

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

**Formulazione della meccanica
quantistica tramite integrali di
cammino con applicazione al moto
Browniano**

Presentata da:
Mattia Bazzani

Relatore:
**Prof. Fiorenzo
Bastianelli**

Anno Accademico 2020/2021

Sommario

In questa tesi si espone il formalismo degli integrali di percorso proposto da Feynman per lo studio della meccanica quantistica. Dopo un breve ripasso dei concetti fondamentali della teoria ondulatoria di Schrödinger si procede con l'introduzione concettuale e formale del nuovo formalismo basato sull'integrazione sui cammini. In particolare si procederà a ricavare una nuova forma per il propagatore quantistico utilizzando gli integrali sui percorsi. Si dimostra poi l'equivalenza tra il formalismo proposto da Feynman ed il formalismo di Schrödinger. Infine si presenta la stretta connessione esistente tra l'integrazione sui cammini ed il moto Browniano e quindi in particolare tra l'integrazione sui cammini e l'integrazione di Wiener.

Indice

Introduzione	3
1 Principi fondamentali della meccanica quantistica	5
1.1 Concetti e struttura della meccanica quantistica	5
1.2 Evoluzione temporale ed equazione di Schrödinger	8
1.3 Meccanica ondulatoria	11
2 Formulazione ad integrali di cammino della meccanica quantistica	13
2.1 Esperimento della doppia fenditura	13
2.1.1 Introduzione intuitiva al formalismo ad integrali di percorso	15
2.2 Definizione formale degli integrali di cammino	16
2.2.1 Equivalenza con la meccanica ondulatoria	21
2.3 Integrale di percorso per una particella libera	22
3 Moto Browniano ed Integrali di cammino	25
3.1 Random walk	25
3.2 Moto browniano ed integrale di Wiener	27
3.2.1 Dimostrazione di Kac	30
3.2.2 Confronto tra l'integrazione sui cammini e l'integrazione di Wiener	31
Conclusioni	35
A Funzioni speciali	37
A.1 Distribuzione δ di Dirac	37
A.2 Distribuzione θ di Heaviside	37
A.3 Funzioni di Green	37
B Approssimazione WKB	39
C Formula BCH	41
Bibliografia	43

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è lo studio del formalismo ad integrali di cammino della meccanica quantistica. Quando si affrontano problemi di meccanica quantistica ci si rende conto di come sia fondamentale comprendere e descrivere l'evoluzione temporale del sistema che si sta studiando. Sappiamo infatti che la teoria quantistica è completamente predittiva nel senso che è sufficiente conoscere lo stato iniziale del sistema ed il potenziale per poter definire lo stato del sistema stesso in tutti gli istanti di tempo futuri. Agli inizi degli anni '20 del novecento Schrödinger fornisce una strada per lo studio dell'evoluzione temporale dello stato di un sistema ricavando un'equazione d'onda detta equazione di Schrödinger. Questa specifica come la variazione istantanea della funzione d'onda del sistema sia strettamente collegata all'Hamiltoniana del sistema stesso. Abbiamo così che un metodo per la soluzione al problema dell'evoluzione temporale è, una volta conosciuto lo spettro di autovalori dell'Hamiltoniana, decomporre lo stato iniziale del sistema nella base di autostati dell'operatore Hamiltoniano \hat{H} , osservare l'evoluzione temporale di ognuno di questi e poi riassemblare nuovamente tutti gli autostati. Sappiamo però che in meccanica classica la formulazione Lagrangiana è equivalente a quella Hamiltoniana e quindi ci chiediamo se esiste una strada per descrivere l'evoluzione temporale di un sistema basandosi su un analogo dell'azione Lagrangiana. Questo commento fatto da P.A.M. Dirac nel 1920 [1] ha più tardi ispirato Feynman. Consideriamo una traiettoria $x(t)$ tra un punto iniziale (x_0, t_0) ed un punto futuro (x', t') e sia l'ampiezza di probabilità di transizione il prodotto interno della funzione d'onda in rappresentazione di Schrödinger del sistema considerata nei punti iniziale e finale. Feynman suggerì un'equivalenza tra l'ampiezza di probabilità e l'esponente dell'azione classica $\exp\left\{\frac{iS(x(t))}{\hbar}\right\}$. Riuscì a formalizzare questa connessione nel 1948 [2]. Nel suo lavoro Feynman presenta una formulazione della meccanica quantistica basata sul principio secondo cui l'ampiezza totale di transizione potesse essere ottenuta sommando le ampiezze relative ad ogni possibile tragitto percorso dal sistema. In questo modo l'evoluzione temporale dello stato può essere determinata considerando i contributi di tutti i possibili stati futuri. Questo metodo di determinazione delle ampiezze di probabilità di transizione e di risoluzione del problema dell'evoluzione temporale è detto formalismo ad integrali di cammino [3].

La tesi è strutturata in tre capitoli: nel primo viene proposto un ripasso dei concetti e degli elementi basilari della teoria quantistica ed in particolare della teoria ondulatoria di Schrödinger; nel secondo vengono mostrate le motivazioni concettuali che hanno spinto Feynman a formulare una nuova struttura teorica per la meccanica quantistica, la forma ad integrali di percorso del propagatore quantistico e si dimostra l'equivalenza

tra il formalismo degli integrali di cammino ed il formalismo di Schrödinger; nel terzo ed ultimo capitolo si esplora invece la connessione tra il moto Browniano e l'integrazione sui cammini.

Principi fondamentali della meccanica quantistica

Nel corso di questo capitolo vengono riassunte brevemente le principali caratteristiche della meccanica quantistica non relativistica [4]. In primo luogo verranno presentati alcuni dei principi fondamentali nella costruzione e nella comprensione della teoria quantistica e la loro trasposizione in notazione di Dirac. Si andrà poi a studiare l'evoluzione temporale di un sistema quantistico con particolare attenzione all'equazione di Schrödinger e si chiuderà con una breve trattazione di meccanica ondulatoria fondamentale per approcciarsi allo studio della dinamica di un sistema quantistico.

1.1 Concetti e struttura della meccanica quantistica

Prima di iniziare ad esporre l'apparato matematico che ci consentirà di studiare in modo quantitativo il comportamento di sistemi quantistici è necessario fare chiarezza sul significato che assumono alcuni termini già noti in fisica classica. Andremo così a definire in modo intuitivo [5]:

- Gli stati s di un sistema come i modi di essere del sistema ossia le condizioni fisicamente differenti del sistema;
- Gli osservabili Q di un sistema come le proprietà fisiche numericamente quantificabili del sistema stesso;
- La misura come una procedura sperimentale che fornisce il valore di un osservabile di un sistema.

Alla luce di quanto appena detto chiameremo procedura di misura un protocollo sperimentale che consiste nel preparare il sistema in uno stato s e nella successiva misurazione dell'osservabile Q . Si dice poi definito il valore di Q se ad ogni iterazione di uno specifico processo di misura si ottiene sempre lo stesso valore. In meccanica quantistica non è garantito che il valore di un osservabile Q sia definito per cui si dà importanza agli stati in cui questo accade. Il fatto che il valore di un osservabile misurato rispetto ad uno stato qualsiasi non sia definito significa che ad ogni iterazione è possibile ritrovare valori differenti per Q per cui sarà possibile solo dare una stima della probabilità per un determinato

valore dell'osservabile. Questo mostra come lo stato del sistema sia esclusivamente correlato alla probabilità di misurazione di un certo valore di Q mentre il processo di misura ci dice quale valore effettivamente si verifica. Abbiamo così che il valore di un osservabile non è più considerabile come una caratteristica intrinseca del sistema ma è qualcosa che emerge nel momento della misura e non può essere slegato da questa. L'insieme di tutti i possibili valori ottenibili da una misura dell'osservabile Q per ogni stato s sarà poi definito come spettro di Q .

Iniziamo ora a costruire l'apparato matematico della meccanica quantistica [5]. Tutta la formulazione che verrà proposta si fonda sulla proposizione secondo cui:

"Lo stato di un sistema può essere descritto da una determinata funzione, in generale complessa, $\psi(\mathbf{q})$ delle coordinate. Questa funzione viene detta funzione d'onda del sistema."

La funzione d'onda assume particolare importanza in quanto

"Il quadrato del modulo della funzione d'onda definisce la distribuzione delle probabilità dei valori delle coordinate mentre $|\psi|^2 dq$ è la probabilità che una misura eseguita sul sistema dia valori delle coordinate contenuti nell'elemento dq dello spazio delle configurazioni."

Sappiamo poi che la somma delle probabilità per tutti i valori possibili delle coordinate del sistema deve essere uguale ad uno per cui si impone per le funzioni d'onda la condizione di normalizzazione secondo cui

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int |\psi|^2 dq = 1 \quad (1.1.1)$$

Se l'integrale di $|\psi|^2$ converge ci si riconduce alla situazione appena illustrata tramite utilizzo di una costante di normalizzazione appropriata mentre se questo diverge allora non si può più utilizzare $|\psi|^2$ per determinare i valori assoluti della probabilità delle coordinate ma lo si può utilizzare per determinare la probabilità relativa di due valori differenti di coordinate. Le funzioni d'onda poi soddisfano il principio di sovrapposizione secondo cui:

"Stati s_i arbitrari possono essere combinati in una sovrapposizione pesata per ottenere un altro stato s . Lo stato s così formato è intermedio rispetto agli stati s_i nonostante risulti essere più vicino a quelli con peso maggiore."

Da questo segue che tutte le equazioni soddisfatte dalle funzioni d'onda ψ debbano essere lineari rispetto a ψ stessa. Il principio di sovrapposizione è fondamentale nella comprensione della teoria quantistica. Abbiamo infatti che in fisica classica gli stati di un sistema si escludono tra loro (il sistema può essere in un solo stato alla volta) mentre in fisica

quantistica tutti gli stati coesistono all'interno degli altri stati. Questa descrizione suggerisce che l'insieme degli stati di un sistema sia codificato da uno spazio vettoriale. Si parla allora di stati indipendenti come di un set di stati s_i in cui nessuno stato è sovrapposizione degli altri e si dice questo insieme completo se genera l'intero spazio vettoriale degli stati del sistema. In particolare avremo che lo spazio vettoriale che codifica l'insieme degli stati di un sistema quantistico è uno spazio di Hilbert H complesso e lineare avente un prodotto interno che ci riporta alla (1.1.1). Un ulteriore passo fondamentale è rappresentato dal seguente enunciato che afferma come [5]:

"In meccanica quantistica ciascuna grandezza fisica Q è rappresentata da un operatore autoaggiunto hermitiano \hat{Q} definito come

$$\hat{Q} : |\psi\rangle \longrightarrow |\psi'\rangle = \hat{Q} |\psi\rangle$$

con $|\psi'\rangle$ stato generalmente differente dallo stato iniziale $|\psi\rangle$ "

