Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

COMPATTEZZA E SEPARAZIONE

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Giovanni Mongardi

Presentata da:
Giorgio Morodo

Anno Accademico 2020-2021

Introduzione

In questa presentazione ci dedicheremo in un primo momento all'analisi dei ricoprimenti di spazi topologici, dapprima dando la definizione di che cosa effettivamente sia un ricoprimento di uno spazio topologico, ed una classificazione caratterizzata su macro-famiglie di proprietà; quindi parleremo di ricoprimenti aperti, chiusi e localmente finiti.
In seguito affineremo la nostra trattazione passando a scandagliare varie tipologie di ricoprimenti, come: i ricoprimenti fondamentali, i quali legano la loro peculiarità di ricoprimento con il concetto di aperto topologico. Ci occuperemo poi degli spazi compattamenti generati, questi si riconoscono nel possedere la proprietà di separazione di Hausdorff, e uno specifico tipo di ricoprimento formato dai loro sottospazi compatti. Quindi sarà necessario anche riportare alla mente alcuni concetti riguardanti la compattezza e gli spazi di Hausdorff, qui avremo modo anche di mostrare il teorema di Wallace. Dal concetto di compattamente generato riusciremo inoltre ad ottenere un metodo per estendere qualunque spazio topologico ad uno spazio Kelleyficato.
Nella seconda parte, dopo aver fissato la nozione di esaustione in compatti e visto alcune sue applicazioni, che richiederanno di rispolverare i concetti di connessione e componente connessa, avremo anche modo di fare una piccola ma dettagliata digressione riguardo un metodo classico di compattificazione: la compattificazione di Alexandroff.
Passeremo poi a lavorare con i raffinamenti, quindi chiariremo che cosa si intenda per raffinamento, per poter accedere agevolmente all'esposizione di spazi paracompatti, e alle loro correlazioni con spazi compatti ed esaustioni in compatti.
Successivamente ci focalizzeremo sugli spazi normali, mostrando come ogni spazio topologico di Hausdorff e paracompatto sia uno spazio normale. Infine definiremo i raffinamenti stellati e gli spazi pienamente normali, dando prova che ogni spazio pienamente normale sia anche normale.

Indice

Capitolo 1

Ricoprimenti

In questo capitolo studiamo che cosa significa ricoprire uno spazio topologico, a tal proposito forniamo ed analizziamo alcune tipologie di ricoprimenti e le loro correlazioni. Inoltre metteremo in mostra le proprietà degli spazi topologici che possono essere dedotte dall'utilizzo di certi ricoprimenti.

1.1 Ricoprimenti

Cominciamo con il definire il concetto di ricoprimento ed esaminiamone alcuni esempi.

Definizione 1 (Ricoprimento)**.** Una famiglia di sottoinsiemi di X, $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$, è detta ricoprimento se $X = \cup_{i \in I} A_i$. Se $|I| < \infty$ allora $\mathcal{A}$ è un ricoprimento finito di X.

Esempio 2. $\{X\}$ è un ricoprimento di X.

Esempio 3. Se (X, τ) è uno spazio topologico allora τ è un ricoprimento di X.

Esempio 4. La famiglia $U_n = \{]\frac{1}{n}, 1[\}$ con $n \in \mathbb{N}$ è un ricoprimento di $]0, 1[$.

Esempio 5. Se (X, d) è uno spazio euclideo allora la famiglia $\{\overline{B(x, 1)} \,|\, x \in X\}$ è un ricoprimento di X.

Esempio 6. La famiglia $\{[1, 2[,]\frac{3}{2}, \frac{5}{2}[,]2, 3]\}$ è un ricoprimento finito di $[1, 3] \subset \mathbb{R}$ con la topologia euclidea.

Definizione 7 (Sottoricoprimento)**.** Sia $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ e $\mathcal{B} = \{A_i\}_{i \in J}$ ricoprimenti di X, allora $\mathcal{B}$ è detto sottoricoprimento di $\mathcal{A}$ se $J \subset I$.

Ecco una classificazione di vari tipi di ricoprimenti.

Definizione 8. Sia X spazio topologico e $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ ricoprimento di X:

1. $\mathcal{A}$ è detto aperto se ogni $A_i \in \mathcal{A}$ è aperto;
2. $\mathcal{A}$ è detto chiuso se ogni $A_i \in \mathcal{A}$ è chiuso;
3. $\mathcal{A}$ è detto localmente finito se per ogni $x \in X$ esiste $V \subset X$ aperto tale che $x \in V$ e $V \cap A_i \neq \emptyset$ solo per un numero finito di $i \in I$.

Esempio 9. In $(X,\, Grossolana)$ sia $\mathcal{A} = \{U_i\}_{i \in I}$ ricoprimento aperto di X, allora esiste $\bar{i} \in I$ tale che $U_{\bar{i}} = X$, quindi $\{U_{\bar{i}}\}$ è un sottoricoprimento aperto di X.

Esempio 10. In $(X,\, Cofinita)$ sia $\mathcal{A} = \{U_i\}_{i \in I}$ ricoprimento aperto di X. Preso $U_{i_0} \in \mathcal{A}$, $U_{i_0} = X \backslash \{x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n\}$ e per ogni $j \in \{1,\, \cdots,\, n\}$ esiste $i_j \in I$ tale che $x_j \in U_{i_j}$; quindi $X = U_{i_0} \cup \cdots \cup U_{i_n}$. Perciò $\{U_{i_0},\, \cdots,\, U_{i_n}\}$ è un sottoricoprimento aperto di X.

Esempio 11. In $\mathbb{R}$ la famiglia $\{[n,\, n+1] \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ è un ricoprimento chiuso e localmente finito di $\mathbb{R}$.

Esempio 12. Il ricoprimento dell'esempio 4 é aperto, mentre quello dell'esempio 5 è chiuso.

Definizione 13 (Ricoprimento Fondamentale)**.** Sia X spazio topologico, $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ ricoprimento di X. $\mathcal{A}$ è detto ricoprimento fondamentale quando $U \subset X$ è aperto se e solo se $U \cap A_i$ è aperto in A_i per ogni $i \in I$.

Esempio 14. Non tutti i ricoprimenti sono fondamentali: $\{\{x\} \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ è un ricoprimento chiuso di $\mathbb{R}$ che non è fondamentale.

Osservazione 15. Se X è uno spazio topologico, Y sottospazio di X, e $A \subset Y$ è aperto in X, allora lo è anche in Y per la definizione di topologia indotta. Analogamente se $A \subset Y$ è chiuso in X si ha che A è chiuso anche in Y.

Esempio 16. La famiglia $\{[-n,\, n] \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ è un ricoprimento fondamentale di $\mathbb{R}$. Infatti, preso un intervallo in $\mathbb{R}$ di estremi a, b se questo è del tipo:

1. $]a,\, b[$) $]a,\, b[$ è aperto in $\mathbb{R}$ dunque per ogni $n \in \mathbb{N}$, $]a,\, b[\, \cap [-n,\, n]$ è aperto in $[-n,\, n]$ per l'osservazione 15.
   Se per ogni $n \in \mathbb{N}$, $]a,\, b[\, \cap [-n,\, n]$ è aperto in $[-n,\, n]$, ne segue che $]a,\, b[\, = \cup_{n\in\mathbb{N}} (]a,\, b[\, \cap [-n,\, n])$, quindi $]a,\, b[$ è aperto anche in $\mathbb{R}$ perchè unione di aperti è aperta.

2. $[a,\, b]$) $[a,\, b]$ è chiuso in $\mathbb{R}$ dunque per ogni $n \in \mathbb{N}$, $[a,\, b] \cap [-n,\, n]$ è intersezione di chiusi quindi è un chiuso. $[a,\, b] \cap [-n,\, n]$ è chiuso in $[-n,\, n]$ per l'osservazione 15.
   Se supponiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $[a,\, b] \cap [-n,\, n]$ sia aperto, ne segue che $[a,\, b] = \cup_{n\in\mathbb{N}} ([a,\, b] \cap [-n,\, n])$, quindi $[a,\, b]$ è aperto in $\mathbb{R}$, allora $\mathbb{R}\setminus[a,\, b]$ deve essere chiuso, ma ciò è assurdo.

3. $[a,\, b[$) $[a,\, b[$ non è nè aperto nè chiuso in $\mathbb{R}$. Per $n > max\,\{|a|,\, |b|\}$ si ha che $[a,\, b[\, \cap [-n,\, n] = [a,\, b[$ che non è nè aperto nè chiuso in $[-n,\, n]$.
   Se supponiamo per assurdo che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $[a,\, b[\, \cap [-n,\, n]$ sia aperto ricadiamo nella seconda parte della dimostrazione del punto 2.

4. $]a,\, b]$) analogo a $[a,\, b[$.

Quindi $\{[-n,\, n] \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ è un ricoprimento fondamentale di $\mathbb{R}$.

Proposizione 17. *Siano X, Y spazi topologici, $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ ricoprimento fondamentale di X. Allora $f : X \to Y$ è continua se e solo se per ogni $i \in I$, $f|_{A_i} : A_i \to Y$ è continua.*

Dimostrazione. Sia $U \subset Y$ aperto.
$\Rightarrow$) Se $f : X \to Y$ è continua allora $f^{-1}(U) \subset X$ è aperto, quindi poichè $\mathcal{A}$ è un ricoprimento fondamentale ne segue che $f^{-1}(U) \cap A_i$ è aperto per ogni $i \in I$, ma $f^{-1}(U) \cap A_i = f|_{A_i}^{-1}(U)$ perciò $f|_{A_i}^{-1}(U)$ è aperto in A_i per ogni $i \in I$.
$\Leftarrow$) Se $f|_{A_i} : A_i \to Y$ è continua per ogni $i \in I$, allora $f|_{A_i}^{-1}(U)$ è aperto in A_i per ogni i. $f|_{A_i}^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A_i$, e se $f^{-1}(U) \cap A_i$ è aperto in A_i per ogni $i \in I$ si ha che per la definizione 13 $f^{-1}(U)$ è aperto in X.

