordo.	40
2.4	Funzioni peso univariate.	45
2.5	Funzioni peso bivariate.	46
2.6	Punti di campionamento per l'approssimazione ai minimi quadrati.	50
2.7	Punti di approssimazione e polinomio ai minimi quadrati.	52
2.8	Blending polinomiale, con polinomio ai minimi quadrati, su regioni di blending larghe. Curvatura media.	54
2.9	Blending polinomiale, con polinomio ai minimi quadrati, su regioni di blending piccole. Curvatura media.	55
2.10	Blending polinomiale, con polinomio ai minimi quadrati, su regioni di blending larghe. Isofote.	55

2.11	Blending polinomiale, con polinomio ai minimi quadrati, al variare della funzione peso.	56
2.12	Polinomio ottimale e superficie blending, al variare del grado. . .	70
2.13	Confronto tra i polinomi ottenuti minimizzando il funzionale continuo e quello discreto.	71
2.14	Curvatura media della superficie blending ottenuta con il polinomio ottimale, al variare della funzione peso.	71
2.15	Blending polinomiale, con polinomio ottimale. Confronto tra le superfici ottenute in corrispondenza di regioni di blending larghe e piccole.	72
3.1	Esempio di network di curve con topologia PFP.	78
3.2	Dati da assegnare per la costruzione di un overlap patch di Várady a m lati.	78
3.3	Funzioni base di Hermite cubiche.	79
3.4	Parametrizzazione biquadratica mediante patch di Bézier 2D. . .	82
3.5	Effetto della modifica del punto centrale dell'overlap patch. . . .	83
3.6	Quantità vettoriali relative a overlap patch adiacenti.	85
3.7	Patch di Bézier relativi a vertici adiacenti.	88
3.8	Esempio di overlap patch e vertex patch.	92
3.9	Interpolazione di un network di curve mediante un complesso di overlap patch.	93
3.10	Curve di bordo dei patch di Catmull-Clark intorno a un vertice straordinario.	94
3.11	Indicizzazione dei control point di un patch di Gregory bicubico. . .	98
3.12	Patch di Gregory bicubico.	98
3.13	Nuovo labeling dei control point di un patch di Gregory bicubico. . .	103
3.14	Vettori di controllo per i campi tangenti.	108
3.15	Complesso di patch di Gregory con vettori trasversali nulli. . . .	110
3.16	Esempi di patching della superficie di Catmull-Clark con patch di Gregory.	115
3.17	Esempi di sub-patching della superficie di Catmull-Clark con patch di Gregory.	116
3.18	Patching à la Gregory al variare della grandezza del sotto-dominio. . .	117
3.19	Comportamento delle curve isoparametriche nelle vicinanze di un vertice straordinario: confronto tra Catmull-Clark e Gregory. . .	118
B.1	Rappresentazione wireframe.	132
B.2	Rappresentazione shading.	133
B.3	Rappresentazione con curve isoparametriche.	133
B.4	Normali alla superficie.	134
B.5	Visualizzazione delle curvature Gaussiana e media mediante scala di colori.	135

B.6	Curvature needles.	136
B.7	Segni di curvatura.	136
B.8	Grafico a pettine della curvatura delle curve isoparametriche. . .	137
B.9	Isofote.	139
B.10	Reflection mapping.	141

Elenco delle tabelle

1.1	Alcuni algoritmi per il raffinamento di mesh mediante un processo di suddivisione.	13
1.2	Autovalori sotto-dominanti della matrice di suddivisione locale di Catmull-Clark.	19

Elenco degli algoritmi

2.1	Blending polinomiale della superficie di Catmull-Clark intorno a un vertice straordinario (interno) di valenza n	42
3.1	Valutazione di un overlap patch di Várady a m lati.	90
B.1	Determinazione delle isofote di una superficie.	140

Notazioni

\mathbb{R}	insieme dei numeri reali
$\mathbb{K}^{m \times n}$	spazio vettoriale delle matrici con m righe e n colonne con elementi nel campo \mathbb{K}
\mathbf{M}^T	matrice trasposta $\mathbf{M}^T \in \mathbb{K}^{n \times m}$ di $\mathbf{M} \in \mathbb{K}^{m \times n}$, cioè $(\mathbf{M}^T)_{ij} := (\mathbf{M})_{ji}$ per $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$
$\mathbf{0}, \mathbf{1}$	vettore o matrice costituiti da elementi tutti uguali a 0, 1 rispettivamente; la dimensione è deducibile dal contesto
$\lfloor x \rfloor$	parte intera di $x \in \mathbb{R}$ (funzione floor), cioè $\lfloor x \rfloor := \max_{m \in \mathbb{Z}} \{m \leq x\}$
$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$	prodotto scalare tra due vettori $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ dello spazio euclideo \mathbb{R}^n , cioè:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ prodotto vettoriale tra due vettori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, cioè, indicando con $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ i vettori della base canonica di \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} := (x_2 y_3 - x_3 y_2) \mathbf{e}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \mathbf{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{e}_3$$

che, con abuso di notazione, può essere scritto come

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

$\|\mathbf{x}\|$ norma di un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ che, se non specificato diversamente, assumiamo essere quella euclidea, cioè:

$$\|\mathbf{x}\| := \|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$\hat{\mathbf{x}}$	versore in direzione \mathbf{x} , cioè vettore di norma unitaria $\hat{\mathbf{x}} := \frac{\mathbf{x}}{\ \mathbf{x}\ }$, se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
$x^{(\chi)}$	elemento del vettore $\mathbf{x} = (x^{(x)}, x^{(y)}, x^{(z)})$ contenente il valore della coordinata $\chi \in \{x, y, z\}$
$\mathbf{X}^{(\chi)}$	riga (o colonna) della matrice \mathbf{X} contenente i valori della coordinata $\chi \in \{x, y, z\}$ dei vettori che costituiscono le colonne di \mathbf{X}
$f'(t)$	derivata della funzione f di una sola variabile t
f_{x_j}	derivata parziale della funzione f rispetto alla variabile x_j , dove $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, cioè: $f_{x_j} := \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_j + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$ se il limite esiste finito
\mathbf{S}_n	matrice di suddivisione locale di uno schema stazionario, relativa a un vertice di valenza n
$\lambda_i^{[n]}$	autovalori della matrice di suddivisione locale, ordinati per modulo non crescente
$\mathbf{l}_i^{[n]}, \mathbf{r}_i^{[n]}$	autovettori sinistri e destri della matrice di suddivisione locale, relativi all'autovalore $\lambda_i^{[n]}$
λ_n	autovalore sotto-dominante, cioè $\lambda_n := \lambda_1^{[n]} = \lambda_2^{[n]}$
$\Psi^{[n]}$	parametrizzazione data dalla mappa caratteristica relativa alla valenza n , cioè superficie di suddivisione 2D ottenuta partendo dalla mesh $\mathcal{M}^{[n]}$ avente come vertici le componenti dei due autovettori sotto-dominanti $\mathbf{r}_1^{[n]}, \mathbf{r}_2^{[n]}$
$Q_1 \subset \mathbb{R}^2$	quadrato unitario $Q_1 := [0, 1]^2 := [0, 1] \times [0, 1]$, tipico dominio di un patch di superficie
$K_n \subset \mathbb{R}^2$	dominio definito dalla mappa caratteristica, parametrizzazione naturale della superficie di Catmull-Clark intorno a un vertice di valenza n
$\mathbf{w} := (u, v) \in Q_1$	punto nel dominio parametrico costituito dal quadrato unitario
$\mathbf{r} := (s, t) \in K_n$	punto nel dominio definito da $\Psi^{[n]}$

$\mathbf{x} := (x, y, z)$ punto nello spazio \mathbb{R}^3 , dove è immersa la superficie limite del processo di suddivisione

Introduzione

In questo elaborato sono illustrati alcuni metodi per il miglioramento delle superfici di suddivisione per raggiungere le proprietà di regolarità e qualità richieste nel contesto CAD. La motivazione del lavoro svolto è infatti la ricerca di una primitiva geometrica unica per la modellazione assistita dal calcolatore, in particolare con l'obiettivo della integrazione di superfici di suddivisione in un ambiente di geometric modeling.

Questa classe di superfici presenta alcune caratteristiche interessanti, sia dal punto di vista della definizione formale sia negli aspetti più tecnici della implementazione. A differenza delle superfici NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) che oggi costituiscono lo standard de facto per la rappresentazione di forme nel settore CAD/CAM/CAE¹ e nella Computer Graphics, le superfici di suddivisione consentono una maggiore flessibilità nella fase di costruzione della superficie: non sono vincolate a una topologia solamente a quadrilateri o a triangoli, e facilitano la modellazione di superfici multi-patch perché le condizioni sul raccordo dei patch sono automaticamente soddisfatte. Inoltre, la quantità di informazioni necessarie per definire una superficie di suddivisione (tipicamente, una mesh iniziale) è normalmente molto inferiore rispetto alla quantità di informazioni richieste per descrivere una superficie multi-patch NURBS (tipicamente, i punti di controllo di ciascun patch).

Tuttavia, alcuni problemi ostacolano l'utilizzo e la diffusione delle superfici di suddivisione nell'ambito CAD. Nella modellazione geometrica di supporto alla progettazione al calcolatore, si richiede che le superfici possiedano i seguenti requisiti: devono essere

1. esprimibili in forma parametrica, e *valutabili esattamente a parametri arbitrari*;
2. *regolari*, cioè caratterizzate da certe proprietà di continuità;
3. di ottima *qualità* e prive di artefatti indesiderati.

Le superfici di suddivisione classiche non verificano queste condizioni, in particolare a causa del comportamento intorno ai cosiddetti vertici straordinari,

¹CAD: Computer-Aided Design; CAM: Computer-Aided Manufacturing; CAE: Computer-Aided Engineering.

cioè nelle zone in cui la topologia non è quella che lo schema considera come regolare.

Per quanto riguarda la prima richiesta, il problema della valutazione intorno a questi vertici ha tratto beneficio dai metodi presentati in lavori come quello di Stam [Sta98]. Invece, per cercare di soddisfare gli altri due requisiti sono state avanzate numerose proposte, ma nessuna si è dimostrata essere oggettivamente superiore alle altre.

Il lavoro di tesi consiste nella esplorazione e riformulazione di alcuni approcci che prevedono la modifica delle superfici di suddivisione con l'intento di soddisfare i requisiti richiesti.

Analizziamo nel dettaglio la struttura dei capitoli di cui si compone la nostra trattazione.

Nel Capitolo 1 introduciamo il concetto di superficie di suddivisione. Esponiamo la teoria che formalizza il procedimento di raffinamento, e discutiamo le proprietà di cui godono gli schemi di suddivisione. In particolare, presentiamo in dettaglio lo schema di Catmull-Clark [CC78], ad oggi il più usato e sul quale è incentrato il lavoro di tesi. Successivamente studiamo il comportamento di una superficie di suddivisione nei cosiddetti vertici straordinari, servendoci dello strumento introdotto da Reif [Rei95]: l'analisi spettrale della matrice di suddivisione locale. Inoltre descriviamo rapidamente l'algoritmo di Stam [Sta98] per la valutazione di una superficie di Catmull-Clark considerata come superficie parametrica, e mettiamo in evidenza alcune problematiche ad esso legate. Concludiamo il capitolo esaminando dettagliatamente quali sono le problematiche aperte che tutt'ora ostacolano la diffusione delle superfici di suddivisione in ambito di geometric modeling, evidenziandone in particolare il comportamento critico nell'intorno dei cosiddetti vertici straordinari che questo lavoro di tesi si propone di migliorare.

A tale scopo, nei Capitoli 2 e 3 consideriamo la possibilità di correggere localmente la definizione della superficie seguendo due approcci differenti.

Il primo, a cui è dedicato il Capitolo 2, è basato sulla tecnica del *blending*, già ampiamente sfruttata in letteratura anche se in contesti diversi da quello considerato. La superficie di suddivisione viene miscelata tramite una opportuna funzione peso con una superficie polinomiale definita in modo da eliminare le singolarità e ottenere una superficie di buona qualità. Il metodo proposto è una rielaborazione ed estensione migliorativa della proposta originale di Levin [Lev06b], [Lev06a].

Il secondo approccio, sviluppato nel Capitolo 3, prevede la completa sostituzione della superficie originale intorno ai vertici straordinari con una superficie razionale avente le caratteristiche di forma e regolarità desiderate. In pratica, ritagliamo una regione di superficie nell'intorno di ciascun punto critico creando un piccolo buco che deve essere opportunamente riempito. A tale scopo

consideriamo dapprima la proposta di Várady [Vár87], [Vár91] per ricoprire il buco con un unico patch di superficie a $2n$ lati, e ne analizziamo criticamente le possibilità di utilizzo. Successivamente, ispirandoci principalmente alla proposta di Loop e Schaefer [LSNC09], esploriamo la possibilità di sostituire la superficie, ove necessario, con un complesso di n patch di Gregory quadrilateri bicubici e adeguatamente raccordati.

La sperimentazione numerica dei risultati ottenuti, presentata a conclusione di entrambi i capitoli, è stata realizzata tramite implementazione di codice C/C++ e OpenGL (con programmi accessori scritti in MATLAB e Mathematica).

Infine, riportiamo le conclusioni di questo lavoro di tesi ed evidenziamo i più significativi sviluppi futuri della ricerca proposta.

Per completezza, nell'Appendice A ricordiamo alcuni concetti di geometria differenziale su curve e superfici parametriche, e nell'Appendice B presentiamo una panoramica di metodi utilizzati in ambito CAGD per l'analisi della continuità e qualità delle superfici, e inclusi nella nostra implementazione.

Tutte le figure presenti in questo elaborato sono state prodotte utilizzando i programmi da noi realizzati.

Capitolo 1

Superfici di suddivisione

In questo capitolo presentiamo il concetto di superficie di suddivisione, che costituisce l'oggetto centrale della nostra trattazione.

Nel 1974 Chaikin ha introdotto l'idea della generazione di una curva partendo da un poligono e raffinandolo successivamente con l'aggiunta di nuovi vertici e lati. Nel 1978 Catmull e Clark, Doo e Sabin hanno generalizzato questa idea alle superfici: nei metodi da loro proposti, una *mesh*¹ di controllo iniziale è raffinata aggiungendo nuovi vertici, lati e facce a ogni passo di suddivisione. Se le regole per l'introduzione di questi nuovi oggetti, che costituiscono il cosiddetto *schema di suddivisione*, sono scelte secondo criteri opportuni, il processo di raffinamento converge, per il numero di passi di suddivisione tendente all'infinito, a una superficie limite. Sotto certe condizioni, è possibile mostrare che questa superficie possiede determinate caratteristiche di continuità. Con il passare degli anni, sono stati presentati molti altri schemi di suddivisione, ciascuno con le sue peculiarità, e sono stati sviluppati numerosi metodi per l'analisi delle loro proprietà.

Introduciamo le notazioni, diamo le definizioni formali e discutiamo le proprietà delle superfici di suddivisione nelle Sezioni 1.2 e 1.3. Nella Sezione 1.4 studiamo il comportamento della superficie limite nei cosiddetti vertici straordinari, servendoci dell'analisi spettrale della matrice di suddivisione locale, e riportiamo le condizioni per la continuità. Successivamente, dedichiamo la Sezione 1.5 a una veloce panoramica degli schemi più diffusi, e presentiamo più in dettaglio quello di Catmull-Clark (Sezione 1.5.1). Nella Sezione 1.6 consideriamo la superficie di suddivisione di Catmull-Clark come superficie parametrica definita a patch, e descriviamo brevemente l'algoritmo di Stam [Sta98] per la sua valutazione, evidenziando alcune problematiche ad esso legate. Infine, nella Sezione 1.7 elenchiamo i requisiti richiesti per l'utilizzo in ambito CAD,

¹Una *mesh* è una rappresentazione 3D di un oggetto, che consiste in una collezione di vertici tra loro collegati secondo una certa topologia, in modo da formare lati (i segmenti che congiungono i vertici) e facce (i poligoni delimitati dai segmenti).

e che le superfici di suddivisione in parte non soddisfano: per questo motivo è necessario modificarle opportunamente, ad esempio con i metodi esposti nei capitoli successivi.

1.1 Contesti di utilizzo classici

Attualmente, le superfici di suddivisione sono usate principalmente in due ambiti:

1. videogiochi in grafica 3D;
2. film di animazione realizzati in grafica digitale, settore nel quale sono state introdotte per la prima volta con il cortometraggio *Geris's Game* realizzato nel 1997 dalla Pixar Animation Studios, e oggi ampiamente diffuse.

I motivi principali per il loro utilizzo sono la flessibilità in fase di modellazione e la continuità nel raccordo tra i patch garantita anche per superfici in movimento o soggette a deformazioni, caso comune nel settore videoludico e nella animazione in Computer Graphics. Queste caratteristiche rendono le superfici di suddivisione attraenti anche per altre applicazioni, come le simulazioni tipiche del metodo agli elementi finiti. Tuttavia, in generale è necessario risolvere alcune problematiche intrinseche alla loro definizione, prima di poterle adottare nei più esigenti contesti di progettazione CAD/CAM/CAE².

1.2 Definizione

Prima di procedere con l'esposizione della teoria delle superfici di suddivisione, ricordiamo alcune definizioni di concetti a cui faremo riferimento nel seguito.

Definizione 1.1. Sia $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice quadrata.

Un vettore $\mathbf{r} \in \mathbb{C}^n$ si dice un *autovettore destro* della matrice \mathbf{A} associato all'*autovalore* λ se $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ ed esiste uno scalare $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $\mathbf{A}\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}$.

Un vettore $\mathbf{l} \in \mathbb{C}^n$ si dice un *autovettore sinistro* della matrice \mathbf{A} associato all'*autovalore* λ se $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$ ed esiste uno scalare $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $\mathbf{l}\mathbf{A} = \lambda\mathbf{l}$.

Definizione 1.2. Sia $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice quadrata.

\mathbf{A} si dice *stocastica destra* se le righe sono costituite da elementi non negativi, e la somma degli elementi su ciascuna riga è uguale a 1.

\mathbf{A} si dice *stocastica sinistra* se le colonne sono costituite da elementi non negativi, e la somma degli elementi su ciascuna colonna è uguale a 1.

²CAD: Computer-Aided Design; CAM: Computer-Aided Manufacturing; CAE: Computer-Aided Engineering.

A si dice *bistocastica* se tutti gli elementi sono non negativi, e la somma degli elementi su ciascuna riga e su ciascuna colonna è uguale a 1.

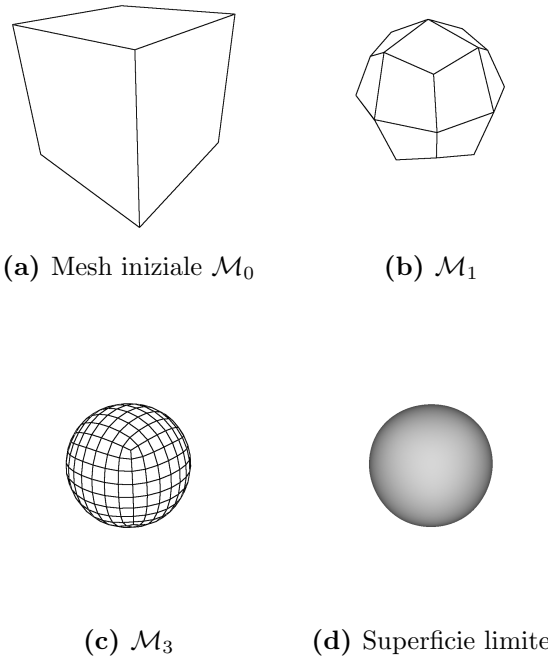


Figura 1.1: Esempio del processo di suddivisione.

I lavori di Catmull e Clark, Doo e Sabin, nei quali è apparso per la prima volta il concetto di superficie di suddivisione, presentano alcuni metodi per costruire superfici di questa classe come la generalizzazione dell’algoritmo di suddivisione ricorsiva dei patch B-spline. Infatti, la caratteristica principale delle superfici di suddivisione è il fatto che esse non sono vincolate alla struttura a griglia regolare tipica delle superfici B-spline standard, permettendo quindi di lavorare con configurazioni irregolari, con topologia e genere arbitrari.

Un algoritmo di suddivisione prende in input una *mesh di controllo* \mathcal{M}_0 costituita da punti 3D tra loro connessi secondo una certa topologia. Questa mesh è suddivisa secondo regole opportune, in modo da produrre una mesh \mathcal{M}_1 raffinata, avente un numero maggiore di vertici, lati e facce, e sulla quale è possibile applicare nuovamente l’algoritmo di raffinamento. La superficie ottenuta come limite di questa sequenza di mesh \mathcal{M}_k sempre più “fini” (o più “dense”), cioè per il numero k di passi di suddivisione tendente all’infinito, è detta *superficie limite*. La Figura 1.1 mostra un esempio.

Per semplicità nella discussione, assumiamo che la mesh iniziale (e di conseguenza tutte quelle raffinate) sia chiusa, cioè priva di bordo: ogni lato è

condiviso esattamente da due facce. Trattiamo il caso di mesh aperte nella Sezione 1.6, nel contesto specifico della valutazione della superficie limite.

Definizione 1.3. Definiamo *valenza* di un vertice appartenente a una mesh il numero di lati dei quali esso è un estremo.

Definizione 1.4. Nel contesto di uno schema di suddivisione, chiamiamo *vertice straordinario* un vertice di una mesh che ha una valenza diversa rispetto a quella del caso considerato come regolare.

Per esempio, nello schema di Catmull-Clark sono straordinari i vertici con valenza $n \neq 4$, poiché il caso $n = 4$ è quello di una griglia regolare (di quadrilateri).

Definizione 1.5. Chiamiamo *punto straordinario* il punto sulla superficie limite che è l'immagine di un vertice straordinario.

Per molti schemi, la regolarità e la qualità della superficie limite sono più basse nei punti straordinari, rispetto all'ordine di continuità raggiunto nei casi regolari. La definizione di questi punti dipende dai dettagli di ciascuno schema di suddivisione, ma in generale essi sono i punti limite corrispondenti a vertici o zone della mesh iniziale in cui la topologia non è quella che lo schema considera come regolare.

In alcune occasioni non adottiamo la distinzione tra vertici e punti straordinari, e utilizziamo la denominazione di vertice straordinario in entrambi i casi, in quanto non c'è rischio di equivoco: quando ci riferiamo alla valutazione della superficie o delle sue derivate in un vertice straordinario, intendiamo il calcolo di questi valori nel punto limite corrispondente.

1.2.1 Rappresentazione degli schemi di suddivisione

Una superficie di suddivisione è considerata come limite di un processo di suddivisione iterata a partire da una mesh iniziale. Le regole che definiscono il raffinamento, cioè l'introduzione di nuovi vertici, lati e facce, corrispondono a degli operatori di media che mappano i vertici intorno a un control point appartenente alla mesh \mathcal{M}_k nei vertici di un intorno equivalente nella mesh raffinata \mathcal{M}_{k+1} .

Per uno schema uniforme stazionario³, sono possibili diverse rappresentazioni dei pesi, cioè dei coefficienti usati nelle combinazioni dei vecchi vertici per produrre i nuovi. Ne presentiamo alcune, tra loro equivalenti in termini del contenuto di informazione.

³Si veda la Sezione 1.5 per le definizioni di questi concetti.

Stencil. Un passo di raffinamento introduce nuovi vertici di diversi tipi: nella quasi totalità degli schemi di interesse pratico, essi sono in corrispondenza dei centroidi delle vecchie facce, dei punti medi dei lati, e al posto di vecchi vertici. Una ovvia rappresentazione dello schema è data dai coefficienti delle combinazioni pesate per ottenere ciascun tipo di vertice nella nuova mesh; ognuno di questi insiemi di pesi è chiamato *stencil*, e la loro totalità costituisce una descrizione completa dello schema.

Poiché i coefficienti sono componenti di una media pesata, la somma dei valori di ciascuno stencil deve essere 1.

Come esempio, nella Figura 1.4 sono riportati gli stencil utilizzati nello schema di Catmull-Clark: i diagrammi mostrano l'influenza che un intorno di vecchi vertici ha su un nuovo vertice, creato con il passo di suddivisione.

Matrice di suddivisione. Seguendo un approccio discreto e basato sull'algebra lineare, è possibile codificare l'azione degli operatori di raffinamento con l'applicazione ripetuta di una *matrice di suddivisione globale* $\mathbf{S}_{\text{global}}^{(k)}$ che produce le posizioni dei vertici $\mathbf{V}_{k+1} := \left(\mathbf{v}_0^{(k+1)}, \dots, \mathbf{v}_{n_{k+1}}^{(k+1)} \right)$ della mesh raffinata a partire da quelli di \mathcal{M}_k :

$$\mathbf{V}_{k+1}^{(\chi)} = \mathbf{S}_{\text{global}}^{(k)} \mathbf{V}_k^{(\chi)}, \quad \chi \in \{x, y, z\}.$$

Si noti che la matrice $\mathbf{S}_{\text{global}}^{(k)} \in \mathbb{R}^{n_{k+1} \times n_k}$ cambia ad ogni passo, così come cambia la sua dimensione in quanto l'operazione di raffinamento produce un aumento del numero di vertici della mesh.

Per analizzare il comportamento al limite della superficie vicino a un vertice $\bar{\mathbf{v}}^{(k)}$ di valenza n , è conveniente introdurre una matrice che descrive il processo di suddivisione localmente. Consideriamo un *intorno* $\bar{\mathbf{V}}_k$ del vertice $\bar{\mathbf{v}}^{(k)}$, cioè l'insieme costituito dai vertici di \mathcal{M}_k adiacenti a $\bar{\mathbf{v}}^{(k)}$ ed eventualmente da quelli appartenenti al *q-ring*, cioè all'unione di q anelli di facce intorno a $\bar{\mathbf{v}}^{(k)}$, dove q è un numero che dipende dallo specifico schema di suddivisione.

La "larghezza" di questo intorno, cioè il numero di vertici che lo costituiscono, è legata al concetto di *supporto*: esso determina quale regione della superficie limite è influenzata dalla modifica dei control point. Per esempio, lo schema di Catmull-Clark ha supporto $q = 2$, cioè la superficie limite in un punto corrispondente a un vertice di una mesh è influenzata dal 2-ring di vertici intorno ad esso. Come si discute nella Sezione 1.4, la nozione di supporto conduce a quella di funzione base.

Denotiamo con \mathbf{S}_n la matrice che codifica le regole per ottenere, mediante opportune combinazioni dei vertici di $\bar{\mathbf{V}}_k$, i vertici dell'intorno raffinato $\bar{\mathbf{V}}_{k+1}$, e la chiamiamo *matrice di suddivisione locale*. Quindi essa è tale che

$$\bar{\mathbf{V}}_{k+1}^{(\chi)} = \mathbf{S}_n \bar{\mathbf{V}}_k^{(\chi)}, \quad \chi \in \{x, y, z\}.$$

La suddivisione iterata è espressa da ripetute moltiplicazioni per \mathbf{S}_n , cioè da potenze di \mathbf{S}_n .

La matrice di suddivisione è una maniera compatta per esprimere le regole che determinano i nuovi vertici a partire dai vecchi: gli stencil che caratterizzano lo schema appaiono come righe della matrice. Si noti che, per uno schema fissato, la matrice di suddivisione locale dipende dalla valenza n del vertice considerato come centro dell'intorno.

Come si discute nella Sezione 1.3, la matrice di suddivisione locale fornisce un buono strumento per l'analisi del comportamento della superficie limite.

1.3 Proprietà

Dopo un passo di suddivisione, sorge una configurazione di vertici che permane per tutti i passi di raffinamento successivi: nelle mesh \mathcal{M}_k , $k \geq 1$ si osserva la stessa topologia, il numero di vertici straordinari rimane costante ed essi sono separati da un numero crescente di ring di vertici regolari. Pertanto è conveniente (e in alcuni casi necessario) condurre l'analisi delle proprietà lavorando sulla mesh suddivisa una volta \mathcal{M}_1 , in modo che sia presente la struttura caratteristica originata dallo schema di suddivisione.

Sia $\bar{\mathbf{v}}^{(1)}$ un vertice di valenza n della mesh \mathcal{M}_1 , e sia $\bar{\mathbf{V}}_1$ un suo intorno. Le proprietà della superficie limite nelle vicinanze del punto limite corrispondente a $\bar{\mathbf{v}}^{(1)}$ sono governate dalle proprietà dell'intorno raffinato $\bar{\mathbf{V}}_k$ per $k \rightarrow \infty$. Poiché $\bar{\mathbf{V}}_{k+1}$ è l'immagine di $\bar{\mathbf{V}}_1$ mediante k applicazioni di \mathbf{S}_n , cioè

$$\bar{\mathbf{V}}_{k+1}^{(\chi)} = \mathbf{S}_n^k \bar{\mathbf{V}}_1^{(\chi)}, \quad \chi \in \{x, y, z\},$$

la autostruttura (cioè autovalori e autovettori) della matrice \mathbf{S}_n gioca un ruolo chiave. Infatti, questa rappresentazione discreta, oltre a fornire delle importanti linee guida nella costruzione delle regole per i vertici straordinari, permette di determinare delle condizioni *necessarie* per la continuità e la regolarità della superficie limite, nella forma di restrizioni sugli autovalori della matrice di suddivisione \mathbf{S}_n . Illustriamo la loro derivazione.

Sia m la dimensione della matrice (quadrata) di suddivisione locale \mathbf{S}_n . Denotiamo con $\lambda_0^{[n]}, \dots, \lambda_{m-1}^{[n]}$ gli autovalori di \mathbf{S}_n , ordinati in senso non crescente, cioè $\lambda_0^{[n]} \geq \lambda_1^{[n]} \geq \dots \geq \lambda_{m-1}^{[n]}$.

Osservazione 1. Per gli schemi di interesse pratico, tutti gli autovalori della matrice di suddivisione locale \mathbf{S}_n sono reali: $\lambda_i^{[n]} \in \mathbb{R} \forall i = 0, \dots, m-1$.

Indichiamo con $\mathbf{r}_i^{[n]}, \mathbf{l}_i^{[n]}$, $i = 0, \dots, m-1$, rispettivamente gli autovettori destri e sinistri corrispondenti agli autovalori. Se la matrice \mathbf{S}_n non è difettiva⁴,

⁴Una matrice quadrata \mathbf{A} si dice *difettiva* se non possiede una base di autovettori completa, e quindi non è diagonalizzabile.

gli autovettori destri formano una base, e gli autovettori sinistri possono essere scelti tali che

$$\mathbf{l}_i^{[n]} \cdot \mathbf{r}_j^{[n]} = \delta_{ij}. \quad (1.1)$$

Pertanto, assumendo che \mathbf{S}_n non sia difettiva, l'intorno $\bar{\mathbf{V}}_1$ può essere espresso in modo univoco nella base degli autovettori destri come

$$\bar{\mathbf{V}}_1^{(\chi)} = \sum_{i=0}^{m-1} c_i^{(\chi)} \mathbf{r}_i^{[n]}. \quad (1.2)$$

I coefficienti $\mathbf{c}_j := (c_j^{(x)}, c_j^{(y)}, c_j^{(z)})$, $j = 0, \dots, m-1$, sono vettori posizione, e possono essere determinati moltiplicando scalarmente entrambi i membri di (1.2) per $\mathbf{l}_j^{[n]}$ e usando la relazione (1.1):

$$\mathbf{l}_j^{[n]} \cdot \bar{\mathbf{V}}_1^{(\chi)} = \sum_{i=0}^{m-1} c_i^{(\chi)} \mathbf{l}_j^{[n]} \cdot \mathbf{r}_i^{[n]} = \sum_{i=0}^{m-1} c_i^{(\chi)} \delta_{ji} = c_j^{(\chi)}.$$

Dall'espansione (1.2) di $\bar{\mathbf{V}}_1$, risulta che l'intorno ottenuto raffinando k volte si scrive

$$\bar{\mathbf{V}}_{k+1}^{(\chi)} = \mathbf{S}_n^k \bar{\mathbf{V}}_1^{(\chi)} = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\lambda_i^{[n]} \right)^k c_i^{(\chi)} \mathbf{r}_i^{[n]}.$$

Affinché esista un limite non banale per $k \rightarrow \infty$, è necessario che il modulo dell'autovalore massimo sia 1, cioè $|\lambda_0^{[n]}| = 1$. In questo caso,

$$\bar{\mathbf{V}}_\infty^{(\chi)} := \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{V}}_k^{(\chi)} = c_0^{(\chi)} \mathbf{r}_0^{[n]} = \left(\mathbf{l}_0^{[n]} \cdot \bar{\mathbf{V}}_1^{(\chi)} \right) \mathbf{r}_0^{[n]}. \quad (1.3)$$

Perché uno schema di suddivisione sia invariante per trasformazioni affini, cioè indipendente dal sistema di coordinate scelto, i vertici della mesh \mathcal{M}_{k+1} devono essere combinazioni affini dei vertici di \mathcal{M}_k . Ciò significa che ciascuna riga della matrice di suddivisione locale \mathbf{S}_n deve sommare a 1, cioè \mathbf{S}_n deve essere una matrice stocastica (destra). Scritto in forma matriciale,

$$\mathbf{S}_n \mathbf{1} = \mathbf{1} \quad \text{dove} \quad \mathbf{1} := (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^m,$$

cioè l'autovettore associato all'autovalore $\lambda_0^{[n]} = 1$ è il vettore con tutti gli elementi uguali a 1: $\mathbf{r}_0^{[n]} = \mathbf{1}$. Pertanto, dalla (1.3) si ottiene che ogni vertice nell'intorno $\bar{\mathbf{V}}_1$ converge al punto \mathbf{c}_0 sulla superficie limite, con componenti

$$c_0^{(\chi)} = \mathbf{l}_0^{[n]} \cdot \bar{\mathbf{V}}_1^{(\chi)}, \quad \chi \in \{x, y, z\}.$$

Quindi abbiamo provato che:

Proposizione 1.1. *Se la matrice di suddivisione locale \mathbf{S}_n soddisfa le condizioni:*

- (i) \mathbf{S}_n non è difettiva;
- (ii) \mathbf{S}_n descrive un processo invariante per trasformazioni affini;
- (iii) l'autovalore massimo di \mathbf{S}_n , detto autovalore dominante, ha modulo unitario $|\lambda_0^{[n]}| = 1$ e molteplicità 1;

allora un punto $\bar{\mathbf{v}}^{(1)} \in \mathcal{M}_1$ con intorno $\bar{\mathbf{V}}_1$ converge al valore limite $\bar{\mathbf{v}}^{(\infty)} := (\bar{v}_\infty^{(x)}, \bar{v}_\infty^{(y)}, \bar{v}_\infty^{(z)}) = \mathbf{c}_0$ sulla superficie limite, definito da

$$\bar{v}_\infty^{(\chi)} := c_0^{(\chi)} = \mathbf{l}_0^{[n]} \cdot \bar{\mathbf{V}}_1^{(\chi)}, \quad \chi \in \{x, y, z\}, \quad (1.4)$$

dove $\mathbf{l}_0^{[n]}$ è l'autovettore sinistro associato all'autovalore $\lambda_0^{[n]}$.

Proposizione 1.2. *Se la matrice di suddivisione locale \mathbf{S}_n soddisfa le condizioni della Proposizione 1.1 e inoltre*

- (iv) gli autovalori di \mathbf{S}_n sono tali che $\lambda_0^{[n]} = 1 > \lambda_1^{[n]} = \lambda_2^{[n]} > \lambda_3^{[n]}$, dove $\lambda_1^{[n]} = \lambda_2^{[n]}$ è detto autovalore sotto-dominante;

allora il vettore normale alla superficie di suddivisione nel punto limite $\bar{\mathbf{v}}^{(\infty)}$ corrispondente al vertice $\bar{\mathbf{v}}^{(1)} \in \mathcal{M}_1$, avente intorno $\bar{\mathbf{V}}_1$, è dato da

$$\mathbf{N}^{(\infty)} = \mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2, \quad (1.5)$$

dove $c_1^{(\chi)} = \mathbf{l}_1^{[n]} \cdot \bar{\mathbf{V}}_1^{(\chi)}$, $c_2^{(\chi)} = \mathbf{l}_2^{[n]} \cdot \bar{\mathbf{V}}_1^{(\chi)}$, per $\chi \in \{x, y, z\}$.

Dimostrazione. L'idea è quella di mostrare che esiste un piano tangente comune al quale convergono tutti i punti dell'intorno. Il vettore $\mathbf{N}^{(\infty)}$ è quindi scelto perpendicolare a questo piano.

Sia $\mathbf{u}_i^{(k)}$ il vettore che congiunge $\bar{\mathbf{v}}^{(\infty)}$ all' i -esimo punto $\bar{\mathbf{v}}_i^{(k)}$ dell'intorno $\bar{\mathbf{V}}_k$. Se esiste un piano tangente comune, allora è possibile trovare un vettore $\mathbf{N}^{(\infty)}$ che è perpendicolare a ciascun $\mathbf{u}_i^{(k)}$ nel limite per $k \rightarrow \infty$. Più formalmente, cerchiamo un vettore $\mathbf{N}^{(\infty)}$ tale che

$$\mathbf{N}^{(\infty)} \cdot \mathbf{u}_i^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad \text{per } i = 1, \dots, m-1.$$

Tuttavia, poiché $\mathbf{u}_i^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \mathbf{0}$, questa condizione è banalmente verificata da qualsiasi vettore $\mathbf{N}^{(\infty)}$. Superiamo questo problema considerando i vettori normalizzati

$$\hat{\mathbf{u}}_i^{(k)} := \frac{\mathbf{u}_i^{(k)}}{\|\mathbf{u}_i^{(k)}\|}.$$

Quindi cerchiamo un vettore $\mathbf{N}^{(\infty)}$ tale che

$$\mathbf{N}^{(\infty)} \cdot \hat{\mathbf{u}}_i^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad \text{per } i = 1, \dots, m-1.$$

Indicando con $r_j^{(i)}$ l'elemento i -esimo del j -esimo autovettore destro $\mathbf{r}_j^{[n]}$, con $\lambda := \lambda_1^{[n]} = \lambda_2^{[n]}$ l'autovalore sotto-dominante e con $\lambda_j := \lambda_j^{[n]}$, $j = 3, \dots, m-1$, gli altri autovalori, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_i^{(k)} &= \frac{\bar{\mathbf{v}}_i^{(k)} - \bar{\mathbf{v}}^{(\infty)}}{\|\bar{\mathbf{v}}_i^{(k)} - \bar{\mathbf{v}}^{(\infty)}\|} \\ &= \frac{\lambda^k (\mathbf{c}_1 r_1^{(i)} + \mathbf{c}_2 r_2^{(i)}) + \lambda_3^k \mathbf{c}_3 r_3^{(i)} + \dots}{\|\lambda^k (\mathbf{c}_1 r_1^{(i)} + \mathbf{c}_2 r_2^{(i)}) + \lambda_3^k \mathbf{c}_3 r_3^{(i)} + \dots\|} \\ &= \frac{(\mathbf{c}_1 r_1^{(i)} + \mathbf{c}_2 r_2^{(i)}) + \frac{\lambda_3^k}{\lambda^k} \mathbf{c}_3 r_3^{(i)} + \dots}{\|(\mathbf{c}_1 r_1^{(i)} + \mathbf{c}_2 r_2^{(i)}) + \frac{\lambda_3^k}{\lambda^k} \mathbf{c}_3 r_3^{(i)} + \dots\|}. \end{aligned}$$

Poiché $\lambda > \lambda_j$ per $j \geq 3$ e quindi $\frac{\lambda_j}{\lambda} < 1$, considerando il limite per $k \rightarrow \infty$ risulta

$$\hat{\mathbf{u}}_i^{(\infty)} := \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{u}}_i^{(k)} = \frac{\mathbf{c}_1 r_1^{(i)} + \mathbf{c}_2 r_2^{(i)}}{\|\mathbf{c}_1 r_1^{(i)} + \mathbf{c}_2 r_2^{(i)}\|}.$$

Questa espressione implica che ciascuno dei versori limite $\hat{\mathbf{u}}_i^{(\infty)}$, $i = 1, \dots, m-1$, è una combinazione lineare dei vettori \mathbf{c}_1 e \mathbf{c}_2 ; pertanto, tutti i vettori $\hat{\mathbf{u}}_i^{(\infty)}$ devono giacere sul piano generato da \mathbf{c}_1 e \mathbf{c}_2 . Quindi il vettore normale che cerchiamo è dato dal prodotto vettoriale $\mathbf{N}^{(\infty)} = \mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2$. \square

1.4 Analisi spettrale in un vertice straordinario

L'approccio discreto, basato sull'algebra lineare, adottato nelle Sezioni 1.2 e 1.3 non è in grado di fornire condizioni *sufficienti* per la continuità di ordine superiore della superficie limite, in quanto non tiene conto delle funzioni base associate ai control point. Inoltre è necessario disporre di strumenti adatti per comprendere il comportamento che la superficie prodotta da uno schema stazionario manifesta in un vertice straordinario.

In questa Sezione esponiamo il metodo introdotto da Reif [Rei95] per l'analisi rigorosa delle proprietà della superficie limite intorno ai vertici straordinari. In particolare, il suo approccio può essere applicato a tutti gli algoritmi

di suddivisione, e fornisce una condizione sufficiente per la regolarità della superficie limite, cioè per l'esistenza di una parametrizzazione C^1 regolare vicino al vertice straordinario.

Nel seguito, indichiamo sempre con $\lambda_0^{[n]}, \dots, \lambda_{m-1}^{[n]}$ gli autovalori della matrice di suddivisione locale \mathbf{S}_n , ordinati in senso non crescente, e con $\mathbf{r}_i^{[n]}, \mathbf{l}_i^{[n]}$, $i = 0, \dots, m-1$, rispettivamente gli autovettori destri e sinistri corrispondenti.

1.4.1 Convergenza

Teorema 1.3 (Reif). *Se $\lambda_0^{[n]} = 1 > |\lambda_1^{[n]}|$, allora l'algoritmo di suddivisione converge a una superficie limite \mathbf{S} .*

Gli schemi più diffusi, incluso quello di Catmull-Clark, soddisfano questa condizione.

1.4.2 Mappa caratteristica

Per un vertice di valenza n , la mappa caratteristica è definita dalla superficie limite $\Psi^{[n]}$ ottenuta partendo dalla mesh 2D $\mathcal{M}^{[n]}$ formata considerando le coppie di componenti corrispondenti dei due autovettori (destri) sotto-dominanti $\mathbf{r}_1^{[n]}, \mathbf{r}_2^{[n]}$, relativi alla matrice di suddivisione locale \mathbf{S}_n . Pertanto la mappa caratteristica può essere considerata come una funzione spline bi-dimensionale, con control point bidimensionali dati dalle componenti degli autovettori sotto-dominanti. La Figura 1.2 mostra alcuni esempi.

Naturalmente, questa definizione di mappa caratteristica è soggetta all'ambiguità nella scelta dei vettori $\mathbf{r}_1^{[n]}, \mathbf{r}_2^{[n]}$; tuttavia, le sue proprietà cruciali sono ben definite.

Osservazione 2. L'iniettività e la regolarità della mappa caratteristica non dipendono dalla particolare scelta degli autovettori sotto-dominanti $\mathbf{r}_1^{[n]}, \mathbf{r}_2^{[n]}$.

Come regola di normalizzazione per gli autovettori, è possibile effettuare una sequenza di operazioni di ortogonalizzazione, rotazione e scala, in modo da portare gli estremi degli n segmenti uscenti dal vertice straordinario centrale della mesh $\mathcal{M}^{[n]}$ nei vertici del poligono regolare a n lati inscritto nella circonferenza unitaria: $(\cos(\frac{2\pi}{n}i), \sin(\frac{2\pi}{n}i))$, $i = 0, \dots, n-1$.

Denotiamo con (s, t) i punti della superficie $\Psi^{[n]}$, e chiamiamo $K_n \subset \mathbb{R}^2$ il dominio (piano) da essi costituito.

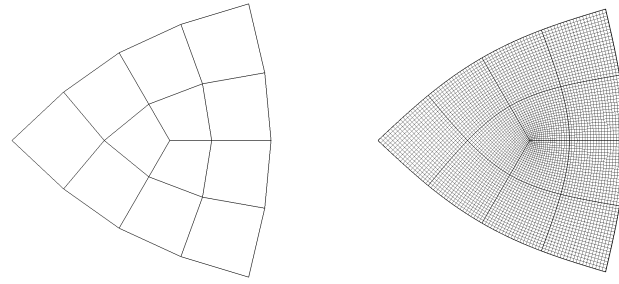
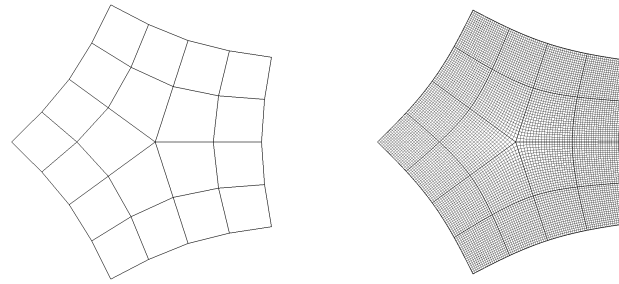
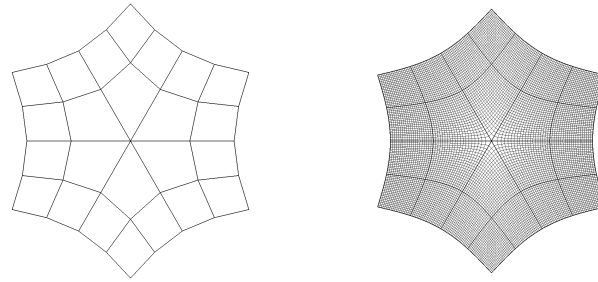
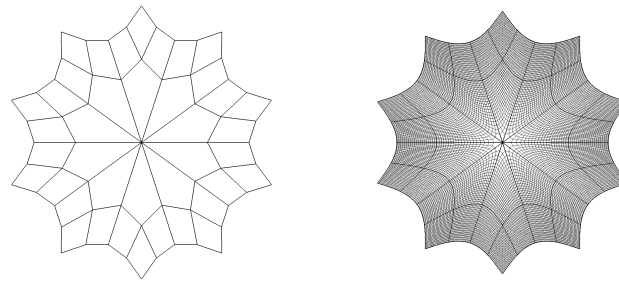
(a) $n = 3$ (b) $n = 5$ (c) $n = 6$ (d) $n = 10$

Figura 1.2: Parametrizzazione naturale di una superficie di Catmull-Clark intorno a un vertice straordinario interno di valenza $n = 3, 5, 6, 10$, basata sulla mappa caratteristica. Colonna di sinistra: mesh di controllo $\mathcal{M}^{[n]}$ con vertici dati dagli autovettori sotto-dominanti $\mathbf{r}_1^{[n]}, \mathbf{r}_2^{[n]}$ di \mathbf{S}_n . Colonna di destra: superficie limite corrispondente.

1.4.3 Condizioni per la continuità C^k

Teorema 1.4 (Reif). *Se $\lambda_1^{[n]} = \lambda_2^{[n]}$, con $\lambda_0^{[n]} = 1 > \lambda_1^{[n]} = \lambda_2^{[n]} > \left| \lambda_3^{[n]} \right|$, è un autovalore reale con molteplicità algebrica e geometrica uguali a 2, e se la mappa caratteristica è regolare, allora la superficie limite \mathbf{S} è G^1 (cioè il piano tangente varia con continuità).*

Teorema 1.5 (Reif). *Se $\lambda_1^{[n]} = \lambda_2^{[n]}$, con $\lambda_0^{[n]} = 1 > \lambda_1^{[n]} = \lambda_2^{[n]} > \left| \lambda_3^{[n]} \right|$, è un autovalore reale con molteplicità algebrica e geometrica uguali a 2, e se la mappa caratteristica è regolare e iniettiva, allora la superficie limite \mathbf{S} ammette una parametrizzazione regolare vicino ai vertici straordinari.*

In [WW01], gli autori generalizzano questi risultati, dimostrando il teorema seguente che fornisce delle condizioni sufficienti per la continuità C^k nei vertici straordinari.

Teorema 1.6 (Warren-Weimer, [WW01] Teorema 8.4). *Sia $\lambda_0^{[n]} = 1 > \lambda_1^{[n]} \geq \lambda_2^{[n]} > \left| \lambda_3^{[n]} \right|$, e sia ϕ una autofunzione di \mathbf{S}_n associata all'autovalore λ tale che $|\lambda| < \lambda_2^k$. Se ϕ è C^k ovunque tranne che nell'origine, allora ϕ è C^k nell'origine.*

1.5 Schemi più usati

Gli schemi di suddivisione possono essere ripartiti in due classi, a seconda che la superficie limite interpoli i vertici della mesh di controllo iniziale \mathcal{M}_0 oppure ne approssimi semplicemente la forma. Riportiamo un breve elenco degli schemi più diffusi, divisi in base a questo criterio.

- Schemi di interpolazione:
 - Butterfly;
 - Kobbelt.
- Schemi di approssimazione:
 - Catmull-Clark: produce mesh con facce quadrilatere, generalizza le regole di suddivisione per le B-spline bicubiche;
 - Doo-Sabin: generalizza le regole di suddivisione per le B-spline biquadratiche;
 - Loop: produce mesh con facce triangolari, generalizza le B-spline triangolari quartiche.

Anno	Algoritmo	Regolarità	Grado	Topologia base	Tipo
1978	Catmull-Clark	C^2	bi-3	□	approx
1978	Doo-Sabin	C^2	bi-2	□	approx
1987	Loop	C^2	4	△	approx
1990	Butterfly	C^1	-	△	interp
1996	Kobbelt	C^1	-	□	interp
1997	Simplest	C^1	2	□	approx
1998	TURBS	C^k	bi-($2k + 2$)	□	approx
2000	$\sqrt{3}$	C^2	-	△	approx
2001	4-8	C^4	6	□	approx

Tabella 1.1: Alcuni algoritmi per il raffinamento di mesh mediante un processo di suddivisione. Ad eccezione dello schema TURBS, le superfici limite sono in generale solo C^1 in alcuni punti isolati (vertici straordinari).

È interessante notare che alcune delle proprietà della superficie limite considerate nella Sezione 1.3 dipendono dai primi passi di suddivisione (come l'ampiezza del supporto e gli artefatti sulla forma), mentre altre dipendono dai passi seguenti (come la continuità delle derivate). Per questo, può essere conveniente considerare schemi in cui i coefficienti nelle combinazioni affini che definiscono i vertici della mesh raffinata variano opportunamente tra i passi di suddivisione. Ciò produce un altro criterio di classificazione degli schemi:

- *stazionari*: gli stessi stencil sono usati in ogni passo di suddivisione, e la connettività tra i vertici conserva la stessa topologia;
- *non stazionari*: possono prevedere stencil diversi in ciascun passo, cioè la matrice dipende dal passo di suddivisione $\mathbf{S}_n = \mathbf{S}_n^{(k)}$, oppure la connettività tra i vertici è modificata.

Se si verifica che dopo un certo numero di passi di suddivisione lo schema diventa quasi stazionario, ci riferiamo al limite chiamandolo schema limite, e l'analisi della continuità dello schema non stazionario può essere scaricata sullo studio delle proprietà di continuità di questo schema limite.

1.5.1 Catmull-Clark

Prima di riportare le formule per effettuare i passi di raffinamento e per valutare la superficie finale, elenchiamo alcune caratteristiche dello schema di suddivisione di Catmull-Clark. Le proprietà della superficie limite valgono perché sono soddisfatte le condizioni discusse nelle Sezioni 1.3 e 1.4.

1. I vertici della mesh raffinata \mathcal{M}_{k+1} sono combinazioni affini dei vertici della vecchia mesh \mathcal{M}_k .

