Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

MISURAZIONE DEL RISCHIO FINANZIARIO

Tesi di Laurea in Finanza Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Pascucci

Presentata da:
Rosita Zanetti

Seconda Sessione
Anno Accademico 2010-2011

Indice

Introduzione

L'intento di questa tesi è trattare la disciplina del Risk Management ovvero gli strumenti attraverso cui gli operatori finanziari misurano il rischio per mantenerlo sotto controllo. Il rischio può manifestarsi sotto diverse forme e in diverse tipologie di attività finanziarie, presso le banche, istituzioni finanziarie in genere, attività industriali e commerciali. La misurazione del rischio è regolata dalle direttive imposte dal Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria, creato nel 1974 dalle banche centrali dei paesi appartenenti al G10 in seguito al fallimento della tedesca Bankhaus Herstatt.
Secondo la direttiva Basilea II emessa dal Comitato nel 2004 i principali rischi a cui sono sottoposte le istituzioni finanziarie vengono così classificati:

- *Rischio di mercato*: causato dalle fluttuazioni delle variabili di mercato ovvero dalla possibilità che variazioni inattese dei fattori di mercato quali prezzi azionari, prezzi delle merci, tassi d'interesse o di cambio, determinino una variazione al rialzo o al ribasso del valore di una posizione o di un portafoglio finanziario.

- *Rischio di credito*: causato dalla possibilità di default (incapacità di un emittente di rispettare le clausole contrattuali).

- *Rischio operativo*: causato da problemi di tipo legale o amministrativo che possono interferire con la normale attività della banca.

Esistono altri tipi di rischio come il *rischio di liquidità* causato dalla difficoltà con cui un investimento riesce a trasformarsi in denaro rapidamente e possibilmente senza perdite.
Gli istituti finanziari hanno sviluppato modelli statistico-matematici per la misurazione ed il controllo del rischio di mercato. La principale risposta è stata data con l'elaborazione dei modelli *Value-at-Risk* (VaR). Il VaR è diventato una misura standard nell'ambito della misurazione del rischio poiché esprime, attraverso un numero, la misura della rischiosità di una posizione in azioni, opzioni, ecc.., fissando una soglia per le perdite che verrà superata solo con una probabilità prestabilita.

Un'altra misura di rischio che verrà studiata in questa tesi è l'*Expected Shortfall* che sintetizza in un unico valore la perdita media che un portafoglio o una posizione può subire, in un arco temporale definito, con una certa probabilità.
Si parlerà anche di misure di rischio non probabilistiche quali:

- National amount
- Factor-sensitivity
- Stress test

Capitolo 1

Nozioni preliminari

1.1 Prezzi e rendimenti

Introduciamo alcune notazioni utili:

- N è il numero di tipi di asset nel portafoglio;
- $\pi = (\pi_n)_{n=1,...,N}$ è il portafoglio dove π_n è il numero di asset di tipo n;
  - $\pi_n < 0$ significa che la posizione è short ovvero il guadagno emerge dal ribasso di un'azione;
  - π_n può non essere intero.
- $A_{n,t}$ è la variabile aleatoria su un opportuno spazio di probabilità che indica il valore di mercato dell'asset n al tempo $t > 0$.

Vengono date ora le seguenti definizioni:

Definizione 1.1. Siano $A_{n,t}$ e π_n il valore del titolo n-esimo e il numero di titoli di tipo n-esimo rispettivamente; si definisce il *valore del portafoglio* al tempo $t = 0, ..., T$ come:

$$V_t = \sum_n A_{n,t}\pi_n$$

Definizione 1.2. Si definisce *Profit-and-Loss* o *PL* del portafoglio la variazione di quest'ultimo tra l'istante iniziale $t = 0$ e quello finale $t = T$ come:

$$\mathrm{PL}_{\pi,T} = V_T - V_0 = \sum_n \pi_n(A_{n,T} - A_{n,0})$$

Chiamiamo *profitti* i valori positivi di PL e *perdite* i valori negativi.

1.1.1 Rendimenti percentuali e logaritmici

Definizione 1.3. La variazione percentuale di prezzo (*rendimento percentuale*) dell'asset n-esimo è data da:

$$R_n = \frac{A_{n,T} - A_{n,0}}{A_{n,0}} \tag{1.1}$$

È possibile quindi scrivere il PL del portafoglio π al tempo finale T come:

$$\mathrm{PL}_{\pi,T} = \sum_n \pi_n A_{n,0} R_n \tag{1.2}$$

Si può esprimere il rendimento percentuale dell'intero portafoglio come :

$$R_\pi = \frac{V_T - V_0}{V_0}$$

e, in termini di questo, esprimere il PL a tempo T come:

$$\mathrm{PL}_T = V_0 R_\pi$$

Se si esprime il rendimento dell'intero portafoglio come somma pesata:

$$R_\pi = \sum n\theta_n R_n \tag{1.3}$$

dove

$$\theta_n = \frac{\pi_n A_{n,0}}{V_0}$$

è il peso percentuale al tempo $t = 0$ dell'asset n-esimo rispetto al valore totale del portafoglio, dalle Definizioni 1.1 e 1.3 si scopre che:

Osservazione 1. I rendimenti percentuali si aggregano (ovvero si sommano) nel portafoglio ma non nel tempo cioè dati N asset componenti il portafoglio si ha:

$$R_\pi = \sum_{n=1}^{N} R_n$$

ma:

$$R_{0,T} \neq R_{0,t} + R_{t,T}$$

Osservazione 2. I rendimenti percentuali possono assumere valori in $(-1, +\infty)$ se $A_t > 0$

Dimostrazione. Basta ricavare dalla Definizione 1.1 che:

$$A_T = A_0(1 + R)$$
$$R = \frac{A_T}{A_0} - 1$$

□

Definizione 1.4. Definiamo ora il *rendimento logaritmico* dell'asset n-esimo come:

$$R_l = \ln \frac{A_T}{A_0} = \ln A_T - \ln A_0$$

Si osservi che:

Osservazione 3. I rendimenti logaritmici non si aggregano nel portafoglio ma nel tempo.

Osservazione 4. I rendimenti logaritmici possono assumere tutti i valori reali.

Dimostrazione. Basta osservare dalla Definizione 1.4 che:

$$A_T = A_0 \exp R_l$$
$$A_T - A_0 = A_0(\exp R_l - 1)$$

□

Proposizione 1.1. *Il rendimento logaritmico è un'approssimazione lineare del rendimento percentuale per T piccolo.*

Dimostrazione. Ricordando la Definizione 1.4 e quindi che $A_T = A_0 \exp R_l$ e sostituendo questa nella (1.1) si ha:

$$R = \frac{A_0(\exp R_l - 1)}{A_0}$$
$$R = \exp R_l - 1$$

Da qui si ricava:

$$R_l = \ln(1 + R)$$

Ricordando gli sviluppi di Taylor (troncati ai primi ordini) del logaritmo: $\ln(1 + R_l) = R_l - \frac{R_l^2}{2} + \frac{R_l^3}{3} + ...$ e dell'esponenziale: $\exp R_l = 1 + R_l + \frac{R_l^2}{2} + \frac{R_l^3}{3} + ...$ si dimostra che, per R_l piccolo:

$$R = \exp R_l - 1 \approx R_l \approx \ln(1 + R_l)$$

Dunque:

$$R \approx R_l$$

□

Si osservi dalla dimostrazione precedente che, siccome $\exp R_l - 1 > R_l$, *si ha sempre* $R > R_l$.

Teorema 1.2. *I prezzi degli asset sono lognormali*[1] *se e solo se i rendimenti logaritmici sono distribuiti normalmente.*

Dimostrazione. Si supponga che i rendimenti logaritmici siano normali:

$$R_l = \mu + \sigma\epsilon_t \quad \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)^2 \quad t = 0, ..., T$$

Per la Definizione 1.4 e ponendo per semplicità $\mu = 0$ si ha:

$$\begin{aligned} \sigma\epsilon_t &= \ln \frac{A_t}{A_{t-1}} \\ \frac{A_t}{A_{t-1}} &= \exp(\sigma\epsilon_t) \\ A_t &= A_{t-1}\exp(\sigma\epsilon_t) \quad t = 1, .., T \end{aligned}$$

A_t risulta quindi essere una distribuzione lognormale di parametri A_{t-1} e σ^2.