□

Esempio 18. Consideriamo $\mathbb{R}$ e S^1, prendiamo il ricoprimento visto nell'esempio 16 come ricoprimento fondamentale di $\mathbb{R}$. Sia $f : \mathbb{R} \to S^1$ tale che $f(x) = e^{ix}$. f è continua dunque per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $f|_{[-n,\, n]}$ deve essere ancora un applicazione continua. Infatti preso $e^{ix} \in S^1$, $r \in \mathbb{R}^+$, la palla $B(e^{ix},\, r) \cap S^1$ è aperta in S^1 e $f^{-1}(B(e^{ix},\, r) \cap S^1) =]x-a,\, x+a[$ per qualche $a \in \mathbb{R}^+$. $]x - a,\, x + a[$ è aperto in $\mathbb{R}$ quindi per l'osservazione 15 è aperto anche in $[-n,\, n]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

i seguenti due Lemmi riguardano risultati sulla topologia indotta che saranno molti utili per questa trattazione.

Lemma 19. *Sia X spazio topologico, $Y \subset X$ e $A \subset Y$. Se Y è aperto in X, allora A è aperto in Y se e solo se A è aperto in X.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$) Se A è aperto in Y, per definizione di topologia indotta si ha che esiste B aperto di X tale che $A = B \cap Y$. Poichè per ipotesi Y è aperto in X, ne segue che $B \cap Y$ è intersezione finita di aperti quindi aperto, perciò A è aperto in X.
$\Leftarrow$) Ovvia per l'osservazione 15. □

In maniera analoga si dimostra il duale:

Lemma 20. *Sia X spazio topologico, $Y \subset X$ e $C \subset Y$. Se Y è chiuso in X, allora C è chiuso in Y se e solo se C è chiuso in X.*

Esempio 21. Il disco $D^1 = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ è un chiuso di $\mathbb{R}^2$. Consideriamo il quadrato iscritto nel disco $\{(x, y) \,|\, |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}},\, |y| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$. Il quadrato è chiuso in $\mathbb{R}^2$ quindi per l'osservazione 15 è chiuso anche nel disco. A sua volta il quadrato è chiuso nel disco allora è anche chiuso in $\mathbb{R}^2$.

Teorema 22. *I ricoprimenti aperti e i ricoprimenti chiusi localmente finiti sono fondamentali.*

Dimostrazione.

1. Ricoprimenti aperti) Sia $\mathcal{A} = \{A_i \,|\, i \in I\}$ ricoprimento aperto di X, $U \subset X$. Se $U \cap A_i$ è aperto in A_i per ogni $i \in I$, allora per il lemma 19 $U \cap A_i$ è aperto anche in X. Quindi $U = \cup_{i \in I} A_i \cap U$ è aperto perchè unione di aperti. Se U è aperto in X allora $U \cap A_i$ è aperto in A_i per ogni $i \in I$, perchè intersezione finita di aperti è aperta.

2. Ricoprimenti chiusi e localmente finiti) Consideriamo un ricoprimento chiuso finito di X: $C_1 \cup \cdots \cup C_n$. Sia $U \subset X$ tale che $U \cap C_i$ è aperto in C_i per ogni i. Sia $B = X \backslash U$ allora $B \cap C_i = C_i \backslash (U \cap C_i)$. $B \cap C_i$ è chiuso in C_i perchè un chiuso tolto un aperto resta chiuso. $B \cap C_i$ è chiuso anche in X per il lemma 20. $B = \bigcup_{i=1}^n B \cap C_i$ è chiuso perchè unione finita di chiusi. Se $\{C_i \,|\, i \in I\}$ è un ricoprimento chiuso e localmente finito, allora esiste $\mathcal{A} = \{A_j \,|\, j \in J\}$ ricoprimento aperto di X tale che $\{C_i \cap A_j \,|\, i \in I\}$ è un ricoprimento chiuso finito di A_j per ogni $j \in J$. Perciò se $U \cap C_i$ è aperto in C_i per ogni i, ne segue che $U \cap C_i \cap A_j$ è aperto in $A_j \cap C_i$ per ogni j, quindi $U \cap A_j$ è aperto in A_j per ogni $j \in J$, allora per il lemma 19 U è aperto in X.

□

1.2 Compattezza e Spazi di Hausdorff

In questa sezione esponiamo il concetto di spazio compatto e la proprietà di separazione T_2, o Hausdorff; queste nozioni ci saranno utili anche in seguito. Inoltre approfittiamone per enunciare e dare prova del teorema di Wallace.

Definizione 23 (Compatto)**.** Sia X spazio topologico, X è detto compatto se per ogni ricoprimento aperto esiste un sottoricoprimento finito.

Esempio 24. Ogni insieme finito è compatto, indipendentemente dalla sua topologia: dato un qualunque ricoprimento aperto, possiamo ottenere un sottoricoprimento finito scegliendo per ogni punto un aperto che lo contiene.

Esempio 25. $(X,\, \textit{Discreta})$ è compatto se e solo se è finito: uno spazio discreto ha come ricoprimento aperto $\{\{x\} \,|\, x \in X\}$ e questo è finito se e solo se X è finito.

Esempio 26. $(\mathbb{R},\, \textit{Euclideo})$ non è compatto, poichè il ricoprimento aperto $\{B(0,\, r) \,|\, r > 0,\, r \in \mathbb{R}\}$ non ammette sottoricoprimento finito.

Passiamo ora a studiare come si "propaga" la nozione di compattezza a sottospazi e immagini di applicazioni continue.

Teorema 27 (Heine - Borel)**.** *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea, allora E è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Teorema 28. *Sia X spazio topologico compatto e $C \subset X$ chiuso; allora C è compatto.*

Teorema 29. *Siano X, Y spazi topologici, $f : X \to Y$ un'applicazione continua, se X è compatto allora la sua immagine $f(X)$ è un sottospazio compatto di Y.*

Ora enunciamo e dimostriamo il teorema di Wallace.

Teorema 30 (di Wallace)**.** *Siano X, Y spazi topologici, $A \subset X$, $B \subset Y$ sottospazi compatti e $W \subset X \times Y$ un aperto tale che $A \times B \subset W$. Allora esistono $U \subset X$ e $V \subset Y$ aperti tale che $A \subset U$, $B \subset V$ e $U \times V \subset W$.*

Dimostrazione. Caso $A = \{a\}$)
Per ogni $b \in B$ esiste una coppia di aperti $U_b \subset X$, $V_b \subset Y$ tali che $(a, b) \in U_b \times V_b \subset W$. Per ipotesi B è compatto e $\{V_b \,|\, b \in B\}$ è un ricoprimento aperto, allora esiste un sottoricoprimento finito $\{V_{b_i} \,|\, i \in \{1, \cdots, n\}\}$ tale che $B = \bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i}$. Poniamo $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{b_i}$ e $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i}$ ne segue che $\{a\} \times B \subset U \times V \subset W$.
Caso A generico compatto)
Abbiamo appena mostrato che per ogni $a \in A$ esiste una coppia di aperti U_a, V_a tali che $\{a\} \times B \subset U_a \times V_a \subset W$. La famiglia $\{U_a \,|\, a \in A\}$ è un ricoprimento aperto di A ed A è compatto, allora esiste un sottoricoprimento finito $\{U_{a_j} \,|\, j \in \{1, \cdots, n\}\}$ tale che $A = \bigcup_{j=1}^{m} U_{a_j}$. Poniamo $U = \bigcup_{j=1}^{m} U_{a_j}$ e $V = \bigcap_{j=1}^{m} V_{a_j}$, ciò implica $A \times B \subset U \times V \subset W$. $\square$

Definizione 31 (Spazio di Hausdorff o T_2)**.** Sia X spazio topologico, X è detto T_2 se per ogni x, $y \in X$ con $x \neq y$, esistono U_x, V_y aperti tale che $x \in U_x$, $y \in V_y$ e $U_x \cap V_y = \emptyset$.

Esempio 32. Sia X un insieme dove $X \neq \{x\}$ e $X \neq \emptyset$. (X, *Grossolana*) non è mai T_2 perchè gli unici insiemi aperti sono $\emptyset$ e X stesso.

Esempio 33. La topologia *Discreta* su qualsiasi spazio è sempre T_2 perchè ogni punto è aperto.

Esempio 34. $(\mathbb{R}, Cofinita)$ non è T_2 perchè non esistono aperti disgiunti: se A, B aperti non vuoti allora $A = \mathbb{R} \backslash \{x_1, \cdots, x_n\}$ e $B = \mathbb{R} \backslash \{y_1, \cdots, y_k\}$ quindi $A \cap B = \mathbb{R} \backslash (\{x_1, \cdots, x_n\} \cup \{y_1, \cdots, y_k\})$ ma siccome $\mathbb{R}$ non è finito ne segue che $A \cap B \neq \emptyset$.

