Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

DISTRIBUZIONI TEMPERATE

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
BRUNO FRANCHI

Presentata da:
LUCIA GIAMPAOLI

II Sessione
Anno Accademico 2010/2011

. . . Al mio caro
amico Jack. . .

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è presentare un'introduzione alla Teoria delle distribuzioni (in particolare distribuzioni temperate); vengono analizzati gli spazi di distribuzioni $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{D}'_K(\mathbb{R}^n)$ (K è un compatto di $\mathbb{R}^n$), mettendo in evidenza le loro principali proprietà.

Viene inoltre dedicato un capitolo ad un esempio di distribuzione temperata che non è di tipo funzione, pur coincidendo con una funzione $\mathcal{C}^\infty$ fuori dall'origine, la distribuzione $\dfrac{1}{x}$.

Per poter trattare correttamente gli spazi di distribuzioni, i primi due capitoli di questo elaborato sono dedicati agli spazi numerabilmente normati.

Il primo capitolo è interamente rivolto agli spazi numerabilmente normati, alla loro definizione e alle loro principali proprietà.

Il secondo capitolo tratta due importanti esempi di spazi numerabilmente normati completi: lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = (S(\mathbb{R}^n), \| \|_1, \| \|_2, \dots)$ (dove $S(\mathbb{R}^n)$ è lo spazio vettoriale delle funzioni a decrescenza rapida $S(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}, f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n),\ x^\alpha D^\beta f(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall \alpha, \beta \quad \text{multi-indici }\}$) e lo spazio $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n) = (C_K^\infty(\mathbb{R}^n), \| \|_1, \| \|_2, \dots)$ (dove $C_K^\infty(\mathbb{R}^n)$ è lo spazio vettoriale delle funzioni $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C},\ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n),\ \mathit{supp} f \subseteq K$ con $K = \prod_{j=1}^{n} [-a_j, a_j],\ a_j > 0$). In entrambi i casi viene fornita la costruzione di tali spazi numerabilmente normati, dimostrandone anche la completezza.

In questo capitolo, vengono inoltre affrontati due esempi di applicazioni lineari continue fra spazi numerabilmente normati: Moltiplicazione per una funzione e Trasformazione di Fourier. La parte relativa alla Trasformazione di Fourier è divisa in due casi: il primo caso in cui lo spazio di defnizione è $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e il secondo caso in cui lo spazio di definizione è $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$.

Nel terzo capitolo vengono illustrati gli spazi di distribuzioni $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}'_K(\mathbb{R}^n)$ ovvero i duali rispettivamente degli spazi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ (insieme dei funzionali lineari continui rispettivamente su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$).

Si giunge quindi alla definizione di distribuzione ovvero, indicando con Φ uno qualunque fra gli spazi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ e con Φ' uno qualuneque fra gli spazi $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{D}'_K(\mathbb{R}^n)$, si ha che se $T \in \Phi'$, T è una *distribuzione*. In particolare se $\Phi = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, T è una *distribuzione temperata*.

Viene fornita inoltre la definizione di distribuzione di tipo funzione e di distribuzione temperata di tipo funzione. Esistono tuttavia distribuzioni temperate che non sono di tipo funzione: un esempio è dato dalla distribuzione δ di Dirac.

Viene infine esposta la definizione di Trasformata di Fourier di una distribuzione e alcune sue proprietà.

Il quarto e ultimo capitolo presenta un esempio di distribuzione temperata, la distribuzione $\dfrac{1}{x}$ dove $\dfrac{1}{x} \stackrel{def}{=} \partial ln\,|x|$.

Vengono analizzate le principali proprietà di tale distribuzione; in particolare $\dfrac{1}{x}$ è una distribuzione dispari e la sua trasformata di Fourier è $\mathcal{F}(\frac{1}{x}) = -\pi\ i\ sgn\ s$, anch'essa dispari in quanto la trasformata di Fourier mantiene la parità della distribuzione.

La nostra presentazione segue quella di [1], [2], [3]. I teoremi, le definizioni e le osservazioni di base ultilizzati nei capitoli appena descritti, sono stati riportati in una breve Appendice con cui si conclude questo elaborato.

Indice

Capitolo 1

Spazi numerabilmente normati

In questo capitolo viene introdotta la nozione di spazio numerabilmente normato per poi considerare, nel Capitolo 2, due importanti esempi di spazi numerabilemnte normati ovvero lo spazio $(S(\mathbb{R}^n), \| \|_1, \| \|_2, \ldots) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e lo spazio $(C_K^\infty(\mathbb{R}^n), \| \|_1, \| \|_2, \ldots) = \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$.
Prima di esporre teoremi e definizioni relativi agli spazi numerabilmente normati è necessaria una breve parte introduttiva e di notazione.

Breve Introduzione
Sia $(X, \| \|)$ uno spazio normato e sia $Y = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy$\}$.
Si introduce la seguente relazione di equivalenza:
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Y$ e $\|x_n - y_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Sia $\overline{X} = Y_{/\sim} = \{[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \; ; \; (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Y\}$ dove $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \; ; \; (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$.
Si può dotare $\overline{X}$ di struttura di spazio vettoriale ponendo:

$$\bar{x} + \bar{y} = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \qquad \textit{(Somma)}$$

$$c\bar{x} = c[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(cx_n)_{n\in\mathbb{N}}] \qquad \textit{(Prodotto per scalare)}$$

Inoltre si può introdurre su $\overline{X}$ la seguente norma:

$$\|\bar{x}\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| \quad dove \quad \bar{x} = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$$

Così si ha che $(\overline{X}, \|\ \|)$ è uno *spazio normato completo.*
Identficando x con $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ (classe di equivalenza determinata dalla successione stazionaria), risulta $(X, \|\ \|)$ un sottospazio di $(\overline{X}, \|\ \|)$ denso in questo. $(\overline{X}, \|\ \|)$ si dice *completamento* di $(X, \|\ \|)$.

Notazione
Si scrive $\overline{X}^{\|\ \|}$ invece di $\overline{X}$ e si dice che $\overline{X}^{\|\ \|}$ è il completamento di X rispetto alla norma $\|\ \|$.

Teorema 1.0.1.
Sia X uno spazio vettoriale e siano $\|\ \|_1$ e $\|\ \|_2$ due norme per X, confrontabili (vedi Definizione A.4 Appendice).
Se $(X, \|\ \|_1)$ e $(X, \|\ \|_2)$ sono completi allora le due norme sono equivalenti.

Dimostrazione.
Per definizione due norme sono confrontabili se una è più debole dell'altra; supponiamo per esempio che sia $\|\ \|_1$ più debole di $\|\ \|_2$; quindi $\exists c \in \mathbb{R}^+$ t.c. $\|x\|_1 \leq c\,\|x\|_2\ \forall x \in X$.
Poniamo $X_1 = \overline{X}^{\|\ \|_1}$, $X_2 = \overline{X}^{\|\ \|_2}$ e per ipotesi si ha che $X = X_1 = X_2$.
Sia $l_{21} : X_2 \longrightarrow X_1$ un'applicazione t.c. $l_{21}(x) = x$, l_{21} è evidentemente lineare *su* e 1-1; inoltre $\|l_{21}(x)\|_1 = \|x\|_1$ e per ipotesi $\|x\|_1 \leq c\,\|x\|_2 \Longrightarrow \|l_{21}(x)\|_1 \leq c\,\|x\|_2$.
Allora l_{21} è continua (per Teorema A.0.14 Appendice). Essendo l_{21} biettiva e continua, essa ammette inversa continua, quindi $\exists c' \in \mathbb{R}^+$ t.c. $\|x\|_2 = \left\|l_{21}^{-1}(x)\right\|_1 \leq c'\,\|x\|_1\ \forall x \in X$.
Quindi si ha $\|x\|_2 \leq c'\,\|x\|_1\ \forall x \in X$.
Da $\|x\|_1 \leq c\,\|x\|_2$ e $\|x\|_2 \leq c'\,\|x\|_1\ \forall x \in X$ segue che le norme $\|\ \|_1$ e $\|\ \|_2$ sono equivalenti.

□

Definizione 1.1. Norme concordanti
Sia X uno spazio vettoriale e siano $\| \|_1$ e $\| \|_2$ due norme per X.
Le due norme si dicono *concordanti* se ogni successione in X, che sia di Cauchy sia rispetto a $\| \|_1$ che a $\| \|_2$ e che converga a zero rispetto ad una delle due norme, converge a zero anche rispetto all'altra norma.

Definizione 1.2. Spazio numerabilmente normato
Sia X uno spazio vettoriale e sia $\| \|_1, \| \|_2, \| \|_3, \dots$ un'infinità numerabile di norme per X.
Sia $\| \|_n$ più debole di $\| \|_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e siano $\| \|_n$ e $\| \|_{n+1}$ concordanti.
Siano: $V_{\varepsilon,n}(x) = \{y \in X \ ; \ \|y - x\|_n < \varepsilon, \ \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$ e $\mathscr{B} = \{\emptyset, V_{\varepsilon,n}(x)$ con $\varepsilon \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}, x \in X\}$.
Allora $\mathscr{B}$ è base di una topologia $\mathcal{U}$ per X.
X munito di questa topologia si denota con $(X, \| \|_1, \| \|_2, \dots)$ e si chiama **spazio numerabilmente normato**.