Viceversa, si supponga che i prezzi abbiano distribuzione lognormale:

$$A_t = A_{t-1}\exp(\sigma\epsilon_t) \quad \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1) \quad t = 0, ..., T$$

Ricordando la Definizione 1.4:

$$R_l = \ln \frac{A_t}{A_{t-1}} = \ln \frac{A_{t-1}\exp(\sigma\epsilon_t)}{A_{t-1}} = \ln\exp(\sigma\epsilon_t) = \sigma\epsilon_t$$

Pertanto risulta che i rendimenti logaritmici R_l sono distribuiti normalmente. □

Nella pratica la situazione più semplice in cui lavorare è quella in cui i prezzi degli asset sono lognormali; il teorema precedente ci permette di concludere che i rispettivi rendimenti logaritmici hanno distribuzione normale: come vedremo in seguito, questa conseguenza sarà molto utile nella misurazione del rischio.

[1] Distribuzione lognormale: X v.a si dice che ha distribuzione lognormale se $\log X$ è distribuito normalmente.

[2] Si veda il punto 8 dell'Appendice A.

Capitolo 2

Misure di rischio non probabilistiche

Trattiamo ora le tre misure di rischio non probabilistiche più usate per determinare la somma di capitale che serve ad un istituto finanziario per prevenire possibili perdite future sul suo portafoglio.

2.1 Notional amount

Si tratta dell'approccio più vecchio in cui si sommano i valori iniziali dei vari asset, in valore assoluto, eventualmente pesati per la rischiosità della classe a cui appartengono ovvero:

$$\text{rischio}(\pi) = \sum_n c_n |\pi_n A_{n,0}|$$

dove $c_n \geqslant 0$ è l'indice della rischiosità della classe n.
È il metodo usato da Basilea II: per esempio per i corporate bond (obbligazioni societarie) $c = 0.2$.

2.2 Factor-sensitivity

Una volta individuato un fattore di rischio y, per esempio una variabile di mercato, se il valore dell'asset n-esimo dipende dal fattore di rischio selezionato ovvero $A_n = A_n(y)$, allora anche il valore del portafoglio π dipende da y cioè $\pi = \pi(y)$. Definiamo perciò il rischio (sensitivity) del portafoglio rispetto a y come :

$$\text{rischio}(\pi(y)) = \sum_n \frac{\partial(\pi_n A_n)}{\partial y}$$

ovvero come la derivata del valore del portafoglio rispetto alla variabile y.
Si chiama *delta* la sensitivity di un portafoglio composto da opzioni che ha come fattore di rischio y il prezzo del sottostante; mentre si chiama *duration* la sensitivity di un portafoglio composto da bond in cui y è il tasso d'interesse.
È un approccio semplice da implementare ma non utilizzabile per confrontare sensitivities rispetto a fattori di rischio diversi.

2.3 Stress-test

Si individua un vettore di fattori di rischio $\mathbf{y}$ in modo che $A_{n,t} = A_{n,t}(\mathbf{y})$. Osservati i valori correnti $\mathbf{y_0}$ dei fattori e fissati M scenari per la loro evoluzione $(\mathbf{y_T^k})_{k=1,\ldots,M}$ si definisce:

$$\text{rischio}(\pi) = \min_{1 \leqslant k \leqslant M} \sum_n \pi_n (A_{n,T}(\mathbf{y_T^k}) - A_{n,0}(\mathbf{y_0}))$$

ovvero la peggior possibile realizzazione del PL.
Da sottolineare è il fatto che cruciale è la scelta degli scenari e che questo approccio è utilizzato spesso in alternativa alle misure probabilistiche che si vedranno in seguito.

Capitolo 3

Concetti probabilistici

Introduciamo alcuni concetti probabilistici indispensabili per trattare in dettaglio le misure di rischio di tipo probabilistico:

3.1 I quantili

Definizione 3.1. Data la variabile aleatoria[1] X, sia $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$ la sua distribuzione[2]; ricordando il punto 10 riportato nell'Appendice A definiamo, nei punti in cui F è invertibile, il *quantile* di X di ordine α con $\alpha \in (0,1)$ *livello di confidenza* come:

$$q_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$$

ovvero come l'unico numero reale q tale che:

$$F_X(q) = \mathbf{P}(X \leqslant q) = \alpha$$

Per come è stato definito il quantile $q_\alpha(X)$ gode delle seguenti proprietà:

* è strettamente crescente in α;

* è continuo in α.

Poiché la Definizione 3.1 vale per $\alpha \in (0,1)$, si possono dare le seguenti definizioni agli estremi:

$$q_0(X) := q_{0+} = \inf\{x | F_X(x) > 0\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

$$q_1(X) := q_{1-} = \sup\{x | F_X(x) < 1\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

[1]Si veda il punto 2 dell'Appendice A.
[2]Si veda il punto 4 dell'Appendice A.

Osservazione 5. Se F_X ha densità[3] f_X si ricava:

$$\alpha = \int_{-\infty}^{q_\alpha(X)} f_X(y)dy$$

Osservazione 6. F non è invertibile in α quando:

- ha un tratto orizzontale ovvero è piatta;
- ha un salto ovvero esiste x tale che $F(x^-) \leqslant \alpha < F(x)$.

In questi casi si può definire:

$$q_\alpha(X) := \inf\{x | F_X(x) \geqslant x\}$$

Si noti che, se F è invertibile in α la definizione precedente coincide con la Definizione 3.1.

Enunciamo un' importante proprietà:

Proposizione 3.1. *Il quantile gode della proprietà di linearità:*

$$q_\alpha(aX + b) = aq_\alpha(X) + b$$

Dimostrazione. Basta ricordare la Definizione 3.1: $q_\alpha(aX + b) = F^{-1}_{aX+b}(\alpha)$ Infatti:

$$\begin{aligned}
q_\alpha(aX + b) = aq_\alpha(X) + b &\Leftrightarrow F^{-1}_{aX+b}(\alpha) = aF^{-1}_X(\alpha) + b \\
&\Leftrightarrow F_{aX+b}\left(F^{-1}_{aX+b}(\alpha)\right) = F_{aX+b}\left(aF^{-1}_X(\alpha) + b\right) \\
&\Leftrightarrow \alpha = \mathbf{P}\left(aX + b \leqslant aF^{-1}_X(\alpha) + b\right) \\
&\Leftrightarrow \alpha = \mathbf{P}\left(X \leqslant F^{-1}_X(\alpha)\right) \\
&\Leftrightarrow \alpha = F_X\left(F^{-1}_X(\alpha)\right)
\end{aligned}$$

□

3.1.1 Calcolo di quantili

Il calcolo dei quantili è in certi casi immediato:

[3] Si veda il punto 5 dell'Appendice A.

- Se $X \sim \mathcal{U}(0,1)$, per la Definizione 3.1 e per il punto 4 nell'Appendice A e, ricordando la distribuzione uniforme in $(0,1)$ [4] si ha :

$$q_\alpha(X) = \alpha$$

- Se $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, ricordando la distribuzione esponenziale di parametro λ [5] si ha:

$$q_\alpha(X) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} F_X(q_\alpha(X)) = \alpha = 1 - \exp(-\lambda q_\alpha(X)) &\Rightarrow \alpha - 1 = -\exp(-\lambda q_\alpha(X)) \\ &\Rightarrow -\alpha + 1 = \exp(-\lambda q_\alpha(X)) \\ &\Rightarrow \ln(1-\alpha) = -\lambda q_\alpha(X) \\ &\Rightarrow q_\alpha(X) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha) \end{aligned}$$

$\square$

In altri casi il calcolo non è esplicito e calcolabile analiticamente, ma solo numericamente:

- $Se X \sim \mathcal{N}(0,1)$ [6] occorre usare la funzione MATLAB `normcdf` e `norminv` per ottenere il quantile;

- $Se X \sim t(\nu)$ [7] occorre usare la funzione MATLAB `tinv` per ottenere il quantile.

