Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

TEORIA DELL' ELASTICITÁ

Tesi di Laurea in Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
SANDRO GRAFFI

Presentata da:
ALVISE TRAMONTIN

II Sessione
Anno Accademico 2010-2011

Indice

Capitolo 1

Prefazione

1.1 Guida alla Tesi

Prima di cominciare vorrei dare al lettore una specie di mappa del percorso che sta per affrontare.

Queste poche pagine sono dedicate ad uno studio statico della teoria dell'elasticità, l'approcio è quello comune ai corsi di fisica dapprima si studia il moto di un corpo elastico (con un approcio basato sulla cinematica del punto) in un intorno definito, (come in meccanica razionale) e si mettono in evidenza le differenze tra il corpo rigido ideale e quello elastico introducendo così il **Tensore delle Deformazioni** che viene descritto sia da un punto di vista geometrico che fisico anche mediante alcuni semplici esempi .
Segue (nella seconda metà del capitolo 2 a partire dal paragrafo 3) lo studio dell'equilibrio di un corpo elastico che porta all'introduzione delle importantissime **formule di Cauchy** e del **Tensore degli Sforzi**.
Nel secondo capitolo, infine, si raccolgono i frutti degli studi appena fatti mettendo in relazione gli sforzi interni e le deformazioni di un corpo elastico, si introduce la **Legge di Hooke**,il concetto di corpo isotropo le costanti elastiche **Modulo di Young** e **Coefficiente di Poisson**, le costanti di **Lamè** e si scrivono i sistemi di equazioni che permettono di ricavare gli sforzi dalle

deformazioni e viceversa mettendo in evidenza l'importanza degli invarianti lineari dei due tensori.
Gli ultimi due paragrafi sono dedicati a questioni più pratiche che teoriche si vedono i limiti che si presentano, nel mondo reale, per le costanti elastiche si fa un breve cenno al caso dei fluidi trattati come corpi isotropi e si danno degli esempi trattando il caso dei gas perfetti e dei liquidi.
Tutti gli argomenti sono trattati, quando possibile, nel modo più generale e con un lessico, spero, comprensibile a chiunque ha confidenza con le materie scentifiche .
Preciso che tutta la trattazione segue fedelmente il libro di Enrico Persico citato nella bibliografia.
Non mi resta che augurare una buona lettura a chi decida di supportare i proprii studi con questa tesi e auguragli una buona lettura.

Capitolo 2

Teoria dell'elasticità

2.1 Generalità

É noto che i corpi solidi non sono mai completamente rigidi, come si suppone durante lo studio del loro moto in meccanica razionale.
Lo scopo di questo scritto è proprio quello di analizzare come, sotto l'azione di forze applicate, questi corpi si deformino.
Tali deformazioni, trascurabili in certi ordini di fenomeni, sono invece un interessante oggetto di studio per la loro entità, come nel caso delle molle, o per il loro collegamento a questioni di resistenza alla rottura, come nel caso della deformazione delle travi o la resistenza di un ponte.
Lo studio di queste deformazioni, in relazione alle forze che le producono, è a tutt' oggi oggetto principale della scienza delle costruzioni che affonda le sue radici nella teoria dell' elasticità.
Le deformazioni si dicono elastiche se scompaiono al cessare delle forze che le hanno prodotte, ed il corpo su cui agivano tali forze si dirà corpo elastico altrimenti le deformazioni si dicono permanenti.
Nella maggior parte dei solidi le deformazioni, se inferiori ad un certo limite, sono elastiche e in queste poche pagine, tratteremo solo situazioni in cui il limite in questione non viene superato anzi in particolari casi in cui un corpo possa subire grosse deformazioni elastiche limiteremo questa sua capacità

ponendo condizioni più restrittive.

2.2 Le deformazioni

2.2.1 Analisi delle deformazioni nell' intorno di un punto

Iniziamo ora lo studio puramente geometrico della distribuzione degli spostamenti e delle deformazioni di un corpo elastico, senza preoccuparci di considerare le forze che hanno provocato tali cambiamenti.
Inquesta trattazione seguiremo da vicino l' esposizione del classico trattato di Enrico Persico (introduzione alla fisica matematica) che viene citato nella bibliografia.
Sia P(x,y,z) un punto del corpo non deformato (ossia nella configurazione naturale) e, $P^*(x^*, y^*, z^*)$ la nuova posizione di P dopo la deformazione.
Lo spostamento del punto P sarà allora una funzione di $\mathbb{R}^3$ a valori in $\mathbb{R}^3$ così definita

$$s : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3 Dove : s = P - P^*$$

e indicheremo con s_1, s_2, s_3 le sue componenti secondo gli assi X, Y, Z.
Possiamo studiare allora il moto di un punto $Q \in B_{(P,r)}$ rispetto a P ponendo in P un nuovo sistema di riferimento ortogonale ξ_1, ξ_2, ξ_3 rispettivamente parallele ad X, Y, Z (ricordiamo che la notazione $Q \in B_{(P,r)}$ significa che Q appartiene alla sferetta di centro P e raggio r)
Linearizziamo ora la funzione S(Q) supponendo che sia $C^1(\mathbb{R}^3)$ dato che S(Q) è differenziabile si può scrivere considerando irrilevanti i termini di ordine superiore al primo l' equazione vettoriale:

$$(1) S(\overrightarrow{Q}) = S(\overrightarrow{P}) + \Im \mid_P (s))(\overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P}) + o(\omega^2)$$

dove con $\Im \mid_P (S)$ si intende la matrice iacobiana della funzione S(Q) calcolata in P.
Osserviamo inoltre che dalla precedente scelta del nuovo sistema di riferimento $(Q - P)$ è un vettore che ha per componenti (ξ_1, ξ_2, ξ_3).
L'equazione vettoriale (1) da perciò origine a un sistema de 3 equazioni scalari così definite:

$$(2) \begin{cases} S_1 = s_1 + \frac{\partial s_1}{\partial x} \mid_P \xi_1 + \frac{\partial s_1}{\partial y} \mid_P \xi_2 + \frac{\partial s_1}{\partial z} \mid_P \xi_3 \\ S_2 = s_2 + \frac{\partial s_2}{\partial x} \mid_P \xi_1 + \frac{\partial s_2}{\partial y} \mid_P \xi_2 + \frac{\partial s_2}{\partial z} \mid_P \xi_3 \\ S_3 = s_3 + \frac{\partial s_3}{\partial x} \mid_P \xi_1 + \frac{\partial s_3}{\partial y} \mid_P \xi_2 + \frac{\partial s_3}{\partial z} \mid_P \xi_3 \end{cases}$$

Osserviamo ancora che se non si considera la traslazione di vettore $(s_1; s_2; s_3)$ la matrice associata al sistema (2) altro non è che la matrice iacobiana di s calcolata in P.
Questa matrice, (la iacobiana) verrà ora scomposta nella somma di due matrici mettendone così in evidenza la parte simmetrica che sarà l' oggetto del nostro studio.
Comiciamo innanzi tutto ad assumere una notazione più pratica cioè indicando con x_1, x_2, x_3 rispettivamente gli assi (x, y, z) e introduciamo le grandezze $\gamma_{i,k}$ e $\chi_{i,k}$

$$NOTAZIONE\text{: } \gamma_{i,k} = \frac{1}{2}(\frac{\partial s_i}{\partial x_k} + \frac{\partial s_k}{\partial x_i}) \text{ e con}$$

$$\chi_{i,k} = \frac{1}{2}(\frac{\partial s_i}{\partial x_k} - \frac{\partial s_k}{\partial x_i})$$

Notiamo che $\gamma_{i,k} = \gamma_{k,i}$ e anche che $\gamma_{i,i} = \frac{\partial s_i}{\partial x_i}$ mentre, $\chi_{i,i} = 0$ per cui la nostra matrice iacobiana viene scomposta in una matrice $\Gamma = (\gamma_{i,k})$ e una $\aleph = (\chi_{i,k})$ per i,k=1,2,3 dove:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} & \gamma_{1,3} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} & \gamma_{2,3} \\ \gamma_{3,1} & \gamma_{3,2} & \gamma_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\aleph = \begin{bmatrix} 0 & \chi_{1,2} & \chi_{1,3} \\ \chi_{2,1} & 0 & \chi_{2,3} \\ \chi_{3,1} & \chi_{3,2} & 0 \end{bmatrix}$$