Osservazione 1.
X è sottospazio di $\overline{X}^{\| \|_n}$ $\forall n$ e $\overline{X}^{\| \|_{n+1}}$ è sottospazio di $\overline{X}^{\| \|_n}$. Quindi si ha

$$X \subseteq \ldots \subseteq \overline{X}^{\| \|_n} \subseteq \ldots \subseteq \overline{X}^{\| \|_1}$$

$$X \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X}^{\| \|_n}$$

Definizione 1.3.
Sia $(X, \| \|_1, \| \|_2, \dots)$ uno spazio numerabilmente normato.
Una successione $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X si dice di Cauchy se è di Cauchy rispetto a $\| \|_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Equivalentemente la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $(X, \| \|_1, \| \|_2, \dots) \Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ e $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists n(\varepsilon, p) \in \mathbb{N}$ t.c. $\|x_m - x_n\|_p < \varepsilon$ per $m, n > n(\varepsilon, p)$.
Una successione $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X si dice convergente se
$\exists x \in X$ t.c. $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\| \|_n} x$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Equivalentemente la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente in $(X, \| \|_1, \| \|_2, \dots) \Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ e $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists n(\varepsilon, p) \in \mathbb{N}$ t.c. $\|x - x_n\|_p < \varepsilon$ per $n > n(\varepsilon, p)$
(cioè $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\| \|_p} x$ $\forall p \in \mathbb{N}$).

Osservazione 2.
Ogni successione convergente è di Cauchy ma non è vero il viceversa.
Uno spazio numerabilmente normato si dice completo se ogni successione di Cauchy è convergente.

Teorema 1.0.2.
Sia $(X, \| \|_1, \| \|_2, \ldots)$ *uno spazio numerabilmente normato.*
Si ha che $(X, \| \|_1, \| \|_2, \ldots)$ *è completo* $\Longleftrightarrow X = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X}^{\| \|_n}$

Dimostrazione.
Sufficienza:
Per ipotesi si ha che $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X}^{\| \|_n}$, si vuole dimostrare che X è completo cioè che ogni successione di Cauchy in $(X, \| \|_1, \| \|_2, \ldots)$ è convergente in $(X, \| \|_1, \| \|_2, \ldots)$.
Sia quindi $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $(X, \| \|_1, \| \|_2, \ldots)$ allora (per Definizione 1.3) si ha che la successione è di Cauchy in $(X, \| \|_p)$ $\forall p \in \mathbb{N}$; quindi $\exists \bar{x}^{(p)} \in \overline{X}^{\| \|_p}$ t.c. $x_n \underset{n \to +\infty}{\xrightarrow{\| \|_p}} \bar{x}^{(p)}$.
Considero ora l'applicazione $l_{p+1,p} : \overline{X}^{\| \|_{p+1}} \longrightarrow \overline{X}^{\| \|_p}$ lineare, continua, in generale non 1-1 t.c. se x_n converge a $\bar{x}^{(p)}$ in $X^{\| \|_p}$ e a $\bar{x}^{(p+1)}$ in $X^{\| \|_{p+1}}$ allora $l_{p+1,p}(\bar{x}^{(p+1)}) = \bar{x}^{(p)}$
$\forall p$:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots \begin{cases} \xrightarrow{\| \|_1} \bar{x}^{(1)} \\ \xrightarrow{\| \|_2} \bar{x}^{(2)} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\| \|_p} \bar{x}^{(p)} \\ \vdots \end{cases}$$

e per la convenzione fatta $l_{p+1,p}(\bar{x}^{(p+1)}) = \bar{x}^{(p+1)}$.
Dunque $\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(2)} \ldots = \bar{x}^{(p)} = \ldots$.
Poiché per ipotesi $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X}^{\| \|_n}$, tutti i punti $\bar{x}^{(p)}$ coincidono con un punto di X, sia tale punto $\bar{x}$ (si ha quindi $\bar{x}^{(p)} = \bar{x}$ $\forall p$).

Da $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\ \|_p} \bar{x}^{(p)} = \bar{x} \quad \forall p$, segue che $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{x}$ in $(X, \|\ \|_1, \|\ \|_2, \ldots)$ cioè si è dimostrato che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy in $(X, \|\ \|_1, \|\ \|_2, \ldots)$ è convergente in $(X, \|\ \|_1, \|\ \|_2, \ldots)$ e quindi $(X, \|\ \|_1, \|\ \|_2, \ldots)$ è completo.

Necessità:

Per ipotesi si ha che $(X, \|\ \|_1, \|\ \|_2, \ldots)$ è completo, si vuole dimostrare che $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X}^{\|\ \|_n}$. È già noto dall'Osservazione 1 che $X \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X}^{\|\ \|_n}$ quindi per dimostrare l'ugualianza basta provare che $X \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X}^{\|\ \|_n}$ cioè preso $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X}^{\|\ \|_n}$ si deve verificare che $x \in X$.

Sia quindi $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X}^{\|\ \|_n}$ allora $x \in \overline{X}^{\|\ \|_n}\ \forall n$ e poichè X è denso in $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X}^{\|\ \|_n}$ (vedi Breve Introduzione)$\Longrightarrow \exists x_n \in X$ t.c. $\|x - x_n\|_n < \frac{1}{n}$.

Proviamo che $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ in $(X, \|\ \|_1, \|\ \|_2, \ldots)$ (cioè si deve verificare che $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\ \|_p} x \quad \forall p \in \mathbb{N}$). Fissato ad arbitrio $p \in \mathbb{N}$ e preso $n > p$ si ha che $\|x - x_n\|_p \leq \|x - x_n\|_n < \frac{1}{n} \Longrightarrow \|x - x_n\|_p < \frac{1}{n}$ e quindi $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\ \|_p} x\ \forall p \in \mathbb{N}$.

Segue così che $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $(X, \|\ \|_1, \|\ \|_2, \ldots)$ e poiché per ipotesi questo è completo, si ha che $\exists \bar{x} \in X$ t.c. $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{x}$ in $(X, \|\ \|_1, \|\ \|_2, \ldots)$ cioè $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\ \|_p} \bar{x} \quad \forall p \in \mathbb{N}$ e quindi poiché è stato precedentemente ottenuto che $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\ \|_p} x \quad \forall p \in \mathbb{N}$, per unicità del limite segue che $x = \bar{x} \in X$ cioè $x \in X$. Si ha quindi che $X \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X}^{\|\ \|_n}$ e per quanto detto prima risulta $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X}^{\|\ \|_n}$. □

Definizione 1.4. Sistemi equivalenti di norme

Sia X uno spazio vettoriale e siano $\|\ \|_1, \|\ \|_2, \ldots$ e $\|\ \|'_1, \|\ \|'_2, \ldots$ due sistemi di norme tali che $\|x\|_p \leq \|x\|_{p+1}$ e $\|x\|'_p \leq \|x\|'_{p+1}\ \forall p \in \mathbb{N}$.

Si dice che il primo sistema è più *debole* del secondo se $\forall p \in \mathbb{N},\ \exists q(p) \in \mathbb{N}$ tale che $\|\ \|_p$ è più debole di $\|x\|'_{q(p)}$.

I due sistemi si dicono *equivalenti* se ciascuno di essi è più debole dell'altro.

Teorema 1.0.3.
Due spazi numerabilmente normati $(X, \| \|_1, \| \|_2, \ldots)$ *e* $(X, \| \|'_1, \| \|'_2, \ldots)$ *coincidono* $\Longleftrightarrow$ *i due sistemi di norme* $\| \|_1, \| \|_2, \ldots$ *e* $\| \|'_1, \| \|'_2, \ldots$ *sono equivalenti.*

Capitolo 2

Esempi di spazi numerabilmente normati

In questo secondo capitolo vengono trattati due importanti esempi di spazi numerabilmente normati: lo spazio $(S(\mathbb{R}^n), \| \|_1, \| \|_2, \ldots) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e lo spazio $(C_K^\infty(\mathbb{R}^n), \| \|_1, \| \|_2, \ldots) = \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$. Inoltre vengono considerati alcuni esempi di applicazioni lineari continue fra spazi numerabilmente normati.

Premessa

Se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $\alpha_j \in (\mathbb{N} \cup \{0\})$ per $j = 1 \ldots, n$ si dice che α un è *multi-indice*. Si chiama *lunghezza* del multi-indice α:

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

Si osserva che:

1. Se α, β sono due multi-indici, la scrittura $\alpha \geq \beta$ $(\alpha > \beta)$ significa $\alpha_j \geq \beta_j$ $(\alpha_j > \beta_j)$ per $j = 1 \ldots, n$

2. $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$

3. $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_n!$

4. Se $\alpha \geq \beta$ si ha $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2}\dots\binom{\alpha_n}{\beta_n}$

Sia $x \in \mathbb{R}^n$, si pone: $x^\alpha = x^{\alpha_1}\dots x^{\alpha_n}$.
Sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, si pone: $D^\alpha f = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$ se tale derivata esiste.
Se f è di classe $\mathcal{C}^{|\alpha+\beta|}$, risulta: $D^\alpha(D^\beta f) = D^\beta(D^\alpha f) = D^{\alpha+\beta} f$
Se $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ sono di classe $\mathcal{C}^{|\alpha|}$, vale la seguente formula di Leibnitz:

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} f D^\beta g$$

2.1 Esempio 1: $(S(\mathbb{R}^n), \| \|_1, \| \|_2, \dots) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Definizione 2.1. Spazio delle funzioni a decrescenza rapida
Una funzione $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice *a decrscenza rapida* se:

1. f è di classe $\mathcal{C}^\infty$
2. $\lim\limits_{\|x\|\longrightarrow+\infty} x^\alpha D^\beta f(x) = 0 \quad \forall \alpha, \beta$ multi-indici

Si indica con $S(\mathbb{R}^n)$ lo *spazio* vettoriale delle *funzioni a decrescenza rapida*:
$S(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n),\ x^\alpha D^\beta f(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall \alpha, \beta$ multi-indici $\}$