2. Il processo di suddivisione consente di ottenere superfici limite di genere arbitrario, perché le regole per il raffinamento possono essere applicate su mesh con topologia arbitraria.
3. Per questo schema, i vertici straordinari sono i vertici comuni a $n \neq 4$ lati se essi sono interni o a $n \neq 3$ lati se si trovano sul bordo della mesh.
4. Come mostra la Figura 1.3, dopo un passo di suddivisione, la mesh \mathcal{M}_1 contiene solo facce quadrilatere; dopo due passi di suddivisione, nella mesh \mathcal{M}_2 gli eventuali vertici straordinari sono isolati, cioè ciascuna faccia ha al più un vertice straordinario. Nei passi successivi, la configurazione dei vertici delle mesh rimane la stessa, cioè si mantiene la stessa topologia.

In particolare, il numero di vertici straordinari è fisso, ed è uguale a quello dei vertici straordinari presenti nella mesh \mathcal{M}_1 , o equivalentemente, alla somma del numero di vertici straordinari e di facce non quadrilatera in \mathcal{M}_0 .

5. Al limite, per il numero di passi di raffinamento tendente all'infinito, il procedimento produce una superficie limite che è globalmente C^1 . Nelle zone regolari, essa riproduce le B-spline prodotto tensoriale bicubiche e quindi consiste in patch bicubici C^∞ raccordati tra loro fino alla derivata seconda (continuità C^2), mentre è solo C^1 in corrispondenza dei vertici straordinari.

Nelle vicinanze di un vertice straordinario, la superficie limite non possiede una parametrizzazione in forma chiusa: essa consiste in una sequenza infinita di patch bicubici che converge a un punto limite centrale (si veda [PR08] Capitolo 4). In questo punto, la superficie ha un piano tangente ben definito, mentre in generale la curvatura non è ivi ben definita.

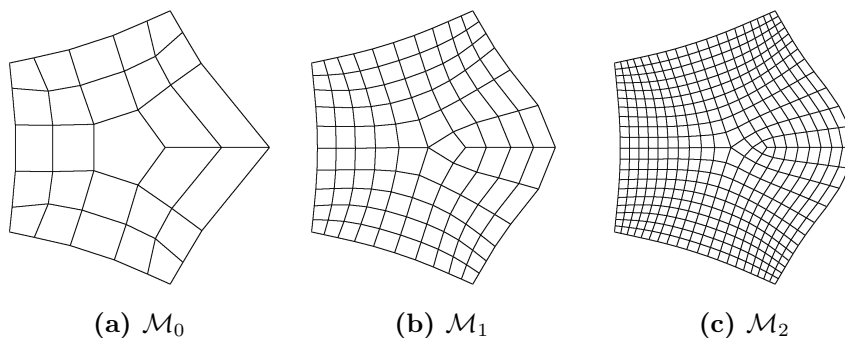


Figura 1.3: Primi passi di suddivisione per lo schema di Catmull-Clark.

1.5.1.1 Regole di suddivisione

Lo schema di Catmull-Clark classifica i vertici di una mesh in tre categorie, e a ciascun passo di suddivisione i vertici della mesh raffinata \mathcal{M}_{k+1} sono determinati come combinazioni affini dei vertici di \mathcal{M}_k utilizzando le tre regole seguenti per la creazione dei nuovi vertici.

Per illustrare un passo di raffinamento, consideriamo un vertice $\bar{\mathbf{v}}^{(k)}$ di valenza n e i vertici del suo intorno 1-ring $\bar{\mathbf{V}}_k$. Esso comprende, oltre al vertice centrale, n edge point (denotati con $\bar{\mathbf{e}}_i^{(k)}$) che sono i nodi adiacenti a $\bar{\mathbf{v}}^{(k)}$, e gli altri vertici $\bar{\mathbf{v}}_{i,j}^{(k)}$ delle n facce del primo ring, le quali possono anche essere non quadrilateri. Indichiamo con n_i il numero di vertici (o lati) della faccia i -esima. Le regole per la creazione dei nuovi vertici dell'intorno $\bar{\mathbf{V}}_{k+1}$ sono le seguenti, dove gli indici sono considerati modulo n quando sono coinvolti in operazioni.

- **Face point.** Un nuovo punto è collocato nel centroide di ciascuna faccia:

$$\bar{\mathbf{f}}_i^{(k+1)} := \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i-1} \bar{\mathbf{v}}_{i,j}^{(k)}, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

- **Edge point.** In corrispondenza di ogni lato avente $\bar{\mathbf{v}}^{(k)}$ come estremo, è posto un nuovo punto, calcolato come la media di quelli circostanti:

$$\bar{\mathbf{e}}_i^{(k+1)} := \frac{1}{4} \left(\bar{\mathbf{v}}^{(k)} + \bar{\mathbf{e}}_i^{(k)} + \bar{\mathbf{f}}_{i-1}^{(k+1)} + \bar{\mathbf{f}}_i^{(k+1)} \right), \quad i = 0, \dots, n-1.$$

- **Vertex point.** Infine, si determina un nuovo punto centrale:

$$\bar{\mathbf{v}}^{(k+1)} := \frac{n-2}{n} \bar{\mathbf{v}}^{(k)} + \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\mathbf{e}}_i^{(k)} + \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\mathbf{f}}_i^{(k+1)}.$$

Con questa procedura, ogni faccia della mesh \mathcal{M}_k è suddivisa in un numero di quadrilateri uguale al numero di vertici che possiede, ottenuti congiungendo i face point creati con i nuovi edge point vicini. Quindi il vertice aggiunto al centro di ciascuna faccia ha una valenza uguale al numero di vertici della faccia originaria.

Queste regole per la creazione dei nuovi vertici della mesh raffinata possono essere schematizzate facendo uso degli stencil, come mostrato nella Figura 1.4. Essi sono ereditati dalle regole di suddivisione per le B-spline bicubiche (Figure 1.4a, 1.4b, 1.4c), con l'aggiunta di una generalizzazione per gestire i vertici di valenza $n \neq 4$ (Figura 1.4d) espressa in termini degli scalari

$$\alpha, \beta, \gamma, \quad \text{tali che} \quad \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Nel lavoro originale [CC78], sono suggeriti i valori

$$\alpha := 1 - \frac{7}{4n}, \quad \beta := \frac{3}{2n}, \quad \gamma := \frac{1}{4n}. \quad (1.6)$$

Per $n = 4$, questa scelta coincide con il caso regolare (Figura 1.4c).

Si noti che i pesi dello schema di Catmull-Clark dipendono solo dalla topologia locale della mesh di controllo. Inoltre, la topologia rimane la stessa, cioè la topologia locale intorno a un vertice straordinario conserva la stessa struttura: un vertice straordinario di valenza n , circondato da quadrilateri con gli altri vertici aventi valenza 4. Pertanto, lo schema è detto stazionario.

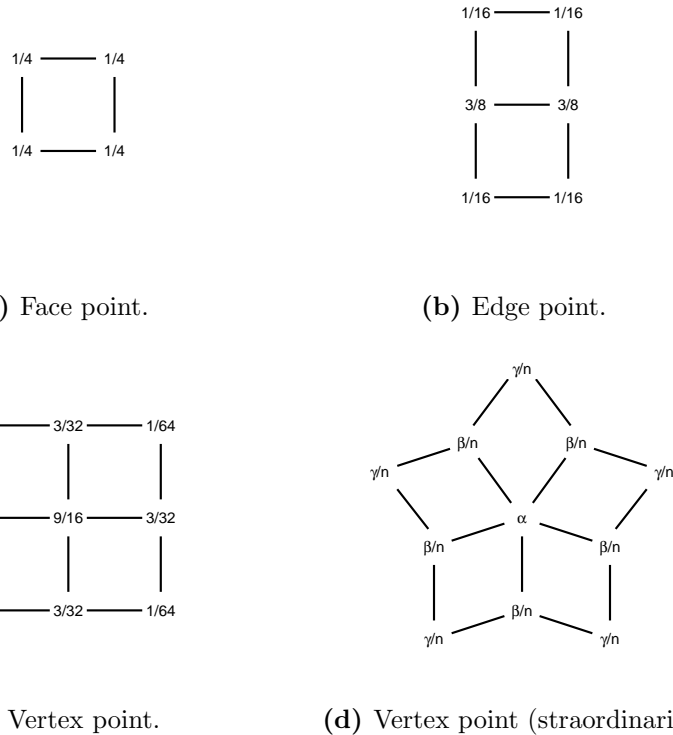


Figura 1.4: Stencil per lo schema di Catmull-Clark. (a)-(c) Regole per determinare i nuovi control point B-spline di una spline uniforme bicubica, mediante knot insertion: i valori mostrati sulla griglia sono i pesi da attribuire ai vecchi vertici per ottenere i nuovi. (d) Regola che generalizza (c) nel caso di valenza $n \neq 4$, con $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

1.5.1.2 Matrice di suddivisione locale

Il 2-ring di vertici intorno a un vertice interno con valenza n determina completamente la superficie limite nelle n facce intorno al vertice centrale;

equivalentemente ciascuna funzione base è non nulla sul 2-ring di facce intorno al vertice sul quale è centrata (cioè quello avente quota 1). Per questo, si dice che lo schema di Catmull-Clark ha supporto 2.

La matrice di suddivisione locale \mathbf{S}_n è la matrice che permette di determinare i $1 + 6n$ vertici del 2-ring al passo $k + 1$ partendo dai $1 + 6n$ vertici del 2-ring al passo k . Numerando i $1 + 6n$ punti del 2-ring intorno al vertice centrale come in Figura 1.5, \mathbf{S}_n risulta avere la seguente struttura quasi circolante a blocchi:

$$\mathbf{S}_n = \begin{pmatrix} A_{00} & \mathbf{A}_h & \mathbf{A}_h & \mathbf{A}_h & \mathbf{A}_h & \cdots & \mathbf{A}_h \\ \mathbf{A}_v & \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_v & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_v & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \mathbf{A}_v & \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+6n \times 1+6n}, \quad (1.7)$$

dove

$$\begin{aligned} A_{00} &:= 1 - \frac{7}{4n}, \\ \mathbf{A}_h &:= \left(\frac{3}{2n^2} \quad \frac{1}{4n^2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right) \in \mathbb{R}^{1 \times 6}, \\ \mathbf{A}_v &:= \left(\frac{3}{8} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{32} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{64} \quad \frac{1}{16} \right)^T \in \mathbb{R}^{6 \times 1}, \\ \mathbf{A}_0 &:= \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{9}{16} & \frac{3}{32} & \frac{3}{32} & \frac{1}{64} & 0 & 0 \\ \frac{3}{16} & \frac{3}{32} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & 0 & 0 \\ \frac{32}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{64} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} & \frac{3}{16} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \\ \mathbf{A}_1 &:= \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{64} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{32} & 0 & \frac{1}{64} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \\ \mathbf{A}_2 &:= \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{64} & \frac{3}{32} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{64} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \\ \mathbf{0} &\in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \text{ ripetuta } n - 3 \text{ volte su ogni "riga"}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

È facile verificare che la matrice di suddivisione \mathbf{S}_n ha elementi non negativi e la somma degli elementi su ogni riga è uguale a 1, quindi \mathbf{S}_n è una matrice stocastica (destra), come richiesto dalle condizioni discusse nelle Sezioni 1.3 e 1.4. Inoltre, calcolando gli autovalori e gli autovettori, risulta che essi soddisfano le condizioni di Reif (Teoremi 1.4 e 1.5) per la convergenza e la regolarità della superficie limite.

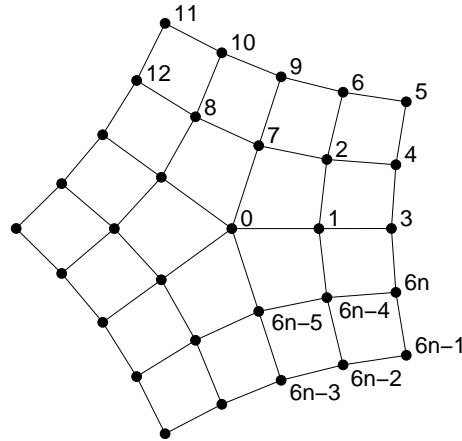


Figura 1.5: Numerazione dei punti del 2-ring intorno a un vertice centrale.

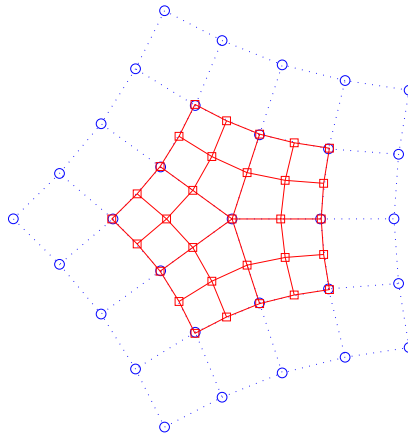


Figura 1.6: Esempio di un passo di suddivisione di Catmull-Clark intorno a un vertice centrale di valenza n . Circoletti: vertici $\bar{\mathbf{V}}_k$ del 2-ring al passo k . Quadratelli: vertici $\bar{\mathbf{V}}_{k+1}$ del 2-ring al passo $k+1$ successivo, ottenuti applicando la matrice di suddivisione locale $\bar{\mathbf{V}}_{k+1}^{(\chi)} = \mathbf{S}_n \bar{\mathbf{V}}_k^{(\chi)}$, $\chi \in \{x, y, z\}$.

n	$\lambda_1^{[n]} = \lambda_2^{[n]}$	n	$\lambda_1^{[n]} = \lambda_2^{[n]}$
3	0.4100970507534396	12	0.6347964123488747
4	0.5	13	0.6376687289743282
5	0.5499883544937105	14	0.6399585303006285
6	0.5796823260840267	15	0.6418127554884756
7	0.5985102834678657	16	0.6433349224702969
8	0.6111165266836518	17	0.6445996163229070
9	0.6199392206170316	18	0.6456616517703933
10	0.6263412675397841	19	0.6465620292480705
11	0.6311275866772166	20	0.6473319026398019

Tabella 1.2: Autovalori sotto-dominanti della matrice di suddivisione locale di Catmull-Clark, per valenza $n = 3, \dots, 20$.

1.5.1.3 Valore limite e normale limite

Poiché la matrice \mathbf{S}_n soddisfa le condizioni richieste nelle Proposizioni 1.1 e 1.2, valgono le formule (1.4) e (1.5) per il valore limite e la normale limite nei punti corrispondenti ai vertici della mesh. Riportiamo l'espressione che esse assumono nello schema di Catmull-Clark; per la loro derivazione, fare riferimento a [HKD93] Appendice A.

Poiché l'autovettore sinistro relativo all'autovalore dominante è

$$\mathbf{l}_0^{[n]} = \frac{1}{n(n+5)} (n^2, 4, \dots, 4, 1, \dots, 1),$$

il punto limite corrispondente a un vertice $\bar{\mathbf{v}}^{(1)} \in \mathcal{M}_1$ di valenza n risulta essere $\bar{\mathbf{v}}^{(\infty)}$ con componenti date da

$$\bar{v}_\infty^{(\chi)} = \frac{1}{n(n+5)} \left(n^2 \bar{v}^{(1)} + 4 \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\mathbf{e}}_i^{(1)} + \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\mathbf{f}}_i^{(1)} \right)^{(\chi)}, \quad \chi \in \{x, y, z\}. \quad (1.9)$$

L'autovalore sotto-dominante è

$$\lambda^{[n]} := \lambda_1^{[n]} = \lambda_2^{[n]} = \frac{1}{16} \left(5 + \cos \left(\frac{2\pi}{n} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{n} \right) \sqrt{18 + 2 \cos \left(\frac{2\pi}{n} \right)} \right),$$

e la normale limite in $\bar{\mathbf{v}}^{(\infty)}$ è determinata dal prodotto vettoriale $\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2$, dove

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[(16\lambda^{[n]} - 4) \cos \left(\frac{2\pi}{n} i \right) \bar{\mathbf{e}}_i^{(1)} + \left(\cos \left(\frac{2\pi}{n} i \right) + \cos \left(\frac{2\pi}{n} (i+1) \right) \right) \bar{\mathbf{f}}_i^{(1)} \right], \\ \mathbf{c}_2 &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[(16\lambda^{[n]} - 4) \cos \left(\frac{2\pi}{n} i \right) \bar{\mathbf{e}}_{i+1}^{(1)} + \left(\cos \left(\frac{2\pi}{n} i \right) + \cos \left(\frac{2\pi}{n} (i+1) \right) \right) \bar{\mathbf{f}}_{i+1}^{(1)} \right]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

1.6 Superfici di suddivisione come superfici parametriche e loro valutazione

A differenza delle spline uniformi, le superfici di suddivisione di Catmull-Clark non possono essere facilmente scritte in forma chiusa intorno ai vertici straordinari. Come mostra la Figura 1.7, la superficie limite nelle vicinanze dei vertici straordinari non è direttamente accessibile; tuttavia, ogni passo di suddivisione produce un nuovo ring di quadrilateri regolari, corrispondenti a patch B-spline bicubici e quindi esprimibili in forma chiusa. Pertanto, intorno ai vertici straordinari, la superficie è costituita da una collezione infinita di patch spline polinomiali, disposti in anelli concentrici convergenti verso il punto straordinario centrale. Si noti che, se il punto ha valenza n , il bordo di ciascun complesso anulare formato da $3n$ patch quadrilateri possiede n angoli.

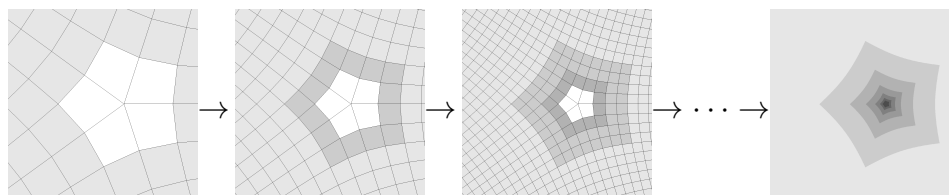


Figura 1.7: Sequenza infinita di ring spline intorno a un punto straordinario. Ogni passo di suddivisione rivela un ulteriore anello di quadrilateri regolari, che rappresentano patch polinomiali bicubici.

La superficie limite è quindi considerata come una *spline generalizzata* (nell'accezione di [PR08] Sezione 1.3) o *spline with singularities*, cioè una superficie parametrica multi-patch, costituita dall'unione di patch regolari e di sequenze di ring annidati nell'intorno dei punti straordinari. Infatti, se da una parte può essere comodo per certe implementazioni considerare la superficie limite come risultato del processo di raffinamento delle mesh di controllo, dall'altra è opportuno abbandonare la rappresentazione attraverso la suddivisione iterata e adottare quella mediante le spline se si è interessati all'analisi delle proprietà della superficie e alla valutazione a tempo costante.

Queste osservazioni sono alla base del metodo proposto da Stam [Sta98] per la valutazione delle superfici di suddivisione di Catmull-Clark.

Al di fuori del 1-ring di un vertice straordinario, cioè nelle regioni corrispondenti alle facce quadrilatera della mesh iniziale che non contengono vertici straordinari, la superficie di Catmull-Clark è semplicemente una superficie B-spline bicubica: pertanto, il valore di questi patch prodotto tensoriale può essere calcolato per parametri arbitrari con i noti algoritmi per le B-spline.

Questo approccio non può essere utilizzato nel primo di ring di facce intorno al vertice straordinario, dove la superficie limite non ha la struttura di prodotto tensoriale. Stam costruisce un algoritmo efficiente per la valutazione a tempo

costante dei punti e delle derivate per valori parametrici arbitrariamente vicini al vertice straordinario. Illustriamo brevemente la sua idea, e rimandiamo al lavoro originale [Sta98] per i dettagli nella derivazione del metodo e per i suggerimenti sulla sua implementazione.

L'approccio di Stam consiste nel lavorare nell'autospazio della matrice di suddivisione, dove un passo di suddivisione è equivalente a una semplice operazione di scala di ciascun autovettore secondo un fattore uguale all'autovalore corrispondente. Per definire una parametrizzazione della superficie limite, si introduce un nuovo insieme di funzioni base dell'autospazio (eigenbasis functions). Per lo schema di Catmull-Clark, le funzioni di questa base possono essere calcolate analiticamente, quindi la valutazione della superficie limite può essere espressa analiticamente. Inoltre, nel caso regolare, tale base coincide con la base delle potenze, e gli autovettori corrispondono alla matrice del cambiamento di base dalla base delle potenze alla base delle B-spline bicubiche; pertanto essa può essere considerata come una generalizzazione della base delle potenze nei vertici straordinari.

Dettagli implementativi. Per integrare il metodo di Stam in un pre-esistente sistema CAD sono state affrontate diverse questioni, qui elencate.

- L'algoritmo di Stam consente di valutare la superficie nelle vicinanze del vertice straordinario, fino a una distanza prefissata (nel nostro caso, 10^{-10}). Tuttavia, esso non fornisce il valore, le derivate prime e le derivate seconde in corrispondenza del vertice straordinario. Pertanto, in questo caso è stata implementata una gestione ad-hoc: il valore limite e la normale limite sono calcolate applicando le formule (1.4) e (1.5) rispettivamente; le derivate prime, seconde e miste sono estrapolate dai valori che assumono a una distanza dal vertice straordinario predefinita.
- Per mantenere la compatibilità con gli altri comandi del sistema CAD, è prevista la valutazione di ciascun patch di superficie fuori dal dominio parametrico (tipicamente, $Q_1 = [0, 1]^2$). Ciò è realizzato attraverso una estrapolazione tangent ribbon.
- Abbiamo esteso l'algoritmo di Stam per valutare superfici aperte e patch di bordo, anche contenenti vertici straordinari sul bordo (si veda il paragrafo seguente).

Valutazione sul bordo. Per determinare la base dell'autospazio, il metodo di Stam necessita di diagonalizzare la matrice di suddivisione. Tuttavia, se il vertice straordinario si trova sul bordo della mesh, per alcune valenze questa matrice è difettiva e quindi non diagonalizzabile. In [LB07] è proposta una estensione dell'algoritmo di Stam, usando la forma normale di Jordan come soluzione a questa problematica. Inoltre la superficie così ottenuta è tale da avere curve di bordo che sono B-spline cubiche: esse approssimano la poligonale

definita dai vertici di bordo della mesh, ma non è prevista la possibilità di avere vertici *pinned*, cioè considerati come estremi delle curve di bordo e quindi da esse interpolati.

Un caso particolare è dato dalla valutazione negli angoli (corners) della superficie limite, cioè nei punti corrispondenti ai vertici di valenza 2 e quindi appartenenti a un solo patch (di bordo). Nella nostra implementazione è presente la possibilità di avere, oltre alla curva smooth ottenuta con il metodo descritto in [LB07], anche angoli pinned, ottenuti riconducendosi al caso regolare sul bordo (valenza 3) mediante l'estrapolazione dei dati dal patch d'angolo. La Figura 1.8 mette a confronto queste due versioni.

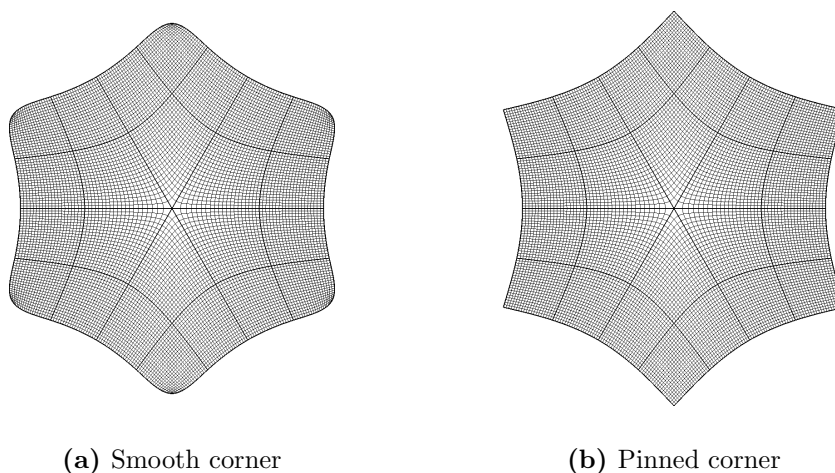


Figura 1.8: Comportamento della superficie di suddivisione sul bordo.

Problematiche legate al metodo di Stam. L'algoritmo di Stam è uno strumento potente per la valutazione delle superfici di suddivisione nelle vicinanze dei vertici straordinari, tuttavia non è privo di inconvenienti.

1. Nei vertici straordinari, la norma delle derivate prime della parametrizzazione naturale (usata da Stam) è divergente.

Dimostrazione. Consideriamo una superficie di Catmull-Clark intorno a un vertice straordinario di valenza n . Usiamo i parametri $(s, t) \in K_n$ nel dominio dato dalla mappa caratteristica, ed esprimiamo il valore della superficie limite come combinazione delle $1 + 6n$ funzioni base:

$$\mathbf{S}(s, t) = \sum_{j=0}^{6n} \mathbf{v}_j \phi_j^{[n]}(s, t),$$

dove \mathbf{v}_j , $j = 0, \dots, 6n$, sono i vertici del 2-ring intorno al vertice straordinario considerato, ottenuti suddividendo localmente la mesh iniziale \mathcal{M}_0 una o due volte in modo da ottenere una mesh con facce tutte quadrilatere e vertici straordinari isolati.

Le funzioni base $\phi_j^{[n]}$ soddisfano la relazione di scaling

$$\phi_j^{[n]} \left(\frac{s}{2}, \frac{t}{2} \right) = \lambda_j \phi_j^{[n]}(s, t),$$

dove λ_j è l'autovalore associato all'autofunzione $\phi_j^{[n]}$. Derivando questa espressione, ad esempio rispetto a s , otteniamo

$$\frac{\partial \phi_j^{[n]}}{\partial s} \left(\frac{s}{2}, \frac{t}{2} \right) = 2\lambda_j \frac{\partial \phi_j^{[n]}}{\partial s}(s, t). \quad (1.11)$$

Per lo schema di Catmull-Clark, il fattore di scala $2\lambda_1$ è maggiore di 1 per $n > 4$, come è evidente dalla Tabella 1.2. Pertanto, scegliendo un punto (\bar{s}, \bar{t}) tale che $\frac{\partial \phi_1^{[n]}}{\partial s}(\bar{s}, \bar{t}) \neq 0$, dalla (1.11) risulta che il valore della derivata cresce con tasso $(2\lambda_1)^k$ in corrispondenza dei punti $(\frac{s}{2^k}, \frac{t}{2^k}) \rightarrow (0, 0)$ per $k \rightarrow \infty$. Un argomento analogo può essere usato per la derivata rispetto a t .

Quindi concludiamo che la norma delle derivate della parametrizzazione naturale diverge, per ogni superficie tale che $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$. \square

Si noti che questa osservazione non è in contrasto con il fatto che la superficie di Catmull-Clark è C^1 nei vertici straordinari: poiché la superficie limite è C^1 , allora *esiste una* sua parametrizzazione C^1 , ma è chiaro che ciò non vuol dire che *ogni* parametrizzazione sia tale da raggiungere questo ordine di continuità.

Boier-Martin e Zorin propongono in [BMZ04] una parametrizzazione più canonica che consente il calcolo delle derivate prime nel punto straordinario.

2. A differenza di quanto accade nel caso di vertice straordinario interno, non esiste una formula esplicita come la (1.4) per determinare il punto limite corrispondente a un vertice straordinario di bordo. Infatti, il metodo di Stam e la sua estensione consentono di valutare la superficie per parametri *arbitrariamente vicini* al punto straordinario, ma non in questo punto.

Inoltre, osservazioni empiriche suggeriscono che, nei vertici straordinari di bordo, le derivate prime lungo le direzioni orientate verso l'interno della superficie sono coincidenti tra loro, dando luogo a un caso quasi degenero. Invece la normale nel vertice straordinario è determinata correttamente, con una formula analoga alla (1.5).

1.7 Richieste e problematiche per l'utilizzo in contesto CAD

Nonostante le superfici di suddivisione siano uno strumento ormai popolare nel settore dell'animazione per il raffinamento di mesh con pochi vertici, la loro diffusione nel contesto della modellazione geometrica per il design assistito dal calcolatore è ancora molto limitata.

Infatti, in ambito CAD si preferisce tipicamente la semplicità e la predicibilità del comportamento delle superfici NURBS nella costruzione di superfici di alta qualità, soprattutto nel campo della progettazione di componenti destinate ai settori automotive e aeronautico. Tuttavia le NURBS sono in grado di riprodurre solamente le topologie di piani, cilindri e tori, essendo basate su una struttura a griglia di quadrilateri. Inoltre per la modellazione di forme complesse è necessario costruire una collezione di più patch di superficie, tra loro raccordati con l'ordine di continuità desiderato⁵: si tratta di una operazione non banale, anche se i moderni software per il design mettono a disposizione degli strumenti per gestire automaticamente questi raccordi.

Le superfici di suddivisione sono state introdotte per superare queste limitazioni intrinseche delle NURBS. Per esempio, lo schema di suddivisione di Catmull-Clark ha il vantaggio di non richiedere restrizioni sulla topologia della mesh di partenza, permettendo connettività e genere arbitrari, e nelle zone regolari dà luogo a superfici limite di grado parametrico basso che riproducono le spline bicubiche. Il maggiore ostacolo all'utilizzo di queste superfici di suddivisione anche in contesto CAD è costituito dai difetti di cui soffrono nei vertici straordinari: l'ordine di continuità più basso e gli artefatti sulla forma che degradano la qualità della superficie.

Presentiamo più in dettaglio i requisiti che le superfici devono possedere per essere adoperate nella progettazione al calcolatore, e rimarchiamo i motivi per i quali le superfici di suddivisione classiche non sono in grado di soddisfare tali richieste.

1.7.1 Valutazione esatta

Nel contesto CAD, e in generale nella modellazione geometrica, è preferibile utilizzare curve e superfici definite in *forma parametrica*

$$\mathbf{c} : \mathbf{c}(t), \quad \mathbf{S} : \mathbf{S}(u, v),$$

invece che in forma implicita

$$\mathbf{c} : f(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{S} : F(\mathbf{x}) = 0.$$

⁵Solitamente, si richiede la continuità della curvatura della superficie multi-patch.

Infatti la rappresentazione in termini di parametri facilita l'operazione di valutazione, necessaria per la visualizzazione degli oggetti e che deve essere rapida e precisa per l'esecuzione della maggior parte degli algoritmi di analisi o di costruzione di forme. Al contrario, adottare la forma implicita per la valutazione richiede la risoluzione di un sistema in generale non lineare, operazione non banale e dal costo non indifferente; tuttavia questa rappresentazione può risultare utile per effettuare i test di intersezione tra gli oggetti, sebbene negli ultimi due decenni siano stati sviluppati metodi efficienti che non richiedono necessariamente l'uso dell'espressione implicita.

Inoltre si richiede che tutte le quantità (valore e derivate prime e seconde) siano *valutabili esattamente* in corrispondenza di parametri arbitrari.

Per quanto riguarda il caso delle superfici di suddivisione, l'algoritmo di Stam [Sta98], la sua estensione al caso di bordo [LB07] e accorgimenti come quelli adottati nella nostra implementazione consentono di trattare le superfici di Catmull-Clark come superfici parametriche, e costituiscono lo strumento principale per poterle valutare⁶ nelle regioni intorno ai vertici straordinari e anche in corrispondenza di questi punti, come discusso nella Sezione 1.6. Ricordiamo che questo potente metodo non è privo di problemi: la valutazione delle derivate prime nei vertici straordinari deve essere gestita ad hoc, a causa del comportamento divergente prodotto dalla parametrizzazione di Stam.

1.7.2 Regolarità

I requisiti sulla *continuità* delle superfici utilizzate in ambito di progettazione assistita dal calcolatore sono piuttosto stringenti: è richiesta almeno la continuità C^2 all'interno di ciascun patch di superficie (bordi compresi), e il raccordo G^1 tra patch adiacenti. Inoltre è preferibile non utilizzare delle parametrizzazioni degeneri o non regolari (per esempio, con derivate prime nulle), con lo scopo di evitare singolarità o comportamenti indesiderati durante l'esecuzione di certi algoritmi.

Nelle zone non regolari, le superfici di suddivisione hanno tipicamente un ordine di continuità minore rispetto a quello raggiunto nelle regioni regolari. Nel caso di nostro interesse, le superfici di Catmull-Clark sono solo C^1 in corrispondenza dei vertici straordinari, invece che C^2 , e la curvatura non è limitata nelle vicinanze di questi punti.

1.7.3 Qualità

La *qualità* di una curva o di una superficie è una caratteristica distinta dalla continuità, e coinvolge la forma e il risultato estetico dell'oggetto modellato.

⁶Ricordiamo che nelle zone regolari la valutazione della superficie limite non è problematica, poiché ivi la superficie è una spline bicubica.

Non sempre la regolarità di una superficie garantisce una buona qualità: la Figura 1.9 mostra un esempio.

Il concetto di “qualità CAD” è nato nel settore di progettazione automotive ed è legato alla realizzazione di curve e superfici “piacevoli” alla vista, in particolare per le parti esterne e le superfici riflettenti, di rilevanza critica per l’aspetto estetico del prodotto finale. Come è intuibile, non esiste una definizione precisa e condivisa di questo concetto: in generale, i criteri per stabilire che una entità disegnata al calcolatore (o anche un prototipo realizzato fisicamente) ha una buona qualità sono piuttosto soggettivi. Comunque, oltre a principi pratici adottati comunemente durante la modellazione (come l’indagine del comportamento fino al secondo o terzo ordine), in letteratura esistono diverse proposte di formalizzazione di questo concetto. Elenchiamo alcuni esempi.

1.7.3.1 Curve

La qualità di una curva è sicuramente legata alla forma e alla curvatura e, in misura meno rilevante, alla torsione. In particolare, sono considerate di bassa qualità curve con auto-intersezioni, con parametrizzazioni degeneri (per esempio, non regolari), e con valori di curvatura molto diversi in corrispondenza di punti vicini⁷.

Alcuni approcci più formali considerano la distribuzione dei valori di curvatura e definiscono curve di “classe A” [Far06], cioè “perfette” per l’utilizzo in ambito CAD/CAM, quelle che presentano valori di curvatura crescenti o decrescenti in modo monotono.

Un altro criterio che può essere utile adottare in certi casi è la cosiddetta “qualità spline”, cioè confrontare il comportamento della curva da giudicare con quello delle curve spline, tipicamente considerate di buona qualità.

1.7.3.2 Superfici

Per quanto riguarda la qualità delle superfici, la situazione è analoga. I criteri di valutazione sono piuttosto soggettivi, comunque il comportamento del campo dei vettori normali e della curvatura assumono grande importanza, perché sono legati al modo in cui una superficie (solitamente cromata) riflette gli oggetti circostanti.

In questo caso, i tentativi di formalizzazione sono per la maggior parte basati su metodi che prevedono la minimizzazione di funzionali che esprimono una misura della fairness⁸ della superficie. Si faccia riferimento a [HL93]

⁷Uno strumento utile per questo tipo di analisi è la visualizzazione del *grafico di curvatura*: esso mostra il valore della curvatura rispetto al parametro o alla lunghezza d’arco.

⁸Sebbene non esista una definizione esatta di questo concetto, un metodo comunemente utilizzato per valutare la *fairness* di una superficie consiste nel considerare la distribuzione

Sezione 13.2, e [JS07] per una vasta panoramica dei funzionali proposti negli anni e per la discussione dei risultati ottenuti.

Un'altra possibilità è quella di utilizzare il criterio di riproduzione polinomiale. Infatti, osservazioni empiriche mostrano che le curve aventi la proprietà di riproduzione polinomiale di un certo grado k (ovvero ordine di approssimazione $k + 1$), cioè capaci di rappresentare esattamente polinomi di grado minore o uguale a k , esibiscono un comportamento esteticamente “piacevole”. Rimangono questioni aperte la descrizione rigorosa di questo fenomeno e la sua discussione nel caso delle superfici.

Inoltre sarebbe interessante trovare un approccio per la determinazione (e il miglioramento) della qualità che possa essere applicato con successo a una intera classe di superfici, e che non necessiti di essere adattato di volta in volta ai singoli casi.

Per quanto riguarda le superfici di Catmull-Clark, la loro qualità è bassa nelle vicinanze dei vertici straordinari, a causa delle oscillazioni nei valori della curvatura e della parametrizzazione con velocità crescente (l'effetto prodotto è quello di un “diradamento” delle curve isoparametriche intorno ai vertici straordinari, come mostra la Figura 1.10).

Riportiamo nell'Appendice B una panoramica di alcuni strumenti pratici per l'analisi della regolarità e della qualità delle superfici, che abbiamo incluso nella nostra implementazione e utilizzato durante le nostre sperimentazioni.

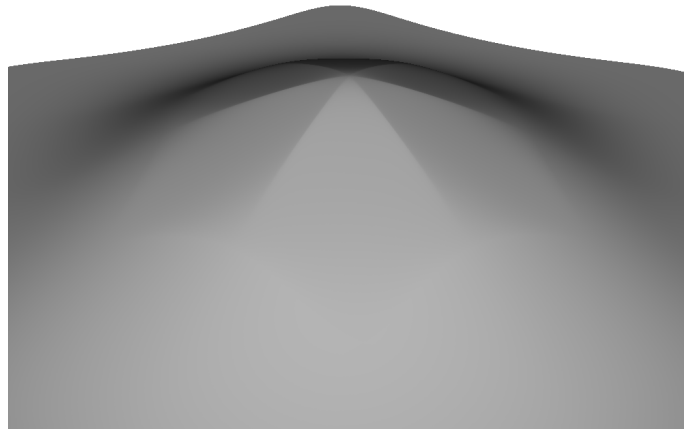


Figura 1.9: Esempio di superficie G^1 ma di qualità discutibile.

dei valori della sua curvatura: se essa presenta un andamento monotono o comunque privo di variazioni repentine, la superficie può essere ritenuta fair.

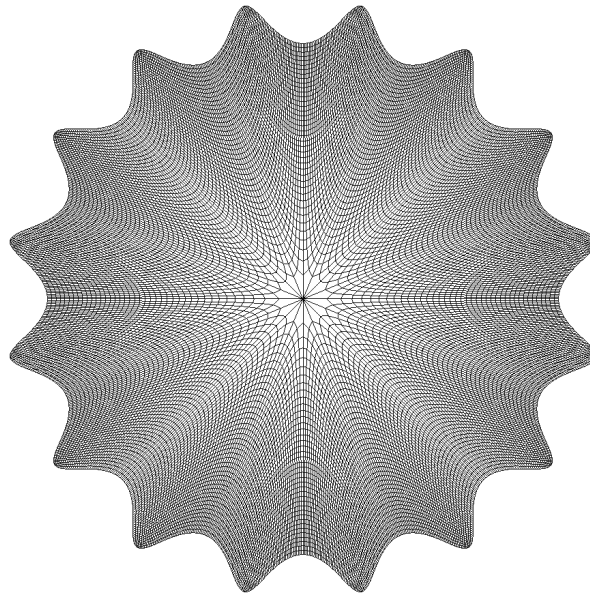


Figura 1.10: Comportamento delle curve isoparametriche della superficie di Catmull-Clark in prossimità dei vertici straordinari.

1.7.4 Questioni da affrontare

Affinché le superfici di suddivisione possano essere utilizzate con profitto in un contesto CAD, è necessario risolvere i problemi che affliggono la loro continuità e qualità intorno ai vertici straordinari. Alcuni lavori sulla teoria della suddivisione hanno stabilito che affinché uno schema di suddivisione stazionario possa produrre superfici con curvatura (non banalmente) continua e sia capace di mitigare gli artefatti sulla forma, è necessario che esso sia in grado di riprodurre patch polinomiali di grado almeno $(6, 6)$, disposti “a stella” intorno al vertice straordinario. Tuttavia, per motivi di costo computazionale e di complessità dello schema, è preferibile mantenere il grado parametrico il più basso possibile. Poiché i sistemi di modellazione assumono nella maggior parte dei casi di lavorare con patch polinomiali di grado parametrico $(3, 3)$, volendo sperimentare l’introduzione delle superfici di suddivisione in tali ambienti è naturale pensare allo schema di Catmull-Clark, che come visto nella sezione 1.5.1 è una generalizzazione delle spline bicubiche.

In particolare, il lavoro di tesi è dedicato al miglioramento delle superfici di Catmull-Clark, ad oggi lo schema più diffuso, utilizzando opportunamente dei polinomi di grado basso per una modifica locale delle superfici originali. Elenchiamo le principali questioni da affrontare:

1. nei vertici straordinari, la superficie limite è solo C^1 , con derivate seconde e curvatura che assumono valori arbitrariamente grandi (Figura 1.11d);
2. intorno ai vertici straordinari, la qualità della superficie è bassa a causa di oscillazioni nei valori della curvatura;
3. nei vertici straordinari, la parametrizzazione naturale usata dal metodo di valutazione di Stam produce derivate prime divergenti in norma (problematica non trattata in questo elaborato).

I Capitoli 2 e 3 propongono due possibili approcci per eliminare o mitigare queste problematiche. Nella Figura 1.12 sono mostrati alcuni esempi di superfici limite di Catmull-Clark, dove sono evidenziati i patch contenenti almeno un vertice straordinario.

Concludiamo questa sezione citando a titolo di esempio due diverse modalità adottate per l'integrazione delle superfici di suddivisione in due diffusi sistemi di modellazione geometrica.

- CATIA (Computer Aided Three dimensional Interactive Application, sviluppato da Dassault Systèmes) fornisce un modulo per la modellazione con sole superfici di suddivisione di Catmull-Clark, convertibili in forma NURBS per l'esportazione e per interfacciarsi con il resto del pacchetto;
- ThinkDesign (sviluppato da think3) utilizza un sistema ibrido, basato su un kernel geometrico unico, con un evaluator black-box per ogni tipologia di primitiva. In questo modo, tutte le primitive sono gestite in maniera analoga, e si ha il grande vantaggio che gli algoritmi esistenti (per analisi, intersezione di superfici, etc.) non devono essere riscritti ad hoc. In particolare, il pacchetto sfrutta una DLL per la valutazione delle superfici di suddivisione sviluppata dall'Università di Bologna, nella quale è contenuta l'implementazione realizzata nell'ambito di questa tesi, e integrata nell'ultima release commerciale del software.

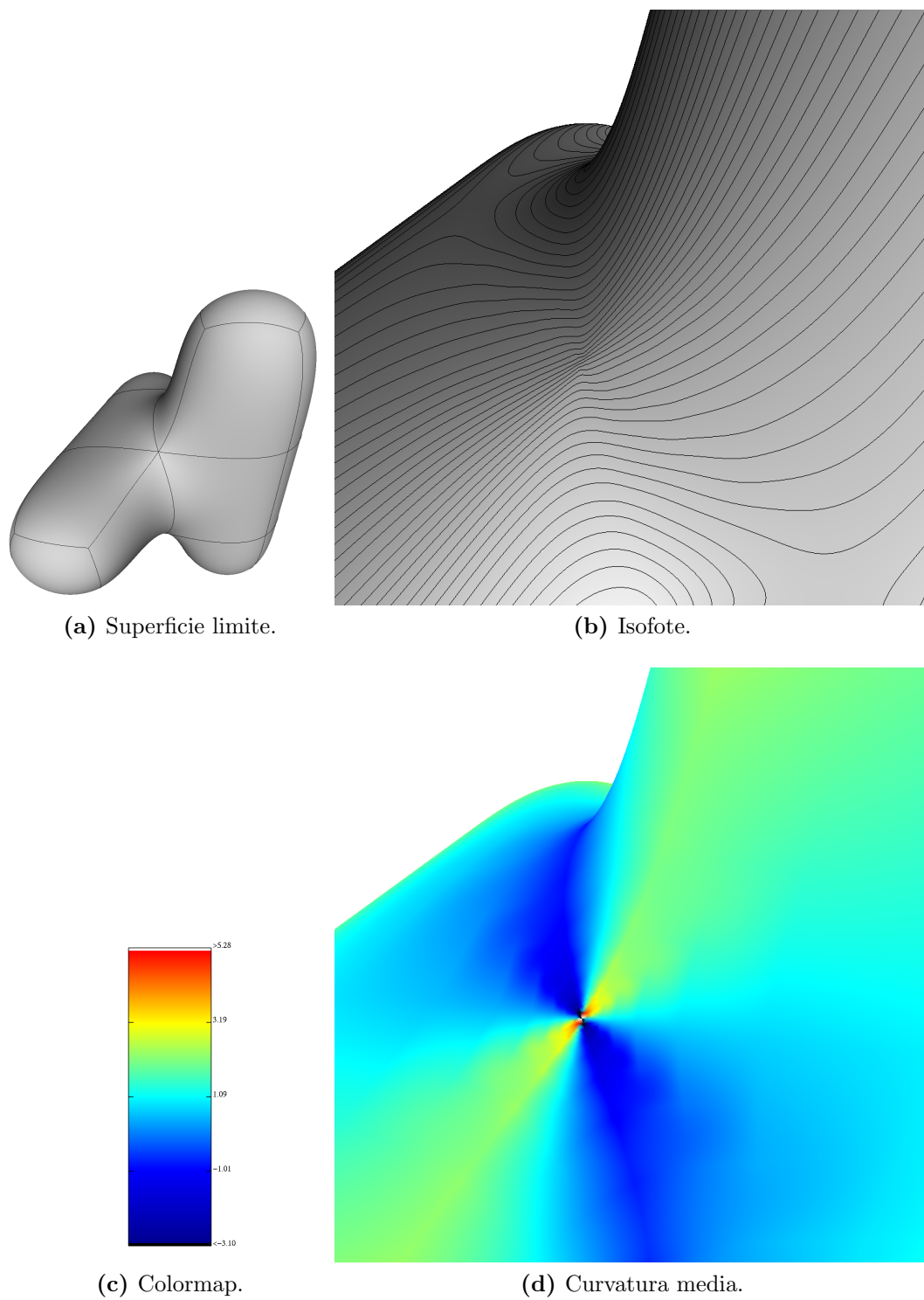
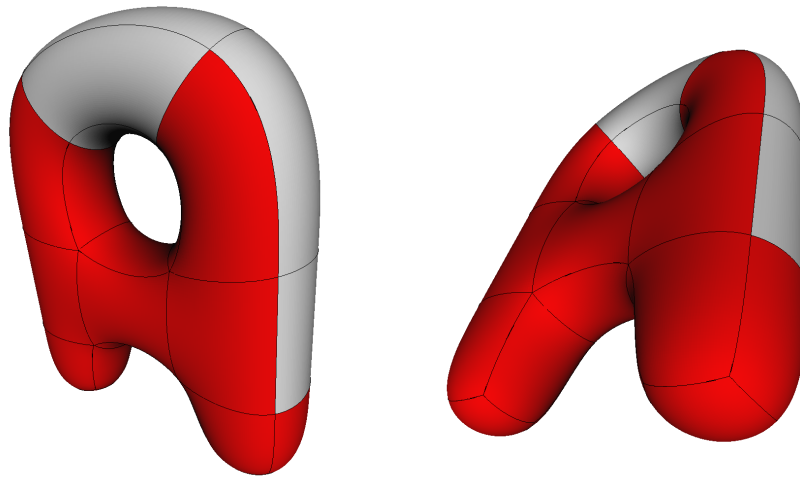
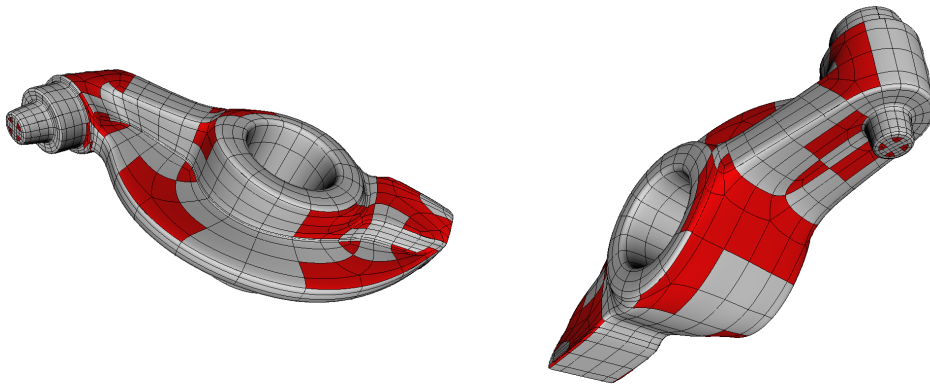


Figura 1.11: Comportamento della superficie di Catmull-Clark intorno a un vertice straordinario. In (d) si noti come il valore della curvatura nel vertice straordinario sia fuori scala.



(a)



(b)

Figura 1.12: Superfici di Catmull-Clark con patch contenenti almeno un vertice straordinario, in evidenza.

Capitolo 2

Modifica C^2 di superfici di suddivisione mediante blending polinomiale

Questo capitolo presenta un metodo per ottenere la continuità di secondo ordine di una superficie di suddivisione di Catmull-Clark anche intorno ai vertici straordinari. L'idea di base è quella di modificare la superficie limite originale \mathbf{S} in un intorno dei vertici straordinari, *miscelandola*, mediante una funzione peso w opportunamente definita, con una superficie approssimante $\tilde{\mathbf{S}}$, in modo da eliminare le singolarità e migliorare la qualità. Pertanto, questo procedimento prende il nome di *blending*, e le zone in cui si procede alla modifica della superficie originale sono dette *regioni di blending*. Più formalmente, la superficie finale è definita come

$$\mathbf{S}^* := \begin{cases} w\mathbf{S} + (1 - w)\tilde{\mathbf{S}} & \text{nelle regioni di blending,} \\ \mathbf{S} & \text{altrove (la superficie non è modificata).} \end{cases}$$

In particolare, la nostra proposta di blending è ispirata ai lavori di Levin [Lev06b] e [Lev06a]. A differenza di altri approcci proposti in letteratura, per ottenere l'ordine di continuità desiderato, non si cambiano i pesi dello schema di suddivisione; invece è modificata direttamente la superficie limite, in prossimità di ciascun vertice straordinario. Questa caratteristica rende evidente la generalità del metodo, basato sulla valutazione di superfici parametriche (e quindi non vincolato a uno specifico schema di suddivisione), della cui utilità possono beneficiare anche ambiti e implementazioni diversi da quelli direttamente discussi in questo elaborato.

Nel seguito, illustriamo la proposta di Levin e presentiamo i contributi originali che abbiamo apportato. In particolare, l'approccio descritto in [Lev06b] è stato rivisto per sfruttare lo strumento fornito dall'algoritmo di valutazione

di Stam, e abbiamo esteso il metodo di blending per gestire anche il caso di superfici aperte.

2.1 Blending à la Levin

Presentiamo nel dettaglio la proposta di Levin e la nostra implementazione.

Il blending intorno a ciascun vertice straordinario viene effettuato prendendo come $\tilde{\mathbf{S}}$ una superficie parametrica polinomiale \mathbf{P} , la cui forma approssimi la superficie limite di Catmull-Clark \mathbf{S} . La superficie modificata, detta *superficie blending*, è pertanto definita dall'espressione

$$\mathbf{S}^* = w\mathbf{S} + (1 - w)\mathbf{P},$$

e si richiede che la funzione peso w (definita su un opportuno dominio, come discutiamo nella Sezione 2.2) soddisfi le condizioni seguenti:

1. $0 \leq w \leq 1$;
2. $w \in C^2$;
3. $w = 0$ in corrispondenza del vertice straordinario e $w = 1$ sul bordo tra la regione di blending e la zona non modificata.

Alcune scelte per la funzione peso sono discusse nella Sezione 2.4.

