ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tecniche e metodi per le Equazioni Differenziali Stocastiche di McKean-Vlasov

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Stefano Pagliarani

Presentata da:
Davide Trevisani

Anno accademico 2020-21

Alla mia FAMIGLIA . . .

Introduzione

L'argomento di questa tesi è una classe di equazioni differenziali stocastiche (SDEs), dette SDEs di McKean-Vlasov (MKV). Esse differiscono dalle SDEs standard in quanto i loro coefficienti possono dipendere dalla legge della soluzione, oltre che dal tempo e dal valore di quest'ultima. Queste equazioni, introdotte da McKean in [23] come modello per l'equazione cinetica di Vlasov per i plasma, sono oggi utilizzate in diversi campi applicativi che, oltre alla fisica, variano dalle scienze sociali alla *data science*: vi sono applicazioni al *machine learning*, alle neuroscienze e soprattutto all'economia e alla finanza. Per questa ragione, negli ultimi vent'anni, esse sono state ragione di interesse sia dal punto di vista teorico che numerico.

Seguendo la trattazione presente nel IX capitolo di [13], tra gli argomenti di questa tesi viene studiato un esempio di SDE con un drift di MKV lineare rispetto alla legge:

$$\begin{cases} dX_t = \int b(X_t, y)\mu_t(dy) + \sigma dW_t \qquad t \geq 0 \\ X_0 = Y \\ \mu_t \text{ legge di } X_t. \end{cases} \tag{1}$$

In particolare, la presenza del valor medio $\mathbb{E}[b(x, X_t)]_{x=X_t}$ suggerisce l'interpretazione che X possa essere visto come caso limite di un sistema *mean field* di particelle interagenti. Più precisamente, si dimostrerà che ogni componente del sistema di N particelle dato dalla SDE N-dimensionale

$$\begin{cases} dX_t^{(i,N)} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N b(X_t^{(i,N)}, X_t^{(j,N)}) + \sigma dW_t^{(i)} & t \in [0,T] \\ X_0^{(i,N)} = Y^{(i,N)} \text{ i.i.d.} & i = 1, \dots, N \end{cases} \tag{2}$$

converge per $N \to +\infty$, sotto le appropriate ipotesi di limitatezza e regolarità di b, alla soluzione di (1). Ciò che si verifica è, in altre parole, che nel passaggio dalla scala microscopica a quella macroscopica, una particella in un ambiente densamente popolato smette di vedere l'interazione di campo medio, risultando asintoticamente indipendente rispetto alle altre. Questa proprietà, di cui verrà data una definizione, è nota in letteratura come propagazione del chaos e fu provata per la prima volta in [28]. Negli ultimi decenni però risultati analoghi sono stati dimostrati anche in modelli più ricchi in cui compare, ad esempio, un'interazione di campo medio anche nel coefficiente di diffusione,un *common noise* , delle dinamiche salto nella diffusione, una dipendenza non lineare rispetto alla legge. In particolare, una classe di MKV con salto è stata studiata in diversi articoli (si veda [10]) come una rete neurale di tipo *integrate-and-fire*. Si noti inoltre che il moto browniano di Dyson possiede un'espressione del tipo (2); ciò significa che lo studio del comportamento asintotico degli autovalori di una matrice aleatoria può essere trasferito a quello della relativa soluzione di MKV e in tal senso un'applicazione può essere trovata in [3].

L'elemento di maggior rilievo per un risultato di propagazione del chaos sta però nel fatto che, insieme a un risultato di esistenza ed unicità, la legge di una soluzione di MKV possa essere arbitrariamente approssimata simulando un sistema di particelle. Ciò apre le porte a tecniche numeriche che possono dunque essere utilizzate per la rappresentazione dei processi di MKV mediante la legge empirica del sistema; a tal proposito si vedano articoli come [24], [6], [4], [30], [31]. Infine, altri metodi numerici sono stati recentemente proposti: in [14] e [22] procedendo attraverso approsimazioni analitiche e in [2],[29] con iterazioni di Picard.

Ritornando alla PDE (1) si fissi d dimensione della soluzione e $T > 0$:

l'esistenza e l'unicità per (1) segue da un metodo del punto fisso nello spazio di misure di probabilità su $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)$ munito di una metrica, conosciuta come distanza di *Wasserstein*. Quest'ultima, introdotta come distanza per il trasporto ottimo (si veda [32] per una monografia completa in materia), è uno strumento essenziale per lo studio delle SDEs di MKV ed è largamente utilizzata nelle sopracitate estensioni di (1). Tipicamente, si richiede che i coefficienti delle SDEs di MKV soddisfino alcune ipotesi di regolarità, come la lipschitzianità, rispetto a tale metrica.

In analogia con le SDEs standard, il collegamento con equazioni differenziali alle derivate parziali è particolarmente rilevante. Si consideri la soluzione monodimensionale $X_t \sim \mu_t$ di (1); segue immediatamente dalla formula di Itô che μ_t deve risolve l'equazione distribuzionale di Kolmogorov (o equazione di Fokker-Plank)

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t = \frac{1}{2}\sigma^2 \partial^2_{xx}\mu_t - \partial_x \left(\mu_t \int_{\mathbb{R}} b(x,y)\mu_t(dy)\right), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ \mu_0 \text{ legge di Y} \end{cases} . \tag{3}$$

Si noti che tale equazione è sia non-lineare che non-locale. Un esempio rilevante è costituito dall'equazione di Burgers

$$\partial_t v = \frac{1}{2}\sigma^2 \partial^2_{xx} v - v\partial_x v,$$

la quale può essere ottenuta da (3) con $b(x,y) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{]-\infty,x]}(y)$, e con funzione di partizione v_t (di μ_t.

Per la formulazione dell'equazione *backward* di Kolmogorov è invece utile fissare la notazione $X^{t,\xi}$ per denotare un processo con valore iniziale ξ al tempo t e ξ è una variabile aleatoria integrabile. Per la SDE classica con coefficienti σ e b, è ben noto che la soluzione $X^{t,\xi}$ è un processo di Markov e definisce un flusso. Di conseguenza $V(t,x) = \mathbb{E}[\phi(X^{t,x}_T)]$, se sufficientemente regolare, risolve l'equazione *backward* di Kolmogorov:

$$\begin{cases} \partial_t V(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\partial^2_{xx}V(t,x) + b(x)\partial_x V(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R} \\ V(T,x) = \phi(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4}$$

Tuttavia, la proprietà di flusso non è valida per diffusioni di MKV. Allo scopo di ripristinare questa proprietà si procede munendo la soluzione di una misura in una componente, così da disaccoppiare l'interazione tra valore e legge. Di conseguenza, l'equazione *backward* di Kolmogorov contiene una derivata addizionale, la quale avviene rispetto alla legge. In questo contesto, la buona definizione di derivata rispetto a una misura è detta derivata di *Lions*, introdotta in[21] (si veda [8] e [9] per maggiori dettagli); essa si comporta bene rispetto alla metrica di Wasserstein $\mathcal{W}_2$. Recentemente è stata notata l'importanza delle equazioni del tipo flusso-gradiente a campo medio nel *training* di reti neurali profonde con metodi di *noisy gradient descent* (si veda [26]).

In questa tesi ci si concentrerà soprattutto nello studio di equazioni condizionate, una classe speciale di MKV, in cui la dipendenza rispetto alla misura avviene considerando la probabilità di una componente condizionata ad un'altra. Una motivazione di questa classe risiede nell'inversione dei risultati di proiezione markoviana presenti in ([19],[7], [16]). Questo problema conduce infatti alla ricerca di una soluzione per

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, Y_t, \mu_{Y_t|X_t})dt + \sigma(t, X_t, Y_t, \mu_{Y_t|X_t})dW_t \\ dY_t = f(t, X_t, Y_t)dt + g(t, X_t, Y_t)dB_t \end{cases} \tag{5}$$

in cui W, B sono moti browniani correlati. Particolari esempi di (5) compaiono nella costruzione di martingale di Itô aventi marginali prestabilite e il loro utilizzo è divenuto popolare in finanza per la calibrazione dei modelli a volatilità stocastica locale. Per esempio, si può dimostrare ([19]) che le soluzioni del sistema

$$dX_t = a(X_t)\frac{f(Y_t)}{\sqrt{\mathbb{E}[f^2(Y_t)|X_t]}}dW_t \tag{6}$$

$$dY_t = b(Y_t)dt + c(Y_t)dB_t, \tag{7}$$

se esistono, possiedono le stesse marginali di una diffusione con coefficienti a, b, c. La sfida principale in questo sistema risiede nella presenza dell'attesa condizionata in quanto il passaggio dalla distribuzione congiunta di (X_t, V_t)

alla condizionata $Y_t|X_t$ è notoriamente discontinua rispetto alla topologia debole sulle misure di probabilità. Altri esempi di (5) trovano applicazione in vari modelli per la fisica: ad esempio, in [6] si considerano dinamiche di tipo Langevin come alternativa alle equazioni di Navier-Stokes per flussi turbolenti ed il modello ha la forma (5) con il condizionamento invertito (compare $X_t|Y_t$ al posto di $Y_t|X_t$). Questa tesi si dedicherà per la maggior parte allo studio di queste due classi di equazioni condizionate.

Una teoria sull'esistenza e l'unicità per (5), ancora in gran parte inesplorata, risulta di grande importanza al fine di assicurare accuratezza degli algoritmi che si basano sull'utilizzo di una simulazioni di grandi sistemi di particelle. Per la sotto classe (6)-(7), dei risultati di esistenza sono stati provati in [19], e ancor prima in [1], sotto diverse ipotesi sulla distribuzione iniziale. Tale condizione, insieme all'indipendenza dei moti browniani sono però ipotesi molto limitative per le applicazioni reali.