Costruzione dello spazio numerabilmente normato $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
Introduciamo e definiamo la seguente norma:
per $p \in \mathbb{N}$

$$\|f\|_p = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{|\alpha|\leq p} (1+\|x\|)^p \, |D^\alpha f(x)|$$

dove $f \in S(\mathbb{R}^n)$ e $\forall p \in \mathbb{N}$ vale $\|f\|_p \leq \|f\|_{p+1}$.
Sia $S_p(\mathbb{R}^n)$ lo spazio vettoriale delle funzioni $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ di classe $\mathcal{C}^p$ e per ciascuna della quali vale $\|f\|_p < +\infty$.
Verifichiamo che $(S_p(\mathbb{R}^n), \| \|_p)$ è *completo.*
Si deve quindi dimostrare che ogni successione di Cauchy in $(S_p(\mathbb{R}^n), \| \|_p)$ è convergente in $(S_p(\mathbb{R}^n), \| \|_p)$.
Sia quindi $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $S_p(\mathbb{R}^n)$ rispetto a $\| \|_p$; allora per definizione di successione di Cauchy si ha che

$\lim\limits_{\mu,\upsilon \longrightarrow +\infty} \|f_\mu - f_\upsilon\|_p = \lim\limits_{\mu,\upsilon \longrightarrow +\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \sup\limits_{|\alpha|\le p} (1+\|x\|)^p \,|D^\alpha f_\mu(x) - D^\alpha f_\upsilon(x)| = 0$

Ne segue che ogni successione $(D^\alpha f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ con $|\alpha| \le p$ converge uniformemente su $\mathbb{R}^n$, quindi $\exists f_0$ di classe $\mathcal{C}^p$ tale che $D^\alpha f_m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} D^\alpha f_0$ uniformemente su $\mathbb{R}^n$.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $(1+\|x\|)^p \,|D^\alpha f_m(x) - D^\alpha f_\mu(x)| < \varepsilon$ per $|\alpha| \le p, \quad m, \mu > m_\varepsilon$ e $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Passando al limite per $\mu \longrightarrow +\infty$ si ha che:

$(1+\|x\|)^p \,|D^\alpha f_m(x) - D^\alpha f_0(x)| \le \varepsilon$ per $|\alpha| \le p, \quad m > m_\varepsilon$ e $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Poiché se una successione è di Cauchy rispetto ad una certa norma, la successione delle norme è limitata, si ha che:

$\exists c \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\|f_m\|_p = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \sup\limits_{|\alpha|\le p} (1+\|x\|)^p \,|D^\alpha f_m(x)| \le c \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

Da questa disegualianza e dalla precedente segue:

$\|f_0\|_p = (1+\|x\|)^p \,|D^\alpha f_0(x)| = (1+\|x\|)^p \,|(D^\alpha f_0(x) - D^\alpha f_m(x)) + D^\alpha f_m(x)| \le$ $\le (1+\|x\|)^p \,|D^\alpha f_0(x) - D^\alpha f_m(x)| + (1+\|x\|)^p \,|D^\alpha f_m(x)| \le \varepsilon + c$ per $m > m_\varepsilon$, $|\alpha| \le p$ e $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Data l'arbitrarietà di ε segue che $\|f_0\|_p \le c \Longrightarrow \|f_0\|_p < +\infty \Longrightarrow \|f_0\|_p \in S_p(\mathbb{R}^n)$.

Da $(1+\|x\|)^p \,|D^\alpha f_m(x) - D^\alpha f_0(x)| \le \varepsilon$ per $|\alpha| \le p, \quad m > m_\varepsilon$ e $\forall x \in \mathbb{R}^n$ segue $\|f_m - f_0\|_p \le \varepsilon \Longrightarrow f_m \overset{\| \|_p}{\underset{m\to+\infty}{\longrightarrow}} f_0$.

Abbiamo così ottenuto che $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ di Cauchy in $(S_p(\mathbb{R}^n), \| \|_p)$ converge in $(S_p(\mathbb{R}^n), \| \|_p)$, dunque $S_p(\mathbb{R}^n)$ è completo.

Poiché vogliamo ottenere uno spazio numerabilmente normato, proviamo ora che le norme $\| \|_p$ sono concordanti.

Sia $p < q$ e sia $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una successione in $S(\mathbb{R}^n)$ di Cauchy rispetto a $\| \|_q$ e convergente a zero rispetto a $\| \|_p$; per definizione di norme concardanti, bisogna verificare che la successione converge a zero anche rispetto a $\| \|_q$.

Poiché $(S_q(\mathbb{R}^n), \| \|_q)$ è completo, $\exists f_0 \in S_q(\mathbb{R}^n)$ tale che $\|f_m - f_0\|_q \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ma per ipotesi $\|f_m\|_p \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e quindi $f_m(x) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, allora deve essere $f_0 = 0$ e quindi $\|f_m\|_q \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Segue così che $\| \|_p$ e $\| \|_q$ sono concordanti.

Pioché $S_p(\mathbb{R}^n)$ è completo rispetto a $\| \|_p$, $\overline{S(\mathbb{R}^n)}^{\| \|_p}$ è un sottospazio di $S_p(\mathbb{R}^n)$, $S(\mathbb{R}^n) = \bigcap\limits_{p=1}^{\infty} S_p(\mathbb{R}^n)$ e $S(\mathbb{R}^n) \subset \overline{S(\mathbb{R}^n)}^{\| \|_p}$ $\forall p$, si ha che

$$S(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{p=1}^{\infty} \overline{S(\mathbb{R}^n)}^{\| \|_p}$$

quindi per il Teorema 1.0.2 (Capitolo 1) si ha che

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = (S(\mathbb{R}^n), \| \|_1, \| \|_2, \ldots)$$

è uno **spazio numerabilmente normato completo**.

2.2 Esempio 2: $(C_K^\infty(\mathbb{R}^n), \| \|_1, \| \|_2, \ldots) = \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$

Sia $a_j > 0$ per $j = 1, \ldots n$ e $K = \prod\limits_{j=1}^{n} [-a_j, a_j]$.
Indichiamo con $C_K^\infty(\mathbb{R}^n)(= D_K(\mathbb{R}^n))$ lo spazio vettoriale delle funzioni $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ tali che:

1. f è di classe $\mathcal{C}^\infty$
2. *supp* $f \subseteq K$

Costruzione dello spazio numerabilmente normato $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$
Poniamo $\forall p \in \mathbb{N}$:

$$\|f\|_p = \max_{x \in K} \max_{|\alpha| \leq p} |D^\alpha f(x)|, \quad f \in C_K^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Si ha che $\forall p \in \mathbb{N}$, $\| \|_p$ è una norma (considerare che se $f = 0$ su K allora $f = 0$ su tutto $\mathbb{R}^n$) e vale $\|f\|_p \leq \|f\|_{p+1}$.
Vogliamo ottenere uno spazio numerabilmente normato quindi cominciamo provando che le norme $\| \|_p, \| \|_{p+1}$ sono concordanti.
Sia quindi $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una successione in $C_K^\infty(\mathbb{R}^n)$ convergente a zero rispetto alla norma $\| \|_p$ e di Cauchy rispetto alla norma $\| \|_{p+1}$; si deve dimostrare che la successione converge a zero anche rispetto a $\| \|_{p+1}$.

Poiché $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge a zero nella norma $\| \|_p$ allora segue che se $|\alpha| \leq p$, $D^\alpha f_m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0 = f_0$ uniformemente su K (e quindi su tutto $\mathbb{R}^n$) e poichè $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy rispetto a $\| \|_{p+1}$ allora per $|\alpha| = p+1$, $(D^\alpha f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su K.
Allora $\exists f_\alpha$ continua e con il supporto contenuto in K tale che $D^\alpha f_m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} f_\alpha$ uniformemente su K per $|\alpha| = p+1$.
Allora $f_\alpha = D^\alpha f_0$ ma $f_0 = 0 \Rightarrow f_\alpha = 0 \Rightarrow D^\alpha f_m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ per $|\alpha| = p+1 \Rightarrow$ $\|f_m\|_{p+1} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e ciò prova che $\| \|_p$ e $\| \|_{p+1}$ sono concordanti.
Sia $C_K^p(\mathbb{R}^n)$ lo spazio vettoriale delle funzioni $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ tali che f è di classe $\mathcal{C}^p$ e *supp* $f \subseteq K$. Proviamo che $(C_K^p(\mathbb{R}^n), \| \|_p)$ è completo.
Sia $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $(C_K^p(\mathbb{R}^n), \| \|_p)$; si deve verificare che $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ è convergente in $(C_K^p(\mathbb{R}^n), \| \|_p)$.
Poiché $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy si ha che se $|\alpha| \leq p$ $\max\limits_{x\in K} |D^\alpha f_\mu(x) - D^\alpha f_\upsilon(x)| \underset{\mu,\upsilon\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Allora $\exists f_\alpha$ continua, con il supporto contenuto in K tale che $D^\alpha f_m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0 = f_\alpha$ uniformemente se $|\alpha| \leq p$.
Allora $f_\alpha = D^\alpha f_0$ con $|\alpha| \leq p$, quindi $f_0 \in \mathcal{C}^p$, inoltre *supp* $f_0 \subseteq K \Rightarrow$ $f_0 \in C_k^p(\mathbb{R}^n)$. Da $|D^\alpha f_m(x) - D^\alpha f_{m+\mu}(x)| \leq \max\limits_{x\in K} \max\limits_{|\alpha|\leq p} |D^\alpha f_m(x) - D^\alpha f_{m+\mu}(x)| =$ $= \|f_m - f_{m+\mu}\|_p < \varepsilon$ per $m > m_\varepsilon$ e $|\alpha| \leq p$, facendo tendere μ all'infinito si ha che $|D^\alpha f_m(x) - D^\alpha f_0| \leq \varepsilon$ per $m > m_\varepsilon$, $|\alpha| \leq p$ *e* $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
Quindi $\|f_m - f_0\|_p \leq \varepsilon$ per $m > m_\varepsilon$ cioè $f_m \overset{\| \|_p}{\underset{m\to+\infty}{\longrightarrow}} f_0 \in C_k^p(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow (C_K^p(\mathbb{R}^n), \| \|_p)$ è completo.
Risulta

$$C_K^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \overline{C_K^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\| \|_p} \subseteq C_K^p(\mathbb{R}^n)$$

e

$$C_K^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{p=1}^{\infty} C_K^p(\mathbb{R}^n).$$

Quindi

$$C_K^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{p=1}^{\infty} \overline{C_K^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\| \|_p}$$

Per il Teorema 1.0.2 (Capitolo 1) segue che $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n) = (C_K^\infty(\mathbb{R}^n), \| \|_1, \| \|_2, \ldots)$ è uno **spazio numerabilmente normato completo**.