Possiamo allora scrivere in forma matriciale la matrice iacobiana come somma di Γ e $\aleph$ come segue

$$(3) \Im\mid_P (s) = \Gamma + \aleph$$

Come vedremo nel prossimo paragrafo questa scomposizione è particolarmente importante perchè la matrice Γ regola il comportamento delle deformazioni mentre la matrice $\aleph$ da le indicazioni sulla rotazione del corpo.
Quindi il sistema (2), che derscrive il moto di un corpo elastico, ha tre componenti: la traslazione la rotazione come visto nello studio dei corpi rigidi in meccanica razionale e la deformazione. Il sistema (2) quindi si riscrive così

$$(4) \begin{cases} S_1 = s_1 + (\chi_{1,2}\xi_2 + \chi_{1,3}\xi_3) + \sum_{k=0}^{3} \gamma_{1,k}\xi_k \\ S_2 = s_2 + (\chi_{2,1}\xi_1 + \chi_{2,3}\xi_3) + \sum_{k=0}^{3} \gamma_{2,k}\xi_k \\ S_3 = s_3 + (\chi_{3,1}\xi_1 + \chi_{3,2}\xi_2) + \sum_{k=0}^{3} \gamma_{3,k}\xi_k \end{cases}$$

2.2.2 Tensore delle deformazioni

Concentriamo adesso la nostra attenzione sulla matrice $\Gamma = (\gamma_{i,j})$ per farlo poniamo il vettore di traslazione s=$(s_1; s_2; s_3) = (0; 0; 0)$ e consideriamo la matrice di rotazione $\aleph$ una matrice nulla.
Allora lo spostaqmento di un punto $Q \in B_{(P,r)}$ sarà dovuto alle sole $\gamma_{i,k}$ secondo la relazione che, scritta in forma compatta, risulta:

$$S_i = \sum_{k=1}^{3} (\gamma_{i,k}\xi_k) \quad \forall i := 1, 2, 3$$

Osserviamo che facendo variare (i:=1,2,3) si ottengono tre equazioni scalari che legano linearmente le componenti del vettore $S(Q) = (S_1; S_2; S_3)$ a quelle del vettore (P-Q)=($\xi_1; \xi 2; \xi 3$), e che ci dicono che le $\gamma_{i,k}$ sono le componenti di un tensore simmetrico chiamato **tensore delle deformazioni**.
Il tensore delle deformazioni qui definito è in realtà un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in sè.
Osserviamo ancora, che per tale linearità, possiamo considerare la deformazione totale come somma di tante deformazioni particolari che prenderemo in esame singolarmente.
Consideriamo in primo luogo una deformazione caratterizzata da una matrice del tipo

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

il sistema corrispondente si riduce quindi alla sola equazione

$$S(Q) = S_1 = \gamma_{1,1}\xi_1 \quad S_2 = S_3 = 0$$

e quindi il punto Q che prima dello spostamento aveva coordinate $(\xi_1, \xi_2; \xi_3)$ si sposterá nel punto Q^* di coordinate $\xi^* = (\xi_1(1+\gamma_{1,1}); \xi_2; \xi_3)$ ossia si sposterà parallelamente all' asse ξ_1, e quindi all' asse X, di una quantità proporzionale a ξ_1.
Ciò significa che tutti i segmenti paralleli allasse delle X si dilatano nel rapporto di $(1+\gamma_{1,1})$, mentre quelli ad essi ortogonali rimangono invariati. Tale deformazione è quindi una pura dilatazione lungo l'asse delle X, e $\gamma_{1,1}$ è chiamato coefficente di dilatazione lineare nel punto P nella direzione dell'asse X.
Riprendendo la notazione precedentemente introdotta, in modo analogo si

possono estendere queste considerazioni agli altri coefficenti di Γ asserendo che $\gamma_{i,i}$ è il coefficente di dilatazione lineare rispetto all'asse x_i

Consideriamo ora invece il caso in cui , la deformazione è caratterizzata da un tensore le cui componenti sono tutte nulle ad eccezione delle $\gamma_{2,3}$ e $\gamma_{3,2}$ per cui si avrà una matrice di deformaziono così costituita

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{2,3} \\ 0 & \gamma_{3,2} & 0 \end{bmatrix}$$

naturalmente per le osservazioni fatte in precedenza $\gamma_{2,3} = \gamma_{3,2}$ e il sistema associato diventa

$$S_1 = 0 \quad S_2 = \gamma_{2,3}\xi_3 \quad S_3 = \gamma_{3,2}\xi_2.$$

Il significato pratico di queste equazioni è che il nostro corpo elastico si deforma in un piano perpendicolarle all'asse x_1, e che questa deformazione non dipende in nessun modo da ξ_1.
Potremo quindi limitarci a studiare il fenomeno nel piano individuato da $(\xi_2; \xi_3)$.
In questo piano sia ora $A = (a; o) \quad con \quad a \in \mathbb{R}$ cioè A è un punto che giace sulla retta di direzione ξ_2 appartenente all'intorno considerato, A si sposterà per effetto della deformazione, sulla retta di equazione $\xi_3 = \gamma_{2,3}\xi_2$ quindi inclinata sull' asse ξ_2 di un angolo $\delta\varphi = arctg(\gamma_{2,3}) \simeq \gamma_{2,3}$.
Allo stesso modo l' asse ξ_3 si inclina di un angolo eguale ma in senso opposto, si può quindi dire che $2\delta\varphi = 2\gamma_{2,3}$ rappresenta il decremento che subisce, per effetto della deformazione, l'angolo $\widehat{\xi_2\xi_3}$.
Una deformazione di questo tipo si chiama **scorrimento parallelo** al piano (ξ_2, ξ_3). Analogamente si possono definire gli scorrimeni relativi agli altri piani coordinati: perciò le $\gamma_{i,k} \quad con \quad i \neq k$ vengono chiamate **coefficenti di scorrimento**.
Qualunque deformazione si può allora considerare come come sovrapposizio-

ne di tre dilatazioni parallele agli assi e di tre scorrimenti.

Osservazione: 1 *(Essendo il tensore delle deformazioni una matrice simmetrica)*$\Rightarrow$ $(\exists(\xi_1^0;\xi_2^0;\xi_3^0)$ *terna di versori ortoganali tali che il tensore delle deformazioni è diagonalizzabile nella base di* $\mathbb{R}^3$ *generata da* $(\xi_1^0;\xi_2^0;\xi_3^0)$

Tale terna viene chiamata sistema di assi principali e le quantità associate $\gamma_{i,k}^0$ con $i \neq k$ sono tutte nulle il tensore delle deformazioni si presenta come:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{1,1}^0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{2,2}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{3,3}^0 \end{bmatrix}$$

Quindi si può concludere che la più generale delle deformazioni può essere scomposta in tre dilatazioni lungo i tre assi principali.

Esempio: 1 *Diamo ora un semplice esempio per capire come una deformazione dovuta al semplice scorrimento rispetto al piano* $(\xi_2;\xi_3)$ *possa essere ricondotta mediante un' adeguata scelta degli assi principali* $(\xi_2^0;\xi_3^0)$ *a una dilatazione e una compressione (dilatazione negativa).*
Sceglieremo come nuovo sistema di riferimento le bisettrici degli angoli $\widehat{\xi_3\xi_2}$ *in questo modo* ξ_1^0 *coinciderà con* $\xi 1$ *la nuova base (di versori ortogonali) sarà*

$$\xi_1^0 = (\xi_1;0;0) \quad \xi_2^0 = (0;\frac{\xi_2+\xi_3}{\sqrt{2}};0) \quad \xi_3^0 = (0;0;\frac{-\xi_2+\xi_3}{\sqrt{2}})$$

Otteremo così le tre equazioni

$$S_1^0 = S_1 = 0$$

$$S_2^0 = \frac{S_2+S_3}{\sqrt{2}} = \frac{\gamma_{2,3}(\xi_2+\xi_3)}{\sqrt{2}} = \gamma_{2,3}\xi_2^0$$

$$S_3^0 = \frac{-S_2+S_3}{\sqrt{2}} = \frac{\gamma_{2,3}(\xi_2-\xi_3)}{\sqrt{2}} = -\gamma_{2,3}\xi_2^0$$

a cui è associata la matrice (tensore delle deformazioni)

$$\Gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\gamma^0_{2,2} = \gamma_{2,3}) & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma^0_{3,3} = -\gamma_{2,3}) \end{bmatrix}$$

che per quanto già detto rappresenta una deformazione composta solamente da una dilatazione lineare (rappresentata da $\gamma_{2,3}$) e una contrazione ($-\gamma_{2,3}$) rispetto agli assi principali scelti.