Lo scopo di questa tesi è dunque l'esplorazione di nuove metodologie dimostrative, che riescano a provare la buona definizione di sistemi di MKV condizionati, e delle stime su tali soluzioni. Verrà data particolare attenzione all'articolo [5] al fine di provare un risultato di esistenza, unicità e propagazione del chaos. Questa metodologia può essere brevemente riassunta attraverso una doppia approssimazione della SDE di MKV: in primo luogo, la legge della soluzione è approssimata per mezzo di una convoluzione. A sua volta, tale approssimazione è approssimabile per mezzo di un sistema di particelle seguendo la stessa idea usata per l'equazione (2). Al fine di mostrare che le particelle di tale sistema convergono ad una soluzione della MKV condizionata, l'obiettivo è trovare una soluzione del problema della martingala associato alla MKV; tuttavia l'esistenza e l'unicità seguono da particolari ipotesi sui coefficienti. Un obiettivo è quello di studiare la possibilità di rilassare alcune ipotesi di regolarità di [5], in quanto i risultati presenti dipendo fortemente da stime gaussiane provate in [12] sotto ipotesi d hölderianità dei coefficienti. Tali stime sono però state recentemente estese in [20] a PDEs con coefficienti misurabili e una condizione debole di Hörmander, utilizzando le recenti disuguaglianze di Harnack in [15].

Un altro obiettivo è quello di capire se le tecniche qui utilizzate, e presenti in [5], possano essere applicate nello studio delle classi (6)-(7). Ciò implicherebbe, oltre all'esistenza e all'unicità, un risultato di propagazione del chaos, che costituirebbe un solido terreno matematico per i metodi numerici.

Infine, il modello studiato in [5] si basa su dinamiche di tipo Langevin, in cui una classe di diffusione browniana non agisce direttamente in tutte le componenti; questa condizione è conosciuta come anisotropia. Di conseguenza la PDE di Kolmogorov associata rientra in una classe di di PDE su cui vale una condizione debole di Hörmander. Ciò consentirebbe di considerare variazioni degeneri di (6)-(7) provenienti da applicazioni finanziarie, come la calibrazione di modelli a volatilità stocastica per opzioni a media aritmetica.

Indice

0.1 Notazioni

- $\mathcal{S}^n$: Il gruppo delle permutazioni di $\{1, \ldots, n\}$.
- Ω: Insieme degli eventi.
- $\mathscr{F}$: σ-algebra su un insieme di eventi Ω.
- $(\mathscr{F}_t)_t \in [0, T]$: Filtrazione di una σ-algebra $\mathscr{F}$.
- $\mathbb{P}$: Misura di probabilità definita su una σ-algebra $\mathscr{F}$.
- (E, d): Uno spazio metrico completo.
- $\mathbf{B}(E)$: Insieme delle funzioni boreliane $E \longrightarrow \mathbb{R}$.
- $C_b(E)$: Spazio delle funzioni continue e limitate $E \longrightarrow \mathbb{R}$.
- $C_c(E)$: Spazio delle funzioni continue e a supporto compatto $E \longrightarrow \mathbb{R}$.
- $C_b^k(\mathbb{R}^d)$: Spazio delle funzioni di $C_b(\mathbb{R}^d)$ derivabili fino all'ordine k
- $\|b\|_\infty$: Norma uniforme di una funzione $b \in C_b^k(\mathbb{R}^d)$.
- $C_c^k(\mathbb{R}^d)$: Spazio delle funzioni di $C_c(\mathbb{R}^d)$ derivabili fino all'ordine k con la topologia uniforme fino alle derivate di ordine k.
- $C([0, T], \mathbb{R}^d)$: Spazio delle funzioni continue $[0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ munito della topologia uniforme.[1]
- $\mathcal{M}(E)$: Spazio delle misure di probabilità definite sui boreliani di (E, d) munito della topologia debole di misure.
- $\mathbb{L}^\infty(E)$: Spazio delle funzioni $b \in \mathbf{B}(E)$ con $\|b\|_{\mathbb{L}^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in E} |b(x)| < +\infty$.
- $\mathbb{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ con $p \in [1, +\infty[$: Spazio delle v.a. X su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ tali che $\|X\|_{\mathbb{L}^p(\Omega,\mathbb{P})} := \int_\Omega |x|^p(\omega)\mathbb{P}(d\omega) < +\infty$.

[1] Quando d è specificato, esso viene indicato con C_T.

- $\mathbb{L}^p_{loc}([0,T])$ con $p \in [1, +\infty[$: Spazio dei processi stocastici X_t su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]})$ progressivamente misurabili e t.c. per ogni $t \in [0,T]$

$$\int_0^t |X_s|^p ds < +\infty$$

sia un evento $\mathbb{P}$-quasi certo.

Capitolo 1

Equazioni di McKean-Vlasov: un esempio lineare

Sia $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0})$ uno spazio filtrato di filtrazione $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ su cui valgono le ipotesi usuali. Si supponga di aver scelto una filtrazione per la quale è definita una famiglia numerabile $W, W^1, W^2, \ldots, W^n, \ldots$ di moti browniani d-dimensionali indipendenti. Siano

$$b : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^{2d}), \qquad \sigma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times d} \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^{2d}),$$

cioè misurabili rispetto alla σ-algebra di Borel $2d$-dimensionale.

Definizione 1. *Date $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^m$ misurabile e ν distribuzione su $\mathbb{R}^d$*

$$\bar{\varphi}^\nu(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x,y)\nu(dy).$$

In particolare se ν è la legge di una v.a. Y allora

$$\bar{\varphi}^\nu(x) = \mathbb{E}[\varphi(x,Y)].$$

In questa sezione verrà considerata la seguente equazione differenziale stocastica:

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t \bar{b}^{\mu_s}(X_s)ds + \int_0^t \bar{\sigma}^{\mu_s}(X_s)dW_s \qquad t \geq 0 \\ \mu_t = \text{legge di } X_t \end{cases}, \tag{1.1}$$

dove $X_0 \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathbb{P}, \mathscr{F}_0)$ v.a. su $\mathbb{R}^d$. L'equazione (1.1) è un esempio lineare di equazione di McKean-Vlasov: denotando con $B(X_s, \mu_s) := \int_0^t \bar{b}^{\mu_s}(X_s)ds$ il coefficiente di drift di tale equazione è immediato notare che esso dipende dalla legge μ della soluzione. Inoltre, tale dipendenza è lineare in μ, dunque la (1.1) è classificabile come equazione di MKV lineare.

I risultati successivi verranno provati sotto le seguenti ipotesi **(H1)** sulla coppia dei coefficienti (b, σ):

i) b è globalmente lipschitziana con costante L_b;

ii) $\|b\|_\infty = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |b(x,y)| < +\infty$;

iii) $\sigma(x, y) = \sigma$ è una matrice costante $d \times d$.

Theorem 1. *Se (b, σ) soddisfa le ipotesi **(H1)** allora esiste una e una sola soluzione della SDE (1.1).*

La dimostrazione di questo Teorema avviene mediante il metodo del punto fisso, attuato in uno spazio metrico di misure di probabilità.

Dimostrazione. Sia $M_T := \mathcal{M}(C([0,T], \mathbb{R}^d))$ l'insieme delle misure di probabilità definite sullo spazio delle funzioni continue $C_T := C([0,T], \mathbb{R}^d)$. Dato $\nu \in M_T$ è ben definito il processo

$$X_t = X_0 + \int_0^t \bar{b}^{\nu_s}(X_s)ds + \sigma W_t, \tag{1.2}$$

in quanto $\bar{b}^{\mu_s}(x)$ è lipschitziana uniformemente in s e quindi la coppia $(\bar{b}^{\mu_s}, \sigma)$ soddisfa le ipotesi standard di esistenza ed unicità per le SDEs. Denotando con $\phi(\nu) \in M_T$ la legge di X_t si ha che X_t risolve (1.1) se e solo se ν è un punto fisso di $\nu \mapsto \phi(\nu)$.

Per poter applicare il Teorema di Banach-Caccioppoli è dunque necessario munire $\mathcal{M}(C_T)$ di una metrica completa; tale ruolo è svolto da una metrica di Wasserstein definita come

$$D_T(\nu_1, \nu_2) := \inf_{\nu\in\mathcal{M}(C_T\times C_T) \text{ di marginali } \nu_1 \text{ e } \nu_2} \left\{ \int (\sup_{s\le T} |\omega_{1,s} - \omega_{2,s}| \wedge 1) d\nu(\omega_1, \omega_2) \right\}.$$

Circa la dimostrazione del fatto che lo spazio di Wasserstein $(\mathcal{M}(C_T), D_T)$ è uno spazio metrico completo si rimanda il lettore a [32]. Per dimostrare la tesi è dunque sufficiente che l'esistenza di un $k \in \mathbb{N}$ t.c ϕ^k sia una contrazione rispetto a D_T. A tal scopo, siano $\nu \in M_T$ di marginali ν_1, ν_2 e X_1, X_2 le rispettive soluzioni di (1.2). Per $t \in (0, T]$ si ha che

$$\begin{aligned}
&\sup_{s\le t} |X_{1,s} - X_{2,s}| \\
&\qquad \le \int_0^t \left| \int_{C_t} b(X_{1,s}, \omega_{1,s}) \nu_1(d\omega_1) - \int_{C_t} b(X_{2,s}, \omega_{2,s}) \nu_2(d\omega_2) \right| ds \\
&\qquad = \int_0^t \left| \int_{C_t \times C_t} b(X_{1,s}, \omega_{1,s}) - b(X_{2,s}, \omega_{2,s}) \nu(d\omega_1, \omega_2) \right| ds \\
&\qquad \le \int_0^t \int_{C_t \times C_t} |b(X_{1,s}, \omega_{1,s}) - b(X_{2,s}, \omega_{2,s})| \nu(d\omega_1, \omega_2) ds \\
&\le \int_0^t L_b |X_{1,s} - X_{2,s}| + \int_{C_t \times C_t} L_b \left(|\omega_{1,s} - \omega_{2,s}| \wedge 2\|b\|_\infty \right) \nu(d\omega_1, \omega_2) ds.
\end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dalla globale lipschitzianità e dalla limitatezza di b. Ponendo $K = \max(L_b, 2\|b\|_\infty)$ si ha che

$$\sup_{s\le t} |X_{1,s} - X_{2,s}| \le K \int_0^t L_b |X_{1,s} - X_{2,s}| + D_s(\nu_1, \nu_2) ds,$$

e per il Lemma di Gronwall

$$\sup_{s\le t} |X_{1,s} - X_{2,s}| \le K e^{KT} \int_0^t D_s(\nu_1, \nu_2) ds.$$

