Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

SOLUZIONE FONDAMENTALE PER ALCUNI OPERATORI DIFFERENZIALI A COEFFICENTI COSTANTI

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
BRUNO FRANCHI

Presentata da:
CHIARA AMADORI

II Sessione
Anno Accademico 2010/2011

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è quello di presentare alcuni esempi caratteristici di soluzioni fondamentali per operatori differenziali lineari a coefficenti costanti.

Il primo capitolo fornisce una breve introduzione alla teoria delle distribuzioni, focalizzando la sua attenzione principalmente sulle distribuzioni temperate. Esso è suddiviso in 4 sezioni; nella prima sezione viene introdotto il concetto di convoluzione tra distribuzioni temperate, nella seconda viene definito il prodotto di una distribuzione per una funzione, mentre le ultime due sezioni, che sono le più corpose, trattano i concetti di derivata e trasformazione di Fourier, mettendo in risalto le loro principali proprietà. In questo capitolo viene anche introdotta la distribuzione di Dirac δ, alla quale fanno riferimento la maggior parte degli esempi proposti, e che è necessaria per dare la definizione di soluzione fondamentale. Il primo capitolo così composto ci fornisce tutti gli strumenti necessari per cominciare ad analizzare le soluzioni fondamentali. Ricordiamo la nozione di soluzione fondamentale:
Sia

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \, \partial^{\,\alpha}$$

un operatore differenziale lineare a coefficenti costanti. Si chiama soluzione elementare o fondamentale *di $P(\partial)$ una distribuzione $E \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ tale che*

$$P(\partial)E = \delta.$$

Una proprietà cruciale della soluzione fondamentale è la seguente:

Se E è una soluzione elementare di $P(\partial)$ e S è distribuzione con supporto compatto, allora esiste la convoluzione $E * S$ e questa è soluzione

$$P(\partial)T = S.$$

Il secondo capitolo è suddiviso in tre sezioni, ciascuna delle quali presenta un particolare operatore differenziale insieme ad una rispettiva soluzione fondamentale. Inizialmente viene illustrato l'operatore delle onde, a seguire si trova l'operatore di Laplace, e per concludere viene analizzato l'operatore del calore.

Cocludono la tesi due appendici: l'appendice A introduce in maniera generica gli spazi numerabilmente normati, nell'appendice B invece sono esposti i due spazi $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$; $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ è lo spazio numerabilmente normato e completo il cui duale è lo spazio delle distribuzioni temperate, mentre $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ è limite induttivo di spazi numerabilmente normati completo.

Indice

Introduzione **i**

1 Distribuzioni Temperate **1**

1.1 Convoluzione di distribuzioni temperate 4

1.2 Prodotto di una distribuzione per una funzione 5

1.3 Derivata di una distribuzione 6

1.4 Trasformata di Fourier di una distribuzione temperata 10

2 Soluzioni Elementari **15**

2.1 L' operatore delle onde 15

2.2 L'operatore di Laplace 18

2.3 L'operatore del calore 21

A Spazi numerabilmente normati **25**

B Spazi $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ **29**

Bibliografia **35**

Capitolo 1

Distribuzioni Temperate

In questo capitolo vengono presentate le distribuzioni, e in particolre le distribuzioni temperate. Per definirle è necessario fare riferimento agli spazi $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ definiti nelle appendici.

Nel seguito indicheremo con Φ uno tra i due spazi $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Definizione 1.1. Sia Φ' il duale di Φ. Se $T \in \Phi'$, cioè T è applicazione continua $T : \Phi \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice che T è una *distribuzione*; In particolare se $\Phi = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si dice che T è una *distribuzione temperata.*
Il valore di T in $\phi \in \Phi$ si indica con $< T \,|\, \phi >$ o $< T_x \,|\, \phi(x) >$ o più semplicemente $T(\phi)$.

Osservazione 1. Φ' è uno spazio vettoriale pertanto se $T_1, T_2 \in \Phi'$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, anche $c_1T_1 + c_2T_2 \in \Phi'$ ed è la distribuzione tale che:

$$< c_1T_1 + c_2T_2 \,|\, \phi >= c_1 < T_1 \,|\, \phi > +c_2 < T_2 \,|\, \phi > \quad \forall\, \phi \in \Phi\,.$$

$T_1 + T_2$ è detta *somma* di T_1 e T_2, e c_1T_1 è detto *prodotto* di c_1 per T_1.
Se $T_1, T_2 \in \Phi'$, $T_1 = T_2 \Longleftrightarrow < T_1 \,|\, \phi >=< T_2 \,|\, \phi > \ \forall\, \phi \in \Phi\,.$

Osservazione 2. Sia $\Phi = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Se $T \in \Phi^*$ (insieme dei funzionali lineari su Φ, $\Phi^* \supseteq \Phi'$), T è distribuzione se è continua. Allora per il teorema A.0.2; T è una distribuzione $\Longleftrightarrow \phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\Phi} 0 \Longrightarrow < T \,|\, \phi_k > \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Invece per teorema A.0.4;
$\Phi_p^* = \bigcup_{p=1}^{\infty} \Phi_p^*$ così se $T \in \Phi^*, \exists\, p \in \mathbb{N}, T \in \Phi_p^*$, allora T è continua se e solo se T è limitata; tutto questo ci assicura che T è una distribuzione $\Longleftrightarrow$ $\exists\, p \in \mathbb{N}, \exists\, c \in \mathbb{R}, c > 0$ tali che $| < T \,|\, \phi > | \leqslant c \left\|\phi\right\|_p$.
Sia $\Phi = \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Allora, per il teorema B.0.6 un funzionale lineare su $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ è una distribuzione se e solo se per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ esistono $p \in \mathbb{N}$ e $C_{K,p} > 0$ tali che

$$< T_1 \,|\, \phi > \leq C_{K,p} \left\|\phi\right\|_{p,K} \quad \text{per ogni } \phi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R}^n).$$

Esempio 1.1. Esempi di distribuzioni temperate.

- DISTRIBUZIONE DI TIPO FUNZIONE

  - Sia $\Phi = \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Sia $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ allora definiamo

    $$T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx \quad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$$

    T_f è un funzionale lineare continuo infatti

    $$|T_f(\phi_k)| = |\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi_k(x)dx| = |\int_K f(x)\phi_k(x)dx| \leqslant$$

    $$\leqslant \int_K |f(x)||\phi_k(x)|dx \leqslant \max_K |\phi_k(x)| \int_K |f(x)|dx$$

    ($supp\phi_k \subseteq K$ compatto di $\mathbb{R}^n$)
    e, da questa relazione si deduce $\phi_k \underset{k\to\infty}{\overset{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow}} 0 \Longrightarrow T_f(\phi_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
    T_f è una distribuzione detta *distribuzione di tipo fuzione.*
    In questo modo ad ogni funzione $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ si può associare una distribuzione.

  - Sia $\Phi = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che $\exists\, M \geq 0$ per cui $x \to \dfrac{|f(x)|^p}{(1 + \left\|x\right\|^2)^M}, x \in \mathbb{R}^n, 1 \leqslant p < \infty$ è sommabile o $\exists\, M \geq 0$

per cui $\underset{x\in\mathbb{R}^n}{supess}\dfrac{|f(x)|}{(1+\|x\|^2)^M} < +\infty$ ($f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ non ci assicura la convergenza dell'integrale). Definiamo

$$T_f(\phi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx \quad \forall\, \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

T_f è una distribuzione temperata.
Se $p = +\infty$ se $2M + n + 1 \leqslant q \in \mathbb{N}$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx| \leqslant \underset{x\in\mathbb{R}^n}{supess}\frac{|f(x)|^p}{(1+\|x\|^2)^M}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{dx}{(1+\|x\|)^{n+1}}\,\|\phi\|_q\,.$$

Se $p = 1$, allora se $2M \leqslant q \in \mathbb{N}$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)|}{(1+\|x\|^2)^M}dx\,\|\phi\|_q\,.$$

Se $1 < p < +\infty$, allora se $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ e $\frac{2M}{p} + \frac{n+1}{p'} \leqslant q \in \mathbb{N}$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx| \leqslant (\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)|^p}{(1+\|x\|^2)^M}dx)^{\frac{1}{p}}(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{dx}{(1+\|x\|^2)^{n+1}})^{\frac{1}{p'}}\,\|\phi\|_q\,.$$

Dunque T_f è un funzionale lineare su $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$; inoltre le stime ottenute mi assicurano che se $\phi_k \underset{k\to\infty}{\overset{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow}} 0 \Longrightarrow T_f(\phi_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ perciò tale funzionale è anche continuo; $T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Osserviamo che se $g \sim f$ cioè $g(x) = f(x)$ q.d. risulta

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\phi(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx \quad \forall\, \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

perchè i due integrali differiscono per un insieme di misura nulla. Allora preso f come rappresentante della classe di equivalenza si pone

$$T_{[f]}(\phi) =< T_{[f]}\,|\,\phi >= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx$$

più brevemente, indicheremo $T_{[f]}$ con T_f.
T_f è detta *distribuzione temperata regolare* o *di tipo fuzione.*

- DISTRIBUZIONE DI DIRAC
  Sia δ definita da

$$< \delta \,|\, \phi >= \phi(0) \quad \forall \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

δ è un funzionale lineare su $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, cioè $\delta \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)^*$. Ovviamente se $\phi_k \underset{k\to\infty}{\overset{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow}} 0 \Longrightarrow < \delta \,|\, \phi_k >= \phi_k(0) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$; perciò δ è continua e quindi $\delta \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)'$. Questa è chiamata *distribuzione di Dirac.*

1.1 Convoluzione di distribuzioni temperate

Definizione 1.2. Sia $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Sia ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Dire che T è nulla su ω significa che $< T \,|\, \phi >= 0 \;\forall\, \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),\ \mathrm{supp}\phi \subset \omega$.
Sia Ω l'unione di tutti gli aperti limitati di $\mathbb{R}^n$ sui quali T è nulla.
Allora $\mathbb{R}^n - \Omega$ si chiama *supporto di* T ($\mathrm{supp}\, T$).