Lemma 35. *Sia (X, d) spazio metrico. Allora X è T_2.*

Dimostrazione. Presi x, $y \in X$ con $x \neq y$, allora $d(x, y) > 0$. Sia $r \in]0, \frac{d(x,y)}{2}[$ allora $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$ perchè se esistesse $z \in B(x, r) \cap B(y, r)$ allora per la disuguaglianza triangolare si avrebbe: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2r < d(x, y)$. $\square$

Teorema 36. *Sia X spazio topologico, allora X è T_2 se e solo se $\Delta_x = \{(x, x) \,|\, x \in X\}$ è chiuso in $X \times X$.*

Proposizione 37. *Sia X spazio topologico T_2 e $K \subset X$ compatto. Allora K è chiusa.*

Corollario 38. *Siano X, Y spazi topologici, X compatto e Y T_2, sia $f : X \to Y$ continua, allora f è un'applicazione chiusa.*

Un esempio che mette bene in luce l'importanza del corollario 38 è il seguente:

Esempio 39. Sia $X = [0, 1]$ consideriamo la relazione di equivalenza $0 \sim 1$, allora $X/\sim$ è omeomorfo a S^1: sia $f : X/\sim \rightarrow S^1$ definita da $f(x) = (cos(2\pi x), sin(2\pi x))$, f è continua e biunivoca, inoltre X è compatto per il teorema 27 perciò lo è anche $X/\sim$ perchè quoziente di un compatto è compatto. S^1 è T_2 per il lemma 35 quindi per il corollario 38 si ha che f è chiusa. f è chiusa, continua e biunivoca ciò implica f è un omeomorfismo.

1.3 Spazio Compattamente Generato

Definizione 40 (Compattamente generato)**.** Sia X spazio topologico, X è detto compattamente generato se X è T_2 e $\{Y \subset X \,|\, Y\, compatto\}$ è un ricoprimento fondamentale di X.

Esempio 41. $(\mathbb{R}^2, Euclideo)$ è compattamente generato perchè in quanto spazio metrico per il lemma 35 è T_2. Ora mostriamo che $\{K \subset \mathbb{R}^2 \,|\, K\, compatto\}$ è un ricoprimento fondamentale. Preso $A \subset \mathbb{R}^2$: se A è aperto in $\mathbb{R}^2$ allora $A \cap K$ è aperto in K per l'osservazione 15. Se per ogni K compatto si ha che $A \cap K$ è aperto in K, allora $A = \cup_K (A \cap K)$. A è aperto in $\mathbb{R}^2$ perchè unione di aperti. Allora $\mathbb{R}^2$ è compattamente generato.

Proposizione 42. *Sia X spazio topologico tale che per ogni $x \in X$, esiste $U_x \subset X$ intorno compatto di x. Allora X è compattamente generato.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\Delta_x = \{(x, x) \,|\, x \in X\}$ non sia chiuso in $X \times X$, quindi $(X \times X) \backslash \Delta_x$ non è aperto. Per ipotesi per ogni $x \in X$ esiste $U_x \subset X$ intorno compatto di x, sia $\pi : U_x \times U_x \rightarrow U_x$ proiezione al secondo fattore, poniamo $C = (U_x \times U_x) \backslash \Delta_x$, C non è aperto. Esiste $\bar{x} \notin \pi(C)$ perciò $U_x \times \{\bar{x}\} \subset U_x \times U_x \backslash C$. Poichè U_x è un intorno e C non è aperto ne segue che $U_x \times U_x \backslash C$ contiene un aperto che a sua volta contiene $U_x \times \{\bar{x}\}$. Per il teorema 30 esiste V intorno di $\bar{x}$ tale che $(U_x \times V) \cap C = \emptyset$ perciò $V \cap \pi(C) = \emptyset$ ma ciò è assurdo. Allora Δ_x è chiuso quindi X è T_2 per il teorema 36.
Ora consideriamo la famiglia $\{U_x \,|\, x \in X\}$ questa è un ricoprimento chiuso di X per la proposizione 37. Preso $A \subset X$ si ha che: se A è aperto in X allora $A \cap U_x$ è aperto in U_x per ogni $x \in X$ attraverso l'osservazione 15. Se per ogni $x \in X$ si ha che $A \cap U_x$ è aperto in U_x, ne segue che $A = \bigcup_{x \in X} A \cap U_x$ è aperto in X. Ciò implica che $\{U_x \,|\, x \in X\}$ è un ricoprimento fondamentale di X, quindi X è compattamente generato.

□

Esempio 43. $(\mathbb{R}^2, Euclideo)$ è compattamente generato per l'esempio 41. Per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ esiste $\overline{B(x, 1)}$ intorno di x, questo intorno è compatto per il teorema 27.

Esempio 44. Sia X un insieme finito, $(X,\, Discreta)$ è compattamente generato: per ogni $x \in X$ esiste $\{x\}$ intorno compatto di x. La *Discreta* è T_2 per l'esempio 32.

Definizione 45 (Applicazione propria)**.** Siano X, Y spazi topologici, $f : X \to Y$ continua, allora f si dice propria se per ogni $K \subset Y$ compatto si ha che $f^{-1}(K)$ è compatto.

Proposizione 46. *Sia X spazio topologico T_2, allora X è compattamente generato se e solo se ogni applicazione propria $f : Y \to X$ è chiusa.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$) Per ipotesi X è compattamente generato quindi per la proposizione 42 si ha che per ogni $x \in X$ esiste U_x intorno compatto di x, allora $f^{-1}(U_x)$ è compatto perchè f è propria. Sia $f_x : f^{-1}(U_x) \to U_x$, f_x è continua, $f^{-1}(U_x)$ è compatto e U_x è T_2 perchè sottospazio di un T_2 è T_2; allora f_x è chiusa per il corollario 38. $Y = \cup_{x\in X} f^{-1}(U_x)$ e quindi l'applicazione $f : Y \to X$ è tale che $f = \cup_{x\in X} f_x$, dunque f è chiusa perchè unione di funzioni chiuse.
$\Leftarrow$) Sia $\mathcal{A} = \{K \subset X \mid K\, compatto\}$, vogliamo mostrare che $\mathcal{A}$ è un ricoprimento fondamentale di X. Per ogni K consideriamo $f_K : K \to X$ applicazione identità su K, quindi f_K è una funzione propria. Preso $U \subset K$ si ha che: se U è chiuso in K per ogni $K \subset X$, poichè per ipotesi ogni applicazione propria verso X è chiusa, ne segue che $f_K(U) = U$ è chiuso in X. Perciò $K \backslash U$ è aperto in K per ogni K implica che $X \backslash U$ è aperto in X. Inoltre se $X \backslash U$ è aperto in X, visto che le applicazioni proprie sono continue, ne segue che $f_K^{-1}(X \backslash U) = K \backslash U$ è aperto in K per ogni K. Se esiste un K dove U non è chiuso allora U non è chiuso neanche in X, quindi $K \backslash U$ non è aperto in K per qualche $K \subset X$ implica che $X \backslash U$ non è aperto in X. Inoltre se $X \backslash U$ non è aperto in X, si ha che $f_K^{-1}(X \backslash U) = K \backslash U$ che non è aperto in K per ogni K. Allora $A \subset X$ è aperto se e solo se $A \cap K$ è aperto in K per ogni $K \subset X$ compatto, perciò $\mathcal{A}$ è un ricoprimento fondamentale di X. Per ipotesi X è T_2 allora X è compattamente generato. □

Proposizione 47. *Sia $(X,\, \tau)$ spazio topologico T_2 e sia $\mathcal{K}$ la famiglia dei sottoinsiemi $A \subset X$ tali che $A \cap K$ è aperto in K per ogni $K \subset X$ compatto. Allora valgono le seguenti affermazioni:*

1. *La famiglia $\mathcal{K}$ è una topologia più fine di τ e vale $\mathcal{K} = \tau$ se e solo se $(X,\, \tau)$ è compattamente generato.*
2. *Lo spazio topologico $(X,\, \mathcal{K})$ è T_2 e compattamente generato.*
3. *Siano Y spazio topologico compattamente generato e $f : Y \to (X,\, \tau)$ un'applicazione continua. Allora anche $f : Y \to (X,\, \mathcal{K})$ è continua.*

Dimostrazione. 1. $\mathcal{K}$ è più fine di τ se per ogni $A \in \tau$ si ha che $A \in \mathcal{K}$. Preso $A \in \tau$, $A \in \mathcal{K}$ se $A \cap K$ è aperto in K per ogni $K \subset X$ compatto. Se $A \in \tau$ per

definizione di topologia indotta si ha che $A \cap K$ è aperto in K per ogni K compatto di X.
$\Rightarrow$) $(X, \mathcal{K})$ è compattamente generato se è T_2 e $\mathcal{A} = \{K \subset X \mid K\ compatto\}$ forma un ricoprimento fondamentale, cioè $A \subset X$ aperto se e solo se $A \cap K$ è aperto in K per ogni $K \in \mathcal{A}$; ma ciò è ovvio per definizione di $\mathcal{K}$.
$\Leftarrow$) $A \in \mathcal{K}$ se $A \cap K$ è aperto in K per ogni $K \subset X$ compatto. Per ipotesi (X, τ) è compattamente generato, quindi $A \in \tau$ se e solo se $A \in \mathcal{K}$.
Allora $\mathcal{K} = \tau$.

2. Poichè $\tau \subset \mathcal{K}$ e (X, τ) è T_2 allora anche $(X, \mathcal{K})$ è T_2. Per definizione $\mathcal{A} = \{K \subset X \mid K\ compatto\}$ è un ricoprimento fondamentale di X.
Quindi $(X, \mathcal{K})$ è compattamente generato.

