

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Corso di Laurea in Astronomia

## **Dinamica dei sistemi collisionali**

Tesi di laurea

Presentata da:

**Maria Letizia Valentini**

Relatore:

**Chiar.mo Professore**

**Daniele Dallacasa**

---

Anno Accademico 2020/2021



# Indice

Introduzione.....	1
1 Considerazioni geometriche e approssimazioni .....	2
1.1 Problema dei due corpi.....	2
1.2 Effetto fionda.....	3
1.3 Approssimazione impulsiva .....	4
2 Sistemi collisionali.....	7
2.1 Teorema del viriale.....	7
2.2 Tempo di rilassamento a due corpi.....	8
3 Dinamica delle strutture astrofisiche .....	11
3.1 Ammassi globulari.....	12
3.1.1 Equipartizione energetica ed evaporazione gravitazionale.....	12
3.1.2 Catastrofe gravotermica .....	12
3.2 Ammassi aperti.....	14
Conclusione.....	15
Bibliografia e Sitografia.....	16



## **Introduzione**

L'argomento di cui si intende discutere in questo elaborato è la dinamica dei sistemi collisionali.

Dopo aver messo alla luce problemi e approssimazioni dal punto di vista fisico, verrà introdotto il concetto di tempo di rilassamento a due corpi che permette di definire se un sistema possieda o meno una dinamica di tipo collisionale.

Verranno poi prese in esame alcune strutture particolarmente interessanti sul piano astrofisico, per approfondire la loro dinamica interna e gli effetti che questi sistemi subiscono, come ad esempio la catastrofe gravotermica negli ammassi globulari.

## 1 Considerazioni geometriche e approssimazioni

Un problema riguardante sistemi stellari con numerosi corpi celesti presenti è estremamente complicato da risolvere, ma se ne può semplificare lo studio considerandolo come una somma di svariati problemi a due corpi, ovvero di svariati effetti fionda (Ciotti 2021: 70-80).

### 1.1 Problema dei due corpi

In un sistema di riferimento inerziale  $S_0$  si hanno una massa di test  $m_t$  e una di campo  $m_f$ , con posizioni e velocità rispettivamente  $\mathbf{x}_t$ ,  $\mathbf{v}_t$ ,  $\mathbf{x}_f$ ,  $\mathbf{v}_f$ , che interagiscono attraverso un campo gravitazionale di forze:

$$\begin{cases} m_t \ddot{\mathbf{x}}_t = -\frac{Gm_t m_f}{r^3} \mathbf{r} = -\nabla_{\mathbf{x}_t} U \\ m_f \ddot{\mathbf{x}}_f = -\frac{Gm_t m_f}{r^3} \mathbf{r} = -\nabla_{\mathbf{x}_f} U = \nabla_{\mathbf{x}_t} U \end{cases} \quad (1.1)$$

dove  $\mathbf{r} = \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_f$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f$  sono distanza e velocità relative di  $m_t$  rispetto a  $m_f$  e  $U(r) = -\frac{Gm_t m_f}{r}$  l'energia gravitazionale. Le due forze sono pari in modulo e hanno verso opposto, quindi è facile mostrare che la somma fra le due espressioni sarà nulla. Questo fa sì che il centro di massa del sistema abbia velocità  $\mathbf{v}_{CM}$  costante e che il momento totale  $\mathbf{P} = m_t \mathbf{v}_t + m_f \mathbf{v}_f$  si conservi:

$$\begin{aligned} m_t \ddot{\mathbf{x}}_t + m_f \ddot{\mathbf{x}}_f &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} [m_t \dot{\mathbf{x}}_t + m_f \dot{\mathbf{x}}_f] &= \text{cost} = \mathbf{v}_{CM} \end{aligned} \quad (1.2)$$

e si ha:

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_{CM} + \frac{\mu}{m_t} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_f = \mathbf{v}_{CM} - \frac{\mu}{m_f} \mathbf{v} \quad (1.3)$$

L'equazione dell'orbita relativa viene determinata utilizzando la massa ridotta  $\mu = \frac{m_t m_f}{m_t + m_f}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{x}}_t - \dot{\mathbf{x}}_f = -\left(\frac{1}{m_t} + \frac{1}{m_f}\right) \nabla_{\mathbf{x}_t} U \\ \Rightarrow \mu \ddot{\mathbf{r}} &= -\frac{Gm_t m_f}{r^3} \mathbf{r} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Si può dunque ricavare l'energia del sistema moltiplicando scalarmente l'equazione dell'orbita con la velocità:

$$E_r = \frac{\mu \|\mathbf{v}\|^2}{2} - \frac{Gm_t m_f}{r} \quad (1.5)$$

Sull'orbita relativa l'energia totale si conserva, ma non è invariante per un cambiamento del sistema di riferimento inerziale, quindi l'energia fra le due masse misurata nel sistema  $S_0$  è differente da quella nel sistema del centro di massa  $S_{CM}$ .

## 1.2 Effetto fionda

Considerando ora come un urto elastico l'interazione fra i due corpi, anche se realmente non è quello che accade, si sceglie di studiare il problema in un range spaziale che va da  $-\infty$  a  $+\infty$ . Questo non significa che la velocità sia infinita, ma si vuole analizzare una situazione ideale di particolare interesse.

