

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

**DINAMICA DELLE GALASSIE A SPIRALE
E DELLE GALASSIE ELLITTICHE**

Tesi di laurea

Presentata da:
Aurora Bedendo

Relatore:
**Chiar.mo Prof.
Daniele Dallacasa**

Appello III
Anno Accademico 2020-2021

*As many nights endure without a moon or a star,
so will we endure when one is gone and far.
(The Spice-Box of Earth, Leonard Cohen)*

*A tutti quelli che ci sono sempre stati, nelle
notte serene e in quelle senza stelle*

Sommario

In questo elaborato viene presentata la dinamica delle galassie a spirale e delle galassie ellittiche dopo averne accennato le principali caratteristiche morfologiche.

Prima di entrare nel dettaglio delle due tipologie di galassie viene riportata una panoramica della classificazione di Hubble e un aspetto chiave per l'analisi della dinamica: si dimostra, tramite il tempo di rilassamento a due corpi e il teorema del viriale, che le galassie sono sistemi non collisionali.

Per le galassie a spirale, vengono presentate le costanti di Oort, oggetti cinematici fondamentali per la determinazione della velocità di rotazione, e la legge di scala di Tully-Fisher, che lega la velocità alla luminosità della galassia.

Per quanto riguarda le galassie ellittiche invece vengono riportati i principali passaggi storici necessari per comprendere la forma di queste galassie e tre leggi di scala (Faber-Jackson, Kormendy e $D_n - \sigma$) che portano alla costruzione del piano fondamentale su cui possono essere rappresentate le galassie ellittiche.

Infine per entrambe le tipologie di galassie si osserva come grazie alla dinamica (in particolare grazie alla curva di rotazione) si possa rilevare la presenza di materia oscura. Per le galassie a spirale vengono riportate le principali osservazioni che ne hanno reso possibile la scoperta mentre per le galassie ellittiche viene citato uno studio che osserva le analogie della loro curva di rotazione con quella delle galassie a spirale.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Classificazione di Hubble	1
1.2	Dinamica delle galassie	2
2	Galassie a spirale	5
2.1	Caratteristiche morfologiche	5
2.2	Dinamica	7
2.3	Materia oscura nella curva di rotazione	9
3	Galassie ellittiche	10
3.1	Caratteristiche morfologiche	10
3.2	Dinamica	10
3.3	Materia oscura nella curva di rotazione	12

1 Introduzione

Le galassie sono concentrazioni di stelle, gas, polvere e materia oscura. Una galassia media contiene un numero di stelle pari a $10^7 \leq N_* \leq 10^{12}$ e ha un raggio effettivo¹ $100 \text{ Pc} \leq R_e \leq 50 \text{ kPc}$. Le velocità delle stelle all'interno delle galassie sono tipicamente comprese tra i 50 km/s e i 400 km/s . A loro volta le galassie possono essere raggruppate in ammassi di galassie: gli ammassi conterranno principalmente galassie ($10^2 - 10^3$), gas caldo e materia oscura.

Di seguito vengono riportati i diversi tipi di galassie e alcuni cenni alla loro dinamica. In particolare verrà ricavato il tempo di rilassamento a due corpi che sarà utile per determinare la collisionalità di un sistema o meno.

La morfologia e la dinamica delle galassie a spirale e ellittiche verranno trattate nel dettaglio nei capitoli **2** e **3**.

1.1 Classificazione di Hubble

La classificazione più importante e ancora oggi in uso è la **classificazione di Hubble**. Hubble nel 1926 divide le galassie in tre principali categorie a seconda del loro aspetto: galassie ellittiche, lenticolari e a spirale.

Le galassie ellittiche vengono indicate con la lettera E associata ad un numero n (parte intera dell'ellitticità² moltiplicata per 10) da 1 a 7. Si nota infatti dalla Figura 1 che le galassie $E0$ sono rotonde mentre le $E7$ sono le più schiacciate.

Non si osservano galassie con parametro $n > 7$ (che sarebbero instabili gravitazionalmente) quindi ne si esclude l'esistenza.

Le galassie a spirale sono indicate invece con la lettera S , nel caso in cui il bulge sia di forma sferica, e con le lettere SB , nel caso in cui il bulge sia a forma di barra (si parlerà in questo caso di spirali barrate). Associate alle lettere S e SB sono presenti le lettere a , b o c a seconda delle dimensioni del bulge (a indicherà il bulge con dimensioni maggiori). Le caratteristiche legate ai diversi tipi di galassie a spirale verranno trattate al punto **2.1** (Caratteristiche morfologiche delle galassie a spirale).

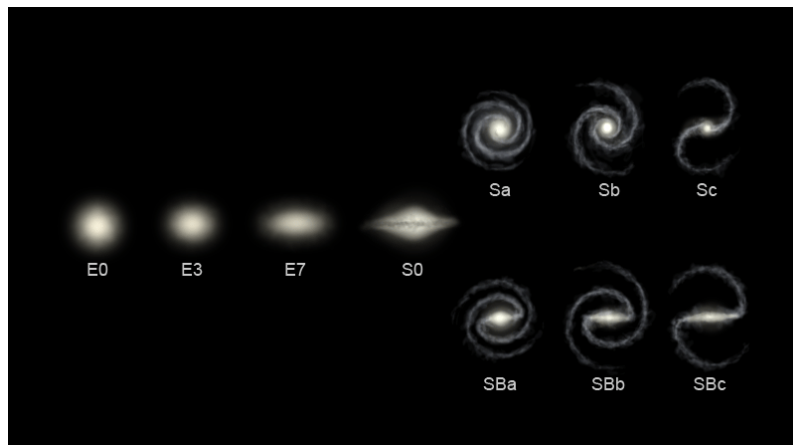


Figura 1: Rappresentazione della classificazione di Hubble

Nella classificazione l'elemento di continuità tra galassie ellittiche e galassie a spirale è rappresentato dalle galassie lenticolari $S0$, dischi senza una struttura a spirale ma che possono presentare una barra. La polvere è presente solamente nei dintorni del nucleo della galassia e di conseguenza non presentano grandi zone di formazione stellare.

¹Si definisce raggio effettivo il raggio che soddisfa $L_P(R_e) = L_{TOT}/2$, cioè il raggio della regione da cui esce metà della luminosità totale

² $\epsilon = 1 - \frac{b}{a}$ con a semiasse maggiore e b semiasse minore dell'ellisse

Oltre a queste tre classi di galassie esistono le galassie irregolari, molto numerose e in cui può essere attiva la formazione stellare. Le galassie irregolari sono ricche di polvere, gas e stelle di Popolazione I³.



