Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

SOLUZIONE FONDAMENTALE PER OPERATORI DIFFERENZIALI IPOELLITTICI OMOGENEI SU GRUPPI DI CARNOT

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
BRUNO FRANCHI

Presentata da:
LUCA LOMBARDINI

II Sessione
Anno Accademico 2010/2011

Introduzione

Nella teoria degli operatori differenziali ellittici, gli operatori a coefficienti costanti servono come modelli per la situazione generale, in quanto lo studio degli operatori a coefficienti variabili può essere spesso ridotto, almeno localmente, a quello degli operatori a coefficienti costanti grazie ad argomenti perturbativi. D'altra parte, gli operatori a coefficienti costanti possono vantaggiosamente essere trattati con le tecniche dell'analisi armonica Euclidea, come la trasformata di Fourier e gli operatori di convoluzione.

Osserviamo ora che gli operatori a coefficienti costanti non sono altro che gli operatori invarianti per traslazioni sul gruppo di Lie abeliano $(\mathbb{R}^n, +)$. Da questo punto di vista, è quindi naturale cercare di costruire una classe di modelli per operatori non ellittici tra gli operatori invarianti per traslazioni su opportuni gruppi di Lie non abeliani.

Una classe di gruppi di Lie di questo tipo, sufficientemente generale da permettere una grande varietà di applicazioni, è quella dei gruppi di Carnot. Questi gruppi sono infatti una generalizzazione naturale del gruppo Euclideo e forniscono alcuni degli esempi più semplici ed interessanti di strutture sub-Riemanniane, un tipo di struttura geometrica molto studiato negli ultimi anni per trattare problemi di geometria differenziale, teoria geometrica della misura, equazioni differenziali sub-ellittiche, variabile complessa, teoria del controllo ottimo, meccanica non olonomica.

Un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ è un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso la cui algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è stratificata. Più precisamente, questo significa che l'algebra $\mathfrak{g}$, di dimensione n, ammette una stratificazione di passo κ, cioè esistono dei sottospazi lineari $V_1, ..., V_\kappa$, gli strati di $\mathfrak{g}$, t.c.

$$\mathfrak{g} = V_1 \oplus ... \oplus V_\kappa, \quad [V_1, V_i] = V_{i+1}, \quad V_\kappa \neq \{0\}, \quad V_i = \{0\} \text{ se } i > \kappa,$$

dove con $[V_1, V_i]$ si intende il sottospazio di $\mathfrak{g}$ generato dai commutatori $[X, Y]$, con $X \in V_1$ e $Y \in V_i$. In particolare, il primo strato ha un ruolo centrale, perché genera l'intera algebra $\mathfrak{g}$ con commutazioni iterate.

Associata alla stratificazione c'è una famiglia di automorfismi, quella delle dilatazioni non isotrope, che fornisce una nozione naturale di omogeneità per il gruppo. Inoltre, tramite le coordinate esponenziali, $\mathbb{G}$ può essere identificato con $(\mathbb{R}^n, \cdot)$, lo spazio $\mathbb{R}^n$ dotato di un'opportuna operazione di gruppo, in generale non abeliana. Queste coordinate globali sono fondamentali perché permettono di definire una misura di Haar su $\mathbb{G}$, che non è altro che la misura di Lebesgue letta attraverso le coordinate esponenziali, e questo permette di sviluppare una "analisi armonica" del gruppo, analoga a quella Euclidea.

Tramite la famiglia delle traslazioni, è inoltre possibile sviluppare una teoria per operatori differenziali invarianti per traslazioni.

Una definizione molto importante è quella di soluzione fondamentale di un operatore differenziale L invariante per traslazioni (a sinistra).

Una soluzione fondamentale (globale) è una distribuzione K t.c. $LK = \delta_0$ su $\mathbb{G}$, dove δ_0 indica la distribuzione Delta di Dirac.
Una simile distribuzione è importante perchè, per ogni distribuzione Ψ a supporto compatto, la convoluzione $u = \Psi * K$ risolve il problema $Lu = \Psi$ su $\mathbb{G}$.

Fissata una base $X_1, \dots, X_m$ di campi vettoriali invarianti per traslazioni (a sinistra) del primo strato, è possibile definire un particolare tipo di operatore differenziale invariante per traslazioni, il Sub-Laplaciano $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^m X_j^2$, che presenta caratteristiche analoghe al Laplaciano ordinario Δ.

I due risultati centrali di questa tesi sono la dimostrazione dell'esistenza ed unicità della soluzione fondamentale omogenea di un Sub-Laplaciano e la dimostrazione del seguente principio del massimo forte:

Teorema 0.1. *Sia u una funzione C^2 definita su un aperto connesso $\Omega \subset \mathbb{G}$ e sia $\mathcal{L}u \geq 0$ su Ω e sia $x_0 \in \Omega$ punto di massimo per u.*
Allora u è costante.

In particolare questo Teorema permette di dimostrare alcune proprietà della soluzione fondamentale di un Sub-Laplaciano: la negatività, la simmetria rispetto allo 0 e la presenza di un polo nello 0.

Il Capitolo 1 è diviso in due Sezioni. La prima contiene le definizioni e i risultati fondamentali riguardanti la struttura dei gruppi di Carnot e la seconda presenta alcune proprietà riguardanti le distribuzioni e la convoluzione su gruppi di Carnot.

Il Capitolo 2 inizia con la definizione di un operatore differenziale e sviluppa la teoria necessaria per poter dimostrare l'esistenza di una soluzione fondamentale locale per operatori differenziali invarianti per traslazioni ed ipoellittici. Dopo aver introdotto la nozione di operatore differenziale omogeneo, sfruttando l'esistenza di una soluzione fondamentale locale, viene poi dimostrata l'esistenza ed unicità della soluzione fondamentale globale omogenea per operatori differenziali invarianti per traslazioni, ipoellittici, la cui trasposta sia anch'essa ipoellittica, ed omogenei. Viene infine dimostrata una stima asintotica per la soluzione fondamentale omogenea.

Nel Capitolo 3 viene mostrato che i Sub-Laplaciani sono operatori differenziali del tipo precedente e che quindi ammettono un'unica soluzione fondamentale omogenea. Viene poi dato un esempio esplicito di soluzione fondamentale, per il Laplaciano di Kohn sul gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$.
Infine sono dimostrati il principio del massimo forte ed un Corollario che descrive le proprietà della soluzione fondamentale omogenea di un Sub-Laplaciano.

Per l'esposizione degli argomenti si è fatto riferimento principalmente a [5] e a [1].

Indice

Capitolo 1

Definizioni e Risultati Preliminari

1.1 Gruppi di Carnot

Definizione 1.1. Un *gruppo di Carnot* $\mathbb{G}$ *di passo* κ è un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso la cui algebra di Lie $\mathfrak{g}$ ammette una *stratificazione di passo* κ, cioè $\exists V_1, ..., V_\kappa$ sottospazi lineari di $\mathfrak{g}$ t.c.

$$\mathfrak{g} = V_1 \oplus ... \oplus V_\kappa, \quad [V_1, V_i] = V_{i+1}, \quad V_\kappa \neq \{0\}, \quad V_i = \{0\} \text{ se } i > \kappa, \quad (1.1)$$

dove con $[V_1, V_i]$ si intende il sottospazio di $\mathfrak{g}$ generato dai commutatori $[X, Y]$, con $X \in V_1$ e $Y \in V_i$.

Sia $m_i = \dim(V_i)$ per $i = 1, \ldots, \kappa$ la dimensione di V_i come sottospazio di $\mathfrak{g}$ e siano $h_0 = 0$, $h_j = m_1 + \cdots + m_j$; chiaramente $h_\kappa = \dim(\mathfrak{g}) = n$.
Un'importante famiglia di automorfismi di $\mathbb{G}$ è quella delle *traslazioni (a sinistra).* Per ogni $a \in \mathbb{G}$ la *traslazione (a sinistra)* di a è la funzione
$l_a : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$, definita da $x \mapsto l_a x := a \cdot x$.
Si osservi che, per la definizione di gruppo di Lie, l_a è una funzione C^∞.
Sia $L_a f(x) := (f \circ l_{a^{-1}})(x) = f(a^{-1}x)$ l'*operatore di traslazione a sinistra* di $a \in \mathbb{G}$. Allora $L_a(L_b f) = L_a(f \circ l_{b^{-1}}) = f \circ (l_{b^{-1}} \circ l_{a^{-1}}) = f \circ l_{(ab)^{-1}} = L_{ab} f$.
Un campo vettoriale X (a coefficienti C^∞) su $\mathbb{G}$ è *invariante per traslazioni a sinistra* se vale $L_a(Xf) = X(L_a f)$, per ogni $a \in \mathbb{G}$ e $f \in C^\infty(\mathbb{G})$.
Identifichiamo l'algebra $\mathfrak{g}$ dei campi vettoriali invarianti per traslazioni a sinistra con lo spazio tangente $T_e\mathbb{G}$, dove e è l'elemento neutro di $\mathbb{G}$, tramite la corrispondenza biunivoca $X \mapsto X(0) = u \in T_e\mathbb{G}$ e identifichiamo lo spazio vettoriale n-dimensionale $T_e\mathbb{G}$ con $\mathbb{R}^n$.

Fissata una base $e_1, \ldots, e_n$ di $\mathfrak{g}$ che rispetti la stratificazione, cioè t.c. $e_{h_{i-1}+1}, \ldots, e_{h_i}$ sia una base di V_i per $i = 1, \ldots, \kappa$, siano $W_1, \ldots, W_n$ i campi

vettoriali invarianti per traslazioni a sinistra t.c. $W_i(0) = e_i$.
Se indichiamo con $Lie(X_1, \dots, X_r)$ il sottospazio di $\mathfrak{g}$ generato dai campi vettoriali $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{g}$ e dalle loro commutazioni iterate, dalla definizione di stratificazione segue che $Lie(W_1, \dots, W_{m_1}) = \mathfrak{g}$.

Poiché l'algebra $\mathfrak{g}$ è stratificata, è anche *nilpotente* di passo κ. La mappa esponenziale $exp_{\mathbb{G}} : \mathfrak{g} \to \mathbb{G}$ è allora un diffeomorfismo e quindi ogni $p \in \mathbb{G}$ si scrive in modo unico $p = exp_{\mathbb{G}}(p_1 W_1 + \cdots + p_n W_n)$.
Queste *coordinate esponenziali* permettono allora di identificare ogni punto $p \in \mathbb{G}$ con $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ ed il gruppo $\mathbb{G}$ con $(\mathbb{R}^n, \circ)$, dove l'operazione di gruppo $\circ$ è determinata dalla formula di Campbell-Hausdorff come nella Proposizione 1.1.

La stratificazione induce inoltre una naturale struttura omogenea tramite la famiglia di automorfismi di $\mathbb{G}$ delle *dilatazioni*.
Per ogni $\lambda > 0$ la *dilatazione* $\delta_\lambda : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ è definita ponendo

$$\delta_\lambda(x_1, ..., x_n) = (\lambda^{d_1} x_1, ..., \lambda^{d_n} x_n), \tag{1.2}$$

dove $d_i \in \mathbb{N}$ è il *grado di omogeneità di x_i* in $\mathbb{G}$:

$$d_j = i \quad \text{se } h_{i-1} + 1 \leq j \leq h_i. \tag{1.3}$$

Quindi, in particolare:
$1 = d_1 = ... = d_{m_1} < d_{m_1+1} = 2 \leq ... \leq d_n = \kappa$
e $\delta_\lambda(x) = \lambda^j x,$ se $x \in V_j$.
L'intero

$$Q = \sum_{j=1}^{n} d_j = \sum_{i=1}^{\kappa} i \dim V_i \tag{1.4}$$

è la *dimensione omogenea* di $\mathbb{G}$.

Proposizione 1.1. *L'operazione di gruppo ha la forma*

$$x \cdot y = x + y + \mathcal{Q}(x, y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \tag{1.5}$$

con $\mathcal{Q}(x, y) = (\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_n) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e ciascun $\mathcal{Q}_i$ è un polinomio omogeneo di grado d_i rispetto alle dilatazioni naturali di $\mathbb{G}$ definite in (1.2), cioè

$$\mathcal{Q}_i(\delta_\lambda x, \delta_\lambda y) = \lambda^{d_i} \mathcal{Q}_i(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{G}.$$

Inoltre per ogni $x, y \in \mathbb{G}$:
$\mathcal{Q}_1(x, y) = \cdots = \mathcal{Q}_{m_1}(x, y) = 0,$
$\mathcal{Q}_j(x, 0) = \mathcal{Q}_j(0, y) = 0,$ *per $m_1 < j \leq n$,*
$\mathcal{Q}_j(x, x) = \mathcal{Q}_j(x, -x) = 0,$ *per $m_1 < j \leq n$.*

In particolare, per la Proposizione 1.1:

$$\delta_\lambda x \cdot \delta_\lambda y = \delta_\lambda(x \cdot y)$$

e l'inverso x^{-1} di un elemento $x = (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^n, \cdot)$ è

$$x^{-1} = (-x_1, \ldots, -x_n).$$

Esempio 1.1. Un esempio di gruppo di Carnot di passo 2 è il gruppo $\mathbb{H}$ di Heisenberg-Weyl su $\mathbb{R}^3$. L'operazione di gruppo è definita dalla mappa

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)). \quad (1.6)$$

Una base dell'algebra $\mathfrak{h}$ è data dai campi vettoriali

$$W_1 = \partial_{x_1} - \frac{x_2}{2}\partial_{x_3}, \quad W_1 = \partial_{x_2} + \frac{x_1}{2}\partial_{x_3}, \quad W_3 = \partial_{x_3}. \quad (1.7)$$

Un conto diretto mostra infatti che W_1, W_2, W_3 sono invarianti per traslazioni a sinistra rispetto all'operazione del gruppo. Inoltre, poiché

$$W_1(0) = \partial_{x_1}, \quad W_1(0) = \partial_{x_2}, \quad W_1(0) = \partial_{x_3}, \quad (1.8)$$

sono anche linarmente indipendenti.
Infine vale

$$[W_1, W_2] = W_3, \quad [W_1, W_3] = [W_2, W_3] = 0, \quad (1.9)$$

perciò $\mathbb{H}$ è effettivamente stratificato di passo 2, con
$\mathfrak{h} = V_1 \oplus V_2$, dove $V_1 = Span(W_1, W_2)$ e $V_2 = Span(W_3)$.
Si hanno quindi le dilatazioni

$$\delta_\lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda^2 x_3), \text{ per } \lambda > 0 \text{ e } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3. \quad (1.10)$$

Inoltre, leggendo l'operazione di gruppo come nella Proposizione 1.1:
$x \cdot y = x + y + (\mathcal{Q}_1(x, y), \mathcal{Q}_2(x, y), \mathcal{Q}_3(x, y))$,
dove $\mathcal{Q}_1(x, y) = \mathcal{Q}_2(x, y) = 0$ sono omogenei di grado 1 rispetto alle dilatazioni e $\mathcal{Q}_3(x, y) = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1))$ è omogeneo di grado 2.