Come è stato già visto in precedenza però esistono particolari stati, detti autostati del sistema, per cui l'osservabile Q ha valore definito. Per questi stati vale l'equazione agli autovalori

$$\hat{Q} |\psi\rangle = x |\psi\rangle \quad (1.1.2)$$

dove x è autovalore di Q . Dalle caratteristiche degli operatori che stiamo considerando segue che data una funzione $f(\hat{Q})$ di \hat{Q} che esprime una relazione funzionale tra due grandezze fisiche allora questa soddisfa

$$f(\hat{Q}) |\psi\rangle = f(x) |\psi\rangle \quad (1.1.3)$$

quando agisce su un autoket dell'operatore. L'esperienza mostra che l'insieme dei valori che si ottengono tramite processo di misura per un osservabile Q di un sistema preparato in uno stato qualsiasi coincide con l'insieme di valori che si troverebbe preparando il sistema in un qualche autostato s di Q . Lo spettro dell'operatore \hat{Q} sarà quindi una collezione degli autovalori x provenienti dall'equazione (1.1.2) e potrà essere discreto, continuo o entrambi. Questo ci dice che gli autoket di una base dello spazio di Hilbert H saranno in generale indicizzati da indici in parte continui l, λ ed in parte discreti m, μ per cui, considerando che gli autostati di operatori autoaggiunti formano una base ortonormale generalizzata, avremo che essi soddisfano la relazione generalizzata di ortonormalità

$$\langle l, \lambda | m, \mu \rangle = k_{m,\mu} \delta_{l,m} \delta(\lambda - \mu) \quad (1.1.4)$$

e la relazione di completezza

$$\sum_l \int \langle l, \lambda | \frac{d\lambda}{k_{l,\lambda}} \langle l, \lambda | = \hat{1} \quad (1.1.5)$$

dove $k_{m,\mu} > 0$ è una costante, $\delta(x)$ è la funzione delta di Dirac e $\delta_{i,j}$ è la delta di Kronecker. Alla luce di quanto appena detto posso scrivere l'espansione di ogni stato $|\psi\rangle$ del sistema come combinazione lineare di vettori generici della base di autoket del sistema come

$$|\psi\rangle = \sum_l \int \frac{d\lambda}{k_{l,\lambda}} |l, \lambda\rangle \langle l, \lambda | \psi \rangle \quad (1.1.6)$$

Risulta così chiaro come considerato un qualsiasi osservabile Q del sistema ogni funzione d'onda del sistema stesso possa essere scritta come espansione di autofunzioni dell'operatore \hat{Q} associato a Q . Dato che si sta trattando con operatori autoaggiunti allora possiamo sfruttare il teorema spettrale e scrivere l'espansione

$$\hat{Q} = \sum_l \int \frac{d\lambda}{k_{l,\lambda}} x_{l,\lambda} |l, \lambda\rangle \langle l, \lambda| \quad (1.1.7)$$

con $x_{l,\lambda}$ reali e tali per cui la loro collezione esaurisce tutto lo spettro di \hat{Q} . L'ultimo aspetto che andremo ad indagare è quello relativo al principio di indeterminazione formulato da Heisenberg [6]. Questo si può riassumere come segue:

"In generale non è possibile misurare simultaneamente con precisione arbitraria il valore di due quantità osservabili canonicamente coniugate."

dove con quantità osservabili canonicamente coniugate si intende grandezze fisiche a cui sono associati operatori che non commutano tra loro. Avremo ad esempio, considerati gli operatori autoaggiunti vettoriali di posizione \hat{q} e momento \hat{p} a cui sono associate rispettivamente le incertezze Δq e Δp , la relazione

$$\Delta q \Delta p \geq \hbar \quad (1.1.8)$$

che segna un limite intrinseco (e non di natura sperimentale) alla precisione con cui è possibile conoscere simultaneamente posizione e momento di un sistema quantistico.

1.2 Evoluzione temporale ed equazione di Schrödinger

Nella sezione precedente abbiamo introdotto il concetto di funzione d'onda come codifica matematica per lo stato di un sistema quantistico. Andiamo ora a studiare come questa evolve nel tempo [5]. Consideriamo un sistema chiuso il cui stato è rappresentato da $|\psi(t)\rangle$. In meccanica quantistica un'assunzione di base è che conoscendo lo stato ad un istante temporale definito sia possibile predire la sua evoluzione futura tramite le equazioni del moto quantistiche. Considerando quindi come istante iniziale il tempo t_0 possiamo

scrivere $|\psi(t)\rangle$ come risultato dell'applicazione di un certo operatore $\hat{U}(t, t_0)$ sullo stato iniziale $|\psi(t_0)\rangle$. Avremo quindi

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (1.2.1)$$

con l'operatore $\hat{U}(t, t_0)$ chiamato operatore di evoluzione temporale. Questa equazione ci mostra appunto come sia possibile fare previsioni sugli stati futuri del sistema tenendo conto però che le previsioni a cui si fa riferimento si conciliano perfettamente con la natura probabilistica dei risultati delle misure per sistemi quantistici. L'equazione (1.2.1) regola infatti l'evoluzione temporale quantistica del vettore stato permettendo di predire le probabilità di risultati ottenibili in esperimenti futuri (e non il risultato di un esperimento futuro come avviene con l'evoluzione temporale classica). Avremo quindi delle restrizioni da porre su $\hat{U}(t, t_0)$:

- Deve essere un operatore lineare. Questo è necessario perchè le relazioni tra stati quantistici sono sempre lineari;
- Deve conservare le distinzioni ossia deve far evolvere stati ortogonali in stati ortogonali.

Possiamo formalizzare queste richieste introducendo l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo

$$i\hbar \frac{d}{dt} [|\psi(t)\rangle] = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle \quad (1.2.2)$$

che regola l'evoluzione nel tempo dello stato quantistico e chiedendo che l'operatore evoluzione temporale soddisfi le equazioni

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}(t, t_0)}{\partial t} = \hat{H}(t) \hat{U}(t, t_0) \quad (1.2.3)$$

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}(t, t_0)}{\partial t_0} = -\hat{U}(t, t_0) \hat{H}(t_0) \quad (1.2.4)$$

con condizione iniziale

$$\hat{U}(t_0, t_0) = 1 \quad (1.2.5)$$

Nelle equazioni si fa riferimento ad \hat{H} come all'operatore hamiltoniano del sistema. Queste equazioni assicurano che $|\psi(t)\rangle$ definito come in (1.2.1) sia compatibile con l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo e che non dipenda dal tempo iniziale t_0 che risulta quindi essere arbitrario. Le condizioni sopra riportate assicurano alcune proprietà per l'operatore $\hat{U}(t, t_0)$. Risulta quindi come esso debba:

- Essere un operatore unitario ed in particolare invertibile ossia tale per cui è soddisfatta

$$\hat{U}(t, t_0)^\dagger = \hat{U}(t, t_0)^{-1} \quad (1.2.6)$$

proprietà che si riflette nella conservazione della probabilità

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = 1 \quad (1.2.7)$$

- Obbedire alla regola della catena

$$\hat{U}(t, u) \hat{U}(u, t_0) = \hat{U}(t, t_0) \quad (1.2.8)$$

- Obbedire alla relazione di inversione

$$\hat{U}(t_0, t) = \hat{U}(t, t_0)^{-1} \quad (1.2.9)$$

proprietà che riflettono la natura compositiva e di reversibilità nel tempo dello stato $|\psi(t)\rangle$. In base a quanto detto finora segue che la soluzione all'equazione di Schrödinger si riduce alla determinazione dell'operatore evoluzione temporale $\hat{U}(t, t_0)$. In generale determinare $\hat{U}(t, t_0)$ non è banale ma esistono alcuni casi particolari in cui lo si può calcolare agevolmente. Il nostro obiettivo è quindi ora quello di trovare una soluzione formale per l'equazione (1.2.3) e lo faremo considerando tre casi particolari [6]:

1. Il primo caso di particolare importanza si ha nelle situazioni in cui l'hamiltoniana \hat{H} è indipendente dal tempo. In questo caso la soluzione a (1.2.3) è data da

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp \left\{ \frac{-i \hat{H}(t - t_0)}{\hbar} \right\} \quad (1.2.10)$$

2. Il secondo caso si riscontra per $\hat{H}(t)$ dipendente dal tempo ma tale per cui $\hat{H}(t)$ ed $\hat{H}(t')$, con t e t' istanti di tempo differenti, commutano tra loro. La soluzione a (1.2.3) in questa casistica è fornita da

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t') \right\} \quad (1.2.11)$$

3. Il terzo caso si ha per $\hat{H}(t)$ dipendente dal tempo e non commutante a tempi diversi. La soluzione formale a (1.2.3) è data da

$$\hat{U}(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) \cdots \hat{H}(t_n) \quad (1.2.12)$$

che è detta serie di Dyson.

Il primo caso è quello più utilizzato quando si studiano applicazioni elementari. Può risultare utile andare ad investigare come evolve nel tempo il valore di aspettazione di un

osservabile del sistema. Supponiamo che al tempo zero lo stato iniziale sia un autostato dell'operatore \hat{A} che commuta con \hat{H} . Noi vogliamo studiare il valore di aspettazione di un osservabile associato all'operatore \hat{B} non commutante con \hat{H} nè con \hat{A} . Da quanto abbiamo visto finora avremo ad un tempo generico t lo stato

$$|a', t_0 = 0; t\rangle = \hat{U}(t, 0) |a'\rangle \quad (1.2.13)$$

per cui possiamo calcolare $\langle B \rangle$ sfruttando l'operatore (1.2.10) come

$$\langle B \rangle = \langle a' | \hat{U}(t, 0)^\dagger \cdot B \cdot \hat{U}(t, 0) |a'\rangle = \langle a' | B |a'\rangle \quad (1.2.14)$$

che è indipendente da t . Abbiamo quindi dimostrato che il valore di aspettazione di un osservabile calcolato rispetto ad un autostato dell'energia non dipende dal tempo. Per questa ragione gli autostati energetici vengono chiamati stati stazionari.

1.3 Meccanica ondulatoria

Si indica con meccanica ondulatoria la formulazione della meccanica quantistica basata sull'equazione d'onda

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x', t) = [-(\frac{\hbar^2}{2m}) \nabla'^2 + V(x')] \psi(x', t) \quad (1.3.1)$$

ossia sull'equazione di Schrödinger che in questo caso è stata scritta per uno stato ket $\psi(x', t) = \langle x' | a, t_0; t \rangle$ in base x e per un operatore Hamiltoniano del tipo

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(x) \quad (1.3.2)$$

con $\hat{V}(x)$ operatore hermitiano. Nel capitolo precedente abbiamo accennato per la prima volta agli stati stazionari che vengono definiti come stati ad energia fissata ossia tali per cui in assenza di perturbazioni esterne tendono a rimanere invariati nel tempo e a non decadere in altri stati. Gli stati stazionari mostrano una dipendenza armonica dal tempo che si esprime con

$$\psi_n(x', t) = \langle x' | a', t_0; t \rangle = \langle x' | a' \rangle \exp\left\{ -\frac{iE_{a'}t}{\hbar} \right\} = \psi_0(x') \exp\left\{ -\frac{iE_{a'}t}{\hbar} \right\} \quad (1.3.3)$$

dove si intravede come il sistema sia stato preparato in un autostato simultaneo di \hat{A} e di \hat{H} con autovalori a' ed $E_{a'}$ rispettivamente. Inserendo la $\psi(t)$ dello stato stazionario

nella (1.3.1) otteniamo l'equazione

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla'^2 + V(x')\right]\psi_0(x') = E\psi_0(x') \quad (1.3.4)$$

che è detta equazione di Schrödinger indipendente dal tempo e che ricopre un ruolo molto importante nella determinazione della funzione d'onda di un sistema quantistico. La sua importanza sta tutta nel suo rapporto con gli stati stazionari. Abbiamo infatti che risolvendo la (1.3.4) si ritrova $\psi_0(x')$ da cui si ricava facilmente $\psi_n(x', t)$ che codifica uno stato stazionario ma che non è una soluzione generale dell'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo (1.3.1). Tuttavia, si può dimostrare che l'insieme di tutte le soluzioni possibili è costituito dalle combinazioni lineari delle autofunzioni dell'energia, ossia qualsiasi soluzione $\psi(x', t)$ è sempre esprimibile come una sovrapposizione di stati stazionari:

$$\psi(x', t) = \sum_n c_n \psi_n(x', t). \quad (1.3.5)$$

Questo è un risultato molto importante in quanto ci fornisce una strada concreta per la determinazione della funzione d'onda di un sistema quantistico. Quando si cerca di risolvere la (1.3.4) si deve tenere conto che non tutte le sue soluzioni rappresentano scelte valide per la determinazione degli stati stazionari. Questi infatti, in quanto funzioni d'onda, devono rispettare alcune condizioni fondamentali imposte dalla natura quantistica del sistema che si sta studiando. Avremo così che nella ricerca degli stati stazionari non dobbiamo limitarci solo alla risoluzione di (1.3.4) ma dobbiamo verificare che queste soluzioni soddisfino delle particolari condizioni al contorno e di regolarità. Avremo in particolare che le $\psi(x', t)$, e di conseguenza anche le $\psi_n(x', t)$, devono soddisfare [5]:

1. Se si sta lavorando su una regione limitata D si deve richiedere continuità di ψ e $\nabla\psi$ in tutto il dominio ed in particolare sulla superficie di discontinuità. Questo si traduce nella richiesta di annullamento di ψ sul bordo ∂D ;
2. Si richiede poi che nella regione in cui ha validità (1.3.1), in questo caso D , si abbia una crescita controllata per ψ . Questa condizione si quantifica con

$$|\psi(x', t)| \leq c \quad (1.3.6)$$

valida in $|x| \rightarrow \infty$ in D e con c costante. Questa condizione è detta condizione di limitatezza ed è importante perchè garantisce la normalizzazione delle soluzioni.

