

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Astronomia

**MECCANISMI DI TRASPORTO  
DELL'ENERGIA IN ASTROFISICA**

Tesi di Laurea Triennale

Presentata da:  
**Riccardo Magnani**

Relatore:  
**Chiar.mo Prof.  
Daniele Dallacasa**

---

**Anno Accademico 2020-2021**

*A chi ha creduto in me,  
ma soprattutto a chi non lo ha fatto*

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Produzione dell'energia</b>	<b>2</b>
<b>2 Meccanismi di trasporto nelle stelle</b>	<b>4</b>
2.1 Trasporto radiativo . . . . .	4
2.1.1 Libero cammino medio . . . . .	4
2.1.2 Opacità . . . . .	5
2.1.3 Profondità ottica . . . . .	7
2.1.4 Trasporto radiativo negli interni stellari . . . . .	8
2.1.5 Trasporto radiativo nell'atmosfera stellare . . . . .	8
2.2 Trasporto conduttivo . . . . .	10
2.3 Trasporto convettivo . . . . .	11
2.3.1 Gradiente adiabatico . . . . .	11
2.3.2 Criterio di Schwarzschild . . . . .	12
2.3.3 Equazione del flusso convettivo . . . . .	13
<b>3 Trasporto di energia tramite neutrini</b>	<b>15</b>
3.1 Neutrini prodotti dalle stelle . . . . .	15
3.2 Neutrini prodotti dai raggi cosmici . . . . .	16
<b>Bibliografia</b>	<b>17</b>

# Introduzione

L'energia nell'universo può essere veicolata verso la Terra in molteplici modi, i quali dipendono soprattutto dal tipo di sorgente e in che ambiente essa si trova. Questo elaborato ha come obiettivo quello di esporre sinteticamente i processi che permettono di trasportare l'energia sia negli interni delle stelle, sia nello spazio tramite neutrini. I meccanismi di trasporto nelle stelle sono fondamentali durante il loro ciclo vitale e permettono di conoscere le caratteristiche macroscopiche e chimiche dell'ambiente interno. Il primo capitolo illustra brevemente il modo in cui viene prodotta l'energia nei nuclei delle stelle, soffermandosi su quelle che sono le reazioni chimiche fondamentali di fusione che permettono l'emissione di energia. Nel secondo capitolo vengono invece sviluppati i processi in grado di trasportare questa energia verso la superficie, ovvero il *trasporto radiativo, conduttivo e convettivo*. Ciò che accomuna questi meccanismi è l'importanza del libero cammino medio dell'elemento che trasporta l'energia e del gradiente di temperatura degli interni stellari. Difatti, queste quantità possono ridurre l'efficienza del trasporto dell'energia e stabilire quale meccanismo prevale sull'altro. Oltre a ciò, nel caso di trasporto radiativo, gli strati esterni della stella possono modificare il flusso di radiazione che, in assenza di ostacoli, produrrebbe uno spettro continuo molto simile a quello di un corpo nero, la cui energia emessa segue la *legge di Planck*

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

dove  $h = 6.626 \cdot 10^{-27}$  erg·s è la costante di Planck. Lo spettro di una stella è però modificato da righe in emissione e in assorbimento, le quali sono una traccia diretta della presenza di determinati elementi negli strati stellari esterni. L'ultimo capitolo si focalizza sul trasporto di energia tramite neutrini, particelle che raramente interagiscono con la materia e che quindi possono giungere facilmente sulla Terra. Le stelle sono tra le fonti principali di neutrini, i quali, in casi particolari, possono rappresentare grosse perdite di energia per gli interni stellari. La maggior parte di quelli che vengono rilevati sulla Terra sono però prodotti direttamente nella sua atmosfera tramite l'interazione con raggi cosmici, i quali possono provenire anche da sorgenti extragalattiche e di conseguenza possono trasportare grandi quantità di energia. Concludendo, l'elaborato non racchiude, per ovvi motivi, ogni tipo di meccanismo di trasporto esistente nell'universo, ma tratta i meccanismi che caratterizzano i suoi elementi primi, ovvero le stelle, allargandosi poi alla trattazione dei neutrini, i quali fanno da ponte tra le stelle e l'intero cosmo.

# 1 Produzione dell'energia

Prima di addentrarsi nei principali meccanismi di trasporto dell'energia in astrofisica, è necessario esporre in maniera sintetica in che modo viene prodotta energia e soprattutto con che tasso essa viene prodotta. In una stella, la principale fonte di energia sono le *reazioni termonucleari*, ovvero reazioni nucleari indotte dal moto termico di nuclei atomici, detti ioni. Essi sono formati da  $Z$  protoni e da  $N$  neutroni, i quali sommandosi producono il numero di massa atomica  $A$ ; gli elementi con uguale  $Z$  e diverso  $N$  si dicono isotopi. Per un nucleo composto da  $Z + N$  nucleoni, l'energia di legame del nucleo è

$$E(Z, N) = [Zm_p + Nm_n - m(Z, N)]c^2 \quad (1.1)$$

dove  $m_p = 1.672 \cdot 10^{-24}$  g è la massa del protone,  $m_n = 1.675 \cdot 10^{-24}$  g è la massa del neutrone e  $m$  è la massa del nucleo, la quale risulta essere inferiore della somma di tutti i nucleoni che lo costituiscono. Difatti, quando si forma un nuovo nucleo stabile, una certa frazione di massa  $\Delta m$  viene trasformata in energia  $E(Z, N) = \Delta mc^2$ , la quale è la stessa energia che bisogna fornire ad un nucleo per spaccarlo nelle singole particelle (nucleoni) che lo costituiscono. Un modo per confrontare l'energia di legame di diverse specie atomiche è quello di dividerla per il valore  $A$ : in questo modo, si può ottenere un andamento preciso di  $E(Z, N)$  all'aumentare di  $A$  (**Figura 1.1**), andamento che porta con sé importanti conseguenze sulla produzione di energia nelle stelle. Gli atomi del gruppo del ferro (Fe) hanno i nuclei più legati, ciò significa che quando si formano danno la massima perdita di massa frazionaria, ovvero rilasciano la massima energia. Ci sono anche elementi, come  ${}^4\text{He}$ , che sono molto più stabili degli elementi adiacenti e dunque presentano un picco nell' $E(Z, N)$ . L'andamento crescente dell'energia di legame a sinistra del Fe fa capire che una reazione di fusione tra elementi porterebbe ad un rilascio di energia, mentre gli elementi a destra del Fe sono sempre meno stabili all'aumentare di  $A$ , dunque servirebbe energia per formarli tramite fusione. L'unico modo per produrre energia con essi è tramite la loro fissione in elementi più leggeri. Si considera quali sono le forze in gioco che favoriscono o si oppongono all'innesco delle reazioni termonucleari:

- *interazione forte*, responsabile della formazione di nuclei stabili. Nonostante la forza, ha un piccolo raggio di azione ( $10^{-13}$  cm);
- *repulsione elettrostatica*, la quale varia come  $r^{-2}$ .

Man mano che due nuclei si avvicinano, la repulsione fra essi cresce sempre di più, fino a che non entra in gioco l'interazione forte e quindi la fusione. Per far sì che essa avvenga, i nuclei devono superare la barriera di potenziale di repulsione Coulombiana (**Figura 1.2**), la cui altezza è direttamente proporzionale a  $Z$ : più protoni ha l'elemento, più la barriera è ripida e difficile da superare. In generale, considerando il caso favorevole di  $Z = 1$ , l'energia della barriera ( $E_C$ ) risulterebbe essere 1000 volte maggiore dell'energia media di una particella ( $E_T = \frac{3}{2}kT$ , con  $T = 10^7$  K). La situazione sarebbe dunque davvero critica se fosse necessario che tutte le particelle avessero  $E_T > E_C$ , ma la realtà dice che le reazioni termonucleari possono avvenire più frequentemente di quanto prevede la meccanica classica! Questo perché, in primis, nonostante l'energia media delle particelle sia minore di  $E_C$ , esistono comunque alcune particelle che possiedono un'energia superiore alla media. Oltre a ciò, la meccanica quantistica suggerisce che le interazioni possano avvenire anche ad energie minori di  $E_C$  tramite l'*effetto Tunnel*, il quale permette ad una particella di attraversare la barriera.