La misura di Lebesgue n-dimensionale $\mathcal{L}^n$ è la misura di Haar del gruppo $\mathbb{G}$. Quindi se $E \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile, allora $\mathcal{L}^n(x \cdot E) = \mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n(E \cdot x)$ per ogni $x \in \mathbb{G}$. Inoltre per ogni $\lambda > 0$ vale $\mathcal{L}^n(\delta_\lambda(E)) = \lambda^Q \mathcal{L}^n(E)$.

Quindi per ogni funzione f integrabile su $\mathbb{G}$ vale:

$$\int_{\mathbb{G}} f(\delta_\lambda x)\, dx = \lambda^{-Q} \int_{\mathbb{G}} f(x)\, dx \qquad \text{per } \lambda > 0 \quad (1.11)$$

1.2 Distribuzioni e convoluzione

Identificando $\mathbb{G}$ con $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ tramite la mappa esponenziale, sono ben definiti lo spazio delle *funzioni test* $\mathcal{D}(\Omega) := C_0^\infty(\Omega)$ e il suo duale $\mathcal{D}'(\Omega)$, lo spazio delle *distribuzioni*, su $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto. In particolare sono ben definiti $\mathcal{D}(\mathbb{G})$ e $\mathcal{D}'(\mathbb{G})$.
La *delta di Dirac* centrata in $a \in \mathbb{G}$ è la distribuzione δ_a definita da:

$$\delta_a(\varphi) = \langle \delta_a | \varphi \rangle := \varphi(a),$$

per ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{G})$. In particolare $\delta_0(\varphi) = \varphi(0)$.

La convoluzione di due funzioni $f, g \in \text{Ł}^1(\mathbb{G})$ è la funzione $f * g$ definita:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{G}} f(xy^{-1}) g(y)\, dy = \int_{\mathbb{G}} f(y) g(y^{-1}x)\, dy. \tag{1.12}$$

Vale la seguente Proposizione:

Proposizione 1.2. $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{G}) \Rightarrow f * g \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$.
Inoltre: $(f, g) \mapsto f * g$ *è una mappa continua* $\mathcal{D}(\mathbb{G}) \times \mathcal{D}(\mathbb{G}) \to \mathcal{D}(\mathbb{G})$.

Data $f \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$, definiamo la funzione $\check{f} \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$ ponendo $\check{f}(x) = f(x^{-1})$.

Definizione 1.2. Data una distribuzione $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{G})$ ed una funzione test $f \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$, si definisce la convoluzione di Φ con f ponendo:

$$\Phi * f(x) = \langle \Phi | L_x \check{f} \rangle. \tag{1.13}$$

Introducendo l'operatore delle traslazioni a destra $R_a f(x) = f(xa)$, si può definire anche $f * \Phi$ ponendo:

$$f * \Phi(x) = \langle \Phi | R_{x^{-1}} \check{f} \rangle. \tag{1.14}$$

Esempio 1.2. In particolare, se $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$, considerando la distribuzione associata a Φ: $\langle \Phi | \varphi \rangle := \int_{\mathbb{G}} \Phi(x)\varphi(x)\, dx$, si ha, per ogni $f \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$:

$$\begin{aligned} \Phi * f(x) = \langle \Phi | L_x \check{f} \rangle &= \int_{\mathbb{G}} \Phi(y) L_x \check{f}(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{G}} \Phi(y) f(y^{-1}x)\, dy; \end{aligned}$$

che è la convoluzione di Φ, considerata come funzione, con f.

Proposizione 1.3. *Se* $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{G})$ *e* $f \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$, *allora* $\Phi * f$ *e* $f * \Phi$ *sono funzioni* C^∞ *su* $\mathbb{G}$.

Esempio 1.3. $\delta_a * f = L_a f$, infatti:

$$\begin{aligned}\delta_a * f(x) &= \langle \delta_a | L_x \check{f} \rangle = L_x \check{f}(a) \\ &= \check{f}(x^{-1}a) = f(a^{-1}x) \\ &= L_a f(x).\end{aligned}$$

Analogamente $f * \delta_a = R_{a^{-1}} f$.

Esempio 1.4. Sia X un campo vettoriale invariante per traslazioni a sinistra e sia $X(0) = u$. Allora:

$$f * \partial_u \delta_0(x) = Xf(x). \tag{1.15}$$

Infatti:

$$\begin{aligned}f * \partial_u \delta_0(x) &= \langle \partial_u \delta_0 | R_{x^{-1}} \check{f} \rangle = -\langle \delta_0 | \partial_u (R_{x^{-1}} \check{f}) \rangle \\ &= -\partial_u (R_{x^{-1}} \check{f})(0) = -\partial_u (\widecheck{L_{x^{-1}} f})(0) \\ &= \partial_u (L_{x^{-1}} f)(0) = Xf(x).\end{aligned}$$

Definizione 1.3. Si possono definire anche le traslazioni $L_a \Phi, R_a \Phi$ di una distribuzione $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{G})$ ponendo:

$$\langle L_a \Phi | f \rangle = \langle \Phi | L_{a^{-1}} f \rangle, \quad \langle R_a \Phi | f \rangle = \langle \Phi | R_{a^{-1}} f \rangle.$$

Questa definizione è motivata dall'osservazione seguente:

Osservazione 1. Date $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$, dalle proprietà di invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue su $\mathbb{G}$ segue:

$$\langle L_a f | g \rangle = \int_{\mathbb{G}} f(a^{-1}x) g(x)\, dx = \int_{\mathbb{G}} f(x) g(ax)\, dx = \langle f | L_{a^{-1}} g \rangle.$$

Analogamente per traslazioni a destra.

Data una distribuzione $\Phi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si può definire la sua restrizione ad $A \subset \Omega$ aperto, $\Phi_{|A}$, ponendo:

$$\langle \Phi_{|A} | \varphi \rangle := \langle \Phi | \tilde{\varphi} \rangle, \text{ per } \varphi \in \mathcal{D}(A)$$

dove $\tilde{\varphi}$ è la funzione test φ estesa con 0 fuori dal supporto.
Si può allora definire il supporto di una distribuzione $\Phi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ come il sottoinsieme $\mathrm{supp}\Phi \subset \Omega$ dei punti $x \in \Omega$ per i quali non esiste un intorno aperto $U_x \subset \Omega$ t.c. $\Phi_{|U_x} = 0$.

Definizione 1.4. Siano $\Phi, \Psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{G})$; se almeno una delle due, sia Φ, ha supporto compatto, si possono definire le distribuzioni $\Phi * \Psi$ e $\Psi * \Phi$ ponendo:

$$\langle \Phi * \Psi | \varphi \rangle = \langle \Psi | \check{\Phi} * \varphi \rangle, \tag{1.16}$$

$$\langle \Psi * \Phi | \varphi \rangle = \langle \Psi | \varphi * \check{\Phi} \rangle, \tag{1.17}$$

dove $\check{\Phi}$ è la distribuzione t.c.

$$\langle \check{\Phi} | \varphi \rangle = \langle \Phi | \check{\varphi} \rangle.$$

Osservazione 2. La definizione è ben posta poiché vale la regola:

$$\mathrm{supp}(\Phi * f) \subset (\mathrm{supp}(\Phi))(\mathrm{supp}(f)),$$

per ogni $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{G})$ e $f \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$; quindi: $\check{\Phi} * \varphi, \varphi * \check{\Phi} \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$.

Proposizione 1.4. *Sia* $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{G})$*; allora:*

$$L_a \Phi = \delta_a * \Phi, \quad R_a \Phi = \Phi * \delta_{a^{-1}}. \tag{1.18}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \langle L_a \Phi | \varphi \rangle &= \langle \Phi | L_{a^{-1}} \varphi \rangle \quad \text{(per definizione)} \\ &= \langle \Phi | \delta_{a^{-1}} * \varphi \rangle \quad \text{(per l'esempio 1.3)} \\ &= \langle \Phi | \check{\delta_a} * \varphi \rangle = \langle \delta_a * \Phi | \varphi \rangle. \end{aligned}$$

□

Poiché $\mathbb{G}$ è identificato con $(\mathbb{R}^n, \cdot)$, sono ben definiti anche lo spazio delle *funzioni test a decrescenza rapida* $\mathcal{S}(\mathbb{G})$ ed il suo duale $\mathcal{S}'(\mathbb{G})$, lo spazio delle *distribuzioni temperate*.
Tutte le definizioni e le proposizioni precedenti valgono anche per $\mathcal{S}(\mathbb{G})$ e $\mathcal{S}'(\mathbb{G})$.

Esempio 1.5. Sia T un *operatore di convoluzione* con *nucleo* $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{G})$, cioè:

$$Tf = f * K, \quad \text{per } f \in \mathcal{S}(\mathbb{G}).$$

T soddisfa l'identità:

$$T(L_a f) = L_a(Tf), \quad \forall a \in \mathbb{G},$$

quindi è un operatore invariante per traslazioni a sinistra. Infatti:

$$T(L_a f) = (L_a f) * K = (\delta_a * f) * K = \delta_a * (f * K) = L_a(Tf).$$

Capitolo 2

Soluzione Fondamentale

Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Carnot di passo κ identificato con $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ attraverso le coordinate esponenziali. Sia $\mathfrak{g} = V_1 \oplus ... \oplus V_\kappa$ la stratificazione di $\mathbb{G}$, sia $(\delta_\lambda)_{\lambda>0}$ la famiglia delle dilatazioni naturali e Q la dimensione omogenea di $\mathbb{G}$.

Definizione 2.1. Sia L un *operatore differenziale* di ordine m a coefficienti C^∞ su Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, cioè: $Lf(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha f(x)$, con $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ per ogni $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ multi-indice di altezza $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j \leq m$ e $f \in C^\infty(\Omega)$.
L'*operatore trasposto* di L è l'operatore differenziale ${}^tL$ definito dalla seguente uguaglianza:

$$\int_\Omega Lf(x)g(x)\,dx = \int_\Omega f(x)^tLg(x)\,dx, \quad \forall f, g \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.1}$$

Sarà allora: ${}^tLf(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} b_\alpha(x)\partial^\alpha f(x)$, con i $b_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ dati da combinazioni lineari di derivate dei coefficienti a_β.

Definizione 2.2. Sia $\Phi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e L un operatore differenziale di grado m; si definisce la distribuzione $L\Phi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ponendo

$$\langle L\Phi|\varphi\rangle = \langle \Phi|^tL\varphi\rangle, \qquad \text{per } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

In particolare allora, se $f \in C^k(\Omega)$, con $k < m$, si può interpretare Lf in senso distribuzionale.

Proposizione 2.1. *Sia X un campo vettoriale invariante per traslazioni a sinistra con $X(0) = u$ e siano $\Phi, \Psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{G})$; allora:*

$$X\Phi = \Phi * (\partial_u\delta_0)$$

e si hanno le seguenti identità:

$$\langle X\Phi|f\rangle = -\langle \Phi|Xf\rangle, \tag{2.2}$$

$$X(\Phi * \Psi) = \Phi * (X\Psi), \tag{2.3}$$

se la convoluzione è definita.

Dimostrazione. Per l'invarianza della misura di Lebesgue su $\mathbb{G}$ rispetto alle traslazioni, l'integrale

$$\int_{\mathbb{G}} f(xa)g(xa)\,dx,$$

con $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$, non dipende da $a \in \mathbb{G}$. In particolare, sia $a = exp_{\mathbb{G}}(tX)$, con $t \in \mathbb{R}$ in un intorno di 0; allora

$$\int_{\mathbb{G}} f(x \cdot exp_{\mathbb{G}}(tX))g(x \cdot exp_{\mathbb{G}}(tX))\,dx \equiv \int_{\mathbb{G}} f(x)g(x)\,dx.$$

Quindi la funzione $t \mapsto \int_{\mathbb{G}} f(x \cdot exp_{\mathbb{G}}(tX))g(x \cdot exp_{\mathbb{G}}(tX))\,dx$ è costante.
Poiché $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$, si può differenziare rispetto a t sotto il segno di integrale. In particolare, considerando la derivata in $t = 0$, si ha, per le proprietà dell'esponenziale:

$$\int_{\mathbb{G}} (Xf(x)g(x) + f(x)Xg(x))\,dx = 0.$$

Quindi $\langle Xf|g\rangle = -\langle f|Xg\rangle$, cioé ${}^tX = -X$.
Allora, per definizione

$$\langle X\Phi|\varphi\rangle = \langle \Phi|{}^tX\varphi\rangle = -\langle \Phi|X\varphi\rangle.$$

Quindi, per (1.15), si ha

$$\begin{aligned}\langle X\Phi|\varphi\rangle &= -\langle \Phi|\varphi * (\partial_u\delta_0)\rangle \\ &= -\langle \Phi * (\partial_u\delta_0)\check{}\,|\varphi\rangle \\ &= \langle \Phi * (\partial_u\delta_0)|\varphi\rangle,\end{aligned}$$

cioè $X\Phi = \Phi * (\partial_u\delta_0)$. Si ha allora:

$$X(\Phi * \Psi) = (\Phi * \Psi) * (\partial_u\delta_0) = \Phi * (\Psi * (\partial_u\delta_0)) = \Phi * (X\Psi).$$

□

Definizione 2.3. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia L un operatore differenziale su Ω a coefficienti C^∞. L è un operatore *ipoellittico* se, per ogni $\Omega' \subset \Omega$ aperto e $\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega')$, vale l'implicazione:

$$Lu \in C^\infty(\Omega') \Rightarrow u \in C^\infty(\Omega'). \tag{2.4}$$

Dicendo che una distribuzione $\Phi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è C^∞ si intende che $\exists \phi \in C^\infty(\Omega)$ t.c. $\langle \Phi | f \rangle = \int_\Omega \phi(x) f(x)\, dx, \forall f \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Definizione 2.4. Sia $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{G})$ una distribuzione. Per ogni dilatazione δ_λ si definisce la distribuzione $\Phi \circ \delta_\lambda$ ponendo:

$$\langle \Phi \circ \delta_\lambda | f \rangle = \langle \Phi | \lambda^{-Q} f \circ \delta_{\lambda^{-1}} \rangle, \tag{2.5}$$

per ogni funzione test $f \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$.