Di conseguenza

$$D_t(\phi(\nu_1), \phi(\nu_2)) \le K e^{KT} \int_0^t D_s(\nu_1, \nu_2) ds \le K e^{KT} t D_t(\nu_1, \nu_2).$$

Da tale disuguaglianza deduciamo

$$\begin{aligned}
D_t(\phi^2(\nu_1), \phi^2(\nu_2)) &\le K e^{KT} \int_0^T D_s(\phi(\nu_1), \phi(\nu_2)) ds \\
\le (K e^{KT})^2 \int_0^T s D_s(\nu_1, \nu_2) ds &= \frac{(K e^{KT})^2}{2!} t^2 D_t(\nu_1, \nu_2).
\end{aligned}$$

Induttivamente si giunge a dimostrare che $D_T(\phi^k(\nu_1), \phi^k(\nu_2)) \le \frac{KTe^{KT}}{k!} D_T(\nu_1, \nu_2)$, ossia che per k sufficientemente grande ϕ^k è una contrazione. $\square$

1.1 Introduzione alla propagazione del chaos

Dati $N \in \mathbb{N}$ positivo e $T > 0$, sotto le ipotesi **(H1)** è ben definito il sistema di particelle dato dalla seguente SDE,

$$X_t^{i,N} = X_0^i + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\int_0^t b(X_s^{i,N}, X_s^{j,N})ds + \sigma W_t^i \qquad t \in [0,T], \tag{1.3}$$

con $(X_0^i)_{i=1,\dots,n}$ famiglia di v.a. i.i.d in $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathbb{P}, \mathscr{F}_0)$.

Osservazione 1. *Data $(X_t^{1,N}, \dots, X_t^{N,N})$ soluzione di (1.3) e $\pi \in \mathcal{S}^N$ permutazione di N elementi si vede facilmente che i processi $(X_t^{1,N}, \dots, X_t^{N,N})$ e $(X_t^{\pi(1),N}, \dots, X_t^{\pi(N),N})$ sono entrambi soluzioni deboli della medesima SDE. Di conseguenza, le singole particelle $X_t^{i,N}$ sono processi stocastici aventi tutti la stessa legge.*

È importante notare che il sistema (1.3) non contiene coefficienti dipendenti dalla legge della soluzione e dunque esso è un caso standard di SDE. Tuttavia la ragione che conduce a considerare tale sistema sta nel legame con la soluzione di (1.1): verrà infatti dimostrato che, nonostante le particelle di (1.3) non siano indipendenti, esse lo sono asintoticamente per $N \to +\infty$ e che ogni particella converge inoltre alla soluzione di (1.1). Questa proprietà, nota in letteratura come *propagazione del caos* verrà in seguito definita con precisione; al momento, essa costituisce il fatto che un sistema di particelle interagenti converga ad un sistema in cui tale interazione è assente.

Theorem 2. *Sia (b, σ) una coppia che soddisfa **(H1)** e μ_t la legge marginale dei processi X_t^i soluzione di (1.1) rispetto a W^i per $i = 1, \dots, N$. Allora se $(X^{i,N})_{i=1,\dots,N}$ è la soluzione di (1.3) vale*

$$\sup_{1\le i\le N} \mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} |X_t^{i,N} - X_t^i|\right] = O(N^{-\frac{1}{2}}), \quad N \to +\infty.$$

Dimostrazione. Vale che:

$$
\begin{aligned}
\|X^{i,N} - X^i\|_T &:= \sup_{t\le T} |X_t^{i,N} - X_t^i| && (1.4)\\
&= \sup_{t\le T} \left| \int_0^t \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N b(X_s^{i,N}, X_s^{j,N}) - \bar{b}^{\mu_s}(X_s^i) ds \right| && (1.5)\\
&\le \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |b(X_s^{i,N}, X_s^{j,N}) - b(X_s^i, X_s^{j,N})| ds && (1.6)\\
&+ \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |b(X_s^i, X_s^{j,N}) - b(X_s^i, X_s^j)| ds && (1.7)\\
&+ \int_0^T \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N b(X_s^i, X_s^j) - \bar{b}^{\mu_s}(X_s^i) \right| ds \le \quad (Lipschitz) && (1.8)\\
&\le L_b \int_0^T |X_s^{i,N} - X_s^i| ds + L_b \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |X_s^{j,N} - X_s^j| ds && (1.9)\\
&+ \int_0^T \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N b(X_s^i, X_s^j) - \bar{b}^{\mu_s}(X_s^i) \right| ds. && (1.10)
\end{aligned}
$$

Ragionando come nell'Osservazione 1, il processo $(X^{i,N}, X^i)$ possiede una legge indipendente da i; da ciò e dal fatto che gli X^i sono identicamente distribuiti segue che

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\|X^{1,N} - X^1\|_T \\
&\le 2L_b \int_0^T \mathbb{E}\|X^{1,N} - X^1\|_s ds + \int_0^T \mathbb{E}\left[\left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N b(X_s^1, X_s^j) - \bar{b}^{\mu_s}(X_s^1) \right| \right] ds,
\end{aligned}
$$

ed applicando il Lemma di Gronwall

$$
\mathbb{E}\|X^{(1,N)} - X^{(1)}\|_T \le e^{2L_bT} \int_0^T \mathbb{E}\left[\left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N b(X_s^1, X_s^j) - \bar{b}^{\mu_s}(X_s^1) \right| \right] ds. \quad (1.11)
$$

A questo punto, per la disuguaglianza di Jensen all'integrando e sviluppando il quadrato si ha

$$\begin{aligned}&\left(\mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} b(X_s^1, X_s^j) - \bar{b}^{\mu_s}(X_s^1)\right|\right]\right)^2\\ &\leq \frac{1}{N^2}\mathbb{E}\left(\sum_{j,k=1}^{N}(b(X_s^1, X_s^j) - \bar{b}^{\mu_s}(X_s^1))^*(b(X_s^1, X_s^k) - \bar{b}^{\mu_s}(X_s^1))\right).\end{aligned}$$

L'espressione

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(b(X_s^1, X_s^j) - \bar{b}^{\mu_s}(X_s^1))^*(b(X_s^1, X_s^k) - \bar{b}^{\mu_s}(X_s^1))\right] =&\\ \mathbb{E}\left[b(X_s^1, X_s^j)^* b(X_s^1, X_s^k)\right] - \mathbb{E}\left[b(X_s^1, X_s^j)^*\bar{b}^{\mu_s}(X_s^1)\right]&\\ -\mathbb{E}\left[b(X_s^1, X_s^k)^*\bar{b}^{\mu_s}(X_s^1)\right] + \mathbb{E}\left[|\bar{b}^{\mu_s}(X_s^1)|^2\right]&\\ = I_1 - I_2 - I_3 + I_4&\end{aligned}$$

costituisce il termine (j,k)-esimo della sommatoria e poiché gli X^i sono i.i.d., quando $j \neq k$ si ha che

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = \int_{\mathbb{R}^{3d}} b(x,y)^* b(x,z) \otimes \mu_s(dx, dy, dz)$$

e quindi il (j,k)-esimo termine è nullo. Quando $j = k$ si ha invece che

$$\mathbb{E}[|b(X_s^1, X_s^j) - \bar{b}^{\mu_s}(X_s^1)|^2] = \int_{\mathbb{R}^{3d}} |b(x,y) - b(x,z)|^2 \otimes \mu_s(dx, dy, dz) \leq 4\|b\|_\infty^2;$$

allora

$$\begin{aligned}&\left(\mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} b(X_s^1, X_s^j) - \bar{b}^{\mu_s}(X_s^1)\right|\right]\right)^2\\ &\leq \frac{1}{N^2}\mathbb{E}\left(\sum_{j,k=1}^{N}(b(X_s^1, X_s^j) - \bar{b}^{\mu_s}(X_s^1))^*(b(X_s^1, X_s^k) - \bar{b}^{\mu_s}(X_s^1))\right) \leq \frac{4\|b\|_\infty^2}{N}.\end{aligned}$$

Applicando tale disuguaglianza a (1.11) segue immediatamente che

$$\mathbb{E}[|X^{i,N} - X^i|] \leq T e^{2L_b T}\frac{2\|b\|_\infty}{\sqrt{N}}$$

e quindi la tesi. □

Alla luce di questo risultato è naturale chiedersi come mai le particelle di (1.3) siano in grado di approssimare la soluzione di (1.1). A posteriori, il Teorema 1 implica l'asintotica indipendenza delle particelle; di conseguenza per la Legge dei Grandi Numeri

$$\sum_{j=1}^{N} b(X_t^{i,N}, X_t^{j,N}) \approx \bar{b}^{\mu_t}(X_t^i).$$

Ciò significa che i drift di (1.3) approssimano quello di (1.1).

La validità di un risultato di propagazione del chaos è importante in quanto permette di simulare la legge di un processo come quello di (1.1) sfruttando il sistema di particelle (1.3): per farlo si procede con il considerare la misura empirica del sistema.

Dati i processi come in (1.3) la misura empirica è così definita

$$\mu_t^N(dx) := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{X_t^{(i,N)}}(dx). \tag{1.12}$$

Vale il seguente risulato:

Theorem 3. *Sotto le ipotesi* ***(H1)****, per ogni $t \in [0,T]$ e per ogni $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ si ha che*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mu_t^N(dx) \xrightarrow[\mathbb{L}^1(\Omega,\mathbb{P})]{N\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mu_t(dx).$$

Dimostrazione. Poiché $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists f_\epsilon$ lipschitziana e tale che $\|f - f_\epsilon\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}$. Allora,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mu_t^N(dx) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mu_t(dx)\right| \\
&\qquad\qquad \le \frac{2\epsilon}{3} + \mathbb{E}\left|\int_{\mathbb{R}^d} f_\epsilon(x)\mu_t^N(dx) - \int_{\mathbb{R}^d} f_\epsilon(x)\mu_t(dx)\right| \\
&\qquad\qquad\qquad \text{(aggiungendo e sottraendo } \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_\epsilon(X_t^i)\text{)} \\
&\quad \le \frac{2\epsilon}{3} + \mathbb{E}\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_\epsilon(X_t^{i,N}) - f_\epsilon(X_t^i)\right| + \mathbb{E}\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_\epsilon(X_t^i) - \mathbb{E}[f_\epsilon(X_t^i)]\right|.
\end{aligned}$$

Ragionando come nel Teorema 2, ossia applicando la disguaglianza di Jensen e sfruttando l'indipendenza tra gli X^i è possibile maggiorare ulteriormente con

$$\frac{2\epsilon}{3} + L_{f_\epsilon} \sup_{1 \leq i \leq N} \mathbb{E}|X_t^{i,N} - X_t^i| + \frac{2\|f_\epsilon\|_\infty}{\sqrt{N}};$$

a questo punto la tesi segue immediatamente dal Teorema 2. $\square$

Capitolo 2

Un'equazione di McKean-Vlasov condizionata con diffusione anisotropica

Similmente a quanto fatto nel capitolo 1 si consideri $(\Omega, \mathscr{F}, P, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0})$ uno spazio filtrato di filtrazione $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ su cui valgono le ipotesi usuali e per la quale sia definita una classe numerabile $W^1, W^2, \ldots, W^n, \ldots$ di moti browniani d-dimensionali indipendenti.

