

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Astronomia

**DINAMICA DEI  
SISTEMI COLLISIONALI**

Tesi di laurea

Presentata da:  
**Ester Tommarelli**

Relatore:  
**Chiar.mo Prof.  
Daniele Dallacasa**

---

Anno Accademico **2020-2021**  
Sessione III



*Al mio papà,  
Che da sempre mi ha accompagnata  
nella scoperta del mondo.*

*Al mio Virgilio,  
maestro e guida.*

# SOMMARIO

La dinamica dei sistemi stellari include moltissime aree dell'astrofisica e ha un campo di applicazione molto vasto che può andare dalla struttura della via lattea, agli aloni di materia oscura.

In particolare si vuol capire come un sistema stellare composto da N-corpi interagisca, infatti i moti relativi delle stelle producono continue fluttuazione nel campo gravitazionale del sistema ridistribuendo l'energia totale con una serie di interazioni a lungo raggio guidati dalle attrazioni gravitazionali tra le componenti.

In questo elaborato, infine, si studieranno le caratteristiche dei sistemi collisionali, ovvero sistemi in cui la loro dinamica è guidata dalle interazioni gravitazionali.



# Indice

<b>1</b>	<b>Il problema degli N-corpi</b>	<b>1</b>
1.1	Il problema dei due corpi . . . . .	1
1.2	Effetto fionda . . . . .	3
1.3	L'approssimazione impulsiva . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Dinamica stellare</b>	<b>6</b>
2.1	Il tempo di rilassamento a due corpi . . . . .	6
2.2	Tempo di rilassamento per un sistema autogravitante . . . . .	9
<b>3</b>	<b>I sistemi collisionali</b>	<b>11</b>
3.1	Dinamica degli ammassi aperti . . . . .	11
3.2	Dinamica degli ammassi globulari . . . . .	12
3.2.1	Struttura core-halo . . . . .	12
3.2.2	Catastrofe gravotermica . . . . .	12
<b>4</b>	<b>A.1 Accenni al teorema del viriale</b>	<b>15</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>18</b>



# 1 Il problema degli N-corpi

Il problema matematico derivante dalla modellazione di un sistema stellare gravitazionalmente legato è estremamente complesso. In questa trattazione andremo a considerare solo il potenziale gravitazionale  $U$ . Si sta parlando del più famoso problema di tutta la Fisica Matematica, il problema degli N-corpi che in formulazione Newtoniana sarà:

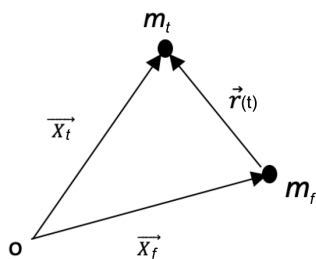
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{v}_i \\ m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{F} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} U \\ U = -\frac{G}{2} \sum_{i \neq j=1}^N \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} \end{cases} \quad (1.1)$$

Queste equazioni sono generalmente irrisolvibili, ovvero esse non possono essere ridotto a  $6N - 1$  equazioni indipendentemente integrabili, essendo il membro di destra esplicitamente indipendente dal tempo.

L'intrinseca complessità del problema ha fatto sì che questo restasse per secoli uno dei più interessanti problemi matematici. Nel corso degli anni sono state però sviluppate diverse tecniche per estrarre informazioni e proprietà importanti del sistema fino ad arrivare ad avere soluzioni numeriche sempre più precise.

Il caso più importante che è doveroso trattare è senza dubbio quello che ha una soluzione analitica, ovvero quello con  $N = 2$ . Sommando infatti le interazioni a due corpi si riuscirà a capire l'evoluzione di un sistema molto più complesso.

## 1.1 Il problema dei due corpi



Fissato un opportuno sistema di riferimento inerziale  $S_0$ , come in Figura 1.1, con due stelle, rispettivamente  $m_t$  e  $m_f$ , si definiranno i vettori orbita e velocità relativa come:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_f; \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f$$

Con  $N = 2$  il sistema (1.1) si ridurrà nella seguente forma:

**Figura 1.1:** Problema dei due corpi visto da un sistema di riferimento arbitrario  $S_0$ .



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{v}_t; & \dot{\mathbf{x}}_f = \mathbf{v}_f \\ \begin{cases} m_t \ddot{\mathbf{x}}_t = -\nabla_t U \\ m_f \ddot{\mathbf{x}}_f = -\nabla_f U = \nabla_t U \end{cases} \\ U = -G \frac{m_t m_f}{r} \end{cases} \quad (1.2)$$

Queste sono le leggi del moto e sommandole si può facilmente dimostrare che l'impulso totale del sistema,  $\mathbf{P} = m_t \mathbf{v}_t + m_f \mathbf{v}_f$ , è conservato in ogni SdR inerziale; infatti:

$$m_t \ddot{\mathbf{x}}_t + m_f \ddot{\mathbf{x}}_f = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} [m_t \dot{\mathbf{x}}_t + m_f \dot{\mathbf{x}}_f] = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = cost = M \mathbf{v}_{CM} \quad (1.3)$$

con  $M = m_t + m_f$  massa totale del sistema. Si può quindi concludere che il centro di massa del sistema si muove di moto rettilineo e uniforme con velocità costante  $\mathbf{v}_{CM}$ .