Osservazione 3. La definizione precedente è giustificata dal fatto che, se la distribuzione $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{G})$ è localmente integrabile, cioè se:

$$\langle \Phi | f \rangle = \int_{\mathbb{G}} \phi(x) f(x)\, dx, \qquad \text{per ogni } f \in \mathcal{D}(\mathbb{G}),$$

con $\phi \in L^1_{loc}(\mathbb{G})$, allora:

$$\int_{\mathbb{G}} \phi(\delta_\lambda x) f(x)\, dx = \int_{\mathbb{G}} \phi(\delta_\lambda x) f(\delta_\lambda (\delta_{\lambda^{-1}} x)\, dx,$$

poiché $\delta_\lambda \circ \delta_{\lambda^{-1}} = Id_{\mathbb{G}}$. Da 1.11 segue allora che:

$$\int_{\mathbb{G}} \phi(\delta_\lambda x) f(\delta_\lambda (\delta_{\lambda^{-1}} x)\, dx = \lambda^{-Q} \int_{\mathbb{G}} \phi(x) f(\delta_{\lambda^{-1}} x)\, dx = \langle \Phi | \lambda^{-Q} f \circ \delta_{\lambda^{-1}} \rangle.$$

Definizione 2.5. Una distribuzione Φ su $\mathbb{G}$ è *omogenea di grado* $\alpha \in \mathbb{C}$ se

$$\Phi \circ \delta_\lambda = \lambda^\alpha \Phi,$$

per ogni $\lambda > 0$.

Esempio 2.1. La delta di Dirac nell'elemento neutro δ_0 è omogenea di grado $-Q$, infatti:

$$\begin{aligned} \langle \delta_0 \circ \delta_\lambda | f \rangle &= \langle \delta_0 | \lambda^{-Q} f \circ \delta_{\lambda^{-1}} \rangle = \lambda^{-Q} f(\delta_{\lambda^{-1}}(0)) = \lambda^{-Q} f(0) \\ &= \langle \lambda^{-Q} \delta_0 | f \rangle. \end{aligned}$$

Esempio 2.2. Sia $X \in V_j$, dove V_j è il j-esimo sottospazio della stratificazione di $\mathfrak{g}$. Allora $X(f \circ \delta_\lambda)(x) = \lambda^j X f(\delta_\lambda x)$.
Inoltre, se $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{G})$ è una distribuzione omogenea di grado α, allora $X\Phi$ è una distribuzione omogenea di grado $\alpha - j$.
Infatti:

$$\begin{aligned} \langle (X\Phi) \circ \delta_\lambda | f \rangle &= \lambda^{-Q} \langle X\Phi | f \circ \delta_{\lambda^{-1}} \rangle \\ &= -\lambda^{-Q} \langle \Phi | X(f \circ \delta_{\lambda^{-1}}) \rangle \quad \text{(per 2.2)} \\ &= -\lambda^{-Q-j} \langle \Phi | (Xf) \circ \delta_{\lambda^{-1}}) \rangle \\ &= -\lambda^{-j} \langle \Phi \circ \delta_\lambda | Xf \rangle \\ &= -\lambda^{\alpha-j} \langle \Phi | Xf \rangle \\ &= \lambda^{\alpha-j} \langle X\Phi | f \rangle \quad \text{(di nuovo per 2.2).} \end{aligned}$$

Teorema 2.2. *Sia T come nell'esempio 1.5, cioè $Tf = f * K$ per $f \in \mathcal{S}(\mathbb{G})$, con $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{G})$ (analogamente se $K \in \mathcal{D}'(\mathbb{G})$ e $f \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$). Allora:*

$$T(f \circ \delta_\lambda) = \lambda^{-\alpha} (Tf) \circ \delta_\lambda \tag{2.6}$$

se e solo se il nucleo K è omogeneo di grado $-Q + \alpha$.

Dimostrazione. Sia K omogeneo di grado $-Q + \alpha$. Allora

$$T(f \circ \delta_\lambda)(x) = (f \circ \delta_\lambda) * K(x) = \langle K | R_{x^{-1}} (f \circ \delta_\lambda)\check{} \rangle.$$

Ma $R_{x^{-1}}(f \circ \delta_\lambda)\check{}(y) = R_{(\delta_\lambda x)^{-1}} \check{f}(\delta_\lambda y)$, infatti:

$$\begin{aligned} R_{x^{-1}}(f \circ \delta_\lambda)\check{}(y) &= (f \circ \delta_\lambda)\check{}(yx^{-1}) = (f \circ \delta_\lambda)(xy^{-1}) \\ &= f(\delta_\lambda(x)\delta_\lambda(y^{-1})) = \check{f}(\delta_\lambda(y)(\delta_\lambda x)^{-1}) \\ &= R_{(\delta_\lambda x)^{-1}} \check{f}(\delta_\lambda y); \end{aligned}$$

quindi:

$$\begin{aligned} T(f \circ \delta_\lambda)(x) &= \langle K | (R_{(\delta_\lambda x)^{-1}} \check{f}) \circ \delta_\lambda \rangle \\ &= \lambda^{-Q} \langle K \circ \delta_{\lambda^{-1}} | R_{(\delta_\lambda x)^{-1}} \check{f} \rangle \\ &= \lambda^{-\alpha} \langle K | R_{(\delta_\lambda x)^{-1}} \check{f} \rangle \\ &= \lambda^{-\alpha} (f * K)(\delta_\lambda x) \\ &= \lambda^{-\alpha} (Tf)(\delta_\lambda x). \end{aligned}$$

Viceversa, se T soddisfa 2.6, allora

$$\langle K | f \circ \delta_\lambda \rangle = T(\check{f} \circ \delta_\lambda)(0) = \lambda^{-\alpha} (T\check{f})(0) = \lambda^{-\alpha} \langle K | f \rangle.$$

Quindi K è omogenea di grado $-Q + \alpha$.

□

Definizione 2.6. Un operatore differenziale D su $\mathbb{G}$ è *invariante per traslazioni (a sinistra)* se $L_a(Df) = D(L_a f)$ per ogni $a \in \mathbb{G}$.

Esempio 2.3. Siano $X_1, \ldots, X_r$ campi vettoriali su $\mathbb{G}$ invarianti per traslazioni a sinistra. Allora l'operatore differenziale $L = X_1 X_2 \ldots X_r$ è invariante per traslazioni a sinistra e tale è anche ogni operatore differenziale dato da combinazioni lineari di composizioni di questo tipo.

Sia $W_1, \ldots, W_n$ una base di campi vettoriali di $\mathfrak{g}$ che ne rispetti la stratificazione; in particolare $Lie(W_1, \ldots, W_{m_1}) = \mathfrak{g}$.
Sia $W_j(0) = e_j \in T_0\mathbb{G} \simeq \mathbb{R}^n$ per $j = 1, \ldots, n$. Allora $W_j(0)f = \partial_{e_j} f$.
Dato un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, si definisce

$$W^\alpha = W_1^{\alpha_1} W_2^{\alpha_2} \ldots W_n^{\alpha_n}.$$

Il Teorema seguente permette di caratterizzare gli operatori differenziali invarianti per traslazioni (a sinistra):

Teorema 2.3 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** *Sia L un operatore differenziale invariante per traslazioni a sinistra su $\mathbb{G}$. Allora L si può scrivere in un unico modo come*

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha W^\alpha. \tag{2.7}$$

Osservazione 4. L'unicità della rappresentazione precedente dipende dal fatto che i campi vettoriali $W_1, \ldots, W_n$ sono ordinati e che tale ordine è rispettato nelle composizioni W^α. Se si tralascia la restrizione dell'ordine di composizione un operatore può avere più rappresentazioni.
Per esempio:
sia $W_3 = [W_1, W_2]$ e sia $L = W_2 W_1$.
La corretta espressione di L secondo 2.7 è:

$$L = W_1 W_2 - W_3.$$

Definizione 2.7. Sia L un operatore differenziale su $\mathbb{G}$ invariante per traslazioni a sinistra. Una distribuzione K su $\mathbb{G}$ è una *soluzione fondamentale (globale)* di L se $LK = \delta_0$. Una distribuzione K_0 su un intorno aperto V di 0 è una *soluzione fondamentale locale* di L se $LK_0 = \delta_0$ su V.

L'importanza di una soluzione fondamentale è data dal seguente Lemma:

Lemma 2.4. *Se L ha una soluzione fondamentale K, allora:*
per ogni $\Psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{G})$ con supporto compatto, la convoluzione

$$u = \Psi * K$$

soddisfa

$$Lu = \Psi \qquad \textit{su tutto } \mathbb{G}.$$

Dimostrazione. Per il teorema di Poincaré-Birkhoff-Witt $L = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha W^\alpha$. Sia $c_\beta W^\beta = c_\beta W_1^{\beta_1} \dots W_n^{\beta_n}$ uno dei termini che compare nella sommatoria. Allora per 2.3 si ha:

$$c_\beta (W_1^{\beta_1} \dots W_n^{\beta_n})(\Psi * K) = \Psi * (c_\beta W_1^{\beta_1} \dots W_n^{\beta_n} K)$$

e questo vale per ogni termine della sommatoria, perció:

$$\begin{aligned} L(\Psi * K) &= \Psi * (LK) = \Psi * \delta_0 \\ &= \Psi \quad \text{(per 1.18)}. \end{aligned}$$

□

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ definiamo lo spazio $\mathcal{D}_k(\Omega) = C_0^k(\Omega)$ delle funzioni C^k con supporto compatto contenuto in Ω, rispetto alla norma C^k uniforme ed il suo spazio duale $\mathcal{D}'_k(\Omega)$.

Definizione 2.8. Un operatore differenziale L a coefficienti C^∞ su Ω è *localmente risolubile* in $x \in \Omega$ se per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un intorno aperto V_k di x t.c. per ogni distribuzione $\Psi \in \mathcal{D}'_k(\Omega)$ esiste una distribuzione $u \in \mathcal{D}'(V_k)$ t.c. $Lu = \Psi$ su V_k.

Osservazione 5. Lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ è contenuto in ciascuno degli spazi $\mathcal{D}_k(\Omega)$. Inoltre, se $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ è una successione di funzioni test che converge in $\mathcal{D}(\Omega)$ ad una funzione $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, per definizione si ha anche la convergenza in ciascuno degli spazi $\mathcal{D}_k(\Omega)$, cioè:

$$\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Rightarrow \varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}_k} \varphi, \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

Questo permette di concludere che $\mathcal{D}'_k(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Proposizione 2.5. *Sia L un operatore differenziale su $\mathbb{G}$ invariante per traslazioni a sinistra. Allora L ha una soluzione fondamentale locale K_0 se e solo se è localmente risolubile in ogni punto di $\mathbb{G}$.*

Dimostrazione. Sia L localmente risolubile in ogni punto di $\mathbb{G}$.
In particolare L è localmente risolubile in 0, quindi, per definizione, esistono un intorno aperto V di 0 e $K_0 \in \mathcal{D}'(V)$ t.c. $LK_0 = \delta_0$ su V.

Viceversa, sia $K_0 \in \mathcal{D}'(V)$ una soluzione fondamentale locale di L.
Per l'Osservazione precedente è sufficiente far vedere che per ogni $p \in \mathbb{G}$ esiste un intorno aperto V_p di p t.c. per ogni $\Psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{G})$, $\exists u \in \mathcal{D}'(V_p)$ che soddisfa $Lu = \Psi$ su V_p.

Sia $V' \subset V$ un intorno aperto di 0 e sia $\eta \in \mathcal{D}(V)$ t.c. $\eta(x) = 1$, per ogni $x \in V'$. Sia $K' = \eta K_0$. Allora, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(V')$,

$$\langle LK'|\varphi\rangle = \langle L(\eta K_0)|\varphi\rangle = \langle \eta K_0|^t L\varphi\rangle = \langle K_0|\eta^t L\varphi\rangle.$$

Ma $\text{supp}(\varphi) \subset V' \Rightarrow \text{supp}(^t L\varphi) \subset V'$ e $\eta \equiv 1$ su V'. Perciò

$$\langle K_0|\eta^t L\varphi\rangle = \langle K_0|^t L\varphi\rangle = \langle LK_0|\varphi\rangle.$$

Poiché $\text{supp}(\varphi) \subset V' \subset V$, φ si può vedere come funzione test su V. Allora, per la definizione di soluzione fondamentale locale

$$\langle LK'|\varphi\rangle = \langle LK_0|\varphi\rangle = \langle \delta_0|\varphi\rangle = \varphi(0),$$

cioè $LK' = \delta_0$ su V'.
K' si può vedere come distribuzione su $\mathbb{G}$ con supporto compatto ponendo, per $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$

$$\langle K'|\varphi\rangle := \langle K_0|\eta\varphi\rangle.$$

La definizione è ben posta perché $\eta\varphi \in \mathcal{D}(V)$. Inoltre, poiché il complementare di V è aperto, per ogni $x \in \mathbb{G}\backslash V$ esiste un intorno aperto U_x di x contenuto in $\mathbb{G}\backslash V$. Allora per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$ con supporto contenuto in U_x si ha $\eta\varphi = 0$, quindi

$$\langle K'|\varphi\rangle = \langle K_0|\eta\varphi\rangle = \langle K_0|0\rangle = 0,$$

cioè $K'_{|U_x} = 0$ per ogni $x \in \mathbb{G}\backslash V$. Perciò $\text{supp}(K') \subset V$.
Allora LK' è definita su tutto $\mathbb{G}$ e, poiché $LK' = \delta_0$ su V', si ha

$$LK' = \delta_0 + \Phi, \tag{2.8}$$

dove $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{G})$ è una distribuzione su $\mathbb{G}$ il cui supporto non interseca V'.
Sia W un intorno aperto di 0 t.c. $W^{-1}W \subset V'$, dove $W^{-1} = \{x^{-1}|x \in W\}$ e $W^{-1}W = \{x \cdot x'|x \in W^{-1}, x' \in W\}$.
Siano $W' \subset W$ un intorno aperto di 0 e $\tilde{\eta} \in \mathcal{D}(W)$ t.c. $\tilde{\eta} \equiv 1$ su W'.

Poiché K' ha supporto compatto, per ogni distribuzione $\Psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{G})$ è ben definita la convoluzione $u = (\tilde{\eta}\Psi) * K' \in \mathcal{D}'(\mathbb{G})$.
Inoltre poiché L è invariante per traslazioni a sinistra si ha, come nella dimostrazione del Lemma 2.4

$$\begin{aligned} Lu &= L((\tilde{\eta}\Psi) * K') = (\tilde{\eta}\Psi) * LK' \\ &= (\tilde{\eta}\Psi) * (\delta_0 + \Phi) \quad \text{(per 2.8)} \\ &= \tilde{\eta}\Psi + (\tilde{\eta}\Psi) * \Phi. \end{aligned}$$

Per l'ultimo termine vale

$$\operatorname{supp}((\tilde{\eta}\Psi) * \Phi) \subset (\operatorname{supp}(\tilde{\eta}\Psi))(\operatorname{supp}(\Psi)) \subset W(\mathbb{G}\backslash V')$$

e, per l'ipotesi $W^{-1}W \subset V'$, questo insieme ha intersezione vuota con W. Perciò $Lu = \tilde{\eta}\Psi$ su W, da cui segue $Lu = \Psi$ su W'.