La superficie polinomiale può essere definita sfruttando una qualsiasi tecnica opportuna che consenta di generare una approssimazione soddisfacente della superficie originale all'interno della regione di blending. In [Lev06b] il polinomio \mathbf{P} è determinato attraverso un fitting locale ai minimi quadrati della superficie originale \mathbf{S} , mentre [Lev06a] suggerisce di definire il polinomio imponendo la minimizzazione di un funzionale di tipo energia, che misura la "fairness" della superficie blending \mathbf{S}^* . Nelle Sezioni 2.5.1 e 2.5.2 esploriamo entrambe le possibilità, per poi confrontare e commentare i risultati nella Sezione 2.5.3.

2.1.1 Parametrizzazione locale

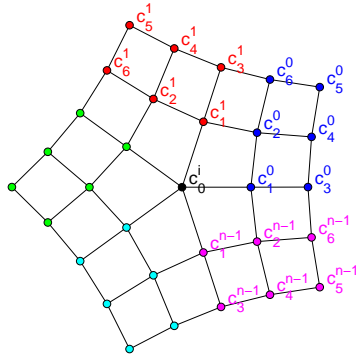
Per effettuare il blending tra la superficie originale \mathbf{S} e la sua approssimazione $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{P}$, abbiamo bisogno che entrambe siano definite su un dominio locale comune. Per definire tale dominio, Levin propone di sfruttare la parametrizzazione della *mappa caratteristica* dello schema di suddivisione (Sezione 1.4.2), che riproduce la struttura della superficie limite in un intorno formato da due ring di vertici intorno al vertice straordinario. Come è noto, questa scelta fornisce una parametrizzazione C^1 della superficie intorno al vertice straordinario,

in quanto è essa stessa definita come una superficie limite di Catmull-Clark. Inoltre, tale parametrizzazione è definita anche per altri schemi di suddivisione (per esempio quello di Loop), qualora si voglia applicare l'approccio mediante blending à la Levin in altri casi.

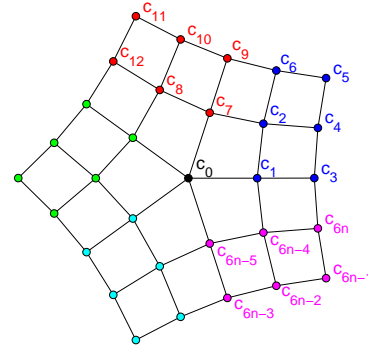
Prima di proseguire nella trattazione, introduciamo alcune notazioni che usiamo ampiamente nel seguito.

La mesh 2D $\mathcal{M}^{[n]}$, formata dai due autovettori sotto-dominanti $\mathbf{r}_1^{[n]}, \mathbf{r}_2^{[n]} \in \mathbb{R}^{1+6n}$, possiede $1 + 6n$ vertici e $4n$ facce quadrilatere, disposte in n settori intorno al centro. I vertici $\mathbf{c}_k := \left(r_1^{(k)}, r_2^{(k)} \right)$, $k = 0, \dots, 6n$ sono numerati come mostrato in Figura 2.1: a seconda dei casi, può essere comodo adottare una indicizzazione $\mathcal{N}_{\text{sector}}$ che evidenzia la struttura ciclica a settori (Figura 2.1a) oppure una numerazione $\mathcal{N}_{\text{global}}$ progressiva di tutti i vertici della mesh, sempre tenendo in considerazione i settori (Figura 2.1b). Per effettuare il passaggio da una numerazione all'altra, è sufficiente utilizzare le formule seguenti, che legano il valore degli indici nelle due notazioni per uno stesso vertice:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\text{sector}} : \left(\mathbf{c}_j^i \right)_{\substack{i=0, \dots, n-1 \\ j=0, \dots, 6}} &\mapsto \mathcal{N}_{\text{global}} : \begin{cases} \mathbf{c}_0 & \text{se } j = 0, \\ \mathbf{c}_{in+j} & \text{altrimenti;} \end{cases} \\ \mathcal{N}_{\text{global}} : \left(\mathbf{c}_k \right)_{k=0, \dots, 6n} &\mapsto \mathcal{N}_{\text{sector}} : \begin{cases} \left(\mathbf{c}_0^i \right)_{i=0, \dots, n-1} & \text{se } k = 0, \\ \mathbf{c}_{\left\lfloor \frac{k-1}{6} \right\rfloor \bmod 6 + 1} & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{aligned}$$



(a) Numerazione a settori.



(b) Numerazione progressiva.

Figura 2.1: Divisione in settori e numerazione adottata per i vertici della mappa caratteristica.

Indichiamo con $\Psi^{[n]}$ la superficie di suddivisione limite ottenuta dalla mesh $\mathcal{M}^{[n]}$. Poiché per lo schema di Catmull-Clark il 2-ring di vertici intorno a un vertice straordinario centrale di valenza n è esattamente sufficiente per

determinare la superficie limite sulle n facce adiacenti al vertice straordinario, possiamo valutare il primo ring di patch di questa superficie bidimensionale mediante l'algoritmo di Stam. Esso ci fornisce quindi una parametrizzazione per ciascuno di questi patch $\Psi_i^{[n]}$, $i = 0, \dots, n-1$, mappando il quadrato unitario Q_1 in una regione del piano in cui giace $\Psi^{[n]}$. Chiamiamo K_n l'insieme dei punti che costituiscono il primo ring di patch, cioè

$$K_n := \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists (u, v) \in Q_1, \exists i \in \{0, \dots, n-1\} : (s, t) = \Psi_i^{[n]}(u, v) \right\}.$$

Con queste notazioni, utilizzando la parametrizzazione locale, la superficie blending è espressa come

$$\mathbf{S}^*(s, t) = w(s, t)\mathbf{S}(s, t) + (1 - w(s, t))\mathbf{P}(s, t), \quad (s, t) \in K_n. \quad (2.1)$$

2.1.2 Proposta originale

In [Lev06b], la valutazione della superficie limite di Catmull-Clark \mathbf{S} e delle sue derivate parziali (prime e seconde) è effettuata applicando un certo numero k di passi di suddivisione sulla mesh iniziale \mathcal{M}_0 , e quindi utilizzando sui vertici della mesh raffinata \mathcal{M}_k gli stencil per la valutazione delle B-spline bicubiche, e una tecnica ad hoc per il calcolo delle derivate. I parametri $(s, t) \in K_n$, necessari nella (2.1) per la valutazione del polinomio \mathbf{P} e della funzione peso w , sono ottenuti applicando lo stesso procedimento alla superficie $\Psi^{[n]}$. Si ottiene pertanto un insieme discreto di parametri (s, t) , di valori e di derivate della superficie.

2.1.3 Rielaborazione

Dopo una fase di studio delle proposte di Levin, ne abbiamo rielaborato alcuni aspetti. Riportiamo qui le principali modifiche e i miglioramenti apportati e incorporati nel lavoro di implementazione.

1. La valutazione delle superfici di suddivisione di Catmull-Clark coinvolte nel processo (\mathbf{S} e $\Psi^{[n]}$) è effettuata attraverso l'algoritmo di Stam [Sta98] (Sezione 1.6). In questo modo, è possibile valutare i patch (quadrilateri) di superficie per valori arbitrari dei parametri, e con complessità temporale costante, evitando l'effettivo raffinamento iterato della superficie.
2. Si è esteso il blending à la Levin ai vertici straordinari sul bordo. La loro gestione è discussa più in dettaglio nella Sezione 2.3.3: per la parametrizzazione locale consideriamo un "surrogato" della mappa caratteristica, e il dominio parametrico comune alla superficie e al polinomio è definito come un "ventaglio aperto" di settori, invece che come un complesso ciclico intorno al vertice centrale.

3. Si sono sperimentate diverse funzioni peso, in particolare con l'obiettivo di limitare la regione in cui si realizza effettivamente il blending tra superficie e polinomio a una corona circolare. Si veda la Sezione 2.4 per i dettagli.

2.2 Regione di blending

Dobbiamo stabilire la forma e la grandezza delle regioni di superficie che sono sottoposte al blending intorno ai vertici straordinari. La zona di blending relativa a ciascun punto straordinario è definita nel dominio parametrico comune alla superficie originale e al polinomio approssimante, indicato con K_n .

Per semplicità, denotiamo l'autovalore sotto-dominante relativo alla valenza n con $\lambda_n := \lambda_1^{[n]} = \lambda_2^{[n]}$.

Seguendo la proposta di Levin, adottiamo regioni di blending circolari, cioè intorno a un vertice di valenza n effettuiamo il blending sul disco

$$D_n := \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 + t^2 \leq r_n^2 \right\} \subset K_n.$$

[Lev06b] utilizza il disco di raggio uguale all'autovalore sotto-dominante $r_n := \lambda_n$. Di conseguenza, sugli edge uscenti dal vertice straordinario, la regione di blending si estende fino al punto limite sulla superficie corrispondente ai parametri $(u, v) = (\frac{1}{2}, 0)$ per ogni settore di $\Psi^{[n]}$, cioè per esempio $(s, t) = \Psi_0^{[n]}(\frac{1}{2}, 0) = (\lambda_n, 0)$. Pertanto, zone di blending relative a vertici straordinari adiacenti hanno al più un punto di contatto, ma non si sovrappongono (Figura 2.2a).

Al fine di ottenere una superficie con comportamento spline in quante più zone possibile, abbiamo ridotto l'area in cui la superficie originale viene modificata, utilizzando dischi di blending con raggio minore $r_n := \frac{1}{4}\lambda_n$. Ovviamente in questo caso le regioni di blending intorno a vertici straordinari vicini sono ben separate. Inoltre questa scelta consente di effettuare il blending anche intorno ai vertici straordinari originati dalla suddivisione di facce non quadrilatera in \mathcal{M}_0 , le quali possono a loro volta avere vertici straordinari.

2.3 Dettagli implementativi

Discutiamo brevemente alcuni aspetti tecnici riguardanti la nostra implementazione del metodo di Levin. Abbiamo deciso di gestire vertici straordinari interni con valenza $n \leq 20$, e vertici straordinari sul bordo con valenza $n \leq 11$ (il motivo di questo valore è giustificato dalla procedura esposta in seguito, Sezione 2.3.3).

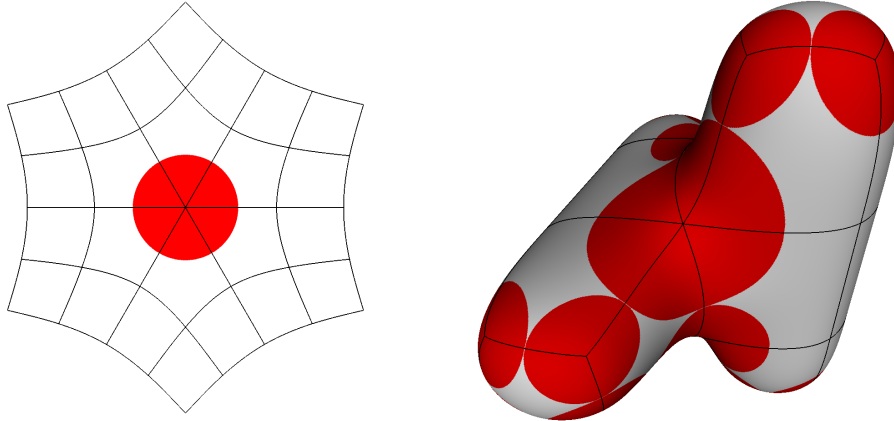
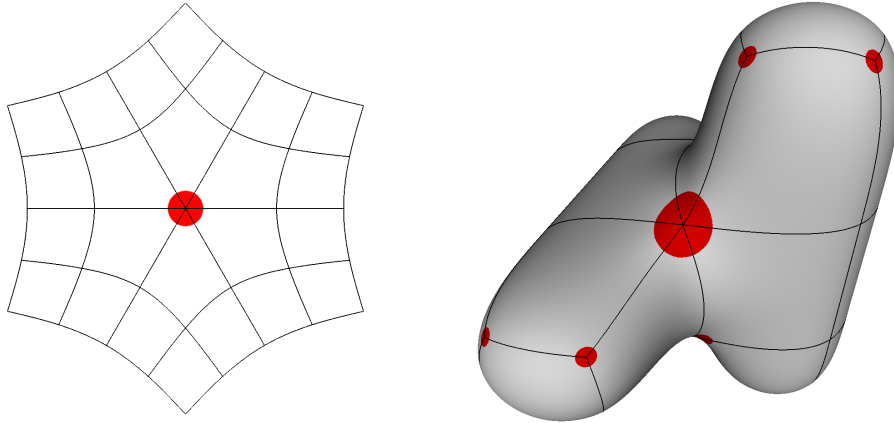
(a) $r_n = \lambda_n$ (b) $r_n = \frac{1}{4}\lambda_n$

Figura 2.2: Regioni di blending. Colonna di sinistra: disco $D_n \subset K_n$; colonna di destra: immagine di D_n sulla superficie limite. Riga in alto: proposta originale di Levin; riga in basso: nostra proposta, con regioni più piccole.

2.3.1 Mappa caratteristica

Poiché la matrice di suddivisione locale \mathbf{S}_n non dipende dalla mesh di input, ma solo dalla valenza n del vertice su cui è centrata, è possibile precalcolarne autovalori e autovettori. Nella nostra implementazione, sono stati determinati gli autovalori e autovettori di \mathbf{S}_n , $n = 3, \dots, 20$ con la funzione `eig` di MATLAB. Per costruire la mesh $\mathcal{M}^{[n]}$ che definisce la mappa caratteristica relativa a ciascuna valenza, gli autovettori (destri) sotto-dominanti $\mathbf{r}_1^{[n]}, \mathbf{r}_2^{[n]} \in \mathbb{R}^{1+6n}$ sono stati normalizzati con una sequenza di operazioni di ortogonalizzazione¹,

¹Si è utilizzata una funzione che implementa il procedimento di Gram-Schmidt per produrre una base ortonormale per il sottospazio $\text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r) \subseteq \mathbb{R}^d$ generato da una r -upla

rotazione e scala, in modo da portare gli estremi degli n segmenti uscenti dal vertice straordinario nei vertici del poligono regolare a n lati inscritto nella circonferenza unitaria: $(\cos(\frac{2\pi}{n}i), \sin(\frac{2\pi}{n}i))$, $i = 0, \dots, n - 1$.

Osservazione 3. In questa occasione si è potuto verificare che le condizioni per la continuità discusse nelle Sezioni 1.3 e 1.4 sono soddisfatte.

2.3.2 Vertici straordinari interni

Per effettuare il blending intorno a un vertice straordinario interno di valenza n , è richiesta la valutazione di $\Psi^{[n]}$ per ottenere i parametri $(s, t) \in K_n$. Quindi abbiamo bisogno di accedere alle informazioni date dalla mesh $\mathcal{M}^{[n]}$, costruita a partire dai due autovettori sotto-dominanti. Tuttavia, grazie alla simmetria del dominio K_n , cioè della superficie $\Psi^{[n]}$ (evidente dalla Figura 1.2), è sufficiente lavorare con un solo settore del complesso; non è restrittivo considerare il primo patch, $\Psi_0^{[n]}$, cioè quello adiacente all'asse orizzontale s e caratterizzato da $t \geq 0$.

Per ridurre il costo computazionale del metodo, e in particolare la valutazione di $\Psi_0^{[n]}$ con l'algoritmo di Stam, è possibile precalcolare e salvare per questo primo settore i control point proiettati nell'autospazio e l'array di indici per il passaggio dall'indicizzazione adottata da noi (Figura 2.1b) a quella di Stam ([Sta98] Figura 3). Naturalmente, questa operazione di preprocessing è compiuta $\forall n = 3, \dots, 20$.

Per ottenere l' i -esimo settore, è sufficiente ruotare $\Psi_0^{[n]}$ (cioè i suoi control point) dell'angolo $\alpha := \frac{2\pi}{n}i$.

2.3.3 Vertici straordinari sul bordo

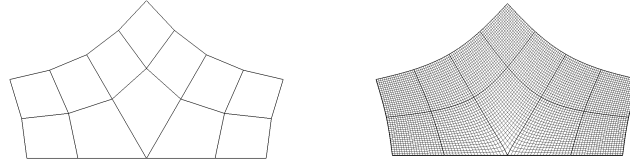
Se si lavora con mesh aperte, si possono avere vertici straordinari sul bordo della mesh. In tal caso, i domini del tipo K_n non sono più adatti a fornire la parametrizzazione comune per la superficie e il polinomio, e occorre elaborare una metodologia ad hoc.

Sia n la valenza di un vertice di bordo che, poiché la mesh è aperta, è condiviso da $n - 1$ facce. Nella nostra costruzione, sostituiamo $\Psi^{[n]}$ con la superficie limite $\tilde{\Psi}^{[n]}$ ottenuta dalla mesh aperta che ha i vertici disposti come metà della configurazione $\mathcal{M}_{2(n-1)}$ data dalla mappa caratteristica di valenza $2(n - 1)$, mostrata in Figura 2.3. Poiché la mesh in questione è aperta, la superficie è valutata con le regole definite dall'estensione dell'algoritmo di Stam [LB07]. In questo modo otteniamo un dominio parametrico, che indichiamo con \tilde{K}_n , adatto al caso di bordo, costituito da un "ventaglio" di $n - 1$ settori.

Come nel caso di vertice interno, anche qui è possibile precalcolare una volta per tutte e salvare i control point proiettati nell'autospazio. Tuttavia,

di vettori dello spazio euclideo d -dimensionale.

dato che il metodo [LB07] prevede un trattamento diverso per i due patch con lati sul bordo (come detto nella Sezione 1.6), non è possibile lavorare con un solo settore. Per questo si è scelto di salvare i control point di tutti gli $n - 1$ patch, anche se si potrebbe ridurre il numero a $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (metà “ventaglio”), in virtù della simmetria rispetto al patch centrale di cui gode la configurazione.



(a) $n = 4$ (3 settori)

Figura 2.3: Parametrizzazione intorno a un vertice straordinario di bordo, presa come analogo della mappa caratteristica. A sinistra: mesh di controllo con vertici dati dalle componenti degli autovettori sotto-dominanti di $\mathbf{S}_{2(n-1)}$ aventi ordinata non negativa, cioè $\mathbf{c}_k := (r_1^{(k)}, r_2^{(k)})$, $k = 0, \dots, 6(n-1) + 2$ con $r_2^{(k)} \geq 0$. A destra: superficie limite corrispondente.

Nel seguito, per semplicità useremo la notazione relativa al caso di vertice straordinario interno; dove non indicato esplicitamente, la generalizzazione al caso di bordo non presenta particolari problematiche.

2.3.4 Calcolo delle derivate della superficie blending

Oltre al valore \mathbf{S}^* , si può essere interessati a calcolare le derivate parziali prime \mathbf{S}_u^* , \mathbf{S}_v^* e seconde \mathbf{S}_{uu}^* , \mathbf{S}_{vv}^* , \mathbf{S}_{uv}^* della superficie modificata. Il motivo principale è la determinazione del versore normale alla superficie, ottenuto facendo il prodotto vettoriale $\mathbf{S}_u^* \times \mathbf{S}_v^*$, e del valore della curvatura della superficie, per il quale occorrono le derivate seconde². Si noti che, per coerenza con le regioni in cui non si effettua il blending, siamo interessati a derivare rispetto ai parametri in cui valuta il metodo Stam, cioè $(u, v) \in Q_1$, mentre nella (2.1) compaiono i parametri $(s, t) \in K_n$ nel dominio comune.

Ribadiamo che, per ogni settore di mappa caratteristica, i parametri (s, t) sono ottenuti da (u, v) valutando $\Psi^{[n]}$, cioè $(s, t) := \Psi_i^{[n]}(u, v)$ dove $i \in \{0, \dots, n-1\}$ è l'indice del settore di interesse. Pertanto è possibile considerare

²Si veda l'Appendice A, Sezioni A.2.2 e A.2.5.

ciascuno dei parametri (s, t) come funzione di (u, v) , cioè

$$\begin{aligned} s &= s(u, v), \\ t &= t(u, v). \end{aligned}$$

Tenendo questo in considerazione, e ricordando che la valutazione con l'algoritmo di Stam ci fornisce direttamente $\mathbf{S}(u, v)$, possiamo riscrivere la (2.1) come

$$\mathbf{S}^*(u, v) = w(s(u, v), t(u, v))\mathbf{S}(u, v) + (1 - w(s(u, v), t(u, v)))\mathbf{P}(s(u, v), t(u, v)). \quad (2.2)$$

Differenziamo (2.2) rispetto a u e v , applicando la regola della catena, per ottenere rispettivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_u^* &= w_u \mathbf{S} + w \mathbf{S}_u - w_u \mathbf{P} + (1 - w) \mathbf{P}_u, \\ \mathbf{S}_v^* &= w_v \mathbf{S} + w \mathbf{S}_v - w_v \mathbf{P} + (1 - w) \mathbf{P}_v, \end{aligned} \quad (2.3)$$

dove

$$\begin{aligned} w_u &= w_s s_u + w_t t_u, \\ w_v &= w_s s_v + w_t t_v, \\ \mathbf{P}_u &= \mathbf{P}_s s_u + \mathbf{P}_t t_u, \\ \mathbf{P}_v &= \mathbf{P}_s s_v + \mathbf{P}_t t_v \end{aligned}$$

sono le derivate della funzione peso e del polinomio rispetto ai parametri u, v . Le derivate dei parametri s, t rispetto a u, v costituiscono la matrice Jacobiana del mapping definito da $\Psi_i^{[n]}$. Il loro valore, insieme a quello di s, t , è restituito dal metodo di Stam applicato al patch di mappa caratteristica $\Psi_i^{[n]}(u, v)$, infatti:

$$\begin{aligned} (s, t) &= \Psi_i^{[n]}(u, v), \\ (s_u, t_u) &= \frac{\partial \Psi_i^{[n]}}{\partial u}(u, v), \\ (s_v, t_v) &= \frac{\partial \Psi_i^{[n]}}{\partial v}(u, v). \end{aligned}$$

Con un procedimento analogo è possibile calcolare le derivate seconde, differenziando ulteriormente. Nella nostra implementazione, ne abbiamo fatto uso per valutare il comportamento al secondo ordine della superficie (analisi della curvatura) e per definire il polinomio con il metodo descritto nella Sezione 2.5.2.

2.3.5 Algoritmo di valutazione della superficie blending

Riassumiamo schematicamente la procedura per la valutazione della superficie blending \mathbf{S}^* . Rimangono da discutere la scelta della funzione peso w e la definizione del polinomio \mathbf{P} : a questi aspetti sono dedicate le Sezioni 2.4 e 2.5, rispettivamente.

Algoritmo 2.1: Blending polinomiale della superficie di Catmull-Clark intorno a un vertice straordinario (interno) di valenza n .

```

Dati: settore di mappa caratteristica  $\Psi_0^{[n]}$ , raggio  $r_n$  della regione di
        blending, funzione peso  $w$ , coefficienti del polinomio  $\mathbf{P}$ .
Input: mesh  $\mathcal{M}_0$ .
Output: valore  $\mathbf{S}^*$  della superficie blending, derivate prime  $\mathbf{S}_u^*, \mathbf{S}_v^*$  e
        seconde  $\mathbf{S}_{uu}^*, \mathbf{S}_{vv}^*, \mathbf{S}_{uv}^*$ .
/* valutazione in ogni patch  $\mathbf{S}_i^*$  contenente il vertice
straordinario */
for  $i = 0$  to  $n - 1$  do
    forall the  $(u, v) \in Q_1$  do
        valutare il patch di superficie di Catmull-Clark originale
         $\mathbf{S}_i = \mathbf{S}_i(u, v)$  (con metodo di Stam);
        ruotare il settore di mappa caratteristica salvato  $\Psi_0^{[n]}$  dell'angolo
         $\alpha = \frac{2\pi}{n}i$ , per ottenere il settore  $\Psi_i^{[n]}$  corrispondente al patch  $\mathbf{S}_i$ ;
        valutare il patch di mappa caratteristica (con metodo di Stam)
        per ottenere i parametri nel dominio comune:
         $K_n \ni (s, t) = \Psi_i^{[n]}(u, v)$ ;
        /* controllo sulla regione di blending */
        if  $s^2 + t^2 \leq r_n^2$  then
            /* si effettua il blending */
            valutare la funzione peso  $w = w(s, t)$ ;
            valutare il polinomio  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(s, t)$ ;
             $\mathbf{S}_i^* = w\mathbf{S}_i + (1 - w)\mathbf{P}$ ;
            calcolare le derivate  $\frac{\partial \mathbf{S}_i^*}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{S}_i^*}{\partial v}$  con le formule (2.3), e
             $\frac{\partial^2 \mathbf{S}_i^*}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 \mathbf{S}_i^*}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 \mathbf{S}_i^*}{\partial u \partial v}$  con formule analoghe;
        else
            /* non si effettua il blending, la superficie di
            Catmull-Clark resta invariata */
             $\mathbf{S}_i^* = \mathbf{S}_i(u, v)$ ;
            le derivate di  $\mathbf{S}_i^*$  rispetto a  $u, v$  sono quelle di  $\mathbf{S}_i$ ;
        end
    end
end
end

```

2.4 Scelta della funzione peso e continuità della superficie blending

In questa sezione discutiamo di alcune possibili scelte della funzione w , mostrando che, nei casi considerati, la superficie blending ha continuità C^2 nei vertici straordinari.

Tutte le funzioni peso che abbiamo utilizzato hanno una forma polinomiale rispetto alla distanza del punto di valutazione dall'origine. Sebbene non ci siano motivi particolari che precludono la scelta di altre tipologie di funzioni peso (che comunque devono soddisfare i requisiti elencati nella Sezione 2.1), optare per dei polinomi permette di mantenere il costo di valutazione basso, oltre a fornire automaticamente la regolarità richiesta all'interno dell'intervallo di definizione.

Oltre alla funzione peso proposta da Levin [Lev06b], e che nel seguito indichiamo con w_L , ne abbiamo sperimentate altre, caratterizzate dal fatto di essere non nulle su una regione a forma di corona circolare, invece che sull'intero disco D_n . In questo modo, la superficie finale \mathbf{S}^* coincide con il polinomio \mathbf{P} non solo nel vertice straordinario (dove $w = 0$) ma in tutto un intorno di quel punto.

Introduciamo dapprima (Sezione 2.4.1) la versione unidimensionale delle funzioni peso, e ne discutiamo le caratteristiche. Le funzioni peso bivariante (Sezione 2.4.2), che utilizziamo nella formula per il blending (2.1), sono ottenute ruotando le controparti univariate intorno all'asse verticale passante per l'origine. In questo modo esse sono caratterizzate da una simmetria radiale, in quanto non abbiamo necessità di privilegiare o trattare diversamente alcuna direzione.

2.4.1 1D

Per le funzioni peso univariate, $\rho := \frac{|s|}{r_n}$, con $0 \leq \rho \leq 1$ e $0 < r_n < 1$.

La funzione peso proposta da Levin è la seguente:

$$w_L(\rho) := \begin{cases} \rho^2(3\rho^2 - 8\rho + 6) & \text{se } 0 \leq \rho \leq 1, \\ 1 & \text{se } \rho > 1. \end{cases}$$

In $\rho = 0$, essa si annulla $w_L(0) = 0$, ma $w'_L(0) \neq 0$; in $\rho = 1$, $w_L(1) = 1$ e ivi sono nulle le sue derivate fino alla seconda $w'_L(1) = w''_L(1) = 0$. Per questo, pensando di raccordare w_L con la funzione costante $c_0(\rho) \equiv 0$ a sinistra dell'origine e con la funzione costante $c_1(\rho) \equiv 1$ a destra di $\rho = 1$, si ottiene la continuità C^1 in $\rho = 0$ e C^2 in $\rho = 1$.

Proponiamo alcune funzioni che assumono valori strettamente positivi in un sotto-intervallo $[v_0, v_1] \subseteq [0, 1]$ con $0 \leq v_0 < v_1 \leq 1$. Ciascuna è caratterizzata da un diverso comportamento delle derivate nei punti v_0 e v_1 : infatti le espressioni seguenti sono state ottenute imponendo, oltre a $w(v_0) = 0$ e $w(v_1) = 1$, altre condizioni sull'annullamento delle derivate prime e seconde negli estremi. In questo modo, si ottengono diversi ordini di continuità nei punti $\rho = v_0$ e $\rho = v_1$ nel raccordo tra la funzione peso e le funzioni costanti c_0, c_1 .

Denotiamo con $\sigma := \frac{1}{v_1 - v_0}$ il fattore che codifica lo stretching (lineare) dell'intervallo e chiamiamo per semplicità $\xi = \xi(\rho) := \sigma(\rho - v_0)$.

- Funzione tale che $w'(v_0) = w''(v_0) = 0$ e $w'(v_1) = w''(v_1) = 0$. Il raccordo con le funzioni costanti è C^2 in entrambi gli estremi $\rho = v_0, v_1$.

$$w_5(\rho) := \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq \rho < v_0, \\ \xi^3 (6\xi^2 - 15\xi + 10) & \text{se } v_0 \leq \rho \leq v_1, \\ 1 & \text{se } \rho > v_1. \end{cases}$$

- Funzione tale che $w^{(k)}(v_0) = 0$ per $k = 1, \dots, 4$ e $w'(v_1) = w''(v_1) = 0$. Il raccordo con le funzioni costanti è C^4 in $\rho = v_0$ e C^2 in $\rho = v_1$.

$$w_7(\rho) := \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq \rho < v_0, \\ \xi^5 (15\xi^2 - 35\xi + 21) & \text{se } v_0 \leq \rho \leq v_1, \\ 1 & \text{se } \rho > v_1. \end{cases}$$

- Funzione tale che $w^{(k)}(v_0) = 0$ per $k = 1, \dots, 4$ e $w^{(k)}(v_1) = 0$ per $k = 1, \dots, 4$. Il raccordo con le funzioni costanti è C^4 in entrambi gli estremi $\rho = v_0, v_1$.

$$w_9(\rho) := \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq \rho < v_0, \\ \xi^5 (70\xi^4 - 315\xi^3 + 540\xi^2 - 420\xi + 126) & \text{se } v_0 \leq \rho \leq v_1, \\ 1 & \text{se } \rho > v_1. \end{cases}$$

La Figura 2.4 mostra il grafico di queste funzioni peso univariate.

2.4.2 2D

Le funzioni peso bivariate hanno la stessa forma delle corrispondenti versioni unidimensionali, ma ora $\rho := \frac{\sqrt{s^2+t^2}}{r_n}$. Pertanto nella zona di blending D_n (disco di raggio $0 < r_n < 1$) vale $0 \leq \rho \leq 1$. A $\rho = 0$ corrisponde il vertice straordinario (origine $(s, t) = (0, 0)$), mentre per $\rho = 1$ si ottengono i punti sul bordo della regione di blending ($\|(s, t)\|_2 = r_n$).

La Figura 2.5 mostra i loro grafici.

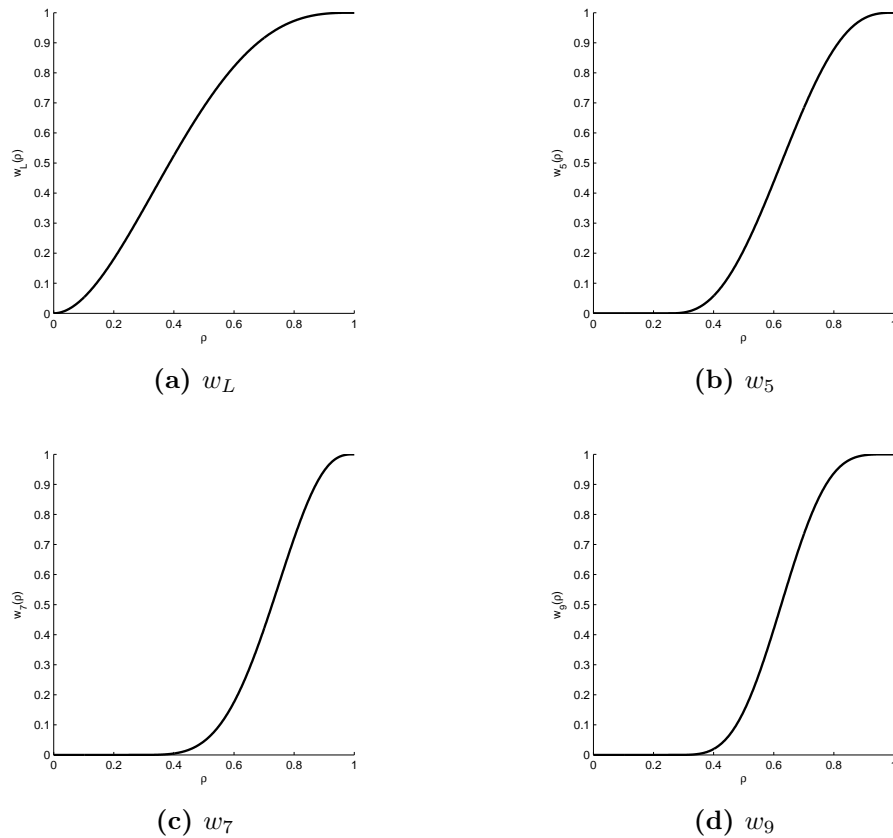


Figura 2.4: Funzioni peso univariate. Per le funzioni w_5, w_7, w_9 si sono presi $v_0 = \frac{1}{4}, v_1 = 1$.

2.4.3 Dimostrazione della continuità C^2

Riportiamo un risultato presentato in [Lev06b], valido $\forall n \geq 3$. La dimostrazione che diamo fa riferimento alla funzione peso $w := w_L$, ma la proposizione resta valida anche per $w = w_5, w_7, w_9$: in questi casi, la dimostrazione è analoga e sfrutta le stesse proprietà che anche le altre funzioni peso proposte possiedono.

Proposizione 2.1 (A. Levin). *La superficie di Catmull-Clark modificata \mathbf{S}^* ha curvatura continua ovunque, anche nei vertici straordinari.*

Dimostrazione. Distinguiamo vari casi.

1. Lontano dai vertici straordinari, nelle regioni regolari, la superficie limite di Catmull-Clark non è modificata, pertanto essa è C^2 perché coincide con le B-spline bicubiche.

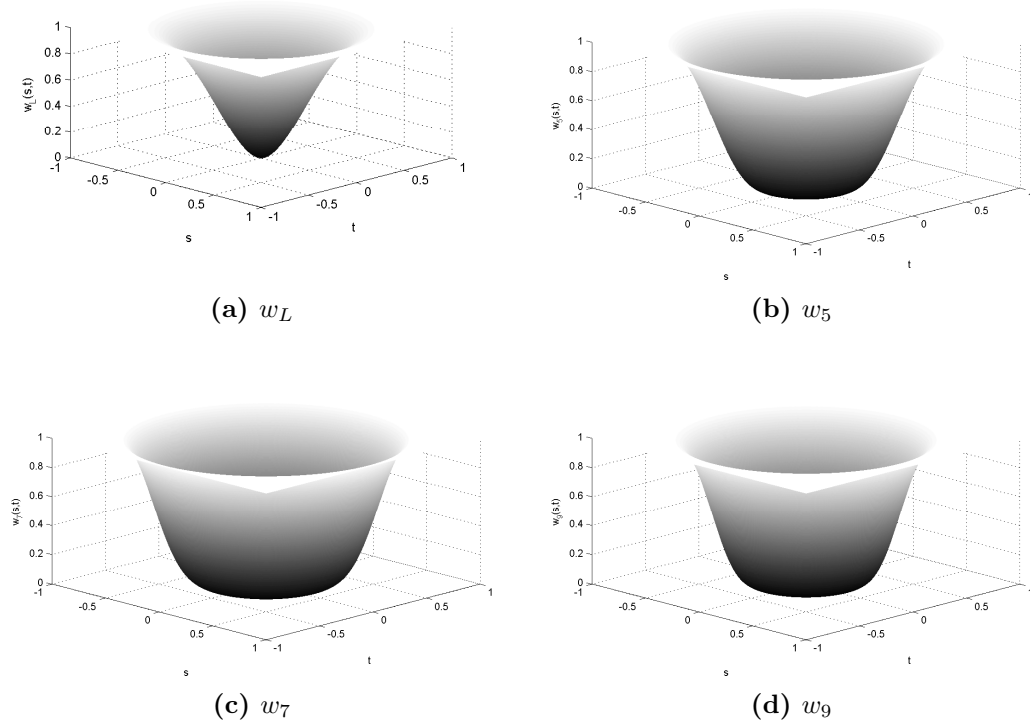


Figura 2.5: Funzioni peso bivariate. Per le funzioni w_5, w_7, w_9 si sono presi $v_0 = \frac{1}{4}$, $v_1 = 1$.

2. Sul bordo di ciascuna regione di blending, la superficie modificata \mathbf{S}^* si raccorda con continuità C^2 con la superficie originale \mathbf{S} perché w ha derivate seconde parziali nulle per $\rho = \frac{\sqrt{s^2+t^2}}{r_n} = 1$.
3. All'interno delle regioni di blending, ma non in corrispondenza dei vertici straordinari, la superficie \mathbf{S}^* è data dal miscelamento (2.1) della superficie \mathbf{S} (che è ivi C^2) con la superficie \mathbf{P} polinomiale (quindi analitica), mediante la funzione w (avente derivate seconde continue).
4. Rimane da provare la continuità C^2 nel vertice straordinario, corrispondente ai parametri $(s, t) = (0, 0)$.

Nella (2.1), w è C^2 ovunque per definizione e \mathbf{P} è analitica perché è un polinomio, quindi il termine $(1-w)\mathbf{P}$ è C^2 . Bisogna provare che il termine $w\mathbf{S}$ è C^2 nell'origine.

Differenziando $w\mathbf{S}$ due volte, ad esempio rispetto al parametro s , otteniamo

$$(w\mathbf{S})_{ss} = w_{ss}\mathbf{S} + 2w_s\mathbf{S}_s + w\mathbf{S}_{ss}.$$

Ricordando che \mathbf{S} è C^1 nel vertice straordinario, e w è ivi C^2 , i termini $w_s \mathbf{S}_s$ e $w_{ss} \mathbf{S}$ sono entrambi continui, in quanto prodotti di funzioni continue. Resta da vedere che $w \mathbf{S}_{ss} \rightarrow \mathbf{0}$ per $(s, t) \rightarrow (0, 0)$, cioè che l'annullamento della funzione peso è sufficiente a cancellare il contributo delle derivate seconde della superficie di Catmull-Clark, divergenti.

Siano λ_n l'autovalore sotto-dominante della matrice di suddivisione locale relativa alla valenza n , e μ_n un qualsiasi altro autovalore tale che $|\mu_n| < 1$. In virtù di quanto esposto nella Sezione 1.4, μ_n è uno qualsiasi degli autovalori $\lambda_i^{[n]}$ con $i \geq 3$. Sia Φ la funzione limite associata all'autovalore μ_n . Dalla definizione di $w = w_L$, è evidente che vicino all'origine la funzione peso decade a zero come $\rho^2 = s^2 + t^2$. Ne segue che il comportamento di $w \mathbf{S}_{ss}$ vicino a $(0, 0)$ è determinato dal comportamento di $(s^2 + t^2) \Phi_{ss}(s, t) =: \Theta(s, t)$.

Poiché Φ è una funzione limite associata a un autovettore, soddisfa la proprietà di scaling

$$\Phi(\lambda_n s, \lambda_n t) = \mu_n \Phi(s, t). \quad (2.4)$$

Differenziando entrambi i membri di (2.4) due volte, sempre rispetto a s , otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\Phi(\lambda_n s, \lambda_n t)) &= \lambda_n^2 \Phi_{ss}(\lambda_n s, \lambda_n t) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\mu_n \Phi(s, t)) = \mu_n \Phi_{ss}(s, t), \end{aligned}$$

da cui risulta

$$\Phi_{ss}(\lambda_n s, \lambda_n t) = \frac{\mu_n}{\lambda_n^2} \Phi_{ss}(s, t), \quad \forall (s, t). \quad (2.5)$$

Sfruttando la (2.5), si ottiene la relazione di scaling

$$\begin{aligned} \Theta(\lambda_n s, \lambda_n t) &= \lambda_n^2 (s^2 + t^2) \Phi_{ss}(\lambda_n s, \lambda_n t) \\ &= \mu_n (s^2 + t^2) \Phi_{ss}(s, t) = \mu_n \Theta(s, t), \end{aligned}$$

che, iterata, diventa

$$\begin{aligned} \Theta(\lambda_n^k s, \lambda_n^k t) &= \Theta(\lambda_n (\lambda_n^{k-1} s), \lambda_n (\lambda_n^{k-1} t)) \\ &= \mu_n \Theta(\lambda_n^{k-1} s, \lambda_n^{k-1} t) = \dots = \mu_n^k \Theta(s, t). \end{aligned}$$

In particolare, per $(s, t) = (0, 0)$ si ha $\Theta(0, 0) = \mu_n \Theta(0, 0)$ con $|\mu_n| > 0$, e quindi deve essere $\Theta(0, 0) = \mathbf{0}$.

Poiché $\lambda_n < 1$ e $|\mu_n| < 1$, è facile vedere ([WW01] Teorema 8.4) che la funzione $\Theta(s, t)$ che gode di questa proprietà di scaling è continua

nell'origine e tende a zero per $(s, t) \rightarrow (0, 0)$. Pertanto, anche $w\mathbf{S}_{ss}$ tende a zero nel vertice straordinario, e quindi $(w\mathbf{S})_{ss}$ è continua. Ne consegue che \mathbf{S}_{ss}^* è continua nel vertice straordinario.

In modo analogo, si prova la continuità nell'origine delle altre derivate seconde \mathbf{S}_{tt}^* e \mathbf{S}_{st}^* , concludendo che la superficie blending \mathbf{S}^* è C^2 anche nel vertice straordinario. □

2.5 Definizione del polinomio di approssimazione

In questa sezione discutiamo la definizione del polinomio \mathbf{P} con cui è miscelata la superficie originale intorno ai vertici straordinari.

Esprimiamo ciascuna componente di \mathbf{P} come un polinomio bivariato di grado d :

$$P^{(\chi)}(s, t) = \sum_{j=0}^{\frac{1}{2}(d+1)(d+2)-1} c_j^{(\chi)} p_j(s, t), \quad (2.6)$$

con $\chi \in \{x, y, z\}$, dove $p_j(s, t)$ sono i monomi bivariati di grado minore o uguale a d , ordinati in senso lessicografico inverso negativo per grado (negative degree reverse lexicographic ordering). Per esempio, nel caso $d = 3$, essi sono :

$$1, s, t, s^2, st, t^2, s^3, s^2t, st^2, t^3.$$

$\mathbf{c}^{(\chi)} := \left(c_0^{(\chi)}, \dots, c_{\frac{1}{2}(d+1)(d+2)-1}^{(\chi)} \right)$ è il vettore dei coefficienti che determina il polinomio relativo a ciascuna componente.

Poiché la funzione peso w è nulla in corrispondenza del vertice straordinario, in questo punto la superficie blending coincide con il polinomio $\mathbf{S}^* = \mathbf{P}$, fino alle derivate seconde. Sebbene il polinomio possa essere costruito secondo varie modalità, richiediamo in ogni caso che esso soddisfi la condizione di interpolazione del vertice straordinario: $\mathbf{P}(0, 0) = \mathbf{S}(0, 0) =: \mathbf{p}_{EV}$. Giustificiamo questa scelta con la volontà di non modificare la superficie di Catmull-Clark senza motivo: i problemi presenti nei vertici straordinari non affliggono il valore della superficie, bensì la continuità del secondo ordine, e la Proposizione 2.1 mostra che il blending consente di risolverli.

L'interpolazione del vertice straordinario determina il coefficiente di grado 0 di ciascuna componente polinomiale $P^{(\chi)}$, infatti, poiché $p_0(0, 0) = 1$ e $p_j(0, 0) = 0 \forall j > 0$:

$$P^{(\chi)}(0, 0) = c_0^{(\chi)} = p_{EV}^{(\chi)}, \quad \chi \in \{x, y, z\},$$

cioè

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{p}_{EV}. \quad (2.7)$$

Presentiamo nelle prossime Sezioni 2.5.1 e 2.5.2 due diversi modi, proposti da Levin rispettivamente in [Lev06b] e [Lev06a], per completare la definizione di \mathbf{P} , determinandone gli altri coefficienti.

2.5.1 Metodo dei minimi quadrati

L'idea originale di Levin prevede la determinazione dei coefficienti del polinomio \mathbf{P} mediante un fitting ai minimi quadrati di valori estratti dalla superficie limite di Catmull-Clark. Questo approccio garantisce che il polinomio non si discosti eccessivamente dalla superficie originale, evitando il rischio di introdurre artefatti nella superficie blending.

Per semplicità, e per evitare oscillazioni indesiderate, è bene usare polinomi di grado basso: scegliamo polinomi cubici per valenze $n \geq 5$, mentre nel caso $n = 3$ un polinomio quadratico è sufficiente per catturare la geometria della superficie di Catmull-Clark (che nei vertici straordinari di valenza 3 ha una forma simile a un ellissoide).

2.5.1.1 Determinazione dei coefficienti del polinomio

Per l'approssimazione con i minimi quadrati, consideriamo come punti di campionamento i punti limite della superficie \mathbf{S} corrispondenti ai vertici della mesh ottenuta effettuando tre passi di suddivisione su \mathcal{M}_0 , e che cadono dentro la regione di blending D_n (Figura 2.6). Ragionando nella parametrizzazione comune data da $\Psi^{[n]}$, nel dominio K_n questi punti sono le immagini mediante ciascun settore $\Psi_i^{[n]}$, $i = 0, \dots, n-1$, dei parametri (u, v) seguenti:

$$\begin{aligned} &\tau \left(\frac{1}{8}, 0 \right), \tau \left(\frac{1}{4}, 0 \right), \tau \left(\frac{3}{8}, 0 \right), \tau \left(\frac{1}{2}, 0 \right), \\ &\tau \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8} \right), \tau \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8} \right), \tau \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8} \right), \\ &\tau \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4} \right), \tau \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right), \tau \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{4} \right), \\ &\tau \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8} \right), \tau \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8} \right), \end{aligned}$$

dove τ è un fattore di scala che tiene conto del raggio della zona di blending: $\tau = 1$ se $r_n = \lambda_n$, e $\tau = \frac{1}{4}$ se $r_n = \frac{1}{4}\lambda_n$. Si noti che $n_{\text{sector}} = 12$ punti per settore sono un numero sufficiente affinché abbia senso fare il fitting ai minimi quadrati con polinomi di grado $d = 2, 3$, per determinare i $\frac{1}{2}(d+1)(d+2) - 1 = 5, 9$ coefficienti oltre al termine noto. In totale, intorno a un vertice straordinario di valenza n , campioniamo la superficie \mathbf{S} in $n_p := n_{\text{sector}}n$ punti (nel caso di bordo, in $n_p := n_{\text{sector}}(n-1) + 4$ punti), che denotiamo con $\{\mathbf{S}_k\}_{k=0, \dots, n_p-1}$. Per quanto già osservato, essi sono ottenuti valutando la superficie in corrispondenza dei parametri $(s_k, t_k) = \Psi_i^{[n]}(u_l, v_l) \in K_n$, cioè

$\mathbf{S}_k := \mathbf{S}_i(u_l, v_l)$, con

$$i = \left\lfloor \frac{k}{n_{\text{sector}}} \right\rfloor \in \{0, \dots, n-1\},$$

$$l = k \bmod n_{\text{sector}} \in \{0, \dots, n_{\text{sector}}-1\},$$

dove $\Psi_i^{[n]}$ e \mathbf{S}_i sono rispettivamente i patch i -esimi delle superfici $\Psi^{[n]}$ e \mathbf{S} intorno al vertice straordinario considerato.

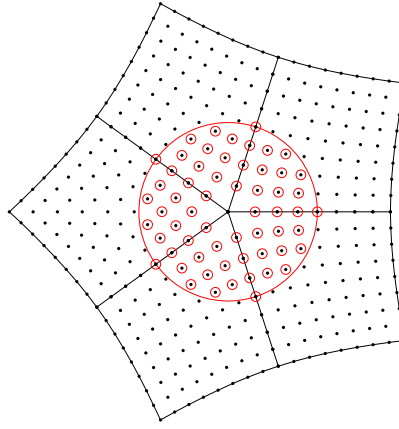


Figura 2.6: Punti di campionamento per l'approssimazione ai minimi quadrati. È raffigurato il primo ring di patch intorno al vertice straordinario.

Il problema ai minimi quadrati può essere risolto in fase di preprocessing, con il metodo seguente. Nell'approccio tramite minimi quadrati, i coefficienti del polinomio dipendono in maniera lineare dagli n_p punti di campionamento \mathbf{S}_k , pertanto

$$\mathbf{c}_j = \sum_{k=0}^{n_p-1} \gamma_k \mathbf{S}_k, \quad (2.8)$$

dove $\mathbf{c}_j := (c_j^{(x)}, c_j^{(y)}, c_j^{(z)})$, $j = 1, \dots, \frac{1}{2}(d+1)(d+2) - 1$. Si noti che la (2.8) è una relazione vettoriale, perché coinvolge le tre componenti della superficie e dei coefficienti del polinomio \mathbf{P} , ma i coefficienti γ_k della combinazione sono gli stessi in tutti e tre i casi. Pertanto, possiamo lavorare su una sola componente $\chi \in \{x, y, z\}$, e ridurre il problema di least squares fitting alla soluzione di un sistema lineare, in cui i valori $S_k^{(\chi)} =: \zeta_k$, non essendo noti, sono trattati simbolicamente.

Nello specifico, con i valori (s_k, t_k) costruiamo la *matrice di Vandermonde* (rettangolare) relativa alla base dei monomi p_j . Ad esempio, per $d = 3$:

$$\mathbf{V} := \begin{pmatrix} s_0 & t_0 & s_0^2 & s_0 t_0 & t_0^2 & s_0^3 & s_0^2 t_0 & s_0 t_0^2 & t_0^3 \\ s_1 & t_1 & s_1^2 & s_1 t_1 & t_1^2 & s_1^3 & s_1^2 t_1 & s_1 t_1^2 & t_1^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n_p-1} & t_{n_p-1} & s_{n_p-1}^2 & s_{n_p-1} t_{n_p-1} & t_{n_p-1}^2 & s_{n_p-1}^3 & s_{n_p-1}^2 t_{n_p-1} & s_{n_p-1} t_{n_p-1}^2 & t_{n_p-1}^3 \end{pmatrix}.$$

Si noti che la matrice è privata della prima colonna, che sarebbe un vettore con ogni componente uguale a 1, perché il coefficiente di grado 0 di \mathbf{P} è già determinato dalla condizione (2.7) di interpolazione del vertice straordinario. Pertanto $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_p \times \frac{1}{2}(d+1)(d+2)-1}$.

I coefficienti γ_k della combinazione (2.8) sono determinati risolvendo³ il sistema lineare

$$\mathbf{G}\gamma = \mathbf{z}, \quad (2.9)$$

dove $\gamma := (\gamma_0, \dots, \gamma_{n_p-1})$, $\tilde{\zeta} := (\zeta_0 - \zeta_{EV}, \dots, \zeta_{n_p-1} - \zeta_{EV})$, $\mathbf{G} = \mathbf{V}^T \mathbf{V}$, $\mathbf{z} = \mathbf{V}^T \tilde{\zeta}$, e ζ_{EV} è la variabile che rappresenta la coordinata del vertice straordinario (punto di interpolazione).

I γ_k così calcolati possono essere salvati (ad esempio, in un header file), pronti per essere moltiplicati opportunamente per le coordinate dei punti limite \mathbf{S}_k , noti solo quando è assegnata una specifica mesh \mathcal{M}_0 di input per il processo di suddivisione.

Si ricordi che questa procedura deve essere effettuata per ogni valenza n , in quanto il numero di punti di approssimazione cambia (cresce) all'aumentare di n .

La Figura 2.7 mostra alcuni esempi di polinomi costruiti con l'approssimazione ai minimi quadrati.