Si vuole ora ricavare l'equazione per l'orbita relativa  $\mathbf{r}(t)$  partendo delle equazioni di Newton (1.2)

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{x}}_t = -\frac{\nabla_t U}{m_t} \\ \ddot{\mathbf{x}}_f = \frac{\nabla_t U}{m_f} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\mathbf{r}} = -\left(\frac{1}{m_t} + \frac{1}{m_f}\right) \nabla_t U \quad \Rightarrow \quad \mu \ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{m_t m_f}{r^3} \mathbf{r} \quad (1.4)$$

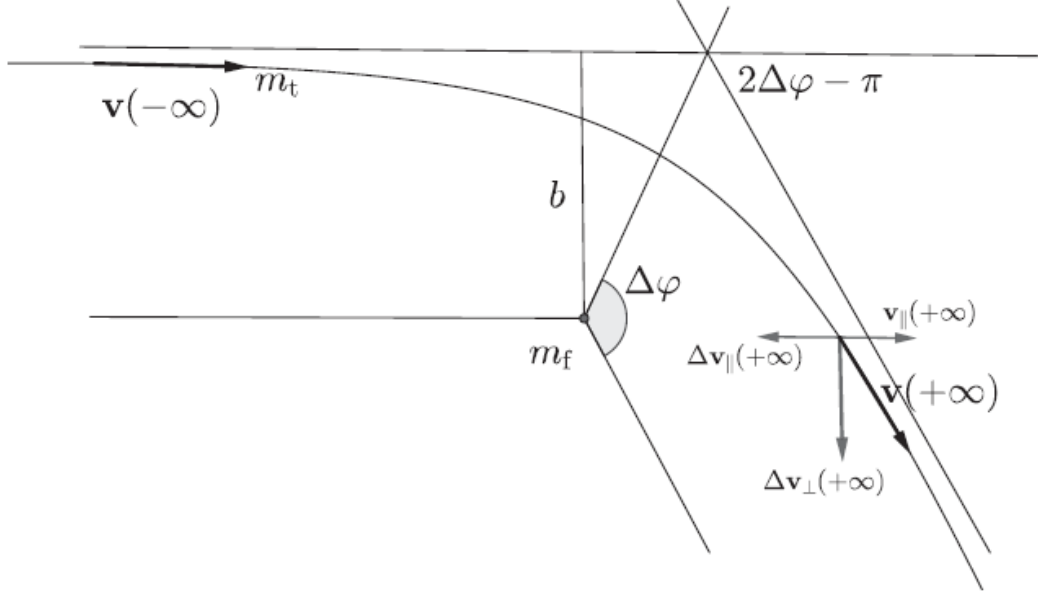
in cui  $\mu = \frac{m_t m_f}{m_t + m_f}$  è la massa ridotta del sistema che contiene tutti i termini non inerziali del problema. L'equazione differenziale (1.4) descrive il moto di un oggetto fittizio, con massa pari alla massa ridotta che si muove in un campo gravitazionale prodotto dalla stella di test e dalla stella di campo.

Passando ora all'energia<sup>1</sup> si può facilmente notare che sull'orbita relativa l'energia totale del sistema si conserva:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\mu \|v\|^2}{2} - G \frac{m_t m_f}{r} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu \|v\|^2}{2} - G \frac{m_t m_f}{r} = cost = E_0 \quad (1.5)$$

Se invece che essere in  $S_0$  sarò in un sistema di riferimento solidale con la stella di campo si vedrà la stella di test percorrere l'orbita relativa. L'interazione tra le due produrrà una deviazione dell'orbita e una variazione del verso della velocità della stella di test conservandone il modulo. Facendo uso dell'Equazione 1.5 si arriva alla formalizzazione del concetto appena espresso:

$$\begin{cases} r \rightarrow -\infty & E_i = \frac{\mu \|v_i\|^2}{2} \\ r \rightarrow \infty & E_f = \frac{\mu \|v_f\|^2}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \|v_i\|^2 = \|v_f\|^2 \quad (1.6)$$



Fonte: L. Ciotti, *Introduction to stellar dynamics*, Cambridge Press, 2021.

**Figura 1.2:** Rappresentazione schematica di un'orbita relativa di un sistema non legato in un campo di forze attrattivo generato dal potenziale gravitazionale  $U(r)$ . L'orbita relativa è un'iperbole.

## 1.2 Effetto fionda

Si vuole calcolare, mettendoci in  $S_{CM}$ , la differenza di energia che la stella di test subisce a causa dell'urto lontano<sup>2</sup> tra la posizione iniziale e quella finale, rispettivamente  $r \rightarrow -\infty$  e  $r \rightarrow \infty$ . Questa può essere considerata quindi solo come variazione di energia cinetica:

$$\Delta E_t = \frac{m_t}{2} \|\mathbf{v}_{t,i}\|^2 - \frac{m_t}{2} \|\mathbf{v}_{t,f}\|^2 \quad (1.7)$$

Grazie alla riformulazione della velocità di test, secondo cui  $\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_{CM} + \frac{\mu}{m_t} \mathbf{v}$ , e con una serie successiva di approssimazioni, l'Equazione 1.7 si riduce alla seguente formula:

$$\Delta E_t = \mu \langle \mathbf{v}_{CM}, \Delta \mathbf{v} \rangle \quad (1.8)$$

Già da questa prima formulazione dell'effetto fionda possiamo fare delle considerazioni:

- Dopo l'urto l'energia totale del sistema continua a conservarsi, venendo, però, ridistribuita tra le due masse: infatti  $\Delta E_t = -\Delta E_f$ .

<sup>1</sup>Il passaggio all'energia è un metodo matematico che prevede il prodotto scalare di entrambi i membri di un'equazione differenziale per la derivata di ordine uno in meno rispetto alla massima presente.

<sup>2</sup>Per urto lontano si intende l'interazione gravitazionale a lungo raggio.

- Non c'è guadagno di energia da parte della stella di test, se sono nel sistema di riferimento del centro di massa, ovvero se  $\Delta v \neq 0$ .
- Il guadagno o la perdita di energia dipendono fortemente dall'angolo tra i due vettori coinvolti,  $\Delta\varphi$ , ben evidenziato dalla Figura 1.2. La quantità di energia scambiata sarà determinata dalla rotazione della velocità relativa rispetto alla velocità del centro di massa.

A monte di queste osservazioni si può quindi affermare che per avere uno scambio di energia tra i due corpi la velocità del centro di massa e la differenza di velocità relativa devono essere diversi da zero, mentre  $\Delta\varphi$  deve essere diverso da  $90^\circ$ .

Inoltre lasciandoci guidare dalla Figura 1.2 si definisce  $b$ , il parametro d'impatto, come la distanza minima alla quale  $m_t$  incontra  $m_f$  se le due particelle non interagissero attraverso una forza. Nel nostro caso, dato che la forza gravitazionale è attrattiva, la distanza minima è ovviamente minore di  $b$ . Dal punto di vista dinamico  $b$  rappresenta il momento angolare della coppia di stelle infatti:  $\|\mathbf{J}_{cm}\| = \mu b \|v_i\|$ . Ovviamente in  $S_0$  anche il momento angolare si conserva seppure, così come l'energia, non è un invariante.