Si considerino:

- $(X_0, V_0) \sim \mu_0$ v.a. 2d-dimensionale *(dato iniziale)*;
- $b : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *(drift)*;
- $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times d}$ *(diffusione)*

e dunque il sistema dato da

$$\begin{cases} dX_t = V_t dt \\ dV_t = \mathbb{E}\left[b(V_t, v)|X_t\right]_{v=V_t} dt + \sigma(t, V_t, X_t) dW_t \\ (X_0, V_0) \sim \mu_0 \end{cases} . \tag{2.1}$$

Si osservi che questa SDE presenta una componente diffusiva solo nella seconda componente; questa condizione è conosciuta come anisotropia, dunque la (2.1) è classificabile come equazione di McKean-Vlasov condizionata con diffusione anisotropica. Tale sistema è proposto in [5] come modello lagrangiano stocastico, il cui scopo è rappresentare il moto di una particella fluida in un flusso turbolento. Dunque le due componenti X e V possono assumere il significato fisico di posizione e velocità della particella. Dal punto di vista delle SDE esso è invece un caso piuttosto generale di McKean-Vlasov condizionata: infatti la dipendenza dalla legge della soluzione nel coefficiente di drift di V si manifesta mediante un valore atteso condizionato. Argomento centrale di questa tesi sarà dunque lo studio di (2.1) in modo simile a quanto fatto nel capitolo precedente.

Per poter capire a pieno il significato e l'espressione di (2.1) si consideri il termine $\mathbb{E}\left[b(V_t, v)|X_t\right]_{v=V_t}$: fissato il valore di $v \in \mathbb{R}^d$, le funzioni

$$x \mapsto \mathbb{E}\left[b(V_t, v)|X_t = x\right] =: \tilde{B}_{t,v}(x), \qquad x \mapsto \mu_{V_t|X_t=x} =: \mu_t(x)$$

sono rispettivamente una versione della funzione attesa condizionata di $b(V_t, v)$ rispetto a X_t e una versione regolare della probabilità condizionata di V_t rispetto a X_t. Di conseguenza,

$$\tilde{B}_{t,v}(x) = \int_\Omega b(u, v)\mu_t(x)(du)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[b(V_t, v)|X_t\right] = \tilde{B}_{t,v}(X_t) = \int_\Omega b(u, v)\mu_t(X_t)(du); \tag{2.2}$$

ciò significa che date le informazioni fornite dal valore di X_t, la (2.2) rappresenta il valore atteso di $b(V_t, v)$. Nel caso di (2.1) il termine di drift è proprio $\tilde{B}_{t,V_t}(X_t)$, che per semplicità verrà indicato con $\tilde{B}(t, X_t, V_t)$.

Osservazione 2. *Se (X_t, V_t) ha densità congiunta $\rho_t(x, v)$ allora è possibile definire $\rho_{V_t|X_t=x}(v)$ come densità condizionata di V_t rispetto a X_t come*

$$\rho_{V_t|X_t=x}(u) = \begin{cases} \frac{\rho_t(x,u)}{\int \rho_t(x,u)du} & se\ \int \rho_t(x, u)du = \rho_{X_t}(x) \neq 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

e per la quale vale

$$\mathbb{E}\left[b(V_t, v)|X_t\right]_{v=V_t} = \tilde{B}(t, X_t, V_t) = \int_{\mathbb{R}^d} b(u, V_t)\rho_{V_t|X_t=x}(u)du\Big|_{x=X_t},$$

o equivalentemente

$$B[x, v; \rho_t] := \tilde{B}_{t,v}(x) = \mathbb{E}\left[b(V_t, v)|X_t = x\right] = \begin{cases} \frac{\int_{\mathbb{R}^d} b(u,v)\rho_t(x,u)du}{\int_{\mathbb{R}^d} \rho_t(x,u)du} & se\ \rho_{x_t \neq 0} \\ 0 \quad altrimenti \end{cases},$$

dove $B : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^{2d}) \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *è appunto definita come*

$$B[x, v; \gamma] := \begin{cases} \frac{\int_{\mathbb{R}^d} b(u,v)\gamma(x,u)du}{\int_{\mathbb{R}^d} \gamma(x,u)du} & se\ \int \gamma(x, u)du \neq 0 \\ 0 \quad altrimenti \end{cases}.$$

Per quanto appena osservato verrà studiata l'equazione (2.1) nella seguente forma:

$$\begin{cases} dX_t = V_t dt \\ dV_t = B[X_t, V_t; \rho_t]dt + \sigma(t, X_t, V_t)dW_t \quad \forall t \in [0, T], \\ \rho_t \text{ densità di } (X_t, V_t) \end{cases} \tag{2.3}$$

con dato iniziale (X_0, V_0) e $B[X_t, V_t, \rho_t]$ è definito come sopra. La complessità di (2.3) se paragonata alla SDE (1.1) del Capitolo 1 risiede nella presenza del condizionamento: mentre per (1.1) il termine di drift era lineare rispetto alla legge e dunque anche continuo rispetto alla topologia debole lo stesso non accade per $B[\cdot, \cdot; \gamma]$; infatti il passaggio dalla densità congiunta a densità condizionata non è continua nemmeno rispetto a questa topologia.

Per ovviare a questo problema si effettua una regolarizzazione del nucleo B così da renderlo debolmente continuo; la dimostrazione di questo fatto sarà tuttavia chiara solo una volta affrontata la dimostrazione per l'esistenza di una soluzione di (2.4).

Sia dunque $\epsilon > 0$ e ϕ_ϵ un mollificatore t.c.

i) $\phi_\epsilon \in C_c^1(B_\epsilon(0))$, dove $B_\epsilon(0)$ indica la palla aperta di raggio ϵ centrata nell'origine di $\mathbb{R}^d$,

ii) $\int_{\mathbb{R}^d} \phi_\epsilon(x)dx = 1$.

Da qui si definisce la SDE di MKV regolarizzata con parametro ϵ per (2.3):

Definizione 2. *Fissato $\epsilon > 0$ e dati $\gamma \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^{2d})$ non negativa e $(x, v) \in \mathbb{R}^{2d}$ la regolarizzazione del nucleo $B[x, v; \gamma]$ è*

$$B_\epsilon[x, v; \gamma] := \frac{\int_{\mathbb{R}^d} b(u, v)\phi_\epsilon * \gamma(x, u)du}{\int_{\mathbb{R}^d} \phi_\epsilon * \gamma(x, u)du + \epsilon},$$

dove $*$ rappresenta la convoluzione in x, ossia

$$\phi_\epsilon * \gamma(x, u) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_\epsilon(x - y)\gamma(y, u)dy.$$

La SDE regolarizzata di (2.3) è data dal sistema:

$$\begin{cases} dX_t^\epsilon = V_t^\epsilon dt \\ dV_t^\epsilon = B_\epsilon[X_t^\epsilon, V_t^\epsilon; \rho_t^\epsilon]dt + \sigma(t, X_t^\epsilon, V_t^\epsilon)dW_t \qquad \forall t \in [0, T] \\ \rho_t^\epsilon \text{ densità di } (X_t^\epsilon, V_t^\epsilon) \end{cases} \tag{2.4}$$

e dato iniziale (X_0, V_0).

Definizione 3. *Una soluzione debole di (2.3) è costituita da uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]})$, un moto browniano d-dimensionale W su tale spazio e da un processo (X, V) continuo quasi certamente e adattato, tale che*

1. *$B[X_t, V_t; \rho_t], V_t \in \mathbb{L}^1_{loc}([0, T])$;*

2. *$\sigma(t, X_t, V_t) \in \mathbb{L}^2_{loc}([0, T])$;*

3. *Vale che:*

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t V_s ds \\ V_t = V_0 + \int_0^t B[X_s, V_s; \rho_s]ds + \int_0^t \sigma(t, X_t, V_t)dW_t. \end{cases}$$

In modo analogo è possibile definire una soluzione debole anche per (2.4), sostituendo B_ϵ a B.

Definizione 4. *Vale l'unicità della soluzione debole per le equazioni* (2.4) *e* (2.3) *se e solo se, comunque prese due soluzioni deboli con processi di Itô* (X,V) *e* (X',V') *si ha che questi sono uguali in legge.*

Da qui in avanti, allo scopo di semplificare conti e notazioni, verrà considerato solamente il caso $d=1$; i conti, le dimostrazioni e le definizioni che seguiranno sono tuttavia analoghi per un generico $d \in \mathbb{N}$ positivo.