3. La soluzione ψ deve essere identicamente non nulla.

Formulazione ad integrali di cammino della meccanica quantistica

Nel corso di questo capitolo andremo ad introdurre il formalismo della meccanica quantistica basato sugli integrali di cammino, proposto da Feynman a cavallo degli anni '40 del secolo scorso.

2.1 Esperimento della doppia fenditura

Uno degli esperimenti più significativi per la descrizione delle proprietà quantistiche delle particelle è l'esperimento della doppia fenditura. La trattazione di questo particolare esperimento [7] acquisisce poi ancor più significato in quanto mostra una valida motivazione concettuale all'introduzione di un nuovo formalismo per la descrizione della meccanica quantistica, ossia il formalismo ad integrali di percorso. Consideriamo una sorgente S di elettroni e poniamo un rivelatore in grado di rilevare gli elettroni stessi su uno schermo in posizione C . Immaginiamo ora di porre un secondo schermo B , contenente le due fenditure, in una posizione intermedia tra S e C .

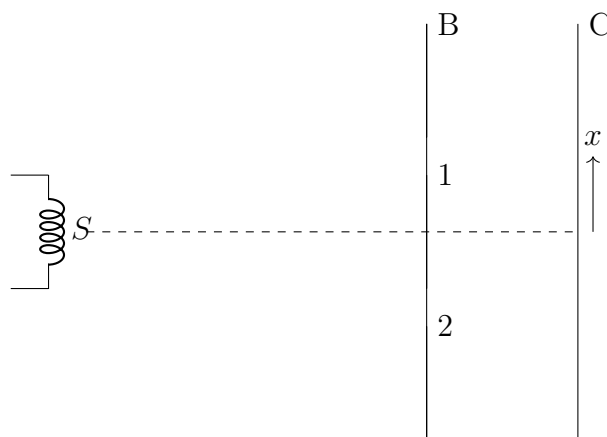


Fig. 2.1: Apparato sperimentale dell'esperimento da doppia fenditura

Con la meccanica classica avremmo ottenuto in ogni caso un flusso di elettroni totale F dato da $F = F_1 + F_2$ sullo schermo C con F_1 ed F_2 rispettivamente i flussi uscenti dalle fenditure singole. Quello che si osserva in realtà è che il flusso sullo schermo C è descritto

da una relazione del tipo $F = F_1 + F_2 + F_{INT}$, in cui F_{INT} deriva dall'interferenza tra i flussi uscenti dalle singole fenditure. Viene così naturale scrivere

$$F = |\Phi_1 + \Phi_2|^2 = |\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2 + 2Re(\Phi_1^*\Phi_2) \quad (2.1.1)$$

che rappresenta esattamente quello che si osserva nella teoria ondulatoria classica. Verrebbe quindi da pensare che l'elettrone sia rappresentabile con un'onda e che quindi sia possibile vederlo come un'entità delocalizzata che passa contemporaneamente attraverso le due fenditure. Questo però è falso. Si può infatti immaginare di rallentare l'emissione della sorgente al punto che essa espelle un singolo elettrone alla volta. Dunque, ponendo un detector di elettroni su ogni fenditura, è possibile osservare se l'elettrone passa contemporaneamente in entrambe le fenditure o se passa in una singola e nel caso in quale tra le due passa. Ciò che si osserva è che l'elettrone passa in una fenditura singola e che il segnale lasciato dall'elettrone quando incontra il rilevatore è quello di una particella puntiforme. Concludiamo quindi che l'elettrone non sembra essere un oggetto delocalizzato nello spazio. Come si spiega allora quanto visto per il flusso di elettroni sullo schermo C? La risposta a questa domanda sta nella dualità onda - particella che si mostra essere una caratteristica intrinseca di ogni particella quantistica. Ogni possibile contraddizione in questo ragionamento è tolta dal principio di indeterminazione che mostra come l'osservazione diretta di quale delle due fenditure è attraversata dall'elettrone rimuova l'interferenza tra i flussi F_1 ed F_2 . Più in generale possiamo dare quindi una nuova versione del principio di indeterminazione che si adatta particolarmente bene a questo esperimento. Avremo quindi

"Ogni determinazione dell'alternativa scelta da un processo in grado di seguire più alternative distrugge irrimediabilmente l'interferenza tra le alternative stesse."

Per poter interpretare al meglio le osservazioni appena descritte ci riferiamo all'interpretazione di Copenhagen secondo cui F dovrebbe essere interpretata come una densità di probabilità. Questo significa che l'approccio giusto alla comprensione del problema sia computare l'ampiezza Φ come se stessimo trattando fenomeni ondulatori e poi interpretare l'intensità $|\Phi|^2$ come se fosse una densità di probabilità per la posizione di una particella puntiforme. Nel formalismo alla Schrödinger abbiamo visto che l'ampiezza Φ è rappresentata dalla funzione d'onda. Le particelle però, nonostante siano descritte da un'onda di probabilità, mostrano delle proprietà particolari tipiche di oggetti puntiformi. Quello che andremo a fare nei prossimi capitoli è mostrare un metodo alternativo, ma del tutto equivalente, al metodo di Schrödinger, mostrato nel capitolo precedente, per la computazione dell'ampiezza di probabilità. Per farlo rivisiteremo il ruolo di traiettoria di una particella puntiforme facendo attenzione a rispettare sempre il principio di indeterminazione. Questo nuovo approccio è stato proposto al termine degli anni '40 da Richard

P. Feynman e prende il nome di formulazione ad integrali di percorso della meccanica quantistica.

2.1.1 Introduzione intuitiva al formalismo ad integrali di percorso

In questa sezione vogliamo portare alle estreme conseguenze ciò che abbiamo visto con l'esperimento della doppia fenditura in modo da rendere chiara l'idea alla base dell'approccio ad integrali di percorso della meccanica quantistica [7]. Immaginiamo quindi di porre ulteriori schermi tra la sorgente S e lo schermo C, immaginiamo poi di creare su B una terza fenditura mentre sugli schermi aggiuntivi di creare un numero sempre più grande di fenditure.

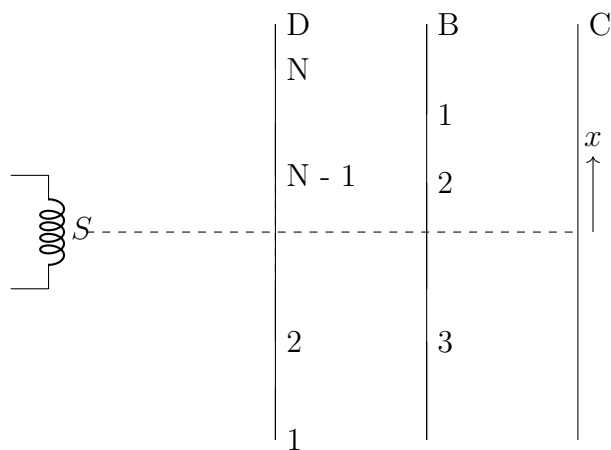


Fig. 2.2: Apparato per esperimento da multi fenditura.

Seguendo il ragionamento mostrato nel caso delle due fenditure si nota come il principio di sovrapposizione porti ad un'equazione per Φ del tipo

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1,2,3} \Phi(x_D^i, \alpha) \quad (2.1.2)$$

che, considerando il limite $N \rightarrow \infty$, diventa

$$\Phi = \sum_{\alpha=1,2,3} \int dx_{D_1} dx_{D_2} \cdots dx_{D_M} \Phi(x_{D_1}, x_{D_2}, \cdots, x_{D_M}, \alpha) \quad (2.1.3)$$

dove l'estensione a più schermi intermedi D_1, D_2, \cdots, D_M segue direttamente dal limite per N che va all'infinito. Abbiamo infatti che aumentando considerevolmente il numero di fenditure lo schermo D diventa del tutto inesistente. Possiamo quindi immaginare di porre altri schermi di questo tipo nello spazio tra S e C e di seguire lo stesso ragionamento. Questo si trasporta nell'equazione sotto forma di integrazione su M schermi. Diventa chiaro come nel limite in cui la distanza tra i diversi schermi D si riduce ad un infinitesimo

allora avremmo definiti tutti i possibili cammini. Per essere più precisi bisogna considerare che anche il modo in cui i cammini vengono percorsi nel tempo è significativo. Otteniamo così per la determinazione dell'ampiezza Φ la formula

$$\Phi = \sum_{[x(t), y(t)]} \Phi([x]) \quad (2.1.4)$$

dove la somma su $[x(t), y(t)]$ rappresenta la somma su tutti i possibili percorsi.

2.2 Definizione formale degli integrali di cammino

In questa sezione andremo a definire in modo formale gli integrali di cammino [8]. Per fare questo inizieremo dalle conoscenze di meccanica quantistica non relativistica riassunte nel capitolo precedente. Sappiamo che la funzione d'onda di una particella non relativistica ha un'evoluzione temporale descritta dall'equazione di Schrödinger (1.3.1). Sappiamo poi che esistono particolari funzioni, dette funzioni di Green (guarda appendice A.3), $G(t, t_0)$ che soddisfano l'equazione

$$(\hat{H} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t})G(t, t_0) = -i\hbar \delta(t - t_0) \quad (2.2.1)$$

che in coordinate spaziali diventa

$$(H_x - i\hbar \frac{\partial}{\partial t})G(x, t; y, t_0) = -i\hbar \delta(x - y) \delta(t - t_0) \quad (2.2.2)$$

con le funzioni G in relazione tra loro come

$$G(x, t; y, t_0) = \langle x | G(t, t_0) | y \rangle \quad (2.2.3)$$

In meccanica quantistica si è soliti chiamare con il nome di propagatore queste particolari funzioni G e ad indicarle con la lettera k . Quello che vogliamo fare in questa sezione è quindi ricavare il propagatore che risolve l'equazione (2.2.1) in quanto conoscerlo significa avere una soluzione per l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo. Si ha infatti che data $\psi(t_0)$ come funzione d'onda del sistema al tempo t_0 allora vale

$$\psi(t) = k(t, t_0)\psi(t_0) \quad (2.2.4)$$

che determina lo stato del sistema ad un t generico. Prima di procedere con la determinazione formale del propagatore però è importante cercare di attribuirgli un significato fisico. In particolare cercheremo di associarlo al concetto di ampiezza di probabilità di transizione. Consideriamo il caso importante in cui \hat{H} è indipendente dal tempo, una

soluzione per l'equazione (2.2.1) sarà

$$k(t, t_0) = \theta(t - t_0) \exp\left\{-\frac{iH(t - t_0)}{\hbar}\right\}, \quad (2.2.5)$$