Infine, facendo uso dell'identità  $\Delta\mathbf{v}_t = \frac{\mu}{m_t} \Delta v$  già precedentemente considerata, si vuole riesprimere  $\Delta E_t$  in termini della velocità della stella di test in  $S_0$ , in contrasto con l'espressione (1.8) in cui la differenza di energia era espressa in termini della velocità relativa e della velocità del centro di massa. Riprendendo l'Equazione 1.7 si sostituirà la seguente espressione per la velocità della stella  $t$  alla fine dell'urto:  $\mathbf{v}_{t,f} = \mathbf{v}_{t,i} + \Delta\mathbf{v}_t$ .

In questo modo la variazione dell'energia cinetica si riscriverà come:

$$\Delta E_t = \frac{m_t}{2} (\|\Delta\mathbf{v}_t\|^2 + 2\langle\Delta\mathbf{v}_t, \mathbf{v}_{t,i}\rangle) = \frac{m_t}{2} (\|\Delta\mathbf{v}_t\|_\perp^2 + \|\Delta\mathbf{v}_t\|_\parallel^2 + 2\langle\Delta\mathbf{v}_t, \mathbf{v}_{t,i}\rangle) \quad (1.9)$$

Bisogna evidenziare che nell'ultimo passaggio si è scomposta  $\Delta\mathbf{v}_t$  nelle sue due componenti parallelo e perpendicolare rispetto alla velocità relativa iniziale e non rispetto alla velocità iniziale della stella di test.

Si nota che l'Equazione 1.9 è composta da tre addendi. I primi due sono norme al quadrato, e per questo sono termini positivi chiamati termini di riscaldamento. Il terzo addendo, il prodotto scalare, è invece negativo e prende il nome di termine di raffreddamento; questo termine racchiude gli effetti di frizione dinamica. La massa di test  $m_t$  sarà infatti frenata nella direzione del suo moto dalle stelle di campo con velocità minore alla sua.

L'ultima cosa da sottolineare è la timida apparizione che fa la termodinamica già nel problema dei due corpi. Considerando  $v_i$  come una temperatura possiamo notare che questa è anisotropa, infatti inizialmente ha solo la componente parallela alla massa di test. L'interazione tra le due masse permette alla velocità di acquistare componente perpendicolare e, dal momento che il modulo della velocità si conserva, perdere velocità nella direzione parallela. Il susseguirsi lento di queste interazioni a lungo raggio può riportare isotropia nel sistema.

### 1.3 L'approssimazione impulsiva

Si vorrebbe ora trovare un'espressione per  $(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp$  presente nell'Equazione 1.9 sfruttando la relazione esatta presente tra le due quantità già precedentemente discussa, secondo la quale:

$$(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp = \frac{\mu}{m_t} (\Delta v)_\perp \quad (1.10)$$

Per conoscere  $(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp$  sarà, quindi, necessario stimare  $(\Delta v)_\perp$  ricorrendo alla cosiddetta approssimazione impulsiva; secondo la quale partendo dalla seconda legge della dinamica in formulazione impulsiva  $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{F} \Delta t$ , e sfruttando l'Equazione 1.4 la si può riscrivere come segue:

$$\mu \|(\Delta v)_\perp\| \sim \frac{G m_t m_f}{b^2} \frac{2b}{\|v_i\|} \sim \frac{2G m_t m_f}{b \|v_i\|} \quad (1.11)$$

Per capire in cosa consiste questa approssimazione osservando l'Equazione 1.11 si nota che:

- si è considerato il valore specifico della forza tra le due stelle quando esse si trovano a distanza  $b$ , che non corrisponde alla forza massima tra i due corpi perché  $b$  è diverso dalla distanza minima.
- Come tempo caratteristico di interazione, che sarebbe pari a  $\infty$  perché l'interazione gravitazionale tra due corpi anche se minima continua a esserci sempre anche quando i due corpi sono molto lontani tra loro, si utilizza il tempo impiegato dalla stella di test a percorrere avanti e indietro il parametro d'urto.

L'espressione (1.11) è asintoticamente corretta nel limite  $b \rightarrow \infty$ , in quanto è un'espansione in serie di Taylor in  $1/b$  e di una grande velocità relativa iniziale. Se infatti l'interazione tra le due stelle avviene a grandi distanze l'orbita relativa viene deflessa poco e la variazione di velocità è ben descritta dall'approssimazione impulsiva. Man mano che le due stelle si avvicinano l'orbita viene deviata sempre più e per una buona descrizione del fenomeno si devono introdurre termini successivi.

A questo punto combinando i risultati ottenuti da (1.10) e da (1.11) si può affermare che:

$$\|(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp\|^2 \sim \frac{4G^2 m_f^2}{b^2 \|v_i\|^2}, \quad b \rightarrow \infty$$

È interessante notare che per grandi parametri d'impatto la variazione della componente perpendicolare della velocità della stella di test non dipende dalla sua massa.

La variazione di energia cinetica perpendicolare alla massa di test per una interazione tra le due masse è quindi data da:

$$\Delta E_{t,\perp} = \frac{m_t}{2} \|(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp\|^2 \sim \frac{m_t}{2} \frac{4G^2 m_f^2}{b^2 \|v_i\|^2} \quad (1.12)$$

## 2 Dinamica stellare

Consideriamo un sistema autogravitante<sup>1</sup> sferico con raggio  $R$  e  $N$  stelle al suo interno con massa  $m$  e raggio pari al raggio solare,  $R_{\odot} \simeq 7 \cdot 10^{10} \text{ cm}$ , distribuite omogeneamente.