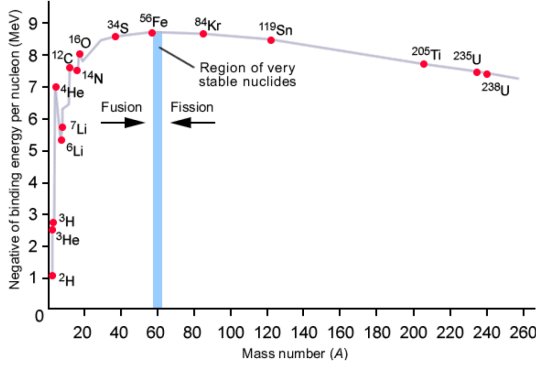


Figura 1.1: Energia di legame per nucleone

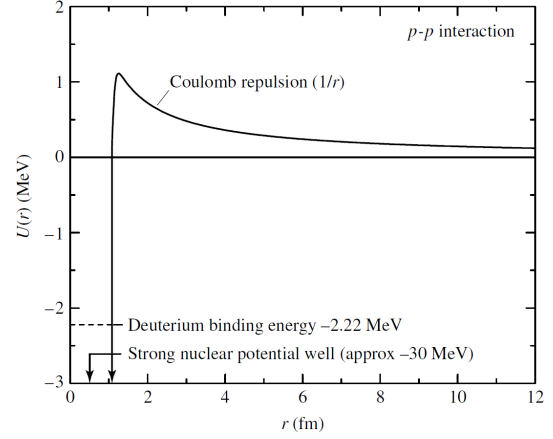


Figura 1.2: Barriera di potenziale (da [1])

Il calcolo del tasso di produzione energetica ( $\epsilon$ ) è molto complesso in quanto dipende da molti fattori, in particolare dalle sezioni d'urto che variano in modo considerevole da un tipo di reazione ad un altro. Per ciascun ciclo (catena) di reazioni si dovrebbe tenere conto di ogni componente, ma spesso ci si limita a considerare la reazione che condiziona l'intero ciclo, ovvero quella che ha il tempo più lungo. Il coefficiente  $\epsilon$  è dato dalla sommatoria delle energie prodotte dai processi che intervengono in un dato ciclo di  $n$  reazioni, ovvero

$$\epsilon = \sum_{i=1}^n E_i x_1 x_2 c_i \rho T^{-\frac{2}{3}} e^{-1.89 \left( \frac{E_0}{kT} \right)^{\frac{1}{3}}} \left[ \frac{\text{erg}}{\text{g} \cdot \text{s}} \right] \quad (1.2)$$

dove  $E$  rappresenta l'energia prodotta dalla singola reazione,  $c$  è una costante che dipende dal nuovo nucleo creato,  $x_1 x_2$  le abbondanze degli elementi interagenti,  $E_0$  la caratterizzazione in termini energetici del potenziale di repulsione e dipendente perciò dai nuclei coinvolti. Si nota inoltre la presenza della densità  $\rho$  e della temperatura  $T$ , caratteristiche dell'ambiente. In una stella, la prima fonte di produzione di energia deriva dalla fusione di  $^1\text{H}$  in  $^4\text{He}$ , la quale però avviene solamente quando la temperatura del nucleo stellare raggiunge i  $10^7$  K. Ci sono due possibilità: (1) diretta ma non simultanea fusione di 4 protoni per formare un nucleo di  $^4\text{He}$ ; (2) fusione indiretta di 4 protoni con nuclei più pesanti ed eventuale emissione di un nucleo di  $^4\text{He}$ . Il primo va sotto il nome di *catena Protone-Protone* (PPI, PPII e PPIII in base al tipo di interazioni intermedie), il secondo di *ciclo CNO*; la catena più efficiente è la PPI, il cui budget energetico è di 26 MeV. In base alla fase evolutiva nella quale si trova la stella, vengono innescate reazioni differenti che possono coinvolgere, oltre la produzione di  $^4\text{He}$ , anche la produzione di  $^{12}\text{C}$ , tramite il processo  $3\alpha$ , e/o di elementi più pesanti fino al  $^{56}\text{Fe}$ .

Se si considera una stella come un sistema autogravitante, formata da gusci sferici di spessore  $dr$ , e  $L(r)$  la quantità totale di energia liberata in un secondo dalla massa posta ad una distanza  $r$  dal centro della stella, si ottiene

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon \quad (1.3)$$

che rappresenta l'*equazione del bilancio energetico* per ogni guscio stellare. Essa afferma che l'energia persa per irraggiamento dev'essere bilanciata da quella prodotta negli interni stellari. Gli strati che contribuiscono a  $L(r)$  sono solo quelli più interni dove si sviluppano le reazioni termonucleari, mentre quelli più esterni si occupano solo del trasferimento di energia sulla superficie.

## 2 Meccanismi di trasporto nelle stelle

Tre differenti meccanismi di trasporto operano negli interni stellari. Il *trasporto radiativo* fa sì che l'energia prodotta dalle reazioni termonucleari e dalla gravità possa essere trasportata in superficie dai fotoni, i quali vengono assorbiti e riemessi in direzioni casuali nel momento in cui entrano in contatto con la materia; questo suggerisce che l'opacità del materiale deve giocare un ruolo importante in questo processo. La *convezione* può essere un meccanismo di trasporto assai efficiente in diverse regioni stellari, con caldi elementi di massa che portano l'energia in eccesso verso l'esterno, mentre la massa più fredda cade verso l'interno. Infine, la *conduzione* trasporta l'energia tramite gli elettroni che collidono con altre particelle. Sebbene essa sia talvolta un meccanismo importante in alcuni ambienti stellari, generalmente può essere trascurata nella maggior parte delle stelle in tutto il corso della loro vita.

### 2.1 Trasporto radiativo

Il trasporto di energia per radiazione dipende dall'emissione di fotoni in regioni più calde e dall'assorbimento di questi nelle regioni relativamente più fredde. Il flusso di energia verso l'esterno dipende in primo luogo dal *gradiente termico*  $\nabla T$ . Difatti, una temperatura costante all'interno della stella significherebbe che essa si trovi all'equilibrio termico (TE), in cui tanta radiazione viene assorbita quanto ne viene emessa: ciò porterebbe all'assenza di un flusso di radiazione verso l'esterno. Oltre a ciò, il flusso di energia dipende anche da altre quantità legate alla radiazione, ovvero il *libero cammino medio*, e alla materia che interagisce con la radiazione, ovvero l'*opacità*.