2.2.3 Formule di dilatazione del tensore delle deformazioni e dilatazione cubica

Cominciamo questo paragrafo introducendo il concetto di coseno direttore, (che dovrebbe essere già a chi abbia seguito almeno un corso di meccanica razionale), tuttavia visto che in precedenza non è mai stato definito (in questo testo) ne diamo ora una definizione

DEFINIZIONE 1 *Siano ξ_1, ξ_2, ξ_3 e $\xi^0_1, \xi^0_2, \xi^0_3$ due basi di versori ortogonali di $\mathbb{R}^3$ si definisce il coseno direttore $a_{i,k} = \xi_i \cdot \xi^0_k$ dove con $(\cdot)$ si intende l'operazione di prodotto scalare tra i versori ξ_i e ξ^0_k*

la seguente tabella chiarisce il concetto appena definito

	ξ_1	ξ_2	ξ_3
ξ^0_1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$
ξ^0_2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$
ξ^0_3	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$

Osserviamo che per come è definito il prodotto scalare, dato che le ξ_i e le ξ^o_i sono versori il coseno direttore $a_{i,k}$ altro non è che $\cos(\widehat{\xi_i \xi^0_k})$ cioè il coseno dell'angolo tra gli assi i-esimo e k-esimo dei due sistemi di riferimento.
Andiamo ora a vedere come da un sistema di assi principali si passa, conoscendo i coseni direttori, ad un altro sistema di riferimento ponendo particolare attenzione al fatto che la traccia della matrice Γ è invariante rispetto ai

cambiamenti di base.
IL sistema (5) descrive in modo esplicito il processo che si deve seguire per cambiare bese

$$(5)\begin{cases} \gamma_{1,1} = \gamma^0_{1,1}a^2_{1,1} + \gamma^0_{2,2}a^2_{2,1} + \gamma^0_{3,3}a^2_{3,1} \\ \gamma_{2,2} = \gamma^0_{1,1}a^2_{1,2} + \gamma^0_{2,2}a^2_{2,2} + \gamma^0_{3,3}a^2_{3,2} \\ \gamma_{1,1} = \gamma^0_{1,1}a^2_{1,3} + \gamma^0_{2,2}a^2_{2,3} + \gamma^0_{3,3}a^2_{3,3} \end{cases}$$

$$(5)\begin{cases} \gamma_{2,1} = \gamma_{1,2} = \gamma^0_{1,1}a_{1,2}a_{1,1} + \gamma^0_{2,2}a_{2,2}a_{2,1} + \gamma^0_{3,3}a_{3,2}a^2_{3,1} \\ \gamma_{2,3} = \gamma_{3,2} = \gamma^0_{1,1}a_{1,2}a_{1,3} + \gamma^0_{2,2}a_{2,2}a_{2,3} + \gamma^0_{3,3}a_{3,2}a^2_{3,3} \\ \gamma_{3,1} = \gamma_{1,3} = \gamma^0_{1,1}a_{1,1}a_{1,3} + \gamma^0_{2,2}a_{2,3}a_{2,1} + \gamma^0_{3,3}a_{3,1}a^2_{3,3} \end{cases}$$

Facciamo ora particolare attenzione alla quantita:

$$\begin{aligned} \gamma &= Tr(\Gamma) = Div(s) = \gamma_{1,1} + \gamma_{2,2} + \gamma_{3,3} = \\ &= \gamma^0_{1,1}(a^2_{1,1} + a^2_{1,2} + a^2_{1,3}) + \gamma^0_{2,2}(a^2_{2,1} + a^2_{2,2} + a^2_{2,3}) + \gamma^0_{3,3}(a^2_{3,1} + a^2_{3,2} + a^2_{3,3}) = \\ &= \gamma^0_{1,1} + \gamma^0_{2,2} + \gamma^0_{3,3} = Trac(\Gamma^0) \end{aligned}$$

Come anticipato, abbiamo dimostrato che la traccia del tensore delle deformazioni è invariante rispetto ai cambiamenti di base. Fisicamente la quantità γ ha un importantissimo significato e si chiama **coefficente di dilatazione cubica**, e come vedremo da indicazioni sulla variazione di volume di un corpo provocata dalle deformazioni.
Vediamo subito l'importanza del coefficente di dilatazione cubica, consideriamo come al solito la terna $\xi^0_1; \xi^0_2; \xi^0_3$; di assi principali ed un parallelepipedo di lati infinitesimamente piccoli e paralleli a tali assi che indicheremo con $d\xi^0_1; d\xi^0_2; d\xi^0_3$
Il suo volume prima della deformazione sarà dunque:

$$d\xi^0_1 d\xi^0_2 d\xi^0_3 = V_0$$

Dopo la deformazione descritta dalla matrice

$$\Gamma^0 = \begin{bmatrix} \gamma^0_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^0_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^0_{3,3} \end{bmatrix}$$

diventerà un parallelepipedo di lati

$$(1+\gamma^0_{1,1})d\xi^0_1; \quad (1+\gamma^0_{2,2})d\xi^0_2; \quad S(1+\gamma_{3,3})d\xi^0_3$$

e perciò di volume

$$(1+\gamma^0_{1,1})(1+\gamma^0_{2,2})(1+\gamma_{3,3})d\xi^0_1 d\xi^0_2 d\xi^0_3$$

Da qui sviluppando e trascurando i prodotti delle $\gamma_{i,k}$ per il ragionamento fatto all'inizio sulle derivate degli spostamenti, si ottiene che il nuovo volume

$$V = (1+\gamma)V_0$$

Così possiamo concludere che il coefficiente di dilatazione cubica γ è un importantissimo strumento che ci permette di conoscere la variazione di volume di un corpo dopo la deformazione qualunque sia il sistema di riferimento scelto.

2.3 Gli sforzi

2.3.1 Forze applicate e sforzi

Passiamo ora allo studio delle forze che agiscono sui corpi elastici. Tali forze possono essere di due tipi:

Forze di massa :(come per esempio il peso) sono forze che agiscono su ogni elemento infinitesimo di massa. La Forza di massa agente sull' infinitesimo dm è dell'ordine di dm e si può esprimere come Fdm dove F è un vettore che rappresenta la forza agente sull'unità di massa dm

Forze superficiali :agenti solo sulla superfice del corpo; la forza agente sull'elemento $d\sigma$ si esprime invece con

$$\Psi d\sigma$$

dove Ψ è un vettore che definisce la forza agente sull' unità di superficie $d\sigma$

Osserviamo che le forze di massa si possono esprimere introducendo la densità

$$\rho = \frac{dm}{dv} \Rightarrow dm = \rho dv$$

perciò le forze di massa sull' elemento infinitesimo si possono scrivere come

$$\rho F dv$$

Oltre a questi due tipi di forzevi vi sono forze che si esercitano tra le varie parti del corpo (come per esempio pressioni o tensioni interne) che preciseremo più avanti introducendo il concetto di $sforzo$.
Immaginiamo tracciato all'interno del corpo un elemento superficiale generico, $d\sigma$, e su di esso fissiamo una faccia positiva e una negati o equivalentemente fissiamo il verso del vettore normale .
Il vettore risultante di tutte le forze che le particelle del corpo situate dalla parte della faccia negativa esercitano sulle particelle situate dalla parte opposta, attraverso $d\sigma$, si chiama **sforzo sulla faccia positiva** *di* $d\sigma$.
Esso è dell'ordine di $d\sigma$ e si pò esprimere come

$$\Phi d\sigma$$

dove Φ è un vettore finito detto **sforzo specifico** o sforzo per unità di superficie sulla faccia negativa dell' elemento $d\sigma$, esso viene anche detto pressione se l'angolo $(\widehat{\Phi n})$ è acuto, tensione se è ottuso dove con n si intende il vettore normale a $d\sigma$.
Le sue dimensioni sono le stesse del vettore Ψ, ed esso dipende dalla posizione e dall' orientamento di $d\sigma$.

Per il **principio di azione e reazione** possiamo dire senz' ombra di dubbio che sforzi relativi a facce opposte di uno stesso elemento di superficie sono uguali ed opposti.

2.3.2 Criterio generale di equilibtio dei corpi deformabili

Chiunque abbia affrontato un corso di meccanica razionale, (non leggete questo scritto senza averlo fatto) sa che condizione necessaria per l'equilibrio di un qualunque sistema meccanico è che il vettore risultante risultante delle forze esterne agenti sul sistema, ed il momento risultante delle stesse forze, rispetto ad un punto qualsiasi,siano nulli.
Ora lo studio dell'equilibrio dei corpi deformabili è fondato sull' ovvia affermazione che, se il corpo è in equilibrio, le codizioni di cui sopra devono essere soddisfatte non solo per il corpo nel suo insieme, ma anche p'er qualsiasi parte di esso, poichè scriveremo che quando una parte del corpo viene considerata come un sistema a sè, le forze esercitate su di essa dalle rimanenti parti del corpo devono essere considerate come forze esterne.
In questo modo sfruttando l'arbitrarietà delle porzioni di corpo che andremo a considerare alle quali applicheremo le condizioni di equilibrio suddette, sì giungerà (come vedremo nei prossimi paragrafi), a delle equazioni per le componenti degli sforzi specifici, che dovranno essere soddisfatte in ogni punto del corpo.