Galassia NGC 6861
(Hubble Space Telescope, 12 gennaio 2015)



Galassia UGC 12682
(Hubble Space Telescope, 9 luglio 2018)

Figura 2: Esempi di galassia lenticolare (sinistra) e di galassia irregolare (destra)

1.2 Dinamica delle galassie

Per studiare la dinamica delle galassie è fondamentale capire come le stelle si muovono al suo interno. Si parte quindi stimando la sezione d'urto e il libero cammino medio delle stelle all'interno della galassia.

Supponiamo che le stelle siano tutte sfere di raggio R_{Sole} e che diano luogo ad un urto geometrico quando la distanza tra le due è $d < 2R_{Sole}$. Approssimando a sua volta la galassia come una sfera di raggio R si impone la condizione per un urto geometrico⁴:

$$N\lambda\pi 4R_{Sole}^2 = \frac{4\pi}{3}R^3 \rightarrow \lambda \simeq \frac{R^3}{NR_{Sole}^2}$$

in cui è stato ricavato il libero cammino medio della stella λ . Misurando λ rispetto alle dimensioni della galassia e alle dimensioni tipiche di una stella si arriva alla conclusione che la probabilità di urti tra galassie è praticamente nulla.

Nelle galassie quindi le stelle non si urtano (tranne ovviamente alcune eccezioni), ma si vuole dimostrare che le galassie sono anche sistemi **non collisionali**. Per fare questo si tratterà il **tempo di rilassamento a due copri** t_{2b} : se l'età dell'oggetto è minore del suo t_{2b} allora non è collisionale.

Tempo di rilassamento a due corpi Supponiamo di avere due sistemi stellari, uno "vero" in cui la densità di stelle è granulare e uno "ideale" in cui la densità di stelle $\rho(\vec{c})$ è continua. Il tempo di rilassamento a due corpi è definito come il tempo caratteristico dopo il quale l'orbita della stella nel sistema ideale non ha più niente a che vedere col sistema vero.

Per ottenere una stima del t_{2b} è necessario sommare infiniti **effetti fionda**. Si considera un sistema di riferimento inerziale S_0 con una massa di test m_t e una massa di campo m_f rispettivamente con posizione e velocità \vec{x}_t, \vec{v}_t e \vec{x}_f, \vec{v}_f . Queste due masse interagiscono con un campo di forze che proviene da un'energia potenziale $U = U(r)$ (con $r = \|\vec{r}\|$) e la loro distanza relativa è $\vec{r} \equiv \vec{x}_t - \vec{x}_f$. Si definisce l'orbita relativa come evoluzione temporale della distanza tra le due: $\vec{r}(t)$.

Si avrà poi la velocità relativa $\vec{v}(t)$ data dall'evoluzione temporale di $\vec{v} \equiv \vec{v}_t - \vec{v}_f$.

³Stelle giovani e ricche di metalli poichè generate da nubi di gas prodotte da stelle precedenti

⁴Il volume del cilindro lasciato alle spalle della stella deve essere uguale al volume totale della galassia

Si scrivono ora le equazioni di Newton relative alle due masse

$$\begin{aligned} m_t \ddot{\vec{x}}_t &= -\nabla_t U \\ m_f \ddot{\vec{x}}_f &= -\nabla_f U = \nabla_t U \end{aligned}$$

e la loro somma sarà $m_t \ddot{\vec{x}}_t + m_f \ddot{\vec{x}}_f = 0$. Quindi il centro di massa delle due stelle si muove con velocità costante \vec{v}_{CM} . Si può poi dimostrare che

$$\begin{aligned} \vec{v}_t &= \vec{v}_{CM} + \frac{\mu}{m_t} \vec{v} \\ \vec{v}_f &= \vec{v}_{CM} - \frac{\mu}{m_f} \vec{v} \end{aligned}$$

con $\mu = \frac{m_t m_f}{m_t + m_f}$ massa ridotta e \vec{v} velocità relativa.

Si cerca ora di ottenere l'equazione dell'orbita relativa: partendo nuovamente dalle equazioni di Newton si divide la prima per m_t , la seconda per m_f e si sottraggono:

$$\ddot{\vec{r}} = - \left(\frac{1}{m_t} + \frac{1}{m_f} \right) \nabla_t U$$

Così nel caso in cui il potenziale U sia gravitazionale⁵ si ottiene l'equazione dell'orbita relativa

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -G \frac{m_t m_f}{r^3} \vec{r}$$

L'energia sull'orbita relativa si conserva per cui, considerando una massa m_t che parte da infinito e torna a infinito con velocità iniziale v_i e finale v_f , si ha $\|\vec{v}_f\| = \|\vec{v}_i\|$. La velocità mantiene quindi lo stesso modulo ma cambia direzione.

Calcoliamo ora la variazione di energia cinetica della stella di test:

$$\begin{aligned} \Delta E_t &= \frac{m_t}{2} \|\vec{v}_{tf}\|^2 - \frac{m_t}{2} \|\vec{v}_{ti}\|^2 \\ &= \frac{m_t}{2} \left(\|\vec{v}_{CM} + \frac{\mu}{m_t} \vec{v}_f\|^2 - \|\vec{v}_{CM} + \frac{\mu}{m_t} \vec{v}_i\|^2 \right) \end{aligned}$$

Ma $\|\vec{v}_{CM} + \frac{\mu}{m_t} \vec{v}\|^2 = \|\vec{v}_{CM}\|^2 + \frac{\mu^2}{m_t^2} \|\vec{v}\|^2 + 2\frac{\mu}{m_t} \langle \vec{v}_{CM}, \vec{v} \rangle$ quindi inserendola nell'equazione sopra:

- il termine $\|\vec{v}_{CM}\|^2 - \|\vec{v}_{CM}\|^2$ si annulla perchè \vec{v}_{CM} è costante;
- il termine $\frac{\mu^2}{m_t^2} \|\vec{v}_f\|^2 - \frac{\mu^2}{m_t^2} \|\vec{v}_i\|^2$ si annulla perchè come detto sopra velocità iniziale e finale sono uguali;
- il termine $\mu \langle \vec{v}_{CM}, \Delta \vec{v} \rangle$ ⁶ è diverso da 0 solo se $\vec{v}_{CM} \neq 0$ e se $\Delta \vec{v}$ non è perpendicolare a \vec{v}_{CM} .

Quindi ΔE_t può essere positivo o negativo a seconda dell'angolo compreso tra $\Delta \vec{v}$ e \vec{v}_{CM} e l'effetto fionda può essere utilizzato per aggiungere o togliere energia ad una massa di test.