[4] Si veda il punto 6 dell'Appendice A.
[5] Si veda il punto 7 dell'Appendice A.
[6] Si veda il punto 8 dell'Appendice A.
[7] Si veda il punto 10 dell'Appendice A.

Capitolo 4

Misure di rischio di tipo probabilistico

Le misure di tipo probabilistico sono quelle nella forma:

$$\text{rischio}(\pi) = \rho(\text{PL}_\pi) \tag{4.1}$$

dove $\rho : L \to \mathbb{R}$ (L spazio di variabili aleatorie) è un funzionale che a una variabile aleatoria associa un numero reale.
Consideriamo verificata la seguente proprietà:
Siano X e $Y \in L$ due variabili aleatorie tali che $X \sim Y$ cioè con la stessa distribuzione; allora $\rho(X) = \rho(Y)$. Questa proprietà permette di vedere ρ direttamente sullo spazio delle distribuzioni.
Sia X una v.a (indica il PL); secondo la teoria di Markowitz la $\rho(X)$ da usare è la *deviazioni standard* definita come:

$$\sqrt{E[(X - E(X))^2]}$$ [1]

Essa pesa allo stesso modo la coda di sinistra (perdite) e quella di destra (profitti) ed il suo valore è invariante per traslazioni ovvero: $\sigma(X + 100) = \sigma(X)$.
Le misure probabilistiche più usate sono:

- Value-at-Risk
- Expected Shortfall

[1] Sia X una variabile aleatoria; denotiamo con $E(X)$ i valore atteso di X ovvero, intuitivamente, la media dei valori assunti da X pesati rispetto alla probabilità.

4.1 Value-at-Risk

Il *Value-at-Risk* (VaR) è la misura di rischio di tipo probabilistico più usata; esso rappresenta la massima perdita potenziale, per un assegnato livello di confidenza α e su un dato orizzonte temporale T, che un operatore finanziario può subire su uno strumento finanziario (o su un portafoglio) in seguito a movimenti avversi sulle variabili di mercato ovvero:

$$\mathbf{P}(X \leqslant \mathrm{VaR}) = \alpha$$

dove $X = X_t$ rappresenta la perdita potenziale a un certo tempo di detenzione $t \leqslant T$ o in maniera analoga può essere definito come il valore al di sopra del quale ci si troverà con un assegnato livello di probabilità (livello di confidenza) $1 - \alpha$:

$$\mathbf{P}(X \geqslant \mathrm{VaR}) = 1 - \alpha$$

Si chiami X la variabile aleatoria che indica il Profit-and-Loss del portafoglio π e si supponga di conoscerne la densità $f_X(x)$ al tempo T. Allora il VaR al tempo T a livello di confidenza α è il quantile di tale distribuzione ovvero è il numero VaR_α tale che:

$$\int_{-\infty}^{\mathrm{VaR}_\alpha} f_X(y)dy = \alpha$$

Definizione 4.1. Ricordando la (4.1) possiamo definire il *Value-at-Risk* di ordine $\alpha \in (0, 1)$ del portafoglio π per l'orizzonte temporale T come:

$$\mathrm{rischio}(\pi) = \mathrm{VaR}_\alpha(\mathrm{PL}_{\pi,T})$$

dove:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = -q_\alpha(X)$$

Proposizione 4.1. *Il VaR è decrescente rispetto all'ordine ovvero:*

$$\mathrm{VaR}_\alpha > \mathrm{VaR}_\beta \quad \textit{se} \quad \alpha < \beta$$

Dimostrazione. Se $\alpha < \beta$ allora, per la Definizione 3.1 e per la monotonia della funzione di ripartizione[2]: $q_\alpha < q_\beta \Rightarrow -q_\alpha > -q_\beta$.
Per la Definizione 4.1:

$$\mathrm{VaR}_\alpha > \mathrm{VaR}_\beta$$

□

[2]Si veda il punto 4 dell'Appendice A.

Proposizione 4.2.

$$\mathrm{VaR}_\alpha(aX+b) = a\mathrm{VaR}_\alpha(X) - b \quad \textit{per } a, b \in \mathbb{R}, a > 0$$

Dimostrazione. Basta ricordare la Proposizione 3.1 e la Definizione 4.1:
$\mathrm{VaR}_\alpha(aX+b) = -q_\alpha(aX+b) = -aq_\alpha(X) - b = a\mathrm{VaR}_\alpha(X) - b$ □

Osservazione 7. Dalla Proposizione 4.2 segue che:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \sigma\mathrm{VaR}_\alpha(\tilde{X}) - \mu \quad \text{con } X := \sigma\tilde{X} + \mu$$

Parametri stabiliti. L'*ordine* α è tipicamente piccolo; solitamente:

- $\alpha = 0.01$ se si sta trattando un rischio di mercato (Basilea II);
- $\alpha = 0.05$ se si sta operando un monitoraggio interno delle banche (J. P. Morgan);
- $\alpha \leqslant 0.01$ se si sta trattando un rischio operativo.

L'*orizzonte temporale* T può essere di:

- 10 giorni se si sta trattando un rischio di mercato (Basilea II);
- 1 giorno se si sta operando un monitoraggio interno delle banche (J. P. Morgan);
- 1 anno se si sta trattando un rischio operativo.

4.1.1 Modelli parametrici

Sono modelli per il calcolo del VaR che si espletano in un algoritmo chiuso che richiede dei parametri precisi di input. Vengono anche definiti secondo l'approccio varianza-covarianza; questa è la metodologia standard per la misurazione dei rischi finanziari, diffusa attraverso l'applicazione Risk Metrics proposta da J. P. Morgan. È quello che si avvicina di più alle definizioni ed ai concetti derivati dalla moderna teoria del portafoglio, in quanto esprime il VaR attraverso la matrice di varianza e covarianza.
Tali metodi sono sintetizzabili nei seguenti passi:

- determinazione dei fattori di rischio;
- stima della matrice delle *correlazioni* di tali fattori;
- stima delle *volatilità* dei fattori di rischio.

Per applicare tali metodi occorre assumere che:

- la distribuzione dei rendimenti dei fattori di rischio sia di tipo normale;

- la relazione tra posizione i-esima e il relativo fattore di rischio sia lineare.

Volatilità. Statisticamente la misura impiegata per rappresentare la volatilità è la *deviazione standard*, che misura la dispersione delle realizzazioni intorno al loro valore atteso.
Considerando una serie di n rendimenti[3] R_l, la deviazione standard è:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(R_{l,t} - \overline{R})^2}$$

dove:

- N è il numero di osservazioni;
- $\overline{R}$ è il rendimento medio dei rendimenti osservati;
- $R_{l,t}$ rendimento osservato all'istante t.

Più in generale si esprime la volatilità come:

$$\sigma_t = \sigma(R_{l,t+1}|\mathcal{F}_t)^4 \tag{4.2}$$

Generalmente, se per i calcoli si usano dati ad alta frequenza e si suppone che $T \approx 10$ giorni, è ragionevole supporre che $R_l \approx 0$.
Il metodo indubbiamente più diffuso per ottenere una previsione della volatilità relativa ad un certo tempo futuro è quello che si basa sulla stima della volatilità passata (volatilità storica). Questa misura si rivela, a volte, inadeguata per cogliere le peculiarità proprie delle serie storiche delle attività finanziarie. Infatti, l'ipotesi implicita nel calcolo della volatilità storica, come stima di quella futura, è che la variabile della quale si intende misurare la volatilità sia caratterizzata da una distribuzione normale stazionaria, con media e varianza costanti, ipotesi spesso smentita dal comportamento reale delle variabili finanziarie.
Per aggirare questo problema si sono creati *modelli* sostitutivi a (4.2) *per il calcolo della volatilità*:

[3] Si veda la Definizione 1.4.
[4] F_t: Si veda il punto 3 dell'Appendice A.