con $\theta(t - t_0)$ funzione a gradino di Heaviside (guarda appendice A.2). Possiamo a questo punto lavorare sul propagatore e scrivere

$$\begin{aligned} k(x, t; y, t_0) &= \langle x | \exp\left\{-\frac{iH(t - t_0)}{\hbar}\right\} | y \rangle \\ &= \sum_{n, m} \langle x | n \rangle \langle n | \exp\left\{-\frac{iH(t - t_0)}{\hbar}\right\} | m \rangle \langle m | y \rangle \\ &= \sum_m \exp\left\{-\frac{iE_m(t - t_0)}{\hbar}\right\} \langle x | m \rangle \langle m | y \rangle \\ &= \sum_m \langle x | \exp\left\{-\frac{iHt}{\hbar}\right\} | m \rangle \langle m | \exp\left\{\frac{iHt_0}{\hbar}\right\} | y \rangle \\ &= \langle x, t | y, t_0 \rangle, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

dove sono stati utilizzati n ed m come basi e dove sappiamo che $|y, t_0\rangle$ e $\langle x, t|$ sono autoket ed autobra dell'operatore posizione in rappresentazione di Heisenberg. Possiamo quindi identificare $\langle x, t | y, t_0 \rangle$ come l'ampiezza di probabilità per una particella preparata al tempo iniziale t_0 in uno stato associato all'autovalore di posizione \mathbf{y} di essere trovata al tempo t in \mathbf{x} . Questo significa che $\langle x, t | y, t_0 \rangle$ rappresenta l'ampiezza per una particella che si muove da un punto dello spazio-tempo (y, t_0) ad un punto (x, t) ed è per questo che il termine ampiezza di transizione è particolarmente appropriato. Per sottolineare maggiormente la simmetria di spazio e tempo scriviamo $\langle x, t | y, t_0 \rangle$ come $\langle x, t'' | y, t' \rangle$. Consideriamo poi l'evoluzione dal tempo t' ad un tempo t''' con l'intervallo temporale diviso in due sottointervalli (t', t'') e (t'', t''') , avremo allora

$$\langle z, t''' | y, t' \rangle = \int d^3x \langle z, t''' | x, t'' \rangle \langle x, t'' | y, t' \rangle \quad (2.2.7)$$

dove con $\langle z |$ indichiamo lo stato associato ad un valore di posizione \mathbf{z} . La proprietà appena descritta è indicata con il nome di proprietà di composizione dell'ampiezza di transizione e ci permette di dividere gli intervalli temporali in molti sottointervalli. Capiamo quindi che se riuscissimo ad indovinare la forma di $\langle x, t'' | y, t' \rangle$ per un intervallo di tempo infinitesimo allora dovremmo essere in grado di ottenere l'ampiezza $\langle x, t'' | y, t' \rangle$ per un intervallo di tempo finito semplicemente componendo le ampiezze di transizione per intervalli infinitesimi in modo appropriato. Questo tipo di ragionamento conduce ad una formulazione indipendente della meccanica quantistica, presentata da Richard P. Feynman nel 1948 [2], basata sul concetto di cammino. A questo punto possiamo concentrarci sulla derivazione

di un'equazione formale per il propagatore. Scriviamo, considerando per comodità $t_0 = 0$,

$$\begin{aligned} k(x, t; y) &= \langle x | \exp \left\{ -\frac{iHt}{\hbar N} \right\}^N | y \rangle \\ &= \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \prod_{j=0}^{N-1} \langle x_{j+1} | \exp \left\{ -\frac{iHt}{\hbar N} \right\} | x_j \rangle \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

che possiamo modificare ricordando che la relazione

$$\langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp \left\{ \frac{ipx}{\hbar} \right\} \quad (2.2.9)$$

definisce gli autostati dell'operatore quantità di moto \hat{p} . Abbiamo dunque

$$k(x, t; y) = \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \int dp_1 \cdots dp_{N-1} \langle x | p_{N-1} \rangle \langle p_{N-1} | \exp \left\{ -\frac{iHt}{\hbar N} \right\} | x_{N-1} \rangle \langle x_{N-1} | p_{N-2} \rangle \cdots \quad (2.2.10)$$

completamente equivalente alla relazione per $k(x, t; y)$ data sopra. Nell'equazione appena riportata, e in tutte quelle che seguiranno, la sequenza di puntini posta in coda all'equazione sta ad indicare che essa continua con una forma uguale a quella riportata. A questo punto si sfrutta una proprietà fondamentale dell'esponenziale di due operatori (guarda appendice C), ossia

$$\exp \left\{ -\frac{i(A+B)t}{N} \right\} = \exp \left\{ -\frac{iAt}{N} \right\} \exp \left\{ -\frac{iBt}{N} \right\} + O\left(\left(\frac{it}{\hbar N}\right)^2\right). \quad (2.2.11)$$

Possiamo infatti ora scrivere

$$\begin{aligned} k(x, t; y) &= \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \int dp_1 \cdots dp_{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp \left\{ \frac{ip_{N-1}x}{\hbar} \right\} \\ &\quad \cdot \langle p_{N-1} | \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\hat{p}^2 t}{2mN} \right) \right\} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} V(x) \left(\frac{t}{N} \right) \right\} | x_{N-1} \rangle \langle x_{N-1} | p_{N-2} \rangle \cdots \\ &= \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \int dp_1 \cdots dp_{N-1} \frac{1}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{ip_{N-1}x}{\hbar} \right\} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{p_{N-1}^2 t}{2mN} \right) \right\} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} V(x_{N-1}) \left(\frac{t}{N} \right) \right\} \exp \left\{ -\frac{p_{N-1}x_{N-1}}{\hbar} \right\} \cdots \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Focalizziamoci ora sul termine di momento

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} dp_{N-1} \frac{1}{2\pi\hbar} \exp\left\{-\frac{itp_{N-1}^2}{2\hbar mN} + \frac{ip_{N-1}(x-x_{N-1})}{\hbar}\right\} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dp_{N-1} \frac{1}{2\pi\hbar} \exp\left\{-\frac{\Delta\tau p_{N-1}^2}{2\hbar m} + \frac{ip_{N-1}(x-x_{N-1})}{\hbar}\right\} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dp_{N-1} \frac{1}{2\pi\hbar} \exp\left\{-\frac{\Delta\tau}{2m\hbar} \left(p_{N-1} - \frac{im(x-x_{N-1})}{\Delta\tau}\right)^2 - \frac{m}{2\hbar\Delta\tau} (x-x_{N-1})^2\right\} \quad (2.2.13) \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \exp\left\{-\frac{m(x-x_{N-1})^2}{2\pi\Delta\tau}\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{2m\hbar}{\Delta\tau}} e^{-u^2} du \\
&= \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\Delta\tau}} \exp\left\{-\frac{m(x-x_{N-1})^2}{2\pi\Delta\tau}\right\}
\end{aligned}$$

dove sono state prima introdotte le quantità $t = -i\tau$ e $\Delta\tau = \frac{\tau}{N} = \frac{it}{N} = i\Delta t$ e poi è stato effettuato un completamento al quadrato inserendo il termine

$$u = \sqrt{\frac{\Delta\tau}{2m\hbar}} \left(p_{N-1} - \frac{im(x-x_{N-1})}{\Delta\tau}\right) \quad (2.2.14)$$

La soluzione all'integrale deriva direttamente da ciò che è noto sulla risoluzione degli integrali gaussiani. Ritornando all'equazione (2.2.12) per il propagatore ed inserendo ciò che abbiamo ottenuto, avremo

$$\begin{aligned}
k(x, t; y) &= \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \int dp_1 \cdots dp_{N-1} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\Delta\tau}} \exp\left\{-\frac{m(x-x_{N-1})^2}{2\pi\Delta\tau}\right\} \\
&\quad \cdot \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} V(x_{N-1}) \left(\frac{t}{N}\right)\right\} \langle x_{N-1} | p_{N-2} \rangle \cdots \\
&= \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \left(\frac{m}{2\pi\hbar\Delta\tau}\right)^{\frac{N}{2}} \exp\left\{\frac{\Delta\tau}{\hbar} \left(-\frac{m(x-x_{N-1})^2}{2\Delta\tau^2} - V(x_{N-1})\right)\right\} \cdots \quad (2.2.15)
\end{aligned}$$

che, ricordando la definizione data per $\Delta\tau$, diventa

$$= \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \left(\frac{m}{2i\pi\hbar\Delta t}\right)^{\frac{N}{2}} \exp\left\{\frac{i\Delta t}{\hbar} \left(\frac{m(x-x_{N-1})^2}{2\Delta t^2} - V(x_{N-1})\right)\right\} \cdots \quad (2.2.16)$$

da cui

$$\begin{aligned}
k(x, t; y) &= \langle x | \exp\left\{-\frac{iHt}{\hbar}\right\} | y \rangle \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2i\pi\hbar\Delta t}\right)^{\frac{N}{2}} \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \prod_{j=0}^{N-1} \exp\left\{\frac{i\Delta t}{\hbar} \left(\frac{m(x_{j+1} - x_j)^2}{2\Delta t^2}\right) - V(x_j)\right\} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2i\pi\hbar\Delta t}\right)^{\frac{N}{2}} \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \exp\left\{\sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{i\Delta t}{\hbar} \left(\frac{m(x_{j+1} - x_j)^2}{2\Delta t^2}\right) - V(x_j)\right]\right\}
\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

Abbiamo così ricavato l'espressione ad integrali di percorso per il propagatore che soddisfa l'equazione (2.2.1). Spendiamo ora qualche parola per spiegare perchè questo viene definito integrale di percorso o somma delle storie [8]. Immaginiamo che i punti $y, x_1, \dots, x_{N-1}, x$ siano connessi da delle linee, questo significa che c'è un percorso a tratti da y ad x . La somma all'interno dell'esponenziale in (2.2.17) può essere interpretata come un integrale lungo quel percorso, ossia

$$\sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{i\Delta t}{\hbar} \left(\frac{m(x_{j+1} - x_j)^2}{2\Delta t^2}\right) - V(x_j)\right] \approx \int_0^t dt' \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt'}\right)^2 - V(x)\right] \tag{2.2.18}$$

dove riconosciamo subito l'integrando come la lagrangiana del sistema classico. Abbiamo così che l'azione S data da

$$S = \int L_{Classical} dt \tag{2.2.19}$$

non è meno importante di quanto lo sia in meccanica classica dato che l'argomento dell'esponenziale in (2.2.17) è dato da $\frac{iS}{\hbar}$ con l'azione valutata sul percorso spezzato che connette x ed y . L'integrale sulle quantità x_1, \dots, x_{N-1} invece può essere interpretato come somma su tutti i possibili cammini spezzati che connettono x ed y e, dato che ogni percorso continuo può essere approssimato con un percorso spezzato e considerando che in (2.2.17) si sta considerando il limite $N \rightarrow \infty$, allora è ragionevole pensare di star considerando la somma su tutti i percorsi possibili. Possiamo poi sfruttare quanto appena detto per dare una versione più compatta dell'equazione che definisce il propagatore [6]. In letteratura si è soliti scrivere un nuovo operatore integrale multidimensionale come

$$\int_{x_1}^{x_N} D[x(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2i\pi\hbar\Delta t}\right)^{N/2} \int dx_{N-1} \cdots \int dx_1 \tag{2.2.20}$$

per cui (2.2.17) si riduce a

$$\begin{aligned}
k(x, t; y) &= \int_{x_1}^{x_N} D[x(t)] \exp\left\{i \int_{t_0}^{t_N} dt \frac{L_{Classica}(x, \dot{x})}{\hbar}\right\} \\
&= \int_{x_1}^{x_N} D[x(t)] \exp\left\{\frac{iS}{\hbar}\right\}
\end{aligned} \tag{2.2.21}$$

espressione a cui si dà il nome di integrale di percorso di Feynman. Affinchè si possa costruire una formulazione della meccanica quantistica di natura spaziale in cui l'ampiezza è fornita da (2.2.21) si deve avere corrispondenza classica nel limite per \hbar piccolo, ossia nel limite classico. Guardando all'equazione (2.2.21) notiamo subito come per $\hbar \rightarrow 0$ l'esponentiale oscilli violentemente. Questo causa una cancellazione reciproca tra i contributi dati da molti dei percorsi tra loro vicini in quanto, considerando $\exp\left\{\frac{iS}{\hbar}\right\}$ per un dato percorso e $\exp\left\{\frac{iS}{\hbar}\right\}$ per un percorso adiacente ad esso, si hanno fasi molto diverse tra loro a causa del valore molto piccolo di \hbar . Un'importante eccezione è data dal percorso che minimizza l'azione S . Si nota infatti che deformando leggermente questo particolare percorso si ottiene un'azione uguale all'azione minima al primo ordine nella deformazione. Questo significa che la fase di $\exp\left\{\frac{iS}{\hbar}\right\}$ non varia così tanto da quella del percorso ad azione minima anche se \hbar è piccolo. Perciò, finchè ci manteniamo nelle vicinanze del percorso a minima azione, è possibile avere interferenza costruttiva tra cammini tra loro adiacenti per cui, nel limite classico, il contributo maggiore sarà dato da un intervallo estremamente sottile contenente il cammino "classico" e questo prova la corrispondenza con la teoria classica per $\hbar \rightarrow 0$ della formulazione di Feynman.