Siano ora $p \in \mathbb{G}$ e $\Psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{G})$. Consideriamo la distribuzione $\tilde{\Psi} := L_p\Psi$. Per quanto appena dimostrato $\exists u \in \mathcal{D}'(\mathbb{G})$ t.c. $Lu = \tilde{\Psi} + \tilde{\Phi}$, con $\tilde{\Phi} \in \mathcal{D}'(\mathbb{G})$ il cui supporto non interseca W'.
Sia $\tilde{u} = L_{p^{-1}}u$. Allora, poiché L è invariante per traslazioni a sinistra:

$$\begin{aligned} L\tilde{u} &= L(L_{p^{-1}}u) = L_{p^{-1}}(Lu) \\ &= L_{p^{-1}}\tilde{\Psi} + L_{p^{-1}}\tilde{\Phi} = L_{p^{-1}}(L_p\Psi) + L_{p^{-1}}\tilde{\Phi} \\ &= \Psi + L_{p^{-1}}\tilde{\Phi}. \end{aligned}$$

L'insieme $V_p = p \cdot W'$ è un intorno aperto di p.
Inoltre $\operatorname{supp}(\tilde{\Phi}) \subset \mathbb{G}\backslash W' \Rightarrow \operatorname{supp}(L_{p^{-1}}\tilde{\Phi}) \subset \mathbb{G}\backslash V_p$, perciò $Lv = \Psi$ su V_p.

$\square$

Dato $K \in \mathbb{R}^n$ compatto e $m \in \mathbb{N}$, si definisce lo spazio $\mathcal{D}_m(K)$ come lo spazio delle funzioni $C^m(K)$ il cui supporto è contenuto in K, rispetto alla norma C^m uniforme $\|\cdot\|_m$. Lo spazio $\mathcal{D}(K) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_m(K)$ è allora lo spazio di Fréchet delle funzioni $C^\infty(K)$ con supporto in K, rispetto alla famiglia di norme C^m.
Per operatori differenziali ipoellittici vale la seguente stima locale:

Teorema 2.6. *Sia L un operatore differenziale ipoellittico su $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Per ogni $x \in \Omega$ e $k \in \mathbb{N}$, esistono $U_k \subset \Omega$ intorno compatto di x, $C_k \in \mathbb{R}^+$ e $m \in \mathbb{N}$ t.c.*

$$\|f\|_k \leq C_k\|Lf\|_m, \tag{2.9}$$

per ogni $f \in \mathcal{D}(U_k)$.
In particolare L è iniettivo su $\mathcal{D}(U_k)$.

Teorema 2.7. *Sia L un operatore differenziale ipoellittico su $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Allora ${}^tL$ è localmente risolubile in ogni punto di Ω.*

Dimostrazione. Dato $x \in \Omega$, sia U_0 un intorno compatto di x.
Data $\Psi \in \mathcal{D}'(\Omega)$, esistono $k \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ t.c.

$$|\langle\Psi|f\rangle| \leq C\|f\|_k$$

per ogni $f \in \mathcal{D}(U_0)$. Sia $U = U_k$ come nel Teorema 2.6. Si può assumere $U \subset U_0$. Sia $X = \{Lg | g \in \mathcal{D}(U)\}$; poiché L è ipoellittico $X \subset \mathcal{D}(U)$.

Sia $\lambda : X \to \mathbb{C}$ il funzionale lineare

$$Lg \mapsto \lambda(Lg) := \langle \Psi | g \rangle.$$

Per il Teorema 2.6 L è iniettivo su U_0, quindi λ è ben definito. Inoltre

$$|\lambda(Lg)| = |\langle \Psi | g \rangle| \leq C \|g\|_k \leq C' \|Lg\|_m.$$

Quindi λ è un funzionale lineare continuo su X, visto come sottospazio di $\mathcal{D}_m(U)$. Allora, per il Teorema di Hahn-Banach, λ si prolunga ad un funzionale lineare continuo $\tilde{\lambda} : \mathcal{D}_m(U) \to \mathbb{C}$.
Sia $V = Int(U)$ l'interno di U; allora $\mathcal{D}(V) \subset \mathcal{D}_m(V) \subset \mathcal{D}_m(U)$. Quindi c'è una distribuzione $u \in \mathcal{D}'_m(V)$ t.c. $\tilde{\lambda}(f) = \langle u | f \rangle$ per $f \in \mathcal{D}(V)$.
In particolare, poiché $g \in \mathcal{D}(V) \Rightarrow Lg \in X \subset \mathcal{D}(V)$,

$$\langle u | Lg \rangle = \tilde{\lambda}(Lg) = \lambda(Lg) = \langle \Psi | g \rangle,$$

per ogni $g \in \mathcal{D}(V)$, cioè ${}^t L u = \Psi$ su V.

□

Dal Teorema precedente e dalla Proposizione 2.5 si può allora concludere:

Proposizione 2.8. *Sia L un operatore differenziale ipoellittico invariante per traslazioni a sinistra su $\mathbb{G}$. Allora ${}^t L$ è invariante per traslazioni a sinistra e ha una soluzione fondamentale locale.*

Definizione 2.9. Un operatore differenziale L invariante per traslazioni a sinistra su $\mathbb{G}$ è *omogeneo di ordine (o grado)* μ se

$$L(f \circ \delta_\lambda) = \lambda^\mu (Lf) \circ \delta_\lambda, \tag{2.10}$$

per ogni dilatazione δ_λ e $f \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$.

Sia $X \in V_j$ un campo vettoriale invariante per traslazioni a sinistra appartenente al j-esimo spazio della stratificazione e sia $X(0) = u$. Allora X è omogeneo di grado j. Infatti:

$$\begin{aligned} X(f \circ \delta_\lambda)(x) &= \frac{d}{dt}_{|t=0} (f \circ \delta_\lambda)(x \cdot tu) \\ &= \frac{d}{dt}_{|t=0} f(\delta_\lambda(x \cdot tu) = \frac{d}{dt}_{|t=0} f(\delta_\lambda(x) \cdot \delta_\lambda(tu)) \\ &= \frac{d}{dt}_{|t=0} f(\delta_\lambda(x) \cdot \lambda^j(tu)) = \lambda^j \frac{d}{ds}_{|s=0} f(\delta_\lambda(x) \cdot su) \\ &= \lambda^j (Xf)(\delta_\lambda(x)). \end{aligned}$$

Quindi la base $(W_1, \dots, W_n)$ di $\mathfrak{g}$ è formata da campi vettoriali omogenei.
In particolare:

$$W_j \quad \text{è omogeneo di grado } d_j,$$

dove d_j è il grado di omogeneità di x_j, definito come in (1.3).
Allora, per ogni multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, l'operatore

$$W^\alpha = W_1^{\alpha_1} W_2^{\alpha_2} \dots W_n^{\alpha_n}$$

è omogeneo di grado

$$d(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j d_j. \tag{2.11}$$

La seguente Proposizione è allora conseguenza diretta del Teorema di Poincaré-Birkhoff-Witt:

Proposizione 2.9. *Un operatore differenziale L invariante per traslazioni a sinistra è omogeneo di grado μ se e solo se*

$$L = \sum_{d(\alpha)=\mu} c_\alpha W^\alpha. \tag{2.12}$$

Esempio 2.4. Sia $\mathbb{H}$ il gruppo di Heisenberg-Weyl definito nell'Esempio 1.1 e siano W_1, W_2, W_3 i campi vettoriali definiti in (1.7). Allora W_1 e W_2 sono omogenei di grado 1 e W_3 è omogeneo di grado 2.
Gli operatori $W_1^2 + W_2^2$ e $W_1 W_2 + W_3$ sono quindi omogenei di grado 2.
Invece l'operatore $W_1^2 + W_2^2 + W_3^2$ non è omogeneo.

Sia ρ una *norma omogenea* su $\mathbb{G}$, cioè ρ è una funzione $\rho : \mathbb{G} \to [0, +\infty)$ continua e C^∞ su $\mathbb{G} \setminus \{0\}$, omogenea di grado 1, che soddisfa:

$$\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad \rho(x) = \rho(x^{-1}) \quad \forall x \in \mathbb{G}.$$

Si può inoltre dimostrare che ρ soddisfa una pseudo-disuguaglianza triangolare:

$$\exists C > 0 \quad \text{t.c. } \rho(x \cdot y) \leq C(\rho(x) + \rho(y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{G}.$$

Osservazione 6. Poiché $\mathbb{G}$ è un gruppo di Carnot, è sempre possibile costruire una tale norma. Per esempio, si può verificare che la funzione

$$\rho(x) := \sum_{j=1}^{\kappa} \|\tilde{x}_j\|_j^{\frac{1}{j}},$$

dove $x = \tilde{x}_1 + \dots + \tilde{x}_\kappa$ e $\|\cdot\|_j$ indica la norma euclidea di V_j, è una norma omogenea.

Teorema 2.10. *Sia L un operatore differenziale invariante per traslazioni a sinistra su $\mathbb{G}$, omogeneo di ordine $\mu < Q$, dove Q è la dimensione omogenea di $\mathbb{G}$. Siano inoltre L e ${}^tL$ ipoellittici.*
Allora L ha una soluzione fondamentale K. Inoltre K è C^∞ su $\mathbb{G} \setminus \{0\}$ e omogenea di grado $-Q + \mu$.

Dimostrazione. Per la Proposizione 2.8, L ha una soluzione fondamentale locale $H \in \mathcal{D}'(V)$, cioè $LH = \delta_0$ su V intorno aperto di 0.
Allora, poiché $LH = 0$ su $V \setminus \{0\}$ e L è ipoellittico, H è C^∞ su $V \setminus \{0\}$.

Sia $\eta \in \mathcal{D}(V)$, $\eta \equiv 1$ su $V' \subset V$ intorno aperto di 0, e sia $K_1 = \eta H$.
Allora, come nella dimostrazione della Proposizione 2.5, K_1 è una distribuzione definita su tutto $\mathbb{G}$ e

$$LK_1 = \delta_0 + \Phi,$$

dove $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{G})$ con supporto compatto, non contenente 0.
Inoltre K_1 è C^∞ fuori dall'origine, quindi anche LK_1 è C^∞ su $\mathbb{G} \setminus \{0\}$.
Allora, poiché $\mathrm{supp}(\Phi) \subset \mathbb{G} \setminus \{0\}$ ed è compatto, $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$. Inoltre esistono $a, b \in \mathbb{R}^+$ t.c.

$$\mathrm{supp}(\Phi) \subset \{x \in \mathbb{G} | a < \rho(x) < b\}.$$

Definiamo per ogni $\lambda > 0$

$$K_\lambda = \lambda^{\mu - Q} K_1 \circ \delta_{\lambda^{-1}}, \quad \Phi_\lambda = \lambda^{-Q} \Phi \circ \delta_{\lambda^{-1}}.$$

Allora

$$\begin{aligned} LK_\lambda &= L(\lambda^{\mu-Q} K_1 \circ \delta_{\lambda^{-1}}) = \lambda^{\mu-Q} L(K_1 \circ \delta_{\lambda^{-1}}) \\ &= \lambda^{\mu-Q}(\lambda^{-\mu}(LK_1) \circ \delta_{\lambda^{-1}}) \quad \text{(per 2.10)} \\ &= \lambda^{-Q}(\delta_0 + \Phi) \circ \delta_{\lambda^{-1}} \\ &= \delta_0 + \Phi_\lambda, \end{aligned}$$

perché δ_0 è omogenea di grado $-Q$.
Si ha $\mathrm{supp}(\Phi_\lambda) = \mathrm{supp}(\lambda^{-Q} \Phi \circ \delta_{\lambda^{-1}}) = \mathrm{supp}(\Phi \circ \delta_{\lambda^{-1}})$ e

$$\mathrm{supp}(\Phi \circ \delta_{\lambda^{-1}}) = \delta_\lambda(\mathrm{supp}(\Phi)).$$

Infatti, sia $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$; allora:

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{supp}(\varphi) &\Leftrightarrow \varphi(x) \neq 0 \Leftrightarrow \varphi(\delta_{\lambda^{-1}}(\delta_\lambda x) \neq 0 \Leftrightarrow \varphi(\delta_{\lambda^{-1}}(y)) \neq 0, \quad y = \delta_\lambda x \\ &\Leftrightarrow \delta_\lambda x \in \mathrm{supp}(\varphi \circ \delta_{\lambda^{-1}}), \end{aligned}$$

cioè $\mathrm{supp}(\varphi\circ\delta_{\lambda^{-1}}) = \delta_\lambda(\mathrm{supp}(\varphi))$. Quindi $\varphi \in \mathcal{D}(U) \Leftrightarrow \varphi\circ\delta_{\lambda^{-1}} \in \mathcal{D}(\delta_\lambda(U))$. Allora

$$\begin{aligned} V_x \subset \mathbb{G}\setminus \mathrm{supp}(\Phi) &\Leftrightarrow \langle\Phi|\varphi\rangle = 0, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(V_x) \\ &\Leftrightarrow \langle\Phi|(\varphi\circ\delta_{\lambda^{-1}})\circ\delta_\lambda\rangle = 0, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(V_x) \\ &\Leftrightarrow \langle\Phi\circ\delta_{\lambda^{-1}}|\varphi\circ\delta_{\lambda^{-1}}\rangle = 0, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(V_x) \\ &\Leftrightarrow \langle\Phi\circ\delta_{\lambda^{-1}}|\tilde{\varphi}\rangle = 0, \quad \forall\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\delta_\lambda(V_x)) \\ &\Leftrightarrow \delta_\lambda(V_x) \subset \mathbb{G}\setminus\mathrm{supp}(\Phi\circ\delta_{\lambda^{-1}}), \end{aligned}$$

cioè $\mathrm{supp}(\Phi\circ\delta_{\lambda^{-1}}) = \delta_\lambda\mathrm{supp}(\Phi)$. Quindi

$$\begin{aligned} \mathrm{supp}(\Phi\circ\delta_{\lambda^{-1}}) = \delta_\lambda(\mathrm{supp}(\Phi)) &\subset \delta_\lambda(\{x\in\mathbb{G}|a<\rho(x)<b\}) \\ &= \{x\in\mathbb{G}|\lambda a<\rho(x)<\lambda b\}, \end{aligned}$$

poiché ρ è omogenea di grado 1. Allora, per ogni $\lambda > 0$

$$\mathrm{supp}(\Phi_\lambda) \subset \{x\in\mathbb{G}|\lambda a<\rho(x)<\lambda b\},$$

cioè Φ_λ ha supporto compatto, non contenente 0.
Allora, poiché $LK_\lambda = \delta_0 + \Phi_\lambda$, anche K_λ è soluzione fondamentale locale di L per ogni $\lambda > 0$.
Inoltre $\lim_{\lambda\to\infty}\Phi_\lambda = 0$ nel senso delle distribuzioni, cioè

$$\lim_{\lambda\to\infty}\langle\Phi_\lambda|\varphi\rangle = 0 \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{G}).$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda\to\infty}\langle\Phi_\lambda|\varphi\rangle &= \lim_{\lambda\to\infty}\langle\lambda^{-Q}\Phi\circ\delta_{\lambda^{-1}}|\varphi\rangle \\ &= \lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-Q}\langle\Phi|\lambda^Q\varphi\circ\delta_\lambda\rangle \\ &= \lim_{\lambda\to\infty}\langle\Phi|\varphi\circ\delta_\lambda\rangle. \end{aligned}$$