La sezione d'urto geometrica per una collisione tra due stelle è  $\sigma_* = 4\pi R_{\odot}^2$  e a ogni stella è associato un volume pari a  $\lambda\sigma_*$ . Quando il volume dello spazio percorso dalla stella uguaglia il volume della galassia allora ho una buona probabilità che due stelle vengano in contatto tra loro e si urtino. Possiamo quindi dire che

$$N\lambda\sigma_* = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{R} = \frac{R^2}{NR_{\odot}^2}. \quad (2.1)$$

$\lambda$  ci dà l'ordine di grandezza del cammino che una stella deve fare prima che urti con un'altra. Si può notare come  $\lambda$  diminuisca all'aumentare del numero di stelle della galassia.

Assumendo dei valori caratteristici per la galassia<sup>2</sup> e sostituendoli in (2.1) avremo  $\frac{\lambda}{R} \sim 10^{12}$ , ovvero la stella prima di fare un urto geometrico dovrebbe percorrere mille miliardi di raggi galattici. Con una certa tranquillità, alla luce dei risultati appena trovati, si è portati a dire che una galassia è un sistema a  $N$ -corpi interagenti tra loro solo con urti lontani.

Un sistema autogravitante per cui gli effetti cumulativi delle interazioni gravitazionali a lungo raggio, ossia lo scambio di energia mediante l'effetto fionda, sono trascurabili è chiamato sistema non collisionale, altrimenti si parla di sistema collisionale. Ovviamente un sistema reale a  $N$ -corpi non può mai essere strettamente non collisionale. Nel prossimo paragrafo si vorrà capire cosa distingue un sistema collisionale da uno non collisionale.

### 2.1 Il tempo di rilassamento a due corpi

Per estrarre informazioni dal sistema degli  $N$ -corpi senza davvero risolverlo c'è bisogno di cambiare approccio e non trattare più un sistema collisionale come un sistema discreto di  $N$ -corpi, ma rimpiazzarlo con un sistema ideale liscio e continuo avente distribuzione di densità  $\rho(\mathbf{x}, t)$  e un potenziale  $\Phi(t)$ .

Le orbite del sistema granulare inizialmente sono ben descritte dal sistema liscio, ma con l'avanzare del tempo inizia ad apparire una significativa deviazione tra le due. Il tempo caratteristico dopo il quale questa deviazione è significativa è chiamato *tempo di rilassamento a due corpi* e si indica con  $t_{2b}$ .

---

<sup>1</sup>Sistema in cui tutte le forze considerate vengono dal sistema stesso.

<sup>2</sup> $N = 10^{11}$  e  $R = 5 \cdot 10^4 \text{ pc}$ .

Quando un sistema raggiunge il tempo di rilassamento non accade nulla di brusco e improvviso in quanto è un parametro ricavato a partire da un modello idealizzato; nel sistema granulare, infatti, sin dall'inizio le orbite delle stelle si influenzano a vicenda e con il passare del tempo saranno descritte sempre peggio dal sistema liscio.

L'approccio standard per definirlo si basa sulle seguenti assunzioni:

1. Tutti gli incontri tra i corpi sono trattati come indipendenti, ovvero l'effetto di un incontro si andrà semplicemente e sommare al successivo.
2. Tutti gli incontri sono trattati come incontri a due corpi.

L'idea alla base della prima assunzione è di sommare la variazione di energia cinetica causata dagli effetti fionda di tutti gli incontri a due corpi, ovvero voglio conoscere  $(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp$ , per poterlo inserire nell'Equazione 1.9.

A questo punto c'è il bisogno di descrivere il sistema delle particelle di campo e assumendolo spazialmente omogeneo<sup>3</sup> e isotropo rispetto alla sua distribuzione di velocità<sup>4</sup> la funzione di distribuzione<sup>5</sup> nello spazio delle fasi e data da:

$$f(\mathbf{x}_f, \mathbf{v}_f) = n_f g(\|\mathbf{v}_f\|) \quad (2.2)$$

Inoltre partendo dalla definizione di  $f$ , sfruttando (2.2) e passando alle coordinate sferiche posso scrivere:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\theta d\phi \int_0^\infty n_f g(\|\mathbf{v}_f\|) \|\mathbf{v}_f\|^2 d\mathbf{v}_f = n_f \quad \Rightarrow \quad 4\pi \int_0^\infty g(\|\mathbf{v}_f\|) \|\mathbf{v}_f\|^2 d\mathbf{v}_f = 1 \quad (2.3)$$

In un intervallo di tempo  $\Delta t$  il numero di incontri, con le stelle di campo aventi velocità  $\mathbf{v}_f$  sarà:

$$\Delta N(\mathbf{v}_f) = 2\pi b db \|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f\| \Delta t f d^3 \mathbf{v}_f \quad (2.4)$$

Ovvero avendo fissato un certo parametro d'impatto  $b$  il numero di urti che la stella di test può fare è rappresentato dal guscio cilindrico con corona circolare di raggio  $b$  e spessore  $db$  centrata nella stella di test, e con lunghezza  $\Delta t v$ . L'asse del guscio cilindrico sarà orientato lungo la direzione della velocità relativa e cambierà al cambiare della velocità delle stelle di campo.

Andando ora a moltiplicare il numero di urti che la stella di test fa lungo l'orbita con l'energia scambiata per ogni urto, espressa dall'Equazione 1.12 e andando a integrare si ottiene:

$$D(\|\Delta \mathbf{v}_{t,\perp}\|^2) = 8\pi G^2 m_f^2 n_f \Delta t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(\|\mathbf{v}_f\|)}{\|v\|} d^3 \mathbf{v}_f \int_0^\infty \frac{db}{b} \quad (2.5)$$

---

<sup>3</sup>Indicando con  $n_f$  il numero di particelle per unità di volume è indipendente dalla posizione

<sup>4</sup>Ovvero la funzione di distribuzione dipende solamente da  $n_f$  e da  $\|\mathbf{v}_f\|$ , non dalla direzione della velocità delle stelle di campo.

<sup>5</sup>La funzione di distribuzione  $f$  è definita come  $\int_{\mathbb{R}^3} f d^3 \mathbf{v}_f = n_f$

Che descrive come cambiano le proprietà dell'orbita della stella di test come risultato degli incontri cumulativi con le stelle di campo.