3. Preso $A \in \mathcal{K}$ se $f^{-1}(A)$ è aperto in Y allora $f : Y \to (X, \mathcal{K})$ è continua. $A \in \mathcal{K}$ dunque per ogni $K \subset X$ compatto si ha che $A \cap K$ è aperto in K. $f^{-1}(A \cap K) = f|_K^{-1}(A \cap K)$ che è continua per la topologia indotta da τ, quindi $f^{-1}(A \cap K)$ è aperto in Y. $f^{-1}(A \cap K) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(K)$. $K \subset X$ è compatto e X è T_2 allora per la proposizione 37 si ha che K è chiuso, $f : Y \to (X, \tau)$ è continua quindi $f^{-1}(K)$ è chiuso in Y. Y è per ipotesi compattamente generato quindi per la proposizione 42 si ha che per ogni $y \in Y$, esiste U_y intorno compatto di y. $U_y \subset Y$ è compatto e Y è T_2 perchè compattamente generato allora U_y è chiuso. $f^{-1}(K) = \cup_{y \in Y} (U_y \cap f^{-1}(K))$. $U_y \cap f^{-1}(K)$ è intersezione di chiusi quindi è chiusa; $U_y \cap f^{-1}(K) \subset U_y$ perciò per il teorema 28 $U_y \cap f^{-1}(K)$ è compatto. $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(K) \cap U_y$ è aperto in U_y per la definizione di topologia indotta, quindi $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(K) \cap U_y$ è aperto anche in $f^{-1}(K) \cap U_y$ per l'osservazione 15. I compatti di Y possono essere formati dall'unione di $f^{-1}(K) \cap U_y$, per opportuni $K \subset X$ compatto e $U_y \subset Y$ intorno compatto di y. Poichè Y è compattamente generato ne segue $f^{-1}(A)$ è aperto in Y.

$\square$

La topologia $\mathcal{K}$ viene detta **estensione di Kelley** della topologia τ e lo spazio topologico $(X, \mathcal{K})$ viene detto il **Kelleyficato** di (X, τ).

Capitolo 2

Esaustione in compatti

In questo capitolo andiamo a porre l'accento sui comportamenti all'infinito degli spazi topologici e lo faremo tramite particolari successioni di spazi compatti, dette esaustioni in compatti. Analizzeremo nel dettaglio anche un metodo classico di compattificazione: la compattificazione di Alexandroff. Inoltre dopo aver definito cosa si intende per spazio paracompatto snoccioleremo i legami tra paracompattezza e compattezza, e quelli tra paracompattezza ed esaustioni in compatti. Infine tratteremo gli spazi normali analizzando anche i raffinamenti stellati e gli spazi pienamente normali.

2.1 Esaustione in compatti

Definizione 48 (Esaustione in compatti)**.** Una esaustione in compatti di uno spazio topologico X è una successione di sottospazi compatti $\{K_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ tale che:

1. $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
2. $\cup_{n\in\mathbb{N}} K_n = X$

Osservazione 49. Per ogni esaustione in compatti $\{K_n\}$ di uno spazio X, la famiglia delle parti interne $\{\overset{\circ}{K}_n\}$ è un ricoprimento aperto di X e quindi, per ogni $H \subset X$ compatto, esiste n tale che $H \subset \overset{\circ}{K}_n \subset K_n$.

Esempio 50. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $K_n = \{[-n,\, n] \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. I K_n sono compatti per il teorema 27, $[-n,\, n] \subset]-n-1,\, n+1[$, e $U_{n\in\mathbb{N}}\, [-n,\, n] = \mathbb{R}$. Quindi la successione $\{K_n\}$ è un'esaustione in compatti di $\mathbb{R}$.

Esempio 51. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $K_n = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq n^2\} \subset \mathbb{R}^2$. I K_n sono compatti per il teorema 27, e $\{x^2 + y^2 \leq n^2\} \subset \{x^2 + y^2 < (n+1)^2\}$. $\cup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \mathbb{R}^2$. Perciò la successione $\{K_n\}$ è un'esaustione in compatti di $\mathbb{R}^2$.

Un tecnica tipica per far rientrare il comportamento all'infinito di uno spazio topologico X tra le proprietà topologiche usuali è la **compattificazione di Alexandroff** $\hat{X}$.

Osservazione 52. Dato uno spazio topologico non compatto X, una sua compattificazione è uno spazio topologico Y compatto tale che X è omeomorfo ad un sottospazio denso di Y.

Definizione 53 (Compattificazione di Alexandroff $\hat{X}$)**.** Sia X spazio topologico, ∞ un punto non appartenente a X e definiamo $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$. Su $\hat{X}$ consideriamo la famiglia τ: $\tau = \{A \,|\, A \subset X \, aperto\} \cup \{\hat{X} \backslash K \,|\, K \subset X \, chiuso \, e \, compatto\}$.

Con il seguente Lemma si verifica che τ é la famiglia degli aperti di una topologia.

Lemma 54. *Sia* (X, s) *spazio topologico, allora* $(\hat{X}, \tau)$ *con* $\tau = \{A \,|\, A \in s\} \cup \{\hat{X} \backslash K \,|\, K \subset X \, chiuso \, e \, compatto\}$ *è uno spazio topologico.*

Dimostrazione.

1. $\emptyset, \hat{X} \in \tau$*)* $\emptyset \in s$ quindi $\emptyset \in \tau$. $\emptyset$ è anche chiuso e compatto in X perciò $\hat{X} \backslash \emptyset = \hat{X}$ e ciò implica che $\hat{X} \in \tau$.

2. τ *chiusa per unione qualsiasi)* Sia $\{A_i\} \in \tau$, si ha che:
   Se $A_i \in s$ per ogni i allora $\cup_i A_i \in s$ quindi $\cup_i A_i \in \tau$.
   Se esiste j tale che $\infty \in A_j$ ne segue che dobbiamo mostrare $\hat{X} \backslash (\cup_i A_i)$ sia chiusa e compatta in X. $\hat{X} \backslash \cup_i A_i = \cap_i (\hat{X} \backslash A_i)$. $\hat{X} \backslash A_j \subset X$ chiuso e compatto per ipotesi. $\cap_i (\hat{X} \backslash A_i) = (\hat{X} \backslash A_j) \cap (\cap_{i \neq j} (\hat{X} \backslash A_i))$, gli $A_i \subset X$ sono aperti quindi gli $\hat{X} \backslash A_i$ sono chiusi, intersezione di chiusi è chiusa perciò $(\hat{X} \backslash A_j) \cap (\cap_{i \neq j} (\hat{X} \backslash A_i))$ è chiusa in X. $(\hat{X} \backslash A_j) \cap (\cap_{i \neq j} (\hat{X} \backslash A_i)) \subset \hat{X} \backslash A_j$ e servendoci del teorema 28 possiamo affermare che $(\hat{X} \backslash A_j) \cap (\cap_{i \neq j} (\hat{X} \backslash A_i))$ è compatta in X. Allora $\cap_i (\hat{X} \backslash A_i)$ è chiusa e compatta in X.

3. τ *chiusa per intersezione finita)* Siano $A, B \in \tau$, si ha che:
   Se $A, B \in s$ allora $A \cap B \in s$ quindi $A \cap B \in \tau$.
   Se $\infty \in A \cap B$ dobbiamo mostrare che $\hat{X} \backslash (A \cap B)$ sia chiuso e compatto in X. $\hat{X} \backslash (A \cap B) = (\hat{X} \backslash A) \cup (\hat{X} \backslash B)$. $\infty \in A, B$ quindi per definizione di τ si ha che $\hat{X} \backslash A$ e $\hat{X} \backslash B$ sono chiusi e compatti in X, perciò $(\hat{X} \backslash A) \cup (\hat{X} \backslash B)$ è chiuso e compatto in X perchè unione finita di chiusi è chiusa e l'unione finita di compatti è compatta.
   Se $\infty \in A$ ma $\infty \notin B$, allora $A \cap B \in s$ quindi $A \cap B \in \tau$.

$\square$

Esempio 55. Consideriamo la proiezione stereografica, questa è la proiezione dei punti sulla superficie di una sfera dal suo Polo Nord, N, sopra un piano che è il tangente alla sfera nel Polo Sud, S. Tale applicazione determina una corrispondenza biunivoca tra i punti della sfera privata di N e i punti del piano; che a sua volta può estendersi ad una corrispondenza biunivoca tra punti della sfera e i punti del piano ampliato con un punto all'infinito: basta far corrispondere a questo il Polo Nord. Perciò $\mathbb{R}^2 \cup \infty$ è omeomorfo ad S^2, quindi S^2 è la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{R}^2$.

Lemma 56. *$\hat{X}$ è un spazio topologico compatto.*

Dimostrazione. Sia $\{U_i\}_{i\in I}$ ricoprimento aperto di $\hat{X}$, $\hat{X} = \cup_{i\in I} U_i$. Esiste un indice, che lo indichiamo con 0, tale che $\infty \in U_0$, quindi $\cup_{i\in I\setminus\{0\}} U_i$ è un ricoprimento aperto del compatto $K = \hat{X}\setminus U_0$, perciò esiste un sottoricoprimento finito di K, $K = U_1 \cup \cdots \cup U_n$. Allora $\hat{X} = U_0 \cup U_1 \cup \cdots \cup U_n$, ciò implica che $\hat{X}$ è compatto. □

Proposizione 57. *$\hat{X}$ è T_2 se e solo se X è T_2 e ogni punto di X possiede un intorno compatto.*

Dimostrazione. Poichè X è aperto in $\hat{X}$ per il lemma 19 si ha che due punti distinti di X hanno intorni disgiunti in X se e solo se hanno intorni disgiunti in $\hat{X}$. Preso $x \in X$ allora x e ∞ hanno intorni disgiunti in $\hat{X}$ se e solo se esiste $U \subset X$ aperto, dove $x \in U$, ed esiste $K \subset X$ chiuso e compatto con $x \in \overset{\circ}{K}$ tale che $U \cap (\hat{X}\setminus K) = \emptyset$.