Per la conservazione dell'energia totale risulta  $||\mathbf{v}(-\infty)|| = ||\mathbf{v}(+\infty)||$ : la conservazione del modulo di  $\mathbf{v}$  nei due istanti non implica tuttavia che la direzione della velocità relativa si mantenga invariata, come si può vedere in *Figura 1*. In generale si ha:

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(+\infty) - \mathbf{v}(-\infty) = \Delta\mathbf{v}_\perp + \Delta\mathbf{v}_{//} \neq 0 \quad (1.6)$$

Le componenti di velocità sono:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{v}_\perp &= \mathbf{v}_\perp(+\infty) - \mathbf{v}_\perp(-\infty) = \mathbf{v}_\perp(+\infty) - 0 = \mathbf{v}_\perp(+\infty) \\ \Delta\mathbf{v}_{//} &= \mathbf{v}_{//}(+\infty) - \mathbf{v}_{//}(-\infty) = \mathbf{v}_{//}(+\infty) - \mathbf{v}(-\infty) \end{aligned}$$

Ulteriori relazioni sono le seguenti:

$$\begin{aligned} ||\mathbf{v}_t||^2 &= ||\mathbf{v}_{CM} + \frac{\mu}{m_t} \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{v}_{CM}||^2 + \frac{\mu^2}{m_t^2} ||\mathbf{v}||^2 + 2 \frac{\mu}{m_t} \langle \mathbf{v}_{CM}, \mathbf{v} \rangle \\ \Delta\mathbf{v}_t &= \frac{\mu}{m_t} \Delta\mathbf{v}, \quad \Delta\mathbf{v}_t = (\Delta\mathbf{v}_t)_\perp + (\Delta\mathbf{v}_t)_{//} \end{aligned}$$

Si vuole dunque determinare la variazione di energia cinetica della massa di test in  $S_0$  generata dall'effetto fionda:

$$\Delta E_t = \frac{m_t}{2} ||\mathbf{v}_t(+\infty)||^2 - \frac{m_t}{2} ||\mathbf{v}_t(-\infty)||^2 = \mu \langle \mathbf{v}_{CM}, \Delta\mathbf{v} \rangle \quad (1.7)$$

Un'altra espressione è:

$$\Delta E_t = \frac{m_t}{2} [||(\Delta\mathbf{v}_t)_\perp||^2 + ||(\Delta\mathbf{v}_t)_{//}||^2 + 2 \langle \Delta\mathbf{v}_t, \mathbf{v}_t(-\infty) \rangle] \quad (1.8)$$

È possibile apprezzare una prima comparsa della termodinamica: nell'espressione (1.8) i primi due sono termini positivi di riscaldamento, il terzo è un termine negativo di raffreddamento e all'equilibrio vi è un perfetto bilancio fra queste quantità.

Il parametro d'impatto  $b$  (Ciotti 2021: 79) è la quantità che identifica geometricamente la minima distanza che i due corpi raggiungerebbero sull'orbita relativa in assenza di interazione (ad esempio di attrazione/repulsione gravitazionale) e, dal punto di vista dinamico, ha una corrispondenza con il momento angolare del centro di massa del sistema della coppia:

$$||\mathbf{J}_{CM}|| = \mu b ||\mathbf{v}(-\infty)|| \quad (1.9)$$

Dalla *Figura 1* è immediato vedere che  $\mathbf{v}(-\infty)$  e  $\mathbf{v}(+\infty)$ , anche se uguali in modulo, hanno direzioni differenti. La velocità lungo l'asse verticale aumenta, mentre orizzontalmente diminuisce: in termini termodinamici si avrà rispettivamente un "riscaldamento" e un "raffreddamento" nelle due direzioni per quanto riguarda, ad esempio, una stella anisotropa.

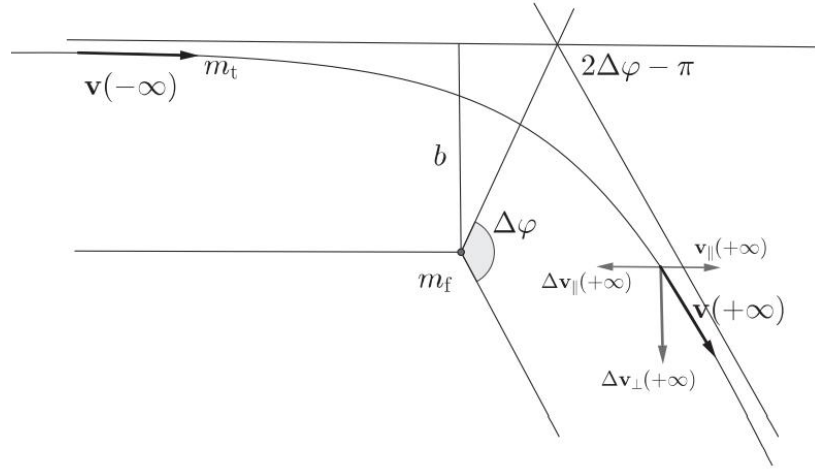


Figura 1: Effetto fionda fra la massa di test e una massa di campo (Ciotti 2021: 75)

### 1.3 Approssimazione impulsiva

L'approccio tipico per il calcolo del tempo di rilassamento (si veda Capitolo 2) si basa su due assunzioni riguardanti gli incontri fra particelle:

- Tutti gli incontri vengono trattati come indipendenti, così da considerare solamente una somma algebrica fra le singole interazioni;
- Gli incontri sono trattati come interazioni iperboliche di due corpi.

Lo scopo ora sarà quindi quello di determinare, attraverso la cosiddetta approssimazione impulsiva (Ciotti 2021: 126-132), il valore di  $(\Delta \mathbf{v})_{\perp}$  da inserire nell'espressione dell'energia.