#### 2.1.1 Libero cammino medio

Il libero cammino medio dei fotoni ( $\ell$ ) viene definito come la distanza percorsa da un fotone prima di incontrare  $n$  particelle per unità di volume

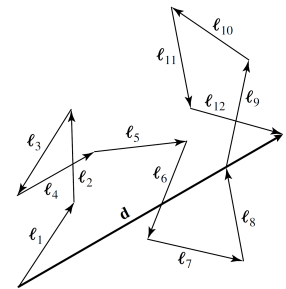
$$\ell = \frac{1}{n\sigma} \quad (2.1)$$

dove  $\sigma$  è la sezione d'urto tra un fotone e una particella. Quando i fotoni si diffondono verso l'alto attraverso il materiale stellare, seguono un percorso casuale. La **Figura 2.1** mostra un fotone che subisce uno spostamento netto dato dal vettore  $\mathbf{d}$ , come risultato dell'esecuzione di un numero elevato  $N$  di scambi diretti casualmente, ciascuno lungo  $\ell$ . Dato  $\mathbf{d} = \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_N$ , se si considera il prodotto scalare di  $\mathbf{d}$  con sé stesso si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} &= \ell_1 \cdot \ell_1 + \ell_1 \cdot \ell_2 + \dots + \ell_1 \cdot \ell_N + \ell_2 \cdot \ell_1 + \ell_2 \cdot \ell_2 \\ &+ \dots + \ell_2 \cdot \ell_N + \dots + \ell_N \cdot \ell_1 + \ell_N \cdot \ell_2 + \dots + \ell_N \cdot \ell_N \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \ell_i \cdot \ell_j \end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned} d^2 &= N\ell^2 + \ell^2 [\cos \theta_{12} + \cos \theta_{13} + \dots + \cos \theta_{1N} + \cos \theta_{21} + \cos \theta_{23} \\ &+ \dots + \cos \theta_{2N} + \dots + \cos \theta_{N1} + \cos \theta_{N2} + \dots + \cos \theta_{N(N-1)}] \\ &= N\ell^2 + \ell^2 \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \cos \theta_{ij} \end{aligned}$$



**Figura 2.1:** Vettore  $\mathbf{d}$  ([1])

dove  $\theta_{ij}$  è l'angolo tra i vettori  $\ell_i$  e  $\ell_j$ . Per un gran numero di scambi diretti casualmente, la somma di tutti i termini col coseno tende a 0. Da ciò, per un percorso aleatorio, lo spostamento  $d$  è collegato con il libero cammino medio  $\ell$ , tramite

$$d = \ell\sqrt{N} \quad (2.2)$$

da cui si comprende che il trasporto dell'energia in una stella tramite radiazione può essere assai inefficiente. Nel momento in cui un fotone segue il suo percorso tortuoso verso la superficie della stella, esso impiega 100 scambi per percorrere una distanza di  $10\ell$ , 10000 scambi per attraversare  $100\ell$  e così via.

### 2.1.2 Opacità

Il trasporto radiativo è essenzialmente controllato dal coefficiente di assorbimento di massa  $\kappa$ , altresì noto come opacità, ovvero una misura della resistenza offerta dalla materia al passaggio della radiazione. I principali processi atomici che contribuiscono alla costruzione dell'opacità del materiale stellare sono:

- 1) *Assorbimento Legato-Legato* (BB), in cui un elettrone è in uno stato di energia  $E_1$  che assorbe un fotone e si porta in uno stato di energia  $E_2$ . Il fotone, per produrre questa transizione, deve avere una frequenza  $\nu_{BB}$  tale che  $h\nu_{BB} = E_2 - E_1$ . Questo è un tipo di processo selettivo, dato che la transizione di un elettrone da un dato livello ad uno superiore richiede sempre un fotone di data frequenza. Questo processo è responsabile delle righe spettrali nelle atmosfere. Negli interni stellari è poco importante visto che gran parte degli atomi sono ionizzati (e quindi pochi elettroni si trovano nello stato legato);
- 2) *Assorbimento Legato-Libero* (BF), in cui un elettrone, posto in uno stato legato di energia  $E_1$ , assorbe un fotone e può posizionarsi su un'orbita libera (di energia  $E_3$ ). Questo processo è detto "fotoionizzazione" e per far sì che avvenga è necessario che  $h\nu_{BF} = E_3 - E_1 > \chi_{ion}$  (= potenziale d'attivazione). L'elettrone, a seconda delle condizioni dell'ambiente in cui si viene a trovare, potrà poi perdere parte della sua energia cinetica a causa della collisione con le particelle circostanti e potrà essere ricatturato da un altro atomo (ricombinazione), emettendo un fotone di energia minore. Questo processo degrada l'energia;
- 3) *Assorbimento Libero-Libero* (FF), dove un elettrone libero con energia  $E_3$  assorbe un fotone di energia  $h\nu_{FF} = E_4 - E_3$  e si porta su un altro stato libero di energia  $E_4$ . In questo caso non ci sono restrizioni per l'energia del fotone;
- 4) *Scattering* (E), il quale, classicamente, è rappresentabile con una collisione tra due particelle (fotone-elettrone). Se l'energia del fotone di frequenza  $\nu_E$  è tale che  $h\nu_E \ll mc^2$ , allora la particella praticamente non si muove; questo vale quasi sempre negli interni stellari, tranne nelle zone ad altissima temperatura. L'effetto di questo processo è di ritardare l'uscita del fotone dalla stella perché ne viene continuamente cambiata la direzione, andando a diminuire l'intensità del fascio di radiazione nella direzione di propagazione.

Per gli interni stellari, dunque, il coefficiente  $\kappa$  totale ( $\kappa_\nu$ ) può essere scritto come segue

$$\kappa_\nu = \kappa_{BF}(\nu) + \kappa_{FF}(\nu) + \kappa_E \quad (2.3)$$



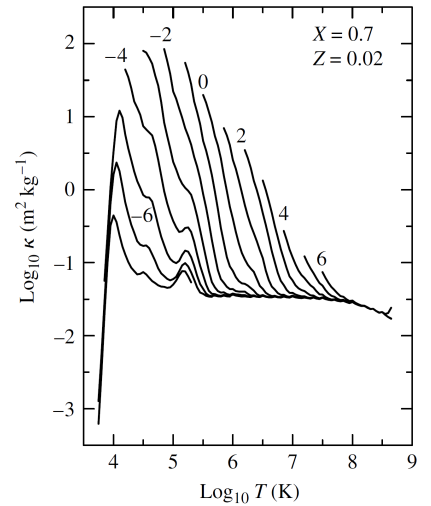
Il suo valore si basa sulla sezione d'assorbimento di un fotone di data frequenza per ciascun atomo, oltre a tenere conto della miscela di molecole che vanno a costituire le diverse sezioni degli interni stellari. Difatti, ad alte temperature, H ed He sono completamente ionizzati: essi contribuiscono poco all'assorbimento BF ma forniscono gli elettroni liberi dai quali dipendono l'assorbimento FF e lo scattering. Per quanto riguarda  $\kappa_{\text{BF}}$  e  $\kappa_{\text{FF}}$ , queste dipendono non solo dalla composizione chimica del materiale stellare, ma anche dalle caratteristiche macroscopiche dell'ambiente quali la densità  $\rho$  e la temperatura  $T$ . In particolare, si esplicitano le *leggi di Kramers*

$$\kappa_{\text{BF}}(\nu) \propto 10^{25} Z(1 + X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \quad (2.4a)$$

$$\kappa_{\text{FF}}(\nu) \propto 10^{22} (X + Y)(1 + X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \quad (2.4b)$$

$$\kappa_{\text{E}} \propto 0.2(1 + X) \quad (2.4c)$$

dove  $X$  si riferisce all'abbondanza in massa dell'H,  $Y$  a quella dell'He e  $Z$  a quella dei metalli (ovvero gli elementi più pesanti dell'He).  $\kappa_{\text{BF}}$  dipende da  $Z$  perché negli interni stellari H e He sono quasi sempre ionizzati e gli elementi pesanti sono i soli che hanno ancora elettroni per produrre transizioni BF.  $\kappa_{\text{FF}}$  dipende invece da  $(X + Y)$  in quanto H e He ionizzati contribuiscono in maniera significativa al numero di elettroni nel plasma stellare. Nel caso FF, il coefficiente numerico è molto più piccolo che in BF, perciò  $\kappa_{\text{FF}}$  prevale su  $\kappa_{\text{BF}}$  solo in stelle povere di metalli (basso  $Z$ ), che nel caso della Via Lattea sono le stelle vecchie della PopII. Riguardo  $\kappa_{\text{E}}$ , essa non dipende da  $\nu$  e prevale sulle altre due opacità quando esse si abbassano a causa della densità bassa e/o della temperatura alta. In generale, tutte e tre le opacità dipendono da  $(1 + X)$  poiché dipendono tutte dal numero di elettroni per unità di volume  $N_e$ , il quale dipende da  $(1 + X)$  tramite il peso molecolare medio  $\mu$ . La **Figura 2.2** mostra l'andamento di diversi valori di  $\text{Log} \rho$  in funzione di  $\text{Log} T$  e  $\text{Log} \kappa$ . All'aumentare della densità aumenta l'opacità, il cui rapido aumento a  $\text{Log} T \sim 4$  è dovuto alla ionizzazione dell'H e alla 1° ionizzazione dell'He. Il declino dopo il picco è determinato dall'andamento di  $\kappa \propto T^{-3.5}$  (BF e FF). La 2° ionizzazione dell'He a  $T \sim 4 \cdot 10^4$  K aumenta il numero di elettroni liberi e produce la "gobba" visibile a  $\text{Log} T \sim 4.6$ . In generale, a basse temperature ci sono pochi ioni, ovvero pochi elettroni per FF e scattering, oltre al fatto che i fotoni sono poco energetici per ionizzare gli atomi; l'opacità cresce con  $T$ . A temperature intermedie viene raggiunta la massima opacità per quanto riguarda BF e FF. Con l'avvento delle alte temperature, l'opacità cala con  $T^{-1}$ , rimangono pochi elettroni legati e di conseguenza l'assorbimento BF diminuisce;  $\kappa$  tende ad un valore costante dovuto allo scattering. Per ottenere un'opacità totale mediata sulle frequenze, si calcola  $\kappa$  tramite media pesata