Per quanto visto prima, $\mathrm{supp}(\varphi\circ\delta_\lambda) = \delta_{\lambda^{-1}}\mathrm{supp}(\varphi)$ e, poiché $\mathrm{supp}(\varphi)$ è compatto,

$$\mathrm{supp}(\varphi) \subset \{x\in\mathbb{G}|\rho(x)<c\}, \qquad \text{per un } c>0.$$

Allora

$$\begin{aligned} \mathrm{supp}(\varphi\circ\delta_\lambda) &\subset \delta_{\lambda^{-1}}(\{x\in\mathbb{G}|\rho(x)<c\}) \\ &= \{x\in\mathbb{G}|\rho(x)<\lambda^{-1}c\} \xrightarrow{\lambda\to\infty} \{0\}, \end{aligned}$$

ma $\mathrm{supp}(\Phi)\subset\mathbb{G}\setminus\{0\}$ ed è compatto, quindi

$$\lim_{\lambda\to\infty}\langle\Phi|\varphi\circ\delta_\lambda\rangle = 0.$$

Allora, se dimostriamo che esiste $\lim_{\lambda\to\infty} K_\lambda = K$ nel senso delle distribuzioni, K sarà una soluzione fondamentale globale. Infatti:

$$\begin{aligned}
\langle LK|\varphi\rangle &= \langle K|{}^tL\varphi\rangle \\
&= \lim_{\lambda\to\infty}\langle K_\lambda|{}^tL\varphi\rangle = \lim_{\lambda\to\infty}\langle LK_\lambda|\varphi\rangle \\
&= \lim_{\lambda\to\infty}\langle \delta_0 + \Phi_\lambda|\varphi\rangle \\
&= \lim_{\lambda\to\infty}\langle \delta_0|\varphi\rangle + \lim_{\lambda\to\infty}\langle \Phi_\lambda|\varphi\rangle \\
&= \langle \delta_0|\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Inoltre K è omogenea di grado $-Q+\mu$, poiché

$$\begin{aligned}
\lambda^{Q-\mu}\langle K\circ\delta_\lambda|\varphi\rangle &= \lambda^{Q-\mu}\langle K|\lambda^{-Q}\varphi\circ\delta_{\lambda^{-1}}\rangle \\
&= \lambda^{Q-\mu}\lim_{t\to\infty}\langle K_t\circ\delta_\lambda|\varphi\rangle \\
&= \lim_{t\to\infty}\langle K_t|\lambda^{-\mu}\varphi\circ\delta_{\lambda^{-1}}\rangle \\
&= \lim_{t\to\infty}\langle t^{\mu-Q}K_1\circ\delta_{t^{-1}}|\lambda^{-\mu}\varphi\circ\delta_{\lambda^{-1}}\rangle \\
&= \lim_{t\to\infty}\langle t^{\mu-Q}\lambda^{-\mu+Q}(K_1\circ\delta_{t^{-1}})\circ\delta_\lambda)|\varphi\rangle \\
&= \lim_{t\to\infty}\langle (\frac{t}{\lambda})^{\mu-Q}K_1\circ\delta_{\frac{\lambda}{t}}|\varphi\rangle \\
&= \lim_{t\to\infty}\langle K_{\frac{t}{\lambda}}|\varphi\rangle \\
&= \langle K|\varphi\rangle,
\end{aligned}$$

per ogni $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{G})$.

Per $t>1$, vogliamo scrivere K_t nella forma

$$\langle K_t|\varphi\rangle = \langle K_1|\varphi\rangle + \int_1^t \langle \frac{dK_s}{ds}|\varphi\rangle\, ds, \tag{2.13}$$

per $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{G})$. Allora, per mostrare che K_t ha limite nel senso delle distribuzioni, sarà sufficiente dimostrare che $\int_1^\infty \langle K_s'|\varphi\rangle\, ds$ è ben definito per ogni $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{G})$.

Per poterlo fare dobbiamo mostrare che

$$K_s' = \frac{dK_s}{ds} = \lim_{\sigma\to s}\frac{K_\sigma - K_s}{\sigma - s}$$

è ben definita come distribuzione su $\mathbb{G}$, cioè che

$$\exists \lim_{\sigma\to s}\langle \frac{K_\sigma-K_s}{\sigma-s}|\varphi\rangle =: \langle \frac{dK_s}{ds}|\varphi\rangle,$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$ e $s \geq 1$, e che la funzione $s \mapsto \langle K'_s|\varphi\rangle$ è integrabile e C^∞ su $[1, \infty)$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$.
Iniziamo con la derivata K'_1 di K_s per $s = 1$. Se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$,

$$\begin{aligned}
\lim_{\sigma\to 1}\langle\frac{K_\sigma - K_1}{\sigma - 1}|\varphi\rangle &= \lim_{\sigma\to 1}\frac{1}{\sigma - 1}\langle K_\sigma - K_1|\varphi\rangle \\
&= \lim_{\sigma\to 1}\frac{1}{\sigma - 1}(\langle K_\sigma|\varphi\rangle - \langle K_1|\varphi\rangle) \\
&= \lim_{\sigma\to 1}\frac{1}{\sigma - 1}(\langle\sigma^{\mu-Q}K_1 \circ \delta_{\sigma^{-1}}|\varphi\rangle - \langle K_1|\varphi\rangle) \\
&= \lim_{\sigma\to 1}\frac{1}{\sigma - 1}(\langle K_1|\sigma^\mu\varphi \circ \delta_\sigma\rangle - \langle K_1|\varphi\rangle) \\
&= \lim_{\sigma\to 1}\frac{1}{\sigma - 1}\langle K_1|\sigma^\mu\varphi \circ \delta_\sigma - \varphi\rangle \\
&= \langle K_1|\lim_{\sigma\to 1}\frac{\sigma^\mu\varphi \circ \delta_\sigma - \varphi}{\sigma - 1}\rangle.
\end{aligned}$$

Dalla definizione delle dilatazioni (1.2) $\delta_\lambda(x_1, ..., x_n) = (\lambda^{d_1}x_1, ..., \lambda^{d_n}x_n)$,

$$\begin{aligned}
E\varphi(x) &:= \frac{d}{d\sigma}_{|\sigma=1}(\varphi \circ \delta_\sigma)(x) \\
&= \frac{d}{d\sigma}_{|\sigma=1}\varphi(\sigma^{d_1}x_1, ..., \sigma^{d_n}x_n) \\
&= \sum_{j=1}^n d_j x_j \partial_{x_j}\varphi(x).
\end{aligned}$$

Allora

$$\lim_{\sigma\to 1}\frac{\sigma^\mu\varphi \circ \delta_\sigma - \varphi}{\sigma - 1} = \frac{d}{d\sigma}_{|\sigma=1}\sigma^\mu(\varphi \circ \delta_\sigma) = \mu\varphi + E\varphi.$$

Quindi

$$\langle K'_1|\varphi\rangle = \lim_{\sigma\to 1}\langle\frac{K_\sigma - K_1}{\sigma - 1}|\varphi\rangle = \langle K_1|\mu\varphi + E\varphi\rangle,$$

cioè

$$K'_1 = \mu K_1 + {}^tEK_1.$$

Dalla definizione di E segue ${}^tE\varphi = -E\varphi - Q\varphi$. Quindi, in conclusione

$$K'_1 = (\mu - Q)K_1 - EK_1.$$

Ora mostriamo che $K_1' \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$. Si ha, per $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$

$$\begin{aligned}
\langle LK_1'|\varphi\rangle &= \langle L\Big(\lim_{\sigma\to 1}\frac{K_\sigma - K_1}{\sigma - 1}\Big)|\varphi\rangle \\
&= \langle \lim_{\sigma\to 1}\frac{LK_\sigma - LK_1}{\sigma - 1}|\varphi\rangle \\
&= \langle \lim_{\sigma\to 1}\frac{\Phi_\sigma - \Phi}{\sigma - 1}|\varphi\rangle \\
&= \langle -Q\Phi - E\Phi|\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Allora, poiché Φ è C^∞ e L è ipoellittico, K_1' è C^∞. Chiaramente K_1' ha supporto compatto.

A questo punto, per ogni $s > 1$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$,

$$\begin{aligned}
\langle K_s'|\varphi\rangle &= \lim_{\sigma\to s}\langle\frac{K_\sigma - K_s}{\sigma - s}|\varphi\rangle = \lim_{\sigma\to s}\langle\frac{K_\sigma - K_s}{s(\frac{\sigma}{s} - 1)}|\varphi\rangle \\
&= \lim_{u\to 1}\frac{1}{s}\langle\frac{K_{us} - K_s}{u - 1}|\varphi\rangle \qquad (\text{con } \sigma = us) \\
&= \lim_{u\to 1}\frac{1}{s}\langle s^{\mu-Q}\frac{K_u\circ\delta_{s^{-1}} - K_1\circ\delta_{s^{-1}}}{u - 1}|\varphi\rangle \\
&= s^{\mu-Q-1}\langle\lim_{u\to 1}\frac{K_u - K_1}{u - 1}|s^Q\varphi\circ\delta_s\rangle \\
&= s^{\mu-Q-1}\langle K_1'\circ\delta_{s^{-1}}|\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Quindi $K_s' = s^{\mu-Q-1}K_1'\circ\delta_{s^{-1}}$ per ogni $s > 1$.
Allora, poiché K_1' è C^∞, se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$

$$\begin{aligned}
\int_1^t \langle K_s'|\varphi\rangle\, ds &= \int_1^t \langle s^{\mu-Q-1}K_1'\circ\delta_{s^{-1}}|\varphi\rangle\, ds \\
&= \int_1^t s^{\mu-Q-1}\int_{\mathbb{G}} K_1'(\delta_{s^{-1}}x)\varphi(x)\, dxds.
\end{aligned}$$

Inoltre, poiché $\mu < Q$ e K_1' ha supporto compatto,

$$\int_1^\infty s^{\mu-Q-1}\int_{\mathbb{G}} |K_1'(\delta_{s^{-1}}x)||\varphi(x)|\, dxds \le C\|\varphi\|_{L^1},$$

$$\text{con} \quad C = \max_{x\in\operatorname{supp}(K_1')}|K_1'(x)|\int_1^\infty s^{\mu-Q-1}\, ds \in \mathbb{R}^+,$$

indipendente da φ.
Questo mostra che, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$, l'integrale in (2.13) ha limite per $t \to \infty$.

Si osservi che, per l'ipoellitticità di L, la distribuzione limite K è C^∞ fuori dall'origine.
In particolare

$$K(x) = K_1(x) + \int_1^\infty s^{\mu-Q-1} K_1'(\delta_{s^{-1}}x)\,ds \quad \text{per } x \neq 0. \tag{2.14}$$

□

Chiaramente, nelle ipotesi del Teorema precedente, anche ${}^tL$ ha una soluzione fondamentale globale omogenea, C^∞ fuori dall'origine.

Corollario 2.11. *La soluzione fondamentale K di L costruita nella dimostrazione del Teorema 2.10 è la sua unica soluzione fondamentale omogenea.*

Dimostrazione. Sia H un'altra soluzione fondamentale di L, omogenea di grado α. Allora, per $f \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$,

$$\begin{aligned}
f \circ \delta_\lambda &= (L(f * H)) \circ \delta_\lambda \quad \text{(per il Lemma 2.4)}\\
&= \lambda^{-\mu} L((f * H) \circ \delta_\lambda) \quad \text{(perché } L \text{ è omogeneo di grado } \mu)\\
&= \lambda^{-\mu} L(\lambda^{Q+\alpha}(f \circ \delta_\lambda) * H) \quad \text{(per (2.6))}\\
&= \lambda^{Q-\mu+\alpha} L((f \circ \delta_\lambda) * H)\\
&= \lambda^{Q-\mu+\alpha} f \circ \delta_\lambda \quad \text{(di nuovo per il Lemma 2.4).}
\end{aligned}$$

Quindi deve essere $\alpha = -Q + \mu$.
Allora anche $K-H$ è omogeneo di grado $-Q+\mu < 0$ e soddisfa $L(K-H) = 0$ su tutto $\mathbb{G}$. Poiché L è ipoellittico, $K - H$ deve essere C^∞ anche in 0. Necessariamente $K - H = 0$.

□

Lemma 2.12. *L'integrale*

$$\int_{\rho(x)<1} \rho(x)^{-\alpha}\,dx$$

è convergente se e solo se $\alpha < Q$.

Dimostrazione. Sia $c = \mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{G} | 1 < \rho(x) < 2\})$, dove con $\mathcal{L}^n(E)$ si indica la misura di Lebesgue n-dimensionale dell'insieme E. Allora $c > 0$ e

$$\int_{2^j<\rho(x)<2^{j+1}} \rho(x)^{-\alpha}\,dx \sim 2^{-j\alpha}\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{G} | 2^j < \rho(x) < 2^{j+1}\}) = c2^{j(Q-\alpha)},$$

dove $\sim$ indica che le due espressioni si controllano a vicenda a meno di costanti moltiplicative.
Allora

$$\int_{\rho(x)<1} \rho(x)^{-\alpha}\, dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^{-j}<\rho(x)<2^{-(j+1)}} \rho(x)^{-\alpha}\, dx$$
$$\sim c \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(\alpha-Q)},$$

serie che converge se e solo se $\alpha - Q < 0$.

$\square$

Teorema 2.13. *Sia* Φ *una distribuzione omogenea di grado* $-Q+\alpha$, *con* $0<\alpha<Q$, *continua su* $\mathbb{G}\setminus\{0\}$.
Allora $\Phi \in L^1_{loc}(\mathbb{G})$ *e soddisfa la disuguaglianza*

$$|\Phi(x)| \leq \frac{C}{\rho(x)^{Q-\alpha}}, \tag{2.15}$$

per una costante $C>0$.