Si indichi con **(H2)** il seguente set di ipotesi:

i) $(X_0, V_0) \in m(\mathscr{F}_0)$ e $(X_0, V_0) \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathbb{P}) \times \mathbb{L}^2(\Omega, \mathbb{P})$;

ii) b è continua e limitata;

iii) σ è limitata e posto $a := \sigma^2$, $\exists \lambda > 0$ t.c. $\forall (t,x,v) \in (0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$,

$$\frac{1}{\lambda} \leq a(t,x,v) \leq \lambda; \tag{2.5}$$

iv) $\exists \alpha \in (0,1],\ K = K(T)$ t.c $\ \forall (t,x,v),(s,y,u) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$,

$$|a(t,x,v) - a(s,y,u)| \leq K(|t-s|^{\frac{\alpha}{2}} + |x-y-u(t-s)|^{\frac{\alpha}{3}} + |u-v|^{\alpha}). \tag{2.6}$$

Per $N \geq 1$ si consideri infine il sistema di SDE di particelle interagenti [1]

$$\begin{cases} dX_t^{i,\epsilon,N} = V^{i,\epsilon,N} dt \\ dV_t^{i,\epsilon,N} = \frac{\sum_{j=1}^N b(V_t^{j,\epsilon,N}, V_t^{i,\epsilon,N}) \phi_\epsilon(X_t^{i,\epsilon,N} - X_t^{j,\epsilon,N})}{\sum_{j=1}^N \phi_\epsilon(X_t^{i,\epsilon,N} - X_t^{j,\epsilon,N}) + N\epsilon} dt + \sigma(t, X_t^{i,\epsilon,N}, V_t^{i,\epsilon,N}) dW_t^i & i = 1, \dots, N. \\ (X_0^{i,\epsilon,N}, V_0^{i,\epsilon,N}) = (X_0^i, V_0^i) \sim \mu_0 \ \text{ i.i.d.} \end{cases} \tag{2.7}$$

A questo punto si è pronti ad enunciare il risultato principale di questa tesi:

Theorem 4. *Sotto le ipotesi* ***(H2)*** *esiste ed è unica la soluzione debole della SDE di MKV regolarizzata* (2.4) *e della SDE* (2.3).
Denotando con $\mathbb{P}^\epsilon$ *e* $\mathbb{P}$ *le leggi di tali soluzioni si ha inoltre che*

[1] La buona definizione di tale sistema è una questione che verrà affrontata in seguito.

i) vale

$$\mathbb{P}^\epsilon \xrightarrow[d]{\epsilon \to 0^+} \mathbb{P};$$

ii) Per ogni $\epsilon > 0$ *la sequenza* $\{\mu^{\epsilon,N};\ N \geq 1\}$ *delle leggi delle soluzioni di* (2.7) *è* $\mathbb{P}^\epsilon$*-caotico, ossia per ogni naturale* $k \geq 1$ *e per ogni famiglia* $\{\psi_l;\ l = 1, \ldots, k\}$ *in* $C_b(C_T)$*,*

$$\int_{C_T^N} \prod_{l=1}^{k} \psi_l(x_l, v_l) \mu^{\epsilon,N}(dx_1, dv_1, \ldots, dx_N, dv_N)$$

$$\xrightarrow[N \to +\infty]{} \prod_{l=1}^{k} \int_{C_T} \psi_l(x, v) \mathbb{P}^\epsilon(dx, dv).$$

In particolare, questo punto dimostra che ogni particella converge debolmente al processo (X, V) *della soluzione di* (2.4) *e che il sistema* (2.7)*, quando* $N \to +\infty$*, è costituito da particelle asintoticamente indipendenti.*

2.1 Il problema della martingala per (2.3) e (2.4)

Si supponga di aver mostrato l'esistenza di una soluzione debole (X_t, V_t) del sistema (2.3) con dato iniziale (X_0, V_0), ossia

$$\begin{pmatrix} dX_t \\ dV_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_t dt \\ B[X_t, V_t; \rho_t] dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma(t, X_t, V_t) dW_t \end{pmatrix}.$$

Presa ora $f = f(x, v) \in C_b^2(\mathbb{R}^2)$, la formula di Itô caratterizza il processo $f(X_t, V_t)$ mediante la seguente relazione:

$$df(X_t, V_t) = \begin{pmatrix} \partial_x f, \partial_v f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_t dt \\ B[X_t, V_t, \rho_t] dt \end{pmatrix} dt + \frac{1}{2} a(t, X_t, V_t) \partial_{vv} f(X_t, V_t) dt$$

$$+ \sigma(t, X_t, V_t) \partial_v f(X_t, V_t) dW_t =$$

$$[\mathcal{A}_{\rho_t} f](t, X_t, V_t) dt + \sigma(t, X_t, V_t) \partial_v f(X_t, V_t) dW_t, \tag{2.8}$$

dove
$$\mathcal{A}_\gamma(t,x,v) := v\partial_x + B[x,v,\gamma]\partial_v + \frac{1}{2}a(t,x,v)\partial_{vv}.$$
È importante notare che l'operatore caratteristico $\mathcal{A}$ si distingue dal caso delle SDE standard proprio per la sua dipendenza da ρ_t; la sua espressione dipende dunque dalla soluzione della SDE. Da (2.8) si ha immediatamente che
$$f(X_t,V_t) - f(X_0,V_0) - \int_0^t [\mathcal{A}_{\rho_s} f](s,X_s,V_s)ds$$
è una martingala nello spazio di probabilità filtrato presente nella definizione di soluzione debole.

Questa osservazione conduce ad una nuova definizione di soluzione. Si ricordi la notazione $C_T := C([0,T],\mathbb{R}^2)$.

Definizione 5. *Una misura di probabilità $\mathbb{P} \in \mathcal{M}(C_T)$ è una soluzione del problema della martingala **(MP)** per* (2.3) *se il processo canonico (X_t,V_t) definito su $(C_T,\mathbb{P})$ gode delle seguenti proprietà:*

i) $(X_0,V_0) \sim \mu_0.$*;*

ii) la legge di (X_t,X_t) ha densità strettamente positiva ρ_t per $t \in (0,T]$;

iii) la funzione $(s,x,v) \longmapsto \rho_s(x,v) \in \mathbf{B}([0,T]\times\mathbb{R}^2)$;

iv) $\forall f \in C_b^2(\mathbb{R}^2)$, il processo
$$f(X_t,V_t) - f(X_0,V_0) - \int_0^t [\mathcal{A}_{\rho_s} f](s,X_s,V_s)ds$$
è una martingala su $(C_T,\mathbb{P},(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0})$ dove $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ è la filtrazione naturale standard generata da (X_t,V_t).

*Una soluzione del **(MP)** per la SDE regolarizzata* (2.4) *è definita in modo analogo sostituendo ad $\mathcal{A}_{\rho_t}$ l'operatore $\mathcal{A}^\epsilon_{\rho_t^\epsilon}$ definito da*
$$[\mathcal{A}^\epsilon_\gamma f](t,x,v) := v\partial_x f(x,v) + B_\epsilon\left[x,v;\gamma\right]\partial_v f(x,v) + \frac{1}{2}a(t,x,v)\partial_{vv} f(x,v).$$
*Inoltre per il **(MP)** di* (2.4) *non si richiede che la densità ρ_t^ϵ sia strettamente positiva.*

Osservazione 3. *Per il Teorema della Convergenza Dominata e procedendo per approssimazione è sufficiente verificare il punto iv) del **(MP)** solamente per* $f \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$.

Osservazione 4. *È importante notare che nel considerare il **(MP)** gli operatori* $\mathcal{A}_{\rho_t}, \mathcal{A}^{\epsilon}_{\rho^{\epsilon}_t}$ *non sono determinati, in quanto dipendono dalla distribuzione marginale di* (X, V) *al tempo* t *e quindi dalla soluzione del problema stesso; essi sono dunque parte del problema. Tuttavia data una soluzione* $\mathbb{P}$ $(\mathbb{P}^{\epsilon})$ *dei rispettivi **(MP)** allora* $\mathbb{P}$ $(\mathbb{P}^{\epsilon})$ *risolve un problema della martingala classico in cui* $\mathcal{A}_{\rho_s}$ $(\mathcal{A}^{\epsilon}_{\rho^{\epsilon}_s}) = \mathcal{A}_s$ *è determinato.*

In questa tesi la dimostrazione del Teorema 4 è conseguenza dell'esistenza e dell'unicità dei rispettivi problemi della martingala. Ciò risulta possibile grazie al Teorema 16 (Proposizione 4.6 in [18]), la quale mostra l'equivalenza tra l'esistenza di una soluzione debole e l'esistenza della soluzione per il **(MP)**.

D'ora in avanti ci si occuperà dunque della dimostrazione del seguente risultato:

Theorem 5. *Sotto le ipotesi **(H2)** esiste ed è unica la soluzione del **(MP)** per la SDE* (2.4) *e* (2.3). *Denotando con* $\mathbb{P}^{\epsilon}$ *e* $\mathbb{P}$ *tali soluzioni si ha che*

$$\mathbb{P}^{\epsilon} \xrightarrow[d]{\epsilon \to 0^+} \mathbb{P} .$$

Nel corso della dimostrazione verrà anche mostrato come essa implichi anche il risultato di propagazione del chaos del Teorema 4.

Capitolo 3

Unicità

3.1 Risultati preliminari

L'unicità debole dei due sistemi (2.3) e (2.4) si basa su una stima della soluzione fondamentale del sistema di Langevin stocastico. La dimostrazione di tale stima è presente in [12] e per la quale è necessaria l'ipotesi di α-holderianità intrinseca (2.6). In questa sezione ci si limita ad enunciare tali risultati.

Fissati $(x,v) \in \mathbb{R}^2$ e $s \geq 0$, l'equazione i cui dati iniziali sono (x,v) al tempo s

$$\begin{cases} Y_t^{s,x,v} = x + \int_s^t V_\theta^{s,x,v} d\theta, \\ V_t^{s,x,v} = v + \int_s^t \sigma(\theta, Y_\theta^{s,x,v}, V_\theta^{s,x,v}) dW_\theta \end{cases} \qquad t \in [s,T] \tag{3.1}$$

è conosciuta come SDE di Langevin.