**Figura 2.2:**  $\text{Log} \kappa \propto (\text{Log} T, \text{Log} \rho)$  ([1])

$$\frac{1}{\bar{\kappa}} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB(\nu, T)}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB(\nu, T)}{dT} d\nu} \quad (2.5)$$

dove  $B(\nu, T)$  è la funzione di Planck del campo di radiazione. La funzione  $\bar{\kappa}$  ottenuta in (2.5) è detta *opacità media di Rosseland* e andrà a sostituire la  $\kappa_\nu$  di (2.3) nell'equazione del trasporto radiativo.

### 2.1.3 Profondità ottica

Riprendendo l'equazione (2.1), il libero cammino medio  $\ell$  per i fotoni può essere riscritto in funzione dell'opacità  $\kappa_\lambda$

$$\ell = \frac{1}{\kappa_\lambda \rho} \quad (2.6)$$

Si noti che il libero cammino medio è diverso per fotoni di diverse lunghezze d'onda. È conveniente definire una *profondità ottica*  $\tau_\lambda$ , misurata a ritroso lungo un raggio di luce

$$d\tau_\lambda = -\kappa_\lambda \rho ds \quad (2.7)$$

dove  $s$  è la distanza misurata lungo il percorso del fotone nella sua direzione di moto (**Figura 2.3**). La differenza di profondità ottica tra la posizione iniziale di un raggio di luce ( $s = 0$ ) e la sua posizione finale dopo aver percorso una distanza  $s$  è

$$\Delta\tau_\lambda = \tau_{\lambda,f} - \tau_{\lambda,0} = - \int_0^s \kappa_\lambda \rho ds \quad (2.8)$$

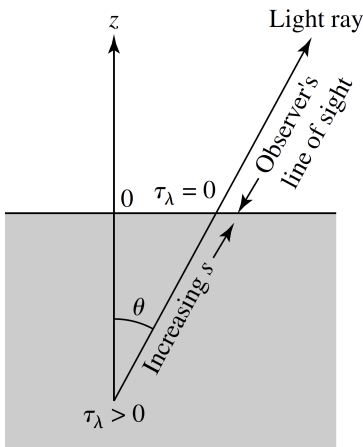
Si noti che  $\Delta\tau_\lambda < 0$ : quando la luce si avvicina a un osservatore, sta viaggiando attraverso la materia con profondità ottica decrescente. Si può assumere che gli strati più esterni di una stella siano a  $\tau_\lambda = 0$  per tutte le lunghezze d'onda, dopo di che la luce viaggia senza ostacoli verso gli osservatori sulla Terra. Insieme a questa definizione di  $\tau_\lambda = 0$ , l'equazione (2.8) dà la profondità ottica iniziale,  $\tau_{\lambda,0}$ , di un raggio di luce che ha percorso una distanza  $s$  per raggiungere la sommità dell'atmosfera:

$$0 - \tau_{\lambda,0} = - \int_0^s \kappa_\lambda \rho ds \implies \tau_\lambda = \int_0^s \kappa_\lambda \rho ds \quad (2.9)$$

Il pedice "0" è stato eliminato con la consapevolezza che  $\tau_\lambda$  è la profondità ottica della posizione iniziale del raggio, ad una distanza  $s$  ( $s > 0$ ) dalla sommità dell'atmosfera. Per il caso di puro assorbimento, si trova che il decrescere dell'intensità di un raggio che viaggia attraverso un gas da una profondità ottica  $\tau_\lambda$  per raggiungere l'osservatore è data da

$$I_\lambda = I_{\lambda,0} e^{-\tau_\lambda} \quad (2.10)$$

Quindi, se la profondità ottica del punto di partenza del raggio è  $\tau_\lambda = 1$ , l'intensità del raggio decrescerà di un fattore  $e^{-1}$  prima di fuggire dalla stella. Si può dunque pensare



**Figura 2.3:** Profondità ottica  $\tau_\lambda$  ([1])

Per esempio, l'atmosfera terrestre è otticamente sottile alle lunghezze d'onda visibili (si possono vedere le stelle), ma otticamente spesse alle lunghezze d'onda dei raggi X.

### 2.1.4 Trasporto radiativo negli interni stellari

Si procede nel ricavare l'equazione del trasporto radiativo, la quale rappresenta una delle relazioni fondamentali degli interni stellari. Si considera la pressione di radiazione  $P_{\text{rad}}$  e la si deriva rispetto al raggio della stella  $r$ , in modo da ottenere l'espressione per il gradiente di pressione

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{3}aT^4 \implies \frac{dP_{\text{rad}}}{dr} = \frac{4}{3}aT^3 \frac{dT}{dr} \quad (2.11)$$

dove  $a = \frac{4\sigma}{c} = 7.564 \cdot 10^{-15} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$ , dipendente dalla costante di Stefan-Boltzmann  $\sigma = 5.6 \cdot 10^{-5} \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ . Il gradiente di pressione può però essere espresso anche come

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{dr} = -\frac{\bar{\kappa}\rho}{c}F_{\text{rad}} \quad (2.12)$$

in cui  $\bar{\kappa}$  è l'opacità calcolata in (2.5) e  $F_{\text{rad}}$  è il flusso di radiazione. Eguagliando (2.11) e (2.12) si ottiene

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{\bar{\kappa}\rho}{T^3} F_{\text{rad}} \quad (2.13)$$

Infine, ricordando che  $F_{\text{rad}} = \frac{L_r}{4\pi r^2}$ , si ottiene l'espressione finale del *gradiente termico in caso di trasporto radiativo*

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{\text{rad}} = -\frac{3}{4ac} \frac{\bar{\kappa}\rho}{T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2} \quad (2.14)$$

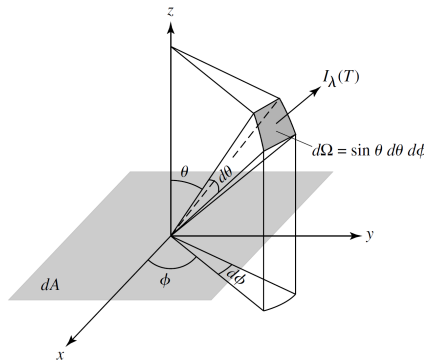
Nel momento in cui o il flusso o l'opacità aumentano, il valore assoluto del gradiente di temperatura cresce. Si considera il valore assoluto perché il gradiente diminuisce all'aumentare della coordinata  $r$ .