Dimostrazione. Sia $\phi \in C(\mathbb{G}\setminus\{0\})$ la funzione continua t.c.

$$\langle \Phi | f \rangle = \int_{\mathbb{G}} \phi(x) f(x)\, dx, \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{G}\setminus\{0\}).$$

Allora anche ϕ è omogenea di grado $-Q+\alpha$. Infatti:

$$\langle \Phi | f \circ \delta_{\lambda^{-1}} \rangle = \lambda^{\alpha} \langle \Phi | f \rangle, \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{G}),$$

per l'omogeneità di Φ. In particolare allora, se $f \in \mathcal{D}(\mathbb{G}\setminus\{0\})$,

$$\int_{\mathbb{G}} \phi(x)(f\circ\delta_{\lambda^{-1}})(x)\, dx = \lambda^{\alpha} \int_{\mathbb{G}} \phi(x) f(x)\, dx$$

ma

$$\int_{\mathbb{G}} \phi(x) f(\delta_{\lambda^{-1}}(x))\, dx = \lambda^{Q} \int_{\mathbb{G}} \phi(\delta_{\lambda}(x)) f(x)\, dx.$$

Quindi

$$\int_{\mathbb{G}} (\phi(\delta_\lambda(x)) - \lambda^{\alpha-Q}\phi(x)) f(x)\, dx = 0.$$

Allora, poichè questo vale $\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{G}\setminus\{0\})$, deve essere $\phi(\delta_\lambda(x)) = \lambda^{\alpha-Q}\phi(x)$, cioè ϕ deve essere omogenea di grado $-Q+\alpha$.
In particolare, considerando $\lambda = \rho(x)^{-1}$, si ha

$$\phi(\delta_{\rho(x)^{-1}}(x)) = \Big(\frac{1}{\rho(x)}\Big)^{\alpha-Q} \phi(x).$$

Per l'omogeneità della norma si ha $\rho(\frac{1}{\rho(x)}x) = \frac{1}{\rho(x)}\rho(x) = 1$. Quindi, poiché ϕ è continua fuori da 0 e $\{y \in \mathbb{G} | \rho(y) = 1\}$ è compatto,

$$|\phi(x)| = \rho(x)^{\alpha-Q}|\phi(\delta_{\rho(x)^{-1}}(x))| \leq \max_{\rho(y)=1} |\phi(y)|\rho(x)^{\alpha-Q}.$$

Allora

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon<\rho(x)<1} |\phi(x)|\, dx \leq C \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon<\rho(x)<1} \rho(x)^{\alpha-Q}\, dx = \int_{\rho(x)<1} \rho(x)^{\alpha-Q}\, dx,$$

che è convergente per il Lemma precedente.
Perciò $\phi \in L^1_{loc}(\mathbb{G})$. Mostriamo ora che la distribuzione T_ϕ definita da ϕ su $\mathbb{G}$ coincide con Φ.
Sia $\Psi = \Phi - T_\phi$. Allora Ψ è una distribuzione con supporto nell'origine, anch'essa omogenea di grado $-Q + \alpha$.
Poiché $\mathrm{supp}(\Psi) = \{0\}$, Ψ è combinazione lineare di derivate di δ_0, quindi

$$\langle\Psi|g\rangle = \left\langle \delta_0 \middle| \sum_{|\beta|\leq m} a_\beta \partial^\beta g \right\rangle = \sum_{|\beta|\leq m} a_\beta \partial^\beta g(0), \quad \forall g \in \mathcal{D}(\mathbb{G}).$$

Quindi

$$|\langle\Psi|g\rangle| \leq C\|g\|_{C^m(V)}, \quad \forall g \in \mathcal{D}(\mathbb{G}),$$

con $V = \{y \in \mathbb{G} | \rho(y) \leq c\}$ intorno compatto di 0.
Si osservi che, per λ piccolo, le norme $\|g \circ \delta_\lambda\|_{C^m(V)}$ si possono controllare con la norma $\|g\|_{C^m(V)}$. Infatti:

$$\begin{aligned}
|\partial^\beta(g \circ \delta_\lambda)(x)| &= |\partial^{\beta_1}_{x_1} \ldots \partial^{\beta_n}_{x_n} g(\lambda^{d_1}x_1, \ldots, \lambda^{d_n}x_n)| \\
&= \lambda^{\sum_{j=1}^n \beta_j d_j} |(\partial^\beta g)(\delta_\lambda x)| \\
&\leq |(\partial^\beta g)(\delta_\lambda x)| \quad \text{(per } \lambda \leq 1\text{)}.
\end{aligned}$$

Quindi, per $\lambda < 1$ e per ogni multi-indice β con $|\beta| \leq m$,

$$\begin{aligned}
\max_{y\in V} |\partial^\beta(g \circ \delta_\lambda)(y)| &\leq \max_{y\in V} |(\partial^\beta g)(\delta_\lambda y)| \\
&= \max_{z\in \delta_\lambda V} |(\partial^\beta g)(z)| \\
&\leq \max_{z\in V} |(\partial^\beta g)(z)|,
\end{aligned}$$

poiché $\lambda < 1 \Rightarrow \delta_\lambda V = \{y \in \mathbb{G} | \rho(y) \leq c\lambda\} \subset V$.
Inoltre, per l'omogeneità di Ψ,

$$\langle\Psi|g\rangle = \lambda^\alpha \langle\Psi|g \circ \delta_\lambda\rangle.$$

Quindi, per ogni $g \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$, facendo tendere λ a 0:

$$\begin{aligned} |\langle \Psi | g \rangle| &= \lambda^\alpha |\langle \Psi | g \circ \delta_\lambda \rangle \leq \lambda^\alpha C \|g \circ \delta_\lambda\|_{C^m(V)} \\ &\leq \lambda^\alpha \tilde{C} \|g\|_{C^m(V)} \xrightarrow{\lambda \to 0^+} 0, \end{aligned}$$

cioè $\langle \Psi | g \rangle = 0, \quad \forall g \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$. Perciò $\Phi - T_\phi = \Psi = 0$.

$\square$

Corollario 2.14. *Sia K la soluzione fondamentale omogenea di un operatore differenziale L che soddisfi le ipotesi del Teorema 2.10.*
Allora $K \in L^1_{loc}(\mathbb{G})$ e

$$\lim_{\rho(x) \to \infty} K(x) = 0.$$

Inoltre

$$\lim_{\rho(x) \to \infty} (f * K)(x) = 0, \qquad \textit{per ogni } f \in \mathcal{D}(\mathbb{G}). \tag{2.16}$$

Dimostrazione. Poiché K è C^∞ fuori dall'origine e omogenea di grado $-Q+\mu$, con $0 < \mu < Q$, si può applicare il Teorema precedente.
In particolare, il primo limite segue dalla stima (2.15).
Sia ora $f \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$, con $\text{supp}(f) \subset \{x \in \mathbb{G} | \rho(x) < r\}$. Allora

$$\begin{aligned} |f * K(x)| &= \Big| \int_{\rho(y)<r} f(y) K(y^{-1}x)\, dy \Big| \leq \max_{\text{supp}(f)} |f| \int_{\rho(y)<r} |K(y^{-1}x)|\, dy \\ &\leq C \int_{\rho(y)<r} \rho(y^{-1}x)^{-Q+\mu}\, dy \qquad (\text{per } (2.15)). \end{aligned}$$

Se $c > 0$ è la costante della pseudo-disuguaglianza triangolare, allora

$$\rho(x) \leq c(\rho(y) + \rho(y^{-1}x)),$$

quindi, se $\rho(x) > 2cr$ e $\rho(y) < r$,

$$\rho(y^{-1}x) \geq \frac{1}{c}\rho(x) - \rho(y) > \frac{1}{2c}\rho(x).$$

Allora, se $\rho(x) > 2cr$, $|f * K(x)| < C_r \rho(x)^{-Q+\mu}$.

$\square$

Capitolo 3

Sub-Laplaciani

Le considerazioni del capitolo precedente si applicano in particolare al caso in cui l'operatore differenziale L è della forma

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{m} X_j^2, \tag{3.1}$$

con $X_1, \dots, X_m$ base del primo strato V_1 della stratificazione di $\mathfrak{g}$.
Un operatore $\mathcal{L}$ del tipo (3.1) è detto *Sub-Laplaciano* su $\mathbb{G}$.
Il seguente Teorema di Hörmander garantisce l'ipoellitticità di $\mathcal{L}$:

Teorema 3.1 (Teorema di Hörmander)**.** *Siano $Y_1, \dots, Y_r$ campi vettoriali C^∞ su $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Se*

$$rank(Lie(Y_1, \dots, Y_r)(x)) = n, \quad \forall x \in \Omega, \tag{3.2}$$

allora l'operatore

$$L = \sum_{j=1}^{r} Y_j^2$$

è ipoellittico in Ω.

La *condizione del rango* (3.2), significa che tra i campi vettoriali $Y_1, \dots, Y_r$ e le loro commutazioni iterate è possibile trovare, per ogni $x \in \Omega$, n campi vettoriali che, calcolati in x, siano linearmente indipendenti.
Per campi vettoriali invarianti per traslazioni a sinistra vale:

Proposizione 3.2. *Siano $Y_1, \dots, Y_r$ campi vettoriali su $\mathbb{G}$ invarianti per traslazioni a sinistra. Allora sono equivalenti:*
i) $Y_1, \dots, Y_r$ sono linearmente indipendenti in $\mathfrak{g}$,
ii) $Y_1(0), \dots, Y_r(0)$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$,
iii) $\exists x_0 \in \mathbb{G}$ t.c. $Y_1(x_0), \dots, Y_r(x_0)$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$,
iv) $Y_1(x), \dots, Y_r(x)$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$, $\forall x \in \mathbb{G}$.

Allora, in particolare, se i campi vettoriali $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{g}$ formano una base del primo strato, soddisfano la condizione (3.2). Quindi $\mathcal{L}$ è ipoellittico.

Per la Proposizione 2.9, $\mathcal{L}$ è un operatore differenziale invariante per traslazioni a sinistra, omogeneo di grado 2.
Inoltre ${}^t X_j = -X_j \Rightarrow {}^t\mathcal{L} = \mathcal{L}$.
Quindi, se $Q > 2$, $\mathcal{L}$ soddisfa le ipotesi del Teorema 2.10 e ammette un'unica soluzione fondamentale omogenea Γ.
Nella seguente Proposizione riassumiamo le proprietà di Γ.

Proposizione 3.3. *Sia Γ la soluzione fondamentale omogenea di un Sub-Laplaciano $\mathcal{L}$ su un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ di dimensione omogenea $Q > 2$. Allora:*
i) Γ *è definita come funzione* $\Gamma : \mathbb{G} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *e* $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{G} \setminus \{0\})$,
ii) Γ *è omogenea di grado* $2 - Q$,
iii) $\Gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{G})$, *quindi*

$$\langle \Gamma | \varphi \rangle = \int_{\mathbb{G}} \Gamma(x)\varphi(x)\, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{G}),$$

iv) $\lim_{\rho(x)\to\infty} \Gamma(x) = 0$.

Sfruttando il principio del massimo forte mostreremo che Γ gode anche delle seguenti proprietà:

$$\Gamma(x^{-1}) = \Gamma(x), \quad \forall x \neq 0, \quad \Gamma(x) < 0, \quad \forall x \neq 0$$
$$\text{e } \lim_{x\to 0} \Gamma(x) = -\infty.$$

Prima però, dopo aver ricordato il caso Euclideo, daremo un esempio esplicito di soluzione fondamentale.

Sia $\mathbb{E} = (\mathbb{R}^n, +)$, dove $+$ indica la consueta operazione di addizione. Allora $\mathbb{E}$ è un gruppo di Carnot di passo 1 e tutti e soli i campi vettoriali invarianti per traslazioni a sinistra sono quelli a coefficienti costanti. Le dilatazioni naturali sono semplicemente $\delta_t(x) = tx$, per ogni $t > 0$, e una norma omogenea è la norma euclidea $\rho = |\cdot|$.
Un Sub-Laplaciano su $\mathbb{E}$ sarà allora della forma

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{r} \partial^2_{v_j} = \sum_{i,j} a_{i,j}\partial_{x_i}\partial_{x_j}, \tag{3.3}$$

con $Span(v_1, \dots, v_r) = \mathbb{R}^n$. Quindi la matrice $(a_{i,j})$ deve essere definita positiva. Allora un Sub-Laplaciano su $\mathbb{E}$ non è altro che un qualsiasi operatore differenziale del secondo ordine ellittico e a coefficienti costanti.
Si osservi che, con un opportuno cambiamento lineare di variabili, ci si può ricondurre al caso in cui $\mathcal{L} = \Delta$ è il Laplaciano ordinario.
Poiché $Q = n$, supporremo $n \geq 3$.

Proposizione 3.4. *La soluzione fondamentale omogenea di* Δ *in dimensione* $n \geq 3$ *è*

$$\Gamma(x) = \frac{c}{|x|^{n-2}}, \tag{3.4}$$

per un'opportuna costante $c < 0$.

Dimostrazione. L'operatore Δ è invariante per rotazioni, cioè

$$(\Delta f) \circ P = \Delta(f \circ P),$$

per ogni trasformazione ortogonale P di $\mathbb{R}^n$. Questo implica che, se Γ è una soluzione fondamentale di Δ, tale è anche $\Gamma \circ P$, per ogni rotazione P.
Allora, poiché per il Corollario 2.11 la soluzione fondamentale omogenea è unica, Γ deve essere una funzione radiale, cioè $\Gamma(x) = \Gamma(|x|)$. Si ottiene quindi facilmente

$$\Gamma(x) = \frac{c}{|x|^{n-2}}.$$

Resta da mostrare $c < 0$. Chiaramente $c \neq 0$.
Supponiamo $c > 0$ e sia χ la funzione caratteristica della palla unitaria centrata in 0. Sia $u = \chi * \Gamma$. Allora, poiché

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi(x-y)\Gamma(y)\,dy = c\int_{B(x,1)} \frac{1}{|y|^{n-2}}\,dy,$$

e $c > 0$, u ha massimo in $x = 0$.
Inoltre, poiché $\Delta u = \chi$ e Δ è ipoellittico, u è C^∞ per $|x| \neq 1$.
Quindi, poiché $x = 0$ è punto di massimo, deve essere
$\Delta u(0) = traccia(D^2 u)(0) \leq 0$, dove $D^2 u$ è la matrice Hessiana di u.
Questo è però in contraddizione con il fatto che $\Delta u(0) = \chi(0) = 1$.
Perciò deve essere $c < 0$.