2.2.1 Equivalenza con la meccanica ondulatoria

Nella sezione precedente abbiamo presentato una formulazione della meccanica quantistica basata sul concetto di integrale di percorso e lo abbiamo fatto prendendo in prestito dalla formulazione convenzionale solo alcuni punti fondamentali, in particolare

1. il principio di sovrapposizione;
2. la proprietà di composizione dell'ampiezza di transizione;
3. la corrispondenza classica nel limite $\hbar \rightarrow \infty$.

Quello che vogliamo fare in questa sezione è mostrare che la formulazione fornita da Feynman sia effettivamente equivalente alla meccanica ondulatoria di Schrödinger [6]. Per farlo proveremo che l'espressione di Feynman (2.2.21) per $\langle x_N, t_N | x_1, t_1 \rangle$ soddisfa l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo nelle variabili x_N, t_N . Scriviamo

$$\begin{aligned} \langle x_N, t_N | x_1, t_1 \rangle &= \int dx_{N-1} \langle x_N, t_N | x_{N-1}, t_{N-1} \rangle \langle x_{N-1}, t_{N-1} | x_1, t_1 \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_{N-1} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \exp\left\{ \left(\frac{im}{2\hbar} \right) \frac{(x_N - x_{N-1})^2}{\Delta t} - \frac{iV \Delta t}{\hbar} \right\} \langle x_{N-1}, t_{N-1} | x_1, t_1 \rangle \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

dove abbiamo assunto che $t_N - t_{N-1}$ sia infinitesimo. Introduciamo ora la variabile $\xi = x_N - x_{N-1}$ e consideriamo $x_N \rightarrow x$ e $t_N \rightarrow t + \Delta t$, otteniamo

$$\langle x, t + \Delta t | x_1, t_1 \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left\{ \frac{im\xi^2}{2\hbar \Delta t} - \frac{iV \Delta t}{\hbar} \right\} \langle x - \xi, t | x_1, t_1 \rangle. \quad (2.2.23)$$

Per poter proseguire dobbiamo tenere conto che valgono le relazioni

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left\{\frac{im\xi^2}{2\hbar\Delta t}\right\} = \sqrt{\frac{2\pi i\hbar\Delta t}{m}} \quad (2.2.24)$$

e

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}} \exp\left\{\frac{im\xi^2}{2\hbar\Delta t}\right\} = \delta(\xi) \quad (2.2.25)$$

che ci mostrano come nel limite $\Delta t \rightarrow 0$ il contributo maggiore si abbia per ξ prossimo a zero. Questo ci legittima ad espandere in potenze di ξ il termine $\langle x - \xi, t | x_1, t_1 \rangle$ e in potenze di Δt i termini $\langle x, t + \Delta t | x_1, t_1 \rangle$ e $\exp\left\{-\frac{iV\Delta t}{\hbar}\right\}$. Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} \langle x, t | x_1, t_1 \rangle + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \langle x, t | x_1, t_1 \rangle &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \exp\left\{\frac{im\xi^2}{2\hbar\Delta t}\left(1 - \frac{iV\Delta t}{\hbar} + \dots\right)\right\} \\ &\cdot [\langle x, t | x_1, t_1 \rangle + \left(\frac{\xi^2}{2}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x, t | x_1, t_1 \rangle], \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

dove abbiamo tralasciato un termine lineare in ξ dato che si annulla quando viene integrato. Usando (2.2.24) e la sua derivata rispetto a Δt e raccogliendo i termini nel primo ordine per Δt otteniamo

$$\Delta t \frac{\partial}{\partial t} \langle x, t | x_1, t_1 \rangle = \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}}\right) \sqrt{2\pi} \left(\frac{i\hbar\Delta t}{m}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x, t | x_1, t_1 \rangle - \left(\frac{i}{\hbar}\right) \Delta t V \langle x, t | x_1, t_1 \rangle \quad (2.2.27)$$

che ci mostra come $\langle x, t | x_1, t_1 \rangle$ costruito secondo il formalismo di Feynman soddisfi l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle x, t | x_1, t_1 \rangle = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x, t | x_1, t_1 \rangle + V \langle x, t | x_1, t_1 \rangle. \quad (2.2.28)$$

Questo ci assicura che l'approccio spazio-temporale basato sugli integrali di percorso proposto da Feynman è a tutti gli effetti un approccio del tutto equivalente a quello ondulatorio fornito da Schrödinger.

2.3 Integrale di percorso per una particella libera

In questa sezione vogliamo fornire un esempio di utilizzo del formalismo ad integrali di percorso. Per farlo studiamo il propagatore per una particella quantistica libera [7] sapendo che questa è descritta da una lagrangiana classica

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2}. \quad (2.3.1)$$

Da quanto abbiamo visto nell'equazione (2.2.17) possiamo scrivere

$$k(x_f, t_f; x_i, t_i) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{A} \right) \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \prod_{j=0}^{N-1} \exp \left\{ \frac{iS}{\hbar} \right\} \quad (2.3.2)$$

dove $x_0 = x_i$, $x_N = x_f$,

$$\epsilon = \frac{t_f - t_i}{N}, \quad A = \sqrt{\frac{2\pi i \epsilon \hbar}{m}} \quad (2.3.3)$$

e

$$S = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{m(x_{j+1} - x_j)^2}{2\epsilon}. \quad (2.3.4)$$

Per calcolare il propagatore quindi è conveniente iniziare dall'integrazione sulla variabile x_1 per poi procedere con tutte le altre. Scriviamo dunque

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \exp \left\{ \frac{im}{2\epsilon\hbar} \left[(x_1 - x_0)^2 + (x_2 - x_1)^2 \right] \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \exp \left\{ \frac{im}{2\epsilon\hbar} \left[2\left(x_1 + \frac{1}{2}(x_0 + x_2)\right)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - x_0)^2 \right] \right\} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi i \epsilon \hbar}{m}} \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{im}{2\epsilon\hbar} \frac{1}{2} (x_2 - x_0)^2 \right\} \\ &= A \sqrt{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{im}{2\epsilon\hbar} \frac{1}{2} (x_2 - x_0)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

che una volta inserita in (2.3.2) ci permette di notare come questa mantenga in generale la stessa forma ma riduca il numero di intervalli di tempo da N ad $N - 1$ laddove però il primo intervallo risulta ora essere di 2ϵ invece che di ϵ come gli altri. Possiamo continuare su questa strada e calcolare l'integrale rispetto ad x_2 come

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \exp \left\{ \frac{im}{2\epsilon\hbar} \left[\frac{1}{2}(x_2 - x_0)^2 + (x_3 - x_2)^2 \right] \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \exp \left\{ \frac{im}{2\epsilon\hbar} \left[\frac{3}{2}\left(x_2 - \frac{1}{3}x_0 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{1}{3}(x_3 - x_0)^2 \right] \right\} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi i \epsilon \hbar}{m}} \frac{2}{3} \exp \left\{ \frac{im}{2\epsilon\hbar} \frac{1}{3} (x_3 - x_0)^2 \right\} \\ &= A \sqrt{\frac{2}{3}} \exp \left\{ \frac{im}{2\epsilon\hbar} \frac{1}{3} (x_3 - x_0)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

che ci mostra chiaramente come, ragionando per induzione, l'integrale rispetto alla variabile n -esima sarà

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \exp \left\{ \frac{im}{2\epsilon\hbar} \left[\frac{1}{n} (x_n - x_0)^2 + (x_{n+1} - x_n)^2 \right] \right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \exp \left\{ \frac{im}{2\epsilon\hbar} \left[\frac{n+1}{n} \left(x_n - \left(\frac{1}{n+1} x_0 + \frac{n}{n+1} x_{n+1} \right) \right)^2 + \frac{1}{n+1} (x_{n+1} - x_0)^2 \right] \right\} \\
&= \sqrt{\frac{2\pi i \epsilon \hbar}{m} \frac{n}{n+1}} \exp \left\{ \frac{im}{2\epsilon\hbar} \frac{1}{n+1} (x_{n+1} - x_0)^2 \right\} \\
&= A \sqrt{\frac{n}{n+1}} \exp \left\{ \frac{im}{2\epsilon\hbar} \frac{1}{n+1} (x_{n+1} - x_0)^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Possiamo ora unire i risultati di tutti gli n integrali ed ottenere così l'equazione per il propagatore di una particella libera

$$\begin{aligned}
k(x_f, t_f; x_i, t_i) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2\pi i \epsilon \hbar}{m} \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{N-1}{N}} \exp \left\{ \frac{im}{2N\epsilon\hbar} (x_f - x_i)^2 \right\} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{A\sqrt{N}} \exp \left\{ \frac{im}{2N\epsilon\hbar} (x_f - x_i)^2 \right\} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2\pi i \epsilon \hbar}{m(t_f - t_i)}} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \frac{(x_f - x_i)^2}{(t_f - t_i)} \right\}
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato la definizione di ϵ .

Moto Browniano ed Integrali di cammino

Il moto browniano è un fenomeno fisico osservato per la prima volta nel 1827 dal botanico Robert Brown. Questo fenomeno è uno degli effetti del moto molecolare e consiste nel continuo, rapido ed irregolare movimento, in tutte le direzioni, delle minute particelle in sospensione in un fluido e delle molecole stesse di un fluido. Una prima spiegazione dettagliata per questo fenomeno fu data da A. Einstein nel 1905. Egli ipotizzò che il moto delle particelle sospese (aventi dimensioni molto maggiori di una molecola) sia dovuto alle collisioni casuali tra le molecole del solvente in cui è dispersa la particella e la particella stessa. Il risultato è un moto disordinato in direzioni non prevedibili di cui è però possibile prevedere lo spostamento quadratico medio compiuto dalla particella rispetto a una posizione originale in un tempo t .

Nel corso del terzo ed ultimo capitolo andremo ad ossevare la connessione esistente tra il formalismo degli integrali di percorso proposto da Feynman ed il moto Browniano.