### 2.1.5 Trasporto radiativo nell'atmosfera stellare

La radiazione elettromagnetica che si analizza tramite gli spettri proviene dall'atmosfera stellare, cioè dagli strati trasparenti più esterni. Il trasporto radiativo nelle atmosfere stellari assume dunque un ruolo fondamentale nello studio degli spettri, ma per trattarlo bisogna prima definire alcune quantità. La prima è l'*intensità specifica* (**Figura 2.4**)

$$I_\lambda = \frac{E_\lambda d\lambda}{d\lambda dt dA \cos\theta d\Omega} \left[ \frac{\text{erg}}{\text{s} \cdot \text{cm}^3 \cdot \text{sr}} \right] \quad (2.15)$$

ovvero la quantità di radiazione avente una lunghezza d'onda tra  $\lambda$  e  $\lambda + d\lambda$  che passa nell'unità di tempo  $dt$  attraverso l'area  $dA$  e in un angolo solido  $d\Omega (= \sin\theta d\theta d\phi)$ .



**Figura 2.4:** Intensità specifica  $I_\lambda$  ([1])

Oltre ad  $I_\lambda$ , un'altra grandezza fondamentale è il già citato *flusso di radiazione*, ovvero l'energia netta che passa per ogni secondo attraverso l'unità di area in un dato intervallo di lunghezza d'onda  $\lambda, \lambda+d\lambda$ . Il flusso è strettamente legato all'intensità specifica, difatti

$$F_\lambda d\lambda = \int I_\lambda d\lambda \cos \theta d\Omega = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} I_\lambda d\lambda \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (2.16)$$

da cui si evince che il flusso è l'intensità specifica integrata su tutte le direzioni. Per poter ora derivare l'equazione del trasporto radiativo nelle atmosfere stellari, bisogna analizzare tutti quei processi che vanno a modificare il flusso di radiazione durante il suo viaggio verso l'atmosfera:

- *processi di emissione*, che tendono ad aumentare l'intensità della radiazione ad una data  $\lambda$ . L'aumento d'intensità del "beam" di energia (raggio di luce)  $dI_\lambda$  è proporzionale a  $ds$ , alla densità del gas  $\rho$  e al coefficiente d'emissione  $j_\lambda$

$$dI_\lambda = j_\lambda \rho ds \quad (2.17)$$

- *processi di assorbimento*, in ognuno dei quali un fotone è sottratto alla direzione di propagazione del flusso di radiazione, sia perché è stato assorbito o perché è stato deviato. Il parametro che tiene conto dell'assorbimento è l'opacità  $\kappa_\lambda$

$$dI_\lambda = -I_\lambda \kappa_\lambda \rho ds \quad (2.18)$$

Schematicamente, in base ai due ingredienti che determinano la variazione di intensità del fascio di radiazione ((2.17) e (2.18)), si può scrivere

$$dI_\lambda = -I_\lambda \kappa_\lambda \rho ds + j_\lambda \rho ds \quad (2.19)$$

L'intensità del fascio di radiazione cambia a causa del fatto che alcuni fotoni vengono assorbiti e sostituiti da fotoni emessi dal materiale locale (gas). Il tasso con cui i due processi (emissione ed assorbimento) avvengono, determina quanto rapidamente l'intensità del flusso di radiazione varia. Se si divide tutto per  $-\kappa_\lambda \rho ds$ , ovvero per  $d\tau_\lambda$  tramite (2.7), si ottiene l'equazione del trasporto nelle atmosfere stellari

$$\frac{dI_\lambda}{d\tau_\lambda} = I_\lambda - S_\lambda \quad (2.20)$$

dove  $S_\lambda = \frac{j_\lambda}{\kappa_\lambda}$  ed è chiamato *funzione sorgente*. Questo parametro descrive come i fotoni vengono rimossi dal beam di radiazione e rimpiazzati da fotoni generati localmente dal gas. Per una trattazione formale del flusso di energia nell'atmosfera, la relazione (2.20) viene modificata introducendo in primis l'*approssimazione degli strati piani-paralleli*, in cui si considera l'atmosfera come se fosse formata da strati piani e paralleli tra loro. Grazie a questa approssimazione, è possibile definire la *profondità ottica verticale*  $\tau_{\lambda,v} = \tau_\lambda \cos \theta$ , ovvero la proiezione di  $\tau_\lambda$  sull'asse  $z$  (perpendicolare allo strato atmosferico, vedi **Figura 2.3**);  $\tau_{\lambda,v}$  è una vera coordinata lungo l'atmosfera e non dipende dalla direzione del raggio di luce. Oltre a ciò, si sostituisce  $\kappa_\lambda$  con la  $\bar{\kappa}$  ottenuta in (2.5), cosicché  $\tau_{\lambda,v}$  non dipenda più da  $\lambda$ : è l'*approssimazione di atmosfera grigia*. L'equazione finale è quindi

$$\cos \theta \frac{dI}{d\tau_v} = I - S \quad (2.21)$$

## 2.2 Trasporto conduttivo

All'interno delle stelle la conduzione è molto inefficiente, in quanto gli elettroni che trasportano l'energia possono percorrere solo una breve distanza senza scontrarsi con altre particelle. Difatti, in condizioni di gas perfetto, il libero cammino medio  $\ell$  dei fotoni è maggiore di quello degli elettroni, rendendo il trasporto radiativo più efficiente. Nella materia degenere, invece, gli elettroni non possono cedere energia ad altre particelle meno energetiche visto che tutti gli stati energetici più bassi sono occupati: il libero cammino medio degli elettroni diventa grande e il trasporto di energia efficiente. La conduzione diventa dunque importante solo nelle stelle compatte, nane bianche e stelle di neutroni, dove il libero cammino medio dei fotoni è estremamente breve confrontato a quello degli elettroni. Il supporto strutturale dell'interno di una nana bianca o di alcune supergiganti rosse è dovuto proprio alla presenza di elettroni degeneri, i quali impediscono il collasso dell'interno e sono i principali mezzi con cui l'energia viene trasportata verso l'esterno. Una buona approssimazione al trasferimento di calore tramite elettroni è la *legge di diffusione di Fick*

$$F_{\text{cond}} = -D_e \frac{dT}{dr} \quad (2.22)$$

dove  $D_e$  è un coefficiente di diffusione con "e" che sta per elettrone. È conveniente riscrivere (2.22) definendo un'opacità conduttiva,  $\kappa_{\text{cond}}$ , tale che

$$\kappa_{\text{cond}} = \frac{4acT^3}{3D_e\rho} \quad (2.23)$$

Il *flusso conduttivo* diviene dunque

$$F_{\text{cond}} = -\frac{4ac}{3\kappa_{\text{cond}}\rho} T^3 \frac{dT}{dr} \quad (2.24)$$

in modo tale che  $\kappa_{\text{cond}}$  assomigli all'opacità radiativa  $\bar{\kappa}$  definita in (2.5). Tenendo conto anche del fluire dei fotoni nell'interno stellare, il flusso di energia totale, ignorando la convezione, è  $F_{\text{tot}} = F_{\text{rad}} + F_{\text{cond}}$ . Allo stesso modo, anche le opacità sono additive, ovvero

$$\frac{1}{\kappa_{\text{tot}}} = \frac{1}{\bar{\kappa}} + \frac{1}{\kappa_{\text{cond}}} \quad (2.25)$$

da cui

$$F_{\text{tot}} = -\frac{4ac}{3\kappa_{\text{tot}}\rho} T^3 \frac{dT}{dr} \quad (2.26)$$

Si noti che qualunque sia l'opacità minore tra  $\bar{\kappa}$  e  $\kappa_{\text{cond}}$  in (2.25), essa è anche la più importante nel determinare l'opacità totale e quindi il flusso di calore. Nel materiale stellare in condizioni normali,  $\kappa_{\text{cond}}$  è grande rispetto alle opacità radiative (la conduzione è trascurabile) e, in quelle situazioni, solo quest'ultime vanno considerate. Di solito è vero il contrario nel materiale degenere denso.