2.5.1.2 Determinazione del valore della superficie nei punti di campionamento

Anche per quanto riguarda il campionamento della superficie di Catmull-Clark \mathbf{S} nei punti $\{\mathbf{S}_k\}_{k=0, \dots, n_p-1}$, il costo computazionale dell'esecuzione in tempo reale può essere ridotto effettuando alcune operazioni in fase di preprocessing.

In generale, il valore della superficie limite in punto appartenente a uno degli n patch intorno a un vertice di valenza n della mesh \mathcal{M}_k al k -esimo passo di suddivisione può essere espresso come una combinazione lineare dei valori delle funzioni base $\phi_i^{[n]}$, $i = 0, \dots, 6n$ in quel punto, con coefficienti dati dai vertici

³Nella nostra implementazione, a questo scopo abbiamo usato il Symbolic Toolbox di MATLAB.

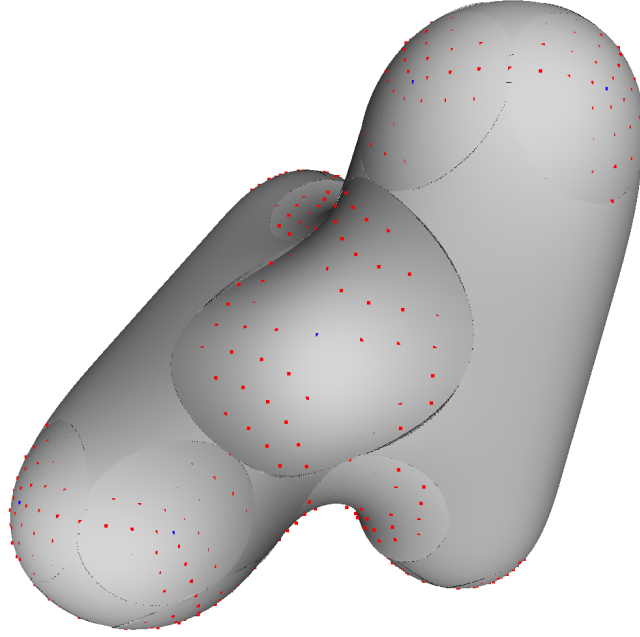


Figura 2.7: Esempio con varie regioni di blending, ciascuna con i propri punti di approssimazione e il proprio polinomio ai minimi quadrati \mathbf{P} (non ancora miscelato con la superficie originale).

$\mathbf{v}_i, i = 0, \dots, 6n$ del 2-ring intorno a quel vertice. La j -esima *funzione base* $\phi_j^{[n]}$ per lo schema di Catmull-Clark è costruita nel modo seguente. Prendiamo la mesh 2D $\mathcal{M}^{[n]}$ con gli $1 + 6n$ vertici \mathbf{c}_i dati dagli autovettori sotto-dominanti, e la rendiamo una mesh tridimensionale ponendo la terza coordinata di ogni vertice a 0, tranne che per il j -esimo, avente quota 1. Questo significa che le terze coordinate dei vertici della mesh sono date dal j -esimo vettore della base canonica di \mathbb{R}^{1+6n} , cioè $c_i^{(z)} = \delta_{ij}$. Consideriamo la superficie limite Φ_j ottenuta a partire da questa mesh: in virtù della sua forma, essa può essere vista come grafico della funzione scalare bivariata $(\Phi_j^{(x)}, \Phi_j^{(y)}) \mapsto \Phi_j^{(z)}$, cioè, ragionando nel dominio K_n , $(s, t) \mapsto \Phi_j^{(z)}(s, t) =: \phi_j^{[n]}(s, t)$.

Tornando al nostro caso, i valori campionati si scrivono come

$$\mathbf{S}_k := \mathbf{S}(s_k, t_k) = \sum_{i=0}^{6n} \mathbf{v}_i \phi_i^{[n]}(s_k, t_k), \quad (2.10)$$

dove $\mathbf{v}_i, i = 0, \dots, 6n$, sono i vertici del 2-ring intorno al vertice straordinario considerato, ottenuti suddividendo localmente la mesh di partenza \mathcal{M}_0 una o due volte, a seconda che si usino le regioni di blending con raggio $r_n = \lambda_n$ o $r_n = \frac{1}{4}\lambda_n$. In fase di preprocessing, \mathcal{M}_0 non è assegnata e quindi i \mathbf{v}_i non sono noti; invece è possibile precalcolare e salvare i valori delle $1 + 6n$ funzioni

base in corrispondenza dei parametri (s_k, t_k) , $k = 0, \dots, n_p - 1$, fissati nella Sezione 2.5.1.1. Nel caso non di bordo, è sufficiente calcolare nei n_p punti il valore delle $1 + 6$ funzioni base relative al vertice centrale e ai vertici del primo settore, e poi sfruttare la simmetria ciclica per determinare i valori delle altre funzioni base. Al momento della determinazione dei coefficienti del polinomio \mathbf{P} , si procede alla suddivisione locale di \mathcal{M}_0 per ottenere i vertici \mathbf{v}_i , che sono combinati con i valori precalcolati delle funzioni base, ricavando quindi i punti di approssimazione \mathbf{S}_k dalla (2.10).

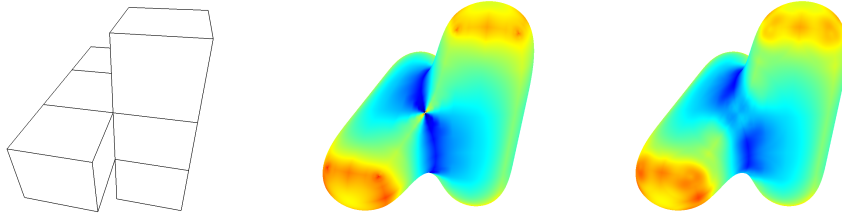
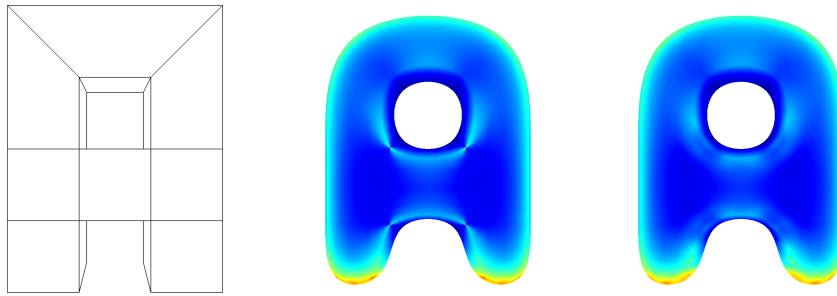
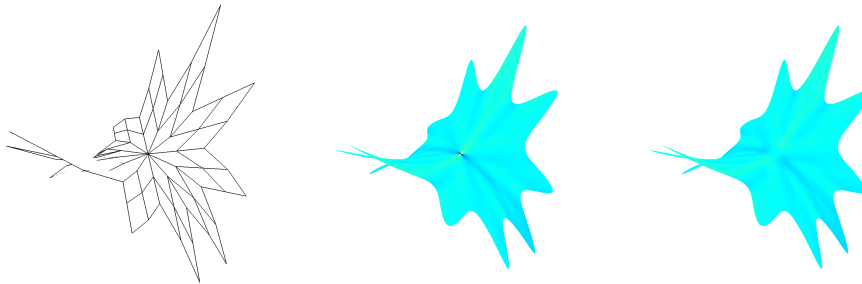
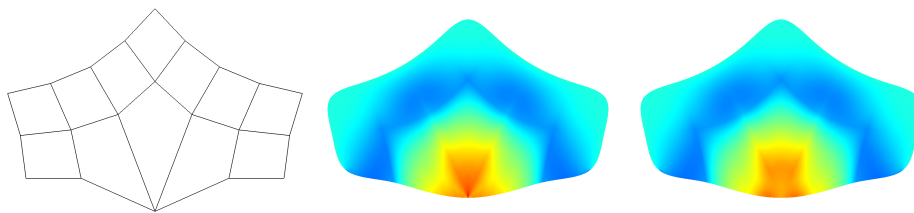
Si ricordi che anche questa procedura deve essere effettuata per ogni valenza.

2.5.1.3 Analisi dei risultati

In questa sezione presentiamo alcuni esempi di superfici ottenute mediante il blending con il polinomio \mathbf{P} definito dall'approssimazione ai minimi quadrati, evidenziando i miglioramenti ottenuti rispetto alle superfici di Catmull-Clark originali.

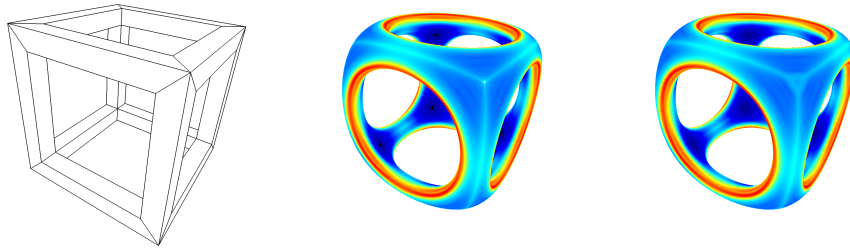
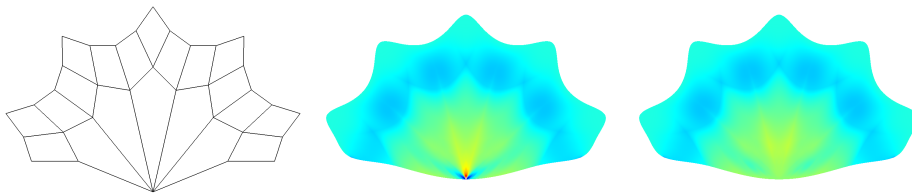
Come ci si aspetta, la modifica introdotta nell'intorno dei vertici straordinari causa un leggero spostamento di \mathbf{S}^* rispetto alla posizione originale di \mathbf{S} . Per mostrare la superiore regolarità della superficie, è utile ricorrere alla visualizzazione della curvatura (Figure 2.8 e 2.9) o delle isofote (Figura 2.10). Si veda l'Appendice B per una breve panoramica di questi e altri strumenti per l'analisi della regolarità e della qualità delle superfici. Notiamo che il blending permette di ottenere delle superfici di alta qualità per una grande varietà di configurazioni delle mesh, anche in presenza di vertici straordinari adiacenti o di valenza elevata.

La Figura 2.11 mette a confronto il blending effettuato sulla stessa superficie, al variare della funzione peso. Per le funzioni w_5, w_7, w_9 sono presenti delle oscillazioni nella curvatura, più evidenti negli ultimi due casi. Questi artefatti sono causati dallo stretching del supporto della funzione peso, dovuto alla presenza di una zona nulla intorno al vertice straordinario, e dal comportamento imposto alle derivate sul bordo della regione a forma di corona circolare (si ricordino le definizioni delle Sezioni 2.4.1 e 2.4.2). Pertanto la funzione w_L si dimostra essere la scelta che garantisce migliore qualità visiva della superficie limite, mentre w_5 può essere una buona alternativa nei casi in cui si abbia l'esigenza di avere un comportamento polinomiale della superficie su tutto un intorno del vertice straordinario.

(a) Esempio con vertici straordinari adiacenti di valenze $n = 3, 6$.(b) Esempio con vertici straordinari adiacenti di valenze $n = 3, 5$.(c) Esempio di vertice straordinario con valenza alta, $n = 12$.

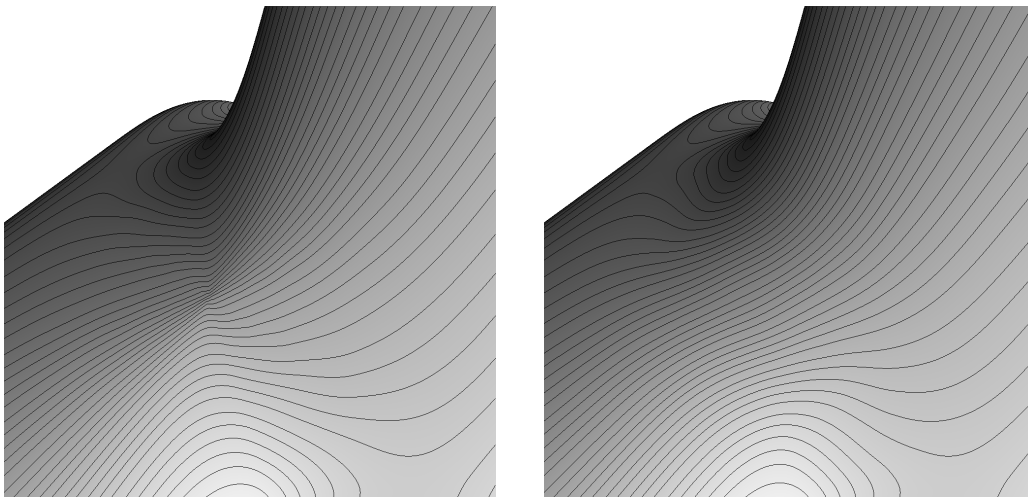
(d) Esempio di vertice straordinario sul bordo.

Figura 2.8: Esempi di blinding polinomiale, con polinomio definito dall'approssimazione ai minimi quadrati, su regioni di blinding larghe. Colonna di sinistra: mesh iniziale. Colonna centrale: curvatura media della superficie di Catmull-Clark originale. Colonna di destra: curvatura media della superficie blinding.

(a) Esempio con vertici straordinari adiacenti di valenza $n = 6$.

(b) Esempio di vertice straordinario sul bordo.

Figura 2.9: Esempi di blending polinomiale, con polinomio definito dall'approssimazione ai minimi quadrati, su regioni di blending piccole. Colonna di sinistra: mesh iniziale. Colonna centrale: curvatura media della superficie di Catmull-Clark originale. Colonna di destra: curvatura media della superficie blending.



(a) Superficie di Catmull-Clark originale.

(b) Superficie blending.

Figura 2.10: Blending polinomiale, con polinomio definito dall'approssimazione ai minimi quadrati, su regioni di blending larghe. Confronto tra le isofote sulla superficie originale e sulla superficie blending.

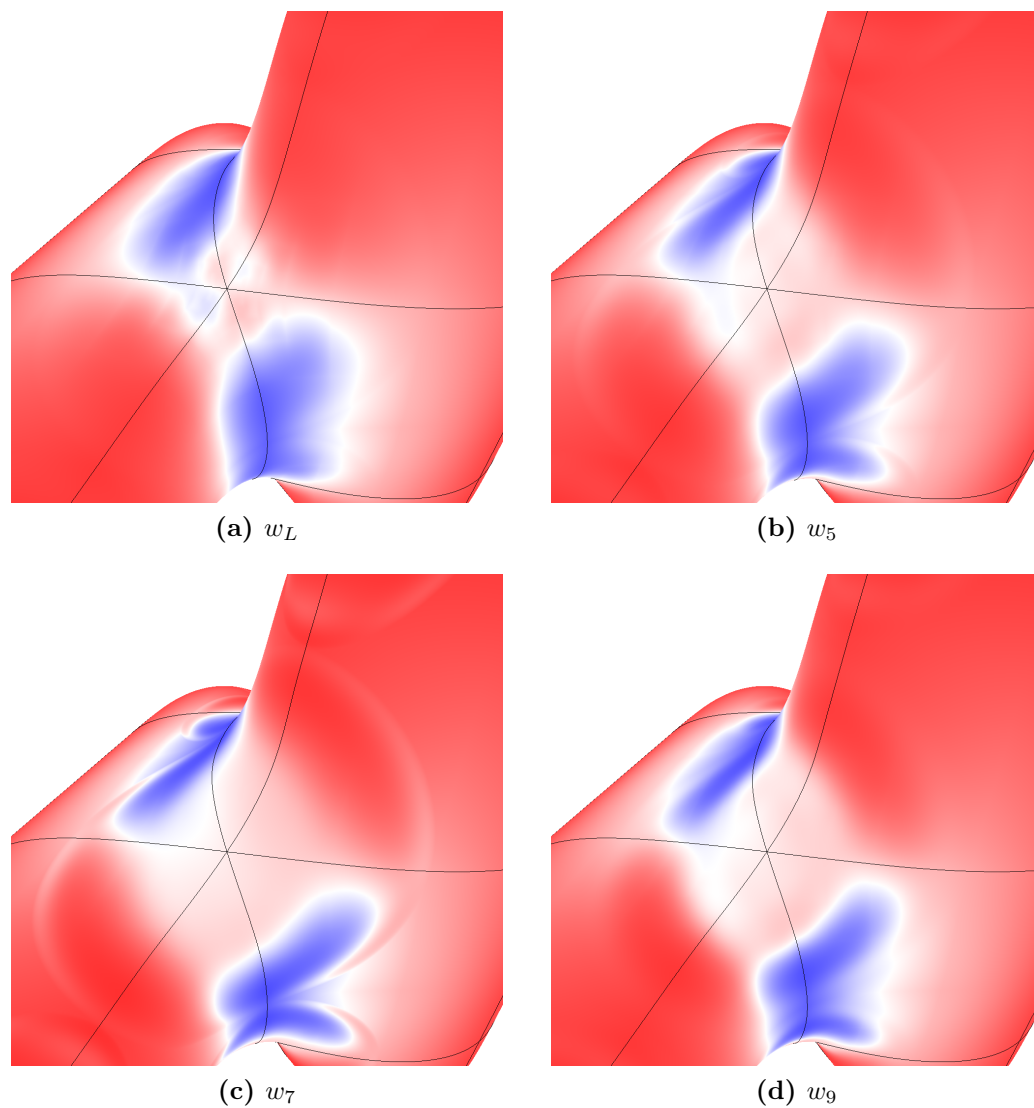


Figura 2.11: Esempi di blending polinomiale, con polinomio definito dall'approssimazione ai minimi quadrati, al variare della funzione peso. È mostrata la curvatura media della superficie blending.

2.5.2 Metodo di fairing

Il polinomio \mathbf{P} può essere definito seguendo varie tecniche. Esponiamo qui una proposta alternativa per la sua definizione, suggerita da Levin nella nota [Lev06a] in aggiunta a [Lev06b], e che noi abbiamo rielaborato, implementato e sperimentato in maniera estesa. La determinazione del polinomio è basata su un criterio di “ottimalità”, nel senso che è minimizzata una assegnata misura quadratica della fairness della superficie blending. Per questo motivo, ci riferiamo al polinomio \mathbf{P} costruito con il metodo che discutiamo in questa sezione chiamandolo *polinomio ottimale*.

La valutazione della misura di fairness implica il calcolo di un integrale nel quale sono coinvolte le derivate della superficie blending, come si illustra nella Sezione 2.5.2.2. Osserviamo quindi che non è possibile (o almeno non conveniente) utilizzare l’approccio adottato dall’autore in [Lev06b] se si vuole prendere in considerazione la definizione del polinomio come in [Lev06a]: come detto nella Sezione 2.1.2, in [Lev06b] la valutazione della superficie è effettuata in un insieme discreto di punti, il che può rendere problematico il calcolo dell’integrale con elevata precisione. Invece, grazie all’approccio che abbiamo seguito, noi abbiamo a disposizione il metodo di Stam che facilita la procedura di integrazione (la quale avviene per via numerica, con le modalità esposte nella Sezione 2.5.2.5) fornendo la valutazione della superficie nei parametri (arbitrari) richiesti. Pertanto, per implementare questa variante nella definizione del polinomio non è stata necessaria nessuna modifica nella struttura dell’algoritmo di blending presentato finora.

2.5.2.1 Motivazione

Il principale motivo per cui si introduce questo approccio alternativo è il desiderio di costruire un metodo che consenta di ottenere una migliore qualità della superficie blending. In particolare, vogliamo costruire un polinomio \mathbf{P} che, oltre a soddisfare la condizione (2.7) di interpolazione del vertice straordinario, non si discosti troppo dalla superficie originale \mathbf{S} . Infatti se \mathbf{P} e \mathbf{S} sono troppo diversi tra loro, la superficie finale presenta artefatti inaccettabili. Giustificiamo questa osservazione, differenziando due volte (2.1), ad esempio rispetto a s :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{ss}^* &= \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{S}_s^* = \frac{\partial}{\partial s} (w_s \mathbf{S} + w_s \mathbf{S} - w_s \mathbf{P} + (1 - w) \mathbf{P}_s) \\
 &= \frac{\partial}{\partial s} (w \mathbf{S}_s + w_s (\mathbf{S} - \mathbf{P}) + (1 - w) \mathbf{P}_s) \\
 &= w_s \mathbf{S}_s + w \mathbf{S}_{ss} + w_{ss} (\mathbf{S} - \mathbf{P}) + w_s (\mathbf{S}_s - \mathbf{P}_s) - w_s \mathbf{P}_s + (1 - w) \mathbf{P}_{ss} \\
 &= w \mathbf{S}_{ss} + (1 - w) \mathbf{P}_{ss} + 2w_s (\mathbf{S} - \mathbf{P})_s + w_{ss} (\mathbf{S} - \mathbf{P}).
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

I primi due termini nell’ultima espressione rappresentano un blending tra le derivate seconde di \mathbf{S} e quelle di \mathbf{P} . Se \mathbf{P} ha un buon comportamento, e

poiché \mathbf{S} non dà problemi lontano dal vertice straordinario, il blending tra queste derivate non presenta inconvenienti. Invece, gli altri due termini sono piccoli solo se il polinomio è una buona approssimazione della superficie di Catmull-Clark, cioè $\mathbf{P} \approx \mathbf{S}$. In particolare, come Levin sottolinea, dato che le funzioni peso scelte hanno derivata seconda massima nell'origine, la condizione di interpolazione $\mathbf{P}(0,0) = \mathbf{S}(0,0)$ permette di minimizzare il contributo del termine $w_{ss}(\mathbf{S} - \mathbf{P})$.

Quindi cerchiamo un polinomio che approssimi sufficientemente la superficie, senza tuttavia coincidere con essa: è ovvio che se fosse $\mathbf{P} = \mathbf{S}$ su tutta la regione di blending, la (2.1) si ridurrebbe a $\mathbf{S}^* = \mathbf{S}$; la superficie originale non sarebbe modificata, e quindi la superficie "blending" sarebbe affetta dagli stessi problemi di regolarità della superficie di Catmull-Clark.

Si può essere interessati ad aumentare il grado del polinomio per cercare di catturare meglio il comportamento della superficie di Catmull-Clark. Da questo punto di vista, il metodo ai minimi quadrati discusso nella Sezione 2.5.1 non è molto versatile: incrementare il grado del polinomio senza aumentare il numero di punti di approssimazione può introdurre oscillazioni indesiderate; d'altra parte considerare un numero eccessivo di punti di campionamento può forzare \mathbf{P} a comportarsi nello stesso modo di \mathbf{S} , anche nelle zone problematiche. Pertanto siamo orientati verso un metodo che definisca il polinomio secondo altri criteri, prevedendo la possibilità di aumentarne il grado.

2.5.2.2 Funzionale di fairness

Il metodo che qui esponiamo prevede la definizione del polinomio \mathbf{P} , che può avere grado d qualsiasi, secondo un criterio di ottimalità, cioè \mathbf{P} è tale da minimizzare un certo funzionale $E(\Sigma^{(\chi)})$, $\chi \in \{x, y, z\}$, che esprime una misura della fairness di una superficie Σ . La scelta del funzionale è un passaggio fondamentale e non banale: in letteratura esistono molte proposte in questo senso, e ognuna presenta vantaggi e inconvenienti. Qualunque sia il funzionale usato, in questa sede richiediamo che soddisfi le condizioni seguenti:

1. $E(f)$ è una quantità che è possibile calcolare;
2. $E(f)$ dipende in modo quadratico da f e dalle sue derivate (parziali);
3. $E(f)$ dipende solo dai valori di f dentro la regione di blending $D_n := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 + t^2 \leq r_n^2\} \subset K_n$.

Una volta scelti il funzionale E e il grado d del polinomio, si procede alla determinazione dei coefficienti di \mathbf{P} minimizzando la quantità $E(wS^{(\chi)} + (1-w)P^{(\chi)})$. Questo dovrebbe garantire che la qualità della superficie aumenti all'aumentare di d : la Sezione 2.5.2.6 riporta i risultati ottenuti.

Oltre a (2.7), possono essere inseriti altri vincoli lineari nel processo di ottimizzazione, come discutiamo nella Sezione 2.5.2.4.

Scelta del funzionale. Date due funzioni scalari bivariate f, g , introduciamo il seguente prodotto interno, non-negativo e lineare negli argomenti, che fa uso delle derivate parziali prime, seconde e terze:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{(\alpha, \beta, \gamma)} &:= \alpha \int_{D_n} (f_s g_s + f_t g_t) \, ds \, dt \\ &+ \beta \int_{D_n} (f_{ss} g_{ss} + 2f_{st} g_{st} + f_{tt} g_{tt}) \, ds \, dt \\ &+ \gamma \int_{D_n} (f_{sss} g_{sss} + 3f_{sst} g_{sst} + 3f_{stt} g_{stt} + f_{ttt} g_{ttt}) \, ds \, dt, \end{aligned} \quad (2.12)$$

con $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$ e tali che $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Nel seguito, consideriamo il caso particolare $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0$, lavorando quindi con le sole derivate seconde:

$$\langle f, g \rangle := \langle f, g \rangle_{(0, 1, 0)} = \int_{D_n} (f_{ss} g_{ss} + 2f_{st} g_{st} + f_{tt} g_{tt}) \, ds \, dt. \quad (2.13)$$

Definiamo il *funzionale di fairness* (o di “energia”) quadratico associato a questo prodotto interno come

$$E(f) := \langle f, f \rangle = \int_{D_n} (f_{ss}^2 + 2f_{st}^2 + f_{tt}^2) \, ds \, dt. \quad (2.14)$$

Oltre alla (2.14), prendiamo in considerazione una sua versione discreta, che può essere definita come

$$E(f) := \sum_{k=0}^{n_p-1} (f_{ss}^2(s_k, t_k) + 2f_{st}^2(s_k, t_k) + f_{tt}^2(s_k, t_k)), \quad (s_k, t_k) \in D_n. \quad (2.15)$$

dove n_p è il numero totale di punti di campionamento: questi punti non sono necessariamente quelli considerati nella Sezione 2.5.1.1, anzi per avere risultati accurati è bene prenderne un numero abbastanza elevato, in modo da giustificare l'approssimazione dell'integrale con una sommatoria.

In virtù della sua generalità, la nostra proposta consente in linea di principio di utilizzare anche altri funzionali per misurare la fairness della superficie: in letteratura sono presenti numerose possibilità, come quelle discusse in [JS07] o quelle elencate in [HL93] Sezione 13.2.

2.5.2.3 Determinazione dei coefficienti del polinomio

Riscriviamo ciascuna componente $\chi \in \{x, y, z\}$ del polinomio \mathbf{P} , di grado d , mettendo in evidenza il termine noto $c_0^{(\chi)}$, già determinato dalla condizione (2.7).

$$P^{(\chi)}(s, t) = c_0^{(\chi)} + \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}(d+1)(d+2)-1} c_i^{(\chi)} p_i(s, t).$$

Vogliamo determinare gli altri coefficienti $\tilde{\mathbf{c}}^{(\chi)} := \left(c_1^{(\chi)}, \dots, c_{\frac{1}{2}(d+1)(d+2)-1}^{(\chi)} \right)$. Per fare questo, vogliamo minimizzare la quantità $E(wS^{(\chi)} + (1-w)P^{(\chi)})$.

Per maggiore leggibilità nei calcoli seguenti, poniamo $n_{\text{coef}} := \frac{1}{2}(d+1)(d+2)$ e omettiamo di indicare esplicitamente il riferimento alla componente χ . Pertanto scriviamo $S := S^{(\chi)}$, $P := P^{(\chi)}$, $c_i := c_i^{(\chi)}$, $\tilde{\mathbf{c}} := \tilde{\mathbf{c}}^{(\chi)}$.

Poiché

$$wS + (1-w)P = wS + (1-w)c_0 + (1-w) \sum_{i=1}^{n_{\text{coef}}-1} c_i p_i,$$

riscriviamo esplicitamente il funzionale di fairness, sfruttando la proprietà di linearità e di simmetria del prodotto interno:

$$\begin{aligned} E(wS + (1-w)P) &= \langle wS + (1-w)P, wS + (1-w)P \rangle = \\ &= \langle wS + (1-w)c_0 + (1-w) \sum_{i=1}^{n_{\text{coef}}-1} c_i p_i, wS + (1-w)c_0 + (1-w) \sum_{i=1}^{n_{\text{coef}}-1} c_i p_i \rangle \\ &= \langle wS + (1-w)c_0, wS + (1-w)c_0 \rangle + 2 \langle wS + (1-w)c_0, (1-w) \sum_{i=1}^{n_{\text{coef}}-1} c_i p_i \rangle \\ &\quad + \langle (1-w) \sum_{i=1}^{n_{\text{coef}}-1} c_i p_i, (1-w) \sum_{i=1}^{n_{\text{coef}}-1} c_i p_i \rangle \\ &= \langle wS, wS \rangle + c_0^2 \langle 1-w, 1-w \rangle + 2c_0 \langle wS, 1-w \rangle + 2 \langle wS, (1-w) \sum_{i=1}^{n_{\text{coef}}-1} c_i p_i \rangle \\ &\quad + 2c_0 \langle 1-w, (1-w) \sum_{i=1}^{n_{\text{coef}}-1} c_i p_i \rangle + \sum_{i=1}^{n_{\text{coef}}-1} \sum_{j=1}^{n_{\text{coef}}-1} c_i c_j \langle (1-w)p_i, (1-w)p_j \rangle \\ &= \langle wS, wS \rangle + c_0^2 \langle 1-w, 1-w \rangle + 2c_0 \langle wS, 1-w \rangle + 2\tilde{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{a} + 2c_0 \tilde{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{b} + \tilde{\mathbf{c}} \cdot (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{c}}) \\ &=: E_1(\tilde{\mathbf{c}}), \end{aligned} \tag{2.16}$$

dove si è posto

$$\begin{aligned}
a_i &:= \langle wS, (1-w)p_i \rangle \\
&= \int_{D_n} \left((wS)_{ss}((1-w)p_i)_{ss} + 2(wS)_{st}((1-w)p_i)_{st} + (wS)_{tt}((1-w)p_i)_{tt} \right) ds dt, \\
b_i &:= \langle 1-w, (1-w)p_i \rangle \\
&= \int_{D_n} \left((1-w)_{ss}((1-w)p_i)_{ss} + 2(1-w)_{st}((1-w)p_i)_{st} + (1-w)_{tt}((1-w)p_i)_{tt} \right) ds dt, \\
B_{ij} &:= \langle (1-w)p_i, (1-w)p_j \rangle \\
&= \int_{D_n} \left(((1-w)p_i)_{ss}((1-w)p_j)_{ss} + 2((1-w)p_i)_{st}((1-w)p_j)_{st} \right. \\
&\quad \left. + ((1-w)p_i)_{tt}((1-w)p_j)_{tt} \right) ds dt.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Le quantità vettoriali coinvolte hanno le dimensioni seguenti:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{c}} &\in \mathbb{R}^{n_{\text{coef}}-1}, \\
\mathbf{a} &\in \mathbb{R}^{n_{\text{coef}}-1}, \\
\mathbf{b} &\in \mathbb{R}^{n_{\text{coef}}-1}, \\
\mathbf{B} &\in \mathbb{R}^{(n_{\text{coef}}-1) \times (n_{\text{coef}}-1)} \text{ (simmetrica)}.
\end{aligned}$$

Per completezza, scriviamo esplicitamente le espressioni delle derivate seconde che compaiono nelle funzioni integrande in (2.17):

$$\begin{aligned}
(wS)_{ss} &= w_{ss}S + 2w_sS_s + wS_{ss}, \\
(wS)_{st} &= w_{st}S + w_sS_t + w_tS_s + wS_{st}, \\
(wS)_{tt} &\text{ ha una espressione analoga a quella di } (wS)_{ss},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((1-w)p_i)_{ss} &= -w_{ss}p_i - 2w_s(p_i)_s + (1-w)(p_i)_{ss}, \\
((1-w)p_i)_{st} &= -w_{st}p_i - w_s(p_i)_t - w_t(p_i)_s + (1-w)(p_i)_{st}, \\
((1-w)p_i)_{tt} &\text{ ha una espressione analoga a quella di } ((1-w)p_i)_{ss}.
\end{aligned}$$

Vogliamo risolvere il problema

$$\arg \min_{\tilde{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{coef}}-1}} E_1(\tilde{\mathbf{c}}), \tag{2.18}$$

dunque calcoliamo il gradiente di E_1 (cioè deriviamo rispetto a $\tilde{\mathbf{c}}$)

$$\nabla E_1(\tilde{\mathbf{c}}) = 2\mathbf{a} + 2c_0\mathbf{b} + 2\mathbf{B}\tilde{\mathbf{c}},$$

e imponiamo che esso sia uguale a zero:

$$\nabla E_1(\tilde{\mathbf{c}}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{B}\tilde{\mathbf{c}} + \mathbf{a} + c_0\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Otteniamo quindi il sistema lineare

$$\mathbf{B}\tilde{\mathbf{c}} = -(\mathbf{a} + c_0\mathbf{b}),$$

cioè, ripristinando la notazione iniziale,

$$\mathbf{B}\tilde{\mathbf{c}}^{(x)} = -\left(\mathbf{a}^{(x)} + c_0^{(x)}\mathbf{b}\right), \quad (2.19)$$

avente soluzione

$$\tilde{\mathbf{c}}^{(x)} = -\mathbf{B}^{-1}\left(\mathbf{a}^{(x)} + c_0^{(x)}\mathbf{b}\right). \quad (2.20)$$

2.5.2.4 Interpolazione di altri punti oltre al vertice straordinario

Oltre alla (2.7), è possibile imporre altre condizioni di interpolazione, espresse come vincoli lineari nel processo di minimizzazione.

In questa sezione, è conveniente tenere conto anche del termine di grado 0 del polinomio, e includere la condizione (2.7) nell'insieme dei vincoli. Il procedimento che ora illustriamo determina *tutti* i coefficienti $\mathbf{c}^{(x)}$ della componente χ di \mathbf{P} ; naturalmente, il coefficiente $c_0^{(x)}$ risulta fissato dalla condizione di interpolazione del vertice straordinario, come in precedenza. Scriviamo quindi ciascuna componente del polinomio \mathbf{P} come

$$P^{(x)}(s, t) = \sum_{i=0}^{n_{\text{coef}}-1} c_i^{(x)} p_i(s, t),$$

dove $n_{\text{coef}} := \frac{1}{2}(d+1)(d+2)$. Anche qui, nei calcoli seguenti omettiamo di indicare esplicitamente il riferimento alla componente χ , per consentire una maggiore leggibilità.

Poiché

$$wS + (1-w)P = wS + (1-w) \sum_{i=0}^{n_{\text{coef}}-1} c_i p_i,$$

esplicitiamo il funzionale di fairness, sfruttando la proprietà di linearità e di simmetria del prodotto interno:

$$\begin{aligned} E(wS + (1-w)P) &= \langle wS + (1-w)P, wS + (1-w)P \rangle = \\ &= \langle wS + (1-w) \sum_{i=0}^{n_{\text{coef}}-1} c_i p_i, wS + (1-w) \sum_{i=0}^{n_{\text{coef}}-1} c_i p_i \rangle \\ &= \langle wS, wS \rangle + 2\langle wS, (1-w) \sum_{i=0}^{n_{\text{coef}}-1} c_i p_i \rangle + \langle (1-w) \sum_{i=0}^{n_{\text{coef}}-1} c_i p_i, (1-w) \sum_{i=1}^{n_{\text{coef}}-1} c_i p_i \rangle \\ &= \langle wS, wS \rangle + 2\langle wS, (1-w) \sum_{i=0}^{n_{\text{coef}}-1} c_i p_i \rangle + \sum_{i=0}^{n_{\text{coef}}-1} \sum_{j=1}^{n_{\text{coef}}-1} c_i c_j \langle (1-w)p_i, (1-w)p_j \rangle \\ &= \langle wS, wS \rangle + 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot (\mathbf{B}\mathbf{c}) \\ &=: E_2(\mathbf{c}), \end{aligned} \quad (2.21)$$

dove \mathbf{a} e \mathbf{B} sono definiti come in (2.17), nella Sezione 2.5.2.3 precedente.

Vogliamo che il polinomio interpoli un certo numero n_{interp} di punti sulla superficie di Catmull-Clark \mathbf{S} , tra i quali è incluso il vertice straordinario \mathbf{p}_{EV} . Avremo quindi n_{interp} condizioni del tipo

$$\mathbf{P}(s_l, t_l) = \mathbf{S}(s_l, t_l), \quad l = 0, \dots, n_{\text{interp}} - 1, \quad (2.22)$$

dove (s_l, t_l) sono le coordinate nel dominio K_n comune. Per la sola componente χ , queste condizioni si scrivono

$$\sum_{i=0}^{n_{\text{coef}}-1} c_i^{(\chi)} p_i(s_l, t_l) = S^{(\chi)}(s_l, t_l), \quad l = 0, \dots, n_{\text{interp}} - 1. \quad (2.23)$$

Tralasciando ancora l'indicazione della componente, esprimiamo le (2.23) in forma matriciale

$$\mathbf{L}\mathbf{c} = \mathbf{r}, \quad (2.24)$$

dove si è posto

$$\begin{aligned} L_{li} &:= p_i(s_l, t_l), \\ r_l &:= S(s_l, t_l). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Le quantità vettoriali coinvolte hanno le dimensioni seguenti:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &\in \mathbb{R}^{n_{\text{coef}}}, \\ \mathbf{a} &\in \mathbb{R}^{n_{\text{coef}}}, \\ \mathbf{B} &\in \mathbb{R}^{n_{\text{coef}} \times n_{\text{coef}}} \text{ (simmetrica)}, \\ \mathbf{L} &\in \mathbb{R}^{n_{\text{interp}} \times n_{\text{coef}}}, \\ \mathbf{r} &\in \mathbb{R}^{n_{\text{interp}}}. \end{aligned}$$

Il problema di minimizzazione diventa quindi

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n_{\text{coef}}}} E_2(\mathbf{c}), \\ \text{soggetto a } \mathbf{g}(\mathbf{c}) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

dove $\mathbf{g}(\mathbf{c}) := \mathbf{L}\mathbf{c} - \mathbf{r}$. Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per l'ottimizzazione vincolata, la risoluzione di (2.26) è equivalente alla risoluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} \nabla E_2(\mathbf{c}) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{c})\lambda = \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{c}) = \mathbf{0} \end{cases}, \quad (2.27)$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}^{n_{\text{interp}}}$ è il vettore di moltiplicatori. Calcolando i gradienti (derivando rispetto a \mathbf{c}), otteniamo $\nabla E_2(\mathbf{c}) = 2\mathbf{a} + 2\mathbf{B}\mathbf{c}$ e $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{c}) = \mathbf{L}^T$. Quindi (2.27) diventa

$$\begin{cases} 2\mathbf{B}\mathbf{c} + 2\mathbf{a} + \mathbf{L}^T\lambda = \mathbf{0} \\ \mathbf{L}\mathbf{c} - \mathbf{r} = \mathbf{0} \end{cases}, \quad (2.28)$$

cioè, scrivendo in forma matriciale e ripristinando la notazione iniziale,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{L}^T \\ \mathbf{L} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}^{(x)} \\ \frac{\lambda}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{a}^{(x)} \\ \mathbf{r}^{(x)} \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Si noti che la matrice del sistema (2.29) è quadrata con dimensione $n_{\text{coef}} + n_{\text{interp}}$. Risolvendo (2.29) e considerando i primi n_{coef} elementi del vettore soluzione, si trovano i coefficienti $\mathbf{c}^{(x)}$ di ciascuna componente $\mathbf{P}^{(x)}$.

2.5.2.5 Dettagli implementativi

Si noti che, come nel metodo proposto nella Sezione 2.5.1, i coefficienti del polinomio \mathbf{P} dipendono linearmente dalla superficie \mathbf{S} . Il computo degli integrali coinvolti può essere effettuato in fase di preprocessing, una volta per tutte, e quindi il costo effettivo è quello richiesto dalla risoluzione del sistema lineare (2.19) oppure (2.29) per ogni componente $\chi \in \{x, y, z\}$. In una implementazione intelligente, è sufficiente effettuare la fattorizzazione LU con pivoting parziale e perno massimo della matrice una sola volta, e quindi determinare le tre soluzioni $\tilde{\mathbf{c}}^{(x)}, \tilde{\mathbf{c}}^{(y)}, \tilde{\mathbf{c}}^{(z)}$ oppure $\mathbf{c}^{(x)}, \mathbf{c}^{(y)}, \mathbf{c}^{(z)}$ risolvendo le tre coppie di sistemi triangolari corrispondenti.

Nella nostra implementazione, abbiamo deciso di lavorare con polinomi di grado $d \leq 9$, quindi $n_{\text{coef}} \leq 55$.

Funzionale discreto. Se si usa il funzionale (2.15), ogni integrale che compare nel procedimento illustrato nella Sezione 2.5.2.3 è sostituito da una sommatoria. Nella fase di costruzione delle quantità coinvolte in (2.19) o (2.29), si aggiungono i contributi delle derivate seconde della superficie, della funzione peso e dei monomi base valutati nei punti di campionamento (s_k, t_k) scelti. La formula (2.15) prevede implicitamente che questi punti siano presi su una griglia uniforme nel dominio D_n . Un'altra possibilità può essere quella di considerare una griglia "adattiva", più densa vicino al vertice straordinario centrale o al bordo della regione di blending; in questi casi, è necessario correggere la (2.15) pesando ogni contributo in base all'area dell'elemento di dominio corrispondente.

Preprocessing. Alcune delle quantità che compaiono in (2.19) o (2.29) possono essere precalcolate. In particolare, dalle definizioni (2.17) è evidente che la matrice \mathbf{B} e il vettore \mathbf{b} non dipendono dai valori della superficie, ma solo dalla funzione peso w e dai monomi base p_i , cioè da quantità note. Pertanto gli elementi di \mathbf{B} e \mathbf{b} possono essere determinati una volta per tutte calcolando analiticamente⁴ gli integrali presenti in (2.17).

Il costo computazionale richiesto per la determinazione degli elementi dei vettori $\mathbf{a}^{(\chi)}$, $\chi \in \{x, y, z\}$, dipendenti dai valori della superficie \mathbf{S} , può essere ridotto nel modo seguente. Esprimiamo il valore della superficie intorno a un vertice straordinario di valenza n come combinazione delle $1 + 6n$ funzioni base:

$$\mathbf{S}(s, t) = \sum_{j=0}^{6n} \mathbf{v}_j \phi_j^{[n]}(s, t), \quad (2.30)$$

dove \mathbf{v}_j , $j = 0, \dots, 6n$, sono i vertici del 2-ring intorno al vertice straordinario considerato, ottenuti suddividendo localmente la mesh di partenza \mathcal{M}_0 una o due volte, a seconda che si usino le regioni di blending con raggio $r_n = \lambda_n$ o $r_n = \frac{1}{4}\lambda_n$. In virtù della (2.30) e sfruttando la linearità del prodotto interno, gli elementi di $\mathbf{a}^{(\chi)}$ si scrivono

$$a_i^{(\chi)} := \langle wS^{(\chi)}, (1-w)p_i \rangle = \langle w \sum_{j=0}^{6n} v_j^{(\chi)} \phi_j^{[n]}, (1-w)p_i \rangle = \sum_{j=1}^{6n} v_j^{(\chi)} I_{ji},$$

dove

$$\begin{aligned} I_{ji} &:= \langle w\phi_j^{[n]}, (1-w)p_i \rangle \\ &= \int_{D_n} \left((w\phi_j^{[n]})_{ss}((1-w)p_i)_{ss} + 2(w\phi_j^{[n]})_{st}((1-w)p_i)_{st} + (w\phi_j^{[n]})_{tt}((1-w)p_i)_{tt} \right) ds dt. \end{aligned} \quad (2.31)$$

In fase di preprocessing, \mathcal{M}_0 non è assegnata e quindi i \mathbf{v}_j non sono noti; invece è possibile precalcolare e salvare gli integrali I_{ji} relativi alle funzioni base. Al momento della determinazione dei coefficienti del polinomio \mathbf{P} , si procede alla suddivisione locale di \mathcal{M}_0 per ottenere i vertici \mathbf{v}_j , che sono combinati con gli integrali precalcolati, costruendo quindi i vettori $\mathbf{a}^{(x)}$, $\mathbf{a}^{(y)}$, $\mathbf{a}^{(z)}$ da utilizzare nei sistemi (2.19) o (2.29).

Si ricordi che questa procedura deve essere effettuata per ogni valenza n .

Cambiamento del dominio di integrazione. Per calcolare gli integrali (2.31) delle funzioni base, abbiamo sfruttato il fatto che $\phi_j^{[n]}(s, t) := \Phi_j^{(z)}(s, t)$, dove Φ_j è la superficie limite ottenuta a partire dalla mesh con vertici $\mathbf{c}_i =$

⁴Per questi calcoli ci siamo serviti del software Mathematica.

$(r_1^{(i)}, r_2^{(i)}, \delta_{ij})$, $i = 0, \dots, 6n$. Dato che Φ_j è una superficie di Catmull-Clark, abbiamo a disposizione il metodo di Stam per la valutazione. Tuttavia, l'algoritmo di Stam lavora su ciascuno degli n settori di Φ_j con i parametri $(u, v) \in Q_1$, mentre gli integrali (2.31) sono calcolati sul dominio $D_n \subset K_n$ nel piano (s, t) . Pertanto è necessario operare un cambio di variabile, considerando ciascuno dei parametri (s, t) come funzione di (u, v) , cioè

$$\begin{aligned} s &= s(u, v), \\ t &= t(u, v). \end{aligned}$$

In questo modo, indicando $\phi := \phi_j^{[n]}(s(u, v), t(u, v))$ e $p := p_i(s(u, v), t(u, v))$ per semplicità, le derivate seconde rispetto ai parametri s, t presenti nella funzione integranda si scrivono nel modo seguente:

$$\begin{aligned} (w\phi)_{ss} &= 2(\phi_u u_s + \phi_v v_s)(w_v v_s + u_s w_u) \\ &\quad + w(\phi_{vv} v_s^2 + 2u_s v_s \phi_{uv} + u_s^2 \phi_{uu} + \phi_u u_{ss} + \phi_v v_{ss}) \\ &\quad + \phi(w_{vv} v_s^2 + 2u_s v_s w_{uv} + w_u u_{ss} + w_v v_{ss} + u_s^2 w_{uu}), \\ (w\phi)_{st} &= (\phi_u u_s + \phi_v v_s)(v_t w_v + u_t w_u) + (\phi_v v_t + u_t \phi_u)(w_v v_s + u_s w_u) \\ &\quad + w(v_t(\phi_{vv} v_s + u_s \phi_{uv}) + \phi_u u_{st} + \phi_v v_{st} + u_t(v_s \phi_{uv} + u_s \phi_{uu})) \\ &\quad + \phi(w_u u_{st} + w_v v_{st} + v_s(v_t w_{vv} + u_t w_{uv}) + u_s(v_t w_{uv} + u_t w_{uu})), \\ (w\phi)_{tt} &\text{ ha una espressione analoga a } (w\phi)_{ss}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((1-w)p)_{ss} &= -2(p_u u_s + p_v v_s)(w_v v_s + u_s w_u) - (-1+w)(p_{vv} v_s^2 \\ &\quad + 2u_s v_s p_{uv} + u_s^2 p_{uu} + p_u u_{ss} + p_v v_{ss}) - p(w_{vv} v_s^2 \\ &\quad + 2u_s v_s w_{uv} + w_u u_{ss} + w_v v_{ss} + u_s^2 w_{uu}), \\ ((1-w)p)_{st} &= -((p_u u_s + p_v v_s)(v_t w_v + u_t w_u)) - (p_v v_t + u_t p_u)(w_v v_s + u_s w_u) \\ &\quad + (1-w)(v_t(p_{vv} v_s + u_s p_{uv}) + p_u u_{st} + p_v v_{st} + u_t(v_s p_{uv} + u_s p_{uu})) \\ &\quad + p(-(w_u u_{st}) - w_v v_{st} - v_s(v_t w_{vv} + u_t w_{uv}) - u_s(v_t w_{uv} + u_t w_{uu})), \\ ((1-w)p)_{tt} &\text{ ha una espressione analoga a } ((1-w)p)_{ss}, \end{aligned}$$

dove le derivate rispetto ai parametri u, v sono fornite dalla valutazione di Stam per s, t, ϕ (che sono le tre componenti della superficie Φ_j), mentre per la funzione peso w e il monomio p sono espresse mediante la regola della catena:

$$\begin{aligned} f_u &= t_u f_t + s_u f_s, \\ f_v &= t_v f_t + s_v f_s, \\ f_{uu} &= t_u(f_{tt} t_u + s_u f_{st}) + f_s s_{uu} + f_t t_{uu} + s_u(t_u f_{st} + s_u f_{ss}), \\ f_{uv} &= f_s s_{uv} + f_t t_{uv} + t_u(t_v f_{tt} + s_v f_{st}) + s_u(t_v f_{st} + s_v f_{ss}), \\ f_{vv} &= f_t t_{vv} + s_v v_{st} + t_v(t_v f_{tt} + s_v f_{st}) + s_v(t_v f_{st} + s_v f_{ss}). \end{aligned}$$

con $f = w, p$.

Le derivate prime e seconde dei parametri u, v rispetto ai parametri s, t sono determinate invertendo la parametrizzazione di Stam. Questa operazione è lecita perché la mappa caratteristica $\Psi := \Psi^{[n]} : (u, v) \mapsto (s, t)$, che esprime le prime due componenti $(\Phi_j^{(x)}, \Phi_j^{(y)}) = (s, t) = \Psi(u, v)$, è regolare iniettiva. In particolare, le derivate prime sono gli elementi della matrice Jacobiana di $\Psi^{-1} : (s, t) \mapsto (u, v)$, che grazie alla regolarità è l'inversa della matrice Jacobiana di Ψ , cioè:

$$\mathbf{J}_{\Psi^{-1}} = (\mathbf{J}_{\Psi})^{-1},$$

dove

$$\mathbf{J}_{\Psi} := \frac{\partial(s, t)}{\partial(u, v)}, \quad \mathbf{J}_{\Psi^{-1}} := \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)}.$$

Pertanto gli elementi di $\mathbf{J}_{\Psi^{-1}}$ sono

$$\begin{aligned} u_s &= \frac{1}{D} t_v, & u_t &= -\frac{1}{D} s_v, \\ v_s &= -\frac{1}{D} t_u, & v_t &= \frac{1}{D} s_u, \end{aligned}$$

dove $D := |\mathbf{J}_{\Psi}| = s_u t_v - s_v t_u$. Le derivate seconde sono

$$u_{ss} = -\frac{D_s}{D^2} t_v + \frac{1}{D} (t_{uv} u_s + t_{vv} v_s),$$

$$u_{tt} = \frac{D_t}{D^2} s_v - \frac{1}{D} (s_{uv} u_t + s_{vv} v_t),$$

$$u_{st} = \frac{D_s}{D^2} s_v - \frac{1}{D} (s_{uv} u_s + s_{vv} v_s),$$

$$v_{ss} = \frac{D_s}{D^2} t_u - \frac{1}{D} (t_{uu} u_s + t_{uv} v_s),$$

$$v_{tt} = -\frac{D_t}{D^2} s_u + \frac{1}{D} (s_{uu} u_t + s_{uv} v_t),$$

$$v_{st} = -\frac{D_s}{D^2} s_u + \frac{1}{D} (s_{uu} u_s + s_{uv} v_s),$$

dove si è posto

$$D_s := -(t_{uu} u_s + t_{uv} v_s) s_v - t_u (s_{uv} u_s + s_{vv} v_s) + (s_{uu} u_s + s_{uv} v_s) t_v + s_u (t_{uv} u_s + t_{vv} v_s),$$

$$D_t := -(t_{uu} u_t + t_{uv} v_t) s_v - t_u (s_{uv} u_t + s_{vv} v_t) + (s_{uu} u_t + s_{uv} v_t) t_v + s_u (t_{uv} u_t + t_{vv} v_t).$$

Per tenere conto del cambiamento di variabile effettuato, è necessario moltiplicare la funzione integranda per il determinante Jacobiano D . Pertanto ciascun integrale della forma (2.31) è calcolato come somma di integrali sui settori dati da Ψ_k , $k = 0, \dots, n-1$ intorno al vertice straordinario:

$$\begin{aligned} I_{ji} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{Q_1} D \left((w\phi_j^{[n]})_{ss} ((1-w)p_i)_{ss} + 2(w\phi_j^{[n]})_{st} ((1-w)p_i)_{st} \right. \\ \left. + (w\phi_j^{[n]})_{tt} ((1-w)p_i)_{tt} \right) du dv, \end{aligned} \quad (2.32)$$

dove $\phi_j^{[n]}$ è la componente z del patch k -esimo della superficie Φ_j , e le varie quantità presenti nell'espressione sono computate utilizzando le formule precedenti.