Si scrive ora una forma alternativa dell'effetto fionda che permetterà di arrivare alla stima del tempo di rilassamento:

$$\Delta E_t = \frac{m_t}{2} (\|\vec{v}_t(\infty)\|^2 - \|\vec{v}_t(-\infty)\|^2)$$

Dato che $\vec{v}_t(\infty) = \vec{v}_t(-\infty) + \Delta \vec{v}_t$ e che $\Delta \vec{v}_t = (\Delta \vec{v}_t)_\perp + (\Delta \vec{v}_t)_\parallel$ ⁷ l'espressione sopra diventa

$$\Delta E_t = \frac{m_t}{2} (\|(\Delta \vec{v}_t)_\perp\|^2 + \|(\Delta \vec{v}_t)_\parallel\|^2 + 2\langle \Delta \vec{v}_t, \vec{v}_t(-\infty) \rangle)$$

I primi due termini di questa nuova espressione di ΔE_t sono termini di "riscaldamento" (> 0) e il terzo è un termine di "raffreddamento" (< 0) ed è il risultato della **frizione dinamica**⁸. Si può

⁵Potenziale gravitazionale $U = -G \frac{m_t m_f}{r}$

⁶ $\Delta \vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i$

⁷ \perp e \parallel rispetto a $\vec{v}(-\infty)$

⁸Rallentamento di un oggetto dovuto all'iteazione con altri (a causa della gravitazione newtoniana)

poi dimostrare che il termine $\|(\Delta\vec{v}_t)_\parallel\|^2$ è molto più piccolo di $\|(\Delta\vec{v}_t)_\perp\|^2$ e quindi trascurabile. Si cercherà quindi di ottenere $(\Delta\vec{v}_t)_\perp$ tramite $(\Delta\vec{v}_t)_\parallel$.

Dall'espressione $\vec{v}_t = \vec{v}_{CM} + \frac{\mu}{m_t}\vec{v}$ si ricava che

$$\Delta\vec{v}_t = \frac{\mu}{m_t}\Delta\vec{v} \rightarrow (\Delta\vec{v}_t)_\perp = \frac{\mu}{m_t}(\Delta\vec{v})_\perp$$

Scriviamo ora l'impulso della massa ridotta (identità asintotica⁹)

$$\mu \|(\Delta\vec{v})_\perp\| \sim \frac{Gm_t m_f}{b^2} \frac{2b}{\|\vec{v}(-\infty)\|} \sim \frac{2Gm_t m_f}{b \|\vec{v}(-\infty)\|}$$

in cui b è il parametro di impatto¹⁰.

Quindi grazie all'espressione di $(\Delta\vec{v}_t)_\perp$ espressa in funzione di $(\Delta\vec{v}_t)_\parallel$ si ha:

$$\|(\Delta\vec{v}_t)_\perp\|^2 \sim \frac{4G^2 m_f^2}{b^2 \|\vec{v}(-\infty)\|^2}$$

che sarà l'espressione dell'energia per ogni urto. Si considera la funzione di distribuzione che descrive le particelle di campo $f = n_f \times g(\|\vec{v}_f\|)$ (con n_f numero di particelle di campo per unità di volume e g funzione isotropa nello spazio delle velocità) che per definizione

$$\int_{\mathbb{R}} f d^3\vec{v}_f = n_f$$

Il numero di urti per ogni m_t in un tempo Δt sarà:

$$\Sigma_{urti} = 2\pi b db v \Delta t n_f g d^3\vec{v}_f$$

Così l'energia totale di tutti gli urti risulta essere

$$\begin{aligned} (\Delta E_t)_\perp &= \frac{m_t}{2} \left(8\pi G^2 m_f^2 \Delta t n_f \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^\infty \frac{db}{b} g \frac{\|\vec{v}_f\|}{\|\vec{v}_t - \vec{v}_f\|} \right) \\ &= \frac{m_t}{2} \left(8\pi G^2 m_f^2 \Delta t n_f \ln \bar{\Lambda} \int_{\mathbb{R}^3} g \frac{\|\vec{v}_f\|}{\|\vec{v}_t - \vec{v}_f\|} \right) \\ &= \frac{m_t}{2} (8\pi G^2 m_f^2 \Delta t n_f \ln \bar{\Lambda} \Psi(\|\vec{v}_f\|)) \end{aligned}$$

in cui è stato utilizzato il logaritmo medio di Coulomb $\ln \bar{\Lambda}$ (tipicamente con valori compresi tra 10 e 20) e il potenziale di Rosenbluth $\Psi(\|\vec{v}_f\|)$.

Il tempo di rilassamento a due corpi è definito come il tempo necessario affinché $(\Delta E_t)_\perp = E_t^{iniziale}$, quindi:

$$\begin{aligned} \frac{m_t}{2} (8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln \bar{\Lambda} \Psi(\|\vec{v}_f\|)) \mathbf{t}_{2b} &= \frac{m_t}{2} \|\vec{v}_f(-\infty)\|^2 \\ \rightarrow \mathbf{t}_{2b} &= \frac{\|\vec{v}_f(-\infty)\|^2}{8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln \bar{\Lambda} \Psi} \end{aligned}$$

Sistema autogravitante all'equilibrio Si considera ora il caso di un sistema autogravitante all'equilibrio. Si suppone di avere un sistema sferico (raggio R) di N stelle tutte uguali con $m_t = m_f = m$ in cui vale il teorema del viriale $2T = -U$ (T è l'energia cinetica totale) e che quindi è all'equilibrio.

Riscriviamo l'energia cinetica come

$$T \equiv \frac{M\sigma_v^2}{2}$$

⁹Si considera solo il primo termine della serie asintotica che è il valore esatto per b grande

¹⁰Il paramtro di impatto è legato al momento angolare del centro di massa: $\|\vec{J}_{CM}\| = \mu b \|\vec{v}(-\infty)\|$

con σ_v dispersione di velocità, e l'energia potenziale come

$$U \equiv -\frac{GM^2}{r_v}$$

con r_v raggio di girazione. Supponiamo poi che il raggio di girazione sia dello stesso ordine del raggio del sistema R ($r_v \simeq R$). Così il teorema del viriale diventa:

$$2\frac{M\sigma_v^2}{2} = \frac{GM^2}{R} \rightarrow \sigma_v^2 = \frac{GM}{R}$$

Vengono ora introdotte altre due ipotesi:

- $\|\vec{v}_t(-\infty)\| = \sigma_v$;
- $\Psi \sim \frac{1}{\|\vec{v}_t\|} = \frac{1}{\sigma_v}$ in approssimazione di alte velocità.