Theorem 6. *Se a soddisfa le ipotesi di sub-ellitticità* (2.5) *ed α-hölderianità intrinseca* (2.6) *allora esiste una soluzione debole di* (3.1). *Inoltre, tale soluzione ammette una densità positiva di transizione $\Gamma(s,x,v;t,y,u)$ per la quale valgono:*

i) P.o. $(t,y,u) \in (0,T] \times \mathbb{R}^2$ la derivata $\partial_v \Gamma(s,x,v;t,y,u)$ esiste ed è continua in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \setminus \{(s,x,v) = (t,y,u)\}$.

ii) Data $f \in C_b(\mathbb{R}^2)$ *e fissato* $t \in [0,T)$*, la funzione* $G_{t,f} \in C^{1,2}((0,t) \times \mathbb{R}^2) \cap C([0,t] \times \mathbb{R}^2)$ *definita da*

$$G_{t,f}(s,x,v) := \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(s,x,v;t,y,u) f(y,u) dydu$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathcal{L}_s G_{t,f} = 0 \ su \ (0,t) \times \mathbb{R}^2 \\ G_{t,f}(t,x,v) = f(x,v) \ in \ \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{3.2}$$

dove

$$\mathcal{L}_s \phi(s,x,v) := \partial_s \phi(s,x,v) + v \partial_x \phi(s,x,v) + \frac{1}{2} a(s,x,v) \partial_{vv} \phi(s,x,v). \tag{3.3}$$

iii) Esiste $C > 0$ *dipendente da* T *e da* λ *in* (2.5) *t.c.*

$$\sup_{(x,v)\in\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_v \Gamma(s,x,v;t,y,u)| dydu \leq \frac{C}{\sqrt{t-s}}, \quad \forall t \in (s,T]. \tag{3.4}$$

3.2 Equazione mild per le densità delle marginali

Si consideri $\mathbb{P} \in \mathcal{M}(C_T)$ soluzione del **(MP)** per l'equazione (2.3). Per il Teorema 16 esiste una soluzione debole e dunque un processo di Itô (X,V) che risolve (2.3) rispetto a un moto browniano W. Fissato $M \in \mathbb{N}$ si indichi con Q_M il quadrato con centro l'origine $\{|x| + |v| \leq M\}$; sia τ_M il tempo di uscita da Q_M del processo (X,V), ossia

$$\tau_M := \inf\{t > 0; \ |X_t| + |V_t| \geq M\}.$$

Per ogni $f \in C_b(\mathbb{R}^2)$, poiché $G_{t,f}$ risolve il problema di Cauchy (3.2) al tempo t, il processo

$$\int_0^{t \wedge \tau_M} a(s, X_s, V_s) \partial_v G_{t,f}(s, X_s, V_s) dW_s$$

è ben definito ed è una martingala; inoltre applicando la formula di Itô e calcolando il valore medio si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[f(X_{t\wedge\tau_M}, V_{t\wedge\tau_M})] = \mathbb{E}[G_{t,f}(t, X_{t\wedge\tau_M}, V_{t\wedge\tau_M})] \\
&\quad = \mathbb{E}[G_{t,f}(0, X_0, V_0)] + \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_M} (\partial_s G_{t,f} + \mathcal{L}_s G_{t,f})(s, X_s, V_s)ds\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_M} (\partial_v G_{t,f}(s, X_s, V_s)B[X_s, V_s; \rho_s]ds\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_M} a(s, X_s, V_s)\partial_v G_{t,f}(s, X_s, V_s)dW_s\right] \\
&\quad = \mathbb{E}[G_{t,f}(0, X_0, V_0)] + \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_M} (\partial_v G_{t,f}(s, X_s, V_s)B[X_s, V_s; \rho_s]ds\right].
\end{aligned}$$

Si osservi che per definizione (X, V) è un processo continuo e di conseguenza $\lim_{M\to+\infty} \tau_M = +\infty$, $\mathbb{P}$-certamente.

Grazie al Teorema 6, per $s \neq t$ la funzione $\Gamma(s, x, v; t, y, u)$ ammette una derivata continua rispetto a v; allora

$$\partial_v G_{t,f}(s, x, v) = \int_{\mathbb{R}^2} \partial_v \Gamma(s, x, v; t, y, u) f(y, u)dydu$$

e $\mathbb{P}$-q.c.

$$\int_0^{t\wedge\tau_M} |\partial_v G_{t,f}(s, X_s, V_s)B[X_s, V_s; \rho_s]|\, ds \leq \|b\|_\infty \|f\|_\infty \int_0^t \frac{C}{\sqrt{t-s}}ds;$$

quest'ultimo termine risulta limitato uniformemente in M e per il Teorema della Convergenza Dominata facendo tendere $M \to +\infty$ si ottiene

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[f(X_t, V_t)] = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, v)\rho_t(x, v)dxdv \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} G_{t,f}(0, x, v)\mu_0(dx, dv) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_v G_{t,f}(s, x, v)B[x, v; \rho_s]\rho_s(x, v))\, dxdvds.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Siano s, t con $0 \leq s < t \leq T$; grazie al Teorema 6 gli operatori

$$\begin{aligned}
S^*_{t,s} : \mathcal{M}(\mathbb{R}^2) &\longrightarrow \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2) \\
\mu &\longmapsto \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(s, x, v; t, y, u)\mu(dx, dv)
\end{aligned}$$

e

$$S'_{t,s} : \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$$
$$h \longmapsto \int_{\mathbb{R}^2} \partial_v \Gamma(s,x,v;t,y,u)h(x,v)dxdv$$

sono lineari e ben definiti. Inoltre se $h = h(s,y,u) \in \mathbb{L}^\infty((0,T);\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2))$ il Teorema di Fubini e il Teorema 6 garantiscono che

$$\int_0^t \|S'_{t,s}(h(s,\cdot))\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)}ds \le \int_0^t \frac{C}{\sqrt{t-s}}\|h(s,\cdot)\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)}ds. \tag{3.6}$$

Grazie alla definizione di $G_{t,f}$ e degli operatori $S'_{t,s}, S^*_{t,s}$ è dunque possibile scrivere l'equazione (3.5) come

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,v)\rho_t(x,v)dxdv$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} S^*_{t,0}(\mu_0)(y,u)f(y,u)dydu + \int_{\mathbb{R}^2} f(y,u)\int_0^t S'_{t,s}(\rho_s(\cdot)B[\cdot;\rho_s])(y,u)dsdydu.$$

Per l'arbitrarietà di f, le distribuzioni marginali $(\rho_t; t \in (0,T])$ della soluzione debole di (2.3) devono allora soddisfare la seguente equazione mild in $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)$:

$$\forall t \in (0,T],\ \rho_t = S^*_{t,0}(\mu_0) + \int_0^t S'_{t,s}(\rho_s(\cdot)B[\cdot;\rho_s])ds. \tag{3.7}$$

Si vede facilmente che sostituendo a ρ e a $B[\cdot;\rho]$ rispettivamente ρ^ϵ e $B_\epsilon[\cdot;\rho_\epsilon]$ i passaggi appena svolti continuano a valere. Di conseguenza, le marginali ρ^ϵ_t soddisfano in $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)$ l'equazione mild

$$\forall t \in (0,T],\ \rho^\epsilon_t = S^*_{t,0}(\mu_0) + \int_0^t S'_{t,s}\left(\rho^\epsilon_s(\cdot)B_\epsilon\left[\cdot;\rho^\epsilon_s\right]\right)ds. \tag{3.8}$$

3.3 Unicità della soluzione dell'equazione mild

Per dimostrare l'unicità delle equazioni mild e quindi di (2.3) e (2.4) è necessario il risultato presente in [25]:

Lemma 1 (Gronwall singolare)**.** *Siano* $a, b \in C([0,T], \mathbb{R}^+)$. *Se* $u(t) \in C([0,T], \mathbb{R}^+)$ *e per un* $\beta \in (0, \frac{1}{2}]$

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} b(s) u(s) ds, \qquad t \in [0,T]$$

allora posto $q = \frac{1+\beta}{\beta}$ *esiste* $C(T,\beta) > 0$ *t.c.*

$$u(t) \leq A(t)^{\frac{1}{q}} \exp(C \int_0^t b^q(s) ds + t) \qquad t \in [0,T] \tag{3.9}$$

dove $A(t) = \max_{s \in [0,t]} 2^{q-1} e^{-tq} a^q(s)$.

Theorem 7. *Sotto le ipotesi **(H2)** esiste al più una soluzione positiva* ρ_t *per l'equazione* (3.7) *ed al più una soluzione* ρ_t^ϵ *per* (3.8)

Dimostrazione. Siano ρ_t^1, ρ_t^2 due soluzioni positive di (3.7). Per quasi ogni (t,x)

$$\overline{\rho_s^i} := \int_{\mathbb{R}} \rho_t^i(x,u') du' > 0 \qquad i = 1,2$$

e quindi $B[x,u;\rho_t^i]$ è ben definita per quasi ogni $(t,x,u) \in (0,T] \times \mathbb{R}^2$. Dall'equazione mild segue che

$$\begin{aligned}
\|\rho_t^1 - \rho_t^2\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)} &= \int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_0^t S'_{t,s}(\rho_s^1(\cdot) B[\cdot;\rho_s^1] - \rho_s^2(\cdot) B[\cdot;\rho_s^2])(x,u) ds \right| dxdu \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^t \left| S'_{t,s}\left(\left(\rho_s^1(\cdot) - \rho_s^2(\cdot)\right) B\left[\cdot;\rho_s^1\right]\right)(x,u) \right| dxduds \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^t \left| S'_{t,s}\left(\rho_s^2(\cdot) \left(B\left[\cdot;\rho_s^1\right] - B\left[\cdot;\rho_s^2\right]\right)\right)(x,u) \right| dxduds \\
&=: A_1 + A_2.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Per la limitatezza di b e per la stima (3.6)

$$A_1 \leq \int_0^t \frac{C}{\sqrt{t-s}} \|\rho_s^1 - \rho_s^2\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)} ds.$$

Per stimare A_2 si consideri la relazione elementare

$$\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 - a_2}{b_2} + \frac{a_1(b_2 - b_1)}{b_2 b_1}, \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, b_1, b_2 > 0; \tag{3.11}$$

applicando quest'ultima si ottiene che

$$B\left[x,v;\rho_s^1\right]-B\left[x,v;\rho_s^2\right]=\frac{1}{\overline{\rho_s^2}(x)}\int_{\mathbb{R}}b(u,v)\left(\rho_s^1(x,u)-\rho_s^2(x,u)\right)du$$
$$+\int_{\mathbb{R}}b(u,v)\rho_s^1(x,u)du\frac{\overline{\rho_s^2}(x)-\overline{\rho_s^1}(x)}{\overline{\rho_s^2}(x)\overline{\rho_s^1}(x)}.$$