2.3.3 Formule di Cauchy

Consideriamo ora un sistema di assi cartesiani $x_1; x_2 x_3$, e fissiamo nel punto P appartenente al nostro corpo elastico un nuovo sistema di assi ortogonali centrati in P e paralleli agli assi dati.
Chiamiamo gli assi di questo nuovo questo nuovo sistema ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Consideriamo anche il tetraedro infinitesimo avente come facce tre elementi superficiali $\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$ paralleli ai piani coordinati e come quarta faccia σ che descriveremo in seguito siano poi:

$$(6) \begin{cases} \Phi_1 = (\Phi_{1,1}; \Phi_{1,2}; \Phi_{1,3}) \\ \Phi_2 = (\Phi_{2,1}; \Phi_{2,2}; \Phi_{2,3}) \\ \Phi_1 = (\Phi_{3,1}; \Phi_{3,2}; \Phi_{3,3}) \end{cases}$$

gli sforzi che si esercitano rispettivamente su $d\sigma_1; d\sigma_2; d\sigma_3$ (notando che: $\sigma_i \perp x_i \quad \forall i := 1, 2, 3$).
Osserviamo che nel nuovo sistema di riferimento, (quello centrato in P), ciascuno degli sforzi specifici $(\Phi_1; \Phi_2; \Phi_2)$ si può considerare come somma di tre sforzi specifici uno normale all' elemento σ_i considerato e due tangenziali misurati nelle corrispondenti $\Phi_{i,k}$.

Esempio: 2 *Lo sforzo specifico Φ_1 si può vedere come somma delle sue componenti $(\Phi_{1,1}; \Phi_{1,2}; \Phi_{1,3})$ che giacciono sul sistema di riferimento di centro P percui si ha che $(\Phi_{1,1} \perp \sigma_1$ mentre $\Phi_{1,2}; \Phi_{1,3})$ sono le componenti tangenziali.*

Per questo $(\Phi_{1,1}; \Phi_{2,2}; \Phi_{3,3})$ si chiamano, di solito, **sforzi specifici normali** e le $\Phi_{i,k} \quad i \neq k$ si dicono invece **sforzi specifici tangenziali** *o* **di taglio**
Sia ora Φ lo sforzo relativo ad un elemento comunque orientato e passante per P possiamo far vedere che le componenti di Φ e le $\Phi_{i,k}$ componenti delgli sforzi specifici, sono legate in modo assai semplice.
Per poerlo fare riconsideriamo il tetraedro infinitesimo descritto in precedenza delimitato dalle superfici σ_i per i =1,2,3 e dalla superrficie σ che interseca gli assi ξ_1, ξ_2, ξ_3 nei punti A,B,C e sia $n = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ la normale a σ orientato verso l'esterno del tetraedro.
Osserviamo innanzi tuttto che le facce del tetraedro che contengono P sono parallele ai piani coordinati quindi manterremo le notazioni del sistema (6) per gli sforzi specifici ed indicheremo con:

$$\Phi = (\Phi_{x_1}; \Phi_{x_2}; \Phi_{x_3})$$

[1] lo sforzo specifico relativo alla faccia obliqua.
Converremo anche di assumere come direzione positiva della normale delle facce contenenti P quella degli assi ξ_i ad esse ortogonale (percui la faccia CBP che si puo identificare con σ_1 avrà come normale l'asse ξ_1)[2].
Ora se sotto l'azione di forze esterne il corpo è in equilibrio, per quanto detto nel paragrafo precedente, il tetraedro dovrà sottostare alle condizioni necessarie per l' equilibrio e quindi potremmo scrivere che il vettore risultante **R**=$(R_{x_1}; R_{x_2}; R_{x_3})$ di tutte le forze che dall'esterno si esercitano sul tetraedro è nullo.
Tali forze sono la forza di massa

$$\rho F dV = (\rho F_{x_1} dV; \rho F_{x_2} dV; \rho F_{x_3} dV)$$

con dV che rappresenta il volume infinitesimo del tetraedro e gli sforzi

$$\Phi_1 d\sigma_1 \quad \Phi_2 d\sigma_2 \quad \Phi_3 d\sigma_3$$

dove $d\sigma_i$ sono le aree delle superfici σ_i che identificano le facce del tetraedro come descritto nelle righe precedenti.
Avremo quindi:

$$(7)\begin{cases} R_{x_1} = 0 = \rho F_{x_1} dV + \Phi_{1,1} d\sigma 1 + \Phi_{2,1} d\sigma_2 + \Phi_{3,1} d\sigma_3 - \Phi_{x1} d\sigma \\ R_{x_2} = 0 = \rho F_{x_2} dV + \Phi_{1,2} d\sigma 1 + \Phi_{2,2} d\sigma_2 + \Phi_{3,2} d\sigma_3 - \Phi_{x2} d\sigma \\ R_{x_3} = 0 = \rho F_{x_3} dV + \Phi_{1,3} d\sigma 1 + \Phi_{2,3} d\sigma_2 + \Phi_{3,3} d\sigma_3 - \Phi_{x3} d\sigma \end{cases}$$

Osservazione: 2 *Se h è l'altezza del tetraedro relativa alla faccia ABC identificata da σ il volume infinitesimo $dV = \frac{d\sigma}{3} h$ e dato che le superfici σ_i con i=1,2,3 sono le proiezioni di σ sui piani coordinati si ha*

$$d\sigma_1 = d\sigma\alpha_1 \quad d\sigma_2 = d\sigma\alpha_2 \quad d\sigma_3 = d\sigma\alpha_3$$

e quindi si ottiene che le equazioni di (7) diventano:

---

[1] la notaxione ϕ_{x_i} sta a significare che è la componente lungo l' i-esimo asse in funzione dell' indice i che idividua l'asse x se i=1 y se i=2 z se i=3

[2] si raccomanda allo studente interessato allo studio di questi argomenti di non confondere le superfici del tetraedro identificate con la lettera σ con gli infinitesimi $d\sigma$

$$(8)\begin{cases} R_{x_1} = 0 = (\rho F_{x_1}\dfrac{h}{3} + \Phi_{1,1}\alpha_1 + \Phi_{2,1}\alpha_2 + \Phi_{3,1}\alpha_3 - \Phi_{x1})d\sigma \\ R_{x_2} = 0 = (\rho F_{x_2}\dfrac{h}{3} + \Phi_{1,2}\alpha_1 + \Phi_{2,2}\alpha_2 + \Phi_{3,2}\alpha_3 - \Phi_{x2})d\sigma \\ R_{x_3} = 0 = (\rho F_{x_3}\dfrac{h}{3} + \Phi_{1,3}\alpha_1 + \Phi_{2,3}\alpha_2 + \Phi_{3,3}\alpha_3 - \Phi_{x3})d\sigma \end{cases}$$

Ricordiamo che le α_i con i=1,2,3 sono i coseni direttori della normale.
E passando poi al limite per $h \longmapsto 0$ la faccia σ diventa un elemento superficiale passante per P orientato da n e dalle equazioni di (8) si ricavano le

Formule di Cauchy

$$(9)\begin{cases} \Phi_{x1} = \Phi_{1,1}\alpha_1 + \Phi_{2,1}\alpha_2 + \Phi_{3,1}\alpha 3 \\ \Phi_{x2} = \Phi_{1,2}\alpha_1 + \Phi_{2,2}\alpha_2 + \Phi_{3,2}\alpha 3 \\ \Phi_{x1} = \Phi_{1,3}\alpha_1 + \Phi_{2,3}\alpha_2 + \Phi_{3,3}\alpha 3 \end{cases}$$

che ci danno lo sforzo specifico relativo ad un elemento superficiale, comunque orientato, in funzione degli sforzi specifici che si esercitano su tre elementi normali agli assi di riferimento.