In questo modo il tempo di rilassamento diventa $\mathbf{t}_{2b} = \frac{\sigma_v^3}{8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln \bar{\Lambda}}$. Per sapere se il valore del tempo di rilassamento è grande o meno è necessario confrontarlo con un altro tempo. Introduciamo quindi il tempo necessario ad una stella per attraversare la galassia $\mathbf{t}_{\text{cross}} \equiv \frac{2R}{\sigma_v}$.

Si può ora stimare il rapporto tra i due tempi:

$$\frac{\mathbf{t}_{2b}}{\mathbf{t}_{\text{cross}}} = \frac{\sigma_v^4}{16\pi G^2 m^2 n \ln \bar{\Lambda} R}$$

Se le stelle sono distribuite in maniera omogenea $n = N/(\frac{4\pi}{3}r^3) = 3N/(4\pi R^3)$ il rapporto diventa

$$\frac{\mathbf{t}_{2b}}{\mathbf{t}_{\text{cross}}} = \frac{\sigma_v^4 R^2 N}{12 G^2 m^2 N^2 \ln \bar{\Lambda}} = \frac{\sigma_v^4 R^2 N}{12 G^2 M^2 \ln \bar{\Lambda}}$$

in cui $M = m N$ è la massa totale del sistema. Ma dal teorema del viriale si ottiene $G^2 M^2 = \sigma_v^4 R^2$ da cui

$$\frac{\mathbf{t}_{2b}}{\mathbf{t}_{\text{cross}}} = \frac{N}{12 \ln \bar{\Lambda}}$$

Si può dimostrare che una buona stima di $\bar{\Lambda}$ è N per cui

$$\frac{\mathbf{t}_{2b}}{\mathbf{t}_{\text{cross}}} \sim \frac{0.1N}{12 \ln N}$$

Per una galassia caratteristica $\mathbf{t}_{\text{cross}} \sim 250 \text{ Myr}$ e $N = 10^{11}$ quindi $\frac{\mathbf{t}_{2b}}{\mathbf{t}_{\text{cross}}} \sim 10^9$: affinché il tempo di rilassamento diventi importante le stelle dovrebbero compiere 10^9 giri della galassia e il tempo necessario sarebbe molto più grande dell'età dell'Universo. Quindi le galassie sono oggetti non collisionali.

2 Galassie a spirale

Vengono ora descritte le galassie a spirale con cenni agli aspetti morfologici, una descrizione dinamica e le prime osservazioni che evidenziarono la presenza di materia oscura nei pressi della galassie.

2.1 Caratteristiche morfologiche

Le galassie a spirale (tra cui la Via Lattea) sono composte da un disco formato da stelle, gas e polvere. Al centro del disco è presente un nucleo rotondeggiante detto **bulge** e attorno si sviluppano i **bracci a spirale**, zone di formazione stellare. Il disco è formato a sua volta da un disco sottile (gas freddo e nubi molecolari) e da uno più spesso (tipicamente di spessore 1 kPc). L'intera struttura è immersa in un **halo** in cui sono presenti stelle di Popolazione II¹¹ e ammassi globulari¹². Le stelle

¹¹Stelle più vecchie e povere di metalli

¹²Composti da $10^4 - 10^6$ stelle. Sono gli oggetti più vecchi osservati nell'Universo

di Popolazione II sono presenti nell'halo e nel bulge mentre le stelle di Popolazione I si trovano tipicamente all'interno del disco.



Figura 3: Galassia NGC 1300 (Hubble Space Telescope, 11 gennaio 2005)

La morfologia delle galassie a spirale è fortemente influenzata dalla formazione stellare all'interno del disco, in particolar modo dalle regioni HII¹³. Queste regioni di formazione stellare costituiscono i bracci¹⁴ della galassia. Per questo motivo le galassie a spirale contengono grandi quantità di polvere interstellare e sono generalmente di colore blu.

Come visto nella classificazione di Hubble le spirali vengono divise in *a*, *b*, *c* a seconda della dimensione del bulge: le galassie con bulge più piccoli (*c*) presentano bracci molto meno avvolti e gas freddo. Inoltre sono molto più blu delle galassie con bulge maggiori perchè hanno bracci vigorosi in cui è in atto un'elevata formazione stellare.



Galassia NGC 4622
(Hubble Space Telescope, 7 febbraio 2002)



Galassia NGC 3310
(Hubble Space Telescope, 6 settembre 2001)

Figura 4: Esempi di galassia Sa (sinistra) e di galassia Sc (destra)

Al centro delle galassie a spirale è presente un buco nero la cui massa è legata dalla relazione

$$M_{BH} \simeq 2 \cdot 10^{-3} M_*$$

in cui M_* è la massa della galassia in stelle.

¹³Nelle regioni HII il gas è ionizzato dalla radiazione ultravioletta emessa dalle stelle giovani

¹⁴I bracci sono quindi composti da stelle blu, ammassi aperti ($10^2 - 10^3$ stelle) e supernovae di tipo II

2.2 Dinamica

Per descrivere la dinamica delle galassie a spirale vengono analizzate le costanti di Oort, che saranno utili a determinare la velocità della galassia e la sua derivata, e la legge di scala di Tully-Fisher che lega la luminosità della galassia alla sua velocità.

Costanti di Oort La rotazione delle galassie a spirale è supportata dal momento angolare ma il disco non ruota come un corpo rigido bensì si muove con rotazione differenziale¹⁵. La rotazione differenziale porta ad una curva di rotazione (velocità di rotazione in funzione della distanza) piatta. Per ottenere un modello della rotazione di una galassia a spirale si utilizzano due oggetti cinematici molto importanti, le **costanti di Oort**.

Per calcolare le costanti di Oort sono necessarie due ipotesi di lavoro:

- La galassia è un disco infinitamente sottile quindi tutte le stelle ruotano su un piano
- Le orbite compiute dalle stelle sono perfettamente circolari (non vengono considerate le oscillazioni epicicliche)

Aumentando la precisione delle misure si vedranno gli effetti di queste due ipotesi (quindi la deviazione dalle orbite circolari ad esempio).

L'obiettivo è quello di stimare il valore della velocità angolare di rotazione $\Omega(R)$. Si pone il centro del sistema di riferimento nel centro della galassia e l'osservatore nel Sistema Solare. Dato che il Sole si muove con una velocità $\vec{v}_{Sole} = \vec{\Omega}_{Sole} \wedge \vec{R}_{Sole}$ e una stella osservata con velocità $\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{R}$, l'osservatore misurerà la velocità relativa della stella $\vec{v} \equiv \vec{v} - \vec{v}_{Sole}$. In particolare è possibile misurare la velocità relativa parallela $\vec{v}_{\parallel} \equiv \langle \vec{v}, \hat{e}_{\parallel} \rangle$ (ad esempio grazie all'effetto doppler) e quella perpendicolare $\vec{v}_{\perp} \equiv \langle \vec{v}, \hat{e}_{\perp} \rangle$ ¹⁶ (questa volta invece grazie ai moti propri).