Apparentemente l'integrazione sul parametro d'impatto porterebbe ad avere risultati assurdi con una divergenza logaritmica sia con  $b = 0$  sia con  $b = \infty$ . Analizzando i due casi separatamente notiamo che:

- con  $b \rightarrow 0$  appaiono i limiti dell'approssimazione impulsiva. Questa divergenza prende il nome di divergenza ultravioletta e scompare quando si utilizza la soluzione esatta del problema dei due corpi:  $\frac{b}{b^2 + b_{min}^2}$ , in cui  $b_{min} = \frac{G(m_t + m_f)}{\|v_i\|^2}$ .
- $b \rightarrow \infty$  si ha la divergenza infrarossa e non può essere eliminata in un sistema gravitazionale omogeneo e infinito. Siamo quindi forzati a troncare l'integrale a  $b_{max}$ , un parametro di impatto ragionevolmente grande<sup>6</sup>. La divergenza infrarossa mostra come l'effetto cumulativo degli urti lontani domina il tempo di rilassamento a due corpi fornendo una giustificazione a posteriori della scelta nell'utilizzare l'approssimazione impulsiva.

Il risultato finale, partendo dall'Equazione 2.5 può essere espresso tramite il logaritmo di Coloumb  $\ln \Lambda^7$ , con  $\Lambda = \frac{b_{max}}{b_{min}}$ , e appare nella forma:

$$D(\|\Delta \mathbf{v}_{t,\perp}\|^2) \sim 8\pi G^2 n_f m_f^2 \Delta t \ln \Lambda \Psi(\|\mathbf{v}_t\|) \quad (2.6)$$

$\Psi(\|\mathbf{v}_t\|)$  è il potenziale di Rosenbluth e dipende dalla distribuzione di velocità delle stelle di campo. Per  $\|\mathbf{v}_t\| \rightarrow \infty$  il potenziale si comporta come il potenziale gravitazionale a grandi distanze, ovvero sarà dominato dal termine di monopolo  $\Psi(\|\mathbf{v}_t\|) \sim \frac{1}{\|\mathbf{v}_t\|}$ .

Gli effetti cumulativi degli urti lontani hanno come effetto quello di riscaldare la stella di test lungo la direzione perpendicolare alla velocità relativa iniziale. Quindi ora, in modo del tutto naturale, si definisce il tempo di rilassamento come il tempo trascorso affinché la somma dei riscaldamenti perpendicolari raggiunga lo stesso valore dell'energia cinetica iniziale con della stella di test.

$$D(\|\Delta E_{t,\perp}\|^2) = E_{t,i}; \quad \frac{m_t}{2} [8\pi G^2 n_f m_f^2 \ln \Lambda \frac{1}{\|\mathbf{v}_t\|}] t_{2b} = \frac{m_t}{2} \|\mathbf{v}_t\|^2 \quad (2.7)$$

$$da \quad cui \quad t_{2b} \sim \frac{\|\mathbf{v}_t\|^3}{8\pi G^2 n_f m_f^2 \ln \Lambda} \quad (2.8)$$

---

<sup>6</sup>Questo parametro che qui può apparire come una forzatura appare naturalmente in un sistema analogo in elettromagnetismo e coincide con la lunghezza di Debye dopo la quale le cariche negative e positive si bilanciano. La principale differenza tra i due sistemi è che in natura non esistono cariche gravitazionali repulsive, come invece accade in EM.

<sup>7</sup>Generalmente il logaritmo di Coloumb acquista un valore compreso tra 10 e 20.

## 2.2 Tempo di rilassamento per un sistema autogravitante

Nel caso di un sistema sferico di raggio  $R$  autogravitante all'equilibrio, ovvero un sistema in cui vale il teorema del viriale<sup>8</sup>, che contiene  $N$  stelle con massa  $m$  e massa totale  $M = Nm$  possiamo affermare che:

$$T = \frac{M\sigma_v^2}{2}, \quad U = -\frac{GM^2}{R} \Rightarrow \sigma_v^2 = \frac{GM}{R}$$

$\sigma_v$  è adottata come la velocità caratteristica delle stelle e andrà ad inserirsi in (2.8). Per capire il valore del tempo di rilassamento è bene esprimerlo nelle unità naturali del sistema paragonandolo al tempo di attraversamento definito come:

$$t_{cross} = \frac{2R}{\sigma_v}$$

Il loro rapporto quindi sarà:

$$\frac{t_{2b}}{t_{cross}} = \frac{N\sigma^4 R^2}{12G^2 M^2 \ln \Lambda} \sim \frac{N}{12 \ln N} \quad (2.9)$$

Si sono assunti i parametri  $b_{min} = \frac{2GM}{N\sigma^2}$  e  $b_{Max} = 2R$ . Consideriamo ora vari casi:

- Per una tipica *galassia* ellittica avremo  $N \simeq 10^{11}$  e  $t_{cross} \sim 2 \cdot 10^8 yr$  per cui il tempo di rilassamento a due corpi è dell'ordine di  $10^6 Gyr$ . Si nota immediatamente che è molto superiore all'età dell'universo e proprio per questo si può tranquillamente affermare essere un sistema non collisionale su scala cosmologica.
- Per un *ammasso globulare* avremo  $N \simeq 10^6$  e  $t_{cross} \sim 10^6 yr$  per cui  $t_{2b} = 10^{10} yr$ . Ci aspettiamo quindi che per questi sistemi la termodinamica gravitazionale inizi ad essere rilevante per lo studio della dinamica di questi sistemi. Si può concludere, basandoci anche su simulazioni numeriche e osservazioni, che gli ammassi globulari siano quindi sistemi marginalmente collisionali.
- Mentre per un *ammasso aperto* con  $N \simeq 10^2$  e  $t_{cross} \sim 10^6 yr$  il tempo di rilassamento a due corpi è dello stesso ordine del tempo di attraversamento. Si tratta di sistemi collisionali e questo spiega la presenza di stelle blu in questi ammassi.