Esempio 1.2. Sia δ la distribuzione di Dirac. Fissiamo ad arbitrio un aperto limitato Ω di $\mathbb{R}^n$ tale che $0 \notin \Omega$. Allora se $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathrm{supp}\phi \subset \omega$ si ha $< \delta \,|\, \phi >= \phi(0) = 0$ (poiché $0 \notin \mathrm{supp}\phi$); pertanto δ è nulla su ogni aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ non contenente lo zero, perciò $\mathrm{supp}\,\delta = \{0\}$.

Osservazione 3. L'insieme delle distribuzioni temperate con supporto compatto è un sottospazio di $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, che viene denotato con $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Definizione 1.3. Siano $S, T \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Se $\forall\, \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ esiste $< S_y \,|\, < T_x \,|\, \phi(x+y) >>$ e la posizione $< U \,|\, \phi >=< S_y \,|\, < T_x \,|\, \phi(x+y) >>$ definisce una distribuzione temperata, allora U si chiama *convoluzione di* S *con* T e si denota con $S * T$.

Ci limitiamo a richiamare il risultato seguente (per una prova si veda, ad esempio, [2], Capitolo 27).

Teorema 1.1.1. *Se* $S, T \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$*, e almeno una delle due appartiene a* $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$*, allora esiste* $S * T$*.*

Osservazione 4. Siano S e T due distribuzioni temperate di tipo funzione ($S = S_f, T = T_g$).Allora vale:

$$< S * T \,|\, \phi > = < S_y \,|\, < T_x \,|\, \phi(x+y) >> \quad \forall\, \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

cioè

$$< S * T \,|\, \phi > = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) (\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\phi(x+y)dx)dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) (\int_{\mathbb{R}^n} g(z-y)\phi(z)dz)dy = \iint_{\mathbb{R}^n \mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\phi(x)dxdy \,.$$

Osservazione 5. $T * \delta = T$. Infatti

$$< T * \delta \,|\, \phi > = < T_x \,|\, < \delta_y \,|\, \phi(x+y) >> = < T_x \,|\, \phi(x) >$$

così

$$< T * \delta \,|\, \phi > = < T_x \,|\, \phi > \quad \forall\, \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \,.$$

1.2 Prodotto di una distribuzione per una funzione

Sia $T \in \Phi'$ e sia f un moltiplicatore per Φ (si veda l'Appendice) allora si definisce fT come:

$$< fT \,|\, \phi > = < T \,|\, f\phi > \quad \forall\, \phi \in \Phi \,.$$

Si osserva che $f\phi \in \Phi$ perchè f un moltiplicatore per Φ, quindi fT è un funzionale lineare su Φ, inoltre se $\phi_k \underset{k\to\infty}{\overset{\Phi}{\longrightarrow}} 0 \Longrightarrow f\phi_k \underset{k\to\infty}{\overset{\Phi}{\longrightarrow}} 0$ ma poichè T è continua $f\phi_k \underset{k\to\infty}{\overset{\Phi}{\longrightarrow}} 0 \Longrightarrow < fT \,|\, \phi_k > = < T \,|\, f\phi_k > \underset{k\to\infty}{\overset{\Phi}{\longrightarrow}} 0$, quindi

$$\phi_k \underset{k\to\infty}{\overset{\Phi}{\longrightarrow}} 0 \Longrightarrow < fT \,|\, \phi_k > \underset{k\to\infty}{\overset{\Phi}{\longrightarrow}} 0 \,;$$

dunque, fT appartiene ancora a Φ', e si chiama *prodotto di T per f*.

Esempio 1.3. Se $\Phi = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e sia f un moltiplicatore per $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ con $f(0) = 0$, allora $f\delta = 0$, se invece $f(0) = 1$, allora $f\delta = \delta$.
Per esempio $e^{i<x,a>}\delta = \delta$ perchè $e^{i<0,a>} = 1$

Osservazione 6. Ogni elemento di $\mathscr{O}_M(\mathbb{R}^n)$ è un moltiplicatore per $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e quindi anche per $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

1.3 Derivata di una distribuzione

Sia $T \in \Phi'$ e sia α un multi-indice. chiamiamo *α-derivata di T*, e la denotiamo con $\partial^\alpha T$, l'elemento di Φ' definito così:

$$< \partial^\alpha T \,|\, \phi >= (-1)^{|\alpha|} < T \,|\, D^\alpha \phi > \quad \forall\, \phi \in \Phi\,.$$

La definizione è ben posta poichè D^α è un'operazione lineare da Φ in sé ($\phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\Phi} 0 \Longrightarrow D^\alpha \phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\Phi} 0$ questo ci assicura la continuitá di $\partial^\alpha T$).

- PROPRIETÀ

  1) Se α, β sono due multi-indici e T e Φ' si ha:

  $$\partial^\alpha(\partial^\beta T) = \partial^{\alpha+\beta} T = \partial^\beta(\partial^\alpha T)$$

  2) Se $T_1, T_2 \in \Phi'$ si ha:

  $$\partial^\alpha(T_1 + T_2) = \partial^\alpha T_1 + \partial^\alpha T_2$$

  3) Se $T \in \Phi'$ e $D^\gamma f$ è moltiplicatore per Φ $\forall\,\gamma, 0 \leqslant \gamma \leqslant \alpha$, si ha:

  $$\partial^\alpha(fT) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} f \cdot \partial^\beta T$$

Dimostrazione. Proviamo queste tre proprietà:

1) $\forall\,\phi \in \Phi$ risulta

$$< \partial^\alpha(\partial^\beta T) \,|\, \phi >= (-1)^{|\alpha|} < \partial^\beta T \,|\, D^\alpha\phi >= (-1)^{|\alpha|+|\beta|} < T \,|\, D^\beta(D^\alpha\phi) >=$$

$$= (-1)^{|\alpha+\beta|} < T \,|\, D^{\alpha+\beta}\phi >=< \partial^{\alpha+\beta} T \,|\, \phi > .$$

2) $\forall \phi \in \Phi$ risulta

$$< \partial^\alpha (T_1 + T_2) \,|\, \phi >= (-1)^{|\alpha|} < T_1 + T_2 \,|\, D^\alpha \phi >=$$

$$= (-1)^{|\alpha|} < T_1 \,|\, D^\alpha \phi > +(-1)^{|\alpha|} < T_2 \,|\, D^\alpha \phi >=$$

$$< \partial^\alpha T_1 \,|\, \phi > + < \partial^\alpha T_2 \,|\, \phi >=< \partial^\alpha T_1 + \partial^\alpha T_2 \,|\, \phi > .$$

3) Si prova per induzione.
Sia $\alpha = e_j = (0, \ldots, 0, \underset{j}{1}, 0, \ldots, 0)$ useremo questa notazione:

$$\partial^{e_j} = \partial_j \,, \quad D^{e_j} = D_j$$

Vediamo che

$$\partial_j (fT) = D_j f \cdot T + f \cdot \partial_j T.$$

$$< \partial_j (fT) \,|\, \phi >= - < fT \,|\, D_j \phi >= - < T \,|\, f D_j \phi >= - < T \,|\, D_j (f\phi) - D_j f \cdot \phi >=$$

$$= - < T \,|\, D_j (f\phi) > + < T \,|\, D_j f \cdot \phi >=< \partial_j T \,|\, f\phi > + < T \,|\, D_j f \cdot \phi >=$$

$$=< f \partial_j T \,|\, \phi > + < D_j f \cdot T \,|\, \phi >=< f \partial_j T + D_j f \cdot T \,|\, \phi > .$$

Ora supponiamo vera questa formula per $|\alpha| \leqslant m$, con l'intento di dimostrarla vera anche per $|\alpha| = m + 1$. Sia $|\alpha| = m$, allora

$$\partial^{\alpha + e_j} (fT) = \partial^\alpha (\partial^{e_j} (fT)) = \partial^\alpha (D_j f \cdot T + f \cdot \partial_j T) =$$

$$\partial^\alpha (D_j f \cdot T) + \partial^\alpha (f \cdot \partial_j T) = \text{(per ip. induttiva)}$$

$$= \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha - \beta} (D_j f) \cdot \partial^\beta T + \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha - \beta} f \cdot \partial^\beta (\partial_j T) =$$

$$= \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha - \beta + e_j} f \cdot \partial^\beta T + \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha - \beta} f \cdot \partial^{\beta + e_j} T =$$

(sostituiamo nella seconda sommatoria $\beta = \gamma - e_j$)

$$= \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha + e_j - \beta} f \cdot \partial^\beta T + \sum_{e_j \leqslant \gamma \leqslant \alpha + e_j} \binom{\alpha}{\gamma - e_j} D^{\alpha + e_j - \gamma} f \cdot \partial^\gamma T =$$

$$= \sum_{\beta \leqslant \alpha,\, \beta_j = 0} \binom{\alpha + e_j}{\beta} D^{\alpha + e_j - \beta} f \cdot \partial^\beta T + \sum_{e_j \leqslant \beta \leqslant \alpha} [\binom{\alpha}{\beta} + \binom{\alpha}{\beta - e_j}] D^{\alpha + e_j - \beta} f \cdot \partial^\beta T +$$

$$+ \sum_{\beta \leqslant \alpha + e_j,\, \beta_j = \alpha_j + 1} \binom{\alpha + e_j}{\beta} D^{\alpha + e_j - \beta} f \cdot \partial^\beta T = \sum_{\beta \leqslant \alpha + e_j} \binom{\alpha + e_j}{\beta} D^{\alpha + e_j - \beta} f \cdot \partial^\beta T.$$