Si cercano ora le espressioni esatte per \vec{v}_{\parallel} e \vec{v}_{\perp} in funzione di $\Omega(R)$.

La velocità relativa viene riscritta in funzione delle velocità angolari Ω e delle distanze R ¹⁷:

$$\begin{aligned} \vec{v} \equiv \vec{v} - \vec{v}_{Sole} &= \vec{\Omega} \wedge \vec{R} - \vec{\Omega}_{Sole} \wedge \vec{R}_{Sole} \\ &= \vec{\Omega} \wedge (\vec{R} - \vec{R}_{Sole} - \vec{R}_{Sole}) - \Omega_{Sole} \wedge \vec{R}_{Sole} \\ &= \vec{\Omega} \wedge \vec{l} + \Delta\vec{\Omega} \wedge \vec{R}_{Sole} \end{aligned}$$

in cui $\vec{l} \equiv \vec{R} - \vec{R}_{Sole}$ e $\Delta\vec{\Omega} = \vec{\Omega} - \vec{\Omega}_{Sole}$. Si ricavano ora le espressioni di \vec{v}_{\parallel} e di \vec{v}_{\perp} :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\parallel} \equiv \langle \vec{v}, \hat{e}_{\parallel} \rangle &= \langle \vec{\Omega} \wedge \vec{l}, \hat{e}_{\parallel} \rangle + \langle \Delta\vec{\Omega} \wedge \vec{R}_{Sole}, \hat{e}_{\parallel} \rangle \\ &= \langle \Delta\vec{\Omega} \wedge \vec{R}_{Sole}, \hat{e}_{\parallel} \rangle \\ &= \langle \vec{R}_{Sole} \wedge \hat{e}_{\parallel}, \Delta\vec{\Omega} \rangle \\ &= \langle \vec{R}_{Sole} \hat{e}_{Sole} \wedge \hat{e}_{\parallel}, \Delta\Omega \hat{e}_z \rangle \\ &= R_{Sole} \Delta\Omega \langle \hat{e}_{Sole} \wedge \hat{e}_{\parallel}, \hat{e}_z \rangle \\ &= R_{Sole} \Delta\Omega \sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\perp} \equiv \langle \vec{v}, \hat{e}_{\perp} \rangle &= \langle \vec{v}, \hat{e}_z \wedge \hat{e}_{\parallel} \rangle \\ &= \langle \hat{e}_z, \hat{e}_{\parallel} \wedge \vec{v} \rangle \\ &= \langle \hat{e}_z, \hat{e}_{\parallel} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{l} + \Delta\vec{\Omega} \wedge \vec{R}_{Sole}) \rangle \\ &= \langle \hat{e}_z, \hat{e}_z \Omega l + \hat{e}_z \Delta\Omega R_{Sole} \cos\theta \rangle \\ &= \Omega l + \Delta\Omega R_{Sole} \cos\theta \end{aligned}$$

in cui \hat{e}_{Sole} è la direzione dell'anticentro galattico, \hat{e}_z la direzione della velocità angolare (quindi perpendicolare al piano della galassia) e θ l'angolo tra \hat{e}_{\parallel} e \hat{e}_{Sole} .

¹⁵La velocità non dipende dalla distanza dal centro di rotazione

¹⁶ \hat{e}_{\parallel} e \hat{e}_{\perp} sono i versori nella direzione Sole-stella e nella direzione perpendicolare a essa

¹⁷ $\vec{\Omega}$ velocità angolare della stella, $\vec{\Omega}_{Sole}$ velocità angolare del Sole, \vec{R} distanza della stella dal centro, \vec{R}_{Sole} distanza del Sole dal centro

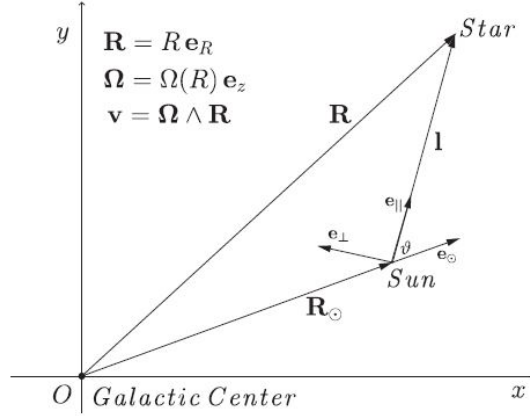


Figura 5: Schema del piano galattico rappresentato tramite le due ipotesi assunte per ricavare le costanti di Oort e rappresentazione dei vettori utilizzati (Introduction to Stellar Dynamics, Luca Ciotti)

Le due espressioni per la velocità appena ottenute sono esatte. Si introduce ora l'approssimazione di campo vicino, per cui $\frac{l}{R_{Sole}} \ll 1$. Si espande quindi la velocità angolare $\Omega(R)$:

$$\begin{aligned}\Omega(R) &= \Omega(\|\vec{R}\|) \\ &= \Omega(\|\vec{R}_{Sole} + \vec{l}\|) \\ &= \Omega_{Sole} + \langle \nabla \Omega |_{R_{Sole}}, \vec{l} \rangle + O(l^2)\end{aligned}$$

$$\rightarrow \Omega(R) = \Omega_{Sole} + \Omega'_{Sole} l \cos \theta$$

Quella appena ottenuta è la formula esatta della velocità angolare in campo vicino. Utilizzando l'approssimazione di campo vicino le velocità ricavate prima diventano:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\parallel} &= \Omega'_{Sole} l R_{Sole} \sin \theta \cos \theta = l \mathbf{A} \sin 2\theta \\ \vec{v}_{\perp} &= \left(\Omega_{Sole} + \frac{\Omega'_{Sole} R}{2} \right) l + \mathbf{A} l \cos 2\theta = l \mathbf{B} + \mathbf{A} l \cos 2\theta\end{aligned}$$

dove sono state definite le costanti di Oort $\mathbf{A} \equiv \frac{\Omega'_{Sole} R_{Sole}}{2}$ e $\mathbf{B} \equiv \left(\Omega_{Sole} + \frac{\Omega'_{Sole} R}{2} \right)$.