## 2.3 Trasporto convettivo

Il gradiente di temperatura, dato dalla condizione di solo trasporto radiativo dell'energia, può dar luogo ad una situazione di instabilità che porta all'instaurarsi di moti di materia su larga scala ed al trasporto di energia per convezione. Per semplicità, è possibile pensare agli interni stellari come ad un liquido costituito da tante celle. Dapprima, la resistenza a spostare le celle del liquido è grande e l'attrito (la viscosità) tra le celle è più forte della spinta verso l'alto: la convezione è assente. Appena però il gradiente termico supera un certo valore, allora la spinta verso l'alto aumenta e si innesca la convezione. Qualitativamente, data una cella di liquido che sta salendo, essa risulta essere più calda della materia circostante. Assumendo che essa si espanda adiabaticamente (nessuna perdita di calore verso l'esterno), la cella risulta più leggera del liquido circostante e quindi tende a salire sempre di più, incontrando materia sempre più fredda. Alla fine, essa si dissolve, cedendo tutto il suo calore all'ambiente esterno.

### 2.3.1 Gradiente adiabatico

Per poter descrivere la convezione è necessario prima definire l'espressione del *gradiente adiabatico*, in quanto ora si sta analizzando una bolla convettiva calda di gas che, salendo, si espande adiabaticamente variando di temperatura. Ricordando che l'*equazione di stato per i gas perfetti* è

$$P = \frac{k\rho T}{\mu H} \quad (2.27)$$

dove  $k = 1.4 \cdot 10^{-16}$  erg·K<sup>-1</sup> è la costante di Coulomb e  $H = 1.7 \cdot 10^{-24}$  g è la massa del nucleo di idrogeno (protone). Riscrivendo la (2.27) con i logaritmi e derivando rispetto a  $r$  si ottiene

$$\frac{d\text{Log}P}{dr} = \frac{d\text{Log}\rho}{dr} + \frac{d\text{Log}T}{dr} - \frac{d\text{Log}\mu}{dr} \quad (2.28)$$

Supponendo che  $\mu$  sia costante, si ha

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \implies \frac{dP}{dr} = \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{P}{T} \frac{dT}{dr} \quad (2.29)$$

In condizioni adiabatiche, il gradiente di pressione può essere anche scritto come

$$\frac{dP}{dr} = \gamma \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \implies \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{dr} \quad (2.30)$$

dove  $\gamma$  è il rapporto tra calori specifici (ovvero la quantità di calore necessaria per innalzare, o diminuire, di un valore assegnato la temperatura di una quantità fissata di sostanza) a pressione e a volume costante. Se la parte destra di (2.30) viene sostituita in (2.29) si ricava l'espressione del *gradiente termico adiabatico*

$$\frac{dP}{dr} = \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{dr} + \frac{P}{T} \frac{dT}{dr} \Big|_{\text{ad}} \implies \frac{dT}{dr} \Big|_{\text{ad}} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \quad (2.31)$$

Se si isola  $\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)$  a destra dell'equazione, i termini  $dr$  si elidono a vicenda, permettendo di ottenere l'espressione finale del gradiente adiabatico

$$\frac{dT}{dP} \frac{P}{T} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \implies \frac{d\text{Log}T}{d\text{Log}P} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \implies \nabla_{\text{ad}} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \quad (2.32)$$

Nel caso di gas monoatomico,  $\gamma = \frac{5}{3} \implies \nabla_{\text{ad}} = 0.4$ . Questo valore può però variare in base alla composizione chimica che caratterizza gli strati interni della stella. Difatti, nelle zone a ionizzazione parziale, ci vorrà più calore per aumentare la temperatura dato che parte dell'energia viene spesa a ionizzare il gas. Tutto ciò fa diminuire la  $\gamma$  e di conseguenza anche  $\nabla_{\text{ad}}$ .

### 2.3.2 Criterio di Schwarzschild

A questo punto, è necessario formalizzare il criterio che sarà utilizzato in ogni punto della stella per stabilire se quella regione sia stabile o meno rispetto alla convezione: il *criterio di Schwarzschild*. Preso un elemento di materia ad una certa distanza  $r$  dal centro, ci si immagina che esso subisca uno spostamento radiale verso la superficie della stella in modo adiabatico. Questo elemento si espande finché la pressione dell'elemento non si equilibra con quella esterna: se l'elemento continua a salire, ci sarà un equilibrio instabile e dunque si attiverà la convezione, mentre in caso di equilibrio stabile l'elemento scende e la convezione sarà assente. La condizione di stabilità a livello fisico sussiste dunque quando la cella (densità  $\rho^*$  e temperatura  $T^*$ ), è più pesante dell'ambiente circostante (densità  $\rho$  e temperatura  $T$ ):  $\rho^* > \rho$  è la condizione di stabilità rispetto al trasporto convettivo. Per esprimere questa condizione in termini di gradienti di temperatura, si suppone che il gas sia inizialmente in quasi equilibrio termico, con  $T^* \sim T$  e  $\rho^* \sim \rho$ . Si suppone inoltre che la bolla si espanda adiabaticamente e che la pressione della bolla e del gas circostante siano uguali in tutti i tempi. Ora, poiché si assume che la bolla si sia mossa di un'infinitesima distanza, è possibile esprimere le densità finali in termini di quelle iniziali più i loro gradienti, tramite espansione di Taylor. Se le densità iniziali all'interno e all'esterno della bolla rimangono quasi uguali, le densità finali espansive al primo ordine possono essere sostituite nella condizione per l'avvento della convezione, ovvero  $\rho^* < \rho$ . Si ottiene così

$$\left. \frac{d\rho}{dr} \right|_* < \frac{d\rho}{dr} \quad (2.33)$$

La parte sinistra, riferita alla bolla di materia che si muove in condizioni adiabatiche, può essere riscritta utilizzando (2.30); la parte destra corrisponde al gradiente di densità dell'ambiente e si rifà alla (2.29). Ricordando che le pressioni di bolla e gas circostante sono uguali in tutti i tempi (e quindi anche i gradienti) si ottiene

$$\left( \frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{dP}{dr} < - \frac{P}{T} \frac{dT}{dr} \quad (2.34)$$

dove il gradiente di temperatura è riferito al gas circostante. Moltiplicando per la quantità negativa  $-\frac{T}{P}$  si inverte la direzione della disequazione, dando

$$\left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} > \frac{dT}{dr} \quad (2.35)$$

La parte sinistra corrisponde al gradiente termico adiabatico tramite (2.31) e, dato che  $\frac{dT}{dr} < 0$ , se si considera il valore assoluto dei gradienti, il verso della disequazione cambia ancora. Dunque, per avere la convezione, il criterio è

$$\left| \frac{dT}{dr} \right| > \left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad}} \quad (2.36)$$

La disequazione (2.34) può essere usata per ottenere un criterio di Schwarzschild più compatto tramite il gradiente adiabatico. Dal momento che  $\frac{dT}{dr} < 0$  e  $\frac{1}{\gamma} - 1 < 0$

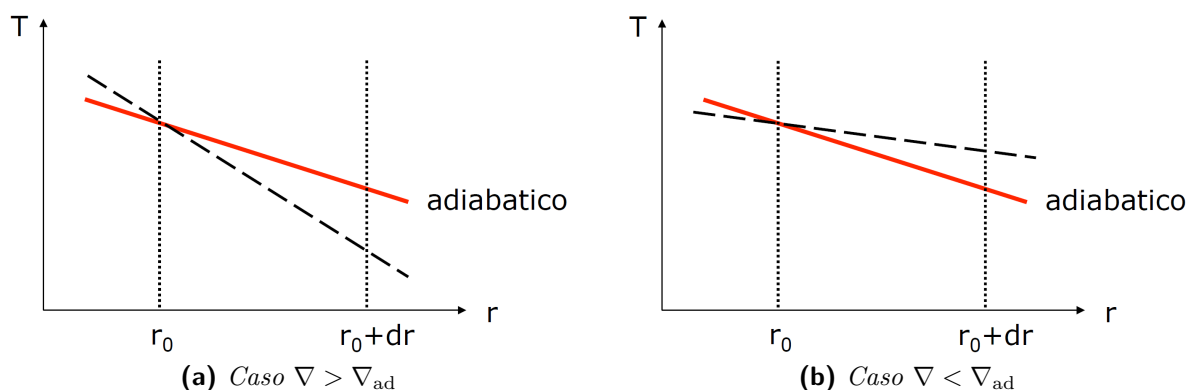
$$\frac{T}{P} \left( \frac{dT}{dr} \right)^{-1} \frac{dP}{dr} < -\frac{1}{\gamma^{-1} - 1} \implies \frac{P}{T} \frac{dT}{dP} > \frac{\gamma - 1}{\gamma} \quad (2.37)$$