□

Osservazione 7. Se $f \in \Phi$, risulta $\partial^\alpha f = D^\alpha f$.
Per esempio sia $f \in C^1 \cap \mathscr{L}(\mathbb{R})$ e $Df \in C^0 \cap \mathscr{L}(\mathbb{R})$, allora $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})'$ e $\forall\, \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ risulta

$$< \partial f \,|\, \phi >= - < f \,|\, D\phi >= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x)dx.$$

Ma poichè,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\phi'(x)dx = [f(x)\phi(x)]_{-a}^{a} - \int_{-a}^{a} f'(x)\phi(x)dx$$

dato che esistono finiti i due integrali: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x)dx$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\phi(x)dx$, esistono finiti anche i due limiti: $\lim_{x\to+\infty} f(x)\phi(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)\phi(x)$.
Questi limiti devono essere entrambi nulli, perchè se per esempio fosse $\lim_{x\to+\infty} f(x)\phi(x) \neq 0$, poichè $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = 0$ perchè $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, allora dovrebbe essere $\lim_{x\to-\infty} |f(x)| = +\infty$ e quindi non potrebbe essere $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$. Essendo i due limiti nulli si ha:

$$< \partial f \,|\, \phi >= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\phi(x)dx =< Df \,|\, \phi >$$

e quindi $\partial f = Df$.

Esempio 1.4. Funzione di Heaviside.
La funzione di Heaviside è la funzione $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita in questo modo:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

poichè per $M = 0$ $\mathop{supess}\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{|H(x)|}{(1 + \|x\|^2)^M} < +\infty$, H è una distribuzione temperata. Si ha

$$< \partial H \,|\, \phi >= - < H \,|\, \phi' >= - \int_{\mathbb{R}} H(x)\phi' dx = - \int_{0}^{+\infty} \phi'(x)dx = \phi(0)$$

$$\Longrightarrow \partial H = \delta\,.$$

Si osservi che ∂H non è la derivata ordinaria di H ($DH(x) = 0$ se $x \neq 0$, non esiste in $x = 0$, perchè $DH^{+}(0) = +\infty$ e $DH^{-}(0) = 0$).

Teorema 1.3.1. *Sia $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ e $T' = 0 \Longrightarrow T = cost.$*

Dimostrazione. Per ipotesi è $< T' \,|\, \phi >= - < T \,|\, \phi' > \ \forall\, \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
Proviamo che poichè $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ esiste $\phi_1 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ tale che $\phi_1' = \phi$ se e solo se $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi(s)ds = 0$. Infatti vediamo che se $\phi_1' = \phi$, allora

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi(s)ds = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi_1'(s)ds = [\phi_1(s)]_{-\infty}^{+\infty} = 0\,.$$

Viceversa, se $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi(s)ds = 0$, allora poniamo

$$\phi_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \phi(s)ds = -\int\limits_{x}^{+\infty} \phi(s)ds$$

così $\phi_1' = \phi$. Resta da provare che $\phi_1 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
Se $p \geqslant 1$ allora $\forall\, k \geqslant 0$

$$|x|^k |D^p \phi_1(x)| = |x|^k |D^{p-1}\phi(x)| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Se $p = 0$, con $x > 0$ si ha

$$x^k |\phi_1(x)| = x^k |\int\limits_{x}^{+\infty} \phi(s)ds| \leqslant x^k \int\limits_{x}^{+\infty} \frac{C_k}{(1+s^2)^{k+1}} ds$$

per una certa costante $C_k > 0$, questo perchè $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Ma per $t > x$ è $\dfrac{1}{(1+s^2)^k} \leqslant \dfrac{1}{(1+x^2)^k}$, quindi

$$x^k |\phi_1(x)| \leqslant C_k \frac{x^k}{(1+x^2)^k} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{ds}{(1+s^2)} ds \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Il caso con $x < 0$ è analogo.

Dunque con tali premesse, se $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, fissiamo $\phi_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ e tale che $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi_0(s)ds = 1$. Si ha

$$\phi(x) = [\phi(x) - \phi_0(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi(s)ds] + \phi_0(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi(s)ds$$

poichè

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} [\phi(x) - \phi_0(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi(s)ds]dx = 0$$

esiste $\phi_1 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ tale che $\phi_1' = \phi - (\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi(s)ds)\phi_0$; allora

$$< T \,|\, \phi > = < T \,|\, \phi_1' > + < T \,|\, (\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi(s)ds)\phi_0 > = \begin{pmatrix} \text{per ip.} \\ < T \,|\, \phi_1' > = 0 \end{pmatrix}$$

$$= < T \,|\, (\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi(s)ds)\phi_0 > = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} < T \,|\, \phi_0 > \phi(s)ds = << T \,|\, \phi_0 > \,|\, \phi >$$

e quindi

$$T = < T \,|\, \phi_0 > = cost$$

□

1.4 Trasformata di Fourier di una distribuzione temperata

Sia $T \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)'$. Definiamo la trasformata di Fourier di T in questo modo:

$$< \mathscr{F}(T) \,|\, \phi > = < T \,|\, \widehat{\phi} > \quad \forall \, \widehat{\phi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

dove

$$\widehat{\phi}(\xi) = (\mathscr{F}(\phi))(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>}\phi(x)dx\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

è la trasformata di Fourier di ϕ.
La definizione è ben posta, infatti la trasformazione di Fourier è una applicazione $\mathscr{F}: \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \underset{su}{\overset{1-1}{\longrightarrow}} \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ lineare e continua; pertanto se $\phi_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, allora $\widehat{\phi_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
Dunque se $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ allora anche $\mathscr{F}(T) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ ($\phi_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \widehat{\phi_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow < \mathscr{F}(T)\,|\,\phi_k > = < T\,|\,\widehat{\phi_k} > \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ perchè T è distribuzione).

Esempio 1.5. Trasformata di Fourier della distribuzione di Dirac.

$$\widehat{\delta}(\phi) = \delta(\widehat{\phi}) = \widehat{\phi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\cdot 0}\phi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)dx = 1(\phi)\,.$$

La Trasformata di Fourier della distribuzione di Dirac è la distribuzione 1; $\widehat{\delta} = 1$.

- PROPRIETÀ

 1) Se $T_1, T_2 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, allora

$$\mathscr{F}(T_1 + T_2) = \mathscr{F}(T_1) + \mathscr{F}(T_2).$$

 2) Se $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, allora

$$\partial^\alpha \mathscr{F}(T) = \mathscr{F}((-i\xi)^\alpha T_\xi).$$

 3) Se $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, allora

$$(\mathscr{F}(\partial^\alpha T))_\xi = (i\xi)^\alpha (\mathscr{F}(T))_\xi.$$

Dimostrazione. Proviamo le tre proprietà:

1)
$$< \mathscr{F}(T_1 + T_2)\,|\,\phi > = < T_1 + T_2\,|\,\widehat{\phi} > =$$

$$< T_1\,|\,\widehat{\phi} > + < T_2\,|\,\widehat{\phi} > = < \mathscr{F}(T_1)\,|\,\phi > + < \mathscr{F}(T_2)\,|\,\phi > \;.$$

2) Se $\widehat{\phi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, anche $\widehat{D^\alpha \phi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\widehat{D^\alpha \phi(\xi)} = (i\xi)^\alpha \widehat{\phi(\xi)}$, quindi

$$< \partial^\alpha \mathscr{F}(T) \,|\, \phi >= (-1)^{|\alpha|} < \mathscr{F}(T) \,|\, D^\alpha \phi >= (-1)^{|\alpha|} < T \,|\, \widehat{D^\alpha \phi} >=$$

$$= (-1)^{|\alpha|} < T_\xi \,|\, (i\xi)^\alpha \widehat{\phi(\xi)} >= (-1)^{|\alpha|} < (i\xi)^\alpha T_\xi \,|\, \widehat{\phi(\xi)} >=$$

$$=< (-i\xi)^\alpha T_\xi \,|\, \widehat{\phi(\xi)} >=< \mathscr{F}((-i\xi)^\alpha T_\xi) \,|\, \phi > .$$

3) Se $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, anche $D^\alpha \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e

$$< \mathscr{F}(\partial^\alpha T) \,|\, \phi >=< \partial^\alpha T \,|\, \widehat{\phi} >= (-1)^{|\alpha|} < T \,|\, D^\alpha \widehat{\phi} >=$$

$$= (-1)^{|\alpha|} < T \,|\, \widehat{(-iy)^\alpha \phi}(y) >= (-1)^{|\alpha|} < (\mathscr{F}(T))_\xi \,|\, (-i\xi)^\alpha \phi(\xi) >=$$

$$= (-1)^{2|\alpha|} < (\mathscr{F}(T))_\xi \,|\, (i\xi)^\alpha \phi(\xi) >=< (i\xi)^\alpha (\mathscr{F}(T))_\xi \,|\, \phi(\xi) > .$$

□

Definizione 1.4. Sia $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ con $a_i \neq 0 \,\forall\, i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, poniamo:

$$(\pi_a f)(x) = f(a_1 x_1, \dots, a_n x_n) = f(a \cdot x) \,.$$

Se $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, definiamo $\pi_a T$ come:

$$< \pi_a T \,|\, \phi >= \frac{1}{|a_1 a_2 \dots a_n|} < T \,|\, \pi_{\frac{1}{a}} \phi > \quad \forall\, \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

dove $\frac{1}{a} = (\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n})$.
π_a è un operatore lineare di $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ in sé.