Si nota che $\mathbf{B} = \Omega_{Sole} + \mathbf{A}$ quindi conoscendo le due costanti è possibile ricavare la velocità angolare Ω_{Sole} . In un moto circolare poi $\Omega(R) = \frac{v_c(R)}{R}$, così:

$$\frac{d\Omega}{dR} = \frac{1}{R} \frac{dv_c}{dR} - \frac{v_c}{R^2} \rightarrow R\Omega' = \frac{dv_c}{dR} - \frac{v_c}{R}$$

Quindi sostituendo Ω e Ω' in \mathbf{A} e \mathbf{B} si ottengono le espressioni:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \left(\frac{dv_c}{dR} - \frac{v_c}{R} \right)_{Sole} \quad e \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2} \left(\frac{dv_c}{dR} + \frac{v_c}{R} \right)_{Sole}$$

così $\mathbf{B} - \mathbf{A} = \frac{v_c}{R}$ e $\mathbf{B} + \mathbf{A} = \frac{dv_c}{dR}$. Misurando le costanti di Oort è quindi possibile calcolare la velocità del Sole e delle stelle nei suoi pressi e verificare che la curva di velocità sia piatta.

I valori delle costanti di Oort nei pressi del Sole restituiscono $\mathbf{B} + \mathbf{A} \sim 0 \text{ km s}^{-1} \text{ kPc}^{-1}$: la derivata risulta praticamente nulla quindi la curva di rotazione praticamente piatta.

Legge Tully-Fisher Oltre alle costanti di Oort un ulteriore contributo alla descrizione della dinamica delle galassie a spirale è dato dalla legge di scala **Tully-Fisher** (1977). Dalla misura della velocità dell'idrogeno neutro HI si ottiene la legge:

$$L_{disco} \propto v_{HI}^4$$

La relazione ottenuta è una dispersione: i dati stanno quindi su una retta di coefficiente ~ 4 che ha però uno spessore. Dato che dalla Tully-Fisher si ricava la luminosità totale del disco è possibile utilizzare questa relazione per determinare la distanza della galassia. Infatti noto il flusso (quantità misurabile) è sufficiente invertire la relazione che lo lega alla luminosità ($L = 4\pi d^2 F$).

2.3 Materia oscura nella curva di rotazione

Vengono ora riportati i passaggi storici fondamentali affrontati per giungere alla curva di rotazione delle galassie a spirale, fino all'evidenza della presenza di materia oscura.

La curva di rotazione è una proprietà del campo gravitazionale di oggetti a simmetria assiale: si vuole esprimere la velocità orbitale v_c in funzione della distanza R dal centro di gravità. Un potenziale, se osservato sufficientemente lontano, può essere descritto da un potenziale puntiforme $\Phi \sim -\frac{GM}{r}$ ¹⁸. In questo modo ci si aspetterebbe che la curva di rotazione di una galassia allontanandosi dal centro debba subire una caduta kepleriana (associata al potenziale puntiforme): $v_c \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$.

Una delle prime ad osservare la curva di rotazione delle galassie a spirale è Vera Rubin negli anni '70. Nonostante l'attesa di una caduta kepleriana i dati di Vera Rubin rappresentano una velocità v_c costante anche a grande distanza dal nucleo.

Questo aspetto porta la Rubin e molti altri astronomi a pensare che, dato che non si osserva la caduta kepleriana, il campo di gravità g_r debba essere maggiore e di quello prodotto dalla materia visibile.

La Rubin a questo punto ipotizza la presenza di materia oscura attorno alla galassia con densità $\rho(r) \propto \frac{1}{r^2}$ che permette di avere una curva di rotazione piatta ($v_c = cost$). Tuttavia poco tempo dopo Agris Kalnajs propone come soluzione alla curva di velocità osservata un disco di stelle con densità superficiale $\Sigma(R) = \Sigma_0 e^{-R/r_0}$: la curva rimarrebbe in questo modo piatta senza bisogno dell'aggiunta dell'ipotesi di materia oscura.

Pochi anni dopo però in Olanda viene scoperta l'emissione dell'idrogeno neutro a 21cm¹⁹ ed è quindi ora possibile per gli astronomi misurare la velocità della galassia grazie all'effetto doppler sulla riga dell'HI. Si osserva che le galassie sono immerse in un disco di H neutro e che la curva di rotazione, finite le stelle, continua a rimanere piatta. Nelle regioni più esterne attorno alle galassie deve quindi essere presente materia oscura che influenza parte dell'andamento della curva di rotazione.

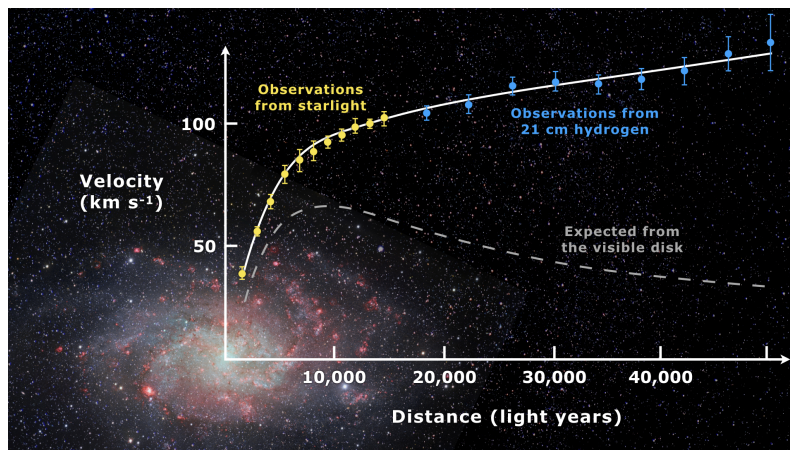


Figura 6: Curva di rotazione prevista (linea tratteggiata) e osservata (linea continua)

¹⁸ G costante di gravitazione universale, M la massa dell'oggetto (in questo caso tutta al centro) e r la distanza dal centro di gravità

¹⁹Transizione dell'unico elettrone dell'HI da spin parallelo a antiparallelo

3 Galassie ellittiche

Le galassie ellittiche rappresentano la maggior parte della massa in stelle dell'Universo e, come per le galassie a spirale, ne vengono ora descritte le caratteristiche morfologiche, dinamiche e la presenza di materia oscura.

3.1 Caratteristiche morfologiche

Le curve isofote delle galassie ellittiche sono ben rappresentate da un'ellisse, aspetto da cui deriva il nome attribuito a questa classe di galassie. Le galassie ellittiche possono essere oblate, prolate o triassiali.

Ci si è chiesto se le galassie ellittiche non fossero il risultato di merging di galassie a spirale ma queste ultime sono molto meno dense delle ellittiche nello spazio delle fasi e, dato che lo spazio delle fasi non si può comprimere, questa ipotesi non sarà possibile.