- Modello ARCH(1): $\sigma_t = aR^2_{l,t} + c \quad$ con $a \in (0,1]$ e $c > 0$;
- Modello GARCH(1,1): $\sigma_t = a\sigma^2_{t-1} + bR^2_{l,t} + c \quad$ con $a, b, c > 0$ e $a+b < 1$;
- Modello EWMA: $\sigma^2_t = \lambda\sigma^2_{t-1} + (1-\lambda)R^2_{l,t} \quad$ con $\lambda \in (0,1]$ (RiskMetrics suggerisce $\lambda = 0.94$);
- Volatilità implicita: ricavata invertendo la formula di prezzo di Black and Scholes.

Correlazione. La correlazione misura il co-movimento di due o più variabili: tra due variabili X e Y si esprime come:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Se le variabili sono $X_1, ..., X_d$ con $d \geqslant 2$ si avrà una *matrice di correlazione* dove gli elementi sono della forma:

$$\rho_{i,j} = \frac{\text{cov}(X_i, X_j)}{\sigma_i \sigma_j} \quad \text{con} \quad i, j = 1, ..., d \tag{4.3}$$ [5]

Posto:

- $\mathbf{\Sigma} = (\text{cov}(X_i, X_j))_{i,j=1,...,d}$ la matrice di covarianza (quadrata e simmetrica di ordine d)
- $\mathbf{C} = (\rho_{i,j})_{i,j=1,...,d}$ la matrice di correlazione (quadrata, simmetrica, definita positiva con diagonale principale unitaria)

si ottiene la relazione tra $\mathbf{\Sigma}$ e $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{DCD}$$

dove $\mathbf{D} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_d)$.

Volatilità e correlazioni sono i due parametri fondamentali per il calcolo del VaR e rappresentano i parametri di input del modello.
Esistono diversi approcci parametrici per il calcolo del VaR:

1. approccio delta-Normal;

[5] Per $\text{cov}(X_i, X_j)$ s'intende la covarianza tra X_i e X_j ovvero:
$E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j)]$.
Chiamiamo $\sigma^2(X_i) := \text{cov}(X_i, X_i)$ la varianza di X_i.

2. approccio RiskMetrics;
3. approccio portafolio-normal;
4. approccio delta-gamma.

Analizziamo nel dettaglio l'approccio 1:

Approccio delta-normal

Per calcolare il rischio di un portafoglio di più attività finanziarie si considerano i coefficienti di correlazione tra i rendimenti dei diversi fattori di mercato coinvolti.
Questo approccio parte dall'analisi della volatilità dei rendimenti dei fattori di mercato e ipotizza che tali rendimenti siano distribuiti normalmente ovvero che il vettore dei rendimenti $\mathbf{R} = (R_1, R_2, ..., R_N)$, dove N denota il numero di asset componenti il portafoglio, sia distribuito come una *normale multivariata*[6], cioè con distribuzione:

$$f(r_1, r_2, ..., r_N) = K \exp(-\frac{1}{2}Ar \cdot r + b \cdot r)$$

dove:
$r = (r_1, r_2, ..., r_N)^T \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;
A è una matrice simmetrica[7] e definita positiva[8];
$b = (b_1, b_2, ..., b_N)^T \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Ricordando la (1.2) e la Proposizione 1.1, definendo la somma inizialmente investita nell'asset n-esimo come $v_n = \pi_n A_{n,0}$ si ha:

$$\mathrm{PL}_\pi = \sum_n \pi_n A_{n,0} R_n \simeq \sum_n \pi_n A_{n,0} R_{l,n} = \sum_n v_n R_{l,n} = \mathbf{v}^t \mathbf{R}$$

dove:
$\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_N)$ è il vettore degli investimenti iniziale negli N asset.

Rifacendoci all'equazione (A.1) del punto 11 dell'Appendice A otteniamo il seguente risultato:

Proposizione 4.3.

$$\mathbf{R} \sim \mathcal{N}_d(\mu, \Sigma) \Rightarrow \mathrm{PL}_\pi \sim \mathcal{N}(\mathbf{v}^t\mu, \mathbf{v}^t\Sigma\mathbf{v})$$

[6] Si veda il punto 11 dell'Appendice A.
[7] $A = A^t$.
[8] $Ar \cdot r \geqslant 0, \forall r \in \mathbb{R}^N$ e se: $Ar \cdot r = 0 \Rightarrow r = 0$.

Osservazione 8. Spesso si preferisce assumere:

$$\mu = E[\mathbf{R}] = 0$$

invece che stimare μ: l'errore statistico sarebbe maggiore di $|\mu|$.

Risalendo all'Osservazione 7 si ottiene:

Proposizione 4.4.

$$\mathrm{PL}_\pi \sim \mathcal{N}(\mu_{\mathrm{PL}}, \sigma^2_{\mathrm{PL}}) \Rightarrow \mathrm{VaR}_\alpha(\mathrm{PL}_\pi) = \sigma_{\mathrm{PL}}\mathrm{VaR}_\alpha(\tilde{\mathrm{PL}}_\pi) - \mu_{\mathrm{PL}}$$

dove: $\mathrm{PL}_\pi = \sigma\tilde{\mathrm{PL}}_\pi + \mu$

Esempio 4.1. Se $\alpha = 1\%$, ricordando che PL_π è distribuito normalmente e che il VaR_α di una variabile normale standard X si calcola in modo numerico attraverso le funzioni MATLAB `normcdf` e `norminv` ($\mathrm{VaR}_\alpha(X) = 2.326$) otteniamo la formula di calcolo:

$$\mathrm{VaR}_{1\%}(\mathrm{PL}_\pi) = 2.326\sqrt{\mathbf{v}^t\Sigma\mathbf{v}} - \mathbf{v}^t\mu$$

Diversi sono i modi con cui calcolare la matrice di covarianza Σ:

- la stima più naturale è : $\Sigma = \frac{1}{K}\sum_k \mathbf{R}_k(\mathbf{R}_k)^t$ dove $(\mathbf{R}_1, ..., \mathbf{R}_k)$ è la serie storica dei vettori dei rendimenti;
- in via numerica si può usare la funzione MATLAB `cov`;
- ricordando la relazione 11 del punto 11 dell'Appendice A si può pensare di stimare separatamente le volatilità e le correlazioni e di calcolare la Σ.

L'approccio delta-normal si può applicare per:

* portafogli azionari;

* portafogli di obbligazioni;

* portafogli di currency forward [9];

* portafogli di azioni e derivati azionari;

* portafogli di obbligazioni e derivati sul tasso.

Esso non è adatto ad asset non lineari (opzioni) e in genere non si applica al rischio di credito e/o quando l'orizzonte temporale è lungo (1 mese o più).

4.2 Expected Shortfall

Secondo l'articolo pubblicato da Artzer nel 1997 si definisce *misura coerente di rischio* una funzione $p : V \to \mathbb{R}$ con V insieme di variabili casuali tale che sia:

- monotona: $X, Y \in V, X \leqslant Y \Rightarrow p(X) \leqslant p(Y)$;
- sub-additiva: $X, Y \in V, X + Y \in V \Rightarrow p(X + Y) \leqslant p(X) + p(Y)$;
- omogenea positiva: $X \in V, h > 0, hX \in V \Rightarrow p(hX) = hp(X)$;
- invariante per traslazioni: $X \in V, a \in \mathbb{R} \Rightarrow p(X + a) = p(X) - a$.

Sorprendentemente il VaR, pur essendo la misura di rischio adottata come migliore procedura, non è sempre una misura coerente di rischio perché non soddisfa, per distribuzioni diverse da quella Gaussiana, l'assioma di sub-additività. Questa proprietà esprime il fatto che un portafoglio composto da sottoportafogli avrà un ammontare di rischio che è al più la somma dell'ammontare di rischio dei suoi singoli sottoportafogli. Per una misura sub-additiva la diversificazione del portafoglio conduce sempre a una riduzione del rischio, mentre per le misure che violano questo assioma la diversificazione produce un incremento nel loro valore quando i rischi parziali sono provocati da eventi che non hanno un andamento esattamente concorde. Inoltre il VaR non fornisce una stima per l'ampiezza delle perdite in quegli scenari in cui la soglia del VaR è superata.
Nasce quindi l'esigenza di una misura di rischio coerente anche nei casi di distribuzioni non normali: l'*Expected Shortfall* (ES) è una *misura sub-additiva* del rischio che descrive quanto le perdite siano ampie in media quando esse eccedono il livello del VaR, utilizzata per lo più da fonti d'investimento e compagnie d'assicurazione.