□

Esempio 58. S^2 è la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{R}^2$ per l'esempio 55. S^2 e $\mathbb{R}^2$ sono entrambi T_2 in quanto spazi metrici per il lemma 35, e per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esiste $\overline{B((x, y), \epsilon)}$ che è un intorno compatto di $\mathbb{R}^2$, per il teorema 27.

Osservazione 59. L'inclusione naturale $X \hookrightarrow \hat{X}$ è un'immersione aperta.

Proposizione 60. *Siano X, Y spazi topologici T_2, sia $f : X \to Y$ immersione aperta. Allora $g : Y \to \hat{X}$ dove $g(y) = \begin{cases} x & \text{se } y = f(x) \\ \infty & \text{se } y \notin f(X) \end{cases}$ è continua.*
In particolare ogni spazio topologico Y compatto e T_2 coincide con la compattificazione di Alexandroff di $Y\setminus\{y\}$, per ogni $y \in Y$.

Dimostrazione. Sia U un aperto di $\hat{X}$. Se $U \subset X$ allora $g^{-1}(U) = f(U)$ e f è aperta per ipotesi. Se $U = \hat{X}\setminus K$ con $K \subset X$ chiuso e compatto, allora $g^{-1}(U) = g^{-1}(\hat{X}\setminus K) = Y\setminus f(K)$. $f(K)$ è compatto per il teorema 29, e per la proposizione 37 si ha che $f(K)$ è chiuso, quindi $Y\setminus f(K)$ è aperto. Allora g è continua perchè la preimmagine degli aperti è aperta.

Ora consideriamo il caso in cui Y è compatto e T_2, $X = Y\backslash\{y\}$ e f è l'inclusione. L'applicazione g è continua e biunivoca. Poichè Y è compatto e $\hat{X}$ è T_2 per il corollario 38 si ha che g è anche chiusa, allora g è un omeomorfismo. Perciò Y è la compattificazione di Alexandroff di X.

□

Osservazione 61. La compattificazione di Alexandroff $\hat{X}$ è la compattificazione più piccola possibile, ovvero quella che si ottiene aggiungendo un solo punto ad X. Questo può essere chiamato punto improprio, o all'infinito.

Esempio 62. $[0, 1]$ è la compattificazione di Alexandroff di $[0, 1[$, poichè $[0, 1]$ è T_2 e compatto ed è ottenuto da $[0, 1[$ aggiungendo solo il punto 1.

Esempio 63. Sia S^n superficie sferica di $\mathbb{R}^n$, $P \in S^n$, allora S^n è compattificazione di Alexandroff di $S^n\backslash P$.

Proposizione 64. *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione propria. Allora f si estende in modo naturale ad un'applicazione continua $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$.*

Dimostrazione. Siano $\hat{X} = X \cup \infty$, $\hat{Y} = Y \cup \infty$, e $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$ un'applicazione tale che: per ogni $x \in X$ $\hat{f}(x) = f(x)$ e $\hat{f}(\infty) = \infty$.
Per ipotesi f è un'applicazione propria quindi per definizione 45 f è continua. Sia $A \subset \hat{Y}$ aperto e $\infty \in A$, allora $A = \hat{Y}\backslash K$ dove $K \subset Y$ chiuso e compatto. $\hat{f}^{-1}(A) = \hat{f}^{-1}(\hat{Y}\backslash K) = \hat{X}\backslash f^{-1}(K)$. f è propria quindi si ha che $f^{-1}(K)$ è chiuso e compatto in X, perciò $\hat{X}\backslash f^{-1}(K)$ è aperto, dunque $\hat{f}$ è continua.

□

2.2 Cenni su Connessione e Componenti connesse

Ecco un breve excursus sulla connessione e sulle componenti connesse che ci saranno utili per il prossimo paragrafo.

Definizione 65 (Arco o Cammino)**.** Una funzione continua f definita da $[0, 1]$, con topologia euclidea, ad X spazio topologico, è detta arco, o cammino, di estremi $f(0)$, $f(1)$.

Definizione 66 (Connessione per archi)**.** Sia X spazio topologico, X è connesso per archi se per ogni $x, y \in X$, esiste $\gamma : [0, 1] \to X$ arco con $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$.

Esempio 67. Gli intervalli in $\mathbb{R}$ sono connessi per archi: preso $I = [a, b]$, $x, y \in I$ con $x \leq y$, definiamo $\gamma(t) = (1-t)x + ty$. Questo vale per ogni genere di intervallo $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$, e per ogni dimensione $n > 0$.

Esempio 68. Le sfere S^n sono connessi per archi per ogni $n > 1$ per la proiezione stereografica, esempio 55.

Definizione 69 (Connessione)**.** Sia X uno spazio topologico, X è detto connesso se $A \subset X$ aperto e chiuso, allora o $A = X$ oppure $A = \emptyset$. Altrimenti X è sconnesso, infatti esisterebbe $X \backslash A \subset X$ aperto e chiuso con $X \backslash A \neq \emptyset$ e $X \backslash A \neq X$ dove $A \cap (X \backslash A) = \emptyset$, quindi sconnette X.

Esempio 70. Un punto è sempre connesso.

Esempio 71. $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ è sconnesso infatti: $\mathbb{R}^+ =]0, \infty[\cap (\mathbb{R} \backslash \{0\})$ è aperto, $\mathbb{R}^+ = [0, \infty[\cap (\mathbb{R} \backslash \{0\})$ è chiuso, e $\emptyset \neq \mathbb{R}^+ \neq \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Esempio 72. $\mathbb{Q}$ è sconnesso infatti: $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$ è chiuso, $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q}$ è aperto, e $\emptyset \neq [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} \neq \mathbb{Q}$.

Esempio 73. Sia $X = \{a, b\}$ con la topologia $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. X è connesso perchè $\{a\}$ è aperto e il suo complementare $\{b\}$ è chiuso, perciò nè $\{a\}$ nè $\{b\}$ sono aperti e chiusi.

Lemma 74. *Se X è connesso per archi allora X è anche connesso.*

Definizione 75 (Componente connessa)**.** Sia X spazio topologico, $C \subset X$ è detto componente connessa se:

1. C è connesso.

2. Per ogni $A \subset X$ connesso tale che $A \cap C \neq \emptyset$ si ha $A \subset C$.

Quindi una componente connessa è un elemento massimale della famiglia dei sottospazi connessi, ordinata per inclusione.

Esempio 76. Se X è connesso l'unica componente connessa di X è X stesso.

Esempio 77. Siano X uno spazio topologico e $C \subset X$ un sottospazio aperto, chiuso, connesso e $C \neq \emptyset$. Quindi C è una componente connessa di X. Se esiste A connesso dove $C \subset A$, allora ne consegue che $C = A$.

Esempio 78. Siccome i punti sono connessi si ha che questi sono le componenti connesse di $\mathbb{Q}$, infatti se $A \subset \mathbb{Q}$, a e $b \in A$ dove $a \neq b$, allora esiste un irrazionale $r \in]a, b[$ e quindi $C = A \cap]a, r[$ è aperto e chiuso in A.

2.3 Applicazioni

Proposizione 79. $\mathbb{R}^2$ *non è omeomorfo a* $\mathbb{R} \times [0, 1]$.

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $K_n = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq n^2\} \subset \mathbb{R}^2$. La successione di $\{K_n\}$ è una esaustione in compatti di $\mathbb{R}^2$. Supponiamo che esista $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times [0, 1]$ omeomorfismo. $D_n = f(K_n)$ e $\{D_n\}$ è un'esaustione in compatti di $\mathbb{R} \times [0, 1]$ per il teorema 29. Esiste $N \in \mathbb{Z}^+$ tale che $(\{0\} \times [0, 1]) \subset D_N$; per l'osservazione 49 $(\mathbb{R} \times [0, 1]) \backslash D_N$ è unione disgiunta di due aperti non vuoti: $(]-\infty, 0[\times [0, 1]) \backslash D_N$ e $(]0, \infty[\times [0, 1]) \backslash D_N$.
$(\mathbb{R} \times [0, 1]) \backslash D_N$ non è connesso, mentre $\mathbb{R}^2 \backslash K_N$ è connesso, allora è assurdo che esista f omeomorfismo. □

Proposizione 80. $\mathbb{R} \times [0, 1]$ *non è omeomorfo a* $\mathbb{R} \times [0, \infty[$.