All'interno delle galassie ellittiche non è più attiva la formazione stellare e le stelle sono molto più vecchie di quelle delle galassie a spirale. Sempre in contrapposizione con le galassie a spirale quelle ellittiche presentano poco gas caldo e rarefatto.

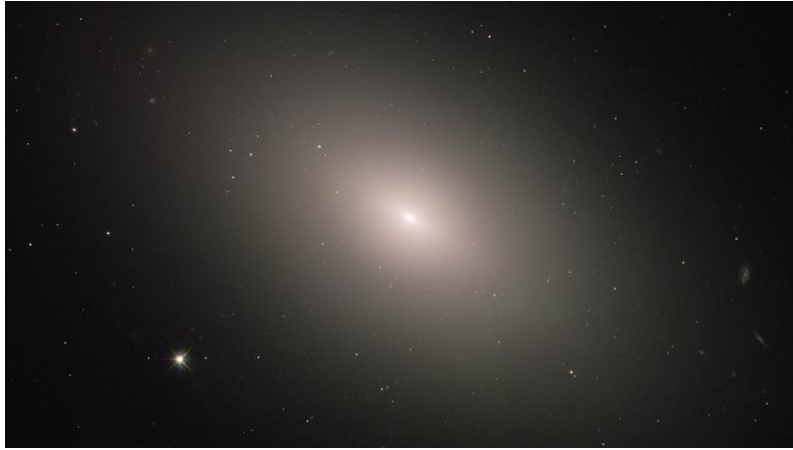


Figura 7: Galassia NGC 4621 [Hubble Space Telescope, 27 maggio 2019]

Le galassie ellittiche poi, al contrario di quelle a spirale, tendono a raggrupparsi negli ammassi di galassie. Al centro è presente un buco nero che la cui massa dipende dalla relazione

$$M_{BH} \simeq 10^{-3} M_{BULGE}$$

che a differenza delle galassie a spirale non contiene la massa totale della galassia in stelle ma la massa del bulge.

3.2 Dinamica

La dinamica delle galassie ellittiche è in realtà molto più complicata di quella delle galassie a spirale, di seguito si riporteranno solo due punti per descriverla: i passaggi storici attraverso cui si è cercato di descrivere la forma di un oggetto in rotazione e la posizione delle galassie ellittiche sul piano fondamentale.

Dispersione di velocità Newton per primo ipotizzò che un oggetto in rotazione venisse schiacciato lungo il suo asse²⁰. Tuttavia il modello di Newton funzionava solo per piccoli schiacciamenti e venne generalizzato solo anni dopo da McLaurin che propose come soluzione le figure che presero poi il suo nome: gli ellissoidi di McLaurin.

²⁰Prima di lui Cartesio ipotizzava un allungamento dell'oggetto lungo l'asse di rotazione

Quando iniziarono ad essere osservate le galassie si pensò che potessero essere ben rappresentate da un ellissoide di McLaurin. Questo aspetto si sarebbe rivelato particolarmente importante per le galassie ellittiche, la cui quasi assenza di gas (e quindi di righe emissione) non permette la misura della velocità delle stelle al suo interno.

Il passo successivo venne portato avanti da Jacobi che scoprì che facendo ruotare un oggetto abbastanza velocemente questo assume la forma di un ellissoide triassiale (ellissoide di Jacobi). Dopo di lui altri come Dirichlet, Riemann o Hilbert trovarono famiglie sempre più complesse di ellissoidi finchè i risultati non vennero unificati da Poincarè.

Ma verso la fine degli anni '70 i CCD contenenti inizialmente dati militari permisero un miglioramento nelle osservazioni rispetto all'utilizzo di lastre fotografiche. Così nel 1978 Bertola e Capaccioli scoprirono che le galassie ellittiche girano molto lentamente: la loro velocità quindi non è confrontabile a quella necessaria per produrre lo schiacciamento ellissoidale previsto precedentemente.

James Binney allora concluse che le galassie ellittiche non vengono schiacciate dalla rotazione (se non in piccola parte) bensì dall'**anisotropia della dispersione di velocità**.

Per definire la dispersione di velocità è necessario partire da alcune definizioni precedenti. Si parte dalla funzione di distribuzione nello spazio delle fasi $f(\vec{x}, \vec{v}; t)$ (in cui $\vec{x} = (x, y, z)$ e $(\vec{v} = \vec{v}_x, \vec{v}_y, \vec{v}_z)$) che va dallo spazio delle fasi di dimensionalità $2N$ ai numeri reali non negativi.

L'integrale della funzione di distribuzione restituisce il numero di oggetti dentro al volume Ω dello spazio delle fasi considerato:

$$\int_{\Omega} f d^3 \vec{x} d^3 \vec{v} = N(\Omega)$$

Se poi gli oggetti hanno tutti la stessa massa m sarà:

$$\int_{\Omega} m f d^3 \vec{x} d^3 \vec{v} = M(\Omega)$$

in cui $M(\Omega)$ è la massa totale nella regione Ω . Da ora in poi per semplicità indicheremo con f il prodotto fm .

La massa in un volume ΔV nello spazio delle configurazioni (x, y, z) sarà data da:

$$\Delta M(\Delta V) = \int_{\Delta V} d^3 \vec{x} \int_{\mathbb{R}^3} f d^3 \vec{v} = \int_{\Delta V} \rho(\vec{x}) d^3 \vec{x}$$

in cui è stata definita la densità del sistema (campo scalare): $\rho(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{x}, \vec{v}; t) d^3 \vec{v}$.

Si arriva poi alla velocità di streaming $\vec{v}(\vec{x})$ (campo vettoriale) che rappresenterà il movimento totale del sistema:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{v} f d^3 \vec{v} = \rho(\vec{x}) \vec{v}(\vec{x})$$

Infine arriviamo ora al tensore dispersione di velocità $\sigma_{ij}^2(\vec{x})$ ottenuto grazie all'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\vec{v}_i - \bar{v}_i)(\vec{v}_j - \bar{v}_j) f d^3 \vec{v} = \rho(\vec{x}) \sigma_{ij}^2(\vec{x})$$

Essendo un tensore è rappresentabile da una matrice 3x3 e in questo caso la matrice è simmetrica e quindi diagonalizzabile:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \sigma_{13}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 & \sigma_{23}^2 \\ \sigma_{31}^2 & \sigma_{32}^2 & \sigma_{33}^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}^2 \end{pmatrix}$$

Se $\sigma_{11}^2 = \sigma_{22}^2 = \sigma_{33}^2$ il tensore è isotropo e la velocità degli oggetti del sistema è uguale in tutte le direzioni

Quindi a causa dell'anisotropia della dispersione di velocità le stelle all'interno delle galassie ellittiche oscillano più velocemente nella direzione di un asse rispetto che nell'altra.