[9] Currency forward: contratto a termine, su valuta, che consente di acquistare o vendere un determinato quantitativo di valuta estera a una data prestabilita.

Definizione 4.2. Si definisce *Expected Shortfall* di ordine $\alpha \in (0,1)$ del portafoglio π per l'orizzonte temporale T come:

$$\text{rischio}(\pi) = \text{ES}_\alpha(\text{PL}_{\pi,T})$$

dove, posto $X := \text{PL}_{\pi,T}$,:

$$\text{ES}_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q_u(X)du = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \text{VaR}_u(X)du$$

ovvero come la media eseguita sull'ordine α dei VaR di ordine $\leqslant \alpha$.
Se X è assolutamente continua, è possibile dare la seguente definizione alternativa:

$$\text{ES}_\alpha(X) = -E[X|X \leqslant q_\alpha(X)] = E[X|X \leqslant \text{VaR}_\alpha(X)]$$

Dalla Definizione 4.2 e dalla Proposizione 4.1 seguono:

Proposizione 4.5. *L'ES è decrescente rispetto all'ordine ovvero:*

$$\text{ES}_\alpha > \text{ES}_\beta \quad \textit{se} \quad \alpha < \beta$$

Proposizione 4.6. *L'ES è più conservativo del VaR ovvero:*

$$\text{ES}_\alpha(X) > \text{VaR}_\alpha(X)$$

Proposizione 4.7.

$$\text{ES}_\alpha(aX+b) = a\text{ES}_\alpha(X) - b \quad \textit{per } a,b \in \mathbb{R}, a > 0$$

Dimostrazione. Basta ricordare la Proposizione 4.2 e la Definizione 4.2:
$\text{ES}_\alpha(aX+b) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha(\text{VaR}_u(aX+b))du = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha(a\text{VaR}_u(X)-b)du =$
$\frac{1}{\alpha}a\int_0^\alpha(\text{VaR}_u(X)) - \frac{1}{\alpha}\alpha b = a\text{ES}_\alpha(X) - b$ □

Osservazione 9. Dalla Proposizione 4.7 segue che:

$$\text{ES}_\alpha(X) = \sigma\text{ES}_\alpha(\tilde{X}) - \mu \quad \text{con } X := \sigma\tilde{X} + \mu$$

Concludiamo l'Esempio 4.1 mantenendone le notazioni:

Esempio 4.2. Così come si è calcolato il $\text{VaR}_{1\%}(\text{PL}_\pi)$ nell'Esempio 4.1, allo stesso modo se ne può calcolare l'ES: si trova l' $\text{ES}_{1\%}(\tilde{\text{PL}_\pi}) = 2.665$ per via numerica e, utilizzando l'osservazione precedente si estrapola la seguente formula di calcolo:

$$\text{ES}_{1\%}(\text{PL}_\pi) = 2.665\sqrt{\mathbf{v}^t\Sigma\mathbf{v}} - \mathbf{v}^t\mu$$

4.3 Value-at-Risk ed Expected Shortfall a confronto

Teorema 4.8. *Sia Z una variabile aleatoria con distribuzione normale standard*[10]*. Allora:*

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\mathrm{ES}_\alpha(Z)}{\mathrm{VaR}_\alpha(Z)}=1$$

Dimostrazione. Sia $Z\sim\mathcal{N}(0,1)$, F_Z la sua funzione di ripartizione e $f(z)$ la sua densità; per la Definizione 3.1 poniamo:

$$q_\alpha(Z):=z_\alpha=F^{-1}(\alpha)$$

Ne consegue che $\mathrm{VaR}_\alpha(Z)=-z_\alpha$ e $\mathrm{ES}_\alpha(Z)=-E[Z|Z\leqslant z_\alpha]=\frac{f(z_\alpha)}{\alpha}$.
Poniamo $y:=F^{-1}(\alpha)$ e $\alpha=F(y)$.
Poichè $y\to-\infty$ per $\alpha\to 0$, studiamo il limite per $y\to-\infty$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{ES}_\alpha(Z)}{\mathrm{VaR}_\alpha(Z)} &= \frac{-f(F^{-1}(\alpha))}{\alpha}\cdot\frac{1}{F^{-1}(\alpha)}\\
&= \frac{-f(y)}{F(y)}\cdot\frac{1}{y}=-\frac{F'(y)}{F(y)\cdot y}\\
&\text{(applicando de l'Hôpital nei due passaggi seguenti)}\\
&= -\frac{F''(y)}{F(y)+F'(y)\cdot y}=-\frac{F'''(y)}{F'(y)+F''(y)y+F'(y)}\\
&= -\frac{F'''(y)}{2F'(y)+F''(y)y}=-\frac{f''(y)}{2f(y)+f'(y)y}\\
&= -\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\right)''}{2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-y^2}{2}\right)+y\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-y^2}{2}\right)\right)'}\\
&= \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\cdot-\frac{2y}{2}\right)'}{\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-y^2}{2}\right)+y\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{-y^2}{2}\right)\cdot(-y)\right)}\\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)+y\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)(-y)\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)(2-y^2)\right)}\\
&= \frac{1-y^2}{2-y^2}=\frac{2-1-y^2}{2-y^2}=1-\frac{1}{2-y^2}\xrightarrow[y\to-\infty]{}1
\end{aligned}$$

□

[10]Si veda il punto 8 dell'Appendice A.

Capitolo 5

Esempi numerici

In questo capitolo si sono voluti analizzare dati reali scaricando le serie storiche dei prezzi giornalieri di 3 azioni (Borsa di Milano):

- Enel
- Eni
- Generali

sulla finestra temporale $4/1/2010 - 5/9/2011$.
Per prima cosa si sono calcolati i rendimenti logaritmici operando poi una breve analisi statistica che comprende il calcolo di:

- media;
- volatilità;
- skewness (indice di asimmetria);
- curtosi (indice dello spessore delle code);
- istogramma (per conteggiare quante volte si ha un determinato rendimento);
- dfitools (per capire quale distribuzione seguono i rendimenti);
- Jarque-Bera test (per paragonare la distribuzione dei rendimenti con la normale).

Riportiamo i dati ottenuti dell'azione Enel:

* media $= -0.129731$;

* volatilità (varianza) = 0.007122;

* skewness (indice di asimmetria) = -0.168803;

* curtosi (spessore code) = 1.660812;

* test Jarque-Bera per la normalità (rigetta ipotesi nulla)= 1.

Le Figure 5.1, 5.2 ,5.3 mostrano rispettivamente il grafico dei prezzi di chiusura, dei rendimenti logaritmici, e l'istogramma di questi ultimi, per l'azione Enel.

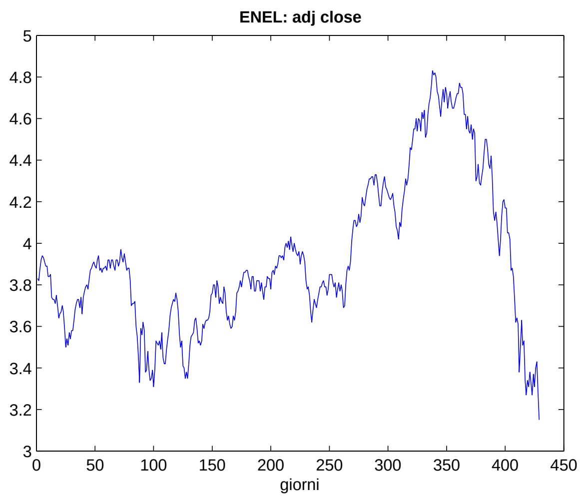

Figura 5.1: Prezzi di chiusura Enel.