2.3.4 Equazioni dell' equilibrio

Consideriamo ora una regione qualsiasi, S, interna al corpo deformato e sia σ la superficie che la limita; n il vettore della normale ad essa (orientato verso l'esterno) di componenti rispettivamente $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3;)$.
Se S è in condizioni di equilibrio e se chiamiamo **R** il vettore risultante ed **M** il momento risultante, (rispetto all'origine),delle forze che si esercitano dall'esterno verso l'interno di S, sarà necessario per le condizioni di equilibrio, già enunciate nei precedenti paragrafi, che **R**=0 ed **M**=0 cioè:

$$(10) \quad R_{x_1} = 0 \quad R_{x_2} = 0 \quad R_{x_3} = 0$$

ed:

$$(11) \quad M_{x_1} = 0 \quad M_{x_2} = 0 \quad M_{x_3} = 0$$

Calcoliamo ora esplicitamente la formula 10, su ogni elemento dS si esercita una forza di massa pari a $\rho\mathbf{F}dS$ quindi, sommando su tutta S, si ottiene che le forze di massa agenti su S avranno come componenti lungo gli assi rispettivamente

$$\int_S \rho F_{x_1} dS \quad \int_S \rho F_{x_2} dS \quad \int_S \rho F_{x_3} dS$$

Consideriamo poi che attraverso ogni elemento superficiale $d\sigma$, dall'interno verso l'esterno, si esercita uno sforzo $\Phi d\sigma$ quindi le componenti degli sforzi che si esercitano in tal senso, saranno

$$-\int_\sigma \Phi_{x_i} d\sigma \quad i = 1, 2, 3$$

Analizziamo ora la situazione di una sola componente, analogamente si comporteranno le altre. La R_{x_1} sarà la somma delle forze suddette quindi la prima equazione delle (10) si scriverà

$$\int_S \rho F_{x_1} dS - \int_\sigma \Phi_{x_1} d\sigma = 0$$

che considerando le **formule di Cauchy** presenti nel sistema (9) dienterà

$$\int_S \rho F_{x_1} dS - \int_\sigma (\Phi_{1,1}\alpha_1 + \Phi_{2,1}\alpha_2 + \Phi_{3,1}\alpha_3) d\sigma = 0$$

Notiamo che stiamo sommando due integrali in diverse dimensioni nel senso che dS è un infinitesimo di volume mentre $d\sigma$ è un' unita superficiale perciò dobbiamo applicare il teorema di Green Gauss Stokes e portare tutto in unità di volume da ciò si ricava che l'espressione della risultante secondo la componente x_1 è:

$$\int_S (\rho F_{x_1} - \frac{\partial \Phi_{1,1}}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_{2,1}}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_{3,1}}{\partial x_3}) = 0$$

Per l'arbitrarietà di S possiamo dire che l'equazione scritta vale 0 se l'argomento dell'inegrale vale 0 in più ragionando analogamente per le altre componenti si ottiene:

$$(12) \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_{1,1}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \Phi_{2,1}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \Phi_{3,1}}{\partial x_3} = \rho F_{x_1} \\ \dfrac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \Phi_{2,2}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \Phi_{3,2}}{\partial x_3} = \rho F_{x_2} \\ \dfrac{\partial \Phi_{1,3}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \Phi_{2,3}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \Phi_{3,3}}{\partial x_3} = \rho F_{x_3} \end{cases}$$

Queste sono le equazioni differenziali a cui soddifano gli sforzi specifici in condizioni di equilibrio. Talvolta vengono chiamate **equazioni indefinite dell'equilibrio** .
Studiamo ora l'equilibrio dei momenti angolari equazioni (11). Analizzeremo solo la componente in x_1. Per far ciò divideremo il momento M_{x_1} in due parti una $M_{x_1}^1$ relativa alle sole forze di massa e un'altra $M_{x_1}^2$ relativa alle forze superficiali.
Il momento $M_{x_1}^1$ rispetto all'origine delle sole forze di massa risulterà:

$$M_{x_1}^1 = \int_S (x_2 F_{x_3} - x_3 F_{x_2}) dS$$

mentre quello dovuto alle forze superficiali diventa:

$$M_{x_1}^2 = \int_\sigma (x_2 \Phi_{x_3} - x_3 \Phi_{x_2}) d\sigma$$

e trasformando $M_{x_1}^2$ con le formule di Cauchy diventa:

$$M_{x_1}^2 = -\int_\sigma [x_2(\Phi_{1,3}\alpha_1 + \Phi_{2,3}\alpha_2 + \Phi_{3,3}\alpha_3) - x_3(\Phi_{1,2}\alpha_1 + \Phi_{2,2}\alpha_2 + \Phi_{3,2}\alpha_3)] d\sigma$$

e col teorema della divergenza

$$M_{x_1}^2 = -\int_S [\frac{\partial}{\partial x_1}(x_2\Phi_{1,3} - x_3\Phi_{1,2}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2\Phi_{2,3} - x_3\Phi_{2,2}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(x_2\Phi_{2,3} - x_3\Phi_{3,2})] dS =$$

$$-\int_S (x_2(\frac{\partial \Phi_{1,3}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_{2,3}}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_{3,3}}{\partial x_3}) + \Phi_{2,3} - x_3(\frac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_{2,2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_{3,2}}{\partial x_3}) - \Phi_{3,2}) dS$$

notiamo che per le equazioni ndefinite dell'equilibrio sistema (12) possiamo mettere in evedenza le forze di massa e quindi

$$M_{x_1}^2 = -\int_S (x_2 F_{x_3} - x_3 F_{x_2}) dS + \int_S (\Phi_{3,2} - \Phi_{2,3}) dS$$

che per come è stato definito $M_{x_1}^1$ si può riscrivere nella forma

$$M_{x_1}^2 = -M_{x_1}^1 + \int_S (\Phi_{3,2} - \Phi_{2,3}) dS$$

. alchè se si considera che $M_{x_1} = M_{x_1}^2 + M_{x_1}^1$ facendo la somma risulterà:

$$M_{x_1} = \int_S (\Phi_{3,2} - \Phi_{2,3}) dS$$

Ora per questioni di equilibrio (l' abbiamo supposto all'inizio del paragrafo nelle condizioni 10 e 11) quest'espressione dovrà annullarsi e dato che il volume S è arbitrario dovrà succedere che:

$$\Phi_{3,2} = \Phi_{2,3}$$

Analogamente ragionando sulle altre componenti si ricavano le condizioni

$$\Phi_{1,2} = \Phi_{2,1} \quad \Phi_{1,3} = \Phi_{3,1}$$

Queste equazioni riducono le incognite del sistema (12) da 9 a 6 ed è stato dimostrato ma noi non lo faemo che queste ugualianze valgono anche se il corpo è in equilibrio.

2.3.5 Equazioni al contorno(per gli sforzi)

Per studiare gli sforzi di un corpo deformato non bastano le equazioni indefinite dell'equilibrio viste in precedenza e nemmeno i risultati di ugualianza appena trovati.
Trattandosi di equazioni differenziali esse richiedono delle condizioni al contorno cioè, fisicamente vogliamo sapere cosa succede sulla superficie del corpo deformato.
É facile ottenere queste condizioni osservando che, la forza $\Psi = (\Psi_{x_1}; \Psi_{x_2}; \Psi_{x_3})$, che supponiamo applicata sulla faccia esterna dell'unità di superficie deve, per questioni di equilibrio, e per il principio di azione e reazione, essere uguale ed opposta allo sforzo specifico che il corpo deformato esercita contro la faccia interna della superficie stessa.
Assumendo come normale positiva quella esterna, sul bordo del nostro corpo dovrà verificarsi che:

$$\Phi_{x_1} = -\Psi_{x_1} \quad \Phi_{x_2} = -\Psi_{x_2} \quad \Phi_{x_3} = -\Psi_{x_3}$$

E come si è visto per le formule di Cauchy queste ugualianze rappresentano un sistema di tre equazioni così definito

$$(13)\begin{cases} -\Psi_{x1} = \Phi_{1,1}\alpha_1 + \Phi_{2,1}\alpha_2 + \Phi_{3,1}\alpha 3 \\ -\Psi_{x2} = \Phi_{1,2}\alpha_1 + \Phi_{2,2}\alpha_2 + \Phi_{3,2}\alpha 3 \\ -\Psi_{x1} = \Phi_{1,3}\alpha_1 + \Phi_{2,3}\alpha_2 + \Phi_{3,3}\alpha 3 \end{cases}$$

che vanno necessariamente accompagnate con le formule che abbiamo ricavato nel paragrafo precedente che ci ricordano che:

$$\Phi_{i,j} = \Phi_{j,i} \quad \forall i, j := 1, 2, 3$$

2.3.6 Tensore degli sforzi

Dalle formule di Cauchy descritte nel sistema (9) si può notare che, essendo Φ_{x_1}; Φ_{x_2}; Φ_{x_3}; le componenti di un vettore $\vec{\Phi}$ e α_1; α_2; α_3 le componenti di un altro vettore **n**, si vede abbastanza chiaramente dalle equazioni indefinite dell'equilibrio, che le $\Phi_{i,k}$ sono le componenti di un tensore (funzione del posto) che prende, non a caso, il nome di **tensore degli sforzi**.

$$\vec{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_{1,1} & \Phi_{1,2} & \Phi_{1,3} \\ \Phi_{2,1} & \Phi_{2,2} & \Phi_{2,3} \\ \Phi_{3,1} & \Phi_{3,2} & \Phi_{3,3} \end{bmatrix}$$

Per quanto già detto sappiamo che le $\Phi_{i,j}$ sono uguali alle $\Phi_{j,i}$ quindi viene naturale osservare che il tensore degli sforzi è un tensore simmetrico.
Come è già accaduto per il tensore delle deformazioni, possiamo affermare che essendo simmetrico , il tensore degli sforzi è anche diagonalizzabile che matematicamente significa che in ogno punto esiste una terna di assi principali ($\xi_1^0; \xi_2^0; \xi_3^0$) che rende possibile descrivere lo stato di sollecitazione del corpo (continuo) come la sovrapposizione di tre sforzi normali (di pressione o di trazione) ($\Phi_{1,1}^0; \Phi_{2,2}^0; \Phi_{3,3}^0$) diretti secondo le direzioni principali del tensore nel punto considerato e non accompagnati da sforzi di taglio.