Integrazione numerica. Abbiamo integrato numericamente (2.32), utilizzando le formule di quadratura di Gauss-Legendre sul quadrato $Q_1 := [0, 1] \times [0, 1]$. Una griglia di 100 nodi in ciascuna dimensione ha permesso di raggiungere la precisione sufficiente per ottenere, alla fine del processo, un polinomio ottimale \mathbf{P} privo di artefatti. Il numero totale di punti è piuttosto elevato, e in corrispondenza di ciascuno di essi deve essere valutata la funzione integranda, computando le varie quantità con l'algoritmo di Stam e le formule precedenti. Tuttavia, poiché questa operazione onerosa avviene in fase di preprocessing, essa non comporta un costo nell'algoritmo per la determinazione dei coefficienti del polinomio: gli integrali I_{ji} sono calcolati una volta per tutte e i loro valori sono salvati, pronti per essere utilizzati al momento della costruzione dei vettori $\mathbf{a}^{(x)}$.

Osservazione 4. In un primo momento, il problema dell'integrazione numerica di (2.32) era stato affrontato implementando il metodo di Simpson adattivo bidimensionale. Questo approccio è stato abbandonato, in favore del più usuale metodo di Gauss-Legendre, a causa di un comportamento patologico dovuto all'andamento fortemente oscillante della funzione integranda.

2.5.2.6 Analisi dei risultati

In Figura 2.12 sono mostrati i polinomi ottenuti al variare del grado $d = 3, 5, 7, 9$, e la curvatura media delle superfici blending corrispondenti. Osserviamo che i polinomi di grado 3 e 5 danno buoni risultati, con caratteristiche comparabili. Invece per gradi più elevati il polinomio tende ad appiattirsi vicino al vertice straordinario e a presentare oscillazioni sul bordo della regione di blending, discostandosi sensibilmente dalla superficie di Catmull-Clark originale: questo comportamento produce evidenti artefatti nella curvatura della superficie blending.

La Figura 2.13 mette a confronto i polinomi ottimali di grado 3 ottenuti con il funzionale continuo (2.14) e con la sua controparte discreta (2.15). Se il numero n_p di punti di campionamento per il funzionale discreto è abbastanza elevato, i polinomi esibiscono un comportamento simile, quindi entrambe le versioni possono essere usate nel procedimento. Un motivo per preferire quella continua è dato dal vantaggio di poter precalcolare i $(1+6n)n_{\text{coef}}$ integrali delle funzioni base. Volendo usare lo stesso approccio con la versione discreta, in fase di preprocessing si può valutare ognuna delle $1+6n$ funzioni base negli n_p punti di campionamento scelti; tuttavia ciò si traduce in una quantità maggiore di informazioni da salvare rispetto al caso continuo, e soprattutto in una scarsa

flessibilità qualora si voglia cambiare il numero o la disposizione dei punti di campionamento.

A causa del comportamento indesiderato della superficie che si ottiene utilizzando le funzioni peso w_7, w_9 , discusso nella Sezione 2.5.1.3, abbiamo sperimentato il blending con il polinomio ottimale solo per le funzioni w_L, w_5 . Con la funzione w_L si ottengono buoni risultati, mentre w_5 produce artefatti nella curvatura della superficie, dovuti all'eccessiva oscillazione delle derivate seconde nella regione anulare di blending (Figura 2.14).

Per concludere, riportiamo nella Figura 2.15 un confronto tra le superfici finali ottenute in corrispondenza delle due possibili scelte per la grandezza delle regioni di blending. Nel caso di zone larghe, cioè con raggio $r_n = \lambda_n$, la distanza tra il polinomio \mathbf{P} e superficie di Catmull-Clark originale \mathbf{S} cresce all'aumentare della distanza dal vertice straordinario, determinando un "gradino" sul bordo della zona di blending che si traduce in una oscillazione del valore di curvatura della superficie finale \mathbf{S}^* . Invece nel caso di regioni con raggio $r_n = \frac{1}{4}\lambda_n$, si ottengono ottimi risultati in corrispondenza di polinomi di qualsiasi grado $d = 3, 5, 7, 9$, in quanto \mathbf{P} approssima bene la superficie \mathbf{S} sulla piccola zona di blending.

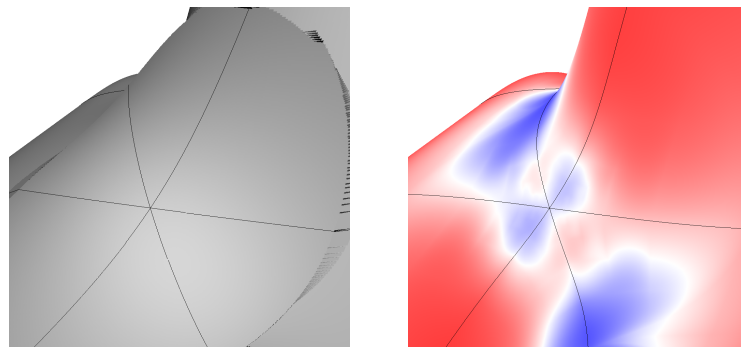
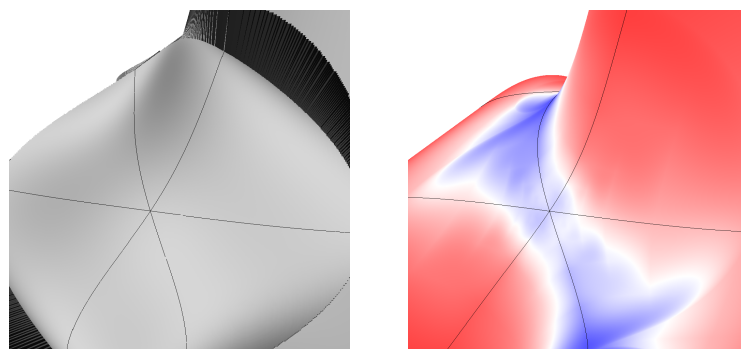
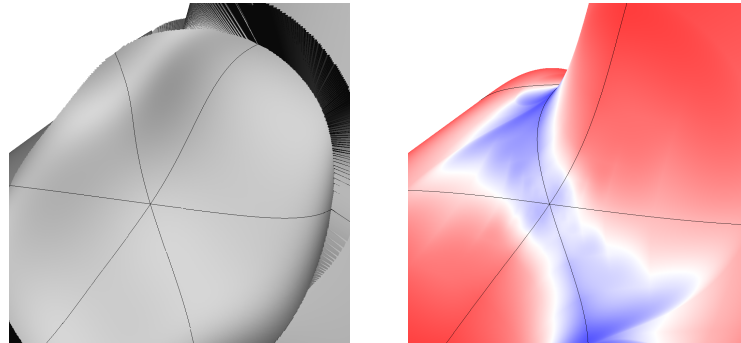
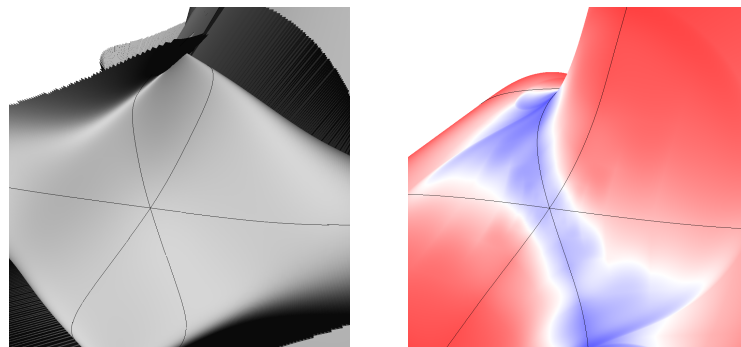
(a) $d = 3$ (b) $d = 5$ (c) $d = 7$ (d) $d = 9$

Figura 2.12: Polinomio ottimale \mathbf{P} e curvatura media della superficie blending \mathbf{S}^* , al variare del grado d di \mathbf{P} .

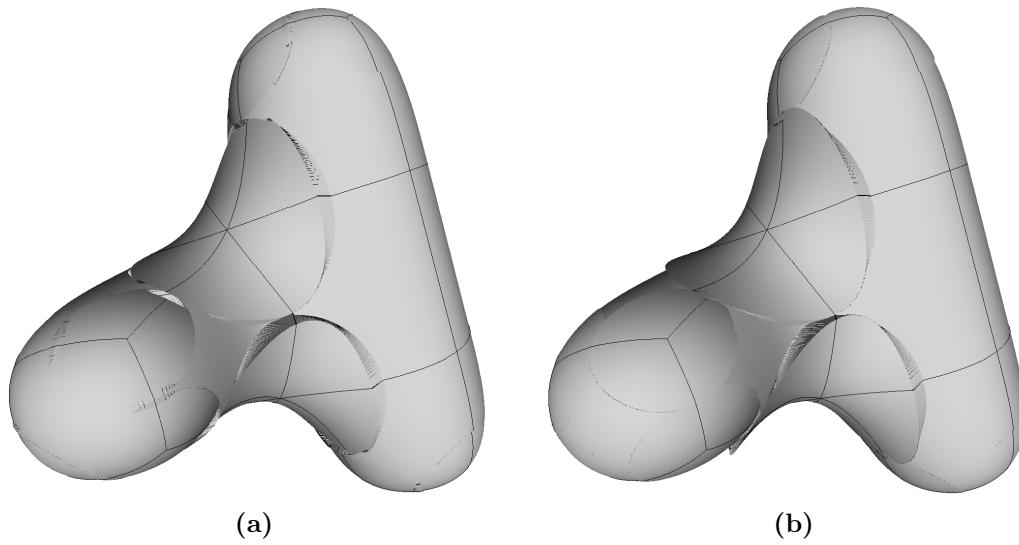


Figura 2.13: Confronto tra i polinomi ottenuti minimizzando (a) il funzionale continuo e (b) quello discreto (calcolato valutando la funzione integranda in $n_p = 5dn$ punti).

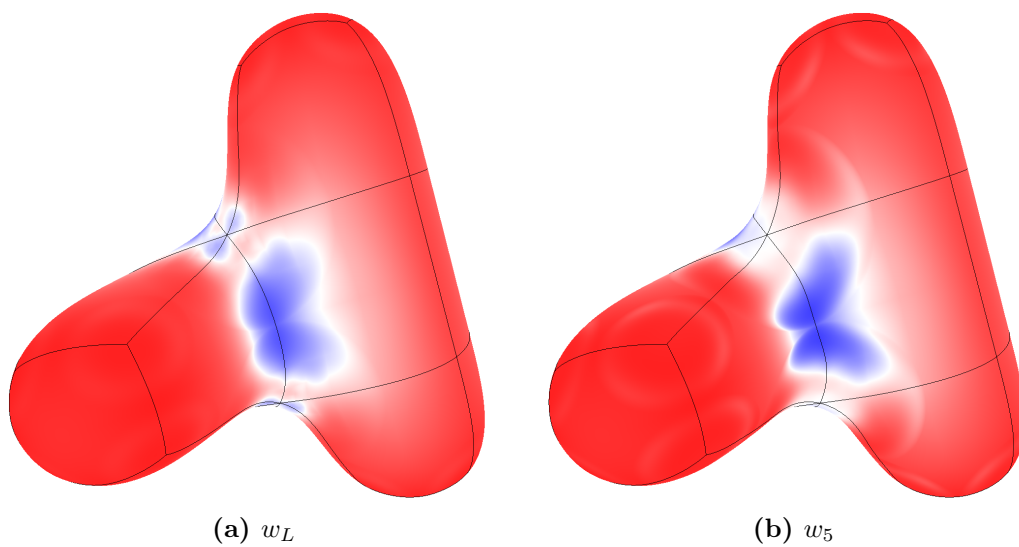


Figura 2.14: Curvatura media della superficie blending ottenuta con il polinomio ottimale, al variare della funzione peso.

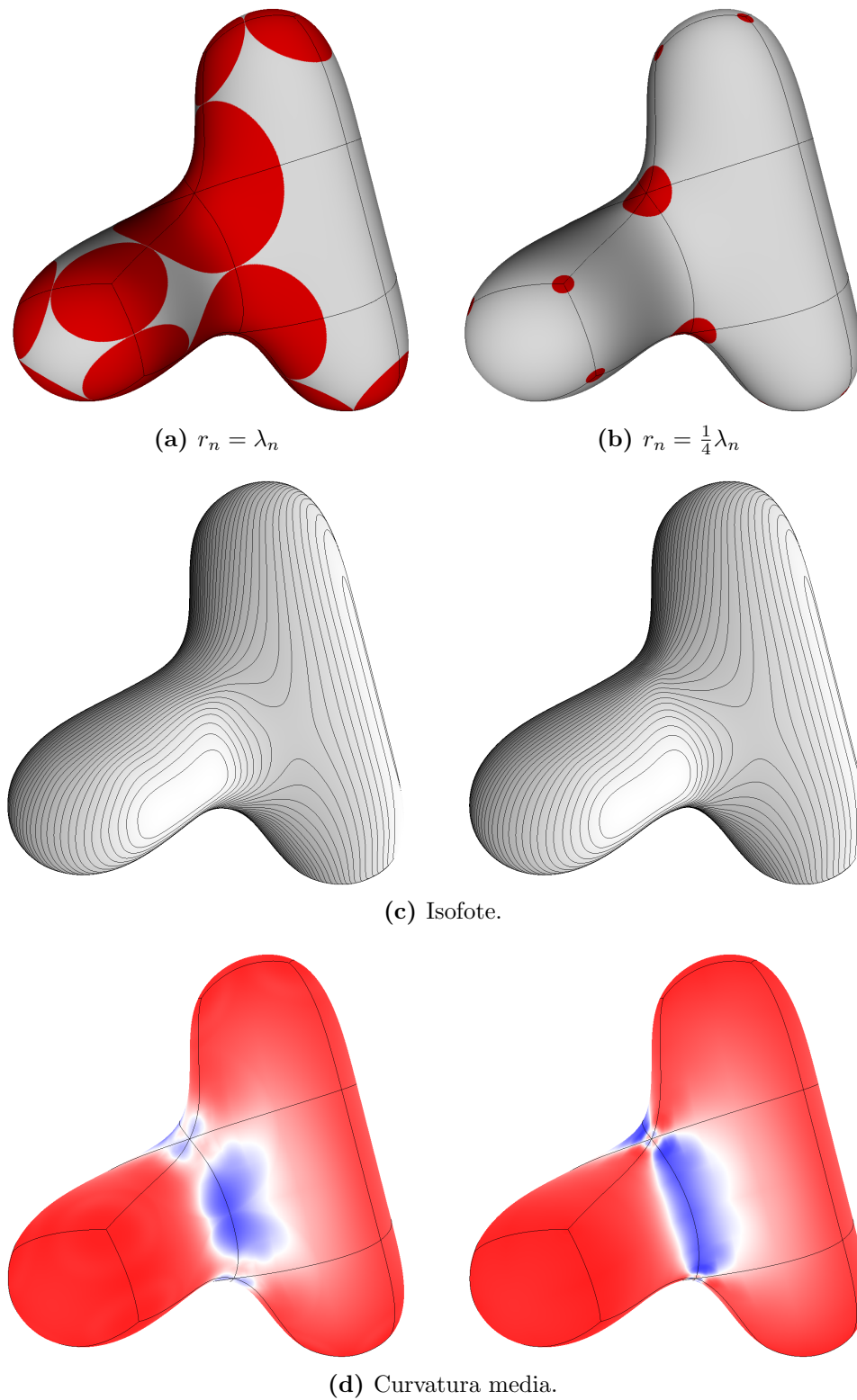


Figura 2.15: Blending polinomiale, con polinomio ottimale. Confronto tra le superfici ottenute in corrispondenza di regioni di blending larghe (a sinistra) e piccole (a destra).

2.5.3 Confronto dei metodi e conclusioni

Confrontando i risultati ottenuti in corrispondenza delle due diverse possibilità per la definizione del polinomio \mathbf{P} , concludiamo che, rispetto al caso dei minimi quadrati, la combinazione di blending e fairing mediante minimizzazione di un funzionale di tipo energia non ha mostrato vantaggi significativi. Sebbene l'approccio che utilizza l'ottimizzazione sia stato introdotto proprio per cercare una migliore approssimazione della superficie di Catmull-Clark, anche permettendo l'aumento del grado del polinomio \mathbf{P} , dai nostri test sembra che ciò non avvenga nella misura auspicata: al crescere del grado, il polinomio tende a discostarsi sensibilmente dalla superficie originale in corrispondenza del bordo delle regioni di blending, introducendo artefatti nella curvatura della superficie finale. Inoltre, il costo computazionale per determinare i coefficienti del polinomio ottimale è maggiore rispetto al caso dei minimi quadrati. Infatti, mentre il sistema (2.19) può essere risolto soltanto dopo il caricamento di una specifica mesh, i coefficienti del polinomio di approssimazione ai minimi quadrati sono determinati con la (2.8), dove i γ_k sono stati precalcolati e salvati, come visto nella sezione 2.5.1.1: in questo caso, invece della risoluzione di un sistema lineare, è sufficiente effettuare una semplice combinazione lineare con coefficienti già noti.

Tuttavia, non si deve pensare che le problematiche evidenziate possano precludere l'utilizzo in contesto CAD delle superfici definite secondo i metodi proposti. Infatti, le caratteristiche di regolarità e qualità delle superfici blending ottenute con il polinomio di approssimazione ai minimi quadrati si sono dimostrate sufficienti per l'integrazione nell'ultima release del sistema CAD ThinkDesign.

Concludiamo elencando i principali pregi e alcuni inconvenienti del metodo di blending proposto da Levin e da noi rielaborato. Si noti che alcuni punti sono relativi a caratteristiche intrinseche del metodo di blending, mentre altri sono legati alle nostre scelte implementative.

Vantaggi.

1. La modifica della superficie di Catmull-Clark coinvolge solo i patch aventi almeno un vertice straordinario.
2. Le regioni soggette al blending, e quindi "non ordinarie", non sono eccessivamente estese.
3. Il framework può gestire patch aventi più di un vertice straordinario, senza richiedere passi di suddivisione per isolarli.

4. A differenza di altre proposte in letteratura [PU98], il valore della curvatura nei vertici straordinari non è necessariamente zero.
5. L'algoritmo può essere integrato semplicemente in un pre-esistente codice per la suddivisione di Catmull-Clark (come è avvenuto nella nostra implementazione).
6. Il costo computazionale è ridotto grazie al fatto che gran parte delle informazioni necessarie per la costruzione del polinomio sono elaborate in fase di precalcolo.
7. Il metodo presenta una grande flessibilità, permettendo la possibilità di scegliere funzioni peso diverse, di variare il numero dei punti di campionamento per l'approssimazione ai minimi quadrati, e di modificare facilmente il grado e i punti di interpolazione per il polinomio definito attraverso la minimizzazione del funzionale di fairing.
8. Concettualmente, la tecnica del blending può essere applicata anche ad altri tipi di superfici di suddivisione, e la flessibilità del metodo rende auspicabile la sua generalizzazione a superfici di diversa natura.

Svantaggi.

1. Non è più garantita la proprietà del guscio convesso per la superficie modificata, sebbene nella maggior parte dei casi gli artefatti causati dal blending sotto questo aspetto sono trascurabili.
2. Il blending à la Levin non è in grado di risolvere in maniera esaustiva i problemi di forma, intrinseci allo schema di Catmull-Clark, che spesso affliggono la superficie intorno a vertici straordinari di valenza elevata.
3. Nonostante la superficie blending sia effettivamente C^2 nei vertici straordinari, la scelta della mappa caratteristica (che è anch'essa una superficie di suddivisione) come dominio comune su cui parametrizzare la superficie e il polinomio ci costringe a utilizzare l'algoritmo di Stam per la valutazione, che comporta non banali difficoltà di gestione e calcolo delle derivate prime e seconde intorno ai vertici straordinari (come evidenziato nella Sezione 1.6). Una possibile soluzione a questa problematica consiste nella ricerca di un dominio alternativo alla mappa caratteristica e non afflitto da tali inconvenienti.
4. La sperimentazione effettuata ha messo in evidenza delle criticità intrinseche all'idea del blending. In particolare, abbiamo rilevato degli artefatti che affliggono il valore di curvatura attraverso il bordo delle regioni di blending (visibili nelle Figure 2.11 e 2.14), non evidenziati da Levin nel suo lavoro.

Capitolo 3

Approssimazione di superfici di suddivisione mediante patching locale

In questo capitolo si affronta il problema del miglioramento della superficie di suddivisione di Catmull-Clark intorno ai vertici straordinari seguendo un approccio differente dal blending polinomiale discusso nel Capitolo 2. Invece di *miscelare* opportunamente la superficie originale con una superficie approssimante in modo da eliminarne le singolarità e migliorarne la qualità, qui si discute la possibilità di *sostituire* localmente la superficie originale con una superficie appositamente costruita e avente le caratteristiche di continuità desiderate. Questo approccio prende il nome di *patching*, in quanto si “ritaglia” una zona dalla superficie originale \mathbf{S} e si riempie questo “buco” costruendo una nuova superficie $\tilde{\mathbf{S}}$ con le proprietà di regolarità ricercate sia nell’intorno del vertice straordinario che lungo il raccordo con la superficie originale. La superficie finale è definita come

$$\mathbf{S}^* := \begin{cases} \tilde{\mathbf{S}} & \text{nelle zone non regolari,} \\ \mathbf{S} & \text{nelle zone regolari (non modificate).} \end{cases}$$

Nel caso di superfici parametriche, la regione modificata può corrispondere a un complesso di patch o di sotto-patch. In particolare, per gli scopi di questo elaborato, siamo interessati a sostituire gli n patch di superficie di Catmull-Clark aventi un vertice straordinario¹ in comune. Pertanto è necessario definire una nuova superficie $\tilde{\mathbf{S}}$ che occupi la regione a $2n$ lati lasciata libera dal complesso di n patch quadrangolari adiacenti disposti a cerchio (o

¹Ricordiamo che nello schema di suddivisione di Catmull-Clark, sono detti *straordinari* i vertici interni alla mesh aventi valenza $n \neq 4$, e i vertici sul bordo della mesh (aperta) aventi valenza $n \neq 3$.

a ventaglio, nel caso di superfici aperte). Una regione siffatta è genericamente chiamata *n-sided hole* (buco a n lati) e il problema della costruzione della superficie \hat{S} è detto *n-sided hole filling*.

3.1 Overview dei metodi per *n-sided hole filling*

Si possono distinguere due filosofie principali nell'approccio al problema del *n-sided hole filling*:

1. si definisce un unico patch di superficie che ricopre l'intero buco a n lati, e che è generalmente ottenuto come somma di sotto-superfici, ciascuna delle quali interpola parzialmente i dati del bordo del *n-sided hole*; nei casi semplici ($n = 3, 4$) è possibile esprimere direttamente la superficie come combinazione di control point e funzioni peso (utilizzando, ad esempio, patch di Bézier o B-spline);
2. il buco viene riempito utilizzando n patch di superficie triangolari o quadrangolari, raccordati opportunamente per ottenere la regolarità desiderata.

Si faccia riferimento a [Vár87] per una trattazione più estesa dell'argomento.

Nell'ambito del progetto di tesi, sono state studiate e sperimentate due diverse tecniche per il patching. La prima (discussa nella Sezione 3.2) propone la costruzione della superficie a n lati come risultato del blending di n sotto-patch parzialmente sovrapposti, ciascuno dei quali interpola i dati assegnati nei vertici; il metodo appartiene pertanto alla prima categoria sopra elencata. Il secondo approccio (discusso nella Sezione 3.3) prevede la suddivisione del dominio su cui è parametrizzata la regione da sostituire in sotto-domini quadrangolari e la costruzione di n patch raccordati opportunamente secondo i vincoli di continuità richiesti; questa tecnica appartiene pertanto alla seconda categoria.

3.2 Patching con overlap patch di Várady

3.2.1 Overview

Un classico problema di interpolazione è costituito dalla costruzione di una superficie (solitamente definita a tratti) che interpoli un *network di curve* assegnato; tali curve descrivono la forma della superficie nel senso che forniscono una "intelaiatura" sulla quale devono essere costruiti i patch di superficie. Più formalmente, le curve assegnate e i loro punti di intersezione (detti *nodi* della

rete) impongono delle condizioni di interpolazione che devono essere rispettate nella definizione dei patch di superficie: poiché le curve devono costituire i bordi dei patch, risultano assegnati dei vincoli posizionali, tangenziali ed eventualmente sulle derivate di ordine superiore al primo. Inoltre è normalmente richiesto un certo ordine di continuità tra i patch adiacenti (continuità inter-patch), che si traduce in condizioni sulle derivate trasversali rispetto alla curva di bordo comune a ogni coppia di patch.

In [Vár87] e [Vár91], Várady propone uno schema generale per definire patch a $m \geq 3$ lati, detti *overlap patch*, per l'interpolazione di un network di curve bicubiche con topologia di tipo patch facing patch² (Figura 3.1). Ogni overlap patch è costituito da un opportuno blending di m *vertex patch*, ciascuno interpolante i dati (posizione, vettori tangenti, vettore twist) relativi a un vertice della regione a m lati definita dai segmenti delle curve.

Prima di presentare la definizione formale (Sezione 3.2.2) e le proprietà di continuità (Sezione 3.2.3) degli overlap patch, elenchiamo brevemente le caratteristiche principali di questa tecnica.

1. Si tratta di uno schema generale, in quanto definito per ogni $m \geq 3$;
2. definisce patch polinomiali bicubici;
3. garantisce la continuità visiva³ VC^1 tra coppie di overlap patch e tra un overlap patch e un usuale patch spline bicubico;
4. presenta un grado di libertà aggiuntivo che consente di regolare il punto centrale (midpoint) del patch per modificare la forma della superficie;
5. prevede una versione modificata per gestire casi non regolari (nel senso della Definizione 3.3).

Nel caso di nostro interesse, un overlap patch a $m = 2n$ lati è utilizzato per sostituire gli n patch quadrangolari incidenti in un vertice straordinario interno, e i dati da interpolare sono estratti dalla superficie limite mediante la valutazione della posizione \mathbf{S} , dei vettori tangenti $\mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v$ e del vettore twist \mathbf{S}_{uv} nei vertici dei patch coinvolti.

3.2.2 Costruzione dell'overlap patch

Per definire un overlap patch di Várady bicubico a m lati, è necessario fornire i vertici \mathbf{p}_i , $i = 0, \dots, m - 1$ del patch, e in ogni vertice devono essere assegnati i vettori tangenti lungo il bordo sinistro \mathbf{l}_i e destro \mathbf{r}_i e il vettore twist \mathbf{t}_i (Figura 3.2): rispettivamente, questi dati determinano il valore della superficie risultante, le derivate prime lungo le due direzioni parametriche e la derivata seconda mista.

²Network di curve con topologia *patch facing patch* (PFP): ogni segmento di curva (compreso tra due nodi della rete) è comune esattamente a due patch, e l'intero segmento appartiene solo a questi due patch.

³Si veda l'Appendice A, Definizione A.18.

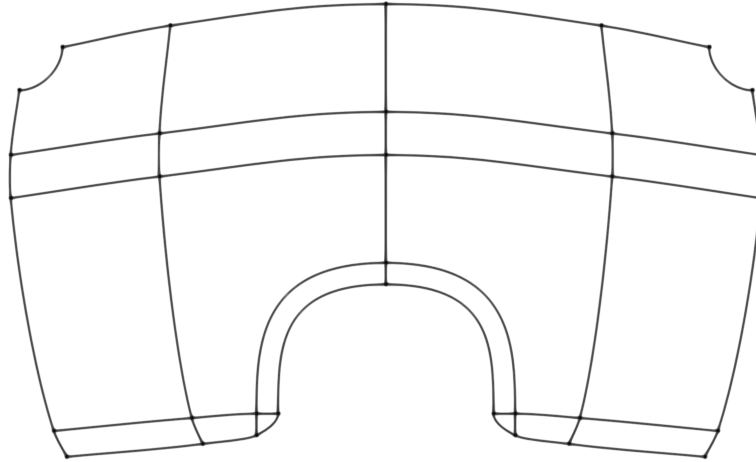


Figura 3.1: Esempio di network di curve con topologia PFP.

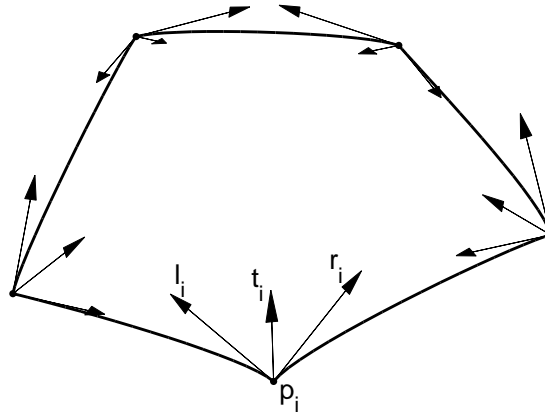


Figura 3.2: Dati da assegnare per la costruzione di un overlap patch di Várady a m lati: vertici \mathbf{p}_i , vettori tangenti sinistro \mathbf{l}_i e destro \mathbf{r}_i , vettore twist \mathbf{t}_i , per $i = 0, \dots, m - 1$.

Sia $D_m \subset \mathbb{R}^2$ un poligono regolare a m lati di lunghezza unitaria, centrato nell'origine, e di vertici (numerati in senso antiorario)

$$\mathbf{d}_i := d_m \left(\cos \left(\frac{2\pi}{m} i \right), \sin \left(\frac{2\pi}{m} i \right) \right) \in \mathbb{R}^2, \quad i = 0, \dots, m - 1,$$

dove $d_m := \frac{1}{2 \cos \left(\left(1 - \frac{2}{m}\right) \frac{\pi}{2} \right)}$. D_m funge da dominio parametrico per l'overlap patch $\mathbf{O} = \mathbf{O}(u, v)$ con $(u, v) \in D_m$.

L'overlap patch è definito come la somma

$$\mathbf{O}(u, v) := \mathbf{q} + \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{V}_i(u_i, v_i) \quad (3.1)$$

di m vertex patch $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_i(u_i, v_i)$, dati dalla formula

$$\mathbf{V}_i(u_i, v_i) := (\mathbf{p}_i - \mathbf{q})f_0(u_i)f_0(v_i) + \mathbf{r}_i g_0(u_i)f_0(v_i) + \mathbf{l}_i f_0(u_i)g_0(v_i) + \mathbf{t}_i g_0(u_i)g_0(v_i), \quad (3.2)$$

dove f_0, g_0 sono due delle funzioni base di Hermite cubiche, cioè:

$$\begin{aligned} f_0(t) &:= 2t^3 - 3t^2 + 1 &= (1 + 2t)(1 - t)^2 &= B_0^3(t) + B_1^3(t), \\ f_1(t) &:= -2t^3 + 3t^2 &= t^2(3 - 2t) &= B_2^3(t) + B_3^3(t), \\ g_0(t) &:= t^3 - 2t^2 + t &= t(1 - t)^2 &= \frac{1}{3}B_1^3(t), \\ g_1(t) &:= t^3 - t^2 &= t^2(t - 1) &= -\frac{1}{3}B_2^3(t), \end{aligned}$$

con $t \in [0, 1]$, rappresentate nella Figura 3.3. Poniamo $f(t) = 0$, $f \in \{f_0, f_1, g_0, g_1\}$ se $t \notin [0, 1]$. Si noti, dall'ultima colonna di uguaglianze, che le funzioni base di Hermite possono essere espresse in funzione dei polinomi di Bernstein⁴ di grado 3.

Alle quantità \mathbf{V}_i e \mathbf{q} sono dedicate le prossime Sezioni 3.2.2.1 e 3.2.2.2 rispettivamente, nelle quali adottiamo la convenzione di considerare gli indici modulo m quando essi sono coinvolti in operazioni, per esempio $i + 1 := (i + 1) \bmod m$ per $i = 0, \dots, m - 1$.

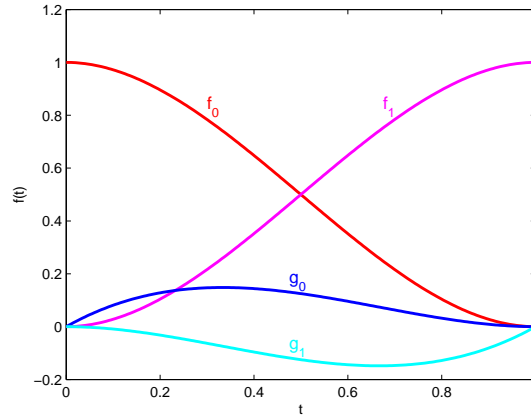


Figura 3.3: Funzioni base di Hermite cubiche, sull'intervallo $[0, 1]$.

3.2.2.1 Vertex patch

Per ogni vertex patch \mathbf{V}_i è introdotta nel dominio D_m una coppia di coordinate locali (u_i, v_i) definite sul quadrato unitario, centrate nel vertice \mathbf{d}_i coinvolto e con gli assi parametrici disposti lungo i due lati aventi quel vertice in comune. La relazione tra i parametri globali $(u, v) \in D_m$ e quelli locali $(u_i, v_i) \in Q_1$ è data dal cosiddetto *domain mapping* $\mathbf{P}_i^{-1} : (u, v) \mapsto (u_i, v_i)$. Noti i parametri locali (u_i, v_i) , è possibile determinare il valore vettoriale dell' i -esimo vertex

⁴Polinomi di Bernstein di grado d : $B_i^d(t) := \binom{d}{i} t^i (1 - t)^{d-i}$ con $i = 0, \dots, d$ e $t \in [0, 1]$.

patch \mathbf{V}_i (mediante l'espressione (3.2), detta *mapping 3D*), e infine costruire l'overlap patch \mathbf{O} sommando i contributi dei singoli vertex patch.

La scelta del domain mapping costituisce la parte centrale nella definizione del vertex patch; prima di procedere in questo senso, riportiamo alcune proprietà e requisiti che un vertex patch deve soddisfare.

Proprietà.

1. I vertici \mathbf{d}_i del poligono D_m sono mappati mediante i vertex patch nei punti assegnati \mathbf{p}_i , e i lati del poligono sono mappati nelle curve di bordo (cubiche) del patch, definite dai dati $\mathbf{p}_i, \mathbf{l}_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{t}_i$, per $i = 0, \dots, m - 1$.
2. Un vertex patch è un patch continuo e differenziabile, in virtù delle funzioni blending polinomiali f_0, g_0 .

Requisiti.

1. In un vertice \mathbf{p}_i soltanto il vertex patch corrispondente \mathbf{V}_i deve dare contributo nella (3.1). L'effetto di tale contributo deve decrescere gradualmente lungo le curve di bordo uscenti da \mathbf{p}_i e diventare nullo nei vertici adiacenti $\mathbf{p}_{i+1}, \mathbf{p}_{i-1}$.
2. Lungo una curva di bordo devono combinarsi solamente due vertex patch aventi influenza non nulla.
3. La regione parametrica su cui è definito un vertex patch, cioè l'immagine di Q_1 mediante $\mathbf{P}_i : (u_i, v_i) \mapsto (u, v)$, deve giacere all'interno del poligono D_m .
4. Ogni punto interno a D_m deve essere ricoperto da almeno due regioni parametriche di vertex patch, per evitare discontinuità.
5. La sovrapposizione dei vertex patch deve dare luogo a un overlap patch che soddisfa le condizioni al bordo assegnate e il cui interno è almeno G^1 (continuità del piano tangente). Inoltre la forma dell'overlap patch deve essere indipendente dalla sua posizione, cioè deve essere invariante rispetto a trasformazioni affini.

Definizione del domain mapping. Un vertex patch \mathbf{V}_i è definito dal mapping $\mathbf{P}_i^{-1} : D_m \rightarrow Q_1$ che a ogni punto (u, v) del dominio poligonale associa un valore delle coordinate locali (u_i, v_i) . In [Vár91] sono proposte tre diverse possibilità per la scelta di \mathbf{P}_i^{-1} . Tra queste, abbiamo optato per quella facilmente generalizzabile a casi in cui si richiede una continuità maggiore e si lavora con curve di grado più elevato (ad esempio, continuità G^2 e grado 5);

ne presentiamo qui i dettagli. I risultati discussi nella Sezione 3.2.5 sono stati ottenuti implementando questa scelta.

Invece del mapping $(u_i, v_i) = \mathbf{P}_i^{-1}(u, v)$, è più semplice definire la parametrizzazione $(u, v) = \mathbf{P}_i(u_i, v_i)$. La nostra scelta consiste nell'adottare una parametrizzazione biquadratica, data da un patch di Bézier 2D prodotto tensoriale di grado $(2, 2)$ con punti di controllo definiti opportunamente. Denotiamo tale patch con \mathbf{P}_i e i suoi 9 control point con $\mathbf{b}_{jk}^i \in \mathbb{R}^2$, $j, k = 0, \dots, 2$. In virtù della simmetria ciclica del poligono D_m , ogni patch \mathbf{P}_i , $i = 0 \dots, m-1$, e quindi ogni mapping tra parametri locali e globali, è espresso da:

$$\begin{aligned} (u, v) = \mathbf{P}_i(u_i, v_i) &:= \sum_{j=0}^2 \sum_{k=0}^2 \mathbf{b}_{jk}^i B_j^2(u_i) B_k^2(v_i) \\ &= \begin{pmatrix} (1-u_i)^2 & 2u_i(1-u_i) & u_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{00}^i & \mathbf{b}_{01}^i & \mathbf{b}_{02}^i \\ \mathbf{b}_{10}^i & \mathbf{b}_{11}^i & \mathbf{b}_{12}^i \\ \mathbf{b}_{20}^i & \mathbf{b}_{21}^i & \mathbf{b}_{22}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-v_i)^2 \\ 2v_i(1-v_i) \\ v_i^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{00}^i &= \mathbf{d}_i, \\ \mathbf{b}_{01}^i &= \frac{\mathbf{d}_{i-1} + \mathbf{d}_i}{2}, \\ \mathbf{b}_{02}^i &= \mathbf{d}_{i-1}, \\ \\ \mathbf{b}_{10}^i &= \frac{\mathbf{d}_i + \mathbf{d}_{i+1}}{2}, \\ \mathbf{b}_{11}^i &= \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{d}_i, \\ \mathbf{b}_{12}^i &= \frac{\mathbf{d}_{i-2} + \mathbf{d}_{i-1}}{2}, \\ \\ \mathbf{b}_{20}^i &= \mathbf{d}_{i+1}, \\ \mathbf{b}_{21}^i &= \frac{\mathbf{d}_{i+1} + \mathbf{d}_{i+2}}{2}, \\ \mathbf{b}_{22}^i &= \frac{\mathbf{d}_{i+\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} + \mathbf{d}_{i-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}}{2}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

come mostrato nella Figura 3.4.

Come risulta evidente dalla definizione (3.4) dei punti di controllo \mathbf{b}_{jk}^i e dalla proprietà del guscio convesso⁵ dei patch di Bézier, la regione parametrica su cui è definito un vertex patch ricopre solo parzialmente il poligono D_m ; comunque l'unione di tutte le regioni parametriche fornisce un ricoprimento di D_m almeno 2-fold (cioè almeno due regioni si sovrappongono) in ogni punto, come richiesto dal requisito 4.

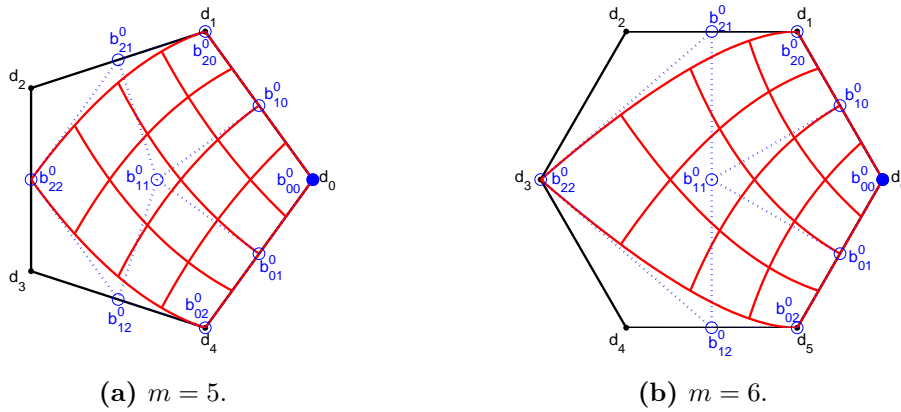


Figura 3.4: Parametrizzazione biquadratica mediante patch di Bézier 2D. Le linee isoparametriche sono parabole, come è noto.

3.2.2.2 Origine e punto centrale dell'overlap patch

Il parametro vettoriale \mathbf{q} , chiamato *origine* dell'overlap patch, è introdotto per assicurare l'invarianza rispetto a trasformazioni affini. Esso fornisce un grado di libertà aggiuntivo per il controllo della forma dell'interno del patch, indipendentemente dai dati che definiscono il bordo.

In particolare, mediante la definizione opportuna di \mathbf{q} , è possibile imporre una condizione di interpolazione per il *punto centrale* $\mathbf{p}_M := \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{p}_i$ del patch \mathbf{O} .

Per la simmetria della configurazione dei vertex patch, l'origine $(0, 0) \in D_m$ del dominio poligonale corrisponde nelle coordinate locali (u_i, v_i) di ogni vertex patch allo stesso valore (u_0, v_0) , cioè $\mathbf{V}_i(u_0, v_0) = (0, 0) \forall i = 0, \dots, m-1$. Dalle definizioni di overlap patch (3.1) e vertex patch (3.2), il punto centrale risulta

⁵Un patch di Bézier prodotto tensoriale $\mathbf{B}(u, v) := \sum_{i=0}^{d_1} \sum_{j=0}^{d_2} \mathbf{b}_{ij} B_i^{d_1}(u) B_j^{d_2}(v)$ gode della proprietà del *guscio convesso* nel senso che $\forall (u, v) \in Q_1$ $\mathbf{B}(u, v)$ è interamente contenuto nel poliedro convesso formato dai punti di controllo \mathbf{b}_{ij} .

essere

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_M &= \mathbf{q} + \sum_{i=0}^{m-1} \left((\mathbf{p}_i - \mathbf{q})f_0(u_0)f_0(v_0) + \mathbf{r}_i g_0(u_0)f_0(v_0) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{l}_i f_0(u_0)g_0(v_0) + \mathbf{t}_i g_0(u_0)g_0(v_0) \right) \\ &= \mathbf{q}(1 - mf_0(u_0)f_0(v_0)) + \tilde{\mathbf{p}}_M, \end{aligned} \quad (3.5)$$

dove

$$\tilde{\mathbf{p}}_M = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\mathbf{p}_i f_0(u_0)f_0(v_0) + \mathbf{r}_i g_0(u_0)f_0(v_0) + \mathbf{l}_i f_0(u_0)g_0(v_0) + \mathbf{t}_i g_0(u_0)g_0(v_0) \right) \quad (3.6)$$

è un ragionevole valore di default per il punto centrale, ottenuto generalizzando il caso bicubico regolare ($m = 4$), nel quale $(u_0, v_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $f_0(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $g_0(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$, e quindi

$$\tilde{\mathbf{p}}_M^{(4)} = \sum_{i=0}^3 \left(\frac{1}{4}\mathbf{p}_i + \frac{1}{16}(\mathbf{r}_i + \mathbf{l}_i) + \frac{1}{64}\mathbf{t}_i \right). \quad (3.7)$$

Scelto \mathbf{p}_M (eventualmente imposto da un vincolo di interpolazione), si ricava

$$\mathbf{q} = (\mathbf{p}_M - \tilde{\mathbf{p}}_M) \frac{1}{1 - mf_0(u_0)f_0(v_0)}, \quad (3.8)$$

e la definizione dell'overlap patch è completa.

Nel caso $m = 4$, la (3.8) non può essere applicata e il valore di \mathbf{q} è irrilevante, poiché $\sum_{i=0}^3 f_0(u_0)f_0(v_0) = 1$: infatti, come è noto, non è possibile scegliere il valore di $\mathbf{p}_M = \tilde{\mathbf{p}}_M$, che risulta fissato dai dati assegnati sul bordo, come appare evidente da (3.7). Invece in tutti gli altri casi, cioè $\forall m \neq 4$, il punto centrale \mathbf{p}_M può essere scelto arbitrariamente, come illustrato in Figura 3.5.

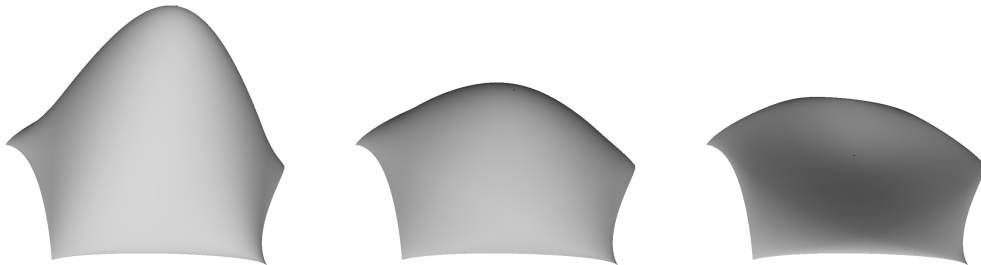


Figura 3.5: Effetto della modifica del punto centrale dell'overlap patch.

3.2.3 Analisi della continuità per il raccordo di overlap patch adiacenti

Vogliamo studiare il raccordo tra overlap patch adiacenti, ricavando delle condizioni sufficienti affinché si abbia continuità visiva VC^1 tra i patch. Per fare questo, è necessario calcolare le derivate parziali prime di un overlap patch.

3.2.3.1 Derivate prime

Applicando la regola della catena alle formule (3.1) e (3.2), otteniamo le derivate parziali di un overlap patch \mathbf{O} rispetto ai parametri u e v :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{O}}{\partial u} &= \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial u} \right), \\ \frac{\partial \mathbf{O}}{\partial v} &= \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial v} \right),\end{aligned}\tag{3.9}$$

dove

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial u_i} &= (\mathbf{p}_i - \mathbf{q}) f_0'(u_i) f_0(v_i) + \mathbf{r}_i g_0'(u_i) f_0(v_i) + \mathbf{l}_i f_0'(u_i) g_0(v_i) + \mathbf{t}_i g_0'(u_i) g_0(v_i), \\ \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial v_i} &= (\mathbf{p}_i - \mathbf{q}) f_0(u_i) f_0'(v_i) + \mathbf{r}_i g_0(u_i) f_0'(v_i) + \mathbf{l}_i f_0(u_i) g_0'(v_i) + \mathbf{t}_i g_0(u_i) g_0'(v_i)\end{aligned}\tag{3.10}$$

sono le derivate parziali del vertex patch $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_i(u_i, v_i)$ rispetto alle coordinate locali $u_i = u_i(u, v)$, $v_i = v_i(u, v)$, e

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial u} & \frac{\partial u_i}{\partial v} \\ \frac{\partial v_i}{\partial u} & \frac{\partial v_i}{\partial v} \end{pmatrix} =: \mathbf{J}_{\mathbf{P}_i^{-1}}$$

sono le derivate dei parametri locali rispetto a quelli globali u, v , che costituiscono la matrice Jacobiana del domain mapping \mathbf{P}_i^{-1} . Nel caso della parametrizzazione mediante patch di Bézier, gli elementi di $\mathbf{J}_{\mathbf{P}_i^{-1}} := \frac{\partial(u_i, v_i)}{\partial(u, v)}$ possono essere calcolati da quelli di $\mathbf{J}_{\mathbf{P}_i} := \frac{\partial(u, v)}{\partial(u_i, v_i)}$ ricordando che per una funzione regolare iniettiva, come è la parametrizzazione \mathbf{P}_i , vale

$$\mathbf{J}_{\mathbf{P}_i^{-1}} = (\mathbf{J}_{\mathbf{P}_i})^{-1},$$

cioè

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial u} &= \frac{1}{D} \frac{\partial v}{\partial v_i}, & \frac{\partial u_i}{\partial v} &= -\frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial v_i}, \\ \frac{\partial v_i}{\partial u} &= -\frac{1}{D} \frac{\partial v}{\partial u_i}, & \frac{\partial v_i}{\partial v} &= \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial u_i},\end{aligned}\tag{3.11}$$

dove $D := \frac{\partial u}{\partial u_i} \frac{\partial v}{\partial v_i} - \frac{\partial u}{\partial v_i} \frac{\partial v}{\partial u_i}$. Gli elementi di $\mathbf{J}_{\mathbf{P}_i}$ si ricavano facilmente dalla (3.3):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial u_i}, \frac{\partial v}{\partial u_i} \right) &= \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial u_i} = 2 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^2 (\mathbf{b}_{j+1,k}^i - \mathbf{b}_{jk}^i) B_j^1(u_i) B_k^2(v_i), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial v_i}, \frac{\partial v}{\partial v_i} \right) &= \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial v_i} = 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{k=0}^1 (\mathbf{b}_{j,k+1}^i - \mathbf{b}_{jk}^i) B_j^2(u_i) B_k^1(v_i). \end{aligned} \quad (3.12)$$

In generale, la derivata prima di un overlap patch lungo una direzione del piano (u, v) determinata da un angolo α è espressa da

$$\frac{\partial \mathbf{O}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathbf{O}}{\partial u} \cos \alpha + \frac{\partial \mathbf{O}}{\partial v} \sin \alpha. \quad (3.13)$$

3.2.3.2 Continuità VC^1 tra overlap patch adiacenti

Vogliamo analizzare il comportamento degli overlap patch lungo il loro bordo, con l'intento di determinare delle condizioni per raccordare due patch adiacenti ottenendo la continuità del piano tangente.

Siano $\mathbf{O}^1, \mathbf{O}^2$ due overlap patch adiacenti aventi in comune la curva cubica \mathbf{c}_{ab} che congiunge i punti \mathbf{a}, \mathbf{b} e determinata dai vettori tangenti ivi assegnati $\mathbf{r}_a^1 = \mathbf{l}_a^2, \mathbf{l}_b^1 = \mathbf{r}_b^2$ (Figura 3.6). I piani tangenti ai due patch lungo \mathbf{c}_{ab} sono determinati dalle due 4-uple di vettori $(\mathbf{l}_a^1, \mathbf{t}_a^1, \mathbf{t}_b^1, \mathbf{r}_b^1)$ e $(\mathbf{r}_a^2, \mathbf{t}_a^2, \mathbf{t}_b^2, \mathbf{l}_b^2)$: il blending di queste quantità mediante le funzioni base di Hermite f_0, g_0 deve produrre delle derivate nella direzione trasversale a \mathbf{c}_{ab} tali che i due piani tangenti coincidano.