Prima di proporre qualche applicazione astrofisica nel capitolo successivo, vorrei porre l'attenzione sul fatto assai bizzarro e contro intuitivo ben visibile dagli esempi sopra proposti: un sistema è sempre meno collisionale all'aumentare del numero di oggetti presenti nel sistema  $N$ , nonostante con  $N$  aumentino anche il numero degli urti. Per

---

<sup>8</sup>si faccia riferimento all'appendice A



capire questo comportamento facendo riferimento all'Equazione 2.9 si andrà a studiare il limite della seguente successione:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{\ln N} \sim \lim_{N \rightarrow \infty} N \rightarrow \infty$$

Per svolgere il limite si è fatto uso degli ordini di infinito per le successioni secondo cui  $N \in O_\infty(\ln N)$ . Di fronte a questo risultato si può affermare con una certa tranquillità che il tempo di rilassamento a due corpi è tanto maggiore tanto maggiore sarà il numero di stelle che compongono un sistema. Quindi, nonostante aumentino il numero di urti di una stella di test con le stelle di campo a dominare la dinamica è l'energia scambiata negli urti  $\propto N \cdot \frac{1}{N^2}$  che aumenta al diminuire del numero di corpi presenti nel sistema, spiegando l'andamento apparentemente contrario visibile dagli esempi.

## 3 I sistemi collisionali

Si è visto come il tempo di rilassamento fornisca un buon indicatore per capire quale tecnica adottare per studiare un sistema complesso, come può essere un sistema a  $N$  corpi interagenti.

Inoltre, grazie alla meccanica statistica, è noto che un sistema di particelle debolmente interagenti tra loro in ogni istante è continuamente soggetto a continui deboli scambi di energia. Queste fluttuazioni sono guidate dall'equazione di Maxwell-Boltzmann e dal principio di equipartizione dell'energia. Questo è un fatto di estrema importanza in astrofisica perché questi deboli effetti cumulativi sono alla base dell'evaporazione gravitazionale, della perdita di massa nelle stelle, e dei sistemi core-collapse.

Infine si vuole notare che le galassie e gli ammassi globulari sono sistemi molto disomogenei, hanno infatti densità centrale molto diversa dalle densità dell'halo. Il tempo di rilassamento a due corpi, che come si vede dall'Equazione 2.8 dipende direttamente dalla densità, varierà di conseguenza in base alla posizione che le stelle occupano in questi sistemi.

### 3.1 Dinamica degli ammassi aperti

Gli ammassi aperti sono sistemi collisionali e come vedremo hanno una dinamica con molti aspetti in comune con ammassi globulari.

La maggiore differenza risiede nel fatto che, avendo un tempo di rilassamento minore, la rapidità con cui l'evaporazione gravitazionale procede è di gran lunga maggiore rispetto a quella che avviene negli ammassi. L'evaporazione gravitazionale si verifica perché una stella tramite una serie di interazioni gravitazionali, può acquistare una velocità maggiore della velocità di fuga, diventando così in grado di abbandonare il sistema.

Tutto questo fa sì che gli ammassi aperti perdano stelle in maniera talmente rapida che queste non hanno il tempo di invecchiare al loro interno. Proprio per questo motivo negli ammassi aperti si osserva una prevalenza di stelle blu. L'età vera ed l'età dinamica di un sistema stellare gravitazionalmente legato sono concetti che non coincidono: un ammasso aperto infatti può contenere stelle molto giovani, ma essere dinamicamente vecchio.

## 3.2 Dinamica degli ammassi globulari

Gli ammassi globulari, al contrario degli ammassi aperti, sono sistemi molto antichi, formati da centinaia di migliaia di stelle di bassa metallicità, che orbitano attorno al centro galattico.

Esamineremo la dinamica degli ammassi globulari perché questi sono sistemi collisionali e hanno diverse caratteristiche che semplificano la nostra analisi: sono sferoidali, privi di polvere e stelle giovani che renderebbero le osservazioni più complesse, e soprattutto la loro età avanzata li rende un'ottima realizzazione fisica del problema degli N-corpi.

Inoltre gli ammassi globulari sono in una situazione di quasi equilibrio, quindi si può dire che la loro distribuzione di velocità è ben descritta dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann e il moto relativo delle stelle produce continue fluttuazioni nel campo gravitazionale delle stelle di capo. Questi urti lontani, come abbiamo già discusso ridistribuiscono l'energia del sistema definendone la dinamica.

### 3.2.1 Struttura core-halo

Come anticipato nell'introduzione di questo capitolo la densità degli ammassi globulari non è uniforme. Le stelle più massive e più calde, cadono verso il centro dell'ammasso e cedono energia alle stelle meno massive che si espandono nelle regioni più esterne.

Si forma quindi una sfera isoterma centrale che contiene più del 50% della massa dell'ammasso ha una densità molto elevata e una distribuzione di velocità quasi isotropa. Fuori da questa regione la dispersione di velocità  $\sigma$  diminuirà rapidamente all'aumentare della distanza dal centro, anche la densità di stelle diminuisce e queste ultime percorreranno orbite per lo più radiali. Questa configurazione è chiamata struttura core-halo.

A causa delle enormi differenze strutturali si può considerare il core dell'ammasso come un sistema autogravitante che ha un tempo di rilassamento molto minore rispetto a quello dell'alone, in quanto la sua densità è maggiore. Gli urti tra una stella dell'halo e una del core portano dunque cambiamenti significativi alla struttura. Questo aspetto sarà approfondito nella prossima sezione.

### 3.2.2 Catastrofe gravotermica

I sistemi autogravitanti, come si può vedere nell'Appendice A, hanno un calore specifico negativo e l'interazione delle stelle del core con quelle dell'halo porta un continuo scambio di calore tra le due parti. Le stelle del core, essendo più calde, per il secondo principio della termodinamica, cedono calore alle stelle dell'halo che acquistando calore acquistano energia cinetica diventando così un sistema più freddo e più esteso; mentre il core avendo perso energia cinetica diventerà un sistema più caldo e più denso. Tutto questo è ben visibile dalla Figura 4.1.



Fonte: ESA; <https://esahubble.org/images/heic1425a/>.

**Figura 3.1:** Sono rappresentati 4 ammassi globulari, rispettivamente da sinistra Fornax1, Fornax2, Fornax3, Fornax5, ospitati dalla galassia lenticolare Fornax A.