Le componenti degli sforzispecifici relative ad un altro sistema qualunque di assi ortogonali $x_1 \quad x_2 \quad x_3$ si ricavano abbastanza facilmente dalle componenti principali $\Phi^0_{1,1} \quad \Phi^0_{2,2} \quad \Phi^0_{3,3}$ risolvendo il sistema:

$$(14) \begin{cases} \Phi_{1,1} = \Phi^0_{1,1}\alpha^2_{1,1} + \Phi^0_{2,2}\alpha^2_{2,1} + \Phi^0_{3,3}\alpha^2_{3,1} \\ \Phi_{2,2} = \Phi^0_{1,1}\alpha^2_{1,2} + \Phi^0_{2,2}\alpha^2_{2,2} + \Phi^0_{3,3}\alpha^2_{3,2} \\ \Phi_{1,1} = \Phi^0_{1,1}\alpha^2_{1,3} + \Phi^0_{2,2}\alpha^2_{2,3} + \Phi^0_{3,3}\alpha^2_{3,3} \end{cases}$$

per le componenti in cui i=j assieme al sistema

$$(14) \begin{cases} \Phi_{1,2} = \Phi_{2,1} = \Phi^0_{1,1}\alpha_{1,1}\alpha_{1,2} + \Phi^0_{2,2}\alpha_{2,1}\alpha_{2,2} + \Phi^0_{3,3}\alpha_{3,1}\alpha_{3,2} \\ \Phi_{3,2} = \Phi_{2,3} = \Phi^0_{1,1}\alpha_{1,2}\alpha_{1,3} + \Phi^0_{2,2}\alpha_{2,2}\alpha_{2,3} + \Phi^0_{3,3}\alpha_{3,2}\alpha_{3,3} \\ \Phi_{1,3} = \Phi_{3,1} = \Phi^0_{1,1}\alpha_{1,1}\alpha_{1,3} + \Phi^0_{2,2}\alpha_{2,1}\alpha_{2,3} + \Phi^0_{3,3}\alpha_{3,1}\alpha_{3,3} \end{cases}$$

Osserviamo che queste sono formule del tutto analoghe a quelle già incontrate nello studio del tensore delle deformazioni quando si volevano ricavare le $\gamma_{i,k}$. E, come gia visto in precedenza non è errato dire che la traccia del tensore degli sforzi è un' invariante lineare che d' ora in avanti denoteremo con:

$$\Phi = \Phi_{1,1} + \Phi_{2,2} + \Phi_{3,3} = \Phi^0_{1,1} + \Phi^0_{2,2} + \Phi^0_{3,3}$$

Capitolo 3

Le costanti elastiche

3.1 Costanti elastiche

Questo capitolo è molto importante perchè, anche se in linea teorica sotto ipotesi abbastanza restrittive, tireremo le somme di quanto detto in precedenza descrivendo il legame che sussiste tra sforzi e deformazioni.
Questo legame, come vedremo, dipende dalla natura del corpo elastico che si considera e quindi è dato dall'esperienza. Tuttavia si può approssimare in base a pure nozioni teoriche e fondandosi su plausibili postulati quale forma avranno le leggi che stabiliscono questo legame.

3.1.1 Relazione tra sforzi interni e deformazioni nei corpi elastici

Il più naturale dei postulati che si possano ammettere è che le $\gamma_{i,k}$, siano funzioni analitiche delle $\Phi_{i,k}$ e che sviluppandole in serie di Taylor per piccole deformazioni, si possano trascurare gli infinitesimi di ordine superiore al primo.
Se poi supponiamo che nello stato *naturale* del corpo (cioé quando le $\gamma_{i,k}$ sono tutte nulle), gli sforzi interni siano anchessi tutti nulli, le $\gamma_{i,k}$ saranno

anche funzioni omogenee delle $\Phi_{i,k}$.
Potremmo quindi ammettere la seguente:

Legge di Hooke

DEFINIZIONE 2 *(legge di Hooke) Le componenti del tensore delle deformazioni sono funzioni lineari ed omogenee delle componenti del tensore degli sforzi specifici*

Tale legge rende conto dei risultati sperimentali per deformazioni che non superano un certo limite (limite di proporzionalità), tutte le deformazioni che analizzeremo d'ora in avanti saranno tali da non superarlo.
Per scrivere le $\gamma_{i,k}$ come funzioni lineari ed omogenee delle $\Phi_{i,k}$ è necessario conoscere i 36 coefficienti caratteristici del materiale di cui è composto il corpo, esistono però corpi (e in seguito ci limiteremo a studiare solo questo tipo di corpi), fatti di materiali detti **isotropi** nei quali è possibile scrivere queste relazioni in funzione di due soli coefficienti indipendenti.
Anzi come ora mostreremo, si possono ottenere direttamente le relazioni lineari così semplificate analizzando pochi casi, particolarmente semplici, di sollecitazione elastica.
Il tipo fondamentale di sollecitazione elastica è quello di pura compressione (o di pura trazione), longitudinale ed uniforme cioè governato da un tensore degli sforzi che ha tutte le componenti nulle tranne $\Phi_{1,1}$ tipo:

$$\vec{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con $\Phi_{1,1}$ costante per comodità verrà supposto maggiore di 0.
Per visualizzarlo pensiamo ad un prisma rettangolare con asse parallelo all' asse x_1, e cerchiamo di capire a quali forze dobbiamo sottoporlo perchè nel suo interno siano realizzate le condizioni descritte da tale tensore.

Le equazioni indefinite dell'equilibrio insieme a quelle al contorno che abbiamo studiato nel capitolo precedente ci dicono che bisogna applicare alle due basi del prismadelle prssioni uniformemente distribuite, lasciando libere da forze le superfici laterali.
Ora l'esperienza ci dice che il prisma si contrae, com'è intuitivo pensare, nella dirzione indicata dall'asse delle x_1 ed, in generale, si dilata nelle direzioni ad essa normali cioè che, in queste condizioni avremo un tensore delle deformazioni fatto così:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} (\gamma_{1,1} < 0) & 0 & 0 \\ 0 & (\gamma_{2,2} > 0) & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma_{3,3} > 0) \end{bmatrix}$$

Inoltre, essendo tutto simmetrico rispetto all'ase x_1 dovrà succedere che $\gamma_{2,2} = \gamma_{3,3}$.
Tutto questo, per la legge di Hooke, deve esprimersi mediante relazioni lineari ed omogenee tra le componenti delle deformazioni $\gamma_{i,k}$ e quelle degli sforzi $\Phi_{i,k}$ ma, essendoci soltanto $\Phi_{1,1}$ ed essendo $\gamma_{2,2} = \gamma_{3,3}$ tutto si riduce a due semplici relazioni di proporzionalitàtra le $\gamma_{i,i}$ e $\Phi_{1,1}$.
Avremo dunque in primo luogo:

$$\gamma_{1,1} = -\frac{1}{E}\Phi_{1,1}$$

Qui E è un coefficiente positivo caratteristico della sosatanza, detto **modulo di elsticità o di Young**. Inoltresi avrà che anche $\gamma_{2,2}$ e $\gamma_{3,3}$ si scriveranno come $\Phi_{1,1}$ per una determinata costante secondo la seguente legge:

$$\gamma_{1,1} = \gamma_{2,2} = \frac{K}{E}\Phi_{1,1}$$

che equivale a dire che:

$$\gamma_{2,2} = \gamma_{3,3} = K\gamma_{1,1}$$

introducendo così una seconda costante K caratteristica della sostanza che esprime il rapporto tra la dilatazione trasvrsale ed il simultaneo accorciamento longitudinale: tale costante viene chiamata **modulo** o coefficiente di

Poisson.
Poichè queste formule, unitamente alle

$$\gamma_{i,k} = 0 \quad se \quad i \neq k$$

esprimono la legge di Hooke esse valgono anche se $\Phi_{1,1} < 0$ che rappresenta uno sforzo di trazione, e in questo caso avremo un allungamento longitudinale accompagnato da una contrazione trasversale.
Le due costanti, E e K , definiscono le proprietà elastiche del corpo isotropo entro il limite limite di proporzionalità citato in precedenza.
Difatti, come ora mostreremo, gli sforzi anche nel caso più generale, si possono ricondurre a sforzi di pura compressione o trazione esattamente come quello che abbiamo appena descritto e, in virtù della legge di Hooke, le deformazioni si possono calcolare come somma di delle deformazioni prodotte da singoli sforzi che si sovrappongono.
cominciamo col considerare il caso di un parallelepipedo soggetto a sforzi di compressione o di trazione su tutte le coppie di facce, che assumeremo parallele ai piani coordinati, e quindi supponiamo sia $\Phi_{1,1} \neq 0$ $\Phi_{2,2} \neq 0$ $\Phi_{3,3} \neq 0$ e $\Phi_{1,2} = \Phi_{1,3} = \Phi_{2,3} = 0$.
Lo sforzo $\Phi_{1,1}$ da solo darebbe, come visto in precedenza, la deformazione espressa da

$$\gamma^1_{1,1} = -\frac{1}{E}\Phi_{1,1}, \quad \gamma^1_{2,2} = \frac{k}{E}\Phi_{1,1}, \quad \gamma^1_{3,3} = \frac{k}{E}\Phi_{1,1}$$