Osservazione 8. Se $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$, riguardando f come distribuzione temperata di tipo funzione, si ha $\mathscr{F}(f) = \widehat{f}$. Infatti $\forall\, \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ risulta

$$< \mathscr{F}(f) \,|\, \phi >=< f \,|\, \widehat{\phi} >= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{\phi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>} \phi(y) dy) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) (\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>} f(x) dx) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) \phi(y) dy =< \widehat{f} \,|\, \phi >$$

($\widehat{f}$ è continua e limitata, perciò è lecito considerarla come distribuzione temperata).

Osservazione 9. Se $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$T = \frac{1}{(2\pi)^n} \pi_{-1} \mathscr{F}(\mathscr{F}(T)) .$$

Infatti, $\forall \, \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ risulta

$$< \pi_{-1} \mathscr{F}(\mathscr{F}(T)) \, | \, \phi > = < \mathscr{F}(\mathscr{F}(T)) \, | \, \pi_{-1}\phi > =$$

$$= < T \, | \, \mathscr{F}(\mathscr{F}(\pi_{-1}\phi)) > = < T \, | \, \pi_{-1} \mathscr{F}(\mathscr{F}(\phi)) >$$

questo perchè

$$\pi_{-1} \mathscr{F}(\phi) = \mathscr{F}(\pi_{-1}\phi)$$

infatti

$$\mathscr{F}(\pi_{-1}\phi)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x\,,\xi>} \phi(-x) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x\,,\,-\xi>} \phi(x) dx = \pi_{-1} \mathscr{F}(\phi)(x)$$

Però vale anche

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \pi_{-1} \mathscr{F}(\mathscr{F}(\phi)) = \phi .$$

Quindi risulta

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \pi_{-1} \mathscr{F}(\mathscr{F}(T)) = T .$$

Esempio 1.6.

$$\delta = \frac{1}{(2\pi)^n} \pi_{-1} \mathscr{F}(\mathscr{F}(\delta)) = \frac{1}{(2\pi)^n} \pi_{-1} \mathscr{F}(1) .$$

Per la proprietà 3) si ha

$$\mathscr{F}(\partial^\alpha \delta) = (i\xi)^\alpha$$

quindi

$$\partial^\alpha \delta = \frac{1}{(2\pi)^n} \pi_{-1} \mathscr{F}((i\xi)^\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathscr{F}((-i\xi)^\alpha) .$$

Capitolo 2

Soluzioni Elementari

Definizione 2.1. Sia

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \, \partial^{\,\alpha}$$

un operatore differenziale lineare con coefficenti costanti. Si chiama *soluzione elementare* o *fondamentale* di $P(\partial)$ una $E \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$P(\partial)E = \delta \, .$$

Osservazione 10. Siano E una soluzione elementare di $P(\partial)$ e $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ una soluzione di $P(\partial)T = 0$, allora osserviamo che anche $E + T$ è una soluzione elementare di $P(\partial)$; pertanto in generale, la soluzione elementare non è unica.
Inoltre se E è una soluzione elementare di $P(\partial)$ e $S \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, cioè S è distribuzione temperata con supporto compatto, allora esiste $E * S$ ed essa è soluzione di

$$P(\partial)T = S$$

infatti $P(\partial)(E * S) = (P(\partial)E) * S = \delta * S = S$.

2.1 L' operatore delle onde

Sia

$$P(\partial) = \partial_1 \partial_2 \ldots \partial_n \, .$$

Allora una soluzione elementare è

$$E(x) = H(x_1) \dots H(x_n)\,.$$

Infatti essendo $\underset{x\in\mathbb{R}^n}{supess} \dfrac{|H(x_1)\dots H(x_n)|}{(1+\|x\|^2)^M} < +\infty$ questa funzione è una distribuzione di tipo funzione, e quindi appartiene a $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, inoltre $\forall\, \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ risulta

$$< \partial_1 \dots \partial_n E \,|\, \phi >= (-1)^n < H(x_1)\dots H(x_n) \,|\, D_1 \dots D_n \phi(x) >=$$

$$= (-1)^n \int_0^\infty \dots \int_0^\infty D_1 \dots D_n \phi(x) dx_1 \dots dx_n =$$

$$= (-1)^{n-1} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty D_1 \dots D_{n-1} \phi(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \dots dx_{n-1} = \dots = \phi(0) =< \delta \,|\, \phi >$$

e quindi

$$\partial_1 \dots \partial_n E = \delta\,.$$

Consideriamo ora l'operatore delle onde:

$$\partial_x^2 - \partial_t^2 \qquad (x, t \in \mathbb{R})\,.$$

Ponendo $\xi = x + t$, $\tau = x - t$, questo operatore diventa

$$4\partial_\xi \partial_\tau\,.$$

Infatti

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}$$

analogamente ottengo

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \tau} = (\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t})(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\,.$$

Pertanto una soluzione elementare è

$$E(x,t) = \frac{1}{2} H(x+t) H(x-t) = \frac{1}{2} H(x - |t|).$$

Infatti $\forall\, \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$ risulta

$$< (\partial_x^2 - \partial_t^2)E(x,t)\,|\,\phi(x,t) >=< E(x,t)\,|\,(D_x^2 - D_t^2)\phi(x,t) >=$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} E(x,t)(D_x^2 - D_t^2)\phi(x,t)\,dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} H(x-|t|)(D_x^2 - D_t^2)\phi(x,t)\,dxdt =$$

poiché $H(x-|t|)$ è non nullo solo se $x-|t|>0$, cioè $x>|t|$, si ha

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{|t|}^{+\infty}(D_x^2 - D_t^2)\phi(x,t)\,dxdt =$$

si effettua un cambio di variabili ponendo $x = \frac{1}{2}(\xi+\tau), t = \frac{1}{2}(\xi-\tau)$, lo jacobiano di tale cambiamento è:

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,t)}{\partial(\xi,\tau)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}\,,$$

e indicando $\phi(\frac{1}{2}(\xi+\tau), \frac{1}{2}(\xi-\tau)) = \psi(\xi,\tau)$, risulta

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} 4D_\xi D_\tau \psi(\xi,\tau)(\frac{1}{2})d\xi d\tau = \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} D_\xi D_\tau \psi(\xi,\tau)d\xi d\tau =$$

$$\int\limits_0^{+\infty}(\int\limits_0^{+\infty} D_\xi D_\tau \psi(\xi,\tau)d\xi)d\tau = \int\limits_0^{+\infty}[D_\tau\psi(\xi,\tau)]_0^{+\infty}d\tau =$$

$$= -\int\limits_0^{+\infty} D_\tau\psi(0,\tau)d\tau = -[\psi(0,\tau)]_0^{+\infty} = \psi(0,0)$$

Perciò

$$< (\partial_x^2 - \partial_t^2)E(x,t)\,|\,\phi(x,t) >= \psi(0,0) = \phi(0,0)$$

quindi

$$(\partial_x^2 - \partial_t^2)E = \delta\,.$$

Ora prendendo $\phi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ con suppϕ compatto, quindi ϕ è distribuzione temperata di tipo funzione a supporto compatto ($\phi \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$), si può ottenere

$$u(x,t) = (E*\phi)(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} E(x-\xi, t-\tau)\phi(\xi,\tau)\,d\xi d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} H(x-\xi-|t-\tau|)\phi(\xi,\tau)\,d\xi d\tau = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{x-|t-\tau|}\phi(\xi,\tau)\,d\xi\,\Big)d\tau$$

che è soluzione di $(\partial_x^2 - \partial_t^2)u = \phi(x,t)$.

2.2 L'operatore di Laplace

Sia $P(\partial)$ l'operatore di Laplace

$$P(\partial) = \Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 .$$

Una soluzione elementare è data da

$$E = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln r & \text{se } n = 2 \\[2ex] -\dfrac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{4\pi^{\frac{n}{2}}} r^{2-n} & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

dove $r = \|x\| = (\sum_{j=1}^{n} x_j^2)^{\frac{1}{2}}$ ed $n \in \mathbb{N}$, e dove Γ è la funzione di Eulero:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \quad \text{quando } \Re e\ \alpha > 0\,.$$

Essa gode di queste proprietà:

1) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

2) $\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

3) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Prima di mostrare che effettivamente E è una soluzione elementare, vediamo due esempi che serviranno al nostro scopo.

Teorema 2.2.1. *Scriviamo per semplicità* $r := \|x\|$. *Sia* $f = f(r)$ *tale che* $\exists M > 0$, $\int_0^\infty \frac{|f(r)|}{(1+r^2)^M}\,dr < +\infty$. *Allora*

$$< \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 f \,|\, \phi >= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(r) \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r}(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r}\phi(x))dx\,, \quad \forall\, \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Esempio 2.1. Sia $n = 2$. La funzione $x \longrightarrow \ln r, x \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ è tale che $\exists M > 0$, $\int\limits_0^{+\infty} \frac{|\ln r|}{(1+r^2)^M}\,dr < +\infty$, perciò è una distribuzione temperata di tipo funzione; applicando il teorema 2.2.1 otteniamo

$$< (\partial_1^2 + \partial_2^2)(\ln r) \,|\, \phi >= \int\limits_0^{+\infty} \ln r \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\partial}{\partial r} \int\limits_0^{2\pi} \phi\, d\theta)dr =$$

$$= - \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial r}(\int\limits_0^{2\pi} \phi\, d\theta)dr = 2\pi\phi(0)\,.$$

Perciò $(\partial_1^2 + \partial_2^2)(\ln r) = 2\pi\delta$.