Questo processo aumenta il gradiente termico tra il core e l'halo facendo allontanare sempre più dallo stato di equilibrio portandolo all'instabilità gravotermica.

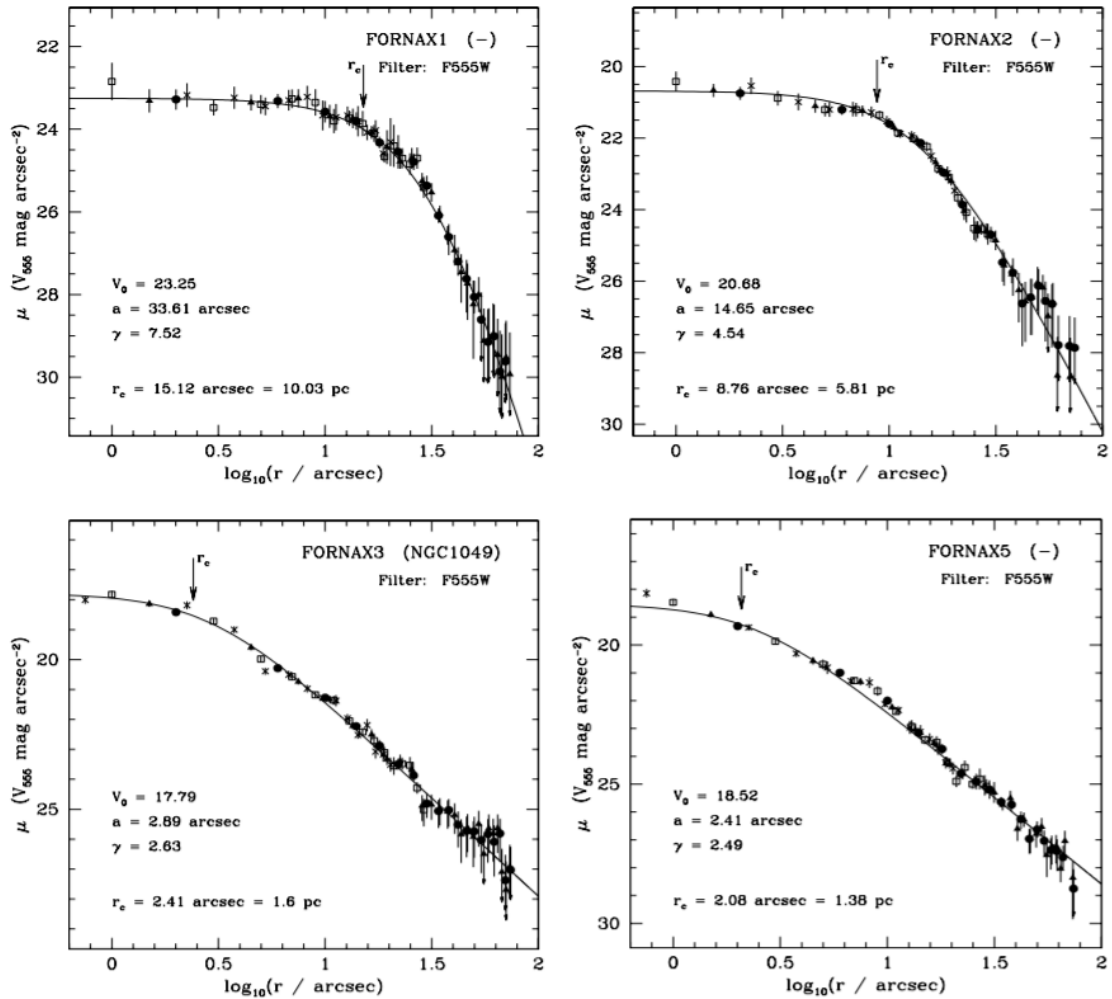
L'analisi di questa instabilità è ben evidente in sistemi che sono inizialmente isotermi che hanno un'apprezzabile differenza di densità tra il core e l'halo, definita come segue dal parametro  $D \equiv \rho(0)/\rho(R)$ , in cui con  $\rho(0)$  si è indicata la densità del core e con  $\rho(R)$  la densità dell'halo. Solo nel momento in cui  $D$  è sufficientemente grande,  $D \gg 1$ , la catastrofe gravotermica si innesca facendo aumentare sempre più la dispersione di velocità delle stelle del core fino a quando collassa. Questo processo di contrazione prende il nome di core-collapse.

Il profilo di densità distingue gli ammassi globulari che hanno subito la catastrofe da quelli in cui non si è innescato il collasso del core. La densità negli ammassi è stimata a partire dal core e ovviamente va diminuendo man mano che ci si allontana da quest'ultimo: ci si aspetta perciò, una distribuzione di densità quasi piatta finché si è nel core per poi decrescere all'aumentare raggio; è ben descritta dai profili di King<sup>1</sup>, questi profili sono definiti dal parametro  $W_0$  che è proporzionale al potenziale gravitazionale: maggiore risulta  $W_0$  più il core sarà contratto.

In seguito al collasso del core, si forma nella regione centrale una deviazione significativa del plateau previsto dal modello di King infatti, la densità stellare mostra una sorta di cuspidè, un aumento sensibile della densità che segue un andamento ben rappresentato da una legge di potenza.

In Figura 3.1 vengono riportati 4 diversi ammassi globulari: Fornax1, Fornax2, Fornax3, Fornax5 di cui si analizzeranno brevemente i profili di densità, visibili in Figura 3.2. Comparando i profili di densità con le immagini degli ammassi è subito chiaro che Fornax1 e Fornax2 non hanno subito la catastrofe gravotermica in quanto il core ha un raggio molto esteso e il loro profilo di densità ha il plateau previsto dal profilo di King. Per gli altri due ammassi invece, il profilo di densità è più simile a una legge di potenza e vediamo

<sup>1</sup>Il profilo di King prevede  $\rho \propto (1 + (\frac{r}{r_c})^2)^{-3/2}$  con  $r_c$  raggio del core.