Prima di considerare alcuni esempi di applicazioni lineari continue fra spazi numerabilmente normati, introduciamo alcune definizioni e teoremi utili.

Definizione 2.2.
Siano $(X, \| \|_1, \| \|_2, \dots), (X', \| \|'_1, \| \|'_2, \dots)$ due spazi numerabilmente normati (X e X' sullo stesso campo). Un'applicazione $T : X \longrightarrow X'$ si dice *lineare* se $\forall x_1, x_2 \in X$ e $\forall a_1, a_2$ appartenenti al campo di X e X' vale $T(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1T(x_1) + a_2T(x_2)$.
L'applicazione si dice continua nel punto x_0 se $\forall V'_{\varepsilon,n}(0) = \{y \in X';\ \|y\|'_n < \varepsilon,\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+\},\ \exists V_{\delta,p}(0) = \{x \in X;\ \|x\|_p < \delta,\ \delta \in \mathbb{R}^+$ con δ e p dipendenti da ε e n $\}$ tale che $x - x_0 \in V_{\delta,p}(0) \Longrightarrow T(x - x_0) \in V'_{\varepsilon,n}(0)$.

Osservazione 3.
Se T è continua in ogni punto di X allora è continua in ogni altro punto.

Teorema 2.2.1.
Siano $(X, \| \|_1, \| \|_2, \dots), (X', \| \|'_1, \| \|'_2, \dots)$ *due spazi numerabilmente normati (sullo stesso campo) e sia* $T : X \longrightarrow X'$ *un'applicazione lineare.*
T *è continua* $\Longleftrightarrow \forall p \in \mathbb{N},\quad \exists q(p) \in \mathbb{N}$ *tale che* T *sia continua da* $(X, \| \|_{q(p)})$ *a* $(X', \| \|'_p)$.

Teorema 2.2.2.
Siano $(X, \| \|_1, \| \|_2, \dots), (X', \| \|'_1, \| \|'_2, \dots)$ *due spazi numerabilmente normati (sullo stesso campo) e sia* $T : X \longrightarrow X'$ *un'applicazione lineare.*
T *è continua* $\Longleftrightarrow$
$x_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *in* $(X, \| \|_1, \| \|_2, \dots) \Longrightarrow T(x_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *in* $(X', \| \|'_1, \| \|'_2, \dots)$.

Esempi di applicazioni lineari continue fra spazi numerabilmente normati

Esempio 2.1. MOLTIPLICAZIONE PER UNA FUNZIONE

Definizione 2.3.
Sia Φ uno qualsiasi degli spazi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$.
Una funzione $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice *moltiplicatore* per Φ se:

1. $f\phi \in \Phi \quad \forall \phi \in \Phi$

2. l'applicazione $\phi \longrightarrow f\phi$ da Φ a Φ è continua cioè
   $\phi_k \underset{k\to+\infty}{\overset{\Phi}{\longrightarrow}} 0 \Longrightarrow f\phi_k \underset{k\to+\infty}{\overset{\Phi}{\longrightarrow}} 0$

Proposizione 2.2.3.
Sia $\Phi = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*, sia* $f \in \mathcal{C}^\infty$ *e* $\forall \alpha \quad \exists C_\alpha \in \mathbb{R}^+$ *ed* $\exists p_\alpha \in \mathbb{N}$ *tali che* $|D^\alpha f(x)| \leq C_\alpha (1 + \|x\|)^{p_\alpha}$*. Allora* f *è un moltiplicatore per* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*.*

Proposizione 2.2.4.
Sia $\Phi = \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n),\ K = \prod_{j=1}^{n} [-a_j, a_j]$.
Se $f \in \mathcal{C}^\infty$ *allora* f *è un moltiplicatore per* $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$*.*

Esempio 2.2. TRASFORMAZIONE di FOURIER

Primo caso: $\Phi = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Definizione 2.4.
Sia $\Phi = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, sia $f \in S(\mathbb{R}^n)$, si definisce *trasformata di Fourier di* f:

$$\mathcal{F}(f(\xi)) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x)\, dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$$

dove $\langle x, \xi \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j$.

Proposizione 2.2.5.
Se $f \in S(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow f \in L^1(\mathbb{R}^n)$*.*

Proposizione 2.2.6.
Se $f \in S(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \widehat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$*.*

Dimostrazione.
Siano α, β multi-indici. Dobbiamo dimostrare che $\widehat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$ cioè che $\xi^\alpha D_\xi^\beta\ \widehat{f}(\xi) \underset{\|\xi\|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\xi^\alpha D_\xi^\beta\ \widehat{f}(\xi) = \xi^\alpha D_\xi^\beta \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x)\, dx$$

Integrando sotto il segno di derivata si ottiene

$$\xi^\alpha D_\xi^\beta \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)\,dx = \xi^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} D_\xi^\beta e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)\,dx = (-i)^{|\beta|}\xi^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} x^\beta f(x)\,dx =$$

$$= (-i)^{|\beta|}(i)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} (-i)^{|\alpha|}\, \xi^\alpha\, e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, x^\beta\, f(x)\,dx =$$

Supponiamo che $\alpha = (0, \dots, \underset{j}{1}, \dots, 0)$ quindi
$(-i)^{|\alpha|}\xi^\alpha = (-i\xi_1)^{\alpha_1} \dots (-i\xi_j)^{\alpha_j} \dots (-i\xi_n)^{\alpha_n} = -i\xi_j$, allora riprendendo i calcoli precedenti si ha

$$= (-i)^{|\beta|}(i)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} (-i\xi_j)\, e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, x^\beta\, f(x)\,dx = (-i)^{|\beta|}(i)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} (\frac{\partial}{\partial x_j}\, e^{-i\langle x,\xi\rangle})\, x^\beta\, f(x)\,dx =$$

Poiché la funzione integranda è sommabile, applicando l'Osservazione 18 (Appendice) si ha

$$= (-i)^{|\beta|}(i)^{|\alpha|} \lim_{N\to+\infty} \int_{B(0,N)} (\frac{\partial}{\partial x_j}\, e^{-i\langle x,\xi\rangle})\, x^\beta\, f(x)\,dx =$$

Applicando l'integrazione per parti (si può integrare per parti su una regione illimitata in quanto l'integrale sul bordo della palla $\partial B(0,N)$ va a zero per $N \to +\infty$) si ottiene

$$= (-i)^{|\alpha|+|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, D_x^\alpha (x^\beta\, f(x))\,dx = (-i)^{|\alpha|+|\beta|}\, \mathcal{F}(D_\xi^\alpha(\xi^\beta\, f(\xi)))$$

Se si dimostra che $D_x^\alpha(x^\beta\, f(x)) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, usando il Teorema A.0.18 (Appendice) si ha che $\mathcal{F}(D_\xi^\alpha(\xi^\beta\, f(\xi))) \underset{\xi\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ che è proprio ciò che si vuole dimostrare.
Per dimostrare che $D_x^\alpha(x^\beta f(x)) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ basta verificare che $D_x^\alpha(x^\beta f(x)) \in S(\mathbb{R}^n)$ (vedi Proposizione sopra).Verifichiamo quindi che $D_x^\alpha(x^\beta f(x)) \in S(\mathbb{R}^n)$ cioè che $x^\tau D_x^\sigma D_x^\alpha(x^\beta f(x)) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ con τ, σ multi-indici.
$x^\tau D_x^\sigma D_x^\alpha(x^\beta f(x)) = x^\tau D_x^{\sigma+\alpha}(x^\beta f(x))$ e utilizzando la formula di Leibnitz (vedi Premessa di questo capitolo) si ottiene

$x^\tau D_x^{\sigma+\alpha}(x^\beta f(x)) = \sum\limits_{0\leq\gamma\leq\sigma+\alpha} \binom{\sigma+\alpha}{\gamma} D^{\sigma+\alpha-\gamma}\ x^\beta\ x^\tau\ D^\gamma f(x) =$

Inoltre utilizzando la seguente *Osservazione*:

sia $\eta = \sigma+\alpha-\gamma \qquad D^\eta x^\beta = \frac{\partial^{\eta_1}}{\partial x_1^{\eta_1}} \cdots \frac{\partial^{\eta_n}}{\partial x_n^{\eta_n}}\ x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n} = C_{\eta,\beta}\ x_1^{\beta_1-\eta_1} \ldots x_n^{\beta_n-\eta_n}$

si ottiene

$= \sum\limits_{0\leq\gamma\leq\sigma+\alpha} \binom{\sigma+\alpha}{\gamma} C_{\sigma+\alpha-\gamma,\beta}\ x^{\beta-\sigma-\alpha+\gamma}\ x^\tau\ D^\gamma f(x) =$

$= \sum\limits_{0\leq\gamma\leq\sigma+\alpha} \binom{\sigma+\alpha}{\gamma} C_{\sigma+\alpha-\gamma,\beta}\ x^{\beta-\sigma-\alpha+\gamma+\tau}\ D^\gamma f(x) \in S(\mathbb{R}^n)$ in quanto per ipotesi $f(x) \in S(\mathbb{R}^n)$.

Allora $D_x^\alpha(x^\beta f(x)) \in S(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \mathcal{F}(D_\xi^\alpha(\xi^\beta f(\xi))) \underset{\xi\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e quindi

$\xi^\alpha D_\xi^\beta \widehat{f}(\xi) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|}\ \mathcal{F}(D_\xi^\alpha(\xi^\beta f(\xi))) \underset{\xi\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \widehat{f}(\xi) \in S(\mathbb{R}^n).$ □

Quindi la trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ è un'applicazione da $S(\mathbb{R}^n)$ a $S(\mathbb{R}^n)$; essa è evidentemente lineare. Inoltre $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \underset{1-1}{\xrightarrow{su}} S(\mathbb{R}^n)$; se $f \in S(\mathbb{R}^n)$, posto $g(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} f(\xi)\, d\xi$ risulta $\mathcal{F}(g) = f$ cioè la g è l'inversa della f.