Esempio 2.2. Sia $n > 2$. La funzione $x \longrightarrow r^{2-n}, x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ è tale che $\exists M > 0$, $\int\limits_0^{+\infty} \frac{|r^{2-n}|}{(1+r^2)^M}\,dr < +\infty$, perciò è una distribuzione temperata di tipo funzione; applicando il teorema 2.2.1 otteniamo

$$< (\sum_{j=i}^{n} \partial_j^2) r^{2-n} \,|\, \phi >=$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} r^{2-n} \frac{\partial}{\partial r}(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r}(\int\limits_0^{\pi} \dots \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \phi \cdot (\sin\theta_1)^{n-2} \dots \sin\theta_{n-2} d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}))dr =$$

$$= -(2-n) \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial r}(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r}(\int\limits_0^{\pi} \dots \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \phi \cdot (\sin\theta_1)^{n-2} \dots \sin\theta_{n-2} d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}))dr =$$

$$= -(2-n)\phi(0) \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial r}(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r}(\int\limits_0^{\pi} \dots \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} (\sin\theta_1)^{n-2} \dots \sin\theta_{n-2} d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}))dr.$$

Per calcolare questo integrale bisogna ricorrere alla funzione Beta di Eulero:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \quad \text{con } p,q \in \mathbb{C}, \Re e\, p > 0, \Re e\, q > 0\,.$$

Essa gode di quetsa proprietà: $\quad B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\,.$
Sia $m \in \mathbb{N}$. Allora

$$\int_0^{\pi} (\sin\theta)^m d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^m d\theta =$$

(cambio variabile $t = \cos^2\theta$, $d\theta = -\dfrac{dt}{2\sqrt{t}\,\sqrt{1-t}}$)

$$= 2\int_1^0 (1-t)^{\frac{m}{2}}(-\frac{1}{2\sqrt{t}\,\sqrt{1-t}})dt = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{m-1}{2}}dt = \int_0^1 t^{\frac{1}{2}-1}(1-t)^{\frac{m+1}{2}-1}dt =$$

$$= B(\frac{1}{2}, \frac{m+1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)} = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}\,.$$

Pertanto

$$\int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (\sin\theta_1)^{n-2} \dots \sin\theta_{n-2} d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} =$$

$$= 2\pi \cdot \pi^{\frac{n-2}{2}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(\frac{n-2}{2})\dots\Gamma(\frac{2}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{n-1}{2})\dots\Gamma(\frac{3}{2})} = 2\pi^{n-2}\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}\,.$$

Quindi

$$< (\sum_{j=i}^{n} \partial_j^2) r^{2-n} \,|\, \phi >= 2(2-n)\pi^{n-2}\frac{\phi(0)}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

poiché $n > 2$ si ha $\Gamma(\frac{n}{2}) = (\frac{n}{2}-1)\Gamma(\frac{n}{2}-1)$, pertanto

$$(\sum_{j=i}^{n} \partial_j^2) r^{2-n} = -\frac{4\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}\delta\,.$$

Ora mostriamo che E è una soluzione elementare. Infatti $\forall\, \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$:

- $n = 2$

$$< \Delta E \,|\, \phi > = < (\partial_1^2 + \partial_2^2) E \,|\, \phi > = < (\partial_1^2 + \partial_2^2)(\frac{1}{2\pi} \ln r) \,|\, \phi > = < \delta \,|\, \phi > \ .$$

- $n > 2$

$$< \Delta E \,|\, \phi > = < (\sum_{j=i}^{n} \partial_j^2)(-\frac{\Gamma(\frac{n}{2} - 1)}{4\pi^{\frac{n}{2}}} r^{2-n}) \,|\, \phi > = < \delta \,|\, \phi > \ .$$

Dunque E è soluzione elementare; se $\phi_1 \in C_0(\mathbb{R}^2)$, $\phi_2 \in C_0(\mathbb{R}^3)$, allora

$$u_1(x) = (E * \phi_1)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln \|x - y\| \cdot \phi_1(y) dy \,,$$

$$u_2(x) = (E * \phi_2)(x) = (-\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{4\pi^{\frac{3}{2}} r} * \phi_2)(x) = (-\frac{1}{4\pi r} * \phi_2)(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\phi_2(y)}{\|x - y\|} dy$$

sono i potenziali newtoniani soluzioni di $\Delta u = \phi_1$ ($n = 2$) e $\Delta u = \phi_2$ ($n = 3$).

2.3 L'operatore del calore

Sia $P(\partial_x, \partial_t)$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$) l'operatore del calore

$$P(\partial_x, \partial_t) = \partial_t - \Delta_x \,.$$

Osserviamo che $P(i\sigma, i\sigma_0) = i\sigma_0 - \sum\limits_{j=1}^{n} (i\sigma_j)^2 = i\sigma_0 + \|\sigma\|^2$.

Per ogni fissato $\sigma \neq 0$, $\sigma \longrightarrow \dfrac{1}{i\sigma_0 + \|\sigma\|^2} = \dfrac{i}{-\sigma_0 + i\,\|\sigma\|^2}$ appartiene a $\mathscr{O}_M(\mathbb{R})$, e quindi a $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

Osserviamo che vale

$$\mathscr{F}(\frac{1}{-x + i\varepsilon}) = -2\pi i e^{\varepsilon s} H(-s)$$

infatti

$$\mathscr{F}(e^{-\varepsilon s} H(s)) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixs} e^{-\varepsilon s} H(s) ds = \int_0^{+\infty} e^{s(-ix-\varepsilon)} ds = -\frac{1}{-ix - \varepsilon} = \frac{i}{-x + i\varepsilon}$$

così, sfruttando l'osservazione 9, si ottiene

$$i\mathscr{F}\left(\frac{1}{-x+i\varepsilon}\right)=\mathscr{F}(\mathscr{F}(e^{-\varepsilon s}H(s)))=2\pi e^{\varepsilon s}H(-s)\,.$$

Pertanto è

$$\frac{i}{-\sigma_0+i\left\|\sigma\right\|^2}=\mathscr{F}_t(e^{-\|\sigma\|^2t}H(t))$$

e quindi

$$e^{-\|\sigma\|^2t}H(t)=\mathscr{F}^{-1}_{\sigma_0}\left(\frac{i}{-\sigma_0+i\left\|\sigma\right\|^2}\right).$$

Poniamo allora

$$E(x,t)=\mathscr{F}^{-1}_{\sigma}(e^{-\|\sigma\|^2t}H(t))=\frac{H(t)}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^n}e^{i<x,\sigma>-\|\sigma\|^2t}d\sigma=(\text{cambio variabile } \sigma=-\eta)$$

$$=\frac{H(t)}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i<x,\eta>-\|\eta\|^2t}d\eta=\frac{H(t)}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i<x,\sigma>-\|\sigma\|^2t}d\sigma\,.$$

Risulta

$$E(x,t)=\frac{H(t)}{2^n\pi^{\frac{n}{2}}t^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}\,.$$

Verifichiamo che questa è una soluzione elementare relativa a $\partial_t-\Delta_x$.
Sicuramente essa è una funzione di classe C^∞ su $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}-\{(0,0)\}$, inoltre

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{E(x,t)}{1+t^2}dxdt=\frac{1}{2^n\pi^{\frac{n}{2}}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)t^{\frac{n}{2}}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}dx\right)dt=\frac{\pi}{2}\,.$$

Dunque $(x,t)\longrightarrow\dfrac{E(x,t)}{1+t^2}$ è sommabile su $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$; quindi $E\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$.
Considero $\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$; allora

$$<(\partial_t-\Delta_x)E(x,t)\,|\,\phi(x,t)>=-<E(x,t)\,|\,(D_t+\Delta_x)\phi(x,t)>=$$

$$=-\int_0^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^n}E(x,t)(D_t+\Delta_x)\phi(x,t)dx\right)dt=-\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^n}E(x,t)(D_t+\Delta_x)\phi(x,t)dx\right)dt\,.$$

È

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_\varepsilon^{+\infty}E(x,t)(D_t+\Delta_x)\phi(x,t)dx\right)dt=$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} E(x,t) D_t \phi(x,t) dt \right) dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} E(x,t) \Delta_x \phi(x,t) dx \right) dt \,.$$

Integrando per parti ottengo:

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} E(x,t) D_t \phi(x,t) dt = [E(x,t)\phi(x,t)]_{\varepsilon}^{+\infty} - \int_{\varepsilon}^{+\infty} D_t E(x,t) \phi(x,t) dt =$$

$$= -E(x,\varepsilon)\phi(x,\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{+\infty} D_t E(x,t) \phi(x,t) dt \,.$$

Dunque

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} E(x,t)(D_t + \Delta_x)\phi(x,t) dt \right) dx =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} E(x,\varepsilon)\phi(x,\varepsilon) dx - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} D_t E(x,t)\phi(x,t) dx \right) dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} E(x,t) \Delta_x \phi(x,t) dx \right) dt \,.$$

Il primo addendo dell'ultimo membro è uguale a

$$-\frac{1}{2^n \pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{\|x\|^2}{4\varepsilon}}}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}} \phi(x,\varepsilon) dx = (\text{ usando le coordinate sferiche } \theta_1 \dots \theta_{n-1},\ r = \|x\|)$$

$$= -\frac{1}{2^n \pi^{\frac{n}{2}}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}}}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}} \left(\int_0^{\pi} \dots \int_0^{2\pi} \phi(x,\varepsilon)(\sin\theta_1)^{n-2} \dots \sin\theta_{n-2} d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \right) r^{n-1} dr =$$