3.1 Random walk

In matematica il random walk rappresenta un processo stocastico che descrive un percorso che consiste in una successione di passi casuali. Questo processo assume importanza in fisica in quanto può essere utilizzato per descrivere alcuni importanti fenomeni naturali come ad esempio il moto Browniano. Consideriamo una particella in moto Browniano in grado di effettuare piccoli passi di uguale lunghezza L nello spazio. Lo scopo dello studio è prevedere, dopo un certo intervallo di tempo, quanto lontano dalla posizione iniziale è probabile che si trovi la particella stessa [9]. In questo modello si assume che ogni passo è indipendente da quello precedente. Si può dimostrare che se \mathbf{R}_N è la distanza vettoriale dall'origine dopo N passi allora il valor medio del suo quadrato è proporzionale al numero di passi:

$$\langle R^2 \rangle = NL^2 = \alpha t \quad (3.1.1)$$

con α coefficiente. L'ultima uguaglianza è giustificata dalla proporzionalità rispetto al tempo del numero di passi N . Il fatto che il valor medio del quadrato della distanza R sia proporzionale al tempo non significa che la distanza media lo sia, se così fosse

infatti avremmo una particella in moto a velocità uniforme. Il random walk è quindi caratterizzato da un moto tale per cui solo il valor medio del quadrato della distanza R è proporzionale al tempo. Risulta molto semplice ora dimostrare che ad ogni passo $\langle R \rangle^2$ aumenta, in media, di una quantità L^2 . Abbiamo infatti che

$$\mathbf{R}_N = \mathbf{R}_{N-1} + \mathbf{L}, \quad (3.1.2)$$

da cui segue

$$\mathbf{R}_N^2 = \mathbf{R}_N \cdot \mathbf{R}_N = R_N^2 = \mathbf{R}_{N-1}^2 + 2\mathbf{R}_{N-1} \cdot \mathbf{L} + L^2 \quad (3.1.3)$$

e, facendo la media su molte prove, si ottiene

$$\langle R_N^2 \rangle = \langle R_{N-1}^2 \rangle + L^2 \quad (3.1.4)$$

dato che $\langle \mathbf{R}_{N-1} \cdot \mathbf{L} \rangle = 0$. Andiamo ora a calcolare il coefficiente α nell'equazione (3.1.1). Per farlo immaginiamo di applicare una forza alla particella sapendo che essa naturalmente reagirebbe contro la forza applicata. Vi sarebbe quindi dell'inerzia. Possiamo indicare con m il coefficiente di inerzia, ossia la massa efficace della particella. Assumiamo poi che la particella si stia muovendo in un fluido e che quindi la sua velocità sia frenata dalla resistenza dovuta alla viscosità del fluido stesso. Avremo allora che il moto della particella è determinato dalla formula

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} = F_{ext}. \quad (3.1.5)$$

Consideriamo il caso in cui la forza non è esterna, ma è uguale alle forze irregolari del moto Browniano e cerchiamo di determinare il valore medio del quadrato della distanza percorsa dalla particella. Sappiamo che la rapidità di variazione di x^2 è

$$\frac{dx^2}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} \quad (3.1.6)$$

perciò la quantità da determinare è $2 \langle x \dot{x} \rangle$. Scriviamo

$$mx \frac{d^2x}{dt^2} + \mu x \frac{dx}{dt} = x F_x \quad (3.1.7)$$

e prendiamone la media. Per il termine $x F_x$ possiamo dire che se la particella ha percorso una certa distanza x allora, siccome la forza è irregolare, l'impulso successivo potrà essere in qualunque direzione relativamente ad x . Essendo tutte le direzioni equiprobabili il termine è nullo. Lavoriamo ora sul termine $mx \frac{d^2x}{dt^2}$ che possiamo vedere come

$$mx \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{d}{dt} \left(x \frac{dx}{dt} \right) - m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2. \quad (3.1.8)$$

Dagli studi di termodinamica sappiamo che un termine $\frac{1}{2}mv_x^2$ ha valore medio $\frac{1}{2}kT$ per cui

$$\left\langle mx \frac{d^2x}{dt^2} \right\rangle + \mu \left\langle x \frac{dx}{dt} \right\rangle = \langle xF_x \rangle \quad (3.1.9)$$

porta a

$$\left\langle mv_x^2 \right\rangle + \frac{\mu d}{2dt} \left\langle x^2 \right\rangle = 0 \quad (3.1.10)$$

ossia

$$\frac{d}{dt} \left\langle x^2 \right\rangle = 2 \frac{kT}{\mu}. \quad (3.1.11)$$

Abbiamo così ricavato

$$\left\langle R^2 \right\rangle = 6kT \frac{t}{\mu} \quad (3.1.12)$$

che prova la proporzionalità diretta tra il tempo ed il valor medio del quadrato della distanza.

3.2 Moto browniano ed integrale di Wiener

In questa sezione descriveremo la connessione esistente tra l'integrazione sui cammini ed il moto Browniano. In particolare mostreremo come tramite lo studio del moto Browniano si possa definire la misura, e quindi di conseguenza l'integrale, di Wiener [8]. Questo è importante perchè l'integrale di Wiener è un autentico integrale sullo spazio dei cammini. Per fare questo è necessario riprendere quanto detto nella sezione precedente sul random walk. Consideriamo un random walk unidimensionale discreto caratterizzato da passi di uguale lunghezza Δ , intervalli di tempo ϵ e probabilità p e q di muoversi rispettivamente verso destra o sinistra. Sappiamo che, dato che stiamo considerando il caso unidimensionale varrà $p + q = 1$. Definiamo poi le quantità $x = j\Delta$, $t = N\epsilon$ e la probabilità $u(j, N)$ che il sistema si trovi in $x(j)$ al tempo $t(N)$ essendo partito in $(x, t) = (0, 0)$. Fatte queste premesse sappiamo che per avere una distanza netta di j passi verso destra sarà necessario avere μ passi verso destra e ν passi verso sinistra in modo che $j = \mu - \nu$ e $N = \mu + \nu$. Questo può avvenire in $\binom{N}{\mu}$ modi differenti per cui avrò

$$u(j, N) = \binom{N}{\mu} p^\mu q^\nu. \quad (3.2.1)$$

Sfrutto ora l'approssimazione di Stirling

$$n! \cong \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (3.2.2)$$

per ricavare

$$u(j, N) = \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \exp\left\{-\frac{(j - \alpha)^2}{2N}\right\} \quad (3.2.3)$$

con $\alpha = N(p - q)$ e con j ed N grandi. Considerando ora la quantità $\rho(x, t) = \frac{u(j, N)}{2\Delta}$, che rappresenta la densità di particelle per unità di x , possiamo scrivere

$$\rho(x, t) = \sqrt{\frac{\epsilon}{2\pi t \Delta^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2t} \left(\frac{\epsilon}{\Delta^2}\right) (x - \alpha\Delta)^2\right\} \quad (3.2.4)$$

che andremo a studiare nel limite di moto browniano continuo ossia per $\epsilon, \Delta \rightarrow 0$ mantenendo però x, t e la frazione $\frac{\epsilon}{\Delta^2}$ finiti. Conviene definire il coefficiente di diffusione D come $D = \frac{\Delta^2}{2\epsilon}$ sapendo che questa frazione deve rimanere costante. Abbiamo inoltre che

$$\alpha\Delta = t \frac{\Delta}{\epsilon} (p - q) \quad (3.2.5)$$

con la differenza $(p - q)$ che deve essere nulla affinché si possa avere un risultato finito. Definiamo infine $c = \frac{\Delta}{\epsilon}(p - q)$ che ci permette di scrivere

$$\rho(x, t) = \sqrt{\frac{1}{4\pi Dt}} \exp\left\{-\frac{(x - ct)^2}{4Dt}\right\} \quad (3.2.6)$$

che ci mostra come la particella sia in un processo diffusivo e che si muove con velocità di deriva c . Si può infatti dimostrare che $\rho(x, t)$ soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - c \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (3.2.7)$$

Andiamo ora a descrivere l'approccio di Wiener al moto Browniano e facciamolo considerando la velocità di deriva c nulla. Sappiamo che, dati $(x, t) = (0, 0)$, la probabilità che la particella al tempo t si trovi nell'intervallo di spazio $[a, b]$ è data da

$$\int_a^b \rho(x, t) dx \quad (3.2.8)$$

per cui la probabilità che la particella si trovi in $[a_1, b_1]$ al tempo t_1 , in $[a_2, b_2]$ al tempo t_2 e così via fino ad arrivare in $[a_N, b_N]$ al tempo t_N è data da

$$\int_{a_1}^{b_1} \rho(x_1, t_1) dx_1 \cdot \int_{a_2}^{b_2} \rho(x_2 - x_1, t_2 - t_1) dx_2 \cdots \int_{a_N}^{b_N} \rho(x_N - x_{N-1}, t_N - t_{N-1}) dx_N. \quad (3.2.9)$$

Ciò che ci interessa però è la probabilità condizionale che la particella soddisfi $a_i < x(t_i < b_i)$ ad ogni t_i con $i = 1, 2, \dots, N - 1$ considerando sempre che essa parte in $(x, t) = (0, 0)$ ed arriva in (x_N, t_N) . Questa probabilità è quantificata da

$$\frac{\int_{a_1}^{b_1} \rho(x_1, t_1) dx_1 \cdot \int_{a_2}^{b_2} \rho(x_2 - x_1, t_2 - t_1) dx_2 \cdots \int_{a_{N-1}}^{b_{N-1}} \rho(x_{N-1} - x_{N-2}, t_{N-1} - t_{N-2}) dx_{N-1}}{\rho(x_N, t_N)} \quad (3.2.10)$$

che è in pieno accordo con la formula nota

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} \quad (3.2.11)$$

che riflette la probabilità condizionale per un evento A dato il verificarsi dell'evento B . La probabilità appena descritta può essere interpretata quindi come la probabilità che la particella passi al tempo prestabilito attraverso tutti gli intervalli dati e quindi in altre parole, portando $N \rightarrow \infty$, la probabilità che essa compia un certo percorso. Con il limite $N \rightarrow \infty$ otteniamo una misura nello spazio dei percorsi detta misura di Wiener che ci porta alla definizione dell'integrale di Wiener. Per identificare meglio la misura introdotta bisogna però chiarire alcuni aspetti. Risulta infatti necessario capire su quale spazio è definita la misura, quale sia la σ -algebra di insiemi misurabili e quale sia la misura di un insieme in quella σ -algebra. Avremo in primis che lo spazio su cui imponiamo la misura proposta è quello delle funzioni continue $x(\cdot)$ aventi $x(0) = 0$ ed $x(t) = x$. Avremo poi che la σ -algebra sarà costruita utilizzando insiemi cilindrici definiti da

$$K[a_1, b_1, t_1; \dots; a_n, b_n, t_n] = \{x(\cdot) | a_i < x(t_i) < b_i, i = 1, \dots, N\} \quad (3.2.12)$$

aventi come misura il numero (3.2.9). Per ottenere la σ -algebra sarà quindi sufficiente formare unioni ed intersezioni numerabili degli insiemi cilindrici definiti sopra mentre la misura sarà definita come solito. Nella scrittura dell'integrale di Wiener vogliamo adottare un punto di vista probabilistico che sottolineiamo scrivendo l'integrale stesso come un valore di aspettazione E . Per fare questo consideriamo Q come funzione dei cammini $x(\tau)$ ed otteniamo

$$E_{xt}(Q) = \sum_q q P'_w \{x(\tau) \in \Omega | Q[x(\tau)] = q\} \quad (3.2.13)$$

dove Ω è lo spazio dei cammini con inizio in $(0, 0)$ ed arrivo in (x, t) e $P'_w \{x(\tau) \in \Omega | Q[x(\tau)] = q\}$ è la misura di Wiener non normalizzata dell'insieme dei percorsi su cui Q assume il valore q . Sia poi $Q(x_1, \dots, x_{N-1})$ il valore di Q sul cammino spezzato passante per $(0, 0)$, (x_1, t_1) , \dots , (x_{N-1}, t_{N-1}) , (x, t) dove $t = \frac{jt}{N}$, allora sarà chiaro come l'integrale di Wiener $E_{xt}(Q)$ è valutato allo stesso modo in cui si valuta l'integrale di Feynman. Infatti

$$E_{xt}(Q) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x_1, t_1) dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x - x_{N-1}, t - t_{N-1}) Q(x_1, \dots, x_N) dx_{N-1} \quad (3.2.14)$$

la cui mancanza di normalizzazione è causata dalla non integrazione su x_N come evidente da

$$E_{xt}(1) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4Dt}\right\}. \quad (3.2.15)$$