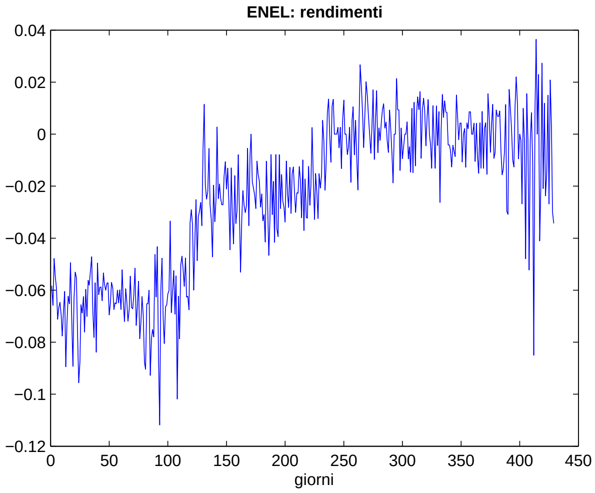

Figura 5.2: Rendimenti logaritmici Enel.

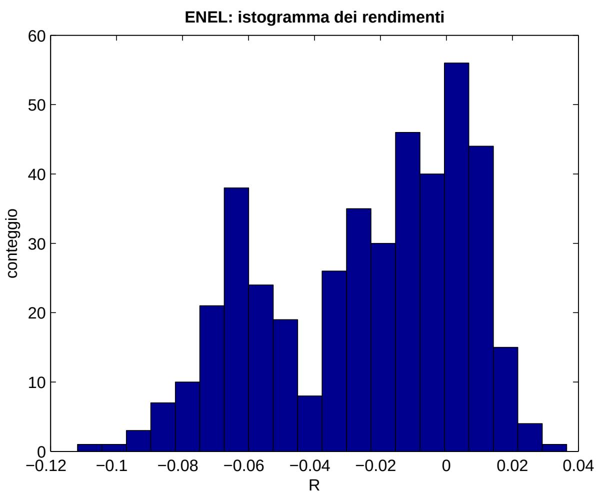

Figura 5.3: Istogramma dei rendimenti Enel.

Ugualmente riportiamo i risultati sopra citati per l'azione Eni:

* media $=-0.036574$;

* volatilità (varianza)=0.001836;

* skewness (indice di asimmetria)$=-0.396408$;

* curtosi (spessore code)=1.778148;

* test Jarque-Bera per la normalità (rigetta ipotesi nulla)=1

Le Figure 5.4, 5.5 ,5.6 mostrano rispettivamente il grafico dei prezzi di chiusura, dei rendimenti logaritmici, e l'istogramma di questi ultimi, per l'azione Eni.

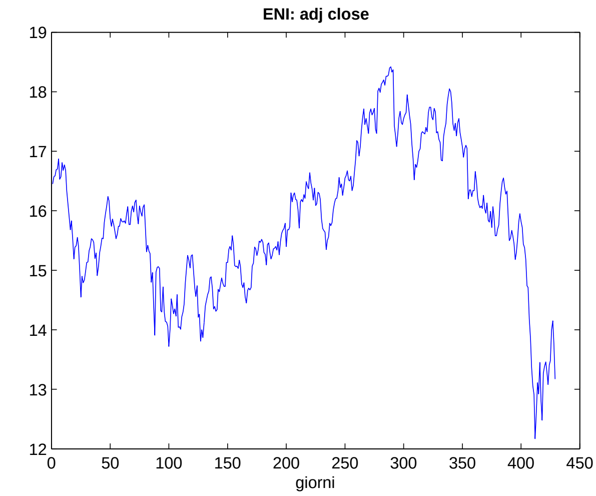

Figura 5.4: Prezzi di chiusura Eni.

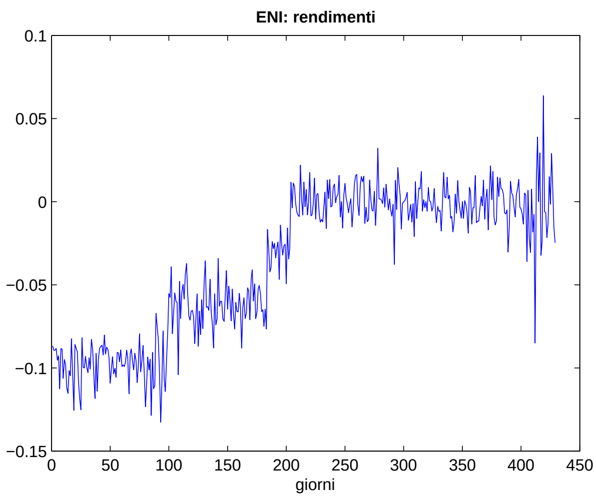

Figura 5.5: Rendimenti logaritmici Eni.

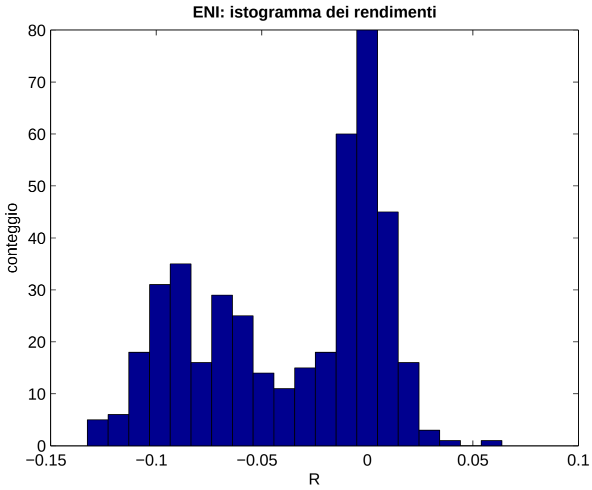

Figura 5.6: Istogramma dei rendimenti Eni.

Per quanto riguarda l'azione Generali elenchiamo i dati:

* media $=-0.007206$;
* volatilità (varianza)=0.000422;
* skewness (indice di asimmetria)$=-0.445181$;
* curtosi (spessore code)=4.451393;
* test Jarque-Bera per la normalità (rigetta ipotesi nulla)=1

Le Figure 5.7, 5.8 ,5.9 mostrano rispettivamente il grafico dei prezzi di chiusura, dei rendimenti logaritmici, e l'istogramma di questi ultimi, per l'azione Generali.

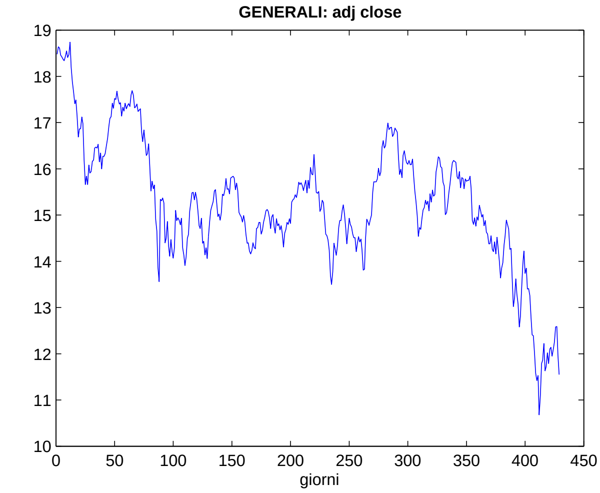

Figura 5.7: Prezzi di chiusura Generali.

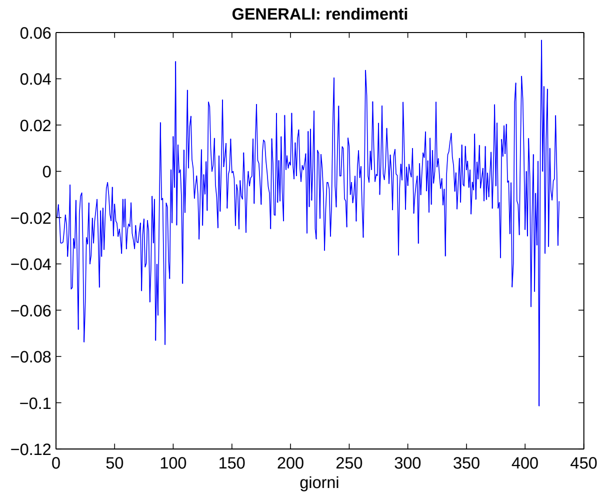

Figura 5.8: Rendimenti logaritmici Generali.