Lo sforzo $\Phi_{2,2}$, da solo, darebbe come si vede dalle formule precedenti scambiando l'asse delle x_1 con quello delle x_2

$$\gamma^2_{1,1} = \frac{k}{E}\Phi_{2,2}, \quad \gamma^1_{2,2} = -\frac{1}{E}\Phi_{2,2}, \quad \gamma^2_{3,3} = \frac{k}{E}\Phi_{2,2}$$

e similmente a quanto già descritto considerando solamente lo sforzo $\Phi_{3,3}$ naturalmnte esaminato rispetto all'asse x_3 si avrebbero le equazioni:

$$\gamma^1_{1,1} = \frac{K}{E}\Phi_{3,3}, \quad \gamma^1_{2,2} = \frac{k}{E}\Phi_{3,3}, \quad \gamma^1_{3,3} = \frac{1}{E}\Phi_{3,3}$$

gli scorrimenti sono nulli in tutti i casi.
Sommando ora le deformazioni $\gamma_{i,i}^{j}$ come segue:

$$\sum_{j=0}^{3} \gamma_{i,i}^{j} \quad i := 1, 2, 3$$

e ricordando che in precedenza è stato introdotto l'invariante lineare degli sforzi Φ, si ottiene il sistema:

$$(15) \begin{cases} \gamma_{1,1} = \dfrac{K\Phi - \Phi_{1,1}(1+K)}{E} \\ \gamma_{2,2} = \dfrac{K\Phi - \Phi_{2,2}(1+K)}{E} \\ \gamma_{3,3} = \dfrac{K\Phi - \Phi_{3,3}(1+K)}{E} \\ \gamma_{i,j} = 0 \quad se \quad i \neq j \end{cases}$$

Passiamo ora al caso generale.
Per ricavare le formule che legano le $\gamma_{i,j}$ alle $\Phi_{i,j}$ in un ounto generico P nel caso di sforzi qualsiasi possiamo avvalerci di tutte le considerazioni fatte in precedenza introducendo la terna $\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0$ del tensore degli sforzi relativi al punto P.
Per fare ciò consideriamo intorno a P un parallelepipedo con gli spigoli paralleli agli assi principali $\xi_i^0, \quad i = 1, 2, 3$ appena introdotti ed abbastanza piccolo per poter considerare (al suo interno) gli sforzi uniformi ed uguali al valore che essi assumono in P.
Dato che la terna di assi principali è una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale il tensore degli sforzi è diagonale, possiamo dire con certezza che gli sforzi di taglio sono tutti nulli, e quindi possiamo ricondurci alle condizioni del caso precedente, per cui le formule che legano le componenti di deformazione alle componenti degli sforzi sono ancora quelle descritte dal sistema (15), quanto alle $\gamma_{i,j}, \Phi_{i,j}, \Phi$ esse saranno sostituite com'è intuitivo pensare dalle $\gamma_{i,j}^0, \Phi_{i,j}^0, \Phi^0 = \Phi$ relative agli assi principali presi in considerazione.
Il problema che ora ci si pone innanzi è che in generale gli assi $\xi_{i,j}^0$ variano (in direzione) da punto a punto mentre per poter fare uno studio serio del problema avremo bisogno di soluzioni che si riferiscono ad un unico sistema

di riferimento (quello delle stelle fisse x_1, x_2, x_3).
Per fare questo possiamo avvalerci delle formule di conversione che abbiamo trovato precedentemente (sistema (5)per quanto riguarda le deformazioni e sistema (14) per gli sforzi) dove gli $\alpha_{i,k}$ variabili da punto a punto sono i coseni direttori degli assi principali.
Ricordando sempre che la traccia del tensore degli sforzi Φ è invariante per cambiamenti di base avremo dunque per esempio:

$$\begin{aligned}
\gamma_{1,1} &= = \gamma^0_{1,1}\alpha^2_{1,1} + \gamma^0_{2,2}\alpha 2,1^2 + \gamma_{3,3}\alpha^2_{3,1} = \\
&= \frac{1}{E}[K\Phi^0(\alpha^2_{1,1} + \alpha^2_{2,1} + \alpha^2_{3,1}) - (1+K)(\Phi^0_{1,1}\alpha^2_{1,1} + \Phi^0_{2,2}\alpha^2_{2,1} + \Phi^0_{3,3}\alpha^2_{3,1})] = \\
&= \frac{k\Phi - (1+K)\Phi_{1,1}}{E}
\end{aligned}$$

Ragionando allo stesso modo otteniamo dunque il sistema:

$$(16)\begin{cases}
\gamma_{1,1} = \dfrac{K\Phi - \Phi_{1,1}(1+K)}{E} \\
\gamma_{2,2} = \dfrac{K\Phi - \Phi_{2,2}(1+K)}{E} \\
\gamma_{3,3} = \dfrac{K\Phi - \Phi_{3,3}(1+K)}{E} \\
\gamma_{1,2} = \gamma_{2,1} = -\dfrac{1+K}{E}\Phi_{1,2} \\
\gamma_{1,3} = \gamma_{3,1} = -\dfrac{1+K}{E}\Phi_{1,3} \\
\gamma_{3,2} = \gamma_{2,3} = -\dfrac{1+K}{E}\Phi_{3,2}
\end{cases}$$

Queste sono proprio le formule cercate che esprimono le leggi di Hooke per i corpi isotropi:
Come l'intuito suggerisce si può osservare che gli sforzi di taglio influiscono sui soli coefficienti di scorrimento.
É inoltre facile per mezzo delle equazioni del sistema (16), appena trovate, esprimere la dilatazione cubica γ (importante perchè è l'invariante lineare del tensore delle deformazioni), in funzione delle componenti degli sforzi ottenendo la relazione:

$$\gamma = \sum i = 1^3\gamma_{i,i} = \frac{3K\Phi - (1+K)\Phi}{E} = \frac{2K-1}{E}\Phi$$

Cioè la dilatazione cubica è proporzionale, secondo un coefficiente che dipende dai moduli di Young e Poisson, all'invariane lineare del tensore degli sforzi.
Un caso particolarmente interessante da analizzare è quello della compressione uniforme caratterizzato da un tensore degli sforzi di questo tipo:

$$\vec{\Phi} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix}$$

Un esperimento che segue questa legge si può realizzare immergendo un corpo (di qualsivoglia forma) in un fluido a pressione uniforme P (trascurando il peso).
In tal caso si avrà $\Phi = 3\mathrm{P}$ e l' invariante lineare del tensore delle deformazioni γ diventa

$$\gamma = -\beta P$$

Bove si è posto:

$$\beta = \frac{3(1-2K)}{E}$$

e β prende il nome di costante di compressibilità.
Osserviamo che il segno - nell'espressione di γ sta a significare ache a una pressione positiva $P > 0$ corrisponde, come suggerisce l'esperienza, una diminuzione del volume e quindi $\beta > 0$.
Si hanno poi facilmente le relazioni inverse che legano le componenti del tensore degli sforzi $\Phi_{i,j}$ a quelle del tensore delle deformazioni $\gamma_{i,j}$ infatti si ottiene facilmente:

$$\Phi = \frac{E}{2K-1}\gamma$$

e da questa applicandola al sistema (16) si ottiene

$$\begin{cases} \Phi_{1,1} = \dfrac{KE)}{(1+K)(2K-1)}\gamma - \dfrac{E}{1+K}\gamma_{1,1} \\ \Phi_{2,2} = \dfrac{KE)}{(1+K)(2K-1)}\gamma - \dfrac{E}{1+K}\gamma_{2,2} \\ \Phi_{3,3} = \dfrac{KE)}{(1+K)(2K-1)}\gamma - \dfrac{E}{1+K}\gamma_{3,3} \\ \Phi_{1,2} = \Phi_{2,1} = -\dfrac{E}{1+k}\gamma_{1,2} \\ \Phi_{1,3} = \Phi_{3,1} = -\dfrac{E}{1+k}\gamma_{1,3} \\ \Phi_{3,2} = \Phi_{2,3} = -\dfrac{E}{1+k}\gamma_{3,2} \end{cases}$$

Introduciamo poi le **costanti di lamè**:

$$\lambda = \frac{KE}{(1+K)(1-2K)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+K)}$$

in modo da poter riscrivere il sistema appena ottenuto in una forma più compatta e gradevole all' occhio:

$$(17) \begin{cases} \Phi_{1,1} = -\lambda\gamma - \mu\gamma_{1,1} \\ \Phi_{2,2} = -\lambda\gamma - \mu\gamma_{2,2} \\ \Phi_{3,3} = -\lambda\gamma - \mu\gamma_{3,3} \\ \Phi_{1,2} = \Phi_{2,1} = -2\mu\gamma_{1,2} \\ \Phi_{1,3} = \Phi_{3,1} = -2\mu\gamma_{1,3} \\ \Phi_{3,2} = \Phi_{2,3} = -2\mu\gamma_{3,2} \end{cases}$$

In conclusione siamo dunque giunti al nostro obbiettivo principale che era quello di stabilire delle relazioni matematiche tra deformazioni e sforzi. Ricordiamo però che il campo di studio è stato ristretto ai soli corpi isotropi sotto le ipotesi della legge di Hooke.