La variazione dell'impulso di un oggetto di massa ridotta  $\mu$  nella direzione perpendicolare alla velocità relativa  $\mathbf{v}$  è stimata utilizzando la legge dell'impulso

$$\Delta p = F \cdot \Delta t \quad (1.10)$$

equivalente alla II legge della dinamica di Newton in termini di impulso. La si può scrivere con la seguente identità asintotica al primo ordine in funzione del parametro  $\frac{1}{b}$ :

$$\begin{aligned} \Delta p_{\perp} = \mu \|(\Delta \mathbf{v})_{\perp}\| &\sim \frac{G m_t m_f}{b^2} \cdot \frac{2b}{\|\mathbf{v}(-\infty)\|} = \frac{2G m_t m_f}{b \|\mathbf{v}(-\infty)\|} \\ \Rightarrow \|(\Delta \mathbf{v}_t)_{\perp}\|^2 &\sim \frac{4G^2 m_f^2}{b^2 \|\mathbf{v}(-\infty)\|^2} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Questa è tanto più accurata quanto più sono grandi i valori di  $b$ , ovvero per  $\|(\Delta \mathbf{v})_{\perp}\|$  piccoli.

Si descrive ora il sistema di particelle di campo, ad esempio di stelle, introducendo la distribuzione delle densità nello spazio delle fasi:

$$f(\mathbf{x}_f, \mathbf{v}_f) = n_f \cdot g(\|\mathbf{v}_f\|) \quad (1.12)$$

$n_f$  è il numero di particelle di campo per unità di volume ed è indipendente dalle posizioni perché si considera una distribuzione omogenea;  $g$  è una funzione positiva dipendente dal modulo di  $\mathbf{v}_f$ , quantità isotropa:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f d^3 \mathbf{v}_f = n_f, \quad 4\pi \int_0^{\infty} g(v_f) v_f^2 dv_f = 1$$



Il numero di incontri in un intervallo di tempo  $\Delta t$  con le particelle di campo nel volume differenziale di velocità attorno al valore di  $\mathbf{v}_f$  e con un parametro d'urto compreso fra  $b$  e  $b + db$  è perciò:

$$\Delta N(\mathbf{v}_f) = 2\pi b db \|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f\| \Delta t f d^3 \mathbf{v}_f \quad (1.13)$$

Indicando nuovamente per semplicità  $v = \|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f\|$ , è possibile ora eseguire la somma di tutti gli urti:

$$\begin{aligned} \Delta N(\mathbf{v}_f) \cdot \|(\Delta \mathbf{v})_{\perp}\|^2 &= 2\pi b db v \Delta t n_f g(v_f) d^3 \mathbf{v}_f \cdot \frac{4G^2 m_f^2}{b^2 v^2} = \\ &= 8\pi G^2 m_f^2 \Delta t n_f \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^{\infty} \frac{db}{b} \frac{g(v_f)}{v} d^3 \mathbf{v}_f \end{aligned} \quad (1.14)$$

È rilevante introdurre una parentesi sul ruolo di  $b$  in questa trattazione.

$$\int_0^{\infty} \frac{db}{b} = \ln(\infty) - \ln(0) \quad (1.15)$$

Dal punto di vista qualitativo è scorretto considerare valori piccoli del parametro d'urto perché l'approssimazione impulsiva è valida solo per grandi valori di  $b$  per via delle ipotesi iniziali. Si incorre infatti nel problema della “divergenza ultravioletta”: quando un corpo passa a una distanza molto ravvicinata rispetto ad un altro, la sua traiettoria viene fortemente curvata e acquista un'elevata accelerazione, producendo radiazione con lunghezza d'onda nell'ultravioletto.

Per  $b \rightarrow \infty$  si parla invece di “divergenza infrarossa”: a grandi distanze si avrà sì una trasmissione molto ridotta dell'energia ma ci saranno troppi urti dovuti alla presenza di molte altre particelle. Entrambe le divergenze sorgono dalla stima errata che l'Universo sia infinito ed omogeneo.

Un calcolo più accurato, non considerando l'approssimazione impulsiva, rivela che la vera funzione da integrare dovrebbe essere:

$$\frac{b}{b_{min}^2 + b^2} \quad (1.16)$$

e non  $\frac{1}{b}$ , con

$$b_{min} = \frac{G(m_t + m_f)}{\|\mathbf{v}(-\infty)\|^2} \quad (1.17)$$

Perciò si scriverà:

$$\begin{aligned} \int_0^{b_{max}} \frac{b}{b_{min}^2 + b^2} db &= \frac{1}{2} \ln(b^2 + b_{min}^2) \Big|_0^{b_{max}} = \\ &= \frac{1}{2} [\ln(b_{max}^2 + b_{min}^2) - \ln(b_{min}^2)] = \ln \sqrt{1 + \frac{b_{max}^2}{b_{min}^2}} \end{aligned} \quad (1.18)$$

*Considerazioni geometriche e approssimazioni*

Per  $b_{max}^2 \gg b_{min}^2$  si definisce il logaritmo di Coulomb  $\ln \Lambda$ , il quale assume valori tipici compresi fra 10 e 20:

$$\int_0^\infty \frac{db}{b} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{db}{b} = \ln \frac{b_{max}}{b_{min}} = \ln \Lambda \quad (1.19)$$

La somma di quelli che vengono ritenuti dei “riscaldamenti perpendicolari” subiti della massa sarà quindi:

$$8\pi G^2 m_f^2 n_f \Delta t \int_{\mathbb{R}^3} \ln \Lambda \frac{g(v_f)}{v} d^3 v_f \quad (1.20)$$