Nella parte destra si riconosce il gradiente adiabatico tramite (2.32), dunque il criterio di Schwarzschild per la convezione vale

$$\nabla > \nabla_{\text{ad}} \quad (2.38)$$

$\left| \frac{dT}{dr} \right|$  (e quindi  $\nabla$ ) può essere approssimato al gradiente radiativo, il che operativamente si traduce nel calcolare il gradiente radiativo in ogni strato della stella e confrontarlo con il valore del gradiente adiabatico, al fine di capire se la convezione avviene oppure no (**Figura 2.5**). In generale, le condizioni che favoriscono l'innescio della convezione sono:

- *opacità grande*, la quale implica un grande gradiente radiativo;
- *regioni a ionizzazione parziale*, le quali rendono  $\nabla_{\text{ad}}$  piccolo;
- *regioni centrali*, in cui il tasso di produzione di energia nucleare dipende fortemente da  $T$ , dunque un forte  $F_{\text{rad}}$  e un gradiente radiativo grande.



**Figura 2.5:** Confronto tra gradienti negli interni stellari (da [4])

### 2.3.3 Equazione del flusso convettivo

È importante sottolineare che non esiste, al momento, una trattazione esatta del moto turbolento a cui sono soggette le celle convettive. È dunque necessario introdurre approssimazioni e parametrizzazioni del libero cammino medio delle celle convettive, la più utilizzata delle quali va sotto il nome di *Mixing length theory*. Il moto degli elementi convettivi è parametrizzato da una lunghezza di rimescolamento  $\ell$ , ovvero una sorta di distanza media che l'elemento percorre all'interno della regione convettiva prima di dissolversi nell'ambiente circostante.  $\ell$  viene definito in funzione di un parametro libero ( $\alpha$ ) che viene fissato in modo tale che le strutture convettive calcolate riproducano le osservazioni

$$\ell = \alpha \cdot H_p, \quad 0.5 < \alpha < 2 \quad (2.39)$$



dove  $H_p$  è l'altezza di scala di pressione, ovvero la distanza caratteristica entro la quale la pressione si riduce di un e-esimo. Se  $\ell \ll H_p$  la convezione non è efficiente, mentre se  $\ell \gg H_p$  l'elemento convettivo perde significato. Dunque, di solito,  $\ell \sim H_p$  e più alta è  $\alpha$ , più la convezione è efficiente. Una prima formulazione del flusso convettivo è la seguente

$$F_{\text{conv}} = c_p \Delta T \frac{1}{2} \rho v \quad (2.40)$$

dove  $c_p \Delta T$  è l'energia termica per grammo trasportata dalla cella convettiva che si sta spostando a pressione costante, mentre  $\frac{1}{2} \rho v$  è il flusso di massa. L'equazione può essere riscritta in funzione dei gradienti di temperatura: il termine su cui concentrarsi è  $\Delta T$ , ovvero l'eccesso di temperatura della cella rispetto all'ambiente. Esso può essere scritto come

$$\Delta T = \frac{d\Delta T}{dr} \Delta r = \left( \left. \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad}} - \frac{dT}{dr} \right) \ell \quad (2.41)$$

dove  $\frac{d\Delta T}{dr}$  è il *gradiente superadiabatico* e  $\Delta r$  altro non è che  $\ell$  definito in (2.39). Ponendo dunque (2.41) in (2.40), si ha

$$F_{\text{conv}} = \frac{1}{2} \rho v c_p \ell \left( \left. \frac{dT}{dP} \right|_{\text{ad}} - \frac{dT}{dP} \right) \frac{dP}{dr} \frac{P}{T} \frac{T}{P} = \frac{1}{2} \rho v c_p \ell (\nabla_{\text{ad}} - \nabla) \frac{dP}{dr} \frac{T}{P} \quad (2.42)$$

Considerando che  $\frac{1}{H_p} = -\frac{1}{P} \frac{dP}{dr}$ , si ottiene l'equazione finale del *flusso convettivo* in funzione di  $\nabla$

$$F_{\text{conv}} = \frac{1}{2} \rho v c_p \frac{\ell}{H_p} (\nabla - \nabla_{\text{ad}}) T = \frac{1}{2} \rho v c_p \alpha (\nabla - \nabla_{\text{ad}}) T \quad (2.43)$$

È possibile ricavare il valore esatto di  $\nabla$  tramite la somma di  $F_{\text{conv}}$  e  $F_{\text{rad}}$ , con quest'ultimo scritto in funzione di  $\nabla$

$$F_{\text{rad}} = \frac{4ac}{3\kappa\rho} \frac{T^4}{H_p} \nabla \quad (2.44)$$

L'equazione generale del flusso può essere impostata negli strati esterni, dove  $\epsilon = 0$ , utilizzando l'equazione di Stefan-Boltzmann, essendo lo spettro stellare approssimabile a quello di corpo nero

$$F = F_{\text{rad}} + F_{\text{conv}} = \frac{L_r}{4\pi R_{\text{tot}}^2} = \sigma T_e^4 \quad (2.45)$$

dove  $T_e$  è la temperatura superficiale della stella. Sostituendo i due addendi con (2.44) e (2.43) si ottiene

$$\nabla = \frac{\frac{L_r}{4\pi R_{\text{tot}}^2} + \frac{1}{2} \rho v c_p \alpha (\nabla_{\text{ad}}) T}{\frac{4ac}{3\kappa\rho} \frac{T^4}{H_p} + \frac{1}{2} \rho v c_p \alpha T} \quad (2.46)$$

Se la velocità  $v$  tende a 0,  $\nabla$  tende a  $\nabla_{\text{rad}}$ , mentre se  $v$  tende a un valore molto grande fa tendere  $\nabla$  a  $\nabla_{\text{ad}}$ . Si può stimare la velocità  $v$  andando a considerare la forza per unità di volume che agisce su ogni cella, determinando il lavoro svolto e uguagliandolo all'energia cinetica

$$v = \sqrt{2g \frac{\Delta T}{T}} \ell \implies F_{\text{conv}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rho \sqrt{\frac{g}{T}} c_p \left( \frac{d\Delta T}{dr} \right)^{\frac{3}{2}} \ell^2 \quad (2.47)$$

Tramite  $v$  si è potuto ottenere una nuova equazione del flusso convettivo dipendente dal gradiente superadiabatico e da  $\ell$ .

## 3 Trasporto di energia tramite neutrini

Nel 1930 Wolfgang Pauli ipotizzò la creazione, nel decadimento  $\beta$ , di una elusiva particella neutra (non soggetta alle interazioni elettromagnetiche) che non era neanche soggetta alle interazioni nucleari forti; la nuova particella permetteva la conservazione dell'energia e dell'impulso fino a quel momento non verificata. Enrico Fermi chiamò questa particella *neutrino* ( $\nu$ ), il quale oggi si sa essere emesso principalmente dal decadimento  $\beta^+$  e  $\beta^-$ : nel primo caso, è realmente emesso un neutrino (associato ad un elettrone), mentre nel secondo caso la particella emessa è un *antineutrino* ( $\bar{\nu}$ , associato ad un positrone). Nel 1954 fu ideato un esperimento molto complesso che, in tanti mesi di lavoro, portò finalmente alla prova sperimentale dell'esistenza del neutrino; negli anni furono scoperte anche nuove famiglie, tra cui il *neutrino muonico* e *tauonico*.