□

Definiamo ora il gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$ su $\mathbb{R}^{2n+1}$, che generalizza l'Esempio 1.1.
Si definisce $\mathbb{H}^n := (\mathbb{R}^{2n+1}, \star)$, con l'operazione di gruppo $\star$ su $\mathbb{R}^{2n+1}$ data dalla mappa

$$(x, y, t) \star (x', y', t') = \Big(x + x', y + y', \frac{1}{2}(x \cdot y' - x' \cdot y)\Big), \tag{3.5}$$

dove $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$, $t, t' \in \mathbb{R}$ e $\cdot$ denota il prodotto interno Euclideo.
Consideriamo in $\mathbb{R}^{2n+1}$ i $2n+1$ campi vettoriali

$$X_j := \partial_{x_j} - \frac{1}{2} y_j \partial_t, \quad Y_j := \partial_{y_j} + \frac{1}{2} x_j \partial_t, \quad \text{per } j = 1, \dots, n, \quad T = \partial_t. \tag{3.6}$$

Si verifica facilmente che sono invarianti per traslazioni a sinistra rispetto all'operazione $\star$. Inoltre, poiché

$$X_j(0) = \partial_{x_j}, \quad Y_j(0) = \partial_{y_j}, \quad \text{per } j = 1, \ldots, n, \quad T(0) = \partial_t, \tag{3.7}$$

sono anche linearmente indipendenti.
Quindi $(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n, T)$ è una base per $\mathfrak{h}_n := Lie(\mathbb{H}^n)$.
Inoltre soddisfano le seguenti identità

$$\begin{aligned} &[X_i, X_j] = [Y_i, Y_j] = 0, \\ &[X_i, Y_j] = \delta_i^j T, \\ &[X_i, T] = [Y_i, T] = 0, \end{aligned} \tag{3.8}$$

per ogni i, j, dove δ_i^j è la delta di Kronecker.
Questo mostra ch $\mathbb{H}^n$ è un gruppo di Carnot di passo 2, con la stratificazione

$$\mathfrak{h}_n = Span(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n) \oplus Span(T).$$

Le dilatazioni naturali sono

$$\delta_\lambda(x, y, t) = (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 t), \quad \text{per } \lambda > 0,$$

e la dimensione omogenea è $Q = 2n + 2$. Quindi il Sub-Laplaciano

$$\Delta_{\mathbb{H}} = \sum_{j=1}^{n} (X_j^2 + Y_j^2), \tag{3.9}$$

detto Laplaciano di Kohn, ha soluzione fondamentale omogenea di grado $-2n$.
Identificando $\mathbb{R}^{2n+1}$ con $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$, scrivendo $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, t) \simeq (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n, t) = (z, t)$, l'operazione di gruppo diventa

$$(z, t)(w, s) = \Big(z + w, t + s - \frac{1}{2} Im(z|w)\Big), \tag{3.10}$$

dove $(\ |\ )$ è il prodotto Hermitiano

$$(z|w) = z_1 \bar{w}_1 + \cdots + z_n \bar{w}_n.$$

Teorema 3.5. *La soluzione fondamentale omogenea di $\Delta_{\mathbb{H}}$ è*

$$\Gamma(z, t) = c \frac{1}{(|z|^4 + 16t^2)^{n/2}}, \tag{3.11}$$

per un'opportuna costante $c < 0$.

Dimostrazione. L'espressione esplicita di $\Delta_{\mathbb{H}}$ è

$$\Delta_{\mathbb{H}} = \sum_{j=1}^{n} (\partial_{x_j}^2 + \partial_{y_j}^2) + \sum_{j=1}^{n} (x_j \partial_{y_j} - y_j \partial_{x_j}) \partial_t + \frac{|x|^2 + |y|^2}{4} \partial_t^2. \tag{3.12}$$

Si osservi che $x_j \partial_{y_j} - y_j \partial_{x_j}$ è la derivata angolare nel piano (x_j, y_j).

Sfruttando l'espressione in coordinate complesse vogliamo mostrare che $\Delta_{\mathbb{H}}$ soddisfa un'altra proprietà di invarianza.
Se P è una trasformazione unitaria di $\mathbb{C}^n$, cioè una trasformazione lineare che conserva il prodotto hermitiano, allora la mappa

$$\psi_P(z, t) = (P(z), t)$$

è un automorfismo di gruppo.
In particolare, questo vale per

$$\psi_\theta(z, t) = (e^{i\theta_1} z_1, \dots, e^{i\theta_n} z_n, t),$$

dove $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in [0, 2\pi)^n$. Si ha

$$(\Delta_{\mathbb{H}} f) \circ \psi_\theta = \Delta_{\mathbb{H}} (f \circ \psi_\theta),$$

poiché ciascun termine di (3.12) soddisfa questa identità.
Quindi, se Γ è la soluzione fondamentale omogenea, $\Gamma \circ \psi_\theta = \Gamma$ per ogni θ.
Questo implica che Γ è radiale in ciascuna delle variabili z_j, e le derivate angolari di Γ sono nulle. Quindi, per $(z, t) \neq (0, 0)$,

$$\Delta_{\mathbb{H}} \Gamma = \Delta_z \Gamma + \frac{|z|^2}{4} \partial_t^2 \Gamma, \tag{3.13}$$

dove Δ_z è il Laplaciano nelle variabili x, y.
Per questa espressione è allora chiaro che

$$(\Delta_{\mathbb{H}} \Gamma) \circ \psi_P = \Delta_{\mathbb{H}} (\Gamma \circ \psi_P),$$

per ogni trasformazione unitaria P.
Perciò deve essere $\Gamma \circ \psi_\theta = \Gamma$ per ogni P e quindi Γ è radiale in z. Si può allora scrivere

$$\Gamma(z, t) = H\Big(\frac{|z|^2}{4}, t\Big). \tag{3.14}$$

Per le proprietà di Γ, $H(s, t)$ è una funzione C^∞ sul semipiano di $\mathbb{R}^2$ in cui $s > 0$, continua per $s \geq 0$ e $(s, t) \neq (0, 0)$, omogenea di grado $-n$ rispetto alle dilatazioni $\delta_u(s, t) = (us, ut)$.

Vogliamo esprimere la condizione $\Delta_{\mathbb{H}}\Gamma(z,t) = 0$ per $(z,t) \neq (0,0)$ in termini di H. Per (3.13), basta osservare che

$$\begin{aligned}
\Delta_z H\Big(\frac{|z|^2}{4}, t\Big) &= 4\sum_{j=1}^{n} \partial_{z_j}\partial_{\bar{z}_j} H\Big(\frac{|z|^2}{4}, t\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \partial_{z_j}\Big(z_j \frac{\partial H}{\partial s}\Big(\frac{|z|^2}{4}, t\Big)\Big) \\
&= \frac{|z|^2}{4}\frac{\partial^2 H}{\partial s^2}\Big(\frac{|z|^2}{4}, t\Big) + n\frac{\partial H}{\partial s}\Big(\frac{|z|^2}{4}, t\Big).
\end{aligned}$$

Perciò

$$s\partial_s^2 H + n\partial_s H + s\partial_t^2 H = 0. \tag{3.15}$$

I primi 2 termini corrispondono alla parte radiale del Laplaciano $n+1$-dimensionale. Infatti, si consideri su $\mathbb{R}^{n+1}$ una funzione radiale $f(y) = g(|y|)$ e sia $s = |y|$. Allora

$$\Delta f(y) = \partial_s^2 g(|y|) + \frac{n}{s}\partial_s g(|y|).$$

Perciò, definendo $\Psi(y,t) := H(|y|, t)$ su $\mathbb{R}^{n+2}$, si ha $\Delta\Psi = 0$ per $y \neq 0$.
Inoltre, per la regolarità di H, Ψ è continua su $\mathbb{R}^{n+2} \setminus \{0\}$.
Allora, sfruttando il principio del valor medio, Ψ risulta C^∞ su $\mathbb{R}^{n+2} \setminus \{0\}$ e qui soddisfa $\Delta\Psi = 0$.
Inoltre, poiché Ψ è omogeneo di grado $-n$, il suo Laplaciano $\Delta\Psi$, considerato come distribuzione, è omogeneo di grado $-n-2$ e ha supporto nell'origine. L'unica possibilità, a causa dell'omogeneità, è quindi $\Delta\Psi = \alpha\delta_0$. La costante α non può essere 0, altrimenti, per l'ipoellitticità di Δ, Ψ risulterebbe C^∞ anche in 0.
Quindi $\frac{1}{\alpha}\Psi$ è soluzione fondamentale omogenea di Δ su $\mathbb{R}^{n+2}$.

Allora, poiché la soluzione fondamentale omogenea è unica, per la Proposizione 3.4 esiste una costante $c < 0$ t.c.

$$\frac{1}{\alpha}\Psi(y,t) = \frac{c}{(|y|^2 + t^2)^{n/2}}.$$

Cioè

$$\Psi(y,t) = \frac{\tilde{c}}{(|y|^2 + t^2)^{n/2}},$$

per una costante $\tilde{c} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Allora $H(s,t) = \tilde{c}(s^2 + t^2)^{-n/2}$, e Γ è della forma (3.11). Resta solo da provare $\tilde{c} < 0$.

Argomentiamo come nella dimostrazione della Proposizione 3.4.
Supponiamo $\tilde{c} > 0$ e sia χ la funzione caratteristica dell'insieme $B = \{(z,t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} | |z|^4 + 16t^2 \leq 1\}$.
Allora $u = \chi * \Gamma$ è continua su $\mathbb{H}^n$ e C^∞ per $|z|^4 + 16t^2 \neq 1$, poiché $\Delta_{\mathbb{H}} u = \chi$. Poiché $(x,y,t) = (0,0,0)$ è di massimo per u, $D^2 u(0) \leq 0$. Inoltre, per (3.12), $\Delta_{\mathbb{H}}$ si può scrivere $\Delta_{\mathbb{H}} u(x,y,t) = traccia(A(x,y,t) \cdot D^2 u(x,y,t))$, dove $A(x,y,t)$ è la matrice simmetrica, semidefinita positiva

$$A(x,y,t) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 & -\frac{1}{2}{}^t y \\ 0 & \mathbb{I}_n & \frac{1}{2}{}^t x \\ -\frac{1}{2} y & \frac{1}{2} x & \frac{|x|^2+|y|^2}{4} \end{pmatrix}.$$

Perciò si avrebbe $\Delta_{\mathbb{H}} u(0) = traccia(A(0) \cdot D^2 u(0)) \leq 0$.
Ma questo è in contraddizione con $\Delta_{\mathbb{H}} u(0) = \chi(0) = 1$.
Quindi deve essere $\tilde{c} < 0$.

□

Qualsiasi Sub-Laplaciano $\mathcal{L}$ su un qualsiasi gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ si può scrivere nella forma

$$\mathcal{L} f(x) = traccia(A(x) \cdot D^2 f(x)) + \langle b(x), \nabla f(x) \rangle, \quad \text{per ogni } f \in C^2(\mathbb{G}), \tag{3.16}$$

dove $A(x)$ è una matrice semidefinita positiva $n \times n$ per ogni $x \in \mathbb{G}$, $b(x)$ è un opportuno vettore, ∇ è l'operatore $\nabla = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$, $\cdot$ indica il prodotto matriciale e $\langle , \rangle$ il prodotto interno Euclideo in $\mathbb{R}^n$.
Più precisamente, sia

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(x) \partial_{x_j} \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m,$$

e sia $X(x)$ la matrice $m \times n$ $(a_{i,j}(x))$. Allora $A(x) = {}^t X(x) \cdot X(x)$.
Inoltre

$$b_i(x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{h=1}^{n} a_{j,h}(x) \partial_{x_h} a_{i,j}(x) = \sum_{j=1}^{m} X_j a_{i,j}(x), \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n.$$

Infatti, per ogni $i = 1, \dots, m$,

$$X_i^2 f(x) = X_i(X_i f(x)) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(x) \partial_{x_j} \Big(\sum_{h=1}^{n} a_{i,h}(x) \partial_{x_h} f(x) \Big)$$
$$= \sum_{j,h=1}^{n} a_{i,j}(x) a_{i,h}(x) \partial^2_{x_j x_h} f(x) + \sum_{j,h=1}^{n} a_{i,j}(x) \partial_{x_j} a_{i,h}(x) \partial_{x_h} f(x).$$

Quindi, sommando in i,

$$\sum_{i=1}^{m} X_i^2 f(x) = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j,h=1}^{n} a_{i,j}(x)a_{i,h}(x)\partial^2_{x_j x_h} f(x) + \sum_{j,h=1}^{n} a_{i,j}(x)\partial_{x_j} a_{i,h}(x)\partial_{x_h} f(x)\Big)$$
$$= \sum_{j,h=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{i,j}(x)a_{i,h}(x)\Big)\partial^2_{x_j x_h} f(x) + \sum_{h=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(x)\partial_{x_j} a_{i,h}(x)\Big)\partial_{x_h} f(x).$$

Si osservi che la matrice $A(x)$ è semidefinita positiva per ogni $x \in \mathbb{G}$. Infatti sia $q(x,\xi)$ la forma quadratica associata ad A. Allora per $x \in \mathbb{G}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} q(x,\xi) &= \langle A(x)\xi, \xi\rangle = \langle {}^t X(x) X(x)\xi, \xi\rangle = \langle X(x)\xi, X(x)\xi\rangle \\ &= |X(x)\xi|^2 = \sum_{i=1}^{m} \langle X_i(x), \xi\rangle^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Osservazione 7. Siano A, B matrici $n \times n$ reali, simmetriche. Sia $A \geq 0$ e $B \leq 0$, cioè A semidefinita positiva e B semidefinita negativa.
Allora $traccia(A \cdot B) \leq 0$.
Infatti, poiché $A \geq 0$, esiste una matrice simmetrica R t.c. $R \cdot R = A$. Allora

$$\begin{aligned} traccia(A \cdot B) &= traccia(R \cdot R \cdot B) = traccia(R \cdot B \cdot R) \\ &= traccia({}^t R \cdot B \cdot R) = traccia(B) \leq 0. \end{aligned}$$

Questo permette di dimostrare la seguente forma debole del principio del massimo.