Preso $0\leq s<t$ si ha che

$$\|\rho_s^2(\cdot)\left(B\left[\cdot;\rho_s^1\right]-B\left[\cdot;\rho_s^2\right]\right)\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)}$$
$$\leq 2\|b\|_\infty\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\rho_s^2(x,v)}{\overline{\rho_s^2}(x)}\int_{\mathbb{R}}\left|\rho_s^1(x,u)-\rho_s^2(x,u)\right|dudxdv$$
$$\leq 2\|b\|_\infty\|\rho_s^1-\rho_s^2\|_{\mathbb{L}(\mathbb{R}^2)}$$

ed utilizzando nuovamente la (3.6) esiste $C>0$ per il quale

$$A_2\leq\int_0^t\frac{C}{\sqrt{t-s}}\|\rho_s^1-\rho_s^2\|_{\mathbb{L}(\mathbb{R}^2)}ds.$$

A questo punto l'unicità segue dal Lemma di Gronwall singolare. Consideriamo ora l'equazione (3.8) e siano $\rho_t^{(\epsilon,1)}\rho_t^{(\epsilon,2)}$ due soluzioni non negative. Per $i=1,2$ e per ogni $t\in(0,T]$

$$\|\rho_t^{(\epsilon,i)}\|_{\mathbb{L}(\mathbb{R}^2)}\leq\|S_{t,0}^*(\mu_0)\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)}+\int_0^t\frac{C}{\sqrt{t-s}}\|\rho_s^{(\epsilon,i)}B_\epsilon\left[\cdot;\rho_s^{(\epsilon,i)}\right]\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)}ds$$
$$\leq 1+C\|b\|_\infty\sqrt{T}<+\infty,$$

allora per Teorema di Fubini

$$\int_{\mathbb{R}}\phi_\epsilon*\rho_t^{(\epsilon,i)}(x,u)du+\epsilon=\int_{\mathbb{R}^2}\phi_\epsilon(x-y)\rho_t^{(\epsilon,i)}(y,u)dudy+\epsilon=\phi_\epsilon*\overline{\rho_t^{(\epsilon,i)}}(x)+\epsilon.$$

Anche in questo caso vale

$$\|\rho^{(\epsilon,1)}-\rho_t^{(\epsilon,2)}\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)}\leq\int_{\mathbb{R}^2}\int_0^t\left|S'_{t,s}\left(\left(\rho_s^{(\epsilon,1)}(\cdot)-\rho_s^{(\epsilon,2)}(\cdot)\right)B_\epsilon\left[\cdot;\rho_s^{(\epsilon,1)}\right]\right)(x,u)\right|dxduds$$
$$+\int_{\mathbb{R}^2}\int_0^t\left|S'_{t,s}\left(\rho_s^{(\epsilon,2)}(\cdot)\left(B_\epsilon\left[\cdot;\rho_s^{(\epsilon,1)}\right]-B_\epsilon\left[\cdot;\rho_s^{(\epsilon,2)}\right]\right)\right)(x,u)\right|dxduds$$
$$=:A_1^\epsilon+A_2^\epsilon,$$

e per quanto già visto

$$A_1^\epsilon \leq \int_0^t \frac{C}{\sqrt{t-s}} \|\rho_s^{(\epsilon,1)} - \rho_s^{(\epsilon,2)}\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)} ds.$$

per stimare A_2^ϵ si utilizza nuovamente (3.11):

$$\rho_s^{(\epsilon,2)} \left(B_\epsilon \left[x, v; \rho_s^{(\epsilon,1)}\right] - B_\epsilon \left[x, v; \rho_s^{(\epsilon,2)}\right] \right) = \frac{a_1 - a_2}{b_2} - \frac{a_1(b_2 - b_1)}{b_2 b_1}$$

con

$$\frac{a_1 - a_2}{b_2} = \frac{\rho_s^{(\epsilon,2)}(x,v)}{\phi_\epsilon * \overline{\rho_s^{(\epsilon,2)}}(x) + \epsilon} \int_{\mathbb{R}} b(u,v) \left(\phi_\epsilon * \rho_s^{(\epsilon,1)}(x,u) - \phi_\epsilon * \rho_s^{(\epsilon,2)}(x,u) \right) du$$

e

$$\frac{a_1(b_2 - b_1)}{b_2 b_1} = \frac{\rho_s^{(\epsilon,2)}(x,u) \int_{\mathbb{R}} b(u,v) \phi_\epsilon * \rho_s^{(\epsilon,1)}(x,u) du}{\left(\phi_\epsilon * \overline{\rho_s^{(\epsilon,2)}}(x) + \epsilon \right) \left(\phi_\epsilon * \overline{\rho_s^{(\epsilon,1)}}(x) + \epsilon \right)} \left(\phi_\epsilon * \overline{\rho_s^{(\epsilon,2)}}(x) - \phi_\epsilon * \overline{\rho_s^{(\epsilon,1)}}(x) \right).$$

Dalla limitatezza di b e dalla definizione di $\overline{\rho_s^{(\epsilon,i)}}(x)$ ogni termine è maggiorato da

$$\begin{aligned} &\frac{\|b\|_\infty \rho_s^{(\epsilon,2)}(x,v)}{\phi_\epsilon * \overline{\rho_s^{(\epsilon,2)}}(x) + \epsilon} \int_{\mathbb{R}^2} \phi_\epsilon(x-y) \left| \rho_s^{(\epsilon,1)}(y,u) - \rho_s^{(\epsilon,2)}(y,u) \right| dy du \\ &\qquad \leq \frac{\|\phi_\epsilon\|_\infty \|b\|_\infty \rho_s^{(\epsilon,2)}(x,v)}{\phi_\epsilon * \overline{\rho_s^{(\epsilon,2)}}(x) + \epsilon} \|\rho_s^{(\epsilon,1)} - \rho_s^{(\epsilon,2)}\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Allora esiste $C > 0$ t.c.

$$\begin{aligned} &\|\rho_s^{(\epsilon,2)} \left(B_\epsilon \left[x, v; \rho_s^{(\epsilon,1)}\right] - B_\epsilon \left[x, v; \rho_s^{(\epsilon,2)}\right] \right) \|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)} \\ &\qquad \leq C \|\rho_s^{(\epsilon,1)} - \rho_s^{(\epsilon,2)}\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\rho_s^{(\epsilon,2)}(x,v)}{\phi_\epsilon * \overline{\rho_s^{(\epsilon,2)}}(x) + \epsilon} \right| dx dv \\ &\qquad \leq \frac{C}{\epsilon} \|\rho_s^{(\epsilon,1)} - \rho_s^{(\epsilon,2)}\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Applicando quest'ultima disuguaglianza a (3.6) l'unicità segue infine dal Lemma di Gronwall singolare 1. □

È importante notare che il Teorema 7 è un risultato di unicità delle marginali: se $\mathbb{P}$ risolve il problema della martingala dato nella Definizione 5 con dato iniziale μ_0 allora le distribuzioni marginali di (X, V) sono univocamente determinate. Tuttavia l'unicità per $\mathbb{P}$ è valida se e solo se vale l'unicità anche per le sue distribuzioni finito dimensionali. È già stato evidenziato però nell'Osservazione 4 che una soluzione $\mathbb{P}$ del **(MP)** risolve il problema della martingala classico:

- Data $f \in C_b^2(\mathbb{R}^2)$ il processo

$$f(X_t, V_t) - f(X_0, V_0) - \int_0^t [\mathcal{A}_s f](s, X_s, V_s) ds \qquad (3.12)$$

  è una martingala con $\mathcal{A}_s = \mathcal{A}_{\rho_s}(\mathcal{A}^{\epsilon}_{\rho^{\epsilon}_s})$, determinato dalla soluzione debole di (2.3) ((2.4)).

- $(X_0, V_0) \sim \mu_0$.

Questo fatto unito al Teorema 7 ed alla Proposizione 3 implica l'unicità della soluzione debole.

Capitolo 4

Esistenza

In questo capitolo si porta a termine la dimostrazione del Teorema 4: varranno mostrati i risultati di esistenza e propagazione del chaos approssimando la legge della soluzione della SDE di McKean-Vlasov regolarizzata (2.4) attraverso quella di una particella all'interno di un sistema; infine è provata l'esistenza di una soluzione del **(MP)** per (2.3) e quindi quella di una soluzione debole. Si parti considerando uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathscr{F}, Q, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0})$ in cui la filtrazione $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ soddisfa le ipotesi usuali. Si supponga inoltre che su tale spazio sia definita una famiglia numerabile $\tilde{W}^1, \ldots, \tilde{W}^N, \ldots$ di moti browniani uno-dimensionali indipendenti definiti nell'intervallo $[0, T]$.