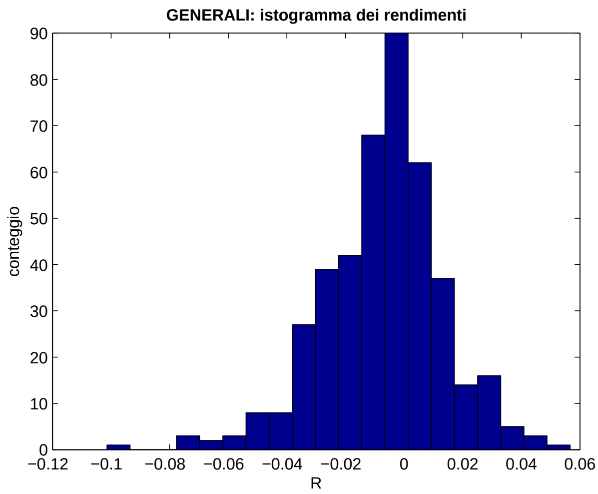

Figura 5.9: Istogramma dei rendimenti Generali.

Dopo aver supposto che nel periodo compreso tra il 1/8/2011 e il 5/9/2011 il nostro portafoglio abbia investito, ogni giorno, le somme di $1000, 2000, 3000$ Euro negli tre asset considerati (Enel, Eni, Generali), si è calcolato, per ogni giorno del periodo scelto il VaR_α e l'ES_α del PL del portafoglio siffatto su un orizzonte temporale di un giorno, con $\alpha = 1\%$ e $\alpha = 5\%$ utilizzando finestre di dati (da cui estrapolare i rendimenti già calcolati) lunghe $100, 200$ e 400 giorni. Abbiamo poi calcolato l'effettiva perdita (o guadagno) raggiunta ogni giorno per poi confrontare questa con il valore del VaR_α calcolato, essendo esso la massima perdita potenziale che il portafoglio può subire con probabilità $1 - \alpha$.

I dati ottenuti sono stati rappresentati in Figura 5.10 dove abbiamo riportato i valori del PL ovvero gli effettivi guadagni e perdite ottenuti, del $\mathrm{VaR}_{5\%}$ e del $\mathrm{ES}_{5\%}$ ovvero le massime perdite giornaliere previste nel 95% dei casi e la media calcolata tra le perdite possibili ottenibili nel 5% dei casi rispettivamente.

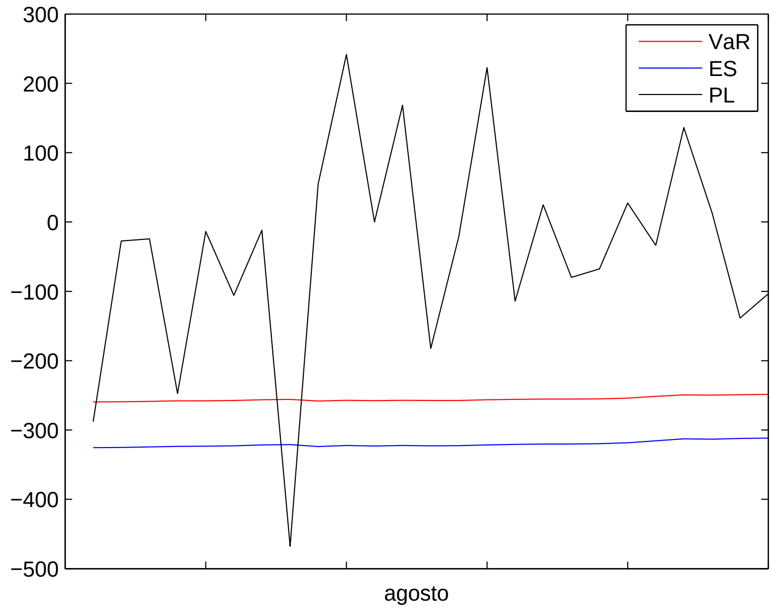

Figura 5.10: Misure di rischio.

Quello che nella pratica interessa è ciò che viene rappresentato in Figura 5.11 cioè il valore effettivo giornaliero del portafoglio, il valore del $\mathrm{VaR}_{5\%}$ e $\mathrm{ES}_{5\%}$ ovvero i valori del portafoglio se la perdita giornaliera subita fosse realmente quella prevista dal VaR e dall'ES rispettivamente.

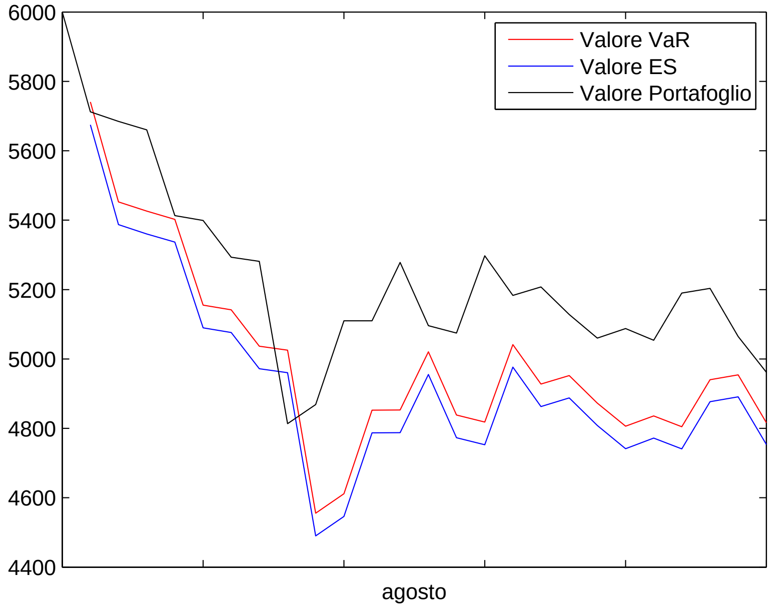

Figura 5.11: Valori in Euro.

Analizziamo in dettaglio l'ultimo giorno del periodo considerato, il 5/9/2011, data in cui sono crollate Piazza Affari e le Borse Europee. La Tabella 5.1 dimostra come la perdita ci sia effettivamente stata (103.4976) e come VaR e ES l'avessero giustamente prevista: per esempio, considerando la finestra di dati di 400 giorni, il $\text{VaR}_{1\%}$ aveva previsto una perdita massima di 351.500290 nel 99% dei casi e il $\text{VaR}_{5\%}$ aveva previsto una perdita massima pari a 248.529695 nel 95% dei casi. La perdita effettiva è stata inferiore alle due previsioni (essendo queste perdite massime) ma comunque considerevole tanto da considerare questo primo lunedì di settembre un "lunedì nero" per tutti i mercati.

	Finestra di 100 giorni	Finestra di 200 giorni	Finestra di 400 giorni
$\text{VaR}_{1\%}$	258.942883	214.929586	351.500290
$\text{ES}_{1\%}$	296.661674	246.237200	402.701411
$\text{VaR}_{5\%}$	183.086608	151.966828	248.529695
$\text{ES}_{5\%}$	229.597992	190.572534	311.666264

Tabella 5.1: Giorno 5/9/2011, perdita effettiva: 103.4976.

Appendice A

Concetti base di probabilità

Riportiamo un elenco di definizioni e proprietà utili in finanza matematica impiegate frequentemente nella stesura della tesi.

1. Spazio di probabilità:
   Si definisce spazio di probabilità una terna $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ dove:

   - Ω è lo spazio campione ovvero l'insieme $\neq \varnothing$ dei singoli stati che può assumere il fenomeno aleatorio in esame;
   - $\mathfrak{F}$ è una σ-algebra ovvero una famiglia di sottoinsiemi di Ω tali che:
     - $\varnothing \in \mathfrak{F}$
     - se $A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{F}$
     - se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{F} \Rightarrow \bigcup_{n\geqslant 1} A_n \in \mathfrak{F}$
   - $\mathbf{P} : \mathfrak{F} \to [0, 1]$ è una misura di probabilità ovvero tale che:
     - $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$
     - $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
     - se $(A_n)_{n\geqslant 1} \in \mathfrak{F}$ e sono disgiunti $\Rightarrow \mathbf{P}(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n) = \sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(A_n)$

2. Variabile aleatoria:
   Dato uno spazio di probabilità, si chiama variabile aleatoria una funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che:

   $$X^{-1}(H) \in \mathfrak{F} \quad \forall H \in \mathfrak{B}$$

   dove $\mathfrak{B}$ è la σ-algebra dei Boreliani.