3.2.1 Dimostrazione di Kac

Dopo aver definito l'integrale di Wiener $E_{xt}(Q)$ introduciamo la quantità

$$W(x, t) = E_{xt} \left[\exp \left\{ - \int_0^t U(x(\tau)) d\tau \right\} \right] \quad (3.2.16)$$

dove $U(x)$ è una qualche funzione di x . Vogliamo dimostrare che, così come il propagatore di Feynman soddisfa l'equazione di Schrödinger, per $W(x, t)$ vale un simile risultato [8]. Per iniziare sfruttiamo la linearità degli integrali e scrivere

$$W(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} E_{xt} \left[\left(\int_0^t U(x(\tau)) d\tau \right)^j \right] \quad (3.2.17)$$

che ci permette di valutare i termini corrispondenti ai diversi valori di j . Scriviamo quindi per $j = 0$

$$W_0(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp \left\{ - \frac{x^2}{4Dt} \right\} = E_{xt}(1) = \rho(x, t) \quad (3.2.18)$$

attraverso la quale è definita la funzione W_0 . Per $j = 1$ si ha poi

$$\begin{aligned} W_1(x, t) &= E_{xt} \left[\int_0^t U(x(\tau)) d\tau \right] \\ &= \int_0^t E_{xt} U(x(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

e, sapendo che il valore di aspettazione di $U(x(\tau))$ è definito dalla moltiplicazione tra la probabilità che $x(\tau)$ assuma un valore ξ ed il valore $U(\xi)$, abbiamo

$$\begin{aligned} W_1(x, t) &= \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \rho(x - \xi, t - \tau) U(\xi) \rho(\xi, \tau) \\ &= \int_0^t d\tau \int d\xi \rho(x - \xi, t - \tau) U(\xi) W_0(\xi, \tau). \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Passando poi al calcolo per $j = 2$ risulta

$$W_2(x, t) = \frac{E_{xt}}{2} \left[\int_0^t U(x(\tau_1)) d\tau_1 \int_0^t U(x(\tau_2)) d\tau_2 \right] \quad (3.2.21)$$

che, sfruttando il lemma secondo cui

$$\left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right]^N = N! \int_0^t d\tau_1 \cdots \int_0^{\tau_{N-1}} f(\tau_1) \cdots f(\tau_N) d\tau_N, \quad (3.2.22)$$

può essere scritta come

$$W_2(x, t) = \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 E_{xt} [U(x(\tau_1))U(x(\tau_2))]. \quad (3.2.23)$$

Ragionando come abbiamo fatto per W_1 otteniamo inoltre

$$\begin{aligned} W_2(x, t) &= \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \int \int d\xi d\eta \rho(x - \xi, t - \tau_1) U(\xi) \rho(\xi - \eta, \tau_1 - \tau_2) U(\eta) \rho(\eta, \tau_2) \\ &= \int_0^t d\tau_1 \int d\xi \rho(x - \xi, t - \tau_1) U(\xi) W_1(\xi, \tau_1) \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

che ci mostra chiaramente la validità della relazione

$$W_j(x, t) = \frac{1}{j!} E_{xt} \left[\left(\int_0^t U(x(\tau)) d\tau \right)^j \right] \quad (3.2.25)$$

da cui segue

$$W_j(x, t) = \int_0^t d\tau \int d\xi \rho(x - \xi, t - \tau) U(\xi) W_{j-1}(\xi, \tau) \quad (3.2.26)$$

dove $j = 1, 2, \dots$. Consideriamo nuovamente l'equazione (3.2.16), alla luce di quanto visto finora possiamo scrivere l'equazione integrale per W

$$\begin{aligned} W(x, t) &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j W_j(x, t) \\ &= W_0(x, t) - \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \int_0^t d\tau \int d\xi W_0(x - \xi, t - \tau) U(\xi) W_{j-1}(\xi, \tau) \\ &= W_0(x, t) - \int_0^t d\tau \int d\xi W_0(x - \xi, t - \tau) U(\xi) W(\xi, \tau) \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

che implica, tenuto conto del fatto che W_0 è uguale a $\rho(x, t)$ e che quindi soddisfa (3.2.7) e che per $t \rightarrow 0$ è una funzione delta di Dirac (guarda appendice A.1), che la quantità W soddisfi l'equazione integrale

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} - U(x) W(x, t). \quad (3.2.28)$$

Questo fatto mette in evidenza l'esistenza di un'analogia formale tra l'integrazione di Wiener e l'integrazione sui cammini, analogia che verrà esaminata più nel dettaglio nella sezione seguente.

3.2.2 Confronto tra l'integrazione sui cammini e l'integrazione di Wiener

Consideriamo una situazione particolare al fine di rendere ancora più evidente il legame tra l'integrazione sui cammini e l'integrazione di Wiener [8]. Si consideri una particella

puntiforme in moto Browniano unidimensionale e senza deriva. Supponendo che essa sia in $x = 0$ al tempo $t = 0$ vogliamo calcolare il tempo in cui raggiunge $x = a$ ossia la probabilità $p(t)$ che la sua traiettoria $x(\tau)$ soddisfi la condizione $x(\tau) \leq a$ per ogni τ tale che $0 \leq \tau \leq t$. In questo caso è conveniente lavorare con la misura di Wiener che si ottiene integrando sulla variabile x in E_{xt} , ossia

$$E_t(Q) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{xt}(Q) dx. \quad (3.2.29)$$

Definiamo ora

$$Q(x(\tau)) = \exp \left\{ - \int_0^t V_a(x(\tau)) d\tau \right\} \quad (3.2.30)$$

dove il potenziale V_a è descritto da

$$V_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a; \\ \infty & \text{se } a \leq x; \end{cases} \quad (3.2.31)$$

ossia definito come una barriera infinita di potenziale in $x = a$. Come possiamo osservare dalla definizione di Q questo si annulla per ogni x maggiore di a mentre assume valore unitario per x tra zero ed a . Abbiamo allora che la probabilità che la particella non sia mai stata in valori di x maggiori di a è data da

$$\begin{aligned} p(t) &= E_t(Q) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx E_{xt} \left[\exp \left\{ - \int_0^t V_a(x(\tau)) d\tau \right\} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx W(x, t) \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

che soddisfa (3.2.27) con $V_a = U$. Sappiamo poi che la funzione di Green per l'equazione di Schrödinger soddisfa

$$i \frac{\partial G(x, s; 0)}{\partial s} = -D \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + V_a G \quad (3.2.33)$$

e che sia G che W tendono alla funzione delta per $t \rightarrow 0$. Comparando le equazioni differenziali per G e W notiamo come

$$G(x, -it; 0) = W(x, t) \quad (3.2.34)$$

che ci mostra la relazione ricercata. Sappiamo infatti che è possibile scrivere la funzione G utilizzando il formalismo degli integrali di percorso e quindi sarà possibile utilizzare quest'ultimo per definire la quantità W . Per calcolare G utilizzando gli integrali di percorso si deve considerare un cammino avente inizio in $(0, 0)$ ed arrivo in (x, t) con un potenziale nullo per $x < a$ e con un muro di potenziale infinito in $x = a$. Esistono due

cammini che soddisfano queste richieste e sono rispettivamente un cammino diretto che la particella percorre con velocità descritta da $\frac{x}{t}$ ed un cammino che prevede che la particella rimbalzi sulla barriera di potenziale ed abbia velocità $\frac{2a-x}{t}$. Sappiamo che per sfruttare il formalismo di Feynman ci serve conoscere l'azione classica associata ad ognuno dei due possibili cammini, scriveremo dunque

$$S_a = \frac{x^2}{4Dt} \quad (3.2.35)$$

per il primo e

$$S_b = \frac{(2a-x)^2}{4Dt} \quad (3.2.36)$$

per il secondo. Considerando ora valida l'approssimazione WKB (guarda appendice B) allora è ragionevole che G sia

$$G(x, t; 0) = \sqrt{\frac{1}{4\pi Dit}} \left[\exp\left\{\frac{ix^2}{4Dt}\right\} - \exp\left\{i\frac{(2a-x)^2}{4Dt}\right\} \right] \quad (3.2.37)$$

mentre sia nulla per $x > a$. Nella formula appena presentata il segno meno per il secondo esponenziale è necessario affinché sia rispettata la condizione di annullamento sul bordo del dominio considerato. Osserviamo però come entrambi i termini esponenziali soddisfino singolarmente l'equazione di Schrödinger, come insieme soddisfino la condizione al contorno in a e come nel limite $t \rightarrow 0$ il primo termine esponenziale tenda alla funzione delta ed il secondo invece scompaia. Tutto questo ci fa capire come (3.2.37) sia effettivamente il propagatore esatto. Tornando al calcolo della probabilità $p(t)$ sappiamo di poter sfruttare la relazione tra G e W mostrata in precedenza che ci consentirà di scrivere

$$\begin{aligned} p(t) &= \int_{-\infty}^a dx \sqrt{\frac{1}{4\pi Dit}} \left[\exp\left\{\frac{-x^2}{4Dt}\right\} - \exp\left\{i\frac{(2a-x)^2}{4Dt}\right\} \right] \\ &= 2\sqrt{\frac{1}{4\pi Dit}} \int_{-\infty}^a dx \exp\left\{\frac{-x^2}{4Dt}\right\}. \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

ossia una relazione esplicita per la probabilità $p(t)$. Questo procedimento può essere generalizzato in modo da poter trattare una particella confinata in più regioni diverse.

Ritornando al confronto tra le due integrazioni risulta interessante provare ad ottenere l'integrale di Feynman direttamente dall'integrale di Wiener. Per fare questo consideriamo di avere una funzione U puramente immaginaria descritta da $U(x) = iV(x)$ e di considerare $W(x, t)$ come funzione del coefficiente di diffusione D . Abbiamo visto che per D reale e positivo la misura di Wiener è completamente determinata. In particolare, considerando le formule integrali di Wiener, si ha che queste possono essere sottoposte a prolungamento analitico e che gli oggetti ottenuti in questo modo soddisfano l'equazione di Schrödinger. Consideriamo ora D complessa. In questo caso però i prolungamenti analitici smettono

di essere integrali funzionali e questo rappresenta un problema per il conseguimento del nostro scopo. Sono numerosi i tentativi di aggirare questa problematica e riuscire così a creare una misura in grado di comprendere l'integrale di percorso.

Conclusione

In questa tesi è stata discussa la formulazione degli integrali sui cammini per la meccanica quantistica. La derivazione di questo formalismo è stata guidata in modo particolare da due principi chiave. Partendo infatti dal principio secondo cui la traiettoria seguita da una particella, tra due punti in cui questa viene osservata, risulta essere non ben definita, abbiamo definito l'ampiezza di probabilità di transizione come la somma su tutti i percorsi che uniscono quei due punti. In secondo luogo abbiamo connesso il contributo all'ampiezza dovuto ad ogni singolo cammino con la corrispondente azione classica lungo quel cammino ed in particolare abbiamo visto che ogni percorso contribuisce con una fase data da $\frac{i}{\hbar}S$ con S azione classica. Abbiamo così dimostrato che è possibile scrivere il propagatore di un sistema quantistico, e quindi descrivere l'evoluzione temporale del sistema stesso, come somma sui cammini. A scopo di esempio è poi riportato il calcolo del propagatore per una particella quantistica libera. Per completare l'introduzione al nuovo formalismo abbiamo provveduto a dimostrare che il propagatore quantistico scritto come somma su tutti i possibili cammini soddisfa l'equazione di Schrödinger provando quindi l'equivalenza tra formalismo di Feynman ed il formalismo di Schrödinger descritto nel primo capitolo.