Si può poi introdurre il potenziale di Rosenbluth, dipendente dalla distribuzione delle velocità e dalle particelle di campo. Quando  $\|\mathbf{v}_t\| \rightarrow \infty$ , il potenziale si comporta come un potenziale gravitazionale per distanze molto grandi, descritto cioè da un termine di monopolo:

$$\Psi(v_t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(v_f)}{v} d^3 v_f = \frac{\Xi(v_t)}{v_t} + 4\pi \int_{v_t}^\infty g(v_f) v_f dv_f \quad (1.21)$$

con  $\Xi(v_t) = 4\pi \int_0^{v_t} g(v_f) v_f^2 dv_f$ ,  $\Xi(\infty) = 1$

Perciò, in conclusione, la massa di prova  $m_t$  viene “riscaldata”, ovvero aumenta la propria energia cinetica dopo l’incontro con un’altra particella e l’energia guadagnata dovuta a tutti gli urti perpendicolari subiti è:

$$(\Delta E_t)_\perp = \frac{m_t}{2} \|(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp\|^2 \sim \frac{m_t}{2} [8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln \bar{\Lambda} \cdot \Psi(v_t)] \cdot \Delta t \quad (1.22)$$

## 2 Sistemi collisionali

Per sistemi collisionali si intendono quelle strutture astrofisiche che hanno età medie più elevate del tempo di rilassamento a due corpi: sono quei sistemi gravitazionali dove gli effetti termodinamici cumulativi degli incontri fra tutte le masse apportano rilevanti modifiche orbitali.

### 2.1 Teorema del viriale

Un rapido accenno al teorema del viriale (Ciotti 2021: 105-106) permetterà di definire e semplificare l'espressione del tempo di rilassamento a due corpi.

La trattazione del teorema del viriale risiede nello studio di un numero elevato di identità tensoriali ricavate dall'equazione non collisionale di Boltzmann e dalle equazioni di Jeans. Per restringere la vastità dei concetti alla base del teorema, si sceglie di trattare la più semplice delle identità tensoriali, quella a due indici, nel caso di un sistema autogravitante all'equilibrio.

Un sistema di  $N$  corpi è detto "autogravitante" se la forza totale sotto la quale le masse si muovono è determinata da:

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^N m_j \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{r_{ij}^3} \quad (2.1)$$

con  $r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$  ( $i = 1, \dots, N$ ) la distanza relativa fra due corpi  $i, j$ . Tale sistema si definisce "virializzato" se all'equilibrio, in qualsiasi istante  $t$ , nel sistema di riferimento del centro di massa  $S_{CM}$  vale il teorema del viriale:

$$0 \leq 2T = -U = |U| \quad (2.2)$$

ovvero il doppio dell'energia cinetica compensa il modulo di quella potenziale. Il sistema sarà detto "legato" quando l'energia potenziale è negativa e, di conseguenza, l'energia totale che si conserva non può essere positiva:

$$E = T + U = T - |U| \leq 0 \quad (2.3)$$

perché si avrà  $T = -E$ ,  $U = 2E$ .

Tutti i sistemi autogravitanti obbediscono al teorema del viriale, il che significa che si trovano obbligatoriamente all'equilibrio termodinamico.

Il piano del viriale è un piano cartesiano in cui l'energia cinetica è in funzione di quella potenziale. La retta contrassegnata con  $VT$  in **Figura 2** identifica il teorema del viriale:

$$T = \frac{|U|}{2} \quad (2.4)$$

Al crescere del modulo dell'energia potenziale  $|U|$  si passa da sistemi con strutture molto distese a sistemi molto concentrati; invece, all'aumento di energia cinetica  $T$  segue un aumento di temperatura. La bisettrice del piano corrisponde a energia totale nulla ( $T = U \Rightarrow E = 0$ ) e funge da discriminare per determinare se il sistema è legato ( $E < 0$ ) oppure no ( $E > 0$ ).

Un sistema autogravitante all'equilibrio giace sulla retta del viriale (punto 1 in figura); se una condizione esterna sottrae energia ( $\Delta E \leq 0$ ) (2), si avrà un ritorno all'equilibrio (3) lungo il percorso guidato dalla retta della conservazione energetica, parallela alla bisettrice del diagramma:

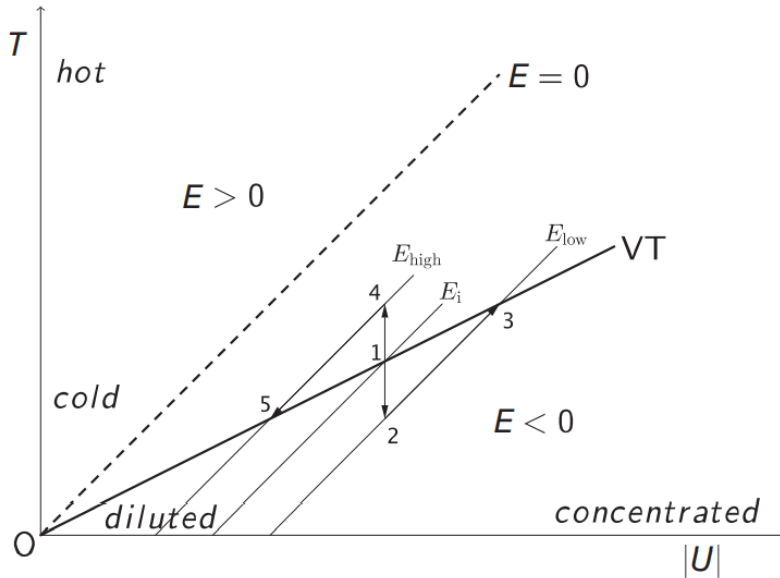
$$T = E + |U| \quad (2.5)$$

L'effetto è quello di aumento sia di  $T$  che di  $U$ :

$$\Delta T = -\Delta E \geq 0, \Delta|U| = -2\Delta E \geq 0 \quad (2.6)$$

ovvero si avrà un innalzamento della temperatura e del grado di concentrazione. Viceversa, fornendo energia (4) la temperatura diminuisce e il sistema tende ad espandersi (5).