Osservazione 4.

Se $\quad f_m \underset{m\to+\infty}{\xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}} 0 \implies \mathcal{F}(f_m) \underset{m\to+\infty}{\xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}} 0.$

Quindi $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \underset{1-1}{\xrightarrow{su}} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ lineare, continua e dotata di inversa continua (perché $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(-\xi) = (2\pi)^n f(\xi)$).

Secondo caso: $\Phi = \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$

Sia $\Phi = \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n) \quad (K = \prod\limits_{j=1}^{n} [-a_j, a_j])$.

Sia $f \in \mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^n)$, si definisce *trasformata di Fourier di f*:

$$\mathcal{F}(f)(x) = \widehat{f}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,t\rangle} f(t)\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

.

Questa funzione si può prolungare su tutto $\mathbb{C}^n$ ponendo:

$$\widehat{f}(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle z,t\rangle} f(t)\, dt, \qquad z \in \mathbb{C}^n$$

.

Si ha che $\mathcal{F} : \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{Z}_a(\mathbb{C}^n)$ è lineare e continua dove $\mathcal{Z}_a(\mathbb{C}^n) = (Z_a(\mathbb{C}^n), \| \, \|_1, \| \, \|_2, \ldots)$ è uno spazio numerabilmente normato completo e $Z_a(\mathbb{C}^n)$ è lo spazio delle funzioni intere $\phi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ per ciascuna delle quali risulta, $\forall p \in \mathbb{N}$:

$$\|\phi\|_p = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \sup_{|\alpha| \leq p} \left| z^\alpha \, \phi(z) \, e^{-\sum_{j=1}^{n} a_j |y_j|} \right| < +\infty$$

con $z = x + iy$ e $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $a_j > 0$ per $j = 1, \ldots, n$.
$\| \, \|_p$ è una norma e $\forall \phi \in Z_a(\mathbb{C}^n)$ e $\forall p \in \mathbb{N}$ $\|\phi\|_p \leq \|\phi\|_{p+1}$.

Capitolo 3

Distribuzioni $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}'_K(\mathbb{R}^n)$

Teorema 3.0.7.
Sia $(X, \| \|_1, \| \|_2, \ldots)$ *uno spazio numerabilmente normato.*
Sia X'_p *il duale di* $(X, \| \|_p)$ *cioè lo spazio vettoriale dei funzionali lineari continui su* $(X, \| \|_p)$*. Se* $f \in X'_p$*, posto* $\|f\|'_p = \sup\limits_{\|x\|_p \leq 1} |f(x)|$*, risulta* $\| \|'_p$ *una norma e* $(X'_p, \| \|'_p)$ *uno spazio di Banach.*
Si ha inoltre che $X'_p \subseteq X'_{p+1}$ $\forall p \in \mathbb{N}$ *e se* X' *è il duale di* $(X, \| \|_1, \| \|_2, \ldots)$ *cioè lo spazio vettoriale dei funzionali lineari continui su* $(X, \| \|_1, \| \|_2, \ldots)$ *allora* $X' = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} X'_p$.

Definizione 3.1. Spazi di distribuzione $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}'_K(\mathbb{R}^n)$.
Sia Φ uno qualunque fra gli spazi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$. Sia Φ' l'insieme dei funzionali lineari continui su Φ (applicazioni lineari continue da Φ a $\mathbb{C}$).
Se $T \in \Phi'$ si dice che T è una **distribuzione**; in particolare **se** $\mathbf{\Phi} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^\mathbf{n})$ si dice che **T** è una **distribuzione temperata**.
Il valore di T in $\phi \in \Phi$ si denota con $< T|\phi >$ o anche con $< T_x|\phi(x) >$ o semplicemente con $T(\phi)$.

Osservazione 5.
Dal Teorema 2.2.2 (Capitolo 2) si ha che se $T \in \Phi^*$ (Φ^* insieme dei funzionali lineari su Φ), T è una distribuzione $\Longleftrightarrow$
$\phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\Phi} 0 \implies < T|\phi_k > \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$

Per Teorema 3.0.7(visto sopra) e Teorema A.0.14(Appendice) si ha che, se $T \in \Phi^*,\ T$ è una distribuzione $\Longleftrightarrow$

$\exists C \in \mathbb{R}^+$ ed $\exists p \in \mathbb{N}$ t.c. $|< T|\phi >| \leq C\, \|\phi\|_p \quad \forall \phi \in \Phi$.

Per esempio sia $\Phi = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow$

$|< T|\phi >| \leq C\, \|\phi\|_p = C \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{|\alpha|\leq p} (1 + \|x\|)^p\, |D^\alpha \phi(x)| \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Osservazione 6.

Se $T_1, T_2 \in \Phi'$, la notazione $T_1 = T_2$ significa $< T_1|\phi >=< T_2|\phi > \quad \forall \phi \in \Phi$.

Siano $T_1, T_2 \in \Phi',\ T_1 + T_2$ si chiama *somma* di T_1 e T_2 ed è la distribuzione così definita:

$< T_1 + T_2|\phi >=< T_1|\phi > + < T_2|\phi > \quad \forall \phi \in \Phi$.

Sia $T \in \Phi'$ e $c \in \mathbb{C}$, cT si chiama *prodotto* di c per T ed è la distribuzione così definita:

$< cT|\phi >= c < T|\phi > \quad \forall \phi \in \Phi$.

In tal modo Φ' è uno *spazio vettoriale.*

Definizione 3.2.

$K_p(\mathbb{R}^n)$ per $1 \leq p < +\infty$ è lo spazio delle funzioni $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ L_misurabili e tali che per ciascuna di esse, $\exists M \geq 0$ per cui $x \longrightarrow \dfrac{|f(x)|^p}{(1 + \|x\|^2)^M},\ x \in \mathbb{R}^n$, è sommabile.

($K_\infty(\mathbb{R}^n)$ è lo spazio delle funzioni $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ L_misurabili e tali che per ciascuna di esse, $\exists M \geq 0$ per cui $ess \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \dfrac{|f(x)|^p}{(1 + \|x\|^2)^M} < +\infty$).

Osservazione 7.

Se $f \in K_p(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (dove $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ è l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ sommabili sui compatti di $\mathbb{R}^n$).

Osservazione 8.

Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\, dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow f(x) = 0$ q.d.

Definizione 3.3.

Sia $\Phi = \mathcal{D}'_K(\mathbb{R}^n),\ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Definiamo

$$|< T_f|\phi >| := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\, dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$$

T_f è una distribuzione ed è detta *distribuzione di tipo funzione.*

Definizione 3.4.
Sia $\Phi = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\ f \in K_p(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq p \leq +\infty.$
Definiamo

$$|< T_f|\phi >| := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\,dx \quad \forall\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

T_f è una distribuzione temperata ed è detta *distribuzione temperata regoalre o di tipo funzione.*
(In questo caso, affinchè l'integrale converga, non basta supporre $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ma è necessario supporre $f \in K_p(\mathbb{R}^n)$).

Vediamo adesso un esempio di distribuzione temperata.

Esempio 3.1. DISTRIBUZIONE δ DI DIRAC
Sia δ così definita:

$$< \delta|\phi >= \phi(0) \quad \forall\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

δ è un funzionale lineare su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; inoltre si ha che se $\phi_k \underset{k\to+\infty}{\overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow}} 0 \Longrightarrow$
$< \delta|\phi_k >= \phi_k(0) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \delta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ cioè δ è una distribuzione temperata e viene detta *distribuzione di Dirac.*
δ però non è una distribuzione di tipo funzione; infatti $\nexists f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tale che $< \delta|\phi >= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\,dx \quad \forall\phi \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^n)$
(si tenga presente che se $\phi \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \phi \in S(\mathbb{R}^n)$).
Se esistesse $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ come detto, poiché $< \delta|\phi >= \phi(0)$ si avrebbe che $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\,dx = 0 \quad \forall\phi \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ con *supp* $\phi \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$; allora (per Osservazione 8) sarebbe $f(x) = 0$ q.d. e quindi $< \delta|\phi >= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\,dx = 0$ $\forall\phi \in S(\mathbb{R}^n)$, contrariamente alla definizione di δ.

Definizione 3.5. Prodotto di una distribuzione per una funzione
Sia Φ uno qualunque degli spazi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$.
Sia Φ' l'insieme dei funzionali lineari continui su Φ.

Se $T \in \Phi'$ e f è un moltiplicatore per Φ, allora $fT \in \Phi'$ dove fT è così definita: $< fT|\phi >:=< T|f\phi > \quad \forall \phi \in \Phi$.
fT si chiama *prodotto* di T per f ($fT \in \Phi'$ perché per definizione di moltiplicatore si ha che $f\phi \in \Phi$ e che $\phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\Phi} 0 \Longrightarrow f\phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\Phi} 0$ cioè l'applicazione $\phi \longrightarrow f\phi$ da Φ a Φ è continua.)

Definizione 3.6. α_derivata di una distribuzione
Sia $T \in \Phi'$ e sia α un multi-indice. Chiamiamo *α_derivata* di T e la denotiamo con $\partial^\alpha T$, l'elemento di Φ' così definito:

$$< \partial^\alpha T|\phi >= (-1)^{|\alpha|} < T|D^\alpha \phi > \quad \forall \phi \in \Phi$$

(La definizione è ben posta perché D^α è un'operazione lineare continua da Φ a Φ).