3. Filtrazione:
   Sia $\mathfrak{F}$ una σ-algebra relativa ad un dato spazio di probabilità $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$;

si definisce filtrazione una famiglia crescente di sotto-σ-algebre di $\mathfrak{F}$: $(\mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$

4. Funzione di ripartizione:
   Data una variabile aleatoria X su uno spazio di probabilità $(L, \mathbf{P})$, si definisce la funzione di ripartizione (o distribuzione) F di X come:

   $$F(X) := \mathbf{P}(X \leqslant x) \quad x \in \mathbb{R}$$

   Essa è:

   - $0 \leqslant F(X) \leqslant 1$
   - monotona crescente: $F(b) \geqslant F(a)$ se $b > a$ in quanto $F(b) - F(a) = \mathbf{P}(a < X \leqslant b) \geqslant 0$. Questo si può esprimere con: $\lim_{y \to x^-} F(y) = F(x^-)$
   - continua a destra: $F(x) = \lim_{y \to x^+} F(y)$
   - $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
   - $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

   Osservazione 10. Dalla proprietà di monotonia crescente (ma non strettamente) e di continuità a destra segue che la F non può tendere all'∞ cioè può ammettere solo discontinuità di tipo salto: nei punti dove ciò accade la F è piatta cioè non invertibile.

5. Densità di probabilità:
   Data una variabile aleatoria X e la sua funzione di ripartizione F_X si definisce densità di probabilità una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che:

   - $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
   - f integrabile
   - $\int_{\mathbb{R}} f(s)ds = 1$
   - $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

6. Distribuzione uniforme in $(0,1)$:
   È una distribuzione di probabilità con funzione di ripartizione:

   $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 0 \\ x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

e di densità:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

7. Distribuzione esponenziale:
   È una distribuzione di probabilità di parametro λ con funzione di ripartizione:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x) & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 \quad \text{se } x < 0 \end{cases}$$

   e di densità:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 \quad \text{se } x < 0 \end{cases}$$

8. Distribuzione normale standard:
   È una distribuzione di probabilità con densità:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$$

9. Distribuzione normale:
   È una distribuzione di probabilità con densità:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

   dove μ è la media e σ la deviazione standard.

10. Distribuzione t-Student:
    È una distribuzione di probabilità con densità:

$$t_\nu(x) = \frac{x}{\left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}$$

    dove ν è il numero di gradi di libertà.

11. Distribuzione normale multivariata:
    Un vettore aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_d)$ ha distribuzione normale multivariata (Gaussiana d-dimensionale) se ha densità:

$$f(x_1, x_2, ..., x_d) = K \exp(-\frac{1}{2} Ax \cdot x + b \cdot x)$$

dove:
$x = (x_1, x_2, ..., x_d)t \in \mathbb{R}$;
A è una matrice simmetrica e definita positiva;
$b = (b_1, b_2, ..., b_d)^t \in \mathbb{R}$.
Il vettore delle medie sarà:

$$\mu_{\mathbf{X}} = E[\mathbf{X}] = (E[X_1], E[X_2], ..., E[X_d])$$

- Se $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ e $B \in M_{dxd}$ allora: $E[B\mathbf{X} + \mathbf{b}] = B\mu_{\mathbf{X}} + \mathbf{b}$;
  infatti:
  $E[B\mathbf{X} + \mathbf{b}] = E[B\mathbf{X}] + E[\mathbf{b}] = BE[\mathbf{X}] + \mathbf{b} = B\mu_{\mathbf{X}} + b$
- la matrice delle covarianze è: $\mathbf{\Sigma_X} = \text{cov}(\mathbf{X})$ dove: $\mathbf{\Sigma_{i,j}} = \text{cov}(X_i, X_j)$ con $i, j = 1, ..., d$.
  - quadrata
  - simmetrica
  - se $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ e $B \in M_{dxd}$ allora: $\text{cov}(B\mathbf{X} + \mathbf{b}) = B\mathbf{\Sigma_X}B^t$
- la matrice di correlazione è: $\mathbf{C_X} = (\rho_{i,j})_{i,j=1,...,d}$
  dove: $\rho_{i,j} = \frac{\text{cov}(X_i,X_j)}{\sigma_i \sigma_j}$
  - quadrata;
  - simmetrica;
  - definita positiva;
  - diagonale principale unitaria.
- si ottiene la relazione tra $\mathbf{\Sigma_X}$ e $\mathbf{C_X}$:

$$\mathbf{\Sigma_X} = \mathbf{DC_XD}$$

  dove $\mathbf{D} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_d)$
- Se $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^d$ ha distribuzione *multivariata normale standard*, allora:

$$\mu_Z = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{\Sigma_Z} = \mathbf{C_Z} = \mathbb{I}_d$$

- $\mathbf{Y} = B\mathbf{Z}+\mathbf{b}$ con $\mathbf{Y}$ normale standard si dice *normale multivariata* (non degenere) e si ha:
  - $\mu_Y = E[\mathbf{Y}] = \mathbf{b}$;
  - $\mathbf{\Sigma_Y} = BB^t$.

  Si scriverà:

$$\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_d(\mu_Y, \mathbf{\Sigma_Y})$$

  In questo caso $\mathbf{Y}$ ha densità congiunta:

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}) = K \exp(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu_Y)^t \Sigma_Y^{-1}(\mathbf{x} - \mu_Y))$$

- Se $\mathbf{Y}$ ha distribuzione normale multivariata, allora:

$$\mathbf{w}^t\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{w}^t\mu_{\mathbf{Y}}, \mathbf{w}^t\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Y}}\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{w} \neq \mathbf{0} \tag{A.1}$$

Infatti:
$\mu_{\mathbf{wY}} = E[\mathbf{wY}] = (E[w_1Y_1], E[w_2Y_2], ..., E[w_dY_d]) =$
$= (w_1E[Y_1], w_2E[Y_2], ..., w_dE[Y_d]) = \mathbf{w}^t\mu_{\mathbf{Y}}$
Inoltre:

$$\Sigma_{\mathbf{wY}} = \mathrm{cov}(\mathbf{wY}) = \mathrm{cov}\left((w_iY_i, w_jY_j)\right)_{i,j=1,...,d} \tag{A.2}$$

ma:
$\mathrm{cov}\left((w_iY_i, w_jY_j)\right) = E[(w_iY_i - E(w_iY_i))(w_jY_j - E(w_jY_j)] =$
$= E[w_iY_iw_jY_j] - E[w_iY_i]E[w_jY_j] = w_iw_jE[Y_iY_j] - w_iE[Y_i]w_jE[Y_j] =$
$w_iw_j(E[Y_iY_j] - E[Y_i]E[Y_j])$
Quindi la (A.2) diventa:

$$\Sigma_{\mathbf{wY}} = \left(w_iw_j\mathrm{cov}(Y_i, Y_j)\right)_{i,j=1,...,d} = \mathbf{w}^t\Sigma_{\mathbf{Y}}\mathbf{w}$$

Bibliografia

[1] Peter Christoffersen. *Elements of financial risk management.* Elsevier Science USA, San Diego, CA, USA, 1a edizione, 2003.

[2] John C. Hull. *Options, Futures, and other derivatives.* Pearson Education, Upper Saddle River, NJ, USA, 7a edizione, 2005.

[3] Alexander J. McNeil, Rüdiger Frey, e Paul Embrechts. *Quantitative Risk Management.* Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 2005.

[4] Andrea Pascucci. *Calcolo stocastico per la finanza.* Springer Verlag, Milano, Italia, 2008.

[5] Andrea Pascucci. *Finanza Matematica.* Springer Verlag, Milano, Italia, 2009.

[6] Giacomo Scandolo. Misurazione del rischio finanziario, 2010. Note del corso di Alta Formazione in Finanza matematica, Università di Bologna.