Questo fenomeno è alla base degli scambi energetici che avvengono fra le stelle negli ammassi globulari, di cui si discuterà nel Capitolo 3.



*Figura 2: Piano del viriale (Ciotti 2021: 115)*

## 2.2 Tempo di rilassamento a due corpi

Con un esempio qualitativo (Ciotti 2021: 124-125) è possibile evincere il concetto di tempo di rilassamento a due corpi: si supponga di avere un sistema “granulare” di stelle e una sua copia ideale con distribuzione di densità omogenea  $\rho(\mathbf{x}, t)$ . Finché l'approssimazione continua sulla densità è valida, il moto di ogni stella è determinata dal potenziale omogeneo  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  che però, considerando lo scorrere del tempo, si discosterà sempre di più dal potenziale effettivo  $\Phi_{true}(\mathbf{x}, t)$  percepito dalle stelle. L'intervallo oltre il quale un'orbita nel sistema ideale non è più correlato alla traiettoria nel sistema vero viene dunque chiamato tempo di rilassamento a due corpi  $t_{2b}$ .

Tenendo a mente tutte le considerazioni e le approssimazioni viste nel precedente capitolo, matematicamente  $t_{2b}$  è definito come l'intervallo temporale tale per cui

$$(\Delta E_t)_\perp = E_t^{iniziale} \quad (2.7)$$

ovvero

$$\begin{aligned} \frac{m_t}{2} [8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln \bar{\Lambda} \Psi(v_t)] \cdot t_{2b} &= E_t^{iniz} = \frac{m_t}{2} v_t^2 \\ \Rightarrow t_{2b} &= \frac{||\mathbf{v}_t(-\infty)||^2}{8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln \bar{\Lambda} \Psi(v_t)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Si suppongano ora delle ipotesi di lavoro applicate ad un sistema stellare al fine di ricavare un'espressione approssimata di  $t_{2b}$ :

- N stelle identiche di massa  $m_t = m_f = m$  (massa totale  $M = N \cdot m$ )
- Validità del teorema del viriale, ovvero sistema all'equilibrio
- Sfera di raggio  $R$

Le energie cinetica e potenziale del sistema in funzione della dispersione di velocità viriale  $\sigma_v$  e del raggio viriale  $r_v$  sono:

$$T = \frac{M\sigma_v^2}{2}, \quad U = -\frac{GM^2}{r_v} \quad (2.9)$$

Prendendo  $r_v$  pari al raggio  $R$  del sistema, si utilizza il teorema del viriale (2.2) per ricavare  $\sigma_v$  (Ciotti 2021: 112-117):

$$\sigma_v^2 = \frac{GM}{R} \quad (2.10)$$

Con un calcolo accurato è possibile notare che questa espressione non è corretta, ma per ordini di grandezza la si può considerare valida. Un'ulteriore ipotesi viene applicata al modulo della velocità iniziale e, di conseguenza, al potenziale di Rosenbluth per ridurre la forma di  $t_{2b}$ :

$$\begin{aligned} ||\mathbf{v}_t(-\infty)|| &= \sigma_v, \quad \Psi \sim \frac{1}{||\mathbf{v}_t||} = \frac{1}{\sigma_v} \\ \Rightarrow t_{2b} &= \frac{\sigma_v^3}{8\pi G^2 m^2 n \ln \Lambda} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Il tempo impiegato per attraversare il sistema sferico definisce una scala di tempi naturale:

$$t_{cross} = \frac{2R}{\sigma_v} \quad (2.12)$$

Mettendo a rapporto  $t_{2b}$  con  $t_{cross}$  si ha:

$$\frac{t_{2b}}{t_{cross}} = \frac{\sigma_v^4}{16\pi G^2 m^2 n R \ln \Lambda} = \frac{\sigma_v^4 R^2}{12G^2 m^2 N \ln \Lambda} = \frac{N\sigma_v^4 R^2}{12G^2 M^2 \ln \Lambda} \quad (2.13)$$

È stata utilizzata la densità per una sfera, che vale  $n = \frac{N}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ . Ricordando la (2.10), si ottiene:

$$\frac{t_{2b}}{t_{cross}} \sim \frac{N}{12 \ln \Lambda} \quad (2.14)$$

### *Sistemi collisionali*

Considerando ora una stima, seppur imprecisa, del logaritmo di Coulomb pari al numero  $N$  di stelle presenti,

$$\begin{aligned} b_{min} &= \frac{2Gm}{\sigma_v^2} = \frac{2GM}{\sigma_v^2 N} = \frac{2R}{N} \sim \frac{b_{max}}{N} \\ \Rightarrow \Lambda &= \frac{b_{max}}{b_{min}} = N \end{aligned} \quad (2.15)$$

si giunge infine alla forma semplificata del rapporto per un sistema autogravitante all'equilibrio:

$$\frac{t_{2b}}{t_{cross}} = \frac{0.1 \cdot N}{\ln N} \quad (2.16)$$

Sorge spontanea la domanda del perché  $t_{2b}$  aumenti con  $N$ , situazione apparentemente paradossale dal momento che, se il numero di stelle cresce, dovrebbero essere sempre più numerosi gli urti e sarebbe quindi immediato pensare che il sistema “rilassi” prima. La dimostrazione (Ciotti 2021: 133-134) si fonda sul legame del tempo di rilassamento a due corpi non solo con il numero di incontri ma soprattutto con le variazioni energetiche causate dagli incontri stessi:

$$\Delta E_t \propto N \cdot \Delta E_i \quad (2.17)$$

dove  $\Delta E_i$  è lo scambio di energia di un singolo incontro. Per una massa  $m$  si ha:

$$\Delta E_i \propto m^2 = \frac{M^2}{N^2} \quad (2.18)$$

Dunque, la variazione energetica totale è proporzionale a  $N^{-1}$ , il che spiega il crescente valore di  $t_{2b}$  all'aumentare di  $N$ .