Nell'ultimo capitolo è stato poi definito, a partire da considerazioni sul moto Browniano, l'integrale di Wiener. Questo ci ha permesso di studiare la connessione esistente tra l'integrazione di Wiener e l'integrazione sui cammini e di osservare come l'integrale di Wiener sia un autentico integrale sui percorsi. A questo scopo è riportata la dimostrazione di Kac.

Funzioni speciali¹

A.1 Distribuzione δ di Dirac

La δ di Dirac è una funzione, o una distribuzione, generalizzata definita da

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0; \\ 0 & , \quad x \neq 0. \end{cases} \quad (\text{A.1.1})$$

Questa soddisfa

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) f(x) = f(0). \quad (\text{A.1.2})$$

La rappresentazione di Fourier, in D dimensioni, della distribuzione δ di Dirac è

$$\delta(\mathbf{x}) = \int \frac{d^D y}{(2\pi)^D} e^{iy \cdot \mathbf{x}}. \quad (\text{A.1.3})$$

A.2 Distribuzione θ di Heaviside

La distribuzione θ di Heaviside definita da

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 & , \quad x > 0. \end{cases} \quad (\text{A.2.1})$$

Una caratteristica importante è

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t) dt \quad (\text{A.2.2})$$

ossia la distribuzione δ di Dirac risulta essere la derivata della distribuzione θ di Heaviside.

A.3 Funzioni di Green

Le funzioni di Green giocano un ruolo fondamentale in fisica in quanto sono uno strumento utile nella risoluzione di equazioni differenziali non omogenee [11]. Supponiamo di voler

¹Per la scrittura di questa appendice sono stati consultati [10] e <https://dlmf.nist.gov>

risolvere

$$\hat{L}\phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \quad (\text{A.3.1})$$

Spesso gli operatori differenziali come \hat{L} hanno un inverso che è un operatore integrale per cui ci aspettiamo che la soluzione all'equazione differenziale appena presentata sia della forma

$$\phi(\mathbf{x}) = \int G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0. \quad (\text{A.3.2})$$

Se esiste una rappresentazione integrale di questo tipo per ϕ allora il nucleo $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ dell'operatore integrale appena definito è detto funzione di Green. Per dare un significato fisico a quello che è stato detto si è soliti indicare $\phi(\mathbf{x})$ come la risposta in \mathbf{x} allo stimolo fornito dalla funzione sorgente $f(\mathbf{x})$. In questo senso l'integrale può essere pensato come la somma sugli stimoli dovuti alle sorgenti ad ogni valore di \mathbf{x}_0 . La definizione appena data però non ci dice nulla su come si costruisce la funzione di Green G . A questo proposito consideriamo $f(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ e notiamo come la soluzione ad un'equazione differenziale del tipo

$$\hat{L}\phi(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + c.o.c., \quad (\text{A.3.3})$$

con c.o.c che indica le condizioni omogenee al contorno, dovrebbe essere

$$\phi(\mathbf{x}) = \int G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \delta(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_i) d\mathbf{x}_0 = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \quad (\text{A.3.4})$$

ossia osserviamo come la funzione di Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ soddisfi l'equazione

$$\hat{L}_x G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (\text{A.3.5})$$

Questo modo di definire la funzione di Green G è più utile in quanto spesso è possibile risolvere questo tipo di equazioni differenziali non omogenee.

AppendiceB

Approssimazione WKB

L'approssimazione WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) è utilizzata spesso in meccanica quantistica in quanto fornisce una via per semplificare la risoluzione dell'equazione di Schrödinger. A differenza del metodo perturbativo che prevede di considerare un potenziale semplificato ed aggiungere piccoli termini, con l'approssimazione WKB si fa l'assunzione di avere un potenziale che varia lentamente. Per introdurre l'idea alla base di questa approssimazione consideriamo l'equazione di Schrödinger

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k(x)^2\psi = 0 \quad (\text{B.0.1})$$

dove

$$k(x) = \left(\frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.0.2})$$

quando $E > V(x)$ mentre

$$k(x) = i \left(\frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \right)^{\frac{1}{2}} = ik(x) \quad (\text{B.0.3})$$

quando $E < V(x)$. Come sappiamo nel caso in cui $k(x)$ è costante la soluzione all'equazione è $\psi(x) = \exp\{\pm(ikx)\}$. Se invece $k(x)$ non è costante ma la sua variazione è lenta allora è ragionevole proporre una soluzione del tipo

$$\exp\left\{\pm(i \int k(t) dt)\right\}. \quad (\text{B.0.4})$$

Inserendo quest'ultima nell'equazione di Schrödinger si ottiene che questa è soluzione solo nel caso in cui $k'(x) = 0$, infatti

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k(x)^2\psi = \left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right) \exp\left\{\pm(i \int k(t) dt)\right\} = \pm(ik'(x) \exp\left\{\pm(i \int k(t) dt)\right\}). \quad (\text{B.0.5})$$

Questa equazione ci mostra come $\exp\{\pm(i \int k(t) dt)\}$ sia una buona approssimazione per $|k'| \ll k^2$ che è la condizione che useremo per derivare l'approssimazione WKB. Assumiamo che la soluzione all'equazione di Schrödinger sia

$$\psi(x) = \exp\{iu(x)\} \quad (\text{B.0.6})$$

dove $u(x)$ è una funzione complessa sconosciuta. Inserendo psi così definita nell'equazione di Schrödinger otteniamo

$$iu''(x) - u'(x)^2 + k(x)^2 = 0. \quad (\text{B.0.7})$$

Risolviamo questa equazione differenziale con la seguente approssimazione. Abbiamo visto prima che considerando l'approssimazione zero una soluzione semplice all'equazione è data da

$$u_0 = \int_{x_0}^x k(t) dt. \quad (\text{B.0.8})$$

Dall'equazione differenziale per u possiamo ricavare

$$u_n = \pm \int_{x_0}^x \sqrt{k(t)^2 + iu(t)''_{n-1}} dt \quad (\text{B.0.9})$$

da cui si ricava facilmente la prima approssimazione

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \pm \int_{x_0}^x \sqrt{k(t)^2 + iu(t)''_0} dt \\ &= \pm \int_{x_0}^x k(t)^2 \sqrt{1 \pm i \frac{k(t)'}{k(t)^2}} \\ &\cong \int_{x_0}^x \pm k(t) + \frac{ik(t)'}{2k(t)} dt \\ &= \int_{x_0}^x \pm k(t) dt + \frac{i}{2} \ln k(x) + C \end{aligned} \quad (\text{B.0.10})$$

dove è stata usata la condizione $|k'| \ll k^2$. Possiamo notare come la prima approssimazione ed l'approssimazione zero siano simili il che mostra la bontà della prima approssimazione. Abbiamo quindi in questo caso che l'approssimazione al primo ordine di ψ è

$$\psi_1(x) = \exp\{iu_i(x)\} = \frac{1}{\sqrt{k(x)}} \exp\left\{\pm i \int_{x_0}^x k(t) dt\right\} \quad (\text{B.0.11})$$

dove non consideriamo la costante C in quanto è importante solo per la normalizzazione. Questa approssimazione è detta approssimazione WKB.

AppendiceC

Formula BCH

La formula BCH (Baker-Campbell-Hausdorff) fa riferimento al prodotto tra esponenziali di due operatori A e B ed afferma

$$\exp\{A\} \exp\{B\} = \exp\left\{A + B + \frac{[A, B]}{2} + \dots\right\} \quad (\text{C.0.1})$$

con i puntini che indicano una continuazione verso termini di ordine maggiore in A e B e che coinvolgono annidazioni di commutatori di A e B . Questa formula è importante in meccanica quantistica.

Per derivare la formula BCH definiamo

$$\exp\{xA\} \exp\{xB\} = \exp\{G(x)\} = \exp\{xG_1 + x^2G_2 + x^3G_3\} \quad (\text{C.0.2})$$

e consideriamo

$$\exp\{-xB\} \exp\{-xA\} \frac{d}{dx} \exp\{xA\} \exp\{xB\} = \exp\{-G(x)\} \frac{d}{dx} \exp\{G(x)\}. \quad (\text{C.0.3})$$

Concentrandoci sulla parte sinistra dell'equazione otteniamo

$$\begin{aligned} \exp\{-xB\} \exp\{-xA\} \frac{d}{dx} \exp\{xA\} \exp\{xB\} &= \exp\{-xB\} B \exp\{xB\} + \\ &\quad \exp\{-xB\} \exp\{-xA\} A \exp\{xA\} \exp\{xB\} \\ &= B + \exp\{-xB\} A \exp\{xB\} \\ &= B + A + x[A, B] + \frac{x^2}{2}[B, [B, A]] + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.0.4})$$

mentre dalla parte destra

$$\begin{aligned} \exp\{-G(x)\} \frac{d}{dx} \exp\{G(x)\} &= G' + \frac{1}{2}[G', G] + \frac{1}{3!}[[G', G], G] + \dots \\ &= G_1 + 2xG_2 + x^3 \left(3G_3 - \frac{1}{2}[G_1, G_2] \right) + O(x^3) \end{aligned} \quad (\text{C.0.5})$$

dove abbiamo utilizzato la derivata prima $G' = G_1 + 2xG_2 + 3x^2G_3$ di G e

$$\begin{aligned}
 &= [G_1 + 2xG_2 + 3x^2G_3, xG_1 + x^2G_2 + x^3G_3] \\
 &= -x^2[G_1, G_2] + 2x^2[G_2, G_1] + O(x^3) \\
 &= -x^2[G_1, G_2] + O(x^3).
 \end{aligned} \tag{C.0.6}$$

Eguagliando ora quanto ottenuto per le parti sinistra e destra otteniamo $G_1 = A + B$, $G_2 = \frac{1}{2}[A, B]$ e $G_3 = \frac{1}{12}([A, [A, B]] + [B, [B, A]])$ da cui affermiamo

$$\exp\{A\} \exp\{B\} = \exp\left\{A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}([A, [A, B]] + [B, [B, A]])\right\} \tag{C.0.7}$$

che è quanto volevamo ricavare. Abbiamo così derivato la formula BCH.

Bibliografia

- [1] Paul Adrien Maurice Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 1981. ISBN: 9780198520115.
- [2] Richard Phillips Feynman. «Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics». In: *Feynman's Thesis—A New Approach To Quantum Theory* (2005), pp. 71–109.
- [3] Dennis V Perepelitsa. *Path integrals in quantum mechanics*. 2018.
- [4] Lev Davidovič Landau e Evgenij Michajlovič Lifšits. *Fisica Teorica 3 - Meccanica quantistica - Teoria non relativistica*. Corso di fisica teorica. Editori Riuniti, 2010. ISBN: 9788864732084.
- [5] Roberto Zucchini. «Quantum Mechanics: lecture notes.» Lectures delivered at the University of Bologna in 2020.
- [6] Jun John Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994. ISBN: 0201539292.
- [7] Riccardo Rattazzi. *The Path Integral approach to Quantum Mechanics Lecture Notes for Quantum Mechanics IV*. 2009.
- [8] Lawrence S Schulman. *Techniques and applications of path integration*. Courier Corporation, 2012.
- [9] Richard P Feynman, Robert B Leighton e Matthew Sands. *The Feynman lectures on physics, Vol. I: The new millennium edition: mainly mechanics, radiation, and heat*. Vol. 1. Basic books, 2011.
- [10] Milton Abramowitz e Irene Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publication, 1972. ISBN: 0486612724.
- [11] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. Addison Wesley Publishing Company, 1975. ISBN: 047130932X.