### 3.1 Neutrini prodotti dalle stelle

Oltre ai tre meccanismi di trasporto dell'energia descritti precedentemente, all'interno delle stelle se ne aggiunge un quarto dalle caratteristiche particolari, ovvero l'emissione e perdita di energia per neutrini. Essi hanno una piccolissima capacità di interagire con la materia (piccola sezione d'urto), al punto tale che una volta prodotti sfuggono dalla stella. La produzione di neutrini rappresenta dunque una perdita netta di energia ed indirettamente un meccanismo di trasporto della stessa di cui si deve tener conto. Durante le fasi cosiddette normali della evoluzione stellare, le reazioni termonucleari principali che producono  $\nu$  sono:

- 1) decadimento  $\beta^-$ ,  $n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}$
- 2) decadimento  $\beta^+$ ,  $p^+ \rightarrow n + e^+ + \nu$

La 2° reazione, endotermica, è quella che avviene durante la produzione di He nelle catene protone-protone e CNO. Per la PPI, l'unico neutrino prodotto porta via con sé circa 0.26 MeV; nelle altre catene i neutrini prodotti sono due e dunque l'energia persa dalla stella è maggiore. In generale, la perdita di energia tramite neutrini negli interni stellari diviene veramente importante soltanto ad alte temperature (intorno ai  $10^9$  K), raggiunte solo da stelle con massa superiore a  $8 M_\odot$ . In questo caso,  $\nu$  è generato direttamente dal plasma stellare tramite quattro processi, ognuno dei quali si verifica solo a certi valori di densità e temperatura (**Figura 3.1**):

- a)  $\nu$  tramite annichilazione,  $e^+ + e^- \rightarrow \nu + \bar{\nu}$
- b)  $\nu$  tramite fotoni,  $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \nu + \bar{\nu}$
- c)  $\nu$  tramite plasmoni,  $\gamma_{pl} \rightarrow e^- + e^+ \rightarrow \nu + \bar{\nu}$
- d)  $\nu$  tramite cattura elettronica,  $p^+ + e^- \rightarrow n + \nu$

La 1° reazione avviene solo in ambienti caldi e densi, altrimenti la coppia elettrone-positrone produrrebbe una coppia di fotoni. La 3° reazione può attivarsi solo in regioni ad alta densità, dove un fotone può comportarsi come un plasmone (quanto di vibrazione del plasma) e produrre la coppia  $e^- + e^+$ . La 4° reazione ha un ruolo chiave nel *processo URCA*, durante le fasi di pre-esplosione delle Supernovae di tipo II: più  $n$  e  $\nu$  vengono prodotti, più la stella si contrae e quindi più  $p^+$  ed  $e^-$  interagiscono tra loro, fino ad arrivare al collasso.

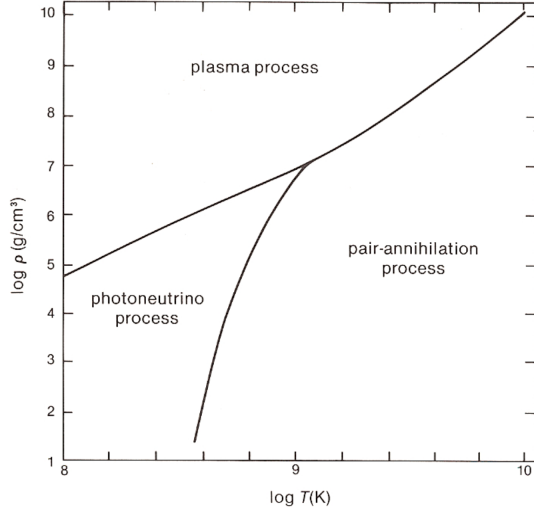


Figura 3.1: Dipendenza di a), b), c) da  $\rho$  e  $T$  ([4])

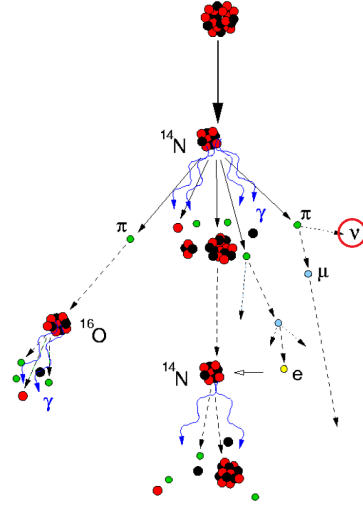


Figura 3.2: Sciame di particelle da un nucleo (da [3])

## 3.2 Neutrini prodotti dai raggi cosmici

La maggior parte dei neutrini che vengono rilevati sulla Terra non provengono dagli interni stellari o dalle Supernovae, ma sono un prodotto secondario dei raggi cosmici. Questi sono particelle (ultra) relativistiche ad alta energia, con un flusso abbastanza costante e uno spettro di energia che va dalla massa a riposo dell'elettrone, 0.511 MeV, fino a  $10^{20}$  eV. La componente dei raggi cosmici che arriva sulla Terra è la *componente primaria*, composta principalmente da protoni e da nuclei privati di elettroni; l'energia trasportata è direttamente proporzionale alla distanza tra la zona di origine e la Terra. Quando un raggio cosmico altamente energetico entra nell'atmosfera, esso perde parte della sua energia interagendo con i nuclei che compongono l'aria: ad alte energie queste interazioni producono particelle, le quali ne vanno a creare altre nuove e così via. Questo processo moltiplicativo è noto come *cascata di particelle* o *sciame* e continua finché l'energia media per particella non raggiunge circa 80 MeV; a questo punto, le interazioni portano all'assorbimento delle particelle e la cascata inizia a morire. La cascata sembra un "pancake" di particelle relativistiche che si muove attraverso l'atmosfera alla velocità della luce. Come si vede in **Figura 3.2**, questo sciame di particelle è la fonte di produzione di neutrini ed è la *componente secondaria* dei raggi cosmici, la quale costituisce circa un terzo della radioattività naturale. I raggi cosmici primari sono per la maggior parte nuclei atomici, che quando interagiscono con l'atmosfera producono pioni  $\pi^0$ ,  $\pi^+$  e  $\pi^-$ . I pioni carichi decadono in muoni e antineutrini, dopo aver percorso circa 800 cm:

$$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \bar{\nu} \quad (3.1)$$

Nel loro percorso, prima di decadere, potrebbero interagire con altri nuclei o molecole. Anche i muoni possono decadere, dopo aver percorso circa 660 m:

$$\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \bar{\nu} + \nu \quad (3.2)$$

Se dunque il raggio cosmico primario era un nucleo, lo sciame conterrà numerosi neutrini, i quali trasportano energia fino alla superficie della Terra e possono essere rilevati in laboratori sotterranei, per il fatto che  $\nu$  non interagisce quasi mai con la materia. La direzione e l'energia trasportata dai neutrini è fondamentale per poter ricavare le stesse quantità ma riferite al raggio cosmico primario.

# Bibliografia

- [1] Carroll B.W., Ostlie D.A., *An Introduction to Modern Astrophysics*, Pearson Education Limited, 2<sup>nd</sup> Edition 2014
- [2] Chiosi C., *Struttura ed evoluzione delle stelle*, Dispense
- [3] Dallacasa D., *Processi di Radiazione e MHD*, Dispense, 2020
- [4] Ferraro F.R., *Astrofisica Stellare*, Dispense, 2020
- [5] Hansen C.J., Kawaler S.D., Trimble V., *Stellar Interiors*, Springer, 2<sup>nd</sup> Edition 2004
- [6] Karttunen H., Kroger P., Oja H., Poutanen M., Donner K.J., *Fundamental Astronomy*, Springer, 6<sup>th</sup> Edition 2017
- [7] Spurio M., Braibant S., Giacomelli G., *Particelle e Interazioni Fondamentali*, Springer, 2<sup>a</sup> Edizione 2012