Lemma 3.6. *Sia u una funzione C^2 definita su un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{G}$. Sia $x_0 \in \Omega$ un punto di massimo locale per u. Allora $\mathcal{L}u(x_0) \leq 0$.*

Dimostrazione. Poiché $u \in C^2(\Omega)$,

$$x_0 \text{ di massimo per } u \Rightarrow \nabla u(x_0) = 0, D^2 u(x_0) \leq 0.$$

Allora, scrivendo $\mathcal{L}$ come in (3.16), si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(x_0) &= traccia(A(x_0) \cdot D^2 u(x_0)) + \langle b(x_0), \nabla u(x_0)\rangle \\ &= traccia(A(x_0) \cdot D^2 u(x_0)). \end{aligned}$$

Quindi, poiché $A(x_0) \geq 0$ e $D^2 u(x_0) \leq 0$, per l'Osservazione precedente

$$\mathcal{L}u(x_0) = traccia(A(x_0) \cdot D^2 u(x_0)) \leq 0.$$

□

Il principio del massimo forte che vogliamo dimostrare è il seguente

Teorema 3.7. *Sia u una funzione C^2 definita su un aperto connesso $\Omega \subset \mathbb{G}$. Sia $\mathcal{L}u \geq 0$ su Ω e sia $x_0 \in \Omega$ punto di massimo per u. Allora u è costante.*

Per la dimostrazione servono alcune definizioni e Proposizioni di cui daremo solo l'enunciato.
Consideriamo fissato l'insieme aperto e connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Definizione 3.1. Sia F un sottoinsieme chiuso di Ω e sia $x_0 \in F$. Un vettore $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si dice *normale* a F in x_0 se esiste $r > 0$ t.c. la palla chiusa di raggio r centrata in $x_0 + rv$ sia contenuta in Ω e intersechi F solo in x_0.
Un vettore $w \in \mathbb{R}^n$ si dice *tangente* a F in x_0 se è ortogonale ad ogni vettore normale a F in x_0.
Sia F^* l'insieme dei punti $x \in \partial F \cap \Omega$ per i quali esiste almeno un vettore ortogonale.

Osservazione 8. Se $F \neq \Omega$, allora $F^* \neq \emptyset$.
Infatti, poiché Ω è connesso, $\partial F \cap \Omega \neq \emptyset$. Sia $y \in \partial F \cap \Omega$; allora, poiché Ω è aperto, $\exists R > 0$ t.c. $B(y, R) \subset \Omega$. Sia $x_0 \in B(y, R/2)$ e sia $z \in \partial F \cap \Omega$ t.c.

$$r := |x_0 - z| = dist(x_0, \partial F).$$

Allora $v := \frac{r}{2}(x_0 - z)$ è ortogonale a F in z e quindi $z \in F^*$.

Definizione 3.2. Sia Y un campo vettoriale C^∞ su $\mathbb{R}^n$ e sia F chiuso in Ω. F si dice positivamente Y-invariante se, per ogni curva integrale γ di Y, $\gamma : [T_0, T_1] \to \Omega$, vale la seguente implicazione:

$$\exists \tilde{t} \in [T_0, T_1] \quad \text{t.c. } \gamma(\tilde{t}) \in F \Rightarrow \gamma(t) \in F, \quad \forall t \in [T_0, T_1],$$

cioè se ogni curva integrale di Y che interseca F è completamente contenuta in F.
F si dice Y-invariante se l'implicazione precedente vale anche per ${}^tY = -Y$.

Proposizione 3.8. *Sia F un insieme relativamente chiuso in Ω e sia Y un campo vettoriale a coefficienti C^∞ su $\mathbb{R}^n$. Allora F è Y-invariante se e solo se $Y(x)$ è tangente a F per ogni $x \in F^*$, cioè se e solo se, per ogni $x \in F^*$,*

$$\langle Y(x), v \rangle = 0 \quad \textit{per ogni } v \textit{ ortogonale a } F \textit{ in } x. \tag{3.17}$$

Proposizione 3.9. *Sia F un insieme relativamente chiuso in Ω. Sia $F \neq \Omega$. Allora l'insieme $\mathfrak{f}$ dei campi vettoriali X a coefficienti C^∞ su $\mathbb{R}^n$ t.c. F sia X-invariante costituisce un'algebra di Lie di campi vettoriali.*

Dimostrazione del Teorema 3.7. Sia F l'insieme dei punti $x \in \Omega$ in cui u ha massimo. F è non vuoto per ipotesi e chiuso in Ω per definizione. Vogliamo dimostrare $F = \Omega$. Allora u sarebbe costante. Supponiamo $F \neq \Omega$.
Allora, per l'Osservazione 8, $F^* \neq \emptyset$.

Iniziamo col dimostrare che ciascuno degli X_j è tangente a F^* in ogni suo punto, cioè che vale (3.17) con X_i al posto di Y, per ogni $i = 1, \dots, m$, e per ogni $x \in F^*$.
Poichè $q(x, v) = \sum_{i=1}^m \langle X_i(x), v \rangle^2$, è sufficiente dimostrare che

$$q(x, v) = 0, \quad \text{per ogni } v \text{ ortogonale a } F \text{ in } x,$$

per ogni $x \in F^*$.

Supponiamo che non sia così, cioè che esistano $x_0 \in F^*$ ed un versore $v = (v_1, \dots, v_n)$ normale a F in x_0 t.c. $q(x_0, v) > 0$.
Siano $y_0 = x_0 + rv$ e $B = \{x \in \Omega | |x - y_0| \leq r\}$ t.c. $F \cap B = \{x_0\}$.
Consideriamo la funzione

$$\varphi(x) = e^{-\alpha|x-y_0|^2} - e^{-\alpha r^2}.$$

Si ha, per ogni $i, j = 1, \dots, n$,

$$\partial_{x_i}\varphi(x_0) = -2\alpha e^{-\alpha|x_0-y_0|^2}(x_i^0 - y_i^0) = 2\alpha r v_i e^{-\alpha r^2},$$

e

$$\partial^2_{x_j x_i}\varphi(x_0) = 4\alpha^2 r^2 v_j v_i e^{-\alpha r^2} - 2\alpha\delta_j^i e^{-\alpha r^2}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\varphi(x_0) &= traccia(A(x_0)D^2\varphi(x_0)) + \langle b(x_0), \nabla\varphi(x_0)\rangle \\ &= 4e^{-\alpha r^2}(r^2 q(x_0, v)\alpha^2 + R(\alpha)),\end{aligned}$$

con $lim_{\alpha\to\infty}\frac{R(\alpha)}{\alpha^2} = 0$.
Allora, poiché $q(x_0, v) > 0$, possiamo scegliere α sufficientemente grande perché sia $\mathcal{L}\varphi(x) > 0$ per ogni x in un opportuno intorno compatto U di x_0.

Consideriamo ora la funzione $\tilde{u} = u + \varepsilon\varphi$ su U, dove la costante $\varepsilon > 0$ è ancora da determinare.
Poiché $\mathcal{L}u \geq 0$ per ipotesi e $\mathcal{L}\varphi > 0$ su U, vale $\mathcal{L}\tilde{u} > 0$.
Sia $\Sigma_1 = \partial U \cap B$ la parte di frontiera di U contenuta in B e sia Σ_2 la parte di frontiera di U rimanente.

Poiché Σ_1 è compatto, si può scegliere ε sufficientemente piccolo perché sia $\tilde{u} < u(x_0)$ su Σ_1. Infatti, per ogni $x \in \Sigma_1$,

$$\tilde{u}(x) = u(x) + \varepsilon\varphi(x) \leq \max_{\Sigma_1} u(y) + \varepsilon \max_{\Sigma_1} \varphi(y).$$

Poiché $F \cap B = \{x_0\}$, dalla definizione di F segue

$$\max_{\Sigma_1} u(y) = u(x_0) - a, \qquad \text{con } a > 0.$$

Allora

$$\tilde{u}(x) \leq u(x_0) - a + \varepsilon \max_{\Sigma_1} \varphi(y).$$

Quindi

$$\varepsilon = \frac{a}{2 \max_{\Sigma_1} \varphi(y)} \Rightarrow \tilde{u}(x) \leq u(x_0) - \frac{a}{2} < u(x_0).$$

Si osservi che $\max_{\Sigma_1} \varphi(y) > 0$, poiché $\varphi > 0$ su $Int(B)$.
Inoltre, poiché $\varphi < 0$ fuori da B e $\Sigma_2 \cap B = \emptyset$,

$$\tilde{u}(x) < u(x) \leq u(x_0),$$

per ogni $x \in \Sigma_2$. Pertanto $\tilde{u} < u(x_0)$ su ∂U.

Quindi $\tilde{u}$ deve avere massimo in un punto $z \in Int(U)$. Allora sarebbe $\mathcal{L}\tilde{u}(z) \leq 0$ per il Lemma 3.6. Ma $\mathcal{L}\tilde{u} > 0$ su U.
Perciò non può essere $q(x_0, v) > 0$.
Allora F è X_j-invariante per ogni $j = 1, \ldots, m$, per la Proposizione 3.8.

Quindi, se $\mathfrak{f}$ è l'algebra dei campi vettoriali rispetto ai quali F è invariante, si ha $X_j \in \mathfrak{f}$ per ogni $j = 1, \ldots, m$, e quindi anche $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{f}$, poichè $\mathfrak{g} = Lie(X_1, \ldots, X_m)$.
Allora, per ogni $x \in F^*$, si ha, per la Proposizione 3.8,

$$\langle Y(x), v \rangle = 0, \quad \text{per ogni } v \text{ ortogonale a } F \text{ in } x,$$

per ogni $Y \in \mathfrak{g}$. Poiché $dim(\mathfrak{g}) = n$, questo implica $v = 0$, ma $v \neq 0$ per definizione di vettore ortogonale.
Allora deve essere $F^* = \emptyset$ e quindi $F = \Omega$.

□

Corollario 3.10. *Sia $\mathcal{L}$ un Sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ di dimensione omogenea $Q > 2$ e sia Γ la sua soluzione fondamentale omogenea. Allora*
i) $(\mathcal{L}f) * \Gamma = f$*, per ogni* $f \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$*,*
ii) $\Gamma = \check{\Gamma}$*, cioè* $\Gamma(x) = \Gamma(-x)$*, per ogni* $x \neq 0$*,*
iii) $\Gamma(x) < 0$*, per ogni* $x \neq 0$*,*
iv) $\lim_{x \to 0} \Gamma(x) = -\infty$*.*

Dimostrazione. i) Sia $f \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$; allora anche $\mathcal{L}f \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$. Quindi, per (2.16), $g = (\mathcal{L}f) * \Gamma$ tende a 0 all'infinito.
Consideriamo ora la funzione $h = f - g$. Supponiamo che sia $h \neq 0$.

Allora $\exists x_0 \in \mathbb{G}$ t.c. $h(x_0) \neq 0$; sia $h(x_0) > 0$ (altrimenti consideriamo $h = g - f$).
Quindi, poiché h tende a 0 all'infinito ed è C^∞, deve esistere $y_0 \in \mathbb{G}$ t.c. $h(y_0) = \max h \geq h(x_0) > 0$. Però

$$\mathcal{L}h = \mathcal{L}f - (\mathcal{L}f) * (\mathcal{L}\Gamma) = 0.$$

Allora, per il Teorema 3.7, h deve essere costante. Quindi, poiché tende a 0 all'infinito, necessariamente è $h \equiv 0$.
ii) Siano $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$. Per i)

$$\begin{aligned} \langle f|g\rangle &= \langle (\mathcal{L}f) * \Gamma|g\rangle \\ &= \langle \mathcal{L}f|g * \check{\Gamma}\rangle \\ &= \langle f|\mathcal{L}(g * \check{\Gamma})\rangle, \end{aligned}$$

cioè

$$\int_{\mathbb{G}} f(x)(g(x) - \mathcal{L}(g * \check{\Gamma})(x))\, dx = 0,$$

per ogni $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$. Questo implica $\mathcal{L}(g * \check{\Gamma}) = g$, per ogni $g \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$, cioè $\mathcal{L}\check{\Gamma} = \delta_0$. Quindi $\check{\Gamma}$ è soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$. Allora, poiché questa è unica, $\Gamma = \check{\Gamma}$.
iii) Per prima cosa mostriamo $\Gamma(x) \leq 0$ per ogni $x \neq 0$.
Supponiamo she valga $\Gamma(x_0) > 0$ e sia U un intorno simmetrico dell'origine t.c. $\Gamma(x) > 0$ per ogni $x \in Ux_0$. Sia $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$, $\varphi \geq 0$, non identicamente nulla, con $\mathrm{supp}(\varphi) \subset U$. Allora

$$\varphi * \Gamma(x_0) = \int_U \varphi(y)\Gamma(y^{-1}x_0)\, dy > 0.$$

Poiché $\varphi * \Gamma$ tende a 0 all'infinito, deve avere un punto di massimo.
Però $\mathcal{L}(\varphi * \Gamma) = \varphi \geq 0$ su tutto $\mathbb{G}$. Quindi, per il Teorema 3.7, dovrebbe essere costante, cioè $\varphi * \Gamma \equiv \varphi * \Gamma(x_0) > 0$.
Ma questa è una contraddizione, perché $\lim_{\rho(x)\to\infty} \varphi * \Gamma(x) = 0$.
Quindi $\Gamma(x) \leq 0$ per ogni $x \neq 0$. Ora, se fosse $\Gamma(x_0) = 0$, x_0 sarebbe punto di massimo per Γ su $\mathbb{G} \setminus \{0\}$. Quindi sarebbe $\Gamma \equiv 0$ su $\mathbb{G} \setminus \{0\}$. Ma, poiché Γ è soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$ ed è C^∞ su $\mathbb{G} \setminus \{0\}$,

$$\int_{\mathbb{G}} \Gamma(x)\mathcal{L}\varphi(x)\, dx = \varphi(0), \qquad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{G} \setminus \{0\}).$$

Quindi non può essere $\Gamma \equiv 0$. Allora $\Gamma(x) < 0$ per ogni $x \neq 0$.
iv) Poiché Γ è C^∞ e strettamente negativa fuori da 0,

$$m = \max_{\rho(y)=1} \Gamma(y) < 0.$$

Ora, poiché Γ è omogenea di grado $-Q+2$,

$$\Gamma(x) = \rho(x)^{2-Q}\Gamma(\delta_{\frac{1}{\rho(x)}}(x)) \leq m\rho(x)^{2-Q} \xrightarrow{x\to 0} -\infty.$$

$\square$

Bibliografia

[1] A. Bonfiglioli E. Lanconelli F. Uguzzoni, *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their Sub-Laplacians.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, first edition, 2007.

[2] J.-M. Bony, *Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés.* Ann. Inst. Fourier Gren., **19**, 277-304 (1969).

[3] G.B. Folland, *Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups.* Ark. Mat, **13**, 161-207 (1975).

[4] L. Hörmander, *Hypoelliptic second order differential equations.* Acta Math., **119**, 147-171 (1967).

[5] F. Ricci, *sub-laplacians on nilpotent Lie groups.* http://homepage.sns.it/fricci/papers/sublaplaciani.pdf, 2002-2003.

[6] F. Trèves, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels.* Dover Publications Inc., Mineola New York, 2006.