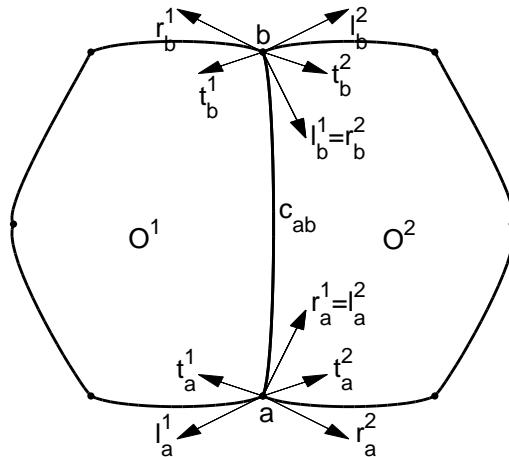


Figura 3.6: Quantità vettoriali relative a overlap patch adiacenti.

Definizione 3.1. Una parametrizzazione di un overlap patch è detta *compatibile* con il blending cubico delle tangenti trasversali se la sua derivata trasversale è VC^1 continua con un patch bicubico avente la stessa 4-upla di vettori.

Se due 4-uple di vettori assicurano la continuità VC^1 nel senso cubico, e gli overlap patch aventi queste 4-uple garantiscono rispettivamente la compatibilità con i corrispondenti blending cubici delle tangenti trasversali, allora ne risulta la continuità VC^1 tra gli overlap patch.

Consideriamo ora uno solo dei due overlap patch, ad esempio \mathbf{O}^1 , e studiamo la sua espressione ristretta al segmento di bordo \mathbf{c}_{ab} . Tra i vertex patch che compongono l'overlap patch, definiti da (3.2), prendiamo la coppia di vertex patch adiacenti e aventi in comune il lato del poligono D_m corrispondente a \mathbf{c}_{ab} ; senza perdere di generalità, possiamo supporre che essi siano \mathbf{V}_0 e \mathbf{V}_1 , i cui domini parametrici locali hanno in comune il lato $\ell_0 := \mathbf{d}_0\mathbf{d}_1$. In virtù del requisito 4, soltanto questi due vertex patch $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1$ danno contributo all'overlap patch lungo la curva \mathbf{c}_{ab} .

Per semplificare l'analisi seguente, operiamo un cambiamento nel sistema di riferimento (u, v) : collochiamo l'origine nel vertice \mathbf{d}_0 e poniamo l'asse parametrico u parallelo al lato $\mathbf{d}_0\mathbf{d}_1$; l'asse v è ad esso perpendicolare. Pertanto, in questo nuovo riferimento, lungo il lato $\mathbf{d}_0\mathbf{d}_1$ risulta $u_0 = u, v_0 = 0$ e $u_1 = 0, v_1 = 1 - u$.

Per determinare l'espressione del vettore normale \mathbf{N} lungo il bordo \mathbf{c}_{ab} , è necessario calcolare le derivate parziali e farne il prodotto vettoriale. Dalle (3.9), e osservando che $\frac{\partial u_0}{\partial u} = 1, \frac{\partial v_0}{\partial u} = 0, \frac{\partial u_1}{\partial u} = 0, \frac{\partial v_1}{\partial u} = -1$, si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{O}^1}{\partial u} &= \sum_{i=0}^1 \left(\frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial u} \right) = \frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial u_0} - \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial v_1}, \\ \frac{\partial \mathbf{O}^1}{\partial v} &= \sum_{i=0}^1 \left(\frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial v} \right).\end{aligned}$$

Il vettore normale in un punto $(u, 0) \in \mathbf{d}_0\mathbf{d}_1$ è

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(u) &= \frac{\partial \mathbf{O}^1}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{O}^1}{\partial v} \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial u_0} - \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial v_1} \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial u_0} \frac{\partial u_0}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial v_0} \frac{\partial v_0}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial v} \right),\end{aligned}\tag{3.14}$$

dove

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial u_0} &= (\mathbf{a} - \mathbf{q})f'_0(u_0) + \mathbf{r}_a g'_0(u_0), \\ \frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial v_0} &= \mathbf{l}_a f_0(u_0) + \mathbf{t}_a g_0(u_0), \\ \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial u_1} &= \mathbf{r}_b f_0(v_1) + \mathbf{t}_b g_0(v_1), \\ \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial v_1} &= (\mathbf{b} - \mathbf{q})f'_0(v_1) + \mathbf{l}_b g'_0(v_1),\end{aligned}$$

in virtù di $v_0 = 0$, $u_1 = 0$, $f_0(0) = 1$, $f'_0(0) = 0$, $g_0(0) = 0$, $g'_0(0) = 1$, e della espressione (3.2).

Una condizione sufficiente per ottenere la “compatibilità cubica” è che siano soddisfatte le condizioni

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial v} = -\frac{\partial v_1}{\partial v}, \\ \frac{\partial v_0}{\partial v} = \frac{\partial u_1}{\partial v} = c(u), \end{cases} \quad (3.15)$$

dove $c(u)$ denota una funzione di u per $v = 0$, definita dalla parametrizzazione. Infatti se valgono le (3.15), l'espressione (3.14) si riduce a

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(u) &= \left(\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial u_0} - \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial v_1} \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial u_0} \frac{\partial u_0}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial v_0} c(u) + \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial u_1} c(u) - \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial v_1} \frac{\partial u_0}{\partial v} \right) \\ &= c(u) \left(\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial u_0} - \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial v_1} \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial v_0} + \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial u_1} \right) \\ &\quad + \frac{\partial u_0}{\partial v} \left(\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial u_0} - \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial v_1} \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial u_0} - \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial v_1} \right) \\ &= c(u) \left(\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial u_0} - \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial v_1} \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial v_0} + \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial u_1} \right).\end{aligned}$$

Pertanto $\mathbf{N}(u)$ è uguale al vettore normale di un patch spline bicubico, moltiplicato per una funzione scalare $c(u)$.

Continuità VC^1 tra patch di Bézier adiacenti. Mostriamo che la scelta della particolare parametrizzazione mediante patch di Bézier presentata nella Sezione 3.2.2.1 garantisce che le (3.15) siano soddisfatte.

Consideriamo una coppia di patch di Bézier, definiti da (3.3), adiacenti; senza perdere di generalità, prendiamo \mathbf{P}_0 e \mathbf{P}_1 , aventi in comune il lato $\ell_0 := \mathbf{d}_0 \mathbf{d}_1$ del poligono D_m . Come è evidente dalle proprietà delle curve di bordo dei patch di Bézier e dalla Figura 3.7, la parametrizzazione sul lato ℓ_0 dipende solo dalle 6-uple $(\mathbf{b}_{00}^0, \mathbf{b}_{10}^0, \mathbf{b}_{20}^0, \mathbf{b}_{01}^0, \mathbf{b}_{11}^0, \mathbf{b}_{12}^0)$ e $(\mathbf{b}_{02}^1, \mathbf{b}_{01}^1, \mathbf{b}_{00}^1, \mathbf{b}_{12}^1, \mathbf{b}_{11}^1, \mathbf{b}_{10}^1)$, considerando

rispettivamente \mathbf{P}_0 e \mathbf{P}_1 . L'espressione dei control point (3.4) garantisce che queste 6-uple di valori sono uguali: ciò comporta il raccordo VC^1 dei due patch di Bézier lungo ℓ_0 , necessario per ottenere la continuità VC^1 dei vertex patch \mathbf{V}_0 e \mathbf{V}_1 e quindi dell'overlap patch finale.

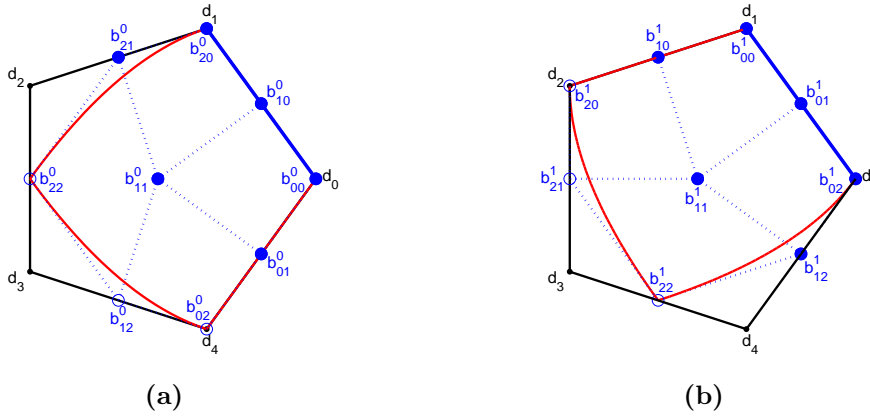


Figura 3.7: Patch di Bézier relativi a vertici adiacenti.

3.2.4 Dettagli implementativi

Discutiamo qui alcuni dettagli tecnici della proposta di Várady, da noi implementata in codice MATLAB e C con lo scopo di valutarne le potenzialità e le possibili applicazioni.

In particolare, un punto cruciale nella valutazione della superficie di Várady consiste nell'inversione della parametrizzazione $\mathbf{P}_i : Q_1 \mapsto D_m$ (che nel nostro caso è una mappa biquadratica, Sezione 3.2.2.1). Come è evidente dalle formule (3.1) e (3.2), per determinare il valore $\mathbf{O}(u, v)$ dell'overlap patch nel punto $(u, v) \in D_m$ appartenente al dominio parametrico costituito dal poligono regolare D_m , è necessario valutare tutti i vertex patch $\mathbf{V}_i(u_i, v_i)$, $i = 0, \dots, m - 1$. La coppia di parametri locali (u_i, v_i) è determinata dalla coppia di coordinate globali (u, v) mediante il domain mapping $\mathbf{P}_i^{-1} : (u, v) \mapsto (u_i, v_i)$; l'operazione di inversione della mappa \mathbf{P}_i è compiuta attraverso il metodo iterativo di Newton-Raphson per la ricerca di zeri di una funzione. Nel nostro caso, si tratta di determinare numericamente la soluzione di un sistema di due equazioni polinomiali bivariate di grado $(2, 2)$ nelle incognite u_i, v_i : dato $(u, v) \in D_m$ si cerca $(u_i, v_i) \in Q_1$ tale che $\mathbf{F}(u_i, v_i) := \mathbf{P}_i(u_i, v_i) - (u, v) = \mathbf{0}$. Si noti che il vincolo richiesto $(u_i, v_i) \in [0, 1]^2$ permette di discriminare i punti (u, v) che non cadono dentro la regione di D_m coperta da \mathbf{P}_i e garantisce che i contributi dei vertex patch siano assemblati correttamente.

Si osservi che la procedura di inversione deve essere ripetuta per ogni $i = 0, \dots, m-1$, in modo da determinare per ogni vertex patch le coordinate locali e il valore $\mathbf{V}(u_i, v_i)$ corrispondente.

Concludiamo questa sezione riassumendo l'algoritmo per la valutazione di un overlap patch a m lati.

Algoritmo 3.1: Valutazione di un overlap patch di Várady a m lati.

Dati: quantità da interpolare $\mathbf{p}_i, \mathbf{l}_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{t}_i, i = 0, \dots, m - 1$ (vertici, vettori tangenti e twist), ed eventualmente il punto centrale \mathbf{p}_M .

Risultato: valore \mathbf{O} dell'overlap patch, derivate prime $\frac{\partial \mathbf{O}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{O}}{\partial v}$ e versore normale $\hat{\mathbf{N}}$.

```

/* valutazione in ogni punto del dominio parametrico */
forall the  $(u, v) \in D_n$  do
    determinare l'origine  $\mathbf{q}$  dell'overlap patch (formule (3.6), (3.8));
    inizializzare il valore dell'overlap patch  $\mathbf{O}$  con  $\mathbf{q}$  (primo termine
    nella formula (3.1));
    /* ciclo sui vertex patch */
    for  $i = 0$  to  $m - 1$  do
        /* inversione  $(u, v) \mapsto (u_i, v_i)$  (con metodo di
        Newton-Raphson) */
        scegliere un iterato iniziale  $(u_i^{(0)}, v_i^{(0)})$ ;
        determinare  $(u_i^*, v_i^*)$  tale che  $\mathbf{F}(u_i^*, v_i^*) := \mathbf{P}_i(u_i^*, v_i^*) - (u, v) = \mathbf{0}$ ;
        if  $(u_i^*, v_i^*) \in Q_1$  then
            /* il contributo del vertex patch  $\mathbf{V}_i$  deve essere
            considerato */
            valutare in  $u_i^*$  e  $v_i^*$  le funzioni base di Hermite  $f_0, g_0$  e le loro
            derivate prime;
            valutare in  $u_i^*$  e  $v_i^*$  il patch di Bézier  $\mathbf{P}_i$  (formule (3.3), (3.4))
            e le sue derivate prime;
            costruire gli elementi della matrice Jacobiana  $\mathbf{J}_{\mathbf{P}_i^{-1}}$  (formule
            (3.11), (3.12));
            calcolare  $\mathbf{V}_i(u_i, v_i)$  (formula (3.2));
            calcolare  $\frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial u_i}(u_i, v_i), \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial v_i}(u_i, v_i)$  (formule (3.10));
            aggiungere il contributo di  $\mathbf{V}_i$  all'overlap patch  $\mathbf{O}$  (formula
            (3.1));
            aggiungere il contributo delle derivate del vertex patch alle
            derivate dell'overlap patch  $\frac{\partial \mathbf{O}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{O}}{\partial v}$  (formula (3.9));
        end
    end
end
/* versore normale */
 $\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{O}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{O}}{\partial v}$ ;
 $\hat{\mathbf{N}} = \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|}$ ;
end

```

3.2.5 Analisi dei risultati

3.2.5.1 Determinazione dei parametri locali con il metodo di Newton-Raphson

I test effettuati per $m = 4, \dots, 20$ e con tolleranza per il criterio di arresto pari a 10^{-15} , mostrano che in media sono sufficienti 5 o 6 iterazioni del metodo di Newton-Raphson se si sceglie come iterato iniziale il punto $(u_i^{(0)}, v_i^{(0)}) := (1, 1)$. Una eccezione è costituita dal caso $m = 3$, nel quale è risultato più opportuno prendere $(u_i^{(0)}, v_i^{(0)}) := (0.4, 0.45)$, per ottenere la convergenza in 4 o 5 iterazioni.

3.2.5.2 Esempi

Riportiamo alcuni esempi di overlap patch di Várady.

Le Figure 3.8a e 3.8b presentano un overlap patch a 6 lati, costruito a partire dai dati assegnati (rappresentati dai vettori uscenti dai vertici), in due modalità di visualizzazione: shading (si veda l'Appendice B) e spider lines⁶. In Figura 3.8c è mostrata la somma dei vertex patch $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$, che interpola i dati relativi ai soli vertici $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$.

La Figura 3.9 mostra un network di curve (cubiche) e la superficie interpolante composta da overlap patch (a 4 e 5 lati): dalla analisi del campo di versori normali⁷ e dalla rappresentazione in shading è evidente la continuità del piano tangente.

3.2.5.3 Patching della superficie di Catmull-Clark

Abbiamo esplorato la possibilità di applicare gli overlap patch per effettuare il patching della superficie di Catmull-Clark nell'intorno di un vertice straordinario interno.

Gli n patch quadrangolari incidenti nel vertice straordinario sono sostituiti da un singolo overlap patch a $2n$ lati. I dati da interpolare sono estratti dalla superficie limite mediante la valutazione (con l'algoritmo di Stam) della posizione \mathbf{S} , dei vettori tangenti $\mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v$ e del vettore twist \mathbf{S}_{uv} nei vertici dei patch coinvolti.

Sono state riscontrate alcune problematiche che rendono l'approccio con gli overlap patch non percorribile, almeno nella formulazione fin qui presentata. Con lo scopo di illustrare meglio la situazione, prima di commentare i risultati

⁶*Spider lines*: sono rappresentate le immagini di circonferenze concentriche e di semirette uscenti dall'origine del piano (u, v) .

⁷Si veda l'Appendice B per la spiegazione di questo strumento di analisi. Non si riportano figure perché in questo caso le immagini statiche non sono in grado di veicolare efficacemente il risultato dell'analisi.

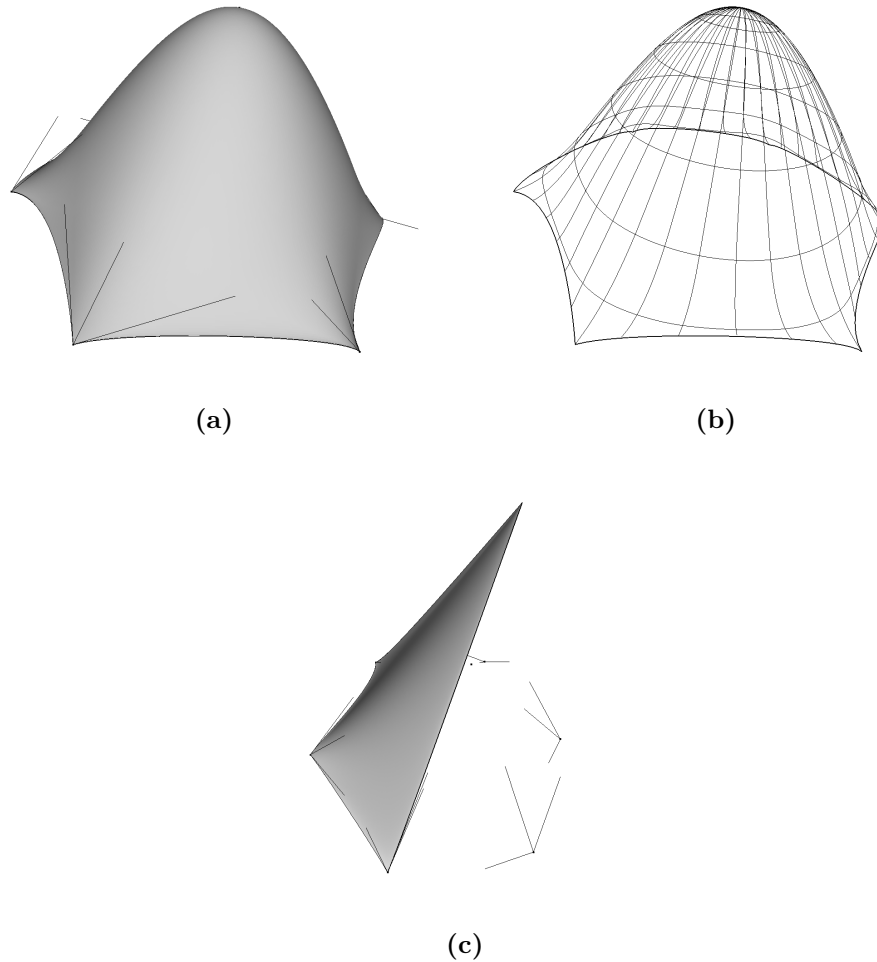


Figura 3.8: Esempio di overlap patch a 6 lati, con visualizzazione (a) shading (valutando su una triangolazione del dominio D_6) e (b) mediante spider lines. (c) Somma di 3 dei 6 vertex patch.

ottenuti è opportuno dare alcune definizioni riguardanti la classificazione dei network di curve in base alla loro topologia.

Definizione 3.2. Un network di curve con topologia PFP⁸ si dice *a nodi uniformi* se in ogni nodo interno concorre lo stesso numero di segmenti di curva; in caso contrario si dice *a nodi non uniformi*.

Un network di curve con topologia PFP si dice *a patch uniformi* se ogni regione delimitata dai segmenti di curva ha lo stesso numero di lati; in caso contrario si dice *a patch non uniformi*.

⁸Si ricordi la definizione data nella Sezione 3.2.1.

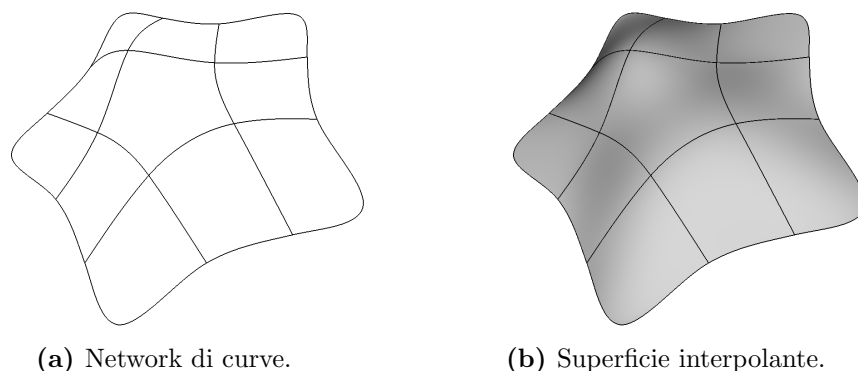


Figura 3.9: Interpolazione di un network di curve mediante un complesso di overlap patch.

Definizione 3.3. Un network di curve con topologia PFP si dice:

1. *regolare* se è a nodi uniformi e patch uniformi;
2. *semi-regolare* se è a nodi uniformi e patch non uniformi;
3. *irregolare* negli altri casi.

La configurazione determinata dalle curve di bordo dei patch di una superficie di Catmull-Clark intorno a un vertice straordinario (isolato) di valenza n costituisce un network con topologia PFP *irregolare*: infatti, come illustrato in Figura 3.10, essa possiede nodi di valenza 4 e di valenza 3 (quindi non uniformi), oltre che a una regione con $2n$ lati circondata da patch quadrilateri. Inoltre nei nodi di valenza 3 i vettori tangenti \mathbf{l}_i , \mathbf{r}_i e il vettore twist \mathbf{t}_i sono collineari, a causa delle proprietà di continuità della superficie di Catmull-Clark: analizzando la struttura del bordo del buco a $2n$ lati, vediamo che le curve di bordo che incidono nei nodi di valenza 3 sono curve cubiche che si raccordano con continuità C^2 .

Nel caso dell'interpolazione di un network irregolare avente nodi con valenza diversa da 4 (cioè nei quali non incidono esattamente due coppie di segmenti di curva), [Vár91] propone una modifica allo schema, con l'introduzione di termini à la Gregory per risolvere il problema di incompatibilità dei vettori twist (twist-incompatibility) che sorge. Quando le derivate trasversali del patch devono essere scelte indipendentemente l'una dall'altra, come in questo caso, esistono due diversi vettori twist $\mathbf{t}_i^{(1)}$, $\mathbf{t}_i^{(2)}$ (corrispondenti alle due derivate seconde miste). Várady suggerisce l'introduzione di un unico vettore twist, definito

come una combinazione razionale di $\mathbf{t}_i^{(1)}$, $\mathbf{t}_i^{(2)}$:

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{t}_i(u_i, v_i) := \frac{u_i \mathbf{t}_i^{(1)} + v_i \mathbf{t}_i^{(2)}}{u_i + v_i},$$

e l'utilizzo di questo vettore (non costante) per la costruzione dell'overlap patch, con le solite formule (3.1) e (3.2). Tuttavia, a causa della configurazione patologica del caso di Catmull-Clark, questa modifica non è in grado di generare patch che si raccordino con la continuità VC^1 desiderata. Inoltre, a fronte del fatto che l'intera procedura di valutazione di un overlap patch è già di per sé piuttosto onerosa, questa modifica razionale comporta un costo computazionale aggiuntivo.

Queste osservazioni ci hanno suggerito di riempire il buco a $2n$ lati che si genera intorno a ciascun vertice straordinario della superficie di Catmull-Clark utilizzando direttamente il patching con n patch di Gregory (razionali) quadrilateri, raccordati opportunamente. Allo sviluppo di questa idea è dedicata la prossima Sezione 3.3.

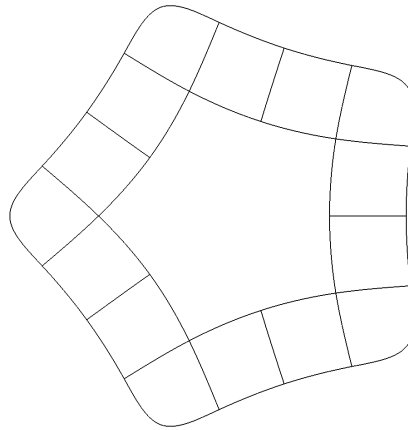


Figura 3.10: Curve di bordo dei patch di Catmull-Clark intorno a un vertice straordinario.

3.2.5.4 Conclusioni

Concludiamo la sezione dedicata agli overlap patch di Várady osservando che il loro utilizzo per l'interpolazione di network di curve cubiche dà buoni risultati nel caso di network con topologia regolare o semi-regolare, mentre nella loro forma attuale non sono direttamente applicabili nei casi irregolari (come per la superficie di Catmull-Clark), nei quali possono presentarsi il problema di twist-incompatibility o configurazioni degeneri. Queste criticità potrebbero essere risolte introducendo una modifica ad hoc della costruzione qui presentata per gestire la particolare situazione considerata, eventualmente utilizzando

vertex patch di grado più elevato. Tuttavia, abbiamo ritenuto opportuno indirizzare lo studio verso altre tecniche che, a fronte di una complessità e un costo computazionale paragonabili, promettono di raggiungere una maggiore regolarità rispetto a un eventuale costruzione alla Várady modificata.

3.3 Patching con patch di Gregory

3.3.1 Overview

In questa sezione studiamo il patching di una superficie di Catmull-Clark intorno a un vertice straordinario di valenza n (interno, $n \neq 4$, o sul bordo, $n \neq 3$) seguendo una proposta differente rispetto a quella discussa nella Sezione 3.2. Invece di rimpiazzare il complesso di n patch ($n - 1$ sul bordo) con un unico patch, l'approccio che presentiamo nel seguito prevede che ogni patch sia sostituito da uno nuovo, opportunamente definito e che si raccorda con un certo ordine di continuità con i patch adiacenti. L'unico vincolo richiesto è quello di lavorare con patch quadrilateri, eventualmente originati dalla suddivisione di una faccia non quadrilatera della mesh \mathcal{M}_0 di partenza; invece non sono poste restrizioni sul numero di vertici straordinari per patch.

Come al solito, lasciamo inalterati i patch delle regioni regolari (cioè non contenenti vertici straordinari), nelle quali la superficie di Catmull-Clark è equivalente alle B-spline prodotto tensoriale bicubiche C^2 .

In alternativa alla sostituzione totale di un patch, abbiamo sperimentato la possibilità di modificare solamente una sotto-regione quadrilatera⁹ contenente il vertice straordinario: questa opzione non comporta alcun cambiamento sostanziale nel metodo, ed è motivata dal vantaggio di non alterare inutilmente la superficie di Catmull-Clark nei sotto-patch che non lo necessitano.

Così facendo, un patch contenente un solo vertice straordinario viene sostituito da un complesso di quattro sotto-patch: uno, quello contenente il punto, è definito secondo le nuove modalità, mentre gli altri tre, che costituiscono una regione a forma di L, restano definiti come nella superficie originale in quanto sono regolari e valutabili esattamente nella loro interezza (per i dettagli, si veda la Sezione 1.6 dedicata all'algoritmo di Stam).

In particolare, l'approccio qui discusso prevede la definizione di un patch di Gregory bicubico che sostituisca un patch di superficie di Catmull-Clark, interpolandone i bordi e raccordandosi con continuità G^1 con i patch adiacenti. Abbiamo seguito la proposta di Loop e Schaefer in [LSNC09] per la costruzione di un patch di Gregory che approssimi un patch di Catmull-Clark. Sebbene

⁹Di dimensioni regolabili; nella nostra implementazione questa sotto-regione è definita su un sotto-quadrato $Q_{\frac{1}{2^k}} \subseteq Q_1$ del dominio parametrico, di lato $\frac{1}{2^k}$ con $k \in \mathbb{N}$.

quel lavoro si ponga un obiettivo diverso dal nostro, in quanto incentrato sul patching delle zone non regolari della superficie di suddivisione per migliorare le prestazioni dell'unità di tassellazione della GPU in fase di valutazione real-time della superficie¹⁰, esso fornisce un buon metodo per la realizzazione di patch di Gregory che non si discostino eccessivamente dalla superficie di Catmull-Clark, e quindi adatti ai nostri scopi.

Volendo ottenere una superficie caratterizzata da un ordine di continuità maggiore, rimane ancora da esplorare la definizione opportuna di un patch di Gregory biquintico per raggiungere il raccordo G^2 con i patch adiacenti: uno sviluppo in questa direzione può beneficiare della analisi e del metodo proposti da Hermann in [Her96].

3.3.2 Patch di Gregory

I patch di Gregory sono una versione modificata dei tradizionali patch prodotto tensoriale (quadrilateri¹¹). Questa modifica fu introdotta da Gregory [Gre74] per assicurare che una collezione di $n \neq 4$ patch, aventi un vertice condiviso e lati in comune a coppie, si raccordino con continuità del piano tangente. Infatti, il raccordo C^1 di n patch polinomiali intorno ad un vertice comune comporta che sia soddisfatta una serie di vincoli di continuità che coinvolgono “a giro” le derivate prime e seconde miste (vettori twist) dei patch, generando un problema sovravincolato. L'idea di Gregory consiste nel rimuovere i vincoli di compatibilità e risolvere la twist-incompatibility disaccoppiando i vettori twist: in questo modo un patch di Gregory $\mathbf{G} = \mathbf{G}(u, v)$, a differenza di quello polinomiale, ha derivate seconde miste diverse $\frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial u \partial v} \neq \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial v \partial u}$ nei suoi vertici.

3.3.2.1 Espressione

L'idea originale di Gregory, formulata in [Gre74], consiste nel cosiddetto *quadrato di Gregory*, versione modificata del patch di Coons¹² per risolvere il problema della twist-incompatibility nella costruzione di una superficie multi-patch C^1 che interpoli delle curve di bordo assegnate¹³. In particolare, i quattro vettori twist nei vertici dell'usuale patch di Coons (costanti) sono sostituiti da

¹⁰Sviluppando un'idea degli stessi autori [LS08] per l'approssimazione della superficie di Catmull-Clark.

¹¹In letteratura si trovano proposti anche patch di Gregory triangolari, definiti usando le coordinate baricentriche su un triangolo. Tuttavia, la loro trattazione è superflua per i nostri scopi.

¹²Per una descrizione estesa, si faccia riferimento a [HL93] Capitolo 8, e [PT95] Sezioni 10.5 e 10.6.

¹³Per questo motivo, le superfici di Gordon-Coons siffatte sono anche dette interpolanti transfinite.

quattro vettori variabili, espressi come combinazioni convesse (cioè baricentriche) delle derivate seconde miste. In questo modo, è possibile prescrivere indipendentemente l'una dall'altra le derivate prime trasversali di due bordi adiacenti.

Il *patch di Gregory* è stato introdotto da Chiyokura e Kimura [CK83] come una analoga versione modificata del patch di Bézier (bicubico). Presentiamo qui la loro formulazione, seguendo [HL93] Sezione 7.5.3.

Forma à la Bézier. Il patch di Gregory bicubico è ottenuto da un patch di Bézier bicubico sostituendo i quattro punti di controllo interni, costanti, con quattro punti di controllo variabili, ciascuno dei quali è una combinazione convessa di due punti assegnati. In questo modo, il patch di Gregory bicubico risulta definito da un totale di 20 control point¹⁴, come segue:

$$\mathbf{G}(u, v) := \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \mathbf{g}_{ij} B_i^3(u) B_j^3(v) = (1 - u - uE_1)^3 (1 - v - vE_2)^3 \mathbf{g}_{00}, \quad (3.16)$$

per $u, v \in [0, 1]$, dove i 12 control point sul bordo \mathbf{g}_{ij} , con $i \in \{0, 3\}$ o $j \in \{0, 3\}$, sono costanti, mentre quelli interni sono definiti da

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{11} = \mathbf{g}_{11}(u, v) &:= \frac{u\mathbf{g}_{110} + v\mathbf{g}_{111}}{u + v}, \\ \mathbf{g}_{12} = \mathbf{g}_{12}(u, v) &:= \frac{u\mathbf{g}_{120} + (1 - v)\mathbf{g}_{121}}{u + (1 - v)}, \\ \mathbf{g}_{21} = \mathbf{g}_{21}(u, v) &:= \frac{(1 - u)\mathbf{g}_{210} + v\mathbf{g}_{211}}{(1 - u) + v}, \\ \mathbf{g}_{22} = \mathbf{g}_{22}(u, v) &:= \frac{(1 - u)\mathbf{g}_{220} + (1 - v)\mathbf{g}_{221}}{(1 - u) + (1 - v)}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

con \mathbf{g}_{ijk} , $i, j \in \{1, 2\}$, $k \in \{0, 1\}$ assegnati. Le combinazioni baricentriche delle espressioni (3.17) si traducono nel fatto che i punti \mathbf{g}_{ij} , $i, j \in \{1, 2\}$ si muovono su segmenti retti tra \mathbf{g}_{ij0} e \mathbf{g}_{ij1} , al variare dei parametri u e v .

Nella (3.16), E_1, E_2 sono gli operatori di shift degli indici, definiti da

$$E_1 \mathbf{g}_{ij} = \mathbf{g}_{i+1, j}, \quad E_2 \mathbf{g}_{ij} = \mathbf{g}_{i, j+1}.$$

La Figura 3.11 mostra schematicamente l'indicizzazione adottata per i vertici della griglia di controllo, mentre in Figura 3.12 è rappresentato un esempio di patch di Gregory bicubico.

Osservazione 5. Se gli otto punti di controllo interni \mathbf{g}_{ijk} , $i, j \in \{1, 2\}$, $k \in \{0, 1\}$ sono tali che $\mathbf{g}_{ij0} = \mathbf{g}_{ij1}$ per ogni $i, j \in \{1, 2\}$, allora (3.16) si riduce all'espressione di un classico patch di Bézier bicubico.

¹⁴A differenza del patch di Bézier bicubico, avente 16 control point.

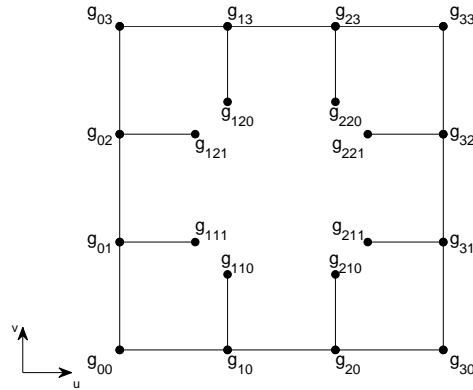


Figura 3.11: Indicizzazione dei control point di un patch di Gregory bicubico.

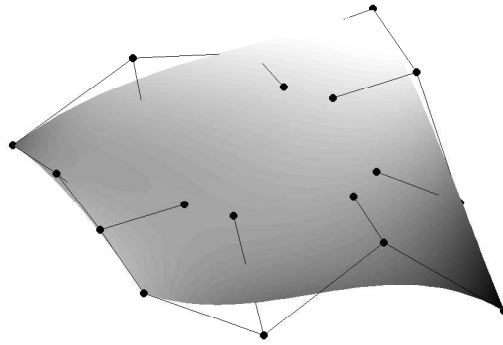


Figura 3.12: Patch di Gregory bicubico.

Osservazione 6. Dalla (3.17) è evidente la natura razionale del patch di Gregory. Ciò comporta un costo per la valutazione maggiore rispetto a un patch di Bézier, comunque giustificato dalla flessibilità di utilizzo che questo approccio consente. Inoltre la parametrizzazione possiede delle singolarità nei quattro corner $(u, v) = (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$; tuttavia questo problema è facilmente risolto mediante una gestione ad hoc della valutazione nei vertici, come si discute nella prossima Sezione 3.3.2.3.

In generale, un patch di Gregory di grado¹⁵ d (tipicamente dispari) è espresso come

$$\mathbf{G}(u, v) := \sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^d \mathbf{g}_{ij} B_i^d(u) B_j^d(v), \quad (3.18)$$

¹⁵Il *grado* di un patch prodotto tensoriale polinomiale è una coppia di numeri naturali (d_1, d_2) che indicano i gradi delle funzioni base (in questo caso, polinomi di Bernstein) nelle due direzioni parametriche. Se $d_1 = d_2 =: d$, il patch è detto in breve bi- d -ico o di grado d .

con $u, v \in [0, 1]$, dove i $4d$ control point sul bordo \mathbf{g}_{ij} , con $i \in \{0, d\}$ o $j \in \{0, d\}$, sono costanti, mentre i $2((d+1)^2 - 4d) = 2(d-1)^2$ punti interni sono della forma

$$\mathbf{g}_{ij} = \mathbf{g}_{ij}(u, v) := \frac{(w_{ij0}(u))^l \mathbf{g}_{ij0} + (w_{ij1}(v))^l \mathbf{g}_{ij1}}{(w_{ij0}(u))^l + (w_{ij1}(v))^l}, \quad (3.19)$$

con \mathbf{g}_{ijk} , $i, j \in \{1, \dots, d-1\}$, $k \in \{0, 1\}$ assegnati e $l := \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$. I pesi $w_{ijk}(t)$ sono del tipo t o $1-t$, a seconda del punto di controllo \mathbf{g}_{ij} , cioè:

$$w_{ij0}(u) := \begin{cases} u & \text{se } i \leq l, \\ 1-u & \text{se } i > l, \end{cases} \quad \text{e} \quad w_{ij1}(v) := \begin{cases} v & \text{se } j \leq l, \\ 1-v & \text{se } j > l. \end{cases} \quad (3.20)$$

Si noti che talvolta è conveniente usare la notazione con tre indici anche per i vettori non variabili, cioè i \mathbf{g}_{ij} con $i \in \{0, d\}$ o $j \in \{0, d\}$: ovviamente in questo caso vale $\mathbf{g}_{ij0} = \mathbf{g}_{ij1}$, e il punto di controllo non è realmente “sdoppiato”.

Prima di passare alla definizione e all'utilizzo dei patch di Gregory nel caso di nostro interesse, analizziamone più in dettaglio alcune caratteristiche.

3.3.2.2 Comportamento sui bordi

I bordi di un patch di Gregory sono costituiti da curve di Bézier. Infatti, considerando ad esempio il caso bicubico e il lato $v = 0$, la (3.16) si riduce a:

$$\mathbf{G}(u, 0) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{g}_{i0} B_i^3(u), \quad (3.21)$$

in quanto $B_j^3(0) = 0$ per $j = 1, 2, 3$ e $B_0^3(0) = 1$. La (3.21) è l'espressione di una curva di Bézier di grado 3 avente punti di controllo \mathbf{g}_{i0} , $i = 0, \dots, 3$, cioè i control point di bordo del patch di Gregory.

Osservazione 7. Si noti che il contributo dei control point variabili \mathbf{g}_{ijk} è nullo lungo i lati del patch.

3.3.2.3 Gestione delle singolarità nei vertici

Nei vertici del dominio parametrico Q_1 un patch di Gregory presenta delle singolarità se la valutazione è effettuata utilizzando le formule (3.16) e (3.17). Tuttavia, dalle proprietà delle curve di Bézier è evidente che la superficie interpola i suoi quattro corner, che sono gli estremi delle curve di bordo. Infatti, in un vertice, tutti i termini della sommatoria in (3.21), tranne uno, sono nulli poiché i polinomi di Bernstein hanno valore zero. Per esempio, nel vertice corrispondente a $(u, v) = (0, 0)$ si ha $\mathbf{G}(0, 0) = \mathbf{g}_{00}$.

In generale, per un patch di Gregory di grado d :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(0, 0) &= \mathbf{g}_{00}, & \mathbf{G}(1, 0) &= \mathbf{g}_{d0}, \\ \mathbf{G}(1, 1) &= \mathbf{g}_{dd}, & \mathbf{G}(0, 1) &= \mathbf{g}_{0d}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Osservazione 8. Sfruttando l'espressione (3.16), è possibile valutare un patch di Gregory nello stesso modo in cui si valuta un patch di Bézier. Infatti, per ottenere il valore $\mathbf{G}(\bar{u}, \bar{v})$ in un punto $(\bar{u}, \bar{v}) \in Q_1$ del dominio parametrico, prima si determinano i quattro punti di controllo interni $\mathbf{g}_{11}(\bar{u}, \bar{v})$, $\mathbf{g}_{12}(\bar{u}, \bar{v})$, $\mathbf{g}_{21}(\bar{u}, \bar{v})$, $\mathbf{g}_{22}(\bar{u}, \bar{v})$ con la (3.17), e il calcolo si riduce quindi alla valutazione nel punto (\bar{u}, \bar{v}) di un patch polinomiale bicubico di Bézier mediante la (3.16). L'unica accortezza da avere riguarda la valutazione nei vertici, effettuata direttamente in virtù della (3.22).

3.3.2.4 Derivate

Derivate prime Le derivate prime di un patch di Gregory possono essere facilmente calcolate a partire dalla formula (3.16).

Derivando (3.16) rispetto a u :

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial u}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \left(\mathbf{g}_{ij} B_i^3(u)' B_j^3(v) + \frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial u} B_i^3(u) B_j^3(v) \right),$$

dove $\frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial u} = \mathbf{0}$ eccetto che per i punti di controllo interni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}_{11}}{\partial u} &= \frac{v}{(u+v)^2} (\mathbf{g}_{110} - \mathbf{g}_{111}), \\ \frac{\partial \mathbf{g}_{12}}{\partial u} &= \frac{1-v}{(u+(1-v))^2} (\mathbf{g}_{120} - \mathbf{g}_{121}), \\ \frac{\partial \mathbf{g}_{21}}{\partial u} &= -\frac{v}{((1-u)+v)^2} (\mathbf{g}_{210} - \mathbf{g}_{211}), \\ \frac{\partial \mathbf{g}_{22}}{\partial u} &= -\frac{1-v}{((1-u)+(1-v))^2} (\mathbf{g}_{220} - \mathbf{g}_{221}). \end{aligned}$$

Espressioni analoghe si ricavano derivando (3.16) rispetto a v :

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial v}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \left(\mathbf{g}_{ij} B_i^3(u) B_j^3(v)' + \frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial v} B_i^3(u) B_j^3(v) \right),$$

dove $\frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial v} = \mathbf{0}$ eccetto che per i punti di controllo interni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}_{11}}{\partial v} &= -\frac{u}{(u+v)^2} (\mathbf{g}_{110} - \mathbf{g}_{111}), \\ \frac{\partial \mathbf{g}_{12}}{\partial v} &= \frac{u}{(u+(1-v))^2} (\mathbf{g}_{120} - \mathbf{g}_{121}), \\ \frac{\partial \mathbf{g}_{21}}{\partial v} &= -\frac{1-u}{((1-u)+v)^2} (\mathbf{g}_{210} - \mathbf{g}_{211}), \\ \frac{\partial \mathbf{g}_{22}}{\partial v} &= \frac{1-u}{((1-u)+(1-v))^2} (\mathbf{g}_{220} - \mathbf{g}_{221}). \end{aligned}$$

Ricordiamo che la derivata di un polinomio di Bernstein di grado d può essere espressa in funzione di polinomi di Bernstein di grado $d - 1$:

$$B_i^d(t)' = d (B_{i-1}^{d-1}(t) - B_i^{d-1}(t)), \quad i = 0, \dots, d,$$

convenendo che $B_i^d(t) = 0$ se $i < 0$ o $i > d$.

Per un patch di Gregory di grado d , ricordando le definizioni (3.20):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial u}(u, v) &= \sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^d \left(\mathbf{g}_{ij} B_i^d(u)' B_j^d(v) + \frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial u} B_i^d(u) B_j^d(v) \right), \\ \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial v}(u, v) &= \sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^d \left(\mathbf{g}_{ij} B_i^d(u) B_j^d(v)' + \frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial v} B_i^d(u) B_j^d(v) \right), \end{aligned} \quad (3.23)$$

dove $\frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial u} = \mathbf{0}$ eccetto che per i punti di controllo interni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial u} &= s_{ij0} l \frac{(w_{ij0}(u))^{l-1} (w_{ij1}(v))^l}{\left((w_{ij0}(u))^l + (w_{ij1}(v))^l \right)^2} (\mathbf{g}_{ij0} - \mathbf{g}_{ij1}), \\ \frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial v} &= s_{ij1} l \frac{(w_{ij0}(u))^l (w_{ij1}(v))^{l-1}}{\left((w_{ij0}(u))^l + (w_{ij1}(v))^l \right)^2} (\mathbf{g}_{ij0} - \mathbf{g}_{ij1}), \end{aligned} \quad (3.24)$$

avendo posto

$$s_{ij0} := \begin{cases} +1 & \text{se } i \leq l, \\ -1 & \text{se } i > l, \end{cases} \quad \text{e} \quad s_{ij1} := \begin{cases} +1 & \text{se } j > l, \\ -1 & \text{se } j \leq l. \end{cases}$$

Per quanto già osservato in precedenza, lungo un bordo, la derivata rispetto alla direzione parametrica parallela a quel lato coincide con quella di una curva di Bézier. Lungo la direzione trasversale al bordo la derivata è della forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial v}(u, 0) &= d \sum_{i=0}^d (\mathbf{g}_{i10} - \mathbf{g}_{i0}) B_i^d(u), \\ \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial u}(0, v) &= d \sum_{j=0}^d (\mathbf{g}_{1j1} - \mathbf{g}_{0j}) B_j^d(v), \end{aligned}$$

e in particolare

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial u}(0, 0) &= d (\mathbf{g}_{10} - \mathbf{g}_{00}), \\ \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial v}(0, 0) &= d (\mathbf{g}_{01} - \mathbf{g}_{00}). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Espressioni analoghe valgono negli altri vertici.

Derivate seconde miste Le due derivate seconde miste in ciascun vertice assumono valori differenti. Per esempio:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial u \partial v}(0, 0) &= d^2 (\mathbf{g}_{110} - \mathbf{g}_{10} - \mathbf{g}_{01} + \mathbf{g}_{00}) \\ &\neq d^2 (\mathbf{g}_{111} - \mathbf{g}_{10} - \mathbf{g}_{01} + \mathbf{g}_{00}) = \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial v \partial u}(0, 0).\end{aligned}$$

3.3.2.5 Proprietà

1. I patch di Gregory godono della proprietà del guscio convesso.
2. I bordi di un patch di Gregory di grado d sono costituiti da curve di Bézier di grado d .
3. Le derivate prime trasversali rispetto ai bordi possono essere prescritte indipendentemente l'una dall'altra. Grazie a ciò, il problema della twist-incompatibility non si presenta, ed è facile costruire superfici globalmente G^1 assemblando più patch di Gregory, opportunamente raccordati.

3.3.3 Costruzione dei patch

Presentiamo la costruzione dei patch di Gregory per gli scopi di patching della superficie di Catmull-Clark.

Osservando la Figura 3.11, notiamo che è possibile suddividere i 20 control point di un patch di Gregory bicubico in quattro zone, ciascuna relativa a un vertice del patch, e che indicizziamo con $i = 0, \dots, 3$ in senso antiorario¹⁶. Inoltre, all'interno di ogni gruppo si possono distinguere tre tipi di punti, in base alla loro posizione. Rinominiamo quindi i control point in base alla zona e alla tipologia, nel modo seguente (Figura 3.13).

- *Corner point*: è un vertice del patch; lo indichiamo con \mathbf{p}_i . Per un patch bicubico:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_0 &:= \mathbf{g}_{00}, & \mathbf{p}_1 &:= \mathbf{g}_{30}, \\ \mathbf{p}_2 &:= \mathbf{g}_{33}, & \mathbf{p}_3 &:= \mathbf{g}_{03}.\end{aligned}$$

- *Edge point*: sono i control point adiacenti a un corner point; li denotiamo con \mathbf{e}_i^+ e \mathbf{e}_i^- , rispettivamente quello a destra e a sinistra di \mathbf{p}_i , cioè in direzione di \mathbf{p}_{i+1} e di \mathbf{p}_{i-1} . Nel caso di nostro interesse risulta:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_0^+ &:= \mathbf{g}_{10}, & \mathbf{e}_0^- &:= \mathbf{g}_{01}, \\ \mathbf{e}_1^+ &:= \mathbf{g}_{31}, & \mathbf{e}_1^- &:= \mathbf{g}_{20}, \\ \mathbf{e}_2^+ &:= \mathbf{g}_{23}, & \mathbf{e}_2^- &:= \mathbf{g}_{32}, \\ \mathbf{e}_3^+ &:= \mathbf{g}_{02}, & \mathbf{e}_3^- &:= \mathbf{g}_{13}.\end{aligned}$$

¹⁶Per evitare di appesantire la notazione e di differenziare inutilmente alcuni casi, è conveniente trattare questo indice come ciclico, considerandolo modulo 4 qualora coinvolto in operazioni.

- *Face point*: sono i control point interni; li indichiamo con \mathbf{f}_i^+ e \mathbf{f}_i^- , rispettivamente quello associato a \mathbf{e}_i^+ e a \mathbf{e}_i^- . Nel caso bicubico:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0^+ &:= \mathbf{g}_{110}, & \mathbf{f}_0^- &:= \mathbf{g}_{111}, \\ \mathbf{f}_1^+ &:= \mathbf{g}_{211}, & \mathbf{f}_1^- &:= \mathbf{g}_{210}, \\ \mathbf{f}_2^+ &:= \mathbf{g}_{220}, & \mathbf{f}_2^- &:= \mathbf{g}_{221}, \\ \mathbf{f}_3^+ &:= \mathbf{g}_{121}, & \mathbf{f}_3^- &:= \mathbf{g}_{120}. \end{aligned}$$

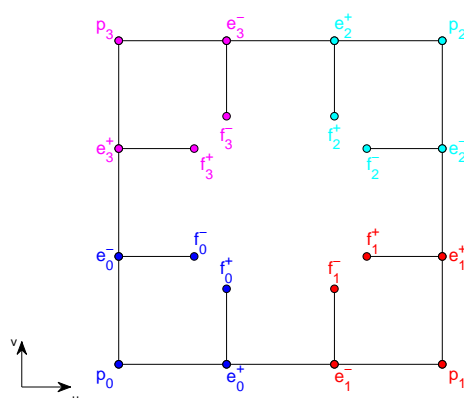


Figura 3.13: Nuovo labeling dei control point di un patch di Gregory bicubico.

3.3.3.1 Estrazione delle informazioni dalla superficie limite

Per effettuare il patching della superficie di Catmull-Clark usando patch di Gregory che ne approssimino la forma e si raccordino con continuità G^1 , è necessario estrarre dalla superficie di suddivisione le informazioni relative ai valori e alle derivate lungo il bordo della zona che viene ritagliata. A differenza di [LSNC09], dove le quantità per la definizione dei patch di Gregory sono espresse in funzione dei vertici della mesh iniziale \mathcal{M}_0 mediante le formule esplicite per la posizione e la tangente limite, noi otteniamo le informazioni necessarie attraverso l'algoritmo di valutazione di Stam. Questo approccio permette di realizzare il patching anche su sotto-patch solamente, non essendo vincolato alla corrispondenza tra una faccia di \mathcal{M}_0 e un patch intero.

In particolare, per la costruzione dei patch di Gregory bicubici, è sufficiente conoscere in ogni vertice dei patch coinvolti il valore della superficie limite e delle due derivate prime lungo le direzioni parametriche u e v : ogni patch di Catmull-Clark da sostituire è valutato nei corner, cioè nei punti corrispondenti ai parametri $(u, v) = (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$, vertici del dominio Q_1 . Si noti che nel caso in cui si vuole sostituire solamente un sotto-patch, occorre invece valutare la superficie di Catmull-Clark nei vertici del sotto-dominio corrispondente (per esempio $Q_{\frac{1}{2^k}} \subset Q_1$); ciò non comporta nessuna modifica nel procedimento che ora presentiamo.

Sia p l'indice del sotto-patch di superficie che andiamo a valutare: si rammenti che numeriamo con $p = 0, \dots, 3$ i quattro sotto-patch di cui è eventualmente composto il patch di Catmull-Clark se possiede più di un vertice straordinario (a causa del metodo di valutazione di Stam, Sezione 1.6); nel caso in cui il vertice straordinario sia uno solo, il patch non è suddiviso e poniamo $p = 0$. Ricordiamo che per $p \neq 0$ l'algoritmo di valutazione opera in cambiamenti di variabile sui parametri u, v necessari per portare l'origine del sistema di riferimento coincidente con il vertice straordinario e gli assi orientati positivamente.