Proposizione 3.0.8.
Valgono le seguenti proprietà*:*

- *Se α, β sono multi-indici e $T \in \Phi'$ si ha:*

$$\partial^\alpha(\partial^\beta T) = \partial^{\alpha+\beta} T = \partial^\beta(\partial^\alpha T)$$

Dimostrazione.
Usando la definizione di α_derivata di una distribuzione si ha che $\forall \phi \in \Phi$:

$$< \partial^\alpha(\partial^\beta T)|\phi >= (-1)^{|\alpha|} < \partial^\beta T|D^\alpha \phi >= (-1)^{|\alpha|+|\beta|} < T|D^\beta(D^\alpha \phi) >=$$

$$= (-1)^{|\alpha+\beta|} < T|D^{\alpha+\beta}\, \phi >=< \partial^{\alpha+\beta}\, T|\phi > .$$

(Allo stesso modo si dimostra $\partial^\beta(\partial^\alpha T) = \partial^{\alpha+\beta} T$; basta invertire l'ordine di α e β nella dimostrazione appena fatta). $\square$

- *Se $T_1, T_2 \in \Phi$ si ha:*

$$\partial^\alpha(T_1 + T_2) = \partial^\alpha T_1 + \partial^\alpha T_2$$

Dimostrazione.
Usando la definizione di α_derivata e la definizione di somma (vedi Osservazione 6) si ha che $\forall \phi \in \Phi$:

$$< \partial^\alpha (T_1 + T_2)|\phi >= (-1)^{|\alpha|} < T_1 + T_2 | D^\alpha \phi >=$$

$$= (-1)^{|\alpha|} < T_1 | D^\alpha \phi > + (-1)^{|\alpha|} < T_2 | D^\alpha \phi >=< \partial^\alpha T_1 | \phi > + < \partial^\alpha T_2 | \phi >=$$

$$=< \partial^\alpha T_1 + \partial^\alpha T_2)|\phi > .$$

$\square$

Osservazione 9.
Se f è una funzione dotata di $D^\alpha f$ e queste hanno una certa regolarità, allora $\partial^\alpha f = D^\alpha f$. In particolare quanto detto è vero se $f \in \Phi$.

Osservazione 10.
Sia H la funzione di Heaviside; $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che
$H(x) = 1$ se $x > 0$, $H(x) = 0$ se $x \leq 0$.
Poichè $H \in K_\infty(\mathbb{R})$, H è una distribuzione temperata. Si ha che:

$$< \partial H | g >= - < H | D(g) >= - < H | g' >= - \int_{\mathbb{R}} H(x) g'(x)\, dx = - \int_0^{+\infty} g'(x)\, dx = g(0).$$

Quindi $\partial H = \delta$ in quanto ∂H è tale che $< \partial H | g >= g(0)$.
(Come distribuzione, H ha derivata $\partial H = \delta$ ma quest'ultima non è la derivata ordinaria di H; $DH(x) = 0$ se $x \neq 0$, non esiste in $x = 0$ e $D^+ H(0) = +\infty$, $D^- H(0) = -\infty$).

Definizione 3.7. Trasformata di Fourier di una distribuzione
Sia Φ uno qualunque fra gli spazi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$, sia $T \in \Phi'$.
Definiamo la trasformata di Fourier della distribuzione T, $\mathcal{F}(T)$ ponendo:

$$< \mathcal{F}(T) | \phi >=< T | \widehat{\phi} > \quad \forall \widehat{\phi} \in \Phi \quad \text{con} \quad \widehat{\phi(x)} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>} \phi(y)\, dy.$$

La definizione è corretta, infatti:
-Se $\Phi = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ la trasformata di Fourier è un'applicazione lineare, continua, su, 1-1 di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; se $\phi_k \underset{k\to\infty}{\overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow}} 0 \Longrightarrow \widehat{\phi_k} \underset{k\to\infty}{\overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow}} 0$.
Quindi se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \mathcal{F}(T) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
-Se $\Phi = \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ la trasformata di Fourier è un'applicazione lineare, continua, 1-1 di $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ su $\mathcal{Z}_a(\mathbb{R}^n)$; se $\phi_k \underset{k\to\infty}{\overset{\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow}} 0 \Longrightarrow \widehat{\phi_k} \underset{k\to\infty}{\overset{\mathcal{Z}_a(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow}} 0$.
Quindi se $T \in \mathcal{D}'_K(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \mathcal{F}(T) \in \mathcal{Z}'_a(\mathbb{R}^n)$.

Proposizione 3.0.9.
Valgono le seguenti proprietà*:*

- *Se* $T_1, T_2 \in \Phi' \Longrightarrow \mathcal{F}(T_1 + T_2) = \mathcal{F}(T_1) + \mathcal{F}(T_2)$

- *Se* $T \in \Phi' \Longrightarrow \partial^\alpha \mathcal{F}(T) = \mathcal{F}((-ix)^\alpha T_x)$

  Dimostrazione.
  Se $\widehat{\phi} \in \Phi$ anche $\widehat{D^\alpha \phi} \in \Phi$ e per definizione di α_derivata di T e di trasformata di Fourier di T si ha:
  $< \partial^\alpha \mathcal{F}(T)|\phi >= (-1)^{|\alpha|} < \mathcal{F}(T)|D^\alpha \phi >= (-1)^{|\alpha|} < T|\widehat{D^\alpha \phi} >=$
  $= (-1)^{|\alpha|} < T_x|(ix)^\alpha \ \widehat{\phi(x)} >=< (-ix)^\alpha T_x|\widehat{\phi} >=< \mathcal{F}((-ix)^\alpha \ T_x)|\phi >.$ □

- *Se* $T \in \Phi' \Longrightarrow (\mathcal{F}(\partial^\alpha T))_x = (ix)^\alpha (\mathcal{F}(T))_x$

  Dimostrazione.
  Se $\widehat{\phi} \in \Phi$ anche $\widehat{D^\alpha \phi} \in \Phi$ e usando la definizione di α_derivata di T e di trasformata di Fourier di T si ha:
  $< \mathcal{F}(\partial^\alpha \ T)|\phi >=< \partial^\alpha \ T|\widehat{\phi} >= (-1)^{|\alpha|} < T|D^\alpha \ \widehat{\phi} >=$
  $= (-1)^{|\alpha|} < T|\widehat{(-iy)^\alpha \ \phi(y)} >= (-1)^{|\alpha|} < (\mathcal{F}(T))_x|(-ix)^\alpha \ \phi(x) >=$
  $=< (ix)^\alpha (\mathcal{F}(T))_x|\phi(x) > .$ □

Capitolo 4

Applicazioni

In questo capitolo viene dato un esempio di distribuzione temperata; prima di considerare tale esempio vengono esposti alcuni teoremi, definizioni e osservazioni utili.

Definizione 4.1. Prodotto tensoriale di due distribuzioni temperate
Sia $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^p)$, sia x un punto di $\mathbb{R}^n$ e y un punto di $\mathbb{R}^p$.
Si chiama *prodotto tensoriale* (o diretto) di S per T la distribuzione temperata $S \otimes T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+p})$ così definita:

$$\langle S_x \otimes T_y | \phi(x,y) \rangle = \langle S_x | \langle T_y | \phi(x,y) \rangle \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+p})$$

Teorema 4.0.10.
Le distribuzioni temperate soluzioni dell'equazione $x^\alpha T = 0$ *(con* $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$*) sono tutte e sole quelle date dalla formula:*

$$T = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{\alpha_j - 1} S^{(k,j)}_{x_1 \dots x_{j-1} x_{j+1} \dots x_n} \otimes \delta^{(k)}_{x_j} \quad con \quad S^{(k,j)}_{x_1 \dots x_{j-1} x_{j+1} \dots x_n} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n-1}(x_1, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n))$$

Teorema 4.0.11.
Sia $f \in K_p(\mathbb{R}^n),\ p \geq 1,\ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\ T = \partial^\alpha f$. *Sia* $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ *di classe* $\mathcal{C}^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ *e sia* $D^\beta \phi \in K_{p'}(\mathbb{R}^n)$ *per* $|\beta| = |\alpha|$, $(p' = \frac{p}{p-1})$.
Allora esiste $T\phi (= \phi T)$.

Teorema 4.0.12.
Sia $f \in K_p(\mathbb{R}^n),\ p \geq 1,\ T = \partial^\alpha f$*; sia* $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ *di classe* $\mathcal{C}^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ *con* $D^\beta \phi \in K_{p'}(\mathbb{R}^n)$ *per* $|\beta| = |\alpha|,\ \ p' = \frac{p}{p-1}$ *e sia* $\omega : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ *di classe* $\mathcal{C}^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ *con* $D^\beta \omega \in K_\infty(\mathbb{R}^n)$ *per* $|\beta| = |\alpha|$.
Allora $T(\phi\, \omega) = (T\phi)\omega$ *(*associatività del prodotto*).*

Definizione 4.2.
Sia $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ con $a_1 \dots a_n \neq 0$.
Se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, poniamo:

$$(\pi_a\, f)(x) = f(a_1 x_1, \dots, a_n x_n) = f(ax)$$

Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiamo $\pi_a\, T$ ponendo:

$$< \pi_a\, T|g >= \frac{1}{|a_1 \dots a_n|} < T|\pi_{\frac{1}{a}}\, g > \qquad \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \textit{dove } \frac{1}{a} = (\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}).$$

Osservazione 11.
Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ si ha: $T = \dfrac{1}{(2\pi)^n}\, \pi_{-1}\, \mathcal{F}(\mathcal{F}(T))$.

Definizione 4.3. Distribuzione pari e dispari
Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, si dice che T è una *distribuzione pari* se $T = \pi_{-1}\, T$, *dispari* se $T = -\pi_{-1}\, T$.

Osservazione 12.
Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$; se T è pari (dispari), allora $\mathcal{F}(T)$ è pari (dispari).