(cambiando variabile $u = \frac{r}{2\sqrt{\varepsilon}}$, $dr = 2\sqrt{\varepsilon} du$, $u^{n-1} = \frac{r^{n-1}\sqrt{\varepsilon}}{2^{n-1}\varepsilon^{\frac{n}{2}}}$)

$$= -\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{n-1} \left(\int_0^{\pi} \dots \int_0^{2\pi} \phi(x,\varepsilon)(\sin\theta_1)^{n-2} \dots \sin\theta_{n-2} d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \right) r^{n-1} du \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{n-1} du \cdot \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \phi(0,0) = -\phi(0,0)\,;$$

questo perchè $\frac{1}{2}\Gamma(\frac{n}{2}) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{n-1}du$.
Quindi

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} E(x,t)(D_t-\Delta_x)\phi(x,t)dt)dx =$$

$$= -\phi(0,0) - \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}(\int\limits_{\mathbb{R}^n} D_tE(x,t)\phi(x,t)dx)dt + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}(\int\limits_{\mathbb{R}^n} E(x,t)\Delta_x\phi(x,t)dx)dt\,.$$

Inoltre si ha che

$$\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}(\int\limits_{\mathbb{R}^n} E(x,t)\Delta_x\phi(x,t)dx)dt = \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_xE(x,t)\cdot\phi(x,t)dx)dt$$

Ma su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} - \{(0,0)\}$, E è una soluzione ordinaria di $(D_t - \Delta_x)v = 0$. Dunque

$$< (\partial_t - \Delta_x)E(x,t) \,|\, \phi(x,t) >= \phi(0,0) =< \delta_{x,t} \,|\, \phi(x,t) > \qquad \forall\, \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$$

e quindi $(\partial_t - \Delta_x)E = \delta$.
A questo punto, considerando per esempio $\phi \in C_0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, allora

$$u(x,t) = (E*\phi)(x,t) = \frac{1}{2^n\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^n} H(t-\tau)\frac{e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau^{\frac{n}{2}})}\phi(y,\tau)dyd\tau =$$

$$= \frac{1}{2^n\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau^{\frac{n}{2}})}\phi(y,\tau)dyd\tau$$

è soluzione di $(\partial_t - \Delta_x)u = \phi(x,t)$.

Appendice A

Spazi numerabilmente normati

Definizione A.1. Sia X uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) e siano $\| \quad \|_1$ e $\| \quad \|_2$ due norme per X. Si dice che la prima è più *debole* della seconda se $\exists\, c \in \mathbb{R}, c > 0$, tale che $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2 \quad \forall x \in X$.
In questo caso si dice anche che la seconda è più *forte* della prima.
Due norme si dicono *confrontabili* se una è più debole dell'altra.
Due norme si dicono *equivalenti* se ciascuna di esse è più debole dell'altra.

Esempio A.1. $C^1([0,1]) = \{f :\longrightarrow C, f \text{ è di classe } C^1\}$
$C^1([0,1])$ è uno spazio vettoriale e siano

$$\|f\|_1 = \max_{[0,1]} |f(x)| \quad , \quad \|f\|_2 = \max_{[0,1]} |f(x)| + \max_{[0,1]} |f'(x)|$$

$\| \quad \|_1$ e $\| \quad \|_2$ sono due sue norme e $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \quad \forall f \in C^1([0,1])$.
Dunque la prima norma è più debole della seconda; non sono però equivalenti poichè non vale il viceversa. Infatti mostriamo questo semplice controesempio; sia $f_n(x) = e^{-nx}$, $n = 1, 2, \ldots,$ $\|f_n\|_1 = 1$, $\|f_n\|_2 = 1 + n$ e quindi $\nexists\, c \in \mathbb{R}, c > 0$, tale che $\|f_n\|_2 \leqslant c\,\|f_n\|_1 \quad \forall\, f \in C^1([0,1])$.

Definizione A.2. Sia X uno spazio vettoriale e $\| \quad \|_1$ e $\| \quad \|_2$ due norme per X. Esse si dicono *concordanti* se ogni successione in X, che sia di Cauchy sia rispetto ad $\| \quad \|_1$ che a $\| \quad \|_2$ e che converga a zero rispetto ad una delle due norme, converga a zero anche rispetto all'altra.

Definizione A.3. Sia X uno spazio vettoriale e sia $\| \ \|_1, \| \ \|_2, \dots$ un' infinità numerabile di norme per X. Sia $\| \ \|_n$ più debole di $\| \ \|_{n+1}$ e siano $\| \ \|_n$ e $\| \ \|_{n+1}$ concordanti $\forall n \in N$. Poniamo $V_{\varepsilon,n}(x) = \{y \in X, \ \|y-x\|_n < \varepsilon\}$ con $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, e $\mathscr{B} = \{\varnothing, V_{\varepsilon,n}(x)$ con $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}, x \in X\}$. Allora $\mathscr{B}$ è base di una topologia per X, ed X munito di questa topologia si denota con $(X; \| \ \|_1, \| \ \|_2, \dots)$ e si chiama *spazio numerabilmente normato.*

Osservazione 11. Affinché la definizione sia ben posta occorre provare che $\mathscr{B}$ è base di una topologia. La condizione neccessaria e sufficiente per cui $\mathscr{B}$ sia base per una topologia per X è:

1) $\varnothing \in \mathscr{B}$

2) $X = \bigcup\limits_{B \in \mathscr{B}} B$

3) $B_1, B_2 \in \mathscr{B}, x \in B_1 \cap B_2 \Longrightarrow \exists \, B_3, x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

Per ipotesi $\| \ \|_n$ è più debole di $\| \ \|_n$ pertanto $\forall \, n \in \mathbb{N} \, \exists \, C_n$ tale che $\|x\|_n \leqslant C_n \|x\|_{n+1} \forall \, x \in X$; non è restrittivo porre $C_n = 1 \, \forall \, n \in \mathbb{N}$ poiché le norme $\| \ \|_{n+1}$ e $C_n \| \ \|_{n+1}$ sono equivalenti pertanto possiamo sostituire $(X, \| \ \|_{n+1})$ con $(X, C_n \| \ \|_{n+1})$.

1) $\varnothing \in \mathscr{B}$ per ipotesi

2) $x \in V_{\varepsilon,n}(x)$ e quindi $X = \bigcup\limits_{x \in X \, , \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \, , n \in \mathbb{N}} V_{\varepsilon,n}(x) = \bigcup\limits_{B \in \mathscr{B}} B$

3) Sia $x \in V_{\varepsilon_1,n_1}(a) \cap V_{\varepsilon_2,n_2}(b)$, proviamo l'esistenza di un $V_{\varepsilon_3,n_3}(x)$ tale che $V_{\varepsilon_3,n_3}(x) \subset V_{\varepsilon_1,n_1}(a) \cap V_{\varepsilon_2,n_2}(b)$.
Sia $0 < \varepsilon_3 \leq \min\{\varepsilon_1 - \|x-a\|_{n_1}, \varepsilon_2 - \|y-b\|_{n_2}\}$ e $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$; così se $y \in V_{\varepsilon_3,n_3}(x)$ allora $\|y-x\|_{n_3} < \varepsilon_3$, e quindi

$$\|y-a\|_{n_1} \leq \|y-x\|_{n_1} + \|x-a\|_{n_1} \leq \|y-x\|_{n_3} + \|x-a\|_{n_1} <$$

$$< \varepsilon_3 + \|x-a\|_{n_1} \leq \varepsilon_1$$

$$\|y-b\|_{n_2} \leq \|y-x\|_{n_2} + \|x-b\|_{n_2} \leq \|y-x\|_{n_3} + \|x-b\|_{n_2} <$$

$$< \varepsilon_3 + \|x - b\|_{n_2} \leq \varepsilon_2 \,;$$

perciò $y \in V_{\varepsilon_1,n_1}(a) \cap V_{\varepsilon_2,n_2}(b)$, così $x \in V_{\varepsilon_3,n_3}(x) \subset V_{\varepsilon_1,n_1}(a) \cap V_{\varepsilon_2,n_2}(b)$.

Definizione A.4. Sia $(X; \| \quad \|_1, \| \quad \|_2, \dots)$ uno spazio numerabilmente normato.Una successione $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X, si dice di Cauchy se essa è di Cauchy rispetto a $\| \quad \|_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$; si dice convergente se $\exists\, x \in X$, $x_k \underset{k\to\infty}{\overset{\| \|_n}{\longrightarrow}} x \;\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Ogni successione convergente è di Cauchy ma non viceversa.
Lo spazio si dice completo $\Longleftrightarrow$ ogni successione di Cauchy è convergente.

Osservazione 12. $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ in $(X; \| \quad \|_1, \| \quad \|_2, \dots) \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}$ e $\forall\, p \in \mathbb{N}\, \exists\, n(\varepsilon,p) \in \mathbb{N}$ tale che $\|x - x_n\|_p < \varepsilon$ per $n > n(\varepsilon,p)$ cioè $x_n \in V_{\varepsilon,p}(x)\, \forall\, n > n(\varepsilon,p)$.

Definizione A.5. Siano $(X; \| \quad \|_1, \| \quad \|_2, \dots)$ e $(X'; \| \quad \|'_1, \| \quad \|'_2, \dots)$ due spazi numerabilmente normati sullo stesso campo K. Una applicazione $T : X \longrightarrow X'$ si dice lineare se

$$T(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1T(x_1) + a_2T(x_2) \quad \forall\, x_1x_2 \in X \quad \forall\, a_1a_2 \in K$$

Essa si dice continua nel punto $x_0 \in X$ se $\forall\, V'_{\varepsilon,n}(0)\; \exists\, V_{\delta,p}(0)$ con $\delta = \delta(\varepsilon, n)$, $p = p(\varepsilon, n)$ tali che $x - x_0 \in V_{\delta,p}(0) \Longrightarrow T(x - x_0) \in V'_{\varepsilon,n}(0)$.