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $K_n = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq n^2,\, y \geq 0\} \subset \mathbb{R} \times [0, \infty[$. La successione di $\{K_n\}$ è un'esaustione in compatti di $\mathbb{R} \times [0, \infty[$. Supponiamo che esista f omeomorfismo tale che $f : \mathbb{R} \times [0, \infty[\to \mathbb{R} \times [0, 1]$; $D_n = f(K_n)$ esaustione in compatti di $\mathbb{R} \times [0, 1]$ per il teorema 29. Esiste $N \in \mathbb{Z}^+$ tale che $(\{0\} \times [0, 1]) \subset D_N$; per l'osservazione 49 $(\mathbb{R} \times [0, 1]) \backslash D_N$ ha due componenti come in proposizione 79. Invece $(\mathbb{R} \times [0, \infty[) \backslash K_N$ è connesso, quindi è assurdo che f sia omeomorfismo. □

Proposizione 81. *Sia A il cilindro aperto,* $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^3$*, B il cilindro chiuso,* $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$*. Allora A non è omeomorfo a B.*

Dimostrazione. Sia $K_n = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\, z \in [-n, n]\}$, la successione di $\{K_n\}$ è un'esaustione in compatti di B. Supponiamo che esista $f : B \to A$ omeomorfismo. $D_n = f(K_n)$ e la successione di $\{D_n\}$ è un'esaustione in compatti di A per il teorema 29. Esiste $N \in \mathbb{Z}^+$ tale che $\{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \subset K_N$; $B \backslash K_N$ ha due componenti connesse: $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\, z > 0\} \backslash K_N$ e $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\, z < 0\} \backslash K_N$. Invece $A \backslash D_N$ è connesso. Quindi è assurdo che esista f omeomorfismo. □

2.4 Raffinamenti e Paracompattezza

Definizione 82 (Intorno)**.** Sia X uno spazio topologico, $x \in X$; allora $U \subset X$ è detto intorno di x se esiste V aperto tale che $x \in V \subset U$.

Esempio 83. Un aperto è intorno di ogni suo punto.

Esempio 84. $[0, 2]$ è intorno di 1 ma non lo è nè di 0 nè di 2.

Denotiamo con $\mathcal{I}(x)$ la famiglia di tutti gli intorni di x.

Definizione 85 (Sistema fondamentale di intorni)**.** Sia X spazio topologico, $x \in X$, $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}(x)$ è detto sistema fondamentale di intorni di x, se per ogni $U \subset \mathcal{I}(x)$, esiste $A \in \mathcal{J}$ tale che $A \subset U$.

Esempio 86. Sia $U \in \mathcal{I}(x)$ un intorno fissato. Allora tutti gli intorni di x contenuti in U formano un sistema fondamentale di intorni di x.

Esempio 87. Sia $\mathcal{B}$ base della topologia, allora gli aperti di $\mathcal{B}$ che contengono x formano un sistema fondamentale di intorni di x.

Esempio 88. Sia (X, d) uno spazio metrico. Per ogni x definiamo $B_x = \{B(x, \epsilon) \,|\, 0 < \epsilon, \, \epsilon \in \mathbb{Q}\}$. Per ogni $x \in X$, la famiglia B_x è un sistema fondamentale di intorni di x.

Proposizione 89. *Sia X spazio topologico e $\{C_i\}_{i \in I}$ una famiglia di chiusi localmente finita, allora $\cup_i C_i$ è chiusa in X.*

Dimostrazione. Preso $x \in X \setminus \cup_i C_i$, allora esiste $V_x \subset X$ aperto tale che $x \in V_x$ e V_x interseca un numero finito di elementi della famiglia $\{C_i\}_{i \in I}$; indichiamo tali elementi come $C_1^x, C_2^x, \cdots, C_n^x$. Sia $W_x = V_x \cap (X \setminus C_1^x) \cap \cdots \cap (X \setminus C_n^x)$, quindi W_x è aperto. $W_x \subset X \setminus \cup_i C_i$, perciò $X \setminus \cup_i C_i = \cup_{x \notin \cup_i C_i} W_x$. Allora $\cup_i C_i$ è chiuso. □

Esempio 90. Sia $\mathbb{R}$, consideriamo la famiglia $\{[i, \, i+1]\}_{i \in \mathbb{Z}}$, questa è localmente finita, infatti per ogni $x \in \mathbb{R}$ $B(x, \frac{1}{2})$ interseca al più due intervalli di questo tipo: $[\lfloor x \rfloor - 1, \lfloor x \rfloor]$, $[\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1]$, $[\lfloor x \rfloor + 1, \lfloor x \rfloor + 2]$. $\cup_i [i, \, i+1]$ è chiusa in $\mathbb{R}$.

Definizione 91 (Raffinamento)**.** Sia X uno spazio topologico e siano $\{U_i \,|\, i \in I\}$, $\{V_j \,|\, j \in J\}$ ricoprimenti di X. $\{U_i \,|\, i \in I\}$ è un raffinamento di $\{V_j \,|\, j \in J\}$ se per ogni $i \in I$, esiste $j \in J$ tale che $U_i \subset V_j$. In tal caso si dice funzione di raffinamento qualunque $f : I \to J$ tale che $U_i \subset V_{f(i)}$ per ogni $i \in I$.

Esempio 92. Siano $\{U_i \,|\, i \in I\}$, $\{V_j \,|\, j \in J\}$ due ricoprimenti di uno spazio topologico. Il ricoprimento $\{U_i \cap V_j \,|\, (i, j) \in I \times J\}$ è un raffinamento di entrambi. Come funzioni di raffinamento è possibile prendere le proiezioni $\pi_1 : I \times J \to I$ e $\pi_2 : I \times J \to J$.

Esempio 93. Sia X uno spazio metrico e sia $x \in X$. La famiglia $\mathcal{U} = \{B(x, r) \,|\, x \in X, r \in [1, \infty[\}$ e la famiglia $\mathcal{V} = \{B(x, 1) \,|\, x \in X\}$ sono ricoprimenti aperti di X. $\mathcal{V}$ è un raffinamento di $\mathcal{U}$ perchè per ogni $x \in X$ esiste un $r > 1$ tale che $B(x, 1) \subset B(x, r)$. Come funzione di raffinamento possiamo prendere $f : X \times [1, \infty[\to X$, dove $f(x, r) = B(x, r)$.

Definizione 94 (Paracompatto)**.** Sia X uno spazio topologico, X è detto paracompatto se ogni suo ricoprimento aperto ammette un raffinamento aperto e localmente finito.

Dal seguente Lemma ne consegue che se uno spazio è compatto allora è anche paracompatto.

Lemma 95. *Sia X uno spazio topologico, se ogni ricoprimento ammette un raffinamento finito, allora X è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{V} = \{V_j \,|\, j \in J\}$ ricoprimento aperto di X, per ipotesi $\mathcal{V}$ ammette un raffinamento finito, che indichiamo con $\mathcal{U}$. $\mathcal{U} = \{U_i \,|\, i \in I\}$. Per la definizione di raffinamento 91 si ha che anche $\mathcal{U}$ è un ricoprimento di X e esiste una funzione $f : I \to J$ tale che $U_i \subset V_{f(i)}$ per ogni $i \in I$, allora $\mathcal{U}$ può essere visto come un sottoricoprimento finito di $\mathcal{V}$, perciò X è compatto. □

Corollario 96. *Sia X uno spazio topologico compatto allora X è anche paracompatto.*

Definizione 97 (Localmente compatto)**.** Sia X uno spazio topologico, X è detto localmente compatto se ogni suo punto possiede un intorno compatto.

Esempio 98. Gli aperti di $\mathbb{R}^n$ sono localmente compatti. Infatti se $U \subset \mathbb{R}^n$ è aperto e $x \in U$ esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \subset U$; per ogni $0 < R < r$ la palla chiusa $\overline{B(x, R)}$ è un intorno compatto di x in U.

Esempio 99. Uno spazio compatto è localmente compatto poichè esso è intorno compatto di ogni punto.

Proposizione 100. *Sia X uno spazio topologico, $\{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia localmente finita di X, allora $\overline{\cup_i A_i} = \cup_i \overline{A_i}$.*

Dimostrazione. Per la proposizione 89 si ha che $\cup_i \overline{A_i}$ è un chiuso in X. Ora la relazione $\overline{\cup_i A_i} \subset \cup_i \overline{A_i}$ è ovvia. L'altra implicazione, $\cup_i \overline{A_i} \subset \overline{\cup_i A_i}$, è soddisfatta perchè $\overline{\cup_i A_i}$ è un chiuso che contiene A_i quindi contiene anche $\overline{A_i}$ per ogni $i \in I$. Allora $\overline{\cup_i A_i} = \cup_i \overline{A_i}$. □

Esponiamo le correlazioni che intercorrono tra spazi paracompatti ed esaustioni in compatti.

Teorema 101. *Sia X uno spazio topologico T_2, allora valgono le seguenti affermazioni:*

1. *Se X possiede un'esaustione in compatti, allora X è paracompatto e localmente compatto.*
2. *Se X è connesso, paracompatto e localmente compatto, allora X possiede un'esaustione in compatti.*

Dimostrazione. 1. Sia la successione $\{K_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un'esaustione in compatti di X. Sia $\mathcal{B}$ base della topologia. Vogliamo mostrare che per ogni $\mathcal{A}$ ricoprimento aperto di X esiste $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ raffinamento localmente finito di $\mathcal{A}$.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in K_n \setminus \overset{\circ}{K}_{n-1}$ consideriamo $A_i \in \mathcal{A}$ dove $x \in A_i$, e $B_n^x \in \mathcal{B}$ dove $x \in B_n^x$ e $B_n^x \subset A_i \cap (\overset{\circ}{K}_{n+1} \setminus K_{n-2})$.
I B_n^x sono un ricoprimento aperto di $K_n \setminus \overset{\circ}{K}_{n-1}$, e poichè $K_n \setminus \overset{\circ}{K}_{n-1}$ è compatto allora esiste un sottoricoprimento finito del tipo: $B_n^{x_1} \cup B_n^{x_2} \cup \cdots \cup B_n^{x_s}$. L'unione al variare di n di tali ricoprimenti fornisce la famiglia $\mathcal{C}$ cercata.