Seguendo la notazione introdotta, denotiamo con $\mathbf{S}^i, \mathbf{S}_u^i, \mathbf{S}_v^i$ rispettivamente il valore della superficie di Catmull-Clark e delle derivate prime nell' i -esimo vertice del patch. Inoltre indichiamo con n_i la valenza di questo vertice. Per convenzione, se il patch possiede un unico vertice straordinario, a quel corner si attribuisce l'indice $i = 0$, e gli altri sono numerati in senso antiorario.

3.3.3.2 Condizioni per il raccordo G^1

Vogliamo definire i control point di ciascun patch di Gregory in maniera tale da ottenere il raccordo G^1 con i patch adiacenti, siano essi altri patch di Gregory o patch di Catmull-Clark regolari.

Corner point. Poiché il patch di Gregory interpola i propri vertici, prendiamo come corner point i punti limite della superficie di Catmull-Clark:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{S}^i, \quad i = 0, \dots, 3. \quad (3.26)$$

Edge point. Oltre alla posizione, vogliamo interpolare nei corner point anche il piano tangente della superficie limite. Pertanto, indicate con $\mathbf{q}_i^+, \mathbf{q}_i^-$ le tangenti limite nelle due direzioni e ricordando da (3.25) l'espressione delle derivate di un patch di Gregory in un vertice, è possibile determinare gli edge point $\mathbf{e}_i^+, \mathbf{e}_i^-$.

Per esempio, considerando il vertice $i = 0$ corrispondente a $(u, v) = (0, 0)$, le derivate del patch di Gregory sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial u}(0, 0) &= 3(\mathbf{e}_0^+ - \mathbf{p}_0), \\ \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial v}(0, 0) &= 3(\mathbf{e}_0^- - \mathbf{p}_0). \end{aligned}$$

Imponendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial u}(0, 0) &= \lambda_0 \mathbf{q}_0^+, \\ \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial v}(0, 0) &= \lambda_0 \mathbf{q}_0^-, \end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_0^+ &= \mathbf{p}_0 + \frac{2}{3}\lambda_0\mathbf{q}_0^+, \\ \mathbf{e}_0^- &= \mathbf{p}_0 + \frac{2}{3}\lambda_0\mathbf{q}_0^-\end{aligned}$$

Gli edge point relativi alle altre zone $i = 1, 2, 3$ si determinano in maniera analoga.

Il fattore di scala λ_i può essere scelto liberamente. In [LSNC09] si suggerisce di utilizzare l'*autovalore sotto-dominante* di Catmull-Clark

$$\lambda_i = \frac{1}{16} \left(5 + \cos\left(\frac{2\pi}{n_i}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{n_i}\right) \sqrt{18 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{n_i}\right)} \right),$$

in quanto conduce a buoni risultati in termini di forma della superficie; abbiamo verificato che in effetti è così.

La determinazione delle tangenti limite $\mathbf{q}_i^+, \mathbf{q}_i^-$ si basa sulla valutazione delle derivate $\mathbf{S}_u^i, \mathbf{S}_v^i$ della superficie di suddivisione.

- Se il vertice \mathbf{p}_i è regolare, $\mathbf{q}_i^+, \mathbf{q}_i^-$ sono espresse da:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_i^+ &:= \begin{cases} s_{(i+p) \bmod 4}^+ \mathbf{S}_u^i & \text{se } (i+p) \bmod 2 = 0, \\ s_{(i+p) \bmod 4}^+ \mathbf{S}_v^i & \text{se } (i+p) \bmod 2 = 1; \end{cases} \\ \mathbf{q}_i^- &:= \begin{cases} s_{(i+p) \bmod 4}^- \mathbf{S}_v^i & \text{se } (i+p) \bmod 2 = 0, \\ s_{(i+p) \bmod 4}^- \mathbf{S}_u^i & \text{se } (i+p) \bmod 2 = 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.27)$$

dove

$$\begin{aligned}\mathbf{s}^+ &:= (+1, +1, -1, -1), \\ \mathbf{s}^- &:= (+1, -1, -1, +1).\end{aligned}$$

In questo modo, se nessuno dei due estremi di una curva di bordo del patch è un vertice straordinario, si ricostruisce esattamente la curva cubica della superficie di Catmull-Clark originale.

- Se il vertice \mathbf{p}_i è straordinario, è necessario seguire una procedura diversa a causa di alcune problematiche legate al funzionamento dell'algoritmo di Stam e della sua estensione al caso di bordo, già evidenziate nella Sezione 1.6.

- Nel caso in cui \mathbf{p}_i è interno (cioè non è sul bordo di una mesh aperta), dato che non è possibile calcolare esattamente le derivate della superficie di suddivisione in corrispondenza del vertice straordinario (ad esempio, per i parametri $(u, v) = (0, 0)$), la stima migliore che è possibile ottenere consiste nella valutazione a una distanza ϵ , fissata nell'implementazione del metodo di Stam¹⁷. \mathbf{S}_u^i e \mathbf{S}_v^i sono pertanto ottenuti in questo modo:

1. Valutazione di $\tilde{\mathbf{S}}_u^i := \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(\epsilon, 0)$ e $\tilde{\mathbf{S}}_v^i := \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(0, \epsilon)$.
2. Poiché nella parametrizzazione di Stam la norma delle derivate prime diverge nell'intorno di un vertice straordinario, è necessario scalare i valori $\tilde{\mathbf{S}}_u^i, \tilde{\mathbf{S}}_v^i$ prima di usarli per costruire gli edge point del patch di Gregory. Nei nostri test abbiamo usato fattori di scala legati alla valenza n_i (e al livello k , nel caso di patching su $Q_{\frac{1}{2^k}} \subset Q_1$), tuttavia la determinazione dei valori più appropriati rimane una questione aperta.
3. Il piano tangente $\mathbf{T}_{\mathbf{p}_i}^{\mathbf{S}}$ alla superficie di Catmull-Clark nel punto \mathbf{p}_i risulta determinato dal versore normale $\hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{p}_i}$, calcolato correttamente dall'algoritmo di Stam. Per ottenere la continuità di $\mathbf{T}_{\mathbf{p}_i}^{\mathbf{S}}$ tra tutti gli n_i patch incidenti in \mathbf{p}_i , occorre assicurarsi che le derivate prime giacciono sul piano tangente comune, proiettando $\tilde{\mathbf{S}}_u^i, \tilde{\mathbf{S}}_v^i$ su $\mathbf{T}_{\mathbf{p}_i}^{\mathbf{S}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_u^i &:= \tilde{\mathbf{S}}_u^i - \tilde{\mathbf{S}}_u^i \cdot \hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{p}_i}, \\ \mathbf{S}_v^i &:= \tilde{\mathbf{S}}_v^i - \tilde{\mathbf{S}}_v^i \cdot \hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{p}_i}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

- Nel caso in cui \mathbf{p}_i è sul bordo, occorre procedere in un altro modo, perché il metodo proposto da [LB07] fornisce delle derivate tali che $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(0, 0) \parallel \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(0, 0)$. Queste non sono utilizzabili per i nostri scopi, in quanto un patch di Gregory costruito utilizzando tali valori non raggiunge i requisiti di continuità e qualità richiesti.

Le derivate sono stimate mediante un rapporto incrementale, valutando la superficie limite in corrispondenza dei parametri $(u, v) = (0, 0), (h, 0), (0, h)$, e quindi proiettate sul piano tangente comune definito dalla normale nel vertice straordinario:

1.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}_u^i &:= \frac{\mathbf{S}(h, 0) - \mathbf{S}(0, 0)}{h}, \\ \tilde{\mathbf{S}}_v^i &:= \frac{\mathbf{S}(0, h) - \mathbf{S}(0, 0)}{h}; \end{aligned}$$

¹⁷Si veda il paragrafo sui dettagli implementativi nella Sezione 1.6.

2.

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_u^i &:= \tilde{\mathbf{S}}_u^i - \tilde{\mathbf{S}}_u^i \cdot \hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{p}_i}, \\ \mathbf{S}_v^i &:= \tilde{\mathbf{S}}_v^i - \tilde{\mathbf{S}}_v^i \cdot \hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{p}_i}.\end{aligned}$$

Una volta calcolati, questi valori $\mathbf{S}_u^i, \mathbf{S}_v^i$ possono esseri utilizzati nella (3.27) per la determinazione degli edge point, come nel caso regolare.

Face point. La scelta di corner e edge point siffatti conduce a una superficie multi-patch con raccordo posizionale C^0 , e avente un piano tangente comune in ogni vertice dei patch; per ottenere la continuità del piano tangente ovunque, occorre definire opportunamente i face point.

Consideriamo due patch di Gregory bicubici adiacenti $\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2$, aventi un lato in comune; non è restrittivo supporre che tale lato sia quello avente per estremi i corner \mathbf{p}_0^1 e \mathbf{p}_1^1 del patch \mathbf{G}^1 . La condizione per la continuità del piano tangente richiede che la derivata lungo il bordo comune e le due derivate in direzione trasversale (dirette verso l'interno di ciascun patch) siano linearmente dipendenti lungo il lato comune. Seguendo la costruzione di [LS08] e [LSNC09], queste derivate sul bordo possono essere viste come dei campi vettoriali polinomiali, rispettivamente di grado 2, 3, 3:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^1(t) = \mathbf{u}^2(t) =: \mathbf{u}(t) &:= \sum_{i=0}^2 \mathbf{u}_i B_i^2(t) = \begin{pmatrix} (1-t)^2 & 2t(1-t) & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{v}^1(t) &:= \sum_{i=0}^3 \mathbf{v}_i^1 B_i^3(t) = \begin{pmatrix} (1-t)^3 & 3t(1-t)^2 & 3t^2(1-t) & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0^1 \\ \mathbf{v}_1^1 \\ \mathbf{v}_2^1 \\ \mathbf{v}_3^1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{v}^2(t) &:= \sum_{i=0}^3 \mathbf{v}_i^2 B_i^3(t) = \begin{pmatrix} (1-t)^3 & 3t(1-t)^2 & 3t^2(1-t) & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0^2 \\ \mathbf{v}_1^2 \\ \mathbf{v}_2^2 \\ \mathbf{v}_3^2 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{3.29}$$

dove gli apici si riferiscono ai rispettivi patch. I coefficienti di questi campi sono dei vettori di controllo, come illustrato in Figura 3.14, espressi rispettivamente dalle derivate di una curva di Bézier cubica:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_0 &= 3(\mathbf{e}_0^{+1} - \mathbf{p}_0^1), \\ \mathbf{u}_1 &= 3(\mathbf{e}_1^{-1} - \mathbf{e}_0^{+1}), \\ \mathbf{u}_2 &= 3(\mathbf{p}_1^1 - \mathbf{e}_1^{-1}),\end{aligned}\tag{3.30}$$

e dalle derivate di un patch di Gregory bicubico sul bordo (si ricordi (3.25)):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_0^1 &= 3 (\mathbf{e}_0^{-1} - \mathbf{p}_0^1), \\
 \mathbf{v}_1^1 &= 3 (\mathbf{f}_0^{+1} - \mathbf{e}_0^{+1}), \\
 \mathbf{v}_2^1 &= 3 (\mathbf{f}_1^{-1} - \mathbf{e}_1^{-1}), \\
 \mathbf{v}_3^1 &= 3 (\mathbf{e}_1^{+1} - \mathbf{p}_1^1).
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

I punti di controllo \mathbf{v}_i^2 sono definiti in maniera analoga a (3.31).

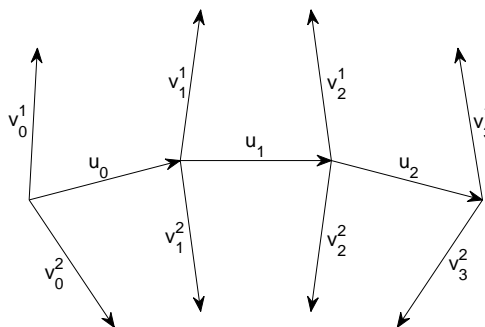


Figura 3.14: Vettori di controllo per i campi tangenti.

La *condizione per la continuità del piano tangente*, cioè la lineare dipendenza dei tre campi vettoriali \mathbf{u} , \mathbf{v}^1 , \mathbf{v}^2 , si esprime come

$$((1-t)c_0 - tc_1) \mathbf{u}(t) = \frac{1}{2} (\mathbf{v}^1(t) + \mathbf{v}^2(t)), \tag{3.32}$$

dove $c_i := \cos\left(\frac{2\pi}{n_i}\right)$, e $t = 0, 1$ in corrispondenza rispettivamente di $\mathbf{p}_0^1, \mathbf{p}_1^1$. La condizione (3.32) è specializzata al caso in cui i vettori \mathbf{u} , \mathbf{v}^1 , \mathbf{v}^2 per ogni coppia di patch formano un n -gono affine intorno al vertice (straordinario) comune: questa è la situazione in cui ci troviamo, in quanto costruiamo i patch di Gregory interpolando i dati della superficie di Catmull-Clark nei vertici dei patch.

Entrambi i membri della (3.32) sono polinomi cubici, infatti:

$$\begin{aligned}
((1-t)c_0 - tc_1) \mathbf{u}(t) &= ((1-t)c_0 - tc_1) ((1-t)^2 \mathbf{u}_0 + 2t(1-t) \mathbf{u}_1 + t^2 \mathbf{u}_2) \\
&= (1-t)^3 c_0 \mathbf{u}_0 - t(1-t)^2 c_1 \mathbf{u}_0 + t(1-t)^2 2c_0 \mathbf{u}_1 \\
&\quad - t^2(1-t) 2c_1 \mathbf{u}_1 + t^2(1-t) c_0 \mathbf{u}_2 - t^3 c_1 \mathbf{u}_2 \\
&= (1-t)^3 c_0 \mathbf{u}_0 + t(1-t)^2 (-c_1 \mathbf{u}_0 + 2c_0 \mathbf{u}_1) \\
&\quad + t^2(1-t) (-2c_1 \mathbf{u}_1 + c_0 \mathbf{u}_2) - t^3 c_1 \mathbf{u}_2 \\
&= \frac{1}{2} (\mathbf{v}^1(t) + \mathbf{v}^2(t)) = \frac{1}{2} \left((1-t)^3 (\mathbf{v}_0^1 + \mathbf{v}_0^2) + t(1-t)^2 3 (\mathbf{v}_1^1 + \mathbf{v}_1^2) \right. \\
&\quad \left. + t^2(1-t) 3 (\mathbf{v}_2^1 + \mathbf{v}_2^2) + t^3 (\mathbf{v}_3^1 + \mathbf{v}_3^2) \right) \\
&= (1-t)^3 \frac{1}{2} (\mathbf{v}_0^1 + \mathbf{v}_0^2) + t(1-t)^2 \frac{3}{2} (\mathbf{v}_1^1 + \mathbf{v}_1^2) \\
&\quad + t^2(1-t) \frac{3}{2} (\mathbf{v}_2^1 + \mathbf{v}_2^2) + t^3 \frac{1}{2} (\mathbf{v}_3^1 + \mathbf{v}_3^2).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Per il principio di identità dei polinomi, la (3.33) è equivalente a quattro condizioni scalari, ottenute uguagliando i coefficienti di Bézier (nella base di Bernstein) corrispondenti:

$$c_0 \mathbf{u}_0 = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_0^1 + \mathbf{v}_0^2), \tag{3.34a}$$

$$(-c_1 \mathbf{u}_0 + 2c_0 \mathbf{u}_1) = \frac{3}{2} (\mathbf{v}_1^1 + \mathbf{v}_1^2), \tag{3.34b}$$

$$(-2c_1 \mathbf{u}_1 + c_0 \mathbf{u}_2) = \frac{3}{2} (\mathbf{v}_2^1 + \mathbf{v}_2^2), \tag{3.34c}$$

$$-c_1 \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_3^1 + \mathbf{v}_3^2). \tag{3.34d}$$

Le condizioni (3.34a) e (3.34d) sono soddisfatte per costruzione, poiché nella definizione degli edge point interpoliamo le tangenti di Catmull-Clark nei vertici (si veda [LS08] Sezione 4.2). Le condizioni (3.34b) e (3.34c) sono soddisfatte costruendo dei vettori trasversali \mathbf{r}_i^\pm , diversi per ogni face point \mathbf{f}_i^\pm ma uguali per i due patch adiacenti, tali che

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1^1 &= -\frac{1}{3} c_1 \mathbf{u}_0 + \frac{2}{3} c_0 \mathbf{u}_1 + \mathbf{r}_0^+, \\
\mathbf{v}_1^2 &= -\frac{1}{3} c_1 \mathbf{u}_0 + \frac{2}{3} c_0 \mathbf{u}_1 - \mathbf{r}_0^+,
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_2^1 &= -\frac{2}{3} c_1 \mathbf{u}_1 + \frac{1}{3} c_0 \mathbf{u}_2 + \mathbf{r}_1^-, \\
\mathbf{v}_2^2 &= -\frac{2}{3} c_1 \mathbf{u}_1 + \frac{1}{3} c_0 \mathbf{u}_2 - \mathbf{r}_1^-.
\end{aligned}$$

Ricordando (3.30) e (3.31), da (3.35) otteniamo le espressioni per i face point del patch \mathbf{G}^1 relativi al lato $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_0^{+1} &= \frac{1}{3} (c_1\mathbf{p}_0^1 + (3 - 2c_0 - c_1)\mathbf{e}_0^{+1} + 2c_0\mathbf{e}_1^{-1} + \mathbf{r}_0^+), \\ \mathbf{f}_1^{-1} &= \frac{1}{3} (c_0\mathbf{p}_1^1 + (3 - 2c_1 - c_0)\mathbf{e}_1^{-1} + 2c_1\mathbf{e}_0^{+1} + \mathbf{r}_1^-).\end{aligned}\quad (3.36)$$

Per completezza, riportiamo anche l'espressione dell'altro face point della zona relativa a \mathbf{p}_0 :

$$\mathbf{f}_0^{-1} = \frac{1}{3} (c_3\mathbf{p}_0^1 + (3 - 2c_0 - c_3)\mathbf{e}_0^{-1} + 2c_0\mathbf{e}_3^{+1} + \mathbf{r}_0^{-1}).$$

In generale, i face point relativi al lato $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_{i+1}$ sono:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_i^+ &= \frac{1}{3} (c_{i+1}\mathbf{p}_i + (3 - 2c_i - c_{i+1})\mathbf{e}_i^+ + 2c_i\mathbf{e}_{i+1}^- + \mathbf{r}_i^+), \\ \mathbf{f}_{i+1}^- &= \frac{1}{3} (c_i\mathbf{p}_{i+1} + (3 - 2c_{i+1} - c_i)\mathbf{e}_{i+1}^- + 2c_{i+1}\mathbf{e}_i^+ + \mathbf{r}_{i+1}^-).\end{aligned}\quad (3.37)$$

Questa costruzione conduce a superfici aventi il piano tangente che varia con continuità.

Vettori trasversali. La scelta dei vettori trasversali \mathbf{r}_i^\pm è arbitraria; tuttavia il loro valore influenza fortemente la forma della superficie, in quanto rientrano nella definizione dei face point (cioè dei vettori twist) dei patch. Per esempio, prendendo i vettori nulli $\mathbf{r}_i^\pm = \mathbf{0}$, si ottiene una superficie multi-patch la cui continuità G^1 è sempre garantita, ma di qualità certamente opinabile, come mostra la Figura 3.15.

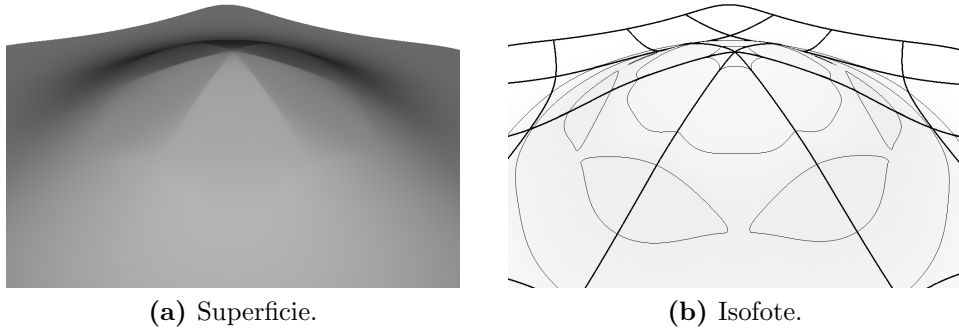


Figura 3.15: Complesso di patch di Gregory con vettori trasversali nulli $\mathbf{r}_i^\pm = \mathbf{0}$, $i = 0, 3$: la superficie è G^1 , come si evince dalla continuità delle isofote, ma la sua qualità è discutibile.

Presentiamo una procedura per determinare degli \mathbf{r}_i^\pm tali che lungo i *lati regolari*, cioè non aventi alcun vertice straordinario come estremo, il patch riproduca le B-spline bicubiche e quindi la superficie risulti C^2 . Questa costruzione differisce da quella proposta in [LSNC09], in quanto fa uso dei valori della superficie limite \mathbf{S} invece che dei vertici della mesh originale \mathcal{M}_0 .

Il processo si divide in due fasi.

1. Per ogni patch, oltre ai corner point e agli edge point, si costruiscono i vettori trasversali relativi ai soli lati regolari, con il metodo descritto nel seguito, e si determinano completamente i face point corrispondenti, mediante (3.37). I vettori trasversali relativi ai lati aventi almeno uno degli estremi straordinario sono provvisoriamente presi nulli, e i face point inizializzati di conseguenza.
2. Per i patch aventi lati non regolari, si costruiscono i corretti vettori trasversali relativi a quei lati, e si aggiornano opportunamente i face point corrispondenti.

Questa suddivisione è dovuta al fatto che nella seconda fase si ha bisogno di accedere alle informazioni relative ai vertici \mathbf{p}_i^j , $i = 0, \dots, 3$, $j = 0, \dots, n - 1$ di *tutti* gli n patch del complesso intorno al vertice straordinario: poiché i corner point sono determinati durante la fase 1, è necessario attendere la fine del primo ciclo sui patch.

Nel patching di nostro interesse, sono sicuramente lati non regolari quelli uscenti dal vertice straordinario: due lati per patch, condivisi a coppie con i patch adiacenti. Gli altri, quelli che costituiscono il bordo del complesso dei patch di Gregory, sono regolari, tranne nel caso in cui la mesh originale abbia vertici straordinari non isolati e si scelga di effettuare la sostituzione degli interi patch di Catmull-Clark.

Nel caso di vertice straordinario sul bordo, i due lati che costituiscono l'orlo della superficie sono trattati come se fossero regolari, in quanto il metodo [LB07] per la valutazione della superficie limite è tale da riprodurre le B-spline cubiche lungo questi lati.

Discutiamo nel dettaglio la procedura per la costruzione dei vettori trasversali.

1. Una volta definiti i corner \mathbf{p}_i e gli edge point \mathbf{e}_i , $i = 0, \dots, 3$ del patch, i vettori trasversali \mathbf{r}_i^+ , \mathbf{r}_{i+1}^- relativi al lato regolare $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_{i+1}$ sono determinati nel modo descritto nel seguito; in caso di lato non regolare, sono provvisoriamente presi nulli $\mathbf{r}_i^+ = \mathbf{0}$, $\mathbf{r}_{i+1}^- = \mathbf{0}$ in attesa della seconda fase.

Indichiamo con $\ell_i \subset Q_1$ il lato del dominio parametrico corrispondente al bordo $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_{i+1}$ del patch.

Valutiamo la derivata del patch di Catmull-Clark originale nella direzione trasversale rispetto al lato ℓ_i , in due punti $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \ell_i$: le coppie di parametri hanno, ovviamente, una componente costante che identifica il lato del quadrato unitario, e l'altra coordinata con valori $\frac{1}{3}$ o $\frac{2}{3}$. Attribuiamo l'indice 1 al punto più vicino alla retroimmagine $\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{p}_i)$, e l'indice 2 al punto più vicino alla retroimmagine $\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{p}_{i+1})$. Per esempio, per il lato $\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3$ si ha che ℓ_2 ha estremi $\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{p}_2) = (1, 1)$ e $\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{p}_3) = (0, 1)$, e quindi $(u_1, v_1) = (\frac{2}{3}, 1)$, $(u_2, v_2) = (\frac{1}{3}, 1)$. Denotiamo i valori della derivata in corrispondenza di queste due coppie di parametri con $\mathbf{S}_{\partial 1}$, $\mathbf{S}_{\partial 2}$ rispettivamente.

I vettori trasversali sono ricavati esplicitando \mathbf{r}_i^\pm dalle formule (3.37) per i face point, dove i due \mathbf{f}_i^\pm relativi a ogni lato sono determinati risolvendo il sistema di due equazioni ottenuto uguagliando i valori noti $\mathbf{S}_{\partial 1}$, $\mathbf{S}_{\partial 2}$ all'espressione della derivata trasversale a ℓ_i del patch di Gregory in termini dei control point, rispettivamente valutata in (u_1, v_1) e (u_2, v_2) . Per esempio, per il lato $\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3$ (cioè ℓ_2 , corrispondente $v = 1$), la derivata da considerare è

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial v}(u, 1) &= 3 \sum_{i=0}^3 B_i^3(u) (\mathbf{g}_{i3} - \mathbf{g}_{i20}) \\ &= 3 \left(B_0^3(u)(\mathbf{p}_3 - \mathbf{e}_3^+) + B_1^3(u)(\mathbf{e}_3^- - \mathbf{f}_3^-) \right. \\ &\quad \left. + B_2^3(u)(\mathbf{e}_2^+ - \mathbf{f}_2^+) + B_3^3(u)(\mathbf{p}_2 - \mathbf{e}_2^-) \right), \end{aligned}$$

e quindi il sistema risulta essere

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial v}(\frac{2}{3}, 1) = \mathbf{S}_{\partial 1} \\ \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial v}(\frac{1}{3}, 1) = \mathbf{S}_{\partial 2} \end{cases}.$$

Risolvendo per \mathbf{f}_2^+ , \mathbf{f}_3^- , otteniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_2^+ &= \frac{1}{2}\mathbf{S}_{\partial 1} - \mathbf{S}_{\partial 2} + \frac{5}{6}\mathbf{p}_3 + \mathbf{e}_3^- - \frac{1}{3}\mathbf{p}_2 - \frac{5}{6}\mathbf{e}_3^+ + \frac{1}{3}\mathbf{e}_2^-, \\ \mathbf{f}_3^- &= -\mathbf{S}_{\partial 1} + \frac{1}{2}\mathbf{S}_{\partial 2} - \frac{1}{3}\mathbf{p}_3 + \mathbf{e}_2^+ + \frac{5}{6}\mathbf{p}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{e}_3^+ - \frac{5}{6}\mathbf{e}_2^-. \end{aligned}$$

Dalle formule (3.37) per i face point, ricaviamo i vettori trasversali in termini dei valori delle derivate della superficie e dei control point coinvolti,

che sono tutte quantità note:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_2^+ &= 3\mathbf{f}_2^+ - c_3\mathbf{p}_2 - (3 - 2c_2 - c_3)\mathbf{e}_2^+ - 2c_2\mathbf{e}_3^- \\
&= -3\mathbf{S}_{\partial 1} + \frac{3}{2}\mathbf{S}_{\partial 2} - \frac{5}{2}\mathbf{e}_2^- + \left(-c_3 + \frac{5}{2}\right)\mathbf{p}_2 + (2c_2 + c_3)\mathbf{e}_2^+ - 2c_2\mathbf{e}_3^- - \mathbf{p}_3 + \mathbf{e}_3^+, \\
\mathbf{r}_3^- &= 3\mathbf{f}_3^- - c_2\mathbf{p}_3 - (3 - 2c_3 - c_2)\mathbf{e}_3^- - 2c_3\mathbf{e}_2^+ \\
&= \frac{3}{2}\mathbf{S}_{\partial 1} - 3\mathbf{S}_{\partial 2} + \mathbf{e}_2^- - \mathbf{p}_2 - 2c_3\mathbf{e}_2^+ + (2c_3 + c_2)\mathbf{e}_3^- + \left(-c_2 + \frac{5}{2}\right)\mathbf{p}_3 - \frac{5}{2}\mathbf{e}_3^+.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

In virtù della simmetria ciclica dei control point, le espressioni della forma (3.38) possono essere implementate nel modo seguente. Definiamo una matrice avente i punti 3D $\mathbf{S}_{\partial 1}$, $\mathbf{S}_{\partial 2}$ come colonne:

$$\mathbf{V} := (\mathbf{S}_{\partial 1} \ \mathbf{S}_{\partial 2}),$$

e una matrice

$$\mathbf{P} := (\mathbf{e}_i^- \ \mathbf{p}_i \ \mathbf{e}_i^+ \ \mathbf{e}_{i+1}^- \ \mathbf{p}_{i+1} \ \mathbf{e}_{i+1}^+),$$

avente sulle colonne i corner e gli edge point relativi alle zone i -esima e $i + 1$ -esima. Costruiamo anche i vettori di pesi

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_V^+ &:= \begin{cases} (+3, -\frac{3}{2}) & \text{se } i = 0, 3, \\ (-3, +\frac{3}{2}) & \text{se } i = 1, 2; \end{cases} \\
\mathbf{w}_V^- &:= \text{flip}(\mathbf{w}_V^+) := \begin{cases} (-\frac{3}{2}, +3) & \text{se } i = 0, 3, \\ (+\frac{3}{2}, -3) & \text{se } i = 1, 2; \end{cases}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_P^+ &:= \left(-\frac{5}{2}, -c_{i+1} + \frac{5}{2}, 2c_i + c_{i+1}, -2c_i, -1, 1\right), \\
\mathbf{w}_P^- &:= \left(1, -1, -2c_{i+1}, 2c_{i+1} + c_i, -c_i + \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right).
\end{aligned}$$

Le componenti dei vettori trasversali \mathbf{r}_i^+ , \mathbf{r}_{i+1}^- sono così calcolate:

$$\begin{aligned}
r_i^{+(\chi)} &= (\mathbf{w}_V^+ \ \mathbf{w}_P^+) \cdot (\mathbf{V} \ \mathbf{P}_i)^{(\chi)}, \\
r_{i+1}^{-(\chi)} &= (\mathbf{w}_V^- \ \mathbf{w}_P^-) \cdot (\mathbf{V} \ \mathbf{P}_i)^{(\chi)},
\end{aligned} \tag{3.39}$$

con $\chi \in \{x, y, z\}$, e dove $\mathbf{X}^{(\chi)}$ indica la riga di una matrice \mathbf{X} contenente i valori della coordinata χ dei vettori che costituiscono le colonne di \mathbf{X} .

2. I vettori trasversali relativi a lati contenenti almeno un vertice straordinario sono definiti una volta determinati i corner e gli edge point di tutti i patch del complesso. Di conseguenza, i face point corrispondenti, calcolati durante la fase 1, sono aggiornati con i nuovi valori. Per esempio, nel patching della superficie di Catmull-Clark intorno a un vertice straordinario isolato, in questa fase si costruiscono i vettori trasversali (e si aggiornano i face point) relativi ai lati $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_3\mathbf{p}_0$ di ogni patch di Gregory¹⁸: \mathbf{r}_0^+ , \mathbf{r}_1^- , e \mathbf{r}_3^+ , \mathbf{r}_0^- .

In particolare, per definire i vettori trasversali del j -esimo patch del complesso sono utilizzati i corner point dei patch $j - 1$ e $j + 1$ (numerando i patch in senso antiorario). Il vertice straordinario comune ai patch sia $\mathbf{p}_0^j =: \mathbf{p}_0$, $j = 0, \dots, n - 1$. Chiamiamo

$$\mathbf{c}^j := \frac{1}{4} \sum_{i=0}^3 \mathbf{p}_i^j,$$

$$\mathbf{m}_i^j := \frac{1}{2} (\mathbf{p}_i^j + \mathbf{p}_{i+1}^j),$$

rispettivamente il centroide del j -esimo patch e il punto medio del lato $\mathbf{p}_i^j\mathbf{p}_{i+1}^j$. Per costruzione dei corner point, vale $\mathbf{m}_0^j = \mathbf{m}_3^{j-1}$.

I vettori trasversali sono quindi dati da

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0^+ &= \frac{1}{3} (\mathbf{m}_3^j - \mathbf{m}_0^{j-1}) + \frac{2}{3} (\mathbf{c}^j - \mathbf{c}^{j-1}), \\ \mathbf{r}_1^- &= \frac{1}{3} (\mathbf{m}_1^j - \mathbf{m}_2^{j-1}) + \frac{2}{3} (\mathbf{c}^j - \mathbf{c}^{j-1}), \\ \mathbf{r}_3^+ &= \frac{1}{3} (\mathbf{m}_2^j - \mathbf{m}_1^{j+1}) + \frac{2}{3} (\mathbf{c}^j - \mathbf{c}^{j+1}), \\ \mathbf{r}_0^- &= \frac{1}{3} (\mathbf{m}_0^j - \mathbf{m}_3^{j+1}) + \frac{2}{3} (\mathbf{c}^j - \mathbf{c}^{j+1}). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Questa costruzione tiene in considerazione le informazioni sui patch vicini, pertanto garantisce che per patch adiacenti i vettori trasversali siano uguali e opposti, come richiesto dalla (3.35) per ottenere la continuità G^1 .

3.3.4 Analisi dei risultati

Le Figure 3.16 e 3.17 mostrano alcuni esempi di patching con la tecnica descritta, rispettivamente sostituendo interamente o parzialmente i patch originali di Catmull-Clark. L'analisi delle isofote (Figura 3.18) e del campo di

¹⁸Per i corner di un patch, adottiamo la solita numerazione, attribuendo l'indice 0 al vertice straordinario e numerando gli altri progressivamente, in senso antiorario.

versori normali¹⁹ evidenzia la continuità del piano tangente nel raccordo tra i patch di Gregory adiacenti, disposti intorno a un vertice straordinario. Si noti che la qualità della superficie ottenuta è pesantemente influenzata dal valore scelto per scalare le derivate della superficie di Catmull-Clark nel vertice straordinario, durante la costruzione degli edge point. La determinazione del fattore di scala più conveniente rimane una questione aperta: un possibile approccio consiste nel cercare di soddisfare un criterio di “ottimalità”, che deve essere opportunamente definito.

Inoltre, vicino a un vertice straordinario, la parametrizzazione data dai patch di Gregory appare migliore rispetto a quella naturale²⁰: come mostra la Figura 3.19, nel caso di patching à la Gregory le curve isoparametriche sono distribuite più uniformemente.

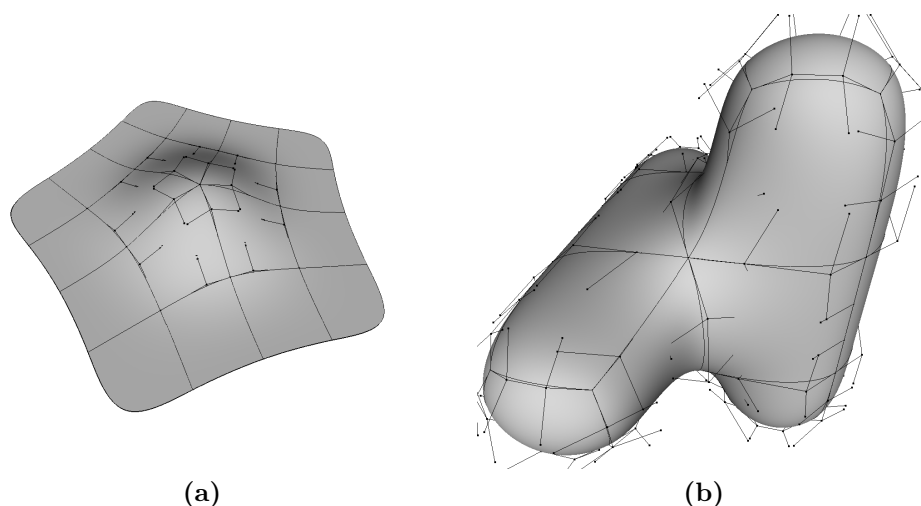


Figura 3.16: Esempi di patching della superficie di Catmull-Clark con patch di Gregory: ciascun patch di Catmull-Clark intorno ai vertici straordinari è interamente sostituito da un patch di Gregory bicubico.

3.3.5 Conclusioni

Il patching della superficie di Catmull-Clark mediante patch di Gregory bicubici ha permesso di ottenere una superficie:

- G^1 intorno ai vertici straordinari;
- con raccordo C^2 con le zone regolari;

¹⁹Non mostrato a causa della scarsa efficacia che una immagine statica ha in questo caso.

²⁰La parametrizzazione usata dal metodo di Stam (Sezione 1.6), basata sulla mappa caratteristica (Sezione 1.4.2).

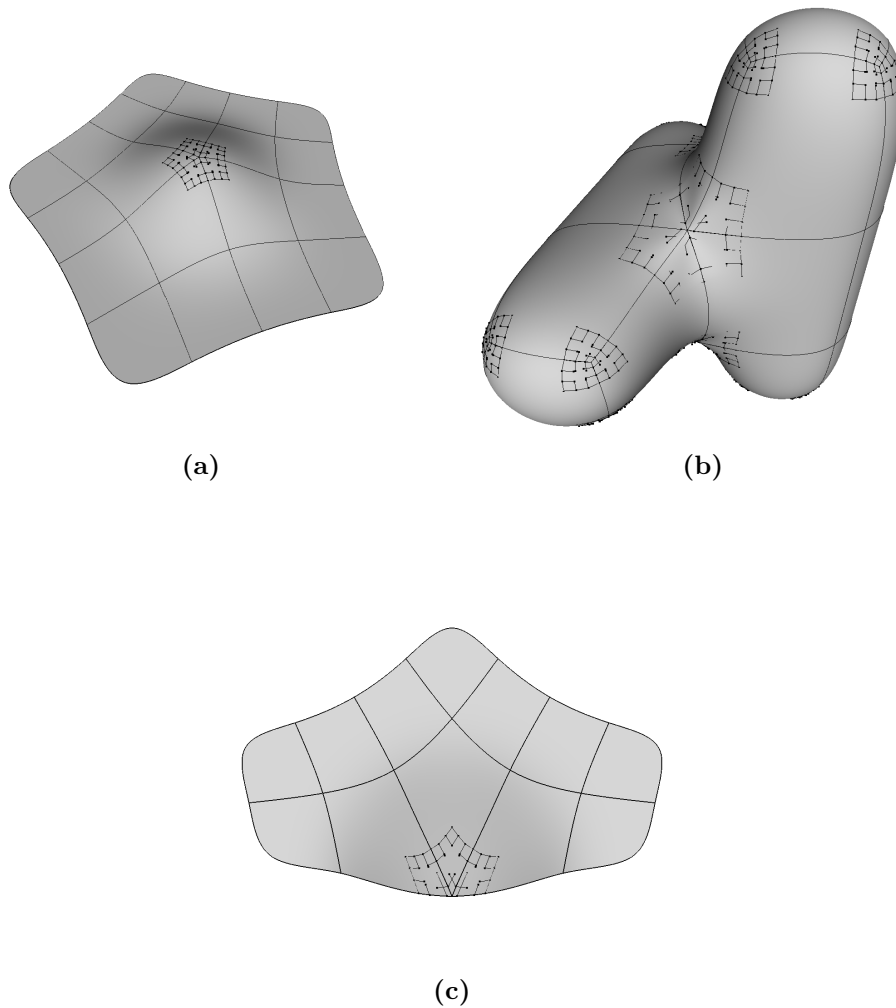


Figura 3.17: Esempi di patching della superficie di Catmull-Clark con patch di Gregory: ciascun patch di Gregory sostituisce solo un sotto-patch del patch originale.

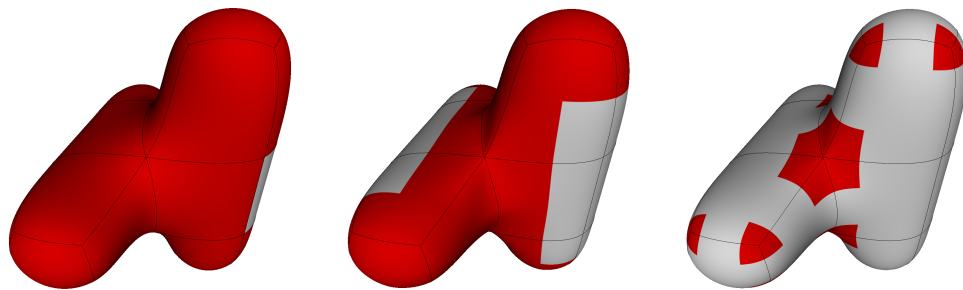
- non afflitta dai problemi intrinseci della parametrizzazione di Stam sulle derivate prime vicino ai vertici straordinari;
- di buona qualità.

La costruzione dei patch richiede solamente la valutazione della superficie limite nei vertici delle regioni da sostituire, e in alcuni punti particolari, mediante l'algoritmo di Stam.

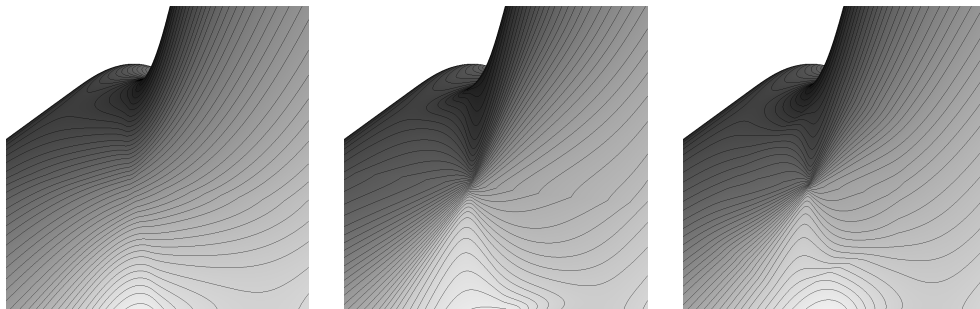
Inoltre la scelta di utilizzare patch di Gregory è supportata dalla loro flessibilità e diffusione in alcuni ambienti di modellazione (come ThinkDesign), a differenza degli overlap patch di Várady.

Rimane da indagare la possibilità di impiegare patch di Gregory biquintici per raggiungere la continuità G^2 intorno ai vertici straordinari, oltre alla ricerca

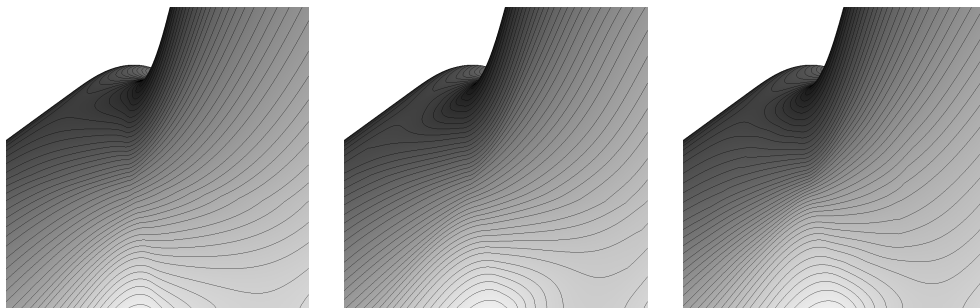
del fattore di scala più opportuno per scalare le derivate prime della superficie di Catmull-Clark durante la costruzione degli edge point.



(a) Regioni di patching.



(b) Il fattore di scala per le derivate prime nella costruzione degli edge point è scelto automaticamente, in base alla valenza del vertice straordinario e al livello k .



(c) Il fattore di scala per le derivate prime nella costruzione degli edge point è aggiustato empiricamente, in modo tale da migliorare la qualità della superficie.

Figura 3.18: Patching al variare del livello k del sotto-dominio $Q_{\frac{1}{2^k}} := [0, \frac{1}{2^k}]^2$ in corrispondenza del quale è costruito il patch di Gregory. Colonna a sinistra: $k = 0$; colonna al centro $k = 1$; colonna a destra: $k = 2$. Le isofote sono continue, quindi la superficie è G^1 .

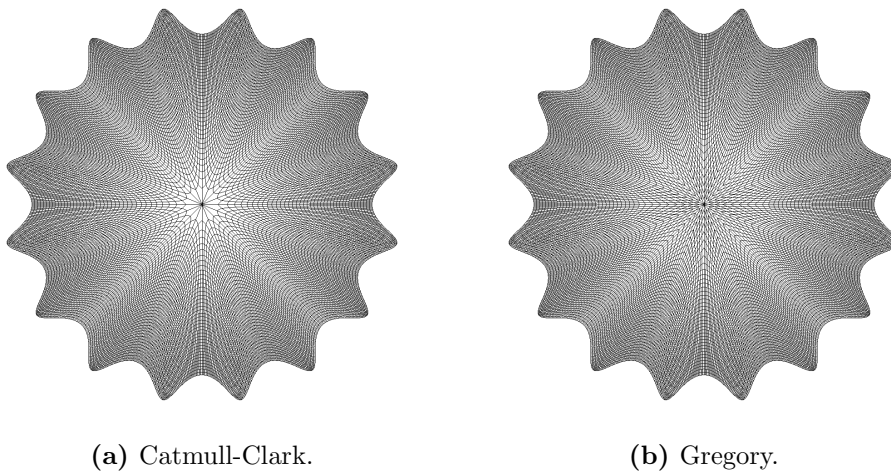


Figura 3.19: Comportamento delle curve isoparametriche nelle vicinanze di un vertice straordinario di valenza elevata. Confronto tra la superficie di Catmull-Clark con parametrizzazione naturale e la superficie ottenuta con il patching à la Gregory.

Conclusioni e sviluppi futuri

In conclusione, riassumiamo i risultati ottenuti in questo lavoro, e indichiamo alcune direzioni di ricerca nelle quali è possibile sviluppare ulteriori approfondimenti.

In questo elaborato abbiamo presentato alcune proposte di modifica locale alle superfici di suddivisione di Catmull-Clark, con lo scopo di correggere le singolarità e migliorare la qualità di forma intorno ai vertici straordinari, in modo tale da soddisfare i requisiti richiesti per l'utilizzo di questa classe di superfici nel contesto CAD. A tale scopo, abbiamo seguito due differenti approcci: il primo, basato sul blending della superficie originale con una superficie polinomiale approssimante opportunamente definita; il secondo, che prevede la diretta sostituzione (patching) delle regioni problematiche con patch razionali adeguatamente raccordati tra loro e con la superficie circostante.

Per quanto riguarda la tecnica del blending, abbiamo sperimentato due differenti possibilità per la definizione del polinomio approssimante, che garantiscono entrambe la continuità C^2 della superficie finale. In un caso abbiamo determinato i coefficienti del polinomio attraverso una approssimazione ai minimi quadrati, mentre nell'altro minimizzando un opportuno funzionale di tipo energia. Entrambi i metodi ci hanno permesso di generare superfici di qualità soddisfacente utilizzando polinomi di grado basso (in particolare cubici), dimostrandosi equivalenti sotto questo punto di vista, ma con un costo computazionale leggermente inferiore nel caso dei minimi quadrati.

Seguendo invece l'idea del patching, abbiamo dapprima studiato come sostituire ciascuna regione problematica della superficie con un unico patch razionale definito come overlap patch (o patch di Várady). Poiché questo metodo, almeno nella sua forma originale, si è rivelato inefficace nel contesto in esame, abbiamo optato per l'utilizzo di un complesso di più patch di Gregory bicubici, che ci ha permesso di ottenere la qualità di forma desiderata, ma solo continuità di ordine G^1 .

Paragonando tra loro i due approcci seguiti, ne mettiamo in evidenza i rispettivi pregi e possibili inconvenienti. Il metodo del blending genera superfici C^2 e di qualità soddisfacente in base alla nostra sperimentazione numerica. Tuttavia a livello teorico non è possibile escludere la presenza di oscillazioni non predicibili nella superficie finale, che non sono però state riscontrate in casi

di interesse pratico. Al contrario, il patching à la Gregory non presenta nessun inconveniente teorico noto, tuttavia, volendo utilizzare patch polinomiali di grado basso, è possibile ottenere superfici di buona qualità visiva, ma solo G^1 . Un vantaggio che l'utilizzo dei patch di Gregory comporta, rispetto alla tecnica del blending polinomiale, è il miglioramento della parametrizzazione della superficie nell'intorno dei vertici straordinari, nel senso che la norma delle derivate prime non diverge e le linee isoparametriche corrispondenti a parametri equispaziati sono distribuite in maniera uniforme. A livello di efficienza di calcolo, il patching à la Gregory implica un costo computazionale maggiore rispetto al blending polinomiale a causa della natura razionale dei patch utilizzati, che si riflette in un aumento percettibile dei tempi di elaborazione. Inoltre, nel caso del blending, la maggior parte delle informazioni possono essere calcolate in fase di preprocessing, il che contribuisce significativamente a velocizzare la procedura. Entrambi i metodi permettono comunque la visualizzazione e la modifica interattiva della superficie in tempo reale durante la fase di modellazione.

Complessivamente, i due metodi costituiscono due approcci differenti al problema della correzione locale delle superfici di suddivisione, e quale possa risultare più conveniente dipende strettamente dalle esigenze dello specifico contesto applicativo. È importante sottolineare che l'esistenza dei punti critici evidenziati non significa che i metodi proposti non raggiungano qualità accettabile in ambito CAD. A sostegno di questa affermazione, il blending polinomiale è alla base dell'attuale gestione dei vertici straordinari delle superfici di suddivisione nella suite di progettazione ThinkDesign. Per quanto riguarda il patching à la Gregory, possiamo invece affermare che questa proposta non è ancora sufficientemente matura per soddisfare le richieste sulla continuità necessarie nel contesto CAD. Ottenere superfici con regolarità G^2 seguendo questo approccio sarebbe possibile, ma richiederebbe l'utilizzo di polinomi di grado 5: questa soluzione unirebbe i vantaggi del blending in termini di regolarità e del patching rispetto alla qualità della parametrizzazione e all'assenza teorica di artefatti. Una tecnica di patching G^2 si presterebbe inoltre ad essere integrata in un sistema di modellazione commerciale, come già fatto per il blending, permettendo un confronto diretto tra i due metodi riguardo alla qualità delle superfici ottenute. Possiamo quindi affermare che lo studio di tecniche basate su patch di Gregory biquintici rappresenta uno dei più interessanti sviluppi futuri di questo lavoro di tesi.

Per concludere è importante evidenziare che i metodi qui proposti hanno comunque dimostrato di poter correggere in modo efficace i comportamenti critici delle superfici di Catmull-Clark. Inoltre, la loro flessibilità permette di agire su diversi parametri, che, se opportunamente scelti, potrebbero influenzare significativamente i risultati ottenuti. A tal proposito citiamo nel seguito

i più significativi aspetti che potrebbero essere studiati al fine di perfezionare ulteriormente i risultati raggiunti sotto il profilo della qualità di forma.

In particolare, per quanto riguarda il metodo basato sul blending, può essere interessante sperimentare l'utilizzo di altri funzionali per la definizione del polinomio ottimale. Per esempio, utilizzando anche le derivate prime e terze nel funzionale (2.12), con previo studio dell'integrabilità della funzione integranda, oppure altri funzionali energia come quelli discussi in [JS07] o elencati in [HL93] Sezione 13.2. Inoltre, è auspicabile che l'integrazione analitica (invece che numerica) di questi funzionali di fairness, utilizzando un approccio analogo a quello proposto in [HKD93] Appendice B, e quindi l'incremento di precisione che essa comporta, si rifletta in maniera positiva sulla qualità delle superfici risultanti. Nel caso in cui queste indagini mettessero in evidenza la superiorità dei risultati ottenuti con il polinomio ottimale rispetto a quelli raggiunti con il polinomio di approssimazione ai minimi quadrati, sarebbe di grande rilevanza l'estensione della costruzione che sfrutta il fairing anche intorno ai vertici straordinari sul bordo.