Osservazione 13. Se T è continua in un punto di X allora T è continua su tutto X.

Teorema A.0.1. *Siano $(X; \| \quad \|_1, \| \quad \|_2, \dots)$ e $(X'; \| \quad \|'_1, \| \quad \|'_2, \dots)$ due spazi numerabilmente normati sullo stesso campo K e sia $T : X \longrightarrow X'$ lineare. La condizione neccessaria e sufficiente affinché T sia continua è che $\forall\, p \in \mathbb{N}\, \exists\, q(p) \in \mathbb{N}$ tale che T sia continua da $(X, \| \quad \|_{q(p)})$ a $(X', \| \quad \|'_p)$.*

Teorema A.0.2. *Siano $(X; \| \quad \|_1, \| \quad \|_2, \dots)$ e $(X'; \| \quad \|'_1, \| \quad \|'_2, \dots)$ due spazi numerabilmente normati sullo stesso campo K e sia
$T : X \longrightarrow X'$ lineare. T è continua $\Longleftrightarrow x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ in
$(X; \| \quad \|_1, \| \quad \|_2, \dots) \Longrightarrow T(x_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ in $(X'; \| \quad \|'_1, \| \quad \|'_2, \dots)$.*

Dimostrazione. $\Longrightarrow$) Fissato un $V'_{\varepsilon,p}(0)$ con ε, p arbitrari, allora per la linearità di T $\exists\, V_{\delta,p}(0)$ tale che $x \in V_{\delta,p}(0) \Longrightarrow T(x) \in V'_{\varepsilon,p}(0)$.
Se $x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ in $(X;\, \|\ \ \|_1,\, \|\ \ \|_2,\, \ldots)$ allora $\exists\, k_{\varepsilon,p} \in \mathbb{N}$ tale che $x_k \in V_{\delta,p}(0)\, \forall\, k > k_{\varepsilon,p}$ (osservazione 12), pertanto se $k > k_{\varepsilon,p}$ poiché T è continua si ottiene che $T(x_k) \in V'_{\varepsilon,p}(0) \Longrightarrow T(x_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ in $(X';\, \|\ \ \|'_1,\, \|\ \ \|'_2,\, \ldots)$.
$\Longleftarrow$) Supponiamo $x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ in $(X;\, \|\ \ \|_1,\, \|\ \ \|_2,\, \ldots) \Longrightarrow T(x_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ in $(X';\, \|\ \ \|'_1,\, \|\ \ \|'_2,\, \ldots)$. Vogliamo provare che T è continua, supponiamo per assurdo che non lo sia, allora esiste un p tale che per nessun q T è continua da $(X,\, \|\ \ \|_q)$ a $(X',\, \|\ \ \|'_p)$; esiste allora $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X tale che $\|T(x_k)\|'_p > k\, \|x_k\|_k$ cioè $\left\|T(\frac{x_k}{k\|x_k\|_k})\right\|'_p > 1$. Fissato un arbitrario $m \in \mathbb{N}$, per $k > m$ si ha $\left\|\frac{x_k}{k\|x_k\|_k}\right\|_m = \frac{\|x_k\|_m}{k\|x_k\|_k} \leq \frac{\|x_k\|_k}{k\|x_k\|_k} = \frac{1}{k}$ pertanto ponendo $y_k = \frac{x_k}{k\|x_k\|_k}$ si ha che $\|y_k\|_m \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$, così $y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ in $(X;\, \|\ \ \|_1,\, \|\ \ \|_2,\, \ldots)$; per l'ipotesi di continuitá su T sarà $T(y_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ in $(X';\, \|\ \ \|'_1,\, \|\ \ \|'_2,\, \ldots)$, in particolare $\|T(y_k)\|'_p \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ma è $\|T(y_k)\|'_p > 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$ si è così raggiunto l'assurdo. $\square$

Teorema A.0.3. *Lo spazio numerabilmente normato $(X;\, \|\ \ \|_1,\, \|\ \ \|_2,\, \ldots)$ è completo $\Longleftrightarrow X = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X}^{\|\ \ \|_n}$.*

Definizione A.6. Si definisce *duale* dello spazio normato $(X,\, \|\ \ \|)$, lo spazio vettoriale dei funzionali lineari continui su $(X,\, \|\ \ \|)$, cioè le applicazioni continue $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$. Si definisce *duale* dello spazio numerabilmente normato $(X;\, \|\ \ \|_1,\, \|\ \ \|_2,\, \ldots)$, lo spazio vettoriale dei funzionali lineari continui su $(X;\, \|\ \ \|_1,\, \|\ \ \|_2,\, \ldots)$, cioè le applicazioni continue $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$.
Il duale è sempre uno spazio completo.

Teorema A.0.4. *Sia $(X;\, \|\ \ \|_1,\, \|\ \ \|_2,\, \ldots)$ uno spazio numerabilmente normato. Sia X'_p il duale di $(X,\, \|\ \ \|_p)$. Se $f \in X'_p$, posto*

$$\|f\|'_p = \sup_{\|x\|_p \leqslant 1} |f(x)|$$

$\|\ \ \|'_p$ è una norma e $(X'_p,\, \|\ \ \|'_p)$ è uno spazio di Banach.
Inoltre $X'_p \subseteq X'_{p+1}\, \forall\, p \in \mathbb{N}$ e, se X' è il duale di $(X;\, \|\ \ \|_1,\, \|\ \ \|_2,\, \ldots)$ risulta $X'_p = \bigcup_{p=1}^{\infty} X'_p$.

Appendice B

Spazi $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$

Definizione B.1. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ è detto *multi-indice*, e $|\alpha| = \sum_i^n \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ è detta *lunghezza* di α. Se α e β sono due multi-indici, scrivendo $\alpha \geq \beta \, (\alpha > \beta)$ si intende $\alpha_i \geq \beta_i \, (\alpha_i > \beta_i)$ $\forall i = 1, 2, \dots, n$. Se $x \in \mathbb{R}^n$ poniamo $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$. Siano $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, poniamo $D^\alpha f = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$. Vale la formula di Leibnitz:

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} f \cdot D^\beta g \, .$$

.

Spazio $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ è lo spazio vettoriale delle funzioni a *"decrescenza rapida"*.

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \, x^\alpha D^\beta f(x) \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} 0 \, \forall \alpha, \beta \text{ multi-indici}\}$$

Sia $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ poniamo, per $p \in \mathbb{N}$,

$$\|f\|_p = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{|\alpha| \leq p} (1 + \|x\|)^p |D^\alpha f(x)|$$

$\| \ \|_p$ è una norma e $\|f\|_p \leq \|f\|_{p+1}$ $\forall p \in \mathbb{N}$.
Indichiamo con $\mathscr{S}_p(\mathbb{R}^n)$ lo spazio vettoriale delle funzioni $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ di classe C^p e con $\|f\|_p \leqslant +\infty$. Proviamo che $\mathscr{S}_p(\mathbb{R}^n)$ è completo.
Sia $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una succesione di $\mathscr{S}_p(\mathbb{R}^n)$ di Cauchy rispetto a $\| \ \|_p$; allora

$$\lim_{\mu,\nu\to\infty} \|f_\mu - f_\nu\|_p = \lim_{\mu,\nu\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{|\alpha|\leqslant p} (1 + \|x\|)^p |D^\alpha f_\mu(x) - D^\alpha f_\nu(x)| = 0 \,.$$

Così ogni successione $(D^\alpha f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ con $|\alpha| \leqslant p$ converge uniformemente su $\mathbb{R}^n$, e quindi $\exists\, f_0$ di classe C^p e tale che $D^\alpha f_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} D^\alpha f_0$ uniformemente su $\mathbb{R}^n$.
$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\, \exists\, m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $(1 + \|x\|)^p |D^\alpha f_m(x) - D^\alpha f_\mu(x)| < \varepsilon$
per $|\alpha| \leqslant p$, $m, \mu > m_\varepsilon$ e $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.
Ora si osserva che se una successione è di Cauchy rispetto ad una certa norma, allora la successione delle norme è limitata, quindi $\exists\, C \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\|f_m\|_p = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{|\alpha|\leqslant p} (1 + \|x\|)^p |D^\alpha f_m(x)| < C \quad \forall\, m \in \mathbb{N} \,.$$