### 3 Dinamica delle strutture astrofisiche

In questo capitolo verranno fatti alcuni esempi di strutture di rilevante importanza astrofisica che possiedono o meno un comportamento collisionale dal punto di vista dinamico.

Facendo riferimento alla **Tabella 1** si esaminano una galassia, un ammasso globulare e un ammasso aperto (Ciotti 2021: 133).

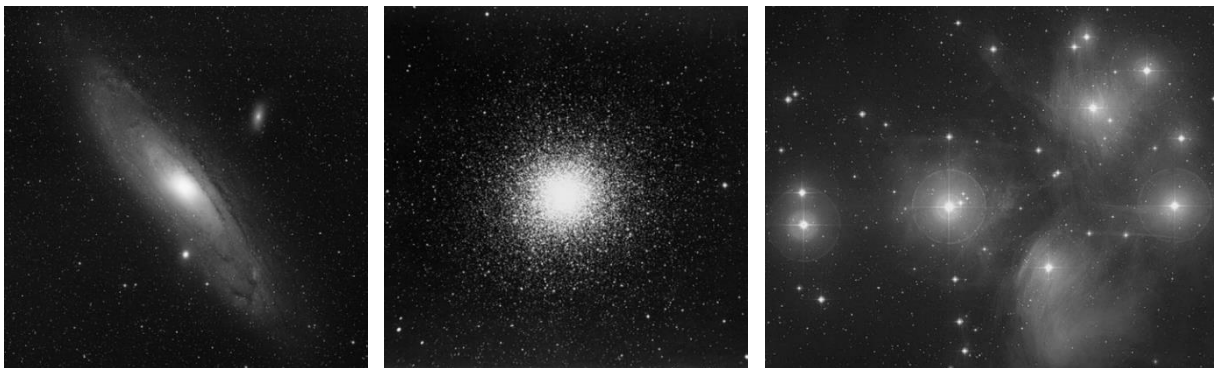
Come tempo scala della galassia si è scelto il periodo di rivoluzione del Sole attorno al centro della Via Lattea. Il rapporto fra i due tempi caratteristici, calcolato con la (2.16), è di  $10^9$ : questo significa che, affinché il trasferimento di energia dovuto a questo tipo di urti distanti fra i corpi diventi rilevante per un'orbita, una stella dovrebbe compiere un miliardo di orbite all'interno della galassia. Tuttavia, nella migliore delle ipotesi, nella sua vita ne compirà al massimo una cinquantina. Il tempo di rilassamento a due corpi risulta addirittura più elevato dell'età dell'Universo, stimata di 13,7 miliardi di anni: per questo motivo le galassie vengono definite sistemi non collisionali.

I valori tipici di un ammasso globulare forniscono un valore di  $t_{2b}$  di circa 10 miliardi di anni, confrontabile con l'età media di queste strutture. Sono perciò denominati sistemi quasi collisionali. Gli ammassi aperti sono invece fortemente collisionali perché il tempo di rilassamento è di alcuni ordini inferiore persino al tempo di vita medio delle stesse stelle presenti ( $\sim 10$  Myr).

È comunque importante tenere presente che sia le galassie che gli ammassi globulari sono sistemi non omogenei, perciò  $t_{2b}$  varia con la posizione e la densità delle stelle all'interno di tali strutture.

	N stelle	$t_{\text{cross}}$	$t_{\text{age}}$	$t_{2b}$
<b>Galassia (Via Lattea)</b>	$10^{11}$	250 Myr	13,2 Gyr	$2,5 \cdot 10^8$ Gyr
<b>Ammasso Globulare</b>	$10^6$	1 Myr	10 Gyr	10 Gyr
<b>Ammasso Aperto</b>	$10^2$	1 Myr	300 Myr	1 Myr

**Tabella 1:** Valori tipici del numero di stelle, del tempo di attraversamento, dell'età media e del tempo di rilassamento a due corpi di una galassia (Via Lattea), un ammasso globulare e un ammasso aperto (Ciotti 2021: 133; Binney, Tremaine 2008: 31)



**Figura 3:** Galassia di Andromeda M31, Ammasso globulare M13, Ammasso aperto delle Pleiadi M45 (Karttunen, Kröger, Oja, Poutanen, Donner 2017: 2, 3, 6)

### 3.1 Ammassi globulari

Come appena visto, gli ammassi globulari sono strutture collisionali. Possiedono forma pressoché sferoidale e sono composti da diverse migliaia di stelle vecchie di bassa metallicità che sono legate gravitazionalmente e che orbitano attorno al centro della galassia ospitante. La dinamica di questi sistemi è plasmata dai fenomeni di equipartizione energetica e di evaporazione gravitazionale.

#### 3.1.1 Equipartizione energetica ed evaporazione gravitazionale

In regime collisionale gli urti gravitazionali fanno sì che l'energia cinetica sia distribuita equamente fra tutti i corpi: come per un sistema gassoso (Binney, Tremaine 2008: 567) dove

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} k_B T \quad (3.1)$$

anche in un sistema stellare all'equilibrio la velocità di una stella è inversamente proporzionale alla radice quadrata della sua massa. Questo dà un'importante spiegazione ai dati osservativi: stelle di massa ridotta acquistano energia cinetica spostandosi su orbite più esterne nell'alone, a discapito delle stelle di grande massa che, perdendo energia, si concentrano nel core dell'ammasso globulare, che può essere visto come un sistema autogravitante all'equilibrio. Si raggiunge perciò una situazione in cui un discreto numero di stelle acquista velocità superiori a quella di fuga dal sistema. Due possono essere i motivi di questo evento (Binney, Tremaine 2008: 555-559):

- Espulsione, corrispondente ad un basso valore del parametro d'impatto  $b$  a seguito di un singolo urto gravitazionale che produce un cambiamento rilevante della velocità di uno dei due corpi;
- Evaporazione gravitazionale, quando  $b$  è grande e il numero delle interazioni con le altre stelle presenti diventa importante.