2. Per ipotesi X è localmente compatto quindi esiste $\mathcal{A} = \{\overset{\circ}{A}_i\}_{i\in I}$ ricoprimento aperto di X, dove A_i è un intorno compatto di un qualche $x \in X$. Quindi $\overline{\overset{\circ}{A}_i}$ è compatta per ogni $i \in I$ per il teorema 28.
Per ipotesi X è paracompatto dunque esiste $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j\in J}$ raffinamento aperto e localmente finito di $\mathcal{A}$, perciò per definizione di raffinamento 91 si ha che per ogni $j \in J$ esiste almeno un $i \in I$ tale che $B_j \subset A_i$. Allora $\overline{B_j}$ è compatta per ogni j per il teorema 28.
Per ogni $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ sottofamiglia si ha: $\cup\{\overline{B} \mid B \in \mathcal{C}\}$ è chiusa in X per la proposizione 89. Allora preso $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ sottoinsieme finito, chiamiamo $K_1 = \cup\{\overline{B} \mid B \in \mathcal{B}_1\}$, K_1 è compatto perchè unione di compatti. Esiste $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}$ sottoinsieme finito dove

$\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ e $K_2 = \cup\{\overline{B} \mid B \in \mathcal{B}_2\}$ è compatto e $K_1 \subset \overset{\circ}{K}_2$. Iterando il ragionamento si ottiene una successione $\{K_n\}$ di compatti tale che $K_{n-1} \subset \overset{\circ}{K}_n$.
Ora se $\cup_{n\in\mathbb{N}} K_n = X$ allora $\{K_n\}$ è un'esaustione in compatti di X.
$\cup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \cup\{\overline{B} \mid B \in \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n\} = \cup\{B \mid B \in \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n\}$, dunque $\cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ è aperta e chiusa in X, ma per ipotesi X è connesso quindi $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

□

Definizione 102 (Base numerabile)**.** Uno spazio topologico si dice a base numerabile se esiste una base della topologia formata da una quantità numerabile di aperti.

Esempio 103. $\mathbb{R}$ è a base numerabile: la famiglia $\{]c, d[\mid c, d \in \mathbb{Q}\}$ è una base numerabile della topologia euclidea, infatti per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $]a, b[= \cup\{]c, d[\mid a \leq c < d \leq b,\ c, d \in \mathbb{Q}\}$.

Esempio 104. Sia X uno spazio topologico a base numerabile, $\mathcal{B}$. $Y \subset X$ è ancora uno spazio topologico a base numerabile infatti: $\{A \cap Y \mid A \in \mathcal{B}\}$ è una base numerabile di Y.

Teorema 105. *Sia X spazio topologico localmente compatto, T_2, e a base numerabile; allora esiste una esaustione in compatti di X.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ base numerabile di X, indichiamo con $\mathcal{B}_c \subset \mathcal{B}$ la sottofamiglia degli aperti che hanno chiusura compatta. Poichè per ipotesi X è T_2 e localmente compatto si ha che $\mathcal{B}_c$ è un ricoprimento aperto di X. Sia $\mathcal{A}$ la famiglia delle unioni finite di $\mathcal{B}_c$, $\mathcal{A}$ è al più numerabile perchè $\mathcal{B}_c \subset \mathcal{B}$ e $\mathcal{B}$ è numerabile. Per ogni $A \in \mathcal{A}$, $\overline{A}$ è compatta, e per ogni $K \subset X$ compatto esiste $A \in \mathcal{A}$ tale che $K \subset A$.
Consideriamo $g : \mathbb{N} \to \mathcal{B}_c$ suriettiva e definiamo per ricorrenza una successione di compatti $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$, ponendo $K_1 = \overline{g(1)}$, $K_n = \overline{A_n \cup g(n)}$ dove $A_n \in \mathcal{A}$ ed è scelto tra quelli contenuti in K_{n-1}. La successione $\{K_n\}$ è un'esaustione in compatti di X. □

Corollario 106. *Ogni spazio topologico localmente compatto, T_2, e a base numerabile è paracompatto.*

Dimostrazione. Ogni spazio topologico localmente compatto, T_2, e a base numerabile per il teorema 105 ammette una esaustione in compatti; uno spazio topologico che ammette una esaustione in compatti è paracompatto per il teorema 101. □

Lemma 107. *Sia X spazio topologico paracompatto e T_2. Allora per ogni $x \in X$, x possiede un sistema fondamentale di intorni chiusi.*

Dimostrazione. Preso $x \in X$, esiste $U \subset X$ aperto dove $x \in U$. Sia $C = X \backslash U$, X è T_2 quindi per ogni $y \in C$ esiste $W_y \in \mathcal{I}(y)$ tale che $x \notin \overline{W_y}$. $U \cup \{W_y \,|\, y \in C\}$ è un ricoprimento aperto di X, per ipotesi X è paracompatto quindi esiste un raffinamento aperto localmente finito, $\cup\{V_i \,|\, i \in I\}$. Consideriamo $V = \cup\{V_i \,|\, i \in I,\, V_i \cap C \neq \emptyset\}$, V è aperto perchè unione di aperti. Poichè $V_i \cap C \neq \emptyset$ allora esiste un qualche $y \in C$ tale che $V_i \subset W_y$, quindi $x \notin \overline{V_i}$, perciò $x \notin \overline{V} = \cup\{\overline{V_i} \,|\, i \in I,\, V_i \cap C \neq \emptyset\}$. Dunque $X \backslash V$ è un chiuso contenuto in U, allora ogni x ammette un sistema fondamentale di intorni chiusi. □

Teorema 108 (Teorema di restringimento)**.** *Sia X spazio topologico paracompatto e T_2, sia $\cup\{U_i \,|\, i \in I\}$ un ricoprimento aperto di X. Allora esiste $\cup\{V_i \,|\, i \in I\}$ ricoprimento aperto e localmente finito tale che $\overline{V_i} \subset U_i$ per ogni $i \in I$.*

Dimostrazione. Preso $x \in X$ esiste $i(x) \in I$ tale che $x \in U_{i(x)}$, ed esiste $W(x) \in \mathcal{I}(x)$ aperto tale che $\overline{W(x)} \subset U_{i(x)}$. $\cup\{W(x) \,|\, x \in X\}$ è un ricoprimento aperto di X, per ipotesi X è paracompatto quindi per la definizione 94 esiste $\cup\{A_j \,|\, j \in J\}$ raffinamento aperto e localmente finito di $\cup\{W(x) \,|\, x \in X\}$. Per definizione di raffinamento 91 ne segue che esiste $f : J \to I$ funzione di raffinamento tale che $A_j \subset U_{f(j)}$ per ogni $j \in J$. Per come abbiamo scelto gli A_j si ha che $\overline{A_j} \subset U_{f(j)}$. Per ogni $i \in I$ consideriamo $V_i = \cup\{A_j \,|\, f(j) = i\}$, V_i è aperto perchè unione di aperti. Poichè $\cup\{A_j \,|\, j \in J\}$ è localmente finita, ne segue per la proposizione 89 che $\overline{V_i} = \overline{\cup\{A_j \,|\, f(j) = i\}} = \cup\{\overline{A_j} \,|\, f(j) = i\}$ e questa è contenuta in U_i, quindi $\overline{V_i} \subset U_i$ per ogni $i \in I$.

□

Richiamiamo ora le definizioni di metrica e spazio metrico con la finalità di inquadrare meglio il teorema di Stone.

Definizione 109 (Metrica)**.** Sia X un insieme, l'applicazione $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ è detta metrica se rispetta le seguenti proprietà: per ogni $x,\, y,\, z \in X$

1. $d(x,\, y) = 0$ se e solo se $x = y$
2. $d(x,\, y) = d(y,\, x)$
3. $d(x,\, y) \leq d(x,\, z) + d(z,\, y)$

Osservazione 110. La proprietà 3 è detta Disuguaglianza Triangolare.

Esempio 111. Sia X un insieme, la funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$,

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases} \tag{2.1}$$

è una distanza. Questa è detta distanza banale.

Definizione 112 (Spazio metrico)**.** Sia X un insieme dotato di una metrica d, allora $(X,\, d)$ è detto spazio metrico.

Esempio 113. Lo spazio $\mathbb{R}^n$, dotato della distanza euclidea

$$d(x,\, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \tag{2.2}$$

è uno spazio metrico.

Teorema 114 (A.H. Stone)**.** *Ogni spazio metrico è paracompatto.*

Dimostrazione. Sia $(X,\, d)$ spazio metrico, $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ ricoprimento aperto di X. Consideriamo la famiglia $\mathcal{B}_n$ che è formata dalle palle $B(x,\, \frac{1}{n})$ che intersecano al più un numero finito di elementi di $\mathcal{A}$, dove $x \in X$, e $n \in \mathbb{N}$.
Per ogni $x \in X$, esiste almeno un $i(x) \in I$ tale che $x \in A_{i(x)}$, ed esiste anche un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ dove per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha che $\inf_{y\in X\setminus A_{i(x)}} d(x,\, y) > \frac{1}{n} > 0$.
Fissato $n \geq \bar{n}$ e poniamo $V_x = B(x,\, \frac{1}{3n})$. Sia $U_x = \cup\{B(y,\, \frac{1}{3n}) \,|\, y \in X,\, V_x \cap B(y,\, \frac{1}{3n}) \neq \emptyset)\}$. $U_x \subset A_{i(x)}$, allora $\{U_x \,|\, x \in X\}$ è un raffinamento aperto di $\mathcal{A}$, ed è localmente finito perchè sottofamiglia di $\mathcal{B}_n$ che è localmente finita. □

2.5 Spazi normali

Definizione 115 (Spazio normale)**.** Sia X uno spazio topologico, X si dice normale se è T_2 e se chiusi disgiunti sono contenuti in aperti disgiunti. Equivalentemente, X spazio T_2 è normale se per ogni coppia di chiusi disgiunti $A,\, B \subset X$, esistono $U,\, V \subset X$ aperti tali che $A \subset U$, $B \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Esempio 116. Ogni sottospazio chiuso di uno spazio normale è normale: sia X spazio normale, $Y \subset X$ chiuso, per ogni A, B chiusi e disgiunti in Y si ha per il lemma 20 che A, B sono chiusi anche in X. X essendo normale ammette l'esistenza di $U,\, V \subset X$ aperti disgiunti tali che $A \subset U$, $B \subset V$; ne segue che $U \cap Y$, $V \cap Y$ sono ancora aperti per l'osservazione 15 e disgiunti, inoltre contengono rispettivamente A e B.