Dimostrazione.
Supponiamo che T sia pari; si deve verificare che $\mathcal{F}(T)$ è pari cioè che $\forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad < \pi_{-1}\, \mathcal{F}(T)|g >=< \mathcal{F}(T)|g >$.
$< \pi_{-1}\, \mathcal{F}(T)|g >=< \mathcal{F}(T)|\pi_{-1}\, g >=< T_x|\mathcal{F}(g(-s))(x) >=$
$=< T|\pi_{-1}\, \mathcal{F}(g) >=< \pi_{-1}\, T|\mathcal{F}(g) >=< T|\mathcal{F}(g) >=< \mathcal{F}(T)|g >$.

□

Si può ora considerare l'esempio di distribuzione temperata.

Esempio 4.1. DISTRIBUZIONE TEMPERATA : $\mathbf{\frac{1}{x}}$

Si pone

$$x^{-1} = \frac{1}{x} \overset{def}{=} \partial \ln |x| \tag{4.1}$$

dove *ln* indica il logaritmo naturale.

$x \longrightarrow \ln |x|$, $x \in \mathbb{R}$, appartiene a $K_1(\mathbb{R})$ ($\exists M \geq 0$ *t.c.* $x \longrightarrow \dfrac{|\ln |x||}{(1 + \|x\|^2)^M}$ è sommabile) e quindi $\partial \ln |x| \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Per $x \neq 0$ cioè su $]0, +\infty[$ e su $] - \infty, 0[$, $\dfrac{1}{x}$ coincide con la funzione $x \longrightarrow \dfrac{1}{x}$. Sia infatti $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

- se *supp* $g \subset]0, +\infty[$, allora $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $g(x) = 0$ per $-\infty < x \leq \varepsilon$ e si ha che:

$$< \frac{1}{x}|g(x) >=< \partial \ln |x| \, |g(x) >= (-1)\cdot < \ln |x| \, | \, \frac{d}{dx}g(x) >= - < \ln |x| \, |g'(x) >=$$

$$= -\int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln x \cdot g'(x) \, dx = -[\ln x \cdot g(x)]_{\varepsilon}^{+\infty} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x} \, g(x) \, dx = 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} \, g(x) \, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} \, g(x) \, dx \implies < \frac{1}{x}|g(x) >= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} \, g(x) \, dx.$$

- se *supp* $g \subset] - \infty, 0[$, allora $\exists - \varepsilon < 0$ t.c. $g(x) = 0$ per $-\varepsilon < x < +\infty$ e si ha che:

$$< \frac{1}{x}|g(x) >=< \partial \ln |x| \, |g(x) >= (-1)\cdot < \ln |x| \, | \, \frac{d}{dx}g(x) >= - < \ln |x| \, |g'(x) >=$$

$$= -\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln(-x)\cdot g'(x) \, dx = -[\ln(-x)\cdot g(x)]_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} \, g(x) \, dx = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} \, g(x) \, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} \, g(x) \, dx \implies < \frac{1}{x}|g(x) >= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} \, g(x) \, dx.$$

Osservazione 13.

Si ha che:

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1 = \frac{1}{x} \cdot x \tag{4.2}$$

Dimostrazione.
Per Teorema 4.0.11 (di questo Capitolo) è verificata l'ugualianza $x\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\cdot x$.
Proviamo ora che $\quad x\cdot\frac{1}{x}=1$, quindi si deve dimostrare che $\forall g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$
$< x\cdot\frac{1}{x}|g(x)>=<1|g(x)>$; vediamolo:

$$< x\cdot\frac{1}{x}|g(x)>=< x\,\partial\ln|x|\,|g(x)>=<\partial\ln|x|\,|\,xg(x)>=(-1)\cdot<\ln|x|\,|\,\frac{d}{dx}(x\cdot g(x))>=$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}\ln|x|\,(g(x)+x\,g'(x))\,dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}\ln|x|\,g(x)\,dx-\int_{-\infty}^{+\infty}(x\;\ln|x|)\cdot g'(x))\,dx=$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}\ln|x|\,g(x)\,dx-[x\;\ln|x|\cdot g(x)]_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}(\ln|x|+1)g(x)\,dx=$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}\ln|x|\,g(x)\,dx-[x\;\ln|x|\cdot g(x)]_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\ln|x|\;\;g(x)\,dx+\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot g(x)\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot g(x)\,dx=<1|g(x)>\Longrightarrow< x\cdot\frac{1}{x}|g(x)>=<1|g(x)>\Longrightarrow\; x\cdot\frac{1}{x}=1$$

. □

Osservazione 14.
$\frac{1}{x}$ è una *distribuzione dispari.*

Dimostrazione.
Si deve verificare che $\forall g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\quad -<\pi_{-1}\left(\frac{1}{x}\right)|\,g(x)>=<\frac{1}{x}|\,g(x)>$.

$$<\pi_{-1}\left(\frac{1}{x}\right)|\,g(x)>=<\frac{1}{x}|\pi_{-1}\,g(x)>=<\partial\ln|x|\,|\,g(-x)>=(-1)<\partial\ln|x|\,|\frac{d}{dx}g(-x)>=$$

$$=+\int_{-\infty}^{+\infty}\ln|x|\cdot g'(-x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\ln|x|\cdot g'(x)\,dx=<\ln|x|\,|\,g'(x)>=(-1)<\partial\ln|x|\,|g(x)>=$$

$$=-<\frac{1}{x}|\,g(x)>\Longrightarrow<\pi_{-1}\left(\frac{1}{x}\right)|\,g(x)>=-<\frac{1}{x}|\,g(x)>\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow - < \pi_{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \mid g(x) > = < \frac{1}{x} \mid g(x) > .$$

$\square$

Osservazione 15.
$\mathcal{F}\left(\frac{1}{x}\right) = -\pi \; i \; sgn \; s$

Dimostrazione.
Per prima cosa proviamo che : $\partial sgn \; x = 2\delta$.
Si deve quindi verificare che $\forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad < \partial sgn \; x| \; g(x) >= 2 < \delta| \; g >$.

$$< \partial sgn \; x| \; g(x) >= (-1) < sgn \; x| \; \frac{d}{dx} g(x) >= - < sgn \; x| \; g'(x) >=$$

$$= -\int_0^{+\infty} 1 \cdot g'(x) \, dx - \int_{-\infty}^{0} (-1) \cdot g'(x) \, dx = -\int_0^{+\infty} g'(x) \, dx + \int_{-\infty}^{0} g'(x) \, dx =$$

$= -(-g(0)) + g(0) = 2g(0) = 2 < \delta| \; g > \Longrightarrow < \partial sgn \; x| \; g(x) >= 2 < \delta| \; g >$
.
Ne segue che $\mathcal{F}(\partial sgn \; x) = \mathcal{F}(2\delta) = 2\mathcal{F}(\delta) = 2 \cdot 1 = 2$.
D'altra parte per proprietà della trasformata di Fourier (vedi terza proprietà Proposizione 3.0.9 Capitolo 3) si ha che : $\mathcal{F}(\partial sgn \; x) = (is)\mathcal{F}(sgn \; x)$.
Quindi si ha:

$$s \; \mathcal{F}(sgn \; x) = \frac{\mathcal{F}(\partial sgn \; x)}{i} = \frac{2}{i} = -2i \tag{4.3}$$

Consideriamo ora $c \in \mathbb{C}$ e l'equazione $sT = c$, le cui soluzioni sono date da una qualunque $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tale che $sT = c$.
Abbiamo precedentemente verificato che $s \cdot \frac{1}{s} = 1$ (vedi Osservazione 13), quindi una soluzione dell'equazione $sT = c$ è $T = c \cdot \frac{1}{s}$.
Ogni altra soluzione si ottiene sommando a questa, una soluzione di $sT = 0$ e ogni soluzione di quest'ultima equazione è fornita da $T = k\delta$ con k costante arbitraria (vedi Teorema 4.0.10). Quindi ogni soluzione dell'equazione
$sT = c$ è data da $T = c \cdot \frac{1}{s} + k\delta$.
Osserviamo che la (4.3) è della forma $sT = c$ quindi si ha:
$\mathcal{F}(sgn \; x) = -2i \cdot \frac{1}{s} + k\delta$ con k costante arbitraria.

Si ha che $sgn\ x$ è dispari quindi per Osservazione 12 (vista prima), anche $\mathcal{F}(sgn\ x)$ è dispari, inoltre $\dfrac{1}{s}$ è dispari e δ è pari, allora deve essere $k = 0$, quindi $\mathcal{F}(sgn\ x) = -2i \cdot \dfrac{1}{s}$.

Da questa si trae: $\mathcal{F}\left(\dfrac{1}{s}\right) = -\dfrac{1}{2i}\ \mathcal{F}(\mathcal{F}(sgn\ x))$

e applicando l'Osservazione 11 (vista prima), si ottiene

$-\dfrac{1}{2i}\ \mathcal{F}(\mathcal{F}(sgn\ x)) = -\dfrac{2\pi}{2i}\ \pi_{-1}\ sgn\ x = -\dfrac{\pi}{i}\ sgn(-x)) = \dfrac{\pi}{i}\ sgn\ x =$

$= -\pi\ i\ sgn\ x \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F}\left(\dfrac{1}{s}\right) = -\pi\ i\ sgn\ x.$ □

Definizione 4.4. Prodotto di distribuzioni temperate

Siano $f, \phi, f\phi \in K_1(\mathbb{R}^n)$. Allora la distribuzione temperata $f\phi (= \phi f)$ si chiama *prodotto delle distribuzioni temperate* f e ϕ.

Se $f\phi$ e $(\partial_j f)\phi$ sono distribuzioni temperate, poniamo:

$$f\ \partial_j \phi \overset{def}{=} \partial_j(f\ \phi) - (\partial_j f)\phi$$

Osservazione 16.

Se $f \in K_p(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in K_{p'}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, ($p' = +\infty$ se $p = 1$, $p' = 1$ se $p = +\infty$), allora $f\phi \in K_1(\mathbb{R}^n)$.

Esempio 4.2.