Al netto di ciò, l'energia cinetica delle stelle che si spostano sempre più all'esterno diventa superiore all'energia potenziale che le lega al sistema, ovvero l'energia totale  $E = T - |U|$  acquisita diventa positiva, così da permettere la fuga.

Come visto in (2.11),  $t_{2b}$  è inversamente proporzionale alla densità  $n$  e sarà quindi più breve nel core rispetto all'alone. Le stelle che contribuiscono al tasso di evaporazione hanno perciò orbite sempre più allungate e attraversano le regioni centrali fino a quando non si trovano più legate gravitazionalmente all'ammasso.

Inoltre, il core ha calore specifico negativo, quindi, per quanto visto nel paragrafo sul teorema del viriale e in particolare in *Figura 2*, perde continuamente energia a seguito delle interazioni gravitazionali, ma quando ritorna all'equilibrio aumenta sia l'energia cinetica che quella potenziale e diventa una struttura sempre più calda e compatta.

#### 3.1.2 Catastrofe gravotermica

Facendo proprio riferimento al teorema del viriale e alla trattazione riguardante i sistemi all'equilibrio visti nel Capitolo 2, è possibile ora soffermarsi su un fenomeno di instabilità che prende il nome di catastrofe gravotermica (Binney, Tremaine 2008: 568-573; Ciotti 2021: 116-117).



Le stelle nell'alone risultano più fredde di quelle più interne e possono addentrarsi nel core, dove la differenza energetica farà in modo che le stelle acquistino energia e vengano nuovamente rimandate all'esterno, diventando ulteriormente fredde. Il nucleo perde in questo modo dell'energia e, per riportarsi all'equilibrio, si contrae aumentando la propria temperatura. Per via della frequenza crescente di questo tipo di eventi, si avrà il collasso dell'intera struttura, la quale perderà sempre più massa ma diventerà altresì più densa.

Questo processo aumenta il gradiente termico fra core e alone e, per sistemi inizialmente isotermi, è considerevole la differenza in termini di densità. Quando il rapporto fra le densità al centro e sulla superficie dell'ammasso

$$\mathcal{R} = \frac{\rho(r = 0)}{\rho(r = R)} \quad (3.2)$$

diventa molto elevato, si ha l'innesco della catastrofe gravotermica: questa genera un aumento delle dispersioni di velocità delle stelle che porta il nucleo al collasso.

Un effetto rilevante di questa situazione è il calo del rapporto fra massa e luminosità, dovuto al fatto che gli ammassi globulari tendono a perdere le stelle meno massive per le quali tale rapporto risulta più elevato. Il profilo di brillantezza superficiale, infatti, presenta una rapida decrescita a partire dalle zone più centrali, a differenza degli ammassi che non hanno ancora subito il collasso in cui nelle zone più interne la brillantezza è pressoché costante e a raggi più grandi il calo è meno pronunciato. L'andamento è ben descritto dai modelli teorici di King a legge di potenza e dal modello di stato iniziale isolato a singola massa di Plummer (*Figura 4*).

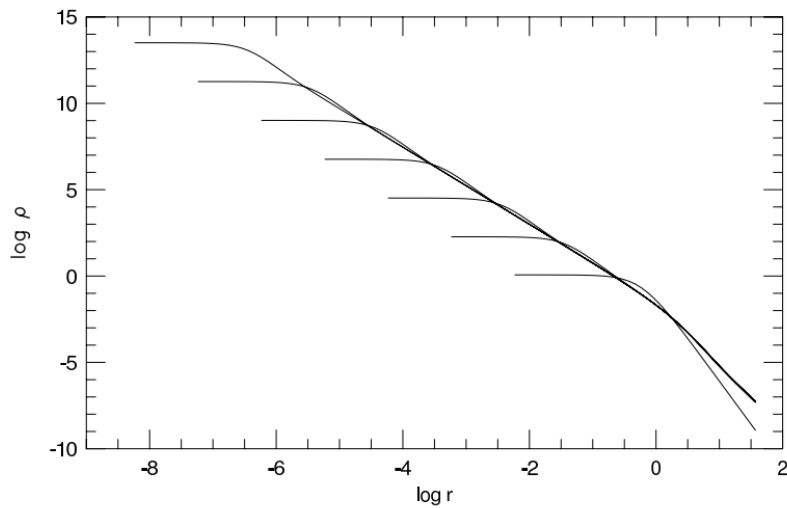
La catastrofe gravotermica si può arrestare nel momento in cui la densità inizia ad essere troppo elevata nelle zone centrali e le stelle sono sempre più ravvicinate: si può avere formazione di stelle binarie. Queste ultime fermano il collasso perché subiscono delle perdite energetiche da parte delle stelle più esterne, diventando così una nuova fonte di energia per l'evaporazione gravitazionale. La formazione delle binarie può avvenire in due modi (Spitzer 1987: 148-151):

- *Three-body capture*: in un sistema sempre più ravvicinato di tre stelle orbitanti la stella meno massiva viene espulsa e rilascia un difetto in termini di energia che permette di legare le due rimanenti;
- *Tidal capture*: durante il loro incontro due stelle vengono deformate dall'energia cinetica che, diminuendo, fa sì che i due corpi si allontanino con velocità inferiori a quelle prima dell'urto; le orbite infatti passano dall'essere estremamente allungate a quasi circolari e molto strette.