Esempio 117. Ogni spazio compatto e T_2 è normale, infatti: sia X tale spazio, presi A, B chiusi disgiunti di X allora per il teorema 28 si ha che A, B sono anche compatti. Ora consideriamo $W = X \times X \setminus \Delta_x$, dove $\Delta_x = \{(x,\, x) \,|\, x \in X\}$. W è aperto in $X \times X$ perchè per il teorema 36 Δ_x è chiuso. $A \times B \subset W$, per il teorema 30 esistono $U, V \subset X$ aperti tali che $A \subset U$, $B \subset V$ e $U \times V \subset W$. Poichè X è T_2 è sempre possibile scegliere U e V affinchè $U \cap V = \emptyset$. Allora X è normale.

Lemma 118. *Sia* (X, d) *spazio metrico, per ogni* $Z \subset X$, $Z \neq \emptyset$, *la funzione* $d_Z : X \to \mathbb{R}$ *dove* $d_Z(x) = \inf_{z \in Z} d(x, z)$ *è continua.*

Dimostrazione. Mostriamo per ogni $x, y \in X$ che $d_Z(x) - d_Z(y) \leq d(x, y)$. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste $z \in Z$ tale che $d_Z(x) + \epsilon \geq d(x, z)$, quindi $d_Z(y) \leq d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y) \leq d_Z(x) + \epsilon + d(x, y)$. Allora $d_Z(y) - d_Z(x) \leq \epsilon + d(x, y) \longrightarrow d(x, y)$ per $\epsilon \longrightarrow 0$, quindi $d_Z(y) - d_Z(x) \leq d(x, y)$. □

Proposizione 119. *Sia* (X, d) *uno spazio metrico. Allora* X *è normale.*

Dimostrazione. X in quanto spazio metrico è T_2 per il lemma 35. Presi $A, B \subset X$ chiusi disgiunti, consideriamo la funzione $f : X \to [0, 3]$ dove $f(x) = \frac{3d_A(x)}{d_A(x)+d_B(x)}$. d_A e d_B sono continue per il lemma 118 quindi f è continua perchè prodotto di funzioni continue e $d_A + d_B$ non si annulla mai. $U = f^{-1}(]2, 3])$, $V = f^{-1}([0, 1[) \subset X$ aperti perchè controimmagine continua di aperti. $A \subset U$, $B \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$, quindi X è normale. □

Esempio 120. $\mathbb{R}^2$ è normale: presi $x, y \in \mathbb{R}^2$ con $x \neq y$, sia $\epsilon = d(x, y)$. Poniamo $A = \overline{B(x, \frac{\epsilon}{4})}$, $B = \overline{B(y, \frac{\epsilon}{4})}$ ne segue che $A \cap B = \emptyset$. Ora consideriamo $U = B(x, \frac{\epsilon}{2})$, $V = B(y, \frac{\epsilon}{2})$ allora $U \cap V = \emptyset$ e $A \subset U$, $B \subset V$.

Proposizione 121. *Sia* X *spazio topologico* T_2 *e paracompatto. Allora* X *è normale.*

Dimostrazione. Siano $A, B \subset X$ chiusi disgiunti, $X = (X \backslash A) \cup (X \backslash B)$. Per il teorema 108 esistono $U, V \subset X$ aperti tali che: $U \cup V = X$, $\overline{U} \subset X \backslash A$ e $\overline{V} \subset X \backslash B$; allora $A \subset X \backslash \overline{U}$, $B \subset X \backslash \overline{V}$ e $(X \backslash \overline{U}) \cap (X \backslash \overline{V}) = \emptyset$. □

Definizione 122 (Raffinamento stellato)**.** Sia X spazio topologico e siano $\cup \{U_i \mid i \in I\}$ e $\cup \{V_j \mid j \in J\}$ ricoprimenti aperti di X. $\{V_j \mid j \in J\}$ è un raffinamento stellato di $\{U_i \mid i \in I\}$ se per ogni $x \in X$ l'aperto $V(x) = \cup \{V_j \mid x \in V_j\} \subset U_i$ per qualche $i \in I$.

Esempio 123. In $\mathbb{R}$ consideriamo $\mathcal{A} = \{]x, x + \frac{3}{2}[\mid x \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{B} = \{] -x-2, x+2[\mid x \in \mathbb{R}\}$ ricoprimenti aperti di $\mathbb{R}$. Preso $x \in \mathbb{R}$ si ha che gli elementi di $\mathcal{A}$ che contengono x sono: $]x - \frac{3}{2} + \epsilon, x + \epsilon[, \cdots,]x - \epsilon, x + \frac{3}{2} - \epsilon[$, con ϵ abbastanza piccolo, la loro unione è uguale a $]x - \frac{3}{2} + \epsilon, x + \frac{3}{2} - \epsilon[$ e questa è contenuta in $] - x - 2, x + 2[$.

Definizione 124 (Spazio pienamente normale)**.** Sia X uno spazio topologico, X si dice pienamente normale se X è T_2 e ogni ricoprimento aperto ammette un raffinamento stellato.

Esempio 125. $\mathbb{R}^2$ con la metrica euclidea è T_2 per il lemma 35. Se consideriamo $\mathcal{A} = \{B(x, r) \,|\, x \in \mathbb{R}^2,\ 0 < r \in \mathbb{R}^+\}$ allora esiste sempre un raffinamento stellato di $\mathcal{A}$.

Lemma 126. *Sia X uno spazio pienamente normale. Allora X è normale.*

Dimostrazione. Per ipotesi X è pienamente normale quindi X è T_2. Siano $C, D \subset X$ chiusi disgiunti, $(X \backslash C) \cup (X \backslash D)$ è un ricoprimento aperto di X. Poichè per ipotesi X è pienamente normale allora esiste $\{V_j \,|\, j \in J\}$ raffinamento stellato di $(X \backslash C) \cup (X \backslash D)$. Poniamo $U = \cup\{V_j \,|\, V_j \cap C \neq \emptyset\}$, U è aperto e $C \subset U$; $W = \cup\{V_j \,|\, V_j \cap D \neq \emptyset\}$, W è aperto e $D \subset W$. Se esistesse $x \in (U \cap W)$ allora esisterebbe un V_j tale che $V_j \cap C \neq \emptyset$ e $V_j \cap D \neq \emptyset$, ma quindi l'aperto $U(x) = \cup\{V_j \,|\, x \in V_j\}$ non è contenuto in $X \backslash D$, perciò $\{V_j \,|\, j \in J\}$ non è un raffinamento stellato, ma ciò è assurdo. Quindi $C \subset U$, $D \subset W$ e $U \cap W = \emptyset$, ne segue che X è normale. □

Teorema 127. *Sia X spazio topologico T_2 e paracompatto. Allora X è pienamente normale.*

Dimostrazione. Sia $\{U_i \,|\, i \in I\}$ ricoprimento aperto di X, vogliamo trovare un suo raffinamento stellato. Non perdiamo di generalità se supponiamo che $\{U_i \,|\, i \in I\}$ sia localmente finito. Per il teorema 108 esiste $\{C_i \,|\, i \in I\}$ ricoprimento chiuso e localmente finito dove $C_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$. Poichè $\{C_i \,|\, i \in I\}$ è localmente finito allora per ogni $x \in X$, esiste $W(x) \subset X$ intorno aperto di x tale che solo un numero finito di C_i interseca $W(x)$. A meno di restringere ulteriormente $W(x)$ possiamo assumere che:

1. se $x \notin C_i$ allora $W(x) \cap C_i = \emptyset$,
2. se $x \in C_i$ allora $W(x) \subset U_i$.

Fissiamo x, esiste $i \in I$ tale che $x \in C_i$, se $x \in W(y)$ allora $W(y) \cap C_i \neq \emptyset$, quindi $y \in C_i$ e $W(y) \subset U_i$. Perciò $\{W(x)\}$ è un raffinamento stellato di $\{U_i \,|\, i \in I\}$, X è T_2 per ipotesi, quindi X è pienamente normale. □

Bibliografia

[1] M. Manetti: *Topologia*, 2a edizione, UNITEXT, Springer-Verlag Italia (2014)

[2] Dugundji, J.: *Topology.* Allyn and Bacon, Inc. Boston(1966)

[3] Kelly, J.L.: *General topology.* D. Van Nostard Company, Inc., Toronto-New York-London (1955)

[4] Munkers, J.R.: *Topology.* Second edition, Prenctice-Hall, Upper SaddleRiver, NJ (2000)

[5] Sernesi, E.: *Geometria 2.* Bollati Boringhieri, Torino(1994)

[6] Francaviglia, S.: *Topologia.* CreateSpace Independent Publishing Platform, (2018)