Da questa disuguaglianza e dalla precedente, risulta

$$(1+\|x\|)^p |D^\alpha f_0(x)| \leqslant (1+\|x\|)^p |D^\alpha f_0(x) - D^\alpha f_m(x)| + (1+\|x\|)^p |D^\alpha f_m(x)| \leqslant \varepsilon + C$$

con $m > m_\varepsilon$, $|\alpha| \leqslant p$ e $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$; per l'arbitrarietà di ε segue $\|f_0\|_p \leqslant C$, e quindi $f_0 \in \mathscr{S}_p(\mathbb{R}^n)$.
Infine da $(1+\|x\|)^p |D^\alpha f_m(x) - D^\alpha f_0(x)| \leqslant \varepsilon$ con $m > m_\varepsilon$, $|\alpha| \leqslant p$ e $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ segue $\|f_m - f_0\|_p \leqslant \varepsilon$ e quindi $f_m \overset{\| \ \|_p}{\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}} f_0$. Dunque $\mathscr{S}_p(\mathbb{R}^n)$ è completo.
Proviamo ora che le norme $\| \ \|_p$ sono concordanti.
Sia $p < q$ ed $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una succesione di $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, di Cauchy rispetto a $\| \ \|_q$ e convergente a zero rispetto a $\| \ \|_p$; poiché $(\mathscr{S}_q(\mathbb{R}^n), \| \ \|_q)$ è completo $\exists\, f_0 \in \mathscr{S}_q(\mathbb{R}^n)$ tale che $\|f_m - f_0\|_q \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$; ma $\|f_m\|_p \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e quindi $f_m(x) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$; allora deve essere $f_0 = 0$ e quindi $\|f_m\|_q \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ciò prova che le norme $\| \ \|_q$ e $\| \ \|_p$ sono concordanti.
Ora poiché $\mathscr{S}_p(\mathbb{R}^n)$ è completo rispetto a $\| \ \|_p$, $\overline{\mathscr{S}_p(\mathbb{R}^n)}^{\| \ \|_p}$ è un sottospazio

di $\mathscr{S}_p(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \bigcap\limits_{p=1}^{\infty} \mathscr{S}_p(\mathbb{R}^n)$ e $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset \overline{\mathscr{S}_p(\mathbb{R}^n)}^{\|\ \|_p} \quad \forall\, p$, allora si ha

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{p=1}^{\infty} \overline{\mathscr{S}_p(\mathbb{R}^n)}^{\|\ \|_p}.$$

Pertanto per il teorema A.0.3 $(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n); \|\ \ \|_1, \|\ \ \|_2, \dots)$ è uno spazio numerabilmente normato completo, che sarà denotato con $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Limiti induttivi e spazio $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$

Sia E uno spazio vettoriale sul campo dei complessi. Supponiamo che esista una successione di sottospazi $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ thale che

- $E = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k$;
- E_k è uno spazio numerabilmente normato e completo per ogni $k \in \mathbb{N}$;
- $E_k \subset E_{k+1}$ e l'immersione è continua per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Possiamo allora indurre una topologia su E (la topologia di limite induttivo numerabile stretto di spazi numerabilmente normati completi) dicendo che un convesso $V \subset E$ è un intorno dell'origine se e solo se, per ogni $k \in \mathbb{N}$, $V \cap E_k$ è un intorno dell'origine in E_k (munito della sua topologia). Scriveremo allora che $E = \operatorname{ind} \lim\limits_{k\to\infty} E_k$.

Richiamiamo due risultati fondamentali sui limiti induttivi di spazi numerabilmente normati completi (si veda [2], Capitolo 13).

Teorema B.0.5. *Sia $E = \operatorname{ind} \lim\limits_{k\to\infty} E_k$, dove per ogni $k \in \mathbb{N}$ E_k è uno spazio numerabilmente normato e completo. Allora E è completo.*

Teorema B.0.6. *Sia $E = \operatorname{ind} \lim\limits_{k\to\infty} E_k$, dove per ogni $k \in \mathbb{N}$ E_k è uno spazio numerabilmente normato e completo. Allora una applicazione lineare $T : E \to \mathbb{C}$ è continua se e solo se è continua da E_k a $\mathbb{C}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.*

Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un compatto. Poniamo

$$C_K^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ \mathrm{supp} f \subseteq K\}$$

Se $f \in C_K^\infty(\mathbb{R}^n)$ e sia $p \in \mathbb{N}$. Poniamo ancora

$$\|f\|_{p,K} = \max_{x\in K} \max_{|\alpha|\leq p} |D^\alpha f(x)|.$$

Allora $\| \quad \|_{p,K}$ é una norma e $\|f\|_{p,K} \leq \|f\|_{p+1,K}$ $\forall p \in \mathbb{N}$.
Si verifica che $(C_K^\infty(\mathbb{R}^n); \| \quad \|_1, \| \quad \|_2, \dots)$ è uno spazio numerabilmente normato completo, che sarà denotato con $\mathscr{D}_K(\mathbb{R}^n)$.

Consideriamo ora una successione $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di aperti limitati tali che

i) $\Omega_k \subset K_k := \bar{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$;

ii) $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$.

Poniamo allora $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) :=$ ind $\lim_{k\to\infty} \mathscr{D}_{K_k}(\mathbb{R}^n)$. Dunque $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ è lo spazio delle funzioni $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con la topologia del limite induttivo. Si dimostra che la topologia non dipende dalla scelta della successione $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ che verifica i) e ii).

Moltiplicazione per una funzione

Sia Φ uno dei due spazi $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Una funzione $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice *moltiplicatore per* Φ se:

1) $\forall\, \phi \in \Phi, f\phi \in \Phi$

2) l'applicazione $m : \begin{matrix}\Phi & \longrightarrow & \Phi \\ \phi & \longmapsto & f\phi\end{matrix}$ è continua (cioè $\phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\Phi} 0 \Longrightarrow f\phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\Phi} 0$)

- Sia $\Phi = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\forall\, \alpha$ multi-indice $\exists\, C_\alpha \in \mathbb{R}, C_\alpha \geqslant 0$ e $p_\alpha \in \mathbb{N}$ tali che $|D^\alpha f(x)| \leqslant C_\alpha(1 + \|x\|)^{p_\alpha}$, allora f è un moltiplicatore per $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Infatti se $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ sicuramente $f\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$; per $|\alpha| \leqslant p$ si ha:

$$(1+\|x\|)^p |D^\alpha(f(x)\phi(x))| \leqslant \sum_{\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} (1+\|x\|)^p |D^{\alpha-\beta} f(x)| \cdot |D^\beta \phi(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}C_{\alpha-\beta}(1+\|x\|)^{p+p_{\alpha-\beta}}|D^\beta\phi(x)| \leqslant (\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}C_{\alpha-\beta})\,\|\phi\|_{p+q}$$

con $q = \max_{\beta\leq\alpha} p_{\alpha-\beta}$, allora $\exists\, C_p$ costante tale che $\|f\phi\|_p \leq C_p\,\|\phi\|_p$, e quindi $f\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, inoltre $\phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)} 0 \Longrightarrow f\phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)} 0$.

- Sia $\Phi = \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ allora f è un moltiplicatore per $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Infatti se $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ sicuramente $f\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$; per $|\alpha| \leqslant p$ si ha:

$$|D^\alpha(f(x)\phi(x))| \leqslant \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\max_K|D^{\alpha-\beta}f(x)|\cdot\max_K|D^\beta\phi(x)|$$

ma $\max_K|D^{\alpha-\beta}f(x)| \leq C_{\alpha-\beta}$ quindi $|D^\alpha(f(x)\phi(x))| \leqslant (\sum\binom{\alpha}{\beta}C_{\alpha-\beta})\,\|\phi\|_p$. Dunque $\exists\, C_p$ costante tale che $\|f\phi\|_p \leq C_p\,\|\phi\|_p$, perciò $\phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)} 0 \Longrightarrow f\phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)} 0$.

Definizione B.2. Si definisce $\mathscr{O}_M(\mathbb{R}^n)$ come lo spazio vettoriale delle funzioni $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tali che esistono due costanti $C_{\alpha,f}$ e $p_{\alpha,f}$ tali che

$$|D^\alpha f(x)| \leqslant C_{\alpha,f}(1+\|x\|)^{p_{\alpha,f}} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Pertanto ogni elemento di $\mathscr{O}_M(\mathbb{R}^n)$ è un moltiplicatore per $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Derivazione

La derivazione è ovviamente lineare.

- Sia $\Phi = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Se $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ allora anche $D^\alpha\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\,\forall\,\alpha$ multi-indice. Inoltre osservando la definizione di $\|\ \ \|_p$ si ottiene subito la relazione $\|D^\alpha\phi\|_p \leqslant \|\phi\|_{p+|\alpha|}$ dalla quale segue subito che $\phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)} 0 \Longrightarrow D^\alpha\phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)} 0$. Pertanto l'operazione di derivazione è continua da $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ in sé.

- Sia $\Phi = \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Se $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ allora anche $D^\alpha\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\forall\,\alpha$ multi-indice. Inoltre osservando la definizione di $\| \quad \|_p$ si ottiene subito la relazione $\|D^\alpha\phi\|_p \leqslant \|\phi\|_{p+|\alpha|}$. Pertanto analogamente a sopra l'operazione di derivazione è continua da $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ in sé.

Trasformazione di Fourier

- Sia $\Phi = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Sia $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. La trasformata di Fourier di f è definita da:

$$(\mathscr{F}(f))(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>} f(x)dx\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

  Si dimostra che $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \implies \widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, inoltre in questo caso si ha che $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>}\widehat{f}(\xi)d\xi$. Questo mi permette di dire che l'operazione $\mathscr{F}$ è suriettiva, perché preso un qualsiasi $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, posto $g(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} f(\xi)d\xi$ risulta $\mathscr{F}(g) = f$. È anche iniettiva. $\mathscr{F}$ è quindi una applicazione $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow[su]{1-1} \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$; è anche lineare e continua.

- Sia $\Phi = \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Su questo spazio la trasformata di Fourier non è invertibile, infatti l'unica funzione $f \in C_0^\infty$, quindi a supporto compatto, la cui trasformata di Fourier abbia ancora supporto compatto è $f = 0$, la funzione nulla.

Bibliografia

[1] B.Pini, *Lezioni sulle distribuzioni 1.Distribuzioni temperate* CLUEB, Bologna, 1979.

[2] F. Trèves, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels.* Dover Publications Inc., Mineola New York, 2006.

[3] C. Zuily, *Problems in Distributions and Partial Differential Equations.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Hermann, Paris, 1988.