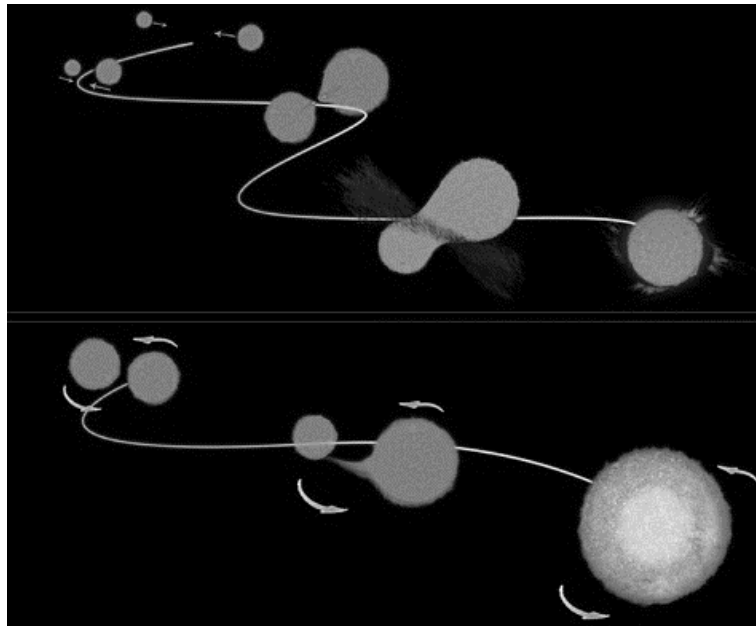
Se tuttavia le binarie si ritrovano ad essere eccessivamente vicine, i corpi che interagiscono con esse non sono più in grado di riconoscerne la struttura binaria: questo permetterà alla catastrofe gravotermica di riprendere.

Le oscillazioni gravotermiche, ovvero cicli di espansione e collasso del core, sono pertanto dovute a scambio e bilancio continuo fra energia assorbita e ceduta in tutti gli effetti fionda.

Le blue stragglers (Binney, Tremaine 2008: 628-629) (*Figura 5*) sono stelle più calde e blu delle altre di stessa luminosità presenti nell'ammasso. La teoria ha portato ad ipotizzare che vengano originate da un sistema binario che è sempre più stretto e causa la fusione delle due stelle, dando origine a questa particolare specie stellare. La loro massa è perciò pari al doppio delle altre stelle del sistema e, in un certo senso, ringiovanisco. Questo spiega la loro posizione anomala sulla sequenza principale oltre il punto di turn-off nel diagramma di Hertzsprung-Russell (si veda il sito [blue\\_stragglers \(cosmic-lab.eu\)](http://blue_stragglers.cosmic-lab.eu)).



**Figura 4:** *Evoluzione temporale dei profili di densità in funzione del raggio dell'ammasso globulare: la densità centrale aumenta al diminuire nel tempo del raggio del core (Binney, Tremaine 2008: 607)*



**Figura 5:** *Due modelli di formazione di una blue straggler: sopra, due stelle poco massive in un ambiente molto denso subiscono una collisione che combina il loro combustibile per formare una nuova stella più giovane blu; sotto, la stella meno massiva cede il proprio materiale a favore della compagna che quindi ringiovanisce (tratto da blue\_stragglers (cosmic-lab.eu))*

### 3.2 Ammassi aperti

Dal punto di vista dinamico, gli ammassi aperti (Binney, Tremaine 2008: 664-665) sono simili a quelli globulari. L'evaporazione gravitazionale, però, è molto più rapida e le stelle hanno modo di scappare dal sistema molto prima di consumare la loro esistenza all'interno dell'ammasso. Non a caso, in questi tipi di strutture si osservano principalmente stelle di colore blu, ovvero stelle giovani.

## **Conclusione**

Questa trattazione ha portato alla definizione dei concetti base per ritenere se un sistema astrofisico presenti una dinamica collisionale.

Il teorema del viriale si è rivelato fondamentale nello studio di strutture autogravitanti all'equilibrio, per le quali il problema con numerosi corpi celesti è stato ridotto ad una somma cumulativa di tutti gli effetti fionda che si verificano. Si è evinto che queste interazioni fra due corpi apportano considerevoli variazioni energetiche all'interno del sistema in esame e, di conseguenza, gli effetti termodinamici complessivi possono modificare le orbite delle stelle coinvolte.

Ammassi globulari e ammassi aperti sono sistemi collisionali che subiscono l'evaporazione gravitazionale, ovvero la perdita delle stelle meno massive. Proprio perché riescono a sviluppare questa particolare dinamica, vanno incontro alla catastrofe gravotermica che coinvolge il core e l'alone. Il fenomeno di instabilità può essere arrestato nel momento in cui, per via della concentrazione sempre più elevata delle zone centrali, molte stelle si legano in sistemi binari e possono fornire ulteriore energia che viene spesa nell'evaporazione gravitazionale.

## **Bibliografia e Sitografia**

Ciotti, L. 2021. *Introduction to Stellar Dynamics*, Cambridge University Press

Binney, J., Tremaine, S., 2008. *Galactic Dynamics*, 2nd ed., Princeton University Press

Spitzer, L. Jr., 1987. *Dynamical Evolution of Globular Clusters*, Princeton University Press

Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M., Donner, K. J. (eds.), 2017. *Fundamental Astronomy*, 6th ed., Springer

blue\_stragglers (cosmic-lab.eu): [http://www.cosmic-lab.eu/Cosmic-Lab/blue\\_stragglers.html](http://www.cosmic-lab.eu/Cosmic-Lab/blue_stragglers.html)