3.1.2 Limiti per il modulo di Poisson

Supponiamo di avere un piccolo parallelepipedo con spigoli paralleli agli assi coordinati ed in equilibrio in assenza di forze di massa sotto lo sforzo di taglio definito da:

$$\vec{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\Phi_{2,3} > 0) \\ 0 & (\Phi_{2,3} > 0) & 0 \end{bmatrix}$$

Le equaioni fondamentali dell'equilibrio ci danno subito che $\Phi_{2,3} = \Phi_{3,2}$ dev' essere lo stesso in ogni punto e quindi anche in superficie, e quindi come si ricava dalle equazioni al contorno incontrate in precedenza, il parallelepipedo dovrà essere soggetto sulle faccie parallele all'asse x_1 a forze superficiali tangenziali.

Per le considerazioni fatte durante lo studio delle deformazioni, in queste condizioni l' angolo $\psi = \widehat{x_2, x_3}$ subisce un incremento $\delta\psi$ positivo quindi se ne deduce che:

$$\gamma_{2,3} < 0$$

Da questo si ottiene che a sforzi di taglio positivi corrispondono coefficienti di scorrimento negativi, e quindi dal sistema (17) si ricava facilmente che:

$$\mu > 0$$

Osserviamo che se μ è molto grande sforzi di taglio notevoli producono piccole deformazioni quindi μ ci dice in che modo il corpo reagisce agli sforzi di taglio e per questo viene comunemente chiamato **modulo di rigidità**.

Per come sono state definite le costanti di Lamè dato che il modulo di Young E è sempre positivo si trova una prima limitazione per il coefficiente di Poisson K precisamente

$$K > -1$$

In pratica si trova che $K > 0$.

Un'altra limitazione si ha osservando che un corpo uniformemente compresso diminuisce di volume e quindi la compressibilità

$$\beta = \frac{3(1-2K)}{E}$$

definita nel paragrafo precedente durante lo studio del caso del corpo uniformemente compresso, è sempre maggiore di zero allora succederà che (sempre per via di $E > 0$):

$$3(1-2K) > 0 \Leftrightarrow K > \frac{1}{2}$$

Si deve sempre tenere presente che questi ragionamenti sono riferiti a corpi isotropi difatti si conoscono corpi non isotropi come i fili di seta per cui si ha un coefficiente $K > \frac{1}{2}$ Le misure del modulo di poisson fatte fino ad oggi hanno dato difatti, sempre valori compresi tra 0 e 0,5: per la maggiorpaarte dei materiali metallici si ha di solito $K \simeq 0,3$. Casi limite sono stati misurati in particolari materiali quali il sughero che presenta un coefficiente di Poisson molto vicino a zero ed il cauciù che ha $K \simeq \frac{1}{2}$ e quindi compressibilità β quasi nulla.
Questo vale,naturalmente, entro i limiti di della legge di Hooke mentre le deformazioni elastiche di cui è capace il cauciù superano ampiamente tali limiti.

3.1.3 Cenni sui fluidi

Nel caso dei fluidi come abbiamo visto il tensore degli sforzi si presenta come:

$$\vec{\Phi} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix}$$

Il caso dei fluidi è caratterizzato dal fatto che, in un fluido, non si richiede alcuno sforzo per cambiarne la forma purchè non se ne alteri il volume.
Da ciò segue che nella formula che lega P alle $\gamma_{i,j}$ queste dovranno entrare soltanto attraverso la loro combinazione $\gamma = \sum_{i=1}^{3} \gamma_{i,i}$ che rappresenta come ormai è noto il coefficiente di dilatazione cubica.
Tale formula sarà allora:

$$(18) \quad P = -\frac{1}{\alpha}\gamma + P_0$$

dove P_0 è la pressione al momento iniziale cioè nello stato dal quale si contano le deformazioni,(per esempio bel caso dei gas si preferisce un' atmosfera

perchè un gas a pressione nulla è troppo rarefatto) ed α è un coefficiente positivo che caratterizza il fluido.
Se si pone $p = P - P_0$ cioè si indica con p l'eccesso di pressione rispetto allo stato iniziale la precedente formula diventa

$$p = -\frac{1}{\alpha}\gamma$$

ovvero

$$\gamma = -\alpha p$$

Confrontandola con la formula ottenuta durante lo studio della compressione uniforme notiamo che α altro non è che la compressibilità del fluido indicata precedentemente con β (almeno per pressione prossime a P_0).
Tale costante si può ricavare quando si conosce l'equazione di stato del fluido (cioè la relazione che lega la pressione P il volume V e la temperatura T) e quando sono precisate le condizioni termiche in cui avviene la deformazione (per esempio condizioni isotermiche o adiabatiche) in tal caso infatti l'equazione di stato fornisce una relazione del tipo:

$$P = f(V).$$

(19) Ora se il volume occupato dal fluido a pressione P_0 è V_0 e quello occupato alla pressione $P = P_0 + p$ è $V = V_0(1+\gamma)$ con $(\gamma << 1)$si avrà:

$$P_0 = f(V_0) \qquad P_0 + p = f(V_0 + V_0\gamma)$$

e quindi sviluppando la seconda relazione in serie di Taylor e trascurando le potenze di γ superiori alla prima si otterrà :

$$p = f^{'}(V_0)V_0\gamma$$

e quindi

$$\frac{1}{\alpha} = -f^{'}(V_0)V_0$$

(20) Concludiamo il caso dei fluidi portando l'esempio del comportamento di un gas perfetto prima in condizioni isoterme poi in condizioni adiabatiche:

Esempio: 3 *(gas perfetto in condizioni adiabatiche)*
l'equazione (19) , nel caso di un gas perfetto sotto dette condizioni, diventa

$$P = CV^{-K}$$

dove C è una costante e $K = \frac{c_p}{c_v}$ è il rapporto tra i calori specifici del gas a pressione costante e a volume costante.
Si trova così applicando la formula (20)

$$\frac{1}{\alpha} = CKV_0^{-K} = KP_0$$

Esempio: 4 *(gas perfetto in condizioni isoterme)*
L'equazione di stato in questo caso è data dalla legge di Boyle che si esprime così:

$$P = \frac{C}{V}$$

con C costante.
Quindi il caso del gas perfetto in condizioni isoterme può essere fatto rientrare nel caso precdentemente descritto ponendo K=1 e quindi si ricaverà la relazione :

$$\frac{1}{\alpha} = P_0$$

Per quanto riguarda i liquidi α si trova misurando col piezometro la compressibilità (di solito in condizioni isoterme, anche se quella adiabatica non è molto differente da questa). Si si trova sempre un valore di α che sta dentro certi limiti indipendentemente dalla pressione, diversa per diversi liquidi e molto più piccola che per i gas.

Conclusioni

In conclusione siamo arrivati alle relazioni che legano sforzi e deformazioni in un qualunque corpo elastico che obbedisce alla legge di Hooke.
Il passo successivo è quello di affrontare uno studio dinamico della cosa sostituendo, per il principio di D' Alembert, le forze perdute alle forze attive nelle equazioni trovate e ottenendo così le celebri **equazioni di Navier**.
Per chi fosse interessato alla cosa sappia che può trovarla in qualunque libro di fisica che tratti di meccanica dei continui o scienze delle costruzioni, o troverà i riferimenti che ho usato nelle Bibliografia.

Ringraziamenti

Colgo l'occasione pre ringraziare quei compagni di corso che mi sono stati vicini duranti gli studi, e tutti coloro che mi hanno appoggiato in questi anni di a Bologna a tutti voi un sentito grazie.

Bibliografia

[1] Enrico Persico *Introduzione alla Fisica Matematica.* Einaudi, 1954

[2] A E Love -Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity 1921