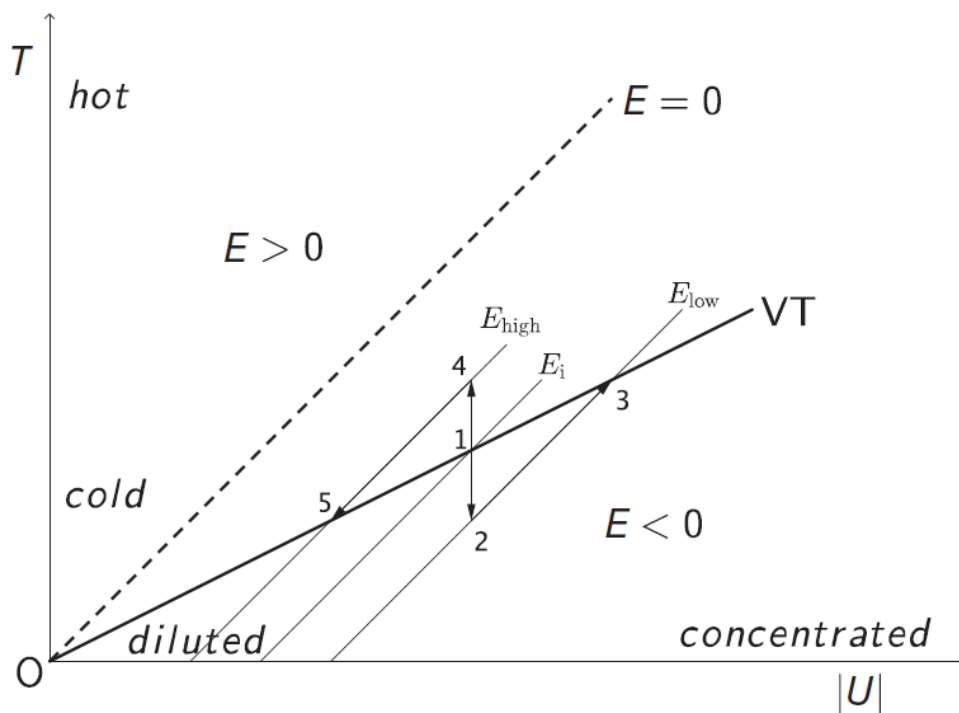


Fonte: Surface brightness profiles and structural parameters for globular clusters in the Fornax and Sagittarius dwarf spheroidal galaxies. A. D. Mackey and G. F. Gilmore.

**Figura 3.2:** Sono riportati i profili di densità e i valori del raggio del core dei quattro ammassi presi in considerazione.

infatti che il valore del raggio del core diminuisce molto rispetto ai due ammassi sopra considerati. Questo ci porterà a dire che Fornax3 e Fornax5 hanno subito il core-collapse.

## 4 A Accenni al teorema del viriale



Fonte: L. Ciotti, *Introduction to stellar dynamics*, Cambridge Press, 2021.

**Figura 4.1:** È rappresentato il piano viriale per una forza  $1/r^2$ . Sulle ascisse troveremo  $|U|$ , i punti vicini all'origine rappresenteranno un sistema molto diluito, mentre spostandoci a ascisse maggiori i sistemi diventeranno sempre più concentrati. Sulle ordinate avremo l'energia cinetica e i sistemi vicino all'origine saranno freddi per via via riscaldarsi sempre più. La retta viriale è indicata con la sigla VT, mentre le altre rappresentano le rette della conservazione dell'energia,  $T = E + |U|$ . La retta  $T = |U|$  rappresenta un sistema a energia totale  $E = 0$ .

Il teorema del viriale nella sua forma più semplice per un sistema autogravitante nel centro di massa è esprimibile nella seguente forma:

$$2T = -U$$

Dire che un sistema è virializzato equivale a dire che il sistema è all'equilibrio.

Preso un sistema con delle condizioni iniziali fissate questo è rappresentabile nel piano viriale, Figura 4.1 . Se il sistema è sulla retta viriale possiamo dire che il sistema è all'equilibrio e se l'equilibrio è stabile il sistema resterà lì. Se l'energia totale del sistema è positiva questo non potrà mai raggiungere la retta viriale, in quanto non si hanno intersezioni tra le rette, e non potrà mai essere all'equilibrio. Viceversa i sistemi a energia totale negativa possono raggiungere l'equilibrio conservando sempre la loro energia totale.

Supponiamo di avere un sistema nella posizione 1 nella Figura 4.1 assumiamo che questo perda una parte della sua energia cinetica. Il sistema arriverà nel punto 2 raffreddandosi facendo restare invariata la sua energia potenziale. Se il sistema è all'equilibrio tenderà a tornare sulla retta virale nel punto 3. Il sistema sarà più concentrato e più caldo. La perdita di energia ha portato quindi il sistema a contrarsi e a riscaldarsi.

Al contrario se il sistema nel punto 1 acquista energia questo arriverà nel punto 4, ovvero un punto con maggiore energia cinetica, quindi più caldo. Affinché possa di nuovo raggiungere l'equilibrio il sistema arriverà nel punto 5, un punto a minore energia potenziale e minore energia cinetica. fornire energia al sistema significa quindi raffreddarlo e espanderlo.

Si potrà dire allora che un sistema autogravitante e gravitazionalmente legato ha un calore specifico negativo.





# Bibliografia

- [1] L. Ciotti. *Introduction to Stellar Dynamics*. Cambridge University Press, 2021 L.Ciotti.
- [2] L.Ciotti. *Lecture Notes on Stellar Dynamics*. Scuola normale superiore di Pisa, 2000.
- [3] Lyman Spitzer, Jr. *Dynamical evolution of globular cluster*. Princeton University press, 1987.
- [4] J. Binney, S. Tremaine, *Galactic dynamics*. Princeton University press, 2008.
- [5] *Dispense del corso di Astrofisica extragalattica*. Appunti di lezione a.a. 2020/2021
- [6] C.Ferrari. *Coppie di ammassi globulati in LCM*. Tesi di laurea magistrale corso di Astrofisica e cosmologia, ALMA Mater Studiorum, 2014.