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ di classe $\mathcal{C}^1$ con $f' \in K_1(\mathbb{R})$; allora posto $\dfrac{1}{x} = \partial \ln |x|$, esiste $\dfrac{1}{x} f$.

Si osserva che $f \in K_\infty(\mathbb{R})$; infatti $f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(t)\,dt$ e quindi

$$|f(x)| \le (\int\limits_0^x \left| \frac{f'(t)}{(1+t^2)^M}\,dt \right| + |f(0)|)(1+x^2)^M \le C(1+x^2)^M$$

per certe costanti positive M e C.

Allora poiché $\partial \ln |x| \in K_1(\mathbb{R})$, per l'Osservazione appena vista, si ha che $x \longrightarrow f'(x)\partial \ln |x| \in K_1(\mathbb{R})$ e $x \longrightarrow f(x)\partial \ln |x| \in K_1(\mathbb{R})$.

Quindi per definizione di prodotto di distribuzioni temperate si ha:

$$\frac{1}{x} f = \partial(f\ \partial \ln |x|) - f'\partial \ln |x| \tag{4.4}$$

Teorema 4.0.13.
Sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}),\ f' \in K_\infty(\mathbb{R})$.
Allora ogni distribuzione temperata T *tale che* $xT = f$, *è della forma:*

$$T = \frac{1}{x} \cdot f + C\delta, \qquad C \text{ costante arbitraria.}$$

Dimostrazione.
Per ipotesi $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e $f' \in K_\infty(\mathbb{R})$, allora per l'Esempio 4.2 (appena visto), esiste il prodotto $\frac{1}{x} \cdot f$.
Inoltre per la (4.2) (Osservazione 13) e per il Teorema 4.0.12 risulta

$$f = (\frac{1}{x} \cdot x)f = \frac{1}{x} \cdot (xf) = \frac{1}{x} \cdot (fx) = (\frac{1}{x} \cdot f)x = x(\frac{1}{x} \cdot f) = xT \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{x} \cdot f \text{ è soluzione di } xT = f.$$

Dal Teorema 4.0.10 segue inoltre che ogni soluzione ($\in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$) di $xT = f$ è $\frac{1}{x} \cdot f + C\delta$, con C costante arbitraria. $\square$

Appendice A

Appendice

Vengono riportati teoremi, definizioni e ossevazioni utilizzati nei capitoli di questo elaborato.

Definizione A.1. Spazio topologico
Sia X un insieme, $X \neq \emptyset$ e sia $\mathcal{U}$ un sottoinsieme di $\mathscr{P}(X)$ (insieme delle parti di X) tale che:

- $\emptyset \in \mathcal{U}$
- $X \in \mathcal{U}$
- $U_\alpha \in \mathcal{U} \quad \forall \alpha \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \mathcal{U}$
- $U_k \in \mathcal{U} \quad k = 1, ..., n \implies \bigcap_{k=1}^{n} U_k \in \mathcal{U}$

Allora si dice che $\mathcal{U}$ è una topologia per X e si indica con $(X,\mathcal{U})$ il relativo *spazio topologico*.
Gli elementi di $\mathcal{U}$ si chiamano *aperti*.

Definizione A.2. Base di una topologia
Sia $(X,\mathcal{U})$ uno spazio topologico.
$\mathscr{B}$ sottoinsieme di $\mathcal{U}$ è detta *base* se ogni $U \in \mathcal{U}$ è unione di elementi di $\mathscr{B}$.

Definizione A.3.
Siano $\mathcal{U}_1$,$\mathcal{U}_2$ due topologie per lo stesso insieme X, $X \neq \emptyset$.
Si dice che la *topologia* $\mathcal{U}_1$ è più *debole* di $\mathcal{U}_2$ (o equivalentemente $\mathcal{U}_2$ è più *forte* di $\mathcal{U}_1$) se $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$.
Se ciascuna delle due topologie è più debole dell'altra, allora esse coincidono ($\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$).

Definizione A.4. Norme confrontabili
Sia X uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$) e siano $\| \ \|_1$ e $\| \ \|_2$ due norme per X.
Si dice che $\| \ \|_1$ è più *debole* di $\| \ \|_2$ (o equivalentemente $\| \ \|_2$ è più *forte* di $\| \ \|_1$) se $\exists c \in \mathbb{R}^+$ t.c. $\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \quad \forall x \in X$.
Due norme si dicono *confrontabili* se una di esse è più debole dell'altra.
Due norme si dicono *equivalenti* se ciascuna di esse è più debole dell'altra.

Definizione A.5.
Sia $(X, \| \ \|)$ uno spazio normato (spazio vettoriale dotato di norma).
Una *successione* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X si dice *di Cauchy* se
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \quad$ t.c. $\quad \|x_n - x_m\| < \epsilon \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad n, m > \bar{n}$
(equivalentemente $\|x_n - x_m\| \underset{n,m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$).
Una *successione* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *convergente* in X se
$\exists x \in X$ t.c. $\|x_n - x\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (si scrive $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$).

Definizione A.6. Spazio completo (o di Banach)
Uno spazio normato $(X, \| \ \|)$ si dice *completo* o *di Banach* se ogni successione di Cauchy in X è convergente in X.

Teorema A.0.14.
Siano X, X' spazi vettoriali normati, sia $T : X \longrightarrow X'$ un'applicazione lineare. Sono equivalenti:

1. *T è continua in zero*

2. *T è continua in X*

3. $\exists c > 0$ *t.c.* $\|Tx\| < \|x\|_X \quad \forall x \in X$ *(T è limitata).*

Teorema A.0.15 (di Banach dell'applicazione lineare aperta)**.**
Siano $(X, \| \, \|)$ *e* $(X', \| \, \|')$ *due spazi di Banach e sia* $T : X \overset{su}{\longrightarrow} X'$ *lineare e continua.*
Allora se A *è un aperto di* $X \Longrightarrow T(A)$ *è un aperto di* X'.

Teorema A.0.16.
Siano $(X, \| \, \|)$ *e* $(X', \| \, \|')$ *due spazi di Banach e sia* $T : X \underset{1-1}{\overset{su}{\longrightarrow}} Y$ *lineare e continua.*
Allora T *è un omeomorfismo (cioè anche* T^{-1}*, che è lineare, è continua).*

Definizione A.7.
Sia X un insieme, $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{P}(X)$, $\mathcal{S}$ si dice σ_ algebra se:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{S}$
2. $A \in \mathcal{S} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{S}$
3. $A_k \in \mathcal{S} \quad \forall k \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ è chiusa rispetto alle unioni numerabili).

La coppia $(X, \mathcal{S})$ è chiamata *spazio misurabile* e gli elementi di $\mathcal{S}$ sono chiamati *insiemi misurabili.*

Definizione A.8.
Se $X \neq \emptyset$ è uno spazio topologico, la σ_algebra $\mathcal{S}$ generata dagli insiemi aperti è chiamata σ_algebra di Borel.

Definizione A.9.
Sia $\mathcal{S}$ una σ_ algebra, si definisce *misura* l'applicazione $\mu : \mathcal{S} \longrightarrow [0, +\infty]$ t.c. valgono:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. se $A, B \in \mathcal{S}$, $A \subseteq B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (monotonia)

3. se $A_k \in \mathcal{S} \quad \forall k \in \mathbb{N}$ e $A_k \cap A_h = \emptyset$ per $k \neq h \Longrightarrow$
$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$

La terna $(X, \mathcal{S}, \mu)$ è detta *spazio di misura.*

Definizione A.10. Spazi $\mathbf{L^p}$

Sia X uno spazio metrico, localmente compatto (cioè ogni punto ha un intorno compatto) e σ_ finito ossia $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ con $\mu(K_j) < \infty$.
Sia $(X, \mathcal{S}, \mu)$ uno spazio di misura, sia $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, f $\mathcal{S}$_ misurabile, sia $1 \leq p < \infty$.
Allora

$$f \in L^p(X, \mu) \iff \int_X |f|^p \, d\mu < \infty$$

Osservazione 17.
Lo spazio $L^1(X, \mu)$ è lo spazio delle *funzioni sommabili* in quanto

$$f \in L^1(X, \mu) \iff \int_X |f| \, d\mu < \infty$$

Definizione A.11. Trasformata di Fourier in $\mathbb{R}^\mathbf{n}$

Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.
Si definisce *trasformata di Fourier* di f in $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{F}(f(\xi)) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) \, dx$$

Proposizione A.0.17.
Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \widehat{f}$ *continua e limitata.*

Teorema A.0.18.
Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \lim_{\xi \to \infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$

Osservazione 18.
Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx = \lim_{N \to \infty} \int_{B(0,N)} f(x) \, dx.$

Bibliografia

[1] B. Pini, *Lezioni sulle distribuzioni.* Bologna, 1979.

[2] I. M. Gelfand ; G. E. Shilov, *Generalized functions. Vol. 1. Properties and operations.* Academic Press, New York-London, 1964.

[3] I. M. Gelfand ; G. E. Shilov, *Generalized functions. Vol. 2. Spaces of fundamental and generalized functions.* Academic Press, New York-London, 1968.

Ringraziamenti

Il primo, più grande e sentito ringraziamento va alla mia famiglia, per il sostegno, la forza, la carica e l'affetto che mi ha dato in ogni momento della mia vita. In particolare ringrazio la mia sister che ha sopportato i miei nervosismi prima degli esami e che mi rallegra le mattine con le sue canzoni.
Un ringraziamento al Professor Franchi, per la disponibilità con cui ha seguito questa tesi.
Grazie a tutti i miei splendidi amici: agli amici Pesaresi, per tutti i bei momenti passati insieme e agli amici Bolognesi, per la loro simpatia e disponibilità, per le mille ore passate a lezione e per le serate trascorse insieme.
Un Grazie speciale a Giachi, per la nostra amicizia e per il sostegno che ci siamo dati per affrontare questi tre anni, per le lunghe chiaccherate al telefono, per tutte le volte che mi ha ascoltato, capito e creduto in me.