Piano fondamentale Vengono ora riportate tre leggi di scala valide per le galassie ellittiche (relazioni empiriche) che serviranno per descrivere la posizione delle galassie ellittiche all'interno un piano le cui coordinate saranno le grandezze descritte da queste leggi.

La prima legge di scala che viene presa in considerazione è la **Faber-Jackson** (1976) che lega la luminosità assoluta della galassia L alla dispersione di velocità media osservata σ_{obs}^4 :

$$L = A \sigma_{obs}^4$$

con A costante. Come la Tully-Fisher anche la Faber-Jackson è una dispersione e in particolare la legge ha uno spessore $\simeq 40\%$. Anche qui misurando σ_{obs}^4 (ad esempio tramite l'allargamento delle righe spettrali) si ricava la luminosità assoluta e quindi grazie al flusso misurato è possibile ricavare la distanza della galassia (si veda la legge di Tully-Fisher al punto **2.2**).

La seconda legge di scala considerata è quella di **Kormendy** (1978) che lega la luminosità assoluta della galassia L al raggio effettivo R_e :

$$L = B R_e^{-1}$$

con B costante. Anche questa legge come la F-J è una fascia. Il calcolo della distanza in questo caso risulta più complicato dato che il raggio effettivo cambia con la distanza (σ_{obs} rimaneva costante). Sono quindi necessari alcuni passaggi attraverso i quali si esprime la legge in termini di brillantezza (che non dipende dalla distanza) per poter ricavare la distanza.

L'ultima legge di scala è la $D_n - \sigma$ (1978-79) che lega il raggio effettivo R_e alla dispersione di velocità σ_{obs} :

$$R_e = C \sigma_{obs}^{-1}$$

con C costante. Anche in questo caso la legge è una dispersione.

I tentativi di diminuire lo spessore delle tre leggi risultarono inutili, tuttavia Djorgovski rappresentando le galassie in un piano cartesiano i cui assi sono R_e , σ_{obs} , L individuò il **piano fondamentale**:

$$\alpha \log L + \beta \log R_e + \gamma \log \sigma_{obs} = c$$

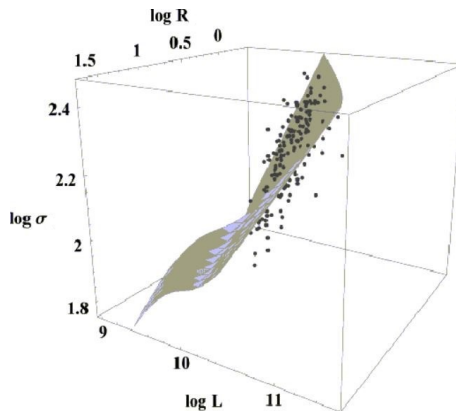


Figura 8: Rappresentazione del piano fondamentale (assi $\log R_e$, $\log \sigma_{obs}$, $\log L$)

Lo spessore di questo piano è $< 5\%$ e il motivo per cui le leggi di scala sono dispersioni è che il piano fondamentale non è parallelo a nessuno dei piani cartesiani: le proiezioni del piano restituiscono le tre leggi riportate sopra.

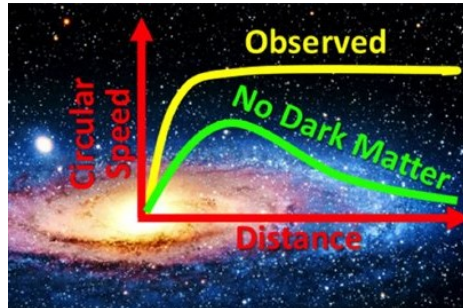
Visto lo spessore molto piccolo del piano fondamentale la scala delle distanze va incontro ad un grande miglioramento.

3.3 Materia oscura nella curva di rotazione

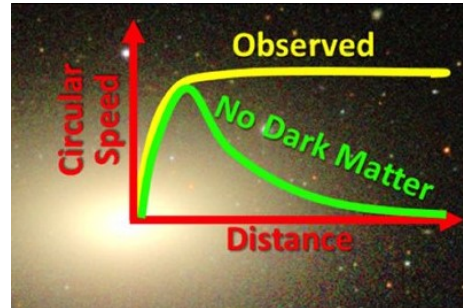
Da uno studio dell'università di Oxford che ha utilizzato dati raccolti dal telescopio Keck è emerso che anche le galassie ellittiche, come quelle a spirale, mantengono una velocità circolare costante

anche a grande distanza dal loro centro. Quindi anche in questo caso le stelle dominano la dinamica della parte più interna della galassia mentre la materia oscura contribuisce alla curva di rotazione nelle regioni più esterne.

Si osserva quindi che la materia oscura produce curve di rotazione piatte a prescindere dalla distribuzione di stelle nelle regioni interne.



Curva di rotazione di galassie a spirale



Curva di rotazione di galassie ellittiche

Figura 9: Rappresentazione di curve di rotazione previste senza materia oscura e osservate (Rivista Astrophysical Journal Letters, Michele Cappellari)

Bibliografia

- [1] Giuseppe Bertin. *Dynamics of Galaxies*. 2^a ed. Cambridge University Press, 2014. DOI: [10.1017/CB09780511731990](https://doi.org/10.1017/CB09780511731990).
- [2] James Binney e Scott Tremaine. *Galactic Dynamics: Second Edition*. 2008.
- [3] Michele Cappellari et al. “Small scatter and nearly isothermal mass profiles to four half-light radii from two-dimensional stellar dynamics of early-type galaxies”. In: *The Astrophysical Journal* 804.1 (apr. 2015), p. L21. ISSN: 2041-8213. DOI: [10.1088/2041-8205/804/1/L21](https://doi.org/10.1088/2041-8205/804/1/L21). URL: <http://dx.doi.org/10.1088/2041-8205/804/1/L21>.
- [4] Emilio Ceccotti. *Dispense - Processi di radiazione e MHD*. 2017.
- [5] Luca Ciotti. *Appunti - Astrofisica extragalattica*. 2021.
- [6] Luca Ciotti. *Introduction to Stellar Dynamics*. Cambridge University Press, 2021. DOI: [10.1017/9780511736117](https://doi.org/10.1017/9780511736117).
- [7] Daniele Dallacasa. *Appunti - Processi di radiazione e MHD*. 2021.
- [8] *Hubblesite: Hubble space telescope*. URL: <https://hubblesite.org>.