Nell'approccio mediante patching locale, la qualità delle superfici costruite può essere certamente migliorata attraverso la determinazione automatica del valore più opportuno per scalare le derivate della superficie di Catmull-Clark nei vertici straordinari, durante la definizione degli edge point.

Infine, tra i problemi aperti citati, ricordiamo il seguente. Per effettuare il blending polinomiale è necessario individuare il dominio parametrico di definizione del polinomio approssimante nell'intorno del vertice straordinario. A tale scopo attualmente si sfrutta la mappa caratteristica, che presenta tuttavia notevoli difficoltà di gestione e calcolo (derivate prime divergenti in norma nei vertici straordinari). I patch di Gregory, introdotti in questa tesi per sostituire localmente la superficie, potrebbero essere sfruttati per definire una parametrizzazione alternativa, priva delle problematiche evidenziate.

Appendice A

Richiami di geometria differenziale di curve e superfici

Riportiamo alcuni concetti, definizioni e proprietà utilizzati nel corso dell'elaborato. Per una trattazione estesa di questi argomenti di geometria differenziale, fare riferimento a [dC76].

A.1 Curve parametriche

Definizione A.1. Una *curva* è l'immagine di un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ (che può essere aperto, semi-aperto o chiuso, limitato o illimitato) mediante una mappa continua, localmente iniettiva a valori nello spazio topologico \mathcal{X} . Tipicamente \mathcal{X} è \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 , e si parla rispettivamente di curva piana (o 2D) e di curva nello spazio (o 3D).

In questo modo una curva può essere considerata come l'insieme di punti $\mathbf{p} \in \mathcal{X}$ che sono i valori di una funzione $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathcal{X}$ di un parametro reale $t \in I$ a valori (vettoriali) in \mathcal{X} . La mappa $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ è detta *parametrizzazione* della curva.

Definizione A.2. Una curva parametrica $\mathbf{c}(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$ (dove $n := \dim \mathcal{X}$), è detta *differenziabile* se lo sono le componenti della parametrizzazione, cioè se le $c_i : I \rightarrow \mathcal{X}$ hanno derivate continue in ogni punto.

Una parametrizzazione $\mathbf{c}(t)$ è detta *regolare* se è differenziabile e $\|\mathbf{c}'(t)\| \neq 0 \forall t \in I$. Un punto $\mathbf{p} := \mathbf{c}(\bar{t})$ della curva in cui $\|\mathbf{c}'(\bar{t})\| = 0$ è detto *singolare*, e la curva ha in \mathbf{p} una *cuspid*.

Definizione A.3. Due parametrizzazioni si dicono *equivalenti* se la trasformazione di parametro $t = t(s)$ è una funzione invertibile.

A.1.1 Lunghezza

Definizione A.4. Sia data una curva $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathcal{X}$ e sia $\mathcal{P} := \{t_i \in I\}_{i=0, \dots, N}$ una partizione finita dell'intervallo parametrico $I := [a, b]$ tale che $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$. Se \mathcal{X} è uno spazio metrico oltre che topologico, cioè se è definita una distanza d su \mathcal{X} , si può definire la *lunghezza* della curva \mathbf{c} come estremo superiore, al variare della partizione \mathcal{P} , della lunghezza della poligonale avente come vertici le immagini dei nodi t_i tramite \mathbf{c} , cioè

$$L[\mathbf{c}] := \sup \left\{ \sum_{i=1}^N d(\mathbf{c}(t_i), \mathbf{c}(t_{i-1})) \mid N \in \mathbb{N} \text{ e } a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b \right\}.$$

Se tale valore non è infinito, la curva si dice *rettificabile*.

Osservazione 9. La lunghezza di una curva non dipende dalla sua parametrizzazione, cioè non varia se si considerano parametrizzazioni equivalenti.

Osservazione 10. La lunghezza di una curva parametrica differenziabile $\mathbf{c}(t)$ può essere calcolata come

$$L[\mathbf{c}] = \int_I \|\mathbf{c}'(t)\| dt.$$

In particolare, se $\|\mathbf{c}'(t)\| = 1, \forall t \in I$, allora il parametro t può essere interpretato come la *lunghezza d'arco* della curva \mathbf{c} .

A.1.2 Curvatura e torsione

Definizione A.5. La *curvatura* di una curva $\mathbf{c}(t)$ differenziabile almeno due volte è definita come

$$\kappa(t) := \frac{\|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\|}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3}.$$

Si definisce *raggio di curvatura* l'inverso della curvatura, cioè $r_\kappa(t) := \frac{1}{\kappa(t)}$.

La curvatura esprime la deviazione di una curva da una linea retta (per la quale $\kappa = 0, \forall t \in I$). Il raggio di curvatura in un punto \bar{t} può essere interpretato geometricamente come il raggio della circonferenza avente in \bar{t} le derivate prima e seconda coincidenti con quelle della curva $\mathbf{c}(t)$.

Definizione A.6. La *torsione* di una curva $\mathbf{c}(t)$ differenziabile almeno tre volte è definita come

$$\tau(t) := -\frac{(\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)) \cdot \mathbf{c}'''(t)}{\|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\|^2}.$$

La torsione esprime la deviazione di una curva da una curva piana (per la quale $\tau = 0 \forall t \in I$ in cui $\kappa \neq 0$).

Osservazione 11. Le funzioni κ e τ sono invarianti della curva, cioè i loro valori non dipendono dalla parametrizzazione.

Osservazione 12. $\kappa(t)$ (con $\kappa(t) \neq 0$) e $\tau(t)$ costituiscono un *sistema invariante completo*, cioè determinano univocamente una curva $\mathbf{c}(t)$ (a meno della sua posizione nello spazio \mathcal{X}).

A.1.3 Riferimento di Frenet

Definizione A.7. Un *sistema di Frenet* per la curva $\mathbf{c}(t)$ è un sistema di riferimento mobile di $n := \dim \mathcal{X}$ vettori ortonormali $\mathbf{F}_1(t), \dots, \mathbf{F}_n(t)$ dipendenti da t , utili per descrivere il comportamento locale della curva.

Nel caso in cui $\mathcal{X} = \mathbb{R}^3$, i vettori del sistema risultano essere:

- *versore tangente* $\mathbf{F}_1(t) := \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$;
- *versore normale (principale)* $\mathbf{F}_2(t) := \frac{\mathbf{c}''(t) - (\mathbf{c}''(t) \cdot \mathbf{F}_1(t)) \mathbf{F}_1(t)}{\|\mathbf{c}''(t) - (\mathbf{c}''(t) \cdot \mathbf{F}_1(t)) \mathbf{F}_1(t)\|}$;
- *versore binormale* $\mathbf{F}_3(t) := \mathbf{F}_1(t) \times \mathbf{F}_2(t)$.

I vettori tangente e normale generano il *piano osculatore* alla curva $\mathbf{c}(t)$, i vettori normale e binormale generano il *piano normale*, i vettori tangente e binormale generano il *piano rettificante*.

A.2 Superfici parametriche

Definizione A.8. Una *superficie* è l'immagine di un dominio aperto e connesso $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ mediante una mappa differenziabile, localmente iniettiva a valori in \mathbb{R}^3 .

In questo modo una superficie può essere considerata come l'insieme di punti $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ che sono i valori di una funzione $\mathbf{S} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ di due parametri reali $(u, v) \in \Omega$ a valori (vettoriali) in \mathbb{R}^3 . La mappa $\mathbf{S} = \mathbf{S}(u, v)$ è detta *parametrizzazione* della superficie.

Definizione A.9. Una superficie parametrica definita *a tratti* è una superficie \mathbf{S} costituita da una collezione di immagini $\{\mathbf{S}_i(\Omega_i)\}_{i=1, \dots, n_{\text{patch}}}$ di *patch* $\mathbf{S}_i : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}^3$, dove gli $\Omega_i \subset \mathbb{R}^2$ sono regioni limitate.

Definizione A.10. Le curve sulla superficie \mathbf{S} corrispondenti a valori costanti di u e v , cioè $\mathbf{c}^{\bar{u}}(v) := \mathbf{S}(\bar{u}, v)$, $\mathbf{c}^{\bar{v}}(u) := \mathbf{S}(u, \bar{v})$ rispettivamente, sono dette *curve isoparametriche*.

Definizione A.11. Una superficie parametrica $\mathbf{S} = \mathbf{S}(u, v)$ si dice *regolare* se in ogni punto del dominio parametrico è definito il vettore normale, cioè $\|\mathbf{S}_u(u, v) \times \mathbf{S}_v(u, v)\| \neq 0 \forall (u, v) \in \Omega$. Un punto $\mathbf{p} := \mathbf{S}(\bar{u}, \bar{v})$ della superficie in cui $\|\mathbf{S}_u(\bar{u}, \bar{v}) \times \mathbf{S}_v(\bar{u}, \bar{v})\| = 0$ è detto *singolare*, e la superficie ha in \mathbf{p} una cresta o una cuspid.

A.2.1 Normale alla superficie

- Nel caso di una superficie parametrica regolare $\mathbf{S} = \mathbf{S}(u, v)$, in ogni punto la normale è data dal prodotto vettoriale delle derivate parziali $\mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v$ (che costituiscono una base del *piano tangente* $\mathbf{T}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{S}}$ a \mathbf{S} in \mathbf{p}):

$$\mathbf{N} = \mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v.$$

- Nel caso di una superficie assegnata in forma implicita

$$\mathbf{S} = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \mid F(\mathbf{p}) = 0 \right\},$$

la normale è data dal gradiente

$$\mathbf{N} = \nabla F(\mathbf{p}).$$

Il *versore normale* $\hat{\mathbf{N}}$ è ottenuto normalizzando \mathbf{N} :

$$\hat{\mathbf{N}} := \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|}.$$

A.2.2 Prima e seconda forma fondamentale

Definizione A.12. I coefficienti della *prima forma fondamentale* sono così definiti:

$$E := \mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_u, \quad F := \mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_v, \quad G := \mathbf{S}_v \cdot \mathbf{S}_v.$$

I coefficienti della *seconda forma fondamentale* sono così definiti:

$$e := \mathbf{S}_{uu} \cdot \hat{\mathbf{N}}, \quad f := \mathbf{S}_{uv} \cdot \hat{\mathbf{N}}, \quad g := \mathbf{S}_{vv} \cdot \hat{\mathbf{N}}.$$

A.2.3 Curvature principali e direzioni principali

Definizione A.13. Dati un punto $\mathbf{p} \in \mathbf{S}$ e una direzione non nulla nel piano tangente $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{S}}$, si definisce *sezione normale* $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t; \mathbf{p}, \mathbf{v})$ la curva ottenuta intersecando la superficie \mathbf{S} con il piano contenente \mathbf{v} e $\hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{p}}$ (versore normale a \mathbf{S} in \mathbf{p}) e passante per \mathbf{p} . La curva così ottenuta ha \mathbf{v} come vettore tangente in \mathbf{p} .

Si definisce *curvatura normale* $\kappa_n = \kappa_n(\mathbf{p}, \mathbf{v})$ il valore di curvatura della sezione normale $\mathbf{c}(t; \mathbf{p}, \mathbf{v})$ nel punto \mathbf{p} .

Definizione A.14. Le *curvature principali* κ_1, κ_2 in un punto $\mathbf{p} \in \mathbf{S}$ sono rispettivamente il minimo e il massimo delle curvature normali κ_n al variare della sezione normale, cioè

$$\kappa_1 := \min_{\mathbf{v} \in \mathbf{T}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{S}}} \kappa_n(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \quad \text{e} \quad \kappa_2 := \max_{\mathbf{v} \in \mathbf{T}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{S}}} \kappa_n(\mathbf{p}, \mathbf{v}).$$

Le direzioni \mathbf{v} corrispondenti alle sezioni normali con valori di curvatura normale minima e massima sono dette *direzioni principali*, e indicate rispettivamente con $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$.

Si noti che dalla definizione risulta $\kappa_1 \leq \kappa_2$, conformemente con la convenzione usuale.

Teorema A.1. *Le direzioni principali sono tra loro perpendicolari:*

$$\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2 = 0.$$

Teorema A.2 (Relazione di Euler). *Le curvature principali e la curvatura normale in un punto \mathbf{p} sono legate dalla relazione*

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2 \phi + \kappa_2 \sin^2 \phi, \quad (\text{A.1})$$

dove ϕ è l'angolo compreso tra la direzione tangente \mathbf{v} alla sezione normale $\mathbf{c}(t; \mathbf{p}, \mathbf{v})$ in \mathbf{p} e la prima direzione principale \mathbf{d}_1 .

A.2.4 Indicatrice di Dupin

Introducendo nel piano tangente nel punto \mathbf{p} le coordinate

$$\begin{aligned} \xi &:= \frac{1}{\sqrt{\kappa_n}} \cos \phi, \\ \eta &:= \frac{1}{\sqrt{\kappa_n}} \sin \phi, \end{aligned}$$

la (A.1) si riduce all'equazione di una sezione conica

$$1 = \kappa_1 \xi^2 + \kappa_2 \eta^2,$$

detta *indicatrice di Dupin*. Essa caratterizza il comportamento della curvatura nel punto \mathbf{p} , e può essere ottenuta da una piccola traslazione parallela del piano tangente in \mathbf{p} nella direzione del vettore normale alla superficie: l'intersezione del piano tangente traslato con la superficie produce una approssimazione della indicatrice di Dupin.

A.2.5 Curvature Gaussiana e media

Definizione A.15. Si definisce *curvatura Gaussiana* di una superficie il prodotto delle curvature principali:

$$K = K(\kappa_1, \kappa_2) := \kappa_1 \kappa_2.$$

Si definisce *curvatura media* di una superficie la media aritmetica delle curvature principali:

$$H = H(\kappa_1, \kappa_2) := \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Dalle definizioni precedenti è immediato ricavare le espressioni delle curvatures principali in funzione delle curvatures Gaussiana e media:

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \kappa_1(K, H) = H - \sqrt{H^2 - K}, \\ \kappa_2 &= \kappa_2(K, H) = H + \sqrt{H^2 - K}.\end{aligned}$$

Osservazione 13. Le curvatures Gaussiana e media possono essere calcolate direttamente dai coefficienti della prima e seconda forma fondamentale:

$$\begin{aligned}K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \\ H &= \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}.\end{aligned}$$

A.2.6 Classificazione dei punti di una superficie

È possibile classificare i punti \mathbf{p} di una superficie \mathbf{S} in base ai valori delle curvatures Gaussiana K e media H in \mathbf{p} :

- *punto ellittico* se $K > 0$ (localmente la superficie ha una forma simile a un ellissoide); l'indicatrice di Dupin è una ellisse;
- *punto iperbolico* se $K < 0$ (forma a “sella”); l'indicatrice di Dupin è una iperbole;
- *punto parabolico* se $K = 0$ e $H \neq 0$ (forma “cilindrica”); l'indicatrice di Dupin è una coppia di rette parallele;
- *punto piatto* se $K = 0$ e $H = 0$ (la superficie è localmente piana).

A.2.7 Raccordo tra superfici

Definizione A.16. Due patch parametrici regolari $\mathbf{S}_1(u_1, v_1)$, $\mathbf{S}_2(u_2, v_2)$ aventi una curva di bordo in comune $\mathbf{c}(t)$ si raccordano con *continuità parametrica* di ordine k (C^k in breve) se le loro derivate fino all'ordine k coincidono lungo e attraverso il bordo comune, cioè nelle direzioni tangenti e trasversale alla curva $\mathbf{c}(t)$.

Definizione A.17. Due superfici parametriche $\mathbf{S}_1(u_1, v_1)$, $\mathbf{S}_2(u_2, v_2)$ aventi un punto in comune $\mathbf{p} = \mathbf{S}_1(\bar{u}_1, \bar{v}_1) = \mathbf{S}_2(\bar{u}_2, \bar{v}_2)$ si raccordano con *continuità geometrica* di ordine k (GC^k o G^k in breve) se esiste una riparametrizzazione a parametri comuni tale che in questa parametrizzazione le superfici \mathbf{S}_1 , \mathbf{S}_2 si raccordano con continuità C^k .

Alla continuità G^k può essere attribuito un significato geometrico.

Due superfici che sono G^1 in un punto comune regolare hanno ivi lo stesso piano tangente, o equivalentemente un vettore normale comune.

Due superfici aventi un contatto di ordine 2, cioè che si raccordano con continuità G^2 , hanno lo stesso piano tangente, la stessa indicatrice di Dupin, e le stesse curvatures principali e direzioni principali (o equivalentemente, le stesse curvatures normali, o la stessa seconda forma fondamentale). La continuità G^2 implica pertanto l'uguaglianza delle curvatures Gaussiana e media.

Tuttavia questa interpretazione geometrica della continuità G^2 non è adatta alle applicazioni, perché richiede il controllo di uguaglianza delle curvatures normali per *tutte* le possibili linee tangenti alle superfici nel punto comune. Il seguente Teorema A.3 fornisce invece un criterio pratico per la verifica della regolarità di una superficie.

Teorema A.3 (delle 3 tangenti). *Se due superfici C^2 si raccordano in un punto \mathbf{p} con continuità G^1 , allora l'uguaglianza delle curvatures normali corrispondenti a tre direzioni tangenti in \mathbf{p} , linearmente indipendenti a coppie, implica l'uguaglianza per tutte le tangenti, e pertanto è equivalente alla continuità G^2 in quel punto.*

Definizione A.18. Due patch parametrici $\mathbf{S}_1(u_1, v_1), \mathbf{S}_2(u_2, v_2)$ aventi una curva di bordo in comune $\mathbf{c}(t)$ si raccordano con *continuità visiva* di ordine k (VC^k o V^k in breve) se si raccordano con continuità C^k lungo la direzione della curva di bordo e con continuità G^k lungo la direzione ad essa trasversale.

In particolare, due patch raccordati con continuità VC^1 hanno, nei punti della curva di bordo comune, le derivate prime lungo la curva coincidenti e le derivate prime nella direzione ad essa trasversale (cross derivatives) tra loro parallele.

Osservazione 14. La continuità VC^1 implica la continuità G^1 .

Appendice B

Strumenti per l'analisi della qualità delle superfici

Elenchiamo e descriviamo brevemente alcuni strumenti solitamente utilizzati nella modellazione geometrica in ambito CAD per l'interrogazione delle superfici e l'analisi della loro regolarità e qualità. Per la definizione degli oggetti coinvolti, si veda l'Appendice A.

B.1 Resa della superficie

La visualizzazione della superficie, oltre a fornire informazioni sulla sua forma, permette di evidenziare facilmente difetti che affliggono la continuità di ordine 0. In particolare, se la superficie è costituita da più patch parametrici, essa presenta fratture in corrispondenza di discontinuità nel raccordo tra i patch.

Esistono varie possibilità per la rappresentazione di una superficie parametrica $\mathbf{S} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. La più comune consiste nella discretizzazione del dominio parametrico¹ Ω in un insieme finito di punti $\Delta := \{(u_i, v_i) \in \Omega\}_{i=1, \dots, n_p}$ e nella costruzione di una mesh \mathcal{M} i cui vertici sono ottenuti valutando la superficie \mathbf{S} nei punti di Δ , cioè $\mathbf{v}_i^{\mathcal{M}} := \mathbf{S}(u_i, v_i)$, $i = 1, \dots, n_p$. Se la forma di Ω lo consente, una scelta tipica è quella di considerare come Δ una griglia regolare uniforme oppure adattiva.

La mesh \mathcal{M} così definita deve essere visualizzata sul dispositivo di output grafico. Alcune tecniche di resa in tempo reale sono elencate di seguito; per approfondimenti, fare riferimento a [Wat99].

- **Wireframe.** Sono visualizzati i segmenti (edge) che congiungono i vertici della mesh, dando alla rappresentazione l'aspetto di un'intelaiatura di

¹A seconda di come è definita la superficie, il dominio parametrico può riferirsi all'intera superficie o a un singolo patch.

fil di ferro (Figura B.1a). È possibile sfumare nel colore di sfondo i segmenti più lontani dal punto di osservazione (depth cueing, Figura B.1b) o non mostrare quelli che risulterebbero nascosti dai lembi di superficie ovvero dalle facce della mesh (hidden-line e hidden-surface removal, Figura B.1c).

- **Shading.** Una volta rimosse le linee e le superfici non visibili, sono usati un modello di illuminazione e una tecnica di sfumatura (shading model) per calcolare l'intensità e i colori da visualizzare per ogni pixel della superficie. Nel caso di real-time rendering, il modello si limita ad approssimare il comportamento reale della luce e delle superfici, ottenendo un buon compromesso tra precisione e costo di calcolo. Le tecniche di sfumatura più comuni sono quelle di flat, Gouraud (smooth) e Phong shading (Figura B.2), che usano la normale alle facce poligonali della mesh o le normali nei vertici \mathbf{v}_i^M di tali facce (normali che possono essere estratte dalla valutazione della superficie originale \mathbf{S}) per determinare l'intensità/colore mediante il modello di illuminazione.

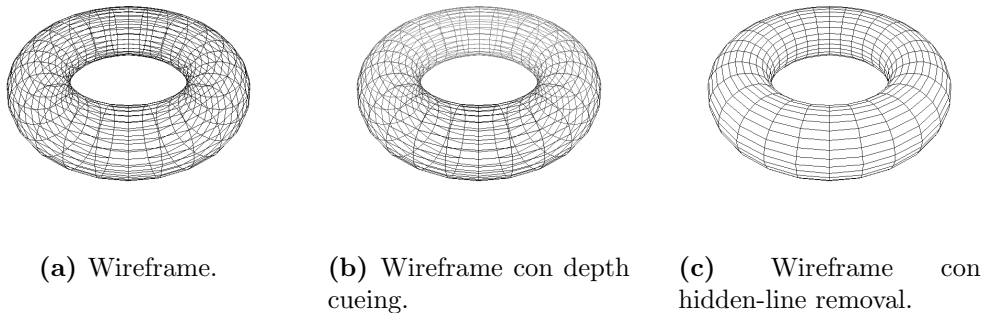
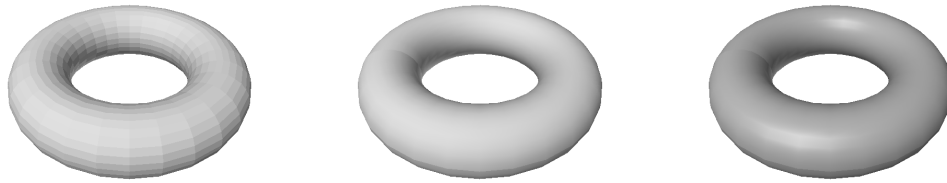


Figura B.1: Rappresentazione di una superficie mediante wireframe.

B.2 Curve isoparametriche

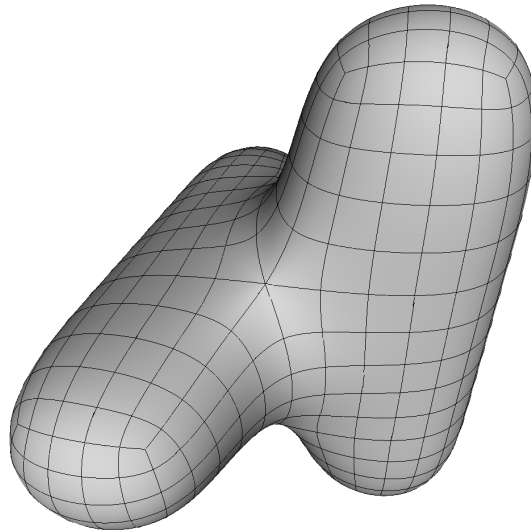
Un altro modo per rappresentare la forma della superficie, e che può essere considerato come un caso particolare della visualizzazione in wireframe, fa uso delle *curve isoparametriche* della superficie, cioè delle curve appartenenti alla superficie \mathbf{S} descritte tenendo costante uno dei due parametri u, v : rispettivamente, $\mathbf{c}^u(v) := \mathbf{S}(\bar{u}, v)$, $\mathbf{c}^v(u) := \mathbf{S}(u, \bar{v})$. Al variare di \bar{u} e \bar{v} (solitamente con valori uniformemente distribuiti lungo gli assi parametrici, o in corrispondenza di valori particolari), si ottengono due famiglie di curve che descrivono in maniera intuitiva la forma della superficie su cui giacciono (Figura B.3).



(a) Flat shading.

(b) Gouraud shading.

(c) Phong shading.

Figura B.2: Rappresentazione di una superficie mediante shading.**Figura B.3:** Rappresentazione di una superficie mediante visualizzazione di curve isoparametriche.

B.3 Normale alla superficie

Si visualizza, tipicamente mediante “aghi” posti nei vertici della mesh \mathcal{M} , il campo di vettori normali $\hat{\mathbf{N}}$ alla superficie \mathbf{S} (Figura B.4). Può essere uno strumento utile per l’individuazione di difetti nella continuità G^1 (piano tangente).

Nel caso di una superficie parametrica, la direzione normale nel punto $\mathbf{p} = \mathbf{S}(\bar{u}, \bar{v})$ può essere determinata usando la relazione

$$\hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{S}_u(\bar{u}, \bar{v}) \times \mathbf{S}_v(\bar{u}, \bar{v})}{\|\mathbf{S}_u(\bar{u}, \bar{v}) \times \mathbf{S}_v(\bar{u}, \bar{v})\|},$$

in cui compaiono le derivate parziali $\mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v$ che costituiscono una base del piano

tangente $\mathbf{T}_p^{\mathbf{S}}$ a \mathbf{S} in \mathbf{p} .

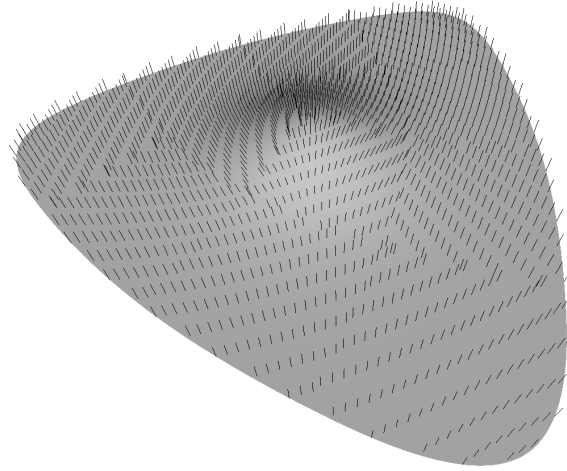


Figura B.4: Normali alla superficie.

B.4 Mappa delle curvatures Gaussiana e media

Il valore della curvatura Gaussiana K o media H è visualizzato sulla superficie mediante una scala di colori (Figura B.5): a ogni valore x è assegnato un colore $\gamma(x)$ in un certo spazio di colori \mathcal{C} . Più in generale, l'utilizzo di una mappa di colori $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$ è una scelta usuale per visualizzare i valori di un campo scalare $T : \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{R}$ definito sulla superficie \mathbf{S} .

B.5 Curvature needles

Sono mostrati i versori normali $\hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{p}}$ alla superficie \mathbf{S} in \mathbf{p} , scalati di un fattore pari al valore della curvatura Gaussiana K o media H della superficie nel punto, cioè

$$\mathbf{N}_{\mathbf{p}}^K = K\hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{p}} \quad \text{e} \quad \mathbf{N}_{\mathbf{p}}^H = H\hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{p}},$$

dove $\mathbf{p} = \mathbf{S}(\bar{u}, \bar{v})$, $K = K(\bar{u}, \bar{v})$, $H = H(\bar{u}, \bar{v})$.

Per migliorare la lettura dell'immagine così ottenuta, è possibile assegnare a ogni "ago" un colore determinato in base al valore della curvatura, come nella Sezione B.4 precedente (Figura B.6).

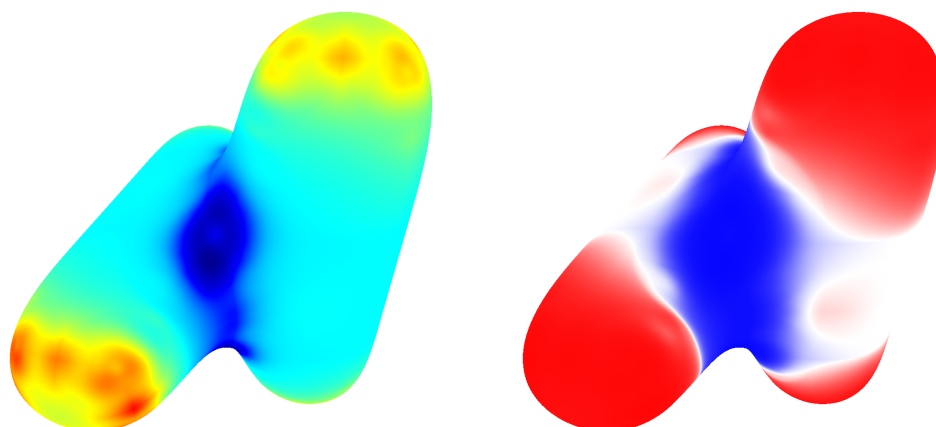
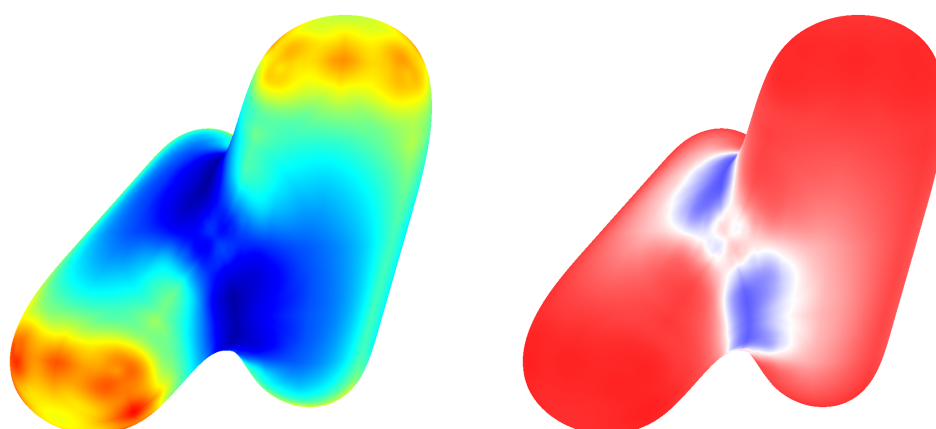
(a) Curvatura gaussiana K .(b) Curvatura media H .

Figura B.5: Visualizzazione delle curvatures Gaussiana e media mediante scala di colori. Nella colonna di destra, è utilizzata una mappa di colori che mette in evidenza le regioni con curvatura negativa (blu), nulla (bianco), positiva (rossa).

B.6 Segni di curvatura

La superficie è suddivisa in zone in base al segno delle curvatures principali κ_1 e κ_2 , e a ciascuna di esse è assegnato un colore (Figura B.7): in questo modo è possibile classificare i punti della superficie. I casi possibili sono i seguenti:

1. valori entrambi positivi: $\kappa_1 > 0$, $\kappa_2 > 0$ (punto ellittico);
2. valori entrambi negativi: $\kappa_1 < 0$, $\kappa_2 < 0$ (punto ellittico);
3. valori con segno discorde: $\kappa_1 < 0$, $\kappa_2 > 0$ (punto iperbolico);
4. un valore nullo e l'altro positivo: $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 > 0$ (punto parabolico);
5. un valore nullo e l'altro negativo: $\kappa_1 < 0$, $\kappa_2 = 0$ (punto parabolico);
6. valori entrambi nulli: $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = 0$ (punto piatto).

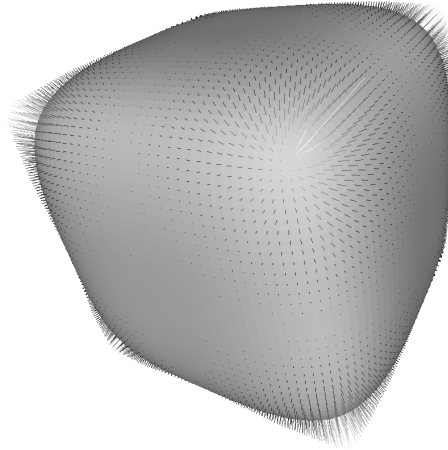


Figura B.6: Curvature needles.

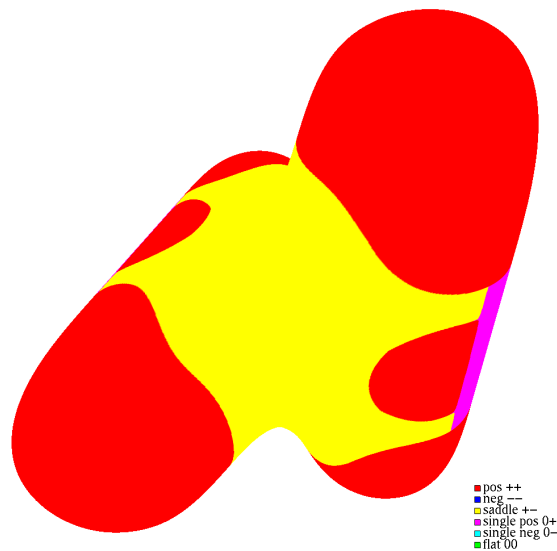


Figura B.7: Segni di curvatura.

B.7 Curvatura delle curve isoparametriche

Visualizza l'informazione sulla curvatura delle curve isoparametriche della superficie mediante un grafico a pettine (comb graph). Nei punti \mathbf{p} di una curva isoparametrica $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t) \subset \mathbf{S}$ (vista come una curva parametrica nello spazio), sono mostrati i vettori normali $\hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{p}}$ alla superficie \mathbf{S} in \mathbf{p} , scalati di un

fattore pari al valore della curvatura κ di \mathbf{c} , cioè

$$\mathbf{N}_{\mathbf{p}} = \kappa \hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{p}}, \quad \text{dove} \quad \mathbf{p} = \mathbf{c}(\bar{t}) \quad \text{e} \quad \kappa = \frac{\|\mathbf{c}'(\bar{t}) \times \mathbf{c}''(\bar{t})\|}{\|\mathbf{c}'(\bar{t})\|^3}.$$

La Figura B.8 mostra le curve isoparametriche (in entrambe le direzioni u e v) sulla superficie, e il grafico a pettine della loro curvatura.

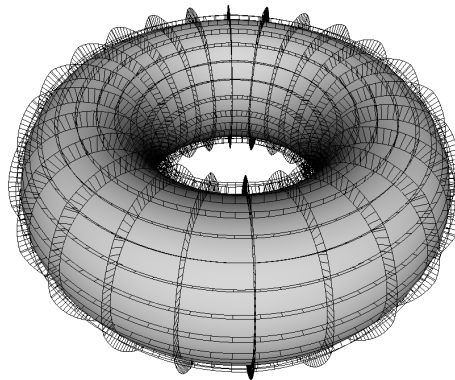


Figura B.8: Grafico a pettine della curvatura delle curve isoparametriche. Si noti, ad esempio lungo i meridiani, che la curvatura è continua, ma il suo valore non è costante su ciascuna curva isoparametrica: pertanto la superficie raffigurata è solo una approssimazione di un toro.

B.8 Isofote e linee di riflessione

Sono strumenti utilizzati durante il processo di design di superfici cromate, lucide e riflettenti, soprattutto in ambito automotive e nello styling di elementi di arredo e gioielli. Consentono di individuare errori nel raccordo tra i patch che costituiscono le superfici.

- **Isofote** (isophotes). Dati un punto di osservazione \mathbf{e}_p e un angolo α , si definisce la *isofota* \mathbf{c} su una superficie \mathbf{S} come il luogo dei punti \mathbf{p} della superficie tali che l'angolo compreso tra $\mathbf{e}_p - \mathbf{p}$ e $\hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{p}}$ (versore normale a \mathbf{S} in \mathbf{p}) sia uguale a α , cioè

$$\mathbf{c} := \left\{ \mathbf{p} \in \mathbf{S} \mid \frac{(\mathbf{e}_p - \mathbf{p}) \cdot \hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{p}}}{\|\mathbf{e}_p - \mathbf{p}\|} = \cos \alpha \right\}.$$

Questa definizione può essere semplificata, considerando una direzione di vista $\hat{\mathbf{e}}$ invece di un punto di vista \mathbf{e}_p , e uno scalare ν . La isofota corrispondente risulta quindi costituita dai punti per i quali la normale alla superficie forma con la direzione $\hat{\mathbf{e}}$ un angolo costante α (individuato da $\nu = \cos \alpha$), cioè

$$\mathbf{c} := \left\{ \mathbf{p} \in \mathbf{S} \mid \hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{p}} = \nu \right\}. \quad (\text{B.1})$$

Interpretando $\hat{\mathbf{e}}$ come la direzione dei raggi luminosi emessi da una sorgente (collocata all'infinito) e incidenti sulla superficie \mathbf{S} , risulta chiaro il motivo del nome dato a questa classe di curve, lungo le quali la luminosità è costante.

- **Linee di riflessione** (reflection lines). Dati un punto di osservazione \mathbf{e}_p , un piano di luce π e una linea di luce $\mathbf{l} \subset \pi$ giacente su esso, la *linea di riflessione* $\mathbf{c} \subset \mathbf{S}$ è l'immagine riflessa di \mathbf{l} su \mathbf{S} (considerata come una superficie riflettente) secondo il punto di vista \mathbf{e}_p .

Teorema B.1 (Pöschl [Pös84]). *Se due patch di superficie si raccordano con continuità G^k lungo una curva comune \mathbf{c} , allora le isofote sono G^{k-1} nei punti di \mathbf{c} .*

Un risultato analogo vale per le linee di riflessione.

In particolare, se i patch si raccordano solo per valore (C^0) le isofote sono discontinue attraverso il bordo comune. Da questo teorema risulta evidente il motivo dell'ampio utilizzo di queste tipologie di curve come un ottimo strumento per l'identificazione di discontinuità (solitamente di ordine 1 o 2) nelle superfici. La Figura B.9 mostra alcuni esempi.

Tra le proprietà che isofote e linee di riflessione hanno in comune, ricordiamo il fatto che sono molto sensibili a piccole perturbazioni della superficie su cui giacciono, e che non possono essere espresse in forma parametrica chiusa ma solo come soluzione numerica di un sistema di equazioni alle derivate parziali, espresso dalla relazione in (B.1). Per un confronto più ampio delle relazioni che intercorrono tra queste classi di curve su superfici e una loro generalizzazione, si veda [The01].

Di solito, una implementazione di questo strumento di analisi della continuità prevede la costruzione di una famiglia di curve, cioè di isofote (o di linee di riflessione) corrispondenti a diversi valori di ν (o diverse linee \mathbf{l} , tipicamente parallele tra loro) e consente di variare la direzione $\hat{\mathbf{e}}$ (o il punto \mathbf{e}_p) di vista: infatti alcuni difetti possono essere notati soltanto con un esame completo della superficie, che deve essere ruotata e osservata da diverse angolazioni.

Poiché spesso non è possibile conoscere quali algoritmi sono utilizzati nei sistemi CAD commerciali, o comunque non si ha accesso alla loro implementazione in codice, riteniamo interessante illustrare qui il metodo che abbiamo

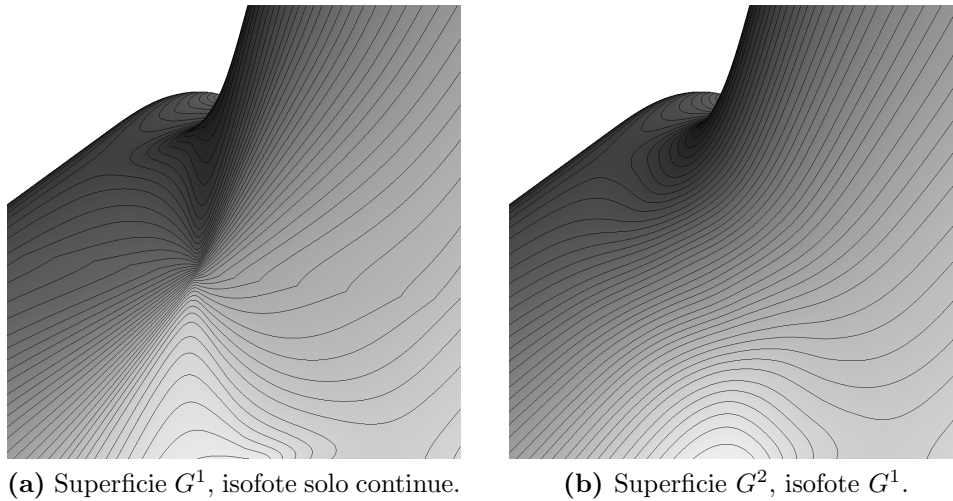


Figura B.9: Isofote.

elaborato per la visualizzazione delle isofote di una superficie, e sfruttato per realizzare le figure presenti in questo elaborato.

L'idea di base è quella di determinare le isofote come curve 2D, invece che come curve 3D sulla superficie. Infatti consideriamo le isofote come le linee di livello² di una immagine³ contenente la proiezione sul piano di vista della scena tridimensionale in cui è inserita la superficie. In particolare, attribuiamo a ogni punto \mathbf{p} della superficie un livello di intensità $l \in L$ nella scala di grigi $L := [0, 1]$ in base all'angolo formato dalla normale $\hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{p}}$ con la direzione fissata $\hat{\mathbf{e}}$. Sfruttando poi le trasformazioni di proiezione⁴ e di viewport⁵ effettuate da OpenGL, otteniamo la matrice \mathbf{C} su cui lavorare estraendo i valori del color buffer. Fissato il numero di livelli n_{lev} desiderato, che influenza la densità delle isofote risultanti, determiniamo le linee di livello dell'immagine \mathbf{C} , cioè della funzione $f_{\mathbf{C}} : V \rightarrow L$ sulla griglia di pixel data dalla viewport V . A tal scopo, abbiamo utilizzato un algoritmo⁶ basato sulle routine per il contour plotting

²Data una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e un numero $l \in \mathbb{R}$, si chiama *insieme di livello* di f associato al livello l l'insieme $f^{-1}(l) = \{\mathbf{x} \in D \mid f(\mathbf{x}) = l\}$. Se $D \subseteq \mathbb{R}^2$, gli insiemi di livelli sono curve piane, dette linee di livello (o contour lines).

³Per *immagine* si intende una matrice bidimensionale i cui elementi sono i valori di intensità "luminosa" restituiti dagli oggetti presenti in una scena osservata e "illuminata" da una sorgente di qualche natura.

⁴La trasformazione di proiezione proietta sul piano di proiezione la geometria 3D presente nella scena e osservata da un certo punto di vista.

⁵Mapping 2D da uno spazio continuo W , detto *window*, a uno spazio discreto V , detto *viewport*. La window W è un rettangolo del piano di proiezione, tipicamente $[-1, +1]^2$; la viewport V è una matrice $r_x \times r_y$ di pixel, solitamente indicizzati $0, \dots, r_x$ e $0, \dots, r_y$.

⁶Realizzato da M. LeBrun, J. Cardoso, A. W. Irwin, A. Ross, V. Munoz, S. Ayal, e da noi adattato ai nostri scopi.

del pacchetto PLPlot e di Octave (e il cui risultato è analogo a quello della funzione `contourc` di MATLAB). Una volta determinate le isofote, espresse come un insieme di poligonali, esse sono visualizzate sul dispositivo di output grafico come linee sovrainpresse sulla resa della scena 3D.

Riassumiamo le tappe della procedura seguita.

Algoritmo B.1: Determinazione delle isofote di una superficie.

Dati: numero di livelli n_{lev} (che esprime la densità delle isofote risultanti), direzione di vista \hat{e} .

Input: discretizzazione $\mathcal{M} = \{\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^3\}_{i=1, \dots, n_p}$ di \mathbf{S} ottenuta valutando la superficie parametrica in un insieme finito di n_p punti $\Delta = \{(u_i, v_i) \in \Omega\}_{i=1, \dots, n_p}$, versori normali alla superficie in questi punti $\{\hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{v}_i}\}_{i=1, \dots, n_p}$.

Risultato: visualizzazione delle isofote della superficie \mathbf{S} .

```

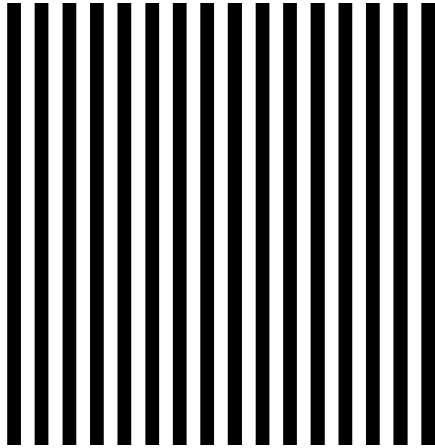
/* attribuzione di un livello di grigio a ogni vertice della
discretizzazione */
forall the  $\mathbf{v}_i \in \mathcal{M}$  do
     $\nu_i = \hat{e} \cdot \hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{v}_i}$ ;
    /* mapping  $\nu_i \in [-1, 1] \mapsto l_i \in L = [0, 1]$  */
     $l_i = \frac{1}{2}\nu_i + \frac{1}{2}$ ;
end
/* costruzione e visualizzazione delle isofote */
applicare la trasformazione di proiezione e di viewport (in OpenGL),
per mappare sul color buffer (2D) le intensità  $l_i$  dei punti (3D) della
superficie;
estrarre dal color buffer la matrice  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r_x \times r_y}$  contenente i valori di
intensità proiettati;
determinare le linee di livello della matrice  $\mathbf{C}$  associate agli  $n_{lev}$  livelli
scelti;
disegnare le linee (poligonali) così ottenute in sovrainpressione sulla
resa della scena 3D;

```

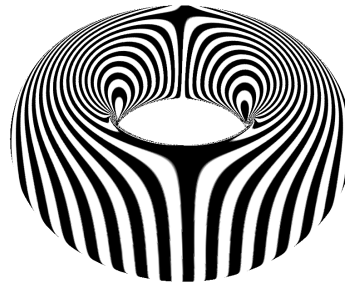
B.9 Reflection mapping

Chiamata anche *environment mapping*, è una tecnica che consiste nell'approssimare l'aspetto di una superficie riflettente immersa in un ambiente, mediante la mappatura di un'immagine texture sulla superficie stessa. Nonostante tale approssimazione si basi su assunzioni raramente verificate nella realtà (per esempio, la superficie deve essere convessa in modo da non causare auto-interriflessioni tra parti dell'oggetto riflettente, situazione che la texture ambientale precalcolata non è in grado di gestire), utilizzare immagini con

pattern regolari, come strisce o anelli di colori diversi (Figura B.10), permette di simulare nelle prime fasi di modellazione al computer i test di riflessione che tradizionalmente sono svolti sui prototipi fisici dell'oggetto.



(a) Immagine texture.



(b) Superficie riflettente.

Figura B.10: Reflection mapping.

Bibliografia

- [BMZ04] Ioana Boier-Martin e Denis Zorin. Differentiable parameterization of Catmull-Clark subdivision surfaces. In *Proceedings of the 2004 Eurographics/ACM SIGGRAPH symposium on Geometry processing*, SGP '04, pagine 155–164, New York, NY, USA, 2004. ACM.
- [CC78] Edwin Catmull e James Clark. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Comput. Aided Geom. Des.*, 10:350–355, novembre 1978.
- [CK83] Hiroaki Chiyokura e Fumihiko Kimura. Design of solids with free-form surfaces. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 17:289–298, luglio 1983.
- [dC76] Manfredo P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 1976.
- [Far06] Gerald Farin. Class A Bézier curves. *Comput. Aided Geom. Des.*, 23:573–581, ottobre 2006.
- [FHK02] Gerald Farin, Josef Hoschek, e Myung-Soo Kim. *Handbook of Computer Aided Geometric Design*. Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, The Netherlands, 2002.
- [Gre74] John A. Gregory. Smooth interpolation without twist constraints. *Comput. Aided Geom. Des.*, pagine 71–87, 1974.
- [Her96] Thomas Hermann. G^2 interpolation of free form curve networks by biquintic Gregory patches. *Comput. Aided Geom. Des.*, 13:873–893, 1996.
- [HKD93] Mark Halstead, Michael Kass, e Tony DeRose. Efficient, fair interpolation using Catmull-Clark surfaces. In *Proceedings of the 20th annual conference on Computer Graphics and interactive techniques*, SIGGRAPH '93, pagine 35–44, New York, NY, USA, 1993. ACM.

- [HL93] Josef Hoschek e Dieter Lasser. *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. A. K. Peters, Ltd., Wellesley, MA, USA, 1993.
- [JS07] Pushkar Joshi e Carlo Séquin. Energy minimizers for curvature-based surface functionals. *Computer-Aided Design and Applications*, 4:607–617, 2007.
- [LB07] Dylan Lacewell e Brent Burley. Exact evaluation of Catmull-Clark subdivision surfaces near B-spline boundaries. *Journal of Graphics, GPU, and Game Tools*, 12:7–15, 2007.
- [Lev06a] Adi Levin. C^2 modified subdivision surfaces by optimal blending. Aggiunta a [Lev06b], 2006.
- [Lev06b] Adi Levin. Modified subdivision surfaces with continuous curvature. In *ACM SIGGRAPH 2006 Papers*, SIGGRAPH '06, pagine 1035–1040, New York, NY, USA, 2006. ACM.
- [LS08] Charles Loop e Scott Schaefer. Approximating Catmull-Clark subdivision surfaces with bicubic patches. *ACM Trans. Graph.*, 27:8:1–8:11, marzo 2008.
- [LSNC09] Charles Loop, Scott Schaefer, Tianyun Ni, e Ignacio Castaño. Approximating subdivision surfaces with Gregory patches for hardware tessellation. *ACM Trans. Graph.*, 28:151:1–151:9, dicembre 2009.
- [PR08] Jörg Peters e Ulrich Reif. *Subdivision Surfaces*. Springer Publishing Company, Inc., 1a edizione, 2008.
- [Pös84] Thomas Pöschl. Detecting surface irregularities using isophotes. *Comput. Aided Geom. Des.*, 1:163–168, novembre 1984.
- [PT95] Les Piegl e Wayne Tiller. *The NURBS book*. Springer-Verlag, London, UK, 1995.
- [PU98] Hartmut Prautzsch e Georg Umlauf. A G^2 -subdivision algorithm. In *Geometric Modelling, Dagstuhl 1996, Computing Supplements 13*, pagine 217–224, London, UK, 1998. Springer-Verlag.
- [Rei95] Ulrich Reif. A unified approach to subdivision algorithms near extraordinary vertices. *Comput. Aided Geom. Des.*, 12:153–174, marzo 1995.
- [Sab10] Malcolm Sabin. *Analysis and design of univariate subdivision schemes*. Springer, Berlin, Germany, 1a edizione, 2010.

- [Sta98] Jos Stam. Exact evaluation of Catmull-Clark subdivision surfaces at arbitrary parameter values. In *Proceedings of the 25th annual conference on Computer Graphics and interactive techniques*, SIGGRAPH '98, pagine 395–404, New York, NY, USA, 1998. ACM.
- [The01] Holger Theisel. Are isophotes and reflection lines the same? *Comput. Aided Geom. Des.*, 18:711–722, ottobre 2001.
- [Vár87] Tamas Várady. Survey and new results in n -sided patch generation. In Ralph R. Martin, editor, *The Mathematics of Surfaces II*, pagine 203–235, Oxford, United Kingdom, 1987. Oxford Univ. Press.
- [Vár91] Tamas Várady. Overlap patches: a new scheme for interpolating curve networks with n -sided regions. *Comput. Aided Geom. Des.*, 8:7–27, febbraio 1991.
- [Wat99] Alan Watt. *3D Computer Graphics*. Addison-Wesley, 3a edizione, 1999.
- [WW01] Joe Warren e Henrik Weimer. *Subdivision Methods for Geometric Design: A Constructive Approach*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 1a edizione, 2001.