4.1 Sistema approssimante di Particelle

Fissato $\epsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ positivo, si consideri il sistema di equazioni

$$\begin{cases} dX_t^{i,\epsilon,N} = V^{i,\epsilon,N} dt \\ dV_t^{i,\epsilon,N} = B^{i,\epsilon,N}(X_t^{\epsilon,N}, V_t^{\epsilon,N})dt + \sigma(t, X_t^{i,\epsilon,N}, V_t^{i,\epsilon,N})dW_t^i \qquad i = 1, \ldots, N \;, \\ (X_0^{i,\epsilon,N}, V_0^{i,\epsilon,N}) = (X_0^i, V_0^i) \sim \mu_0 \text{ i.i.d.} \end{cases} \tag{4.1}$$

in cui,

$$(x, v) \in \mathbb{R}^{2N} \mapsto B^{i,\epsilon,N}(x, v) := \frac{\sum_{j=1}^{N} b(v^j, v^i)\phi_\epsilon(x^i - x^j)}{\sum_{j=1}^{N} \phi_\epsilon(x^i - x^j) + N\epsilon}.$$

Si osservi che su tale sistema non valgono in generale le ipotesi standard di lipschitzianità per l'esistenza ed unicità forte per le SDEs e quindi si cerca una soluzione di (4.1) nel senso della Definizione 3; ciò risulta possibile grazie al Teorema di Girsanov:

Theorem 8 (Girsanov). *Sia* $(\Omega, \mathscr{F}, Q, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0})$ *uno spazio di probabilità filtrato su cui è definito un moto browniano* $\tilde{W}_t$ *e sia* $\theta_s \in \mathbb{L}^2_{loc}$. *Se*

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^T \theta_s^2 ds\right)\right] < +\infty$$

allora il processo $W_t = \tilde{W}_t - \int_0^t \theta_s ds$ *è un moto browniano rispetto a una misura di probabilità* P*, dove*

$$\frac{dP}{dQ} = \exp\left(\int_0^T \theta_s d\tilde{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right).$$

Per il Teorema 6 su $(\Omega, \mathscr{F}, Q, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0})$ esiste, a meno di indistinguibilità, un unico processo $(X, V) = ((X^1, V^1), \ldots, (X^N, V^N))$ tale che

$$\begin{cases} dX_t^i = dV_t^i dt \\ dV_t^i = \sigma(t, X_t^i, V_t^i) d\tilde{W}_t^i \qquad t \in [0, T],\ i = 1, \ldots, N. \\ (X_0^i, V_0^i) \sim \mu_0 \text{ i.i.d.} \end{cases}$$

Grazie all'ellitticità rispetto a v di σ^2 uniformemente in (t, x), σ è invertibile e l'inversa $\sigma^{-1}(= \frac{1}{\sigma})$ è limitata; dunque anche

$$\sigma^{-1}(t, X_t^i, V_t^i) B^{i,\epsilon,N}(X_t, V_t)$$

è limitata uniformemente rispetto ad $i = 1, \ldots, N$. Per il Teorema 8 esiste allora una misura di probabilità P_N per la quale, il processo N dimensionale

$$dW_t^i = d\tilde{W}_t^i - \sigma^{-1}(t, X_t^i, V_t^i) B^{i,\epsilon,N}(X_t, V_t) dt \qquad t \in [0, T] \quad i = 1, \ldots, N$$

è un moto browniano. Inoltre per costruzione

$$dV_t^i = \sigma(t, X_t^i, V_t^i)d\tilde{W}_t^i = \sigma(t, X_t^i, V_t^i)dW_t^i + B^{i,\epsilon,N}(X_t, V_t)dt;$$

ciò dimostra che $(\Omega, \mathscr{F}, P_N, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0})$, $W = (W^1, \dots, W^N)$, (X, V) è una soluzione debole del sistema (4.1); invertendo il ragionamento appena fatto ed applicando il Teorema di Girsanov si deduce che essa è anche unica, ossia vi è unicità in legge. Vale dunque che per ogni $N \geq 1$ esiste una misura P_N per la quale su $(\Omega, \mathscr{F}, P_N, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0})$ è supportato un moto browniano N-dimensionale W ed un processo di Itô $(X^{\epsilon,N}, V^{\epsilon,N})$ a valori in $\mathbb{R}^{2N}$ che risolve (4.1) rispetto a W.

4.2 Misura empirica

Si indichi con con C_T lo spazio $C([0,T], \mathbb{R}^2)$ e si consideri $\mathcal{M}(C_T)$ munito della topologia debole. Per ogni N la funzione

$$\begin{aligned} Emp_N : (C_T)^N &\longrightarrow \mathcal{M}(C_T) \\ f = (f^1, \dots, f^N) &\longmapsto \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{f_i}(d\psi) =: Emp_N(f)(d\psi) \end{aligned}$$

risulta essere continua rispetto alla topologia debole. Infatti data $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $(C_T)^N$ convergente a f si ha che per ogni $\varphi : C_T \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e limitata rispetto alla norma uniforme su $(C_T)^N$

$$\int_{C_T} \varphi(x) Emp_N(f_n)(dx) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} G(f_n^i) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} G(f^i) = \int_{C_T} \varphi(x) Emp_N(f)(dx).$$

Di conseguenza la misura empirica

$$Emp_N(X^{\epsilon,N}, V^{\epsilon,N}) =: \mu^{\epsilon,N}(d\psi) := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{\{X^{i,\epsilon,N}, V^{i,\epsilon,N}\}}(d\psi) \tag{4.2}$$

è una variabile aleatoria a valori in $\mathcal{M}(C_T)$, la cui distribuzione rispetto a P_N verrà indicata con $\mathbb{P}^{\epsilon,N} \in \mathcal{M}\left(\mathcal{M}(C_T)\right)$.

4.3 Esistenza della soluzione debole dell'equazione (2.4)

In questa sezione verrà dimostrato il seguente risultato di esistenza:

Theorem 9. *La successione* $\{\mathbb{P}^{\epsilon,N}\}_{N\geq 1}$ *converge debolmente a* $\delta_{\mathbb{P}^\epsilon}$*, dove* $\mathbb{P}^\epsilon$ *denota l'unica soluzione del* **(MP)** *per la SDE di McKean-Vlasov regolarizzata* (2.4)*. Inoltre vale il risultato di propagazione del chaos enunciato nel punto ii) del Teorema 4.*

Tale risultato di esistenza ed il Teorema 16 (Proposizione 4.6 in [18]) implicano infine l'esistenza di $(\Omega', \mathscr{F}', \mathbb{P}^{\epsilon'}, (\mathscr{F}'_t)_{t\in[0,T]})$ *,*W'*,* (X', V') *soluzione debole di* (2.4) *e* $\mathbb{P}^\epsilon = \mathbb{P}^{\epsilon'} \circ (X, V)^{-1}$*, dove* (X, V) *denota il processo canonico di* C_T*.*

La dimostrazione della prima parte di questo Teorema è conseguenza dei Lemmi 2 e 3:

Lemma 2. *La successione* $\{\mathbb{P}^{\epsilon,N}\}_{N\geq 1}$ *è tight.*

Da tale risultato segue infatti che una qualunque sottosuccessione di $\{\mathbb{P}^{\epsilon,N}\}_{N\geq 1}$ è a sua volta tight; per il Teorema di Helly (Teorema 2) esiste allora una sotto-sottosuccessione debolmente convergente ad un elemento di $\mathcal{M}(\mathcal{M}(C_T))$, qui denotato con $\mathbb{P}^{\epsilon,\infty}$. Il secondo lemma necessario alla dimostrazione è il seguente:

Lemma 3. $\mathbb{P}^{\epsilon,\infty}$ *ha supporto nell'insieme delle soluzioni del* **(MP)** *della SDE di McKean-Vlasov regolarizzata* (2.4)*.*

Si osservi che, per l'unicità della soluzione del **(MP)** dimostrata nel Teorema 5, tale insieme ha al più un elemento, perciò $\mathbb{P}^{\epsilon,\infty} = \delta_{\mathbb{P}^\epsilon}$. Ciò dimostra che $\mathbb{P}^{\epsilon,\infty}$ non dipende dalla scelta della sottosuccessione di $\{\mathbb{P}^{\epsilon,N}\}$; inoltre ogni sottosuccessione di $\{\mathbb{P}^{\epsilon,N}\}_{N\geq 1}$ ammette quindi una sottossuccessione convergente al medesimo limite $\delta_{\mathbb{P}^\epsilon}$. Da quest'ultima affermazione è semplice verificare che

$$\mathbb{P}^{\epsilon,N} \xrightarrow[N\to+\infty]{d} \delta_{\mathbb{P}^\epsilon}.$$

Infine per il Teorema 17 [1] il sistema di particelle è $\mathbb{P}^{\epsilon}$-caotico nel senso definito nel punto *ii*) del Teorema 4 e della Definizione 10. Si passi dunque alla dimostrazione dei lemmi sopracitati.

Dimostrazione del Lemma 2. Denotando con $\mu^{\epsilon,N} \in \mathcal{M}(C_T^N)$ la legge della soluzione di (4.1) si ha che essa è simmetrica per ogni $N \geq 1$: ciò è dovuto al fatto che il sistema (4.1) è invariante per permutazioni e dunque le particelle sono identicamente distribuite. Per il Corollario 5 la tightness di $\{\mathbb{P}^{\epsilon,N}\}_{N\geq 1}$ è equivalente a quella di $\{\mu_N \sim (X^{(1,\epsilon,N)}, V^{(1,\epsilon,N)})\}_{N\geq 1}$.

Si mostri ora che questa successione soddisfa le ipotesi necessarie al Criterio di Kolmogorov (Teorema 15) il quale implica la tightness di $\{\mu_N\}_{N\geq 1}$. Si ha che $\mu_N \circ (X(0), V(0))^{-1} = \mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ e dunque è verificata l'ipotesi *i*) del Teorema 15. Vale che

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|V^{1,\epsilon,N} - V_s^{1,\epsilon,N}|^4\right] &= \mathbb{E}\left[\left|\int_s^t B^{1,\epsilon,N}(X_\tau^{\epsilon,N}, V_\tau^{\epsilon,N})d\tau + \int_s^t \sigma(\tau, X_\tau^{1,\epsilon,N}, V_\tau^{1,\epsilon,N})dW_\tau^1\right|^4\right] \\ &\leq 2^3\left(\|b\|_\infty^4|t-s|^4 + \mathbb{E}\left[\left|\int_s^t \sigma(\tau, X_\tau^{1,\epsilon,N}, V_\tau^{1,\epsilon,N})dW_\tau\right|^4\right]\right) \leq C|t-s|^2.\end{aligned}$$

Inoltre si mostra facilmente che

$$\mathbb{E}\left[|V_t^{1,\epsilon,N} - V_s^{1,\epsilon,N}|^2\right] \leq C|t-s|;$$

di conseguenza,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\epsilon}\left[|X_t^{1,\epsilon,N} - X_s^{1,\epsilon,N}|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left|\int_s^t V_\tau^{1,\epsilon,N}d\tau\right|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[|t-s|\int_s^t |V_\tau^{1,\epsilon,N}|^2 d\tau\right] \\ &\leq 2|t-s|\mathbb{E}\left[\int_s^t |V_\tau^{1,\epsilon,N} - V_0^{1,\epsilon,N}|^2 + |V_0^{1,\epsilon,N}|^2 d\tau\right] \leq C|t-s|^2\end{aligned}$$

e ciò dimostra l'ipotesi *ii*) del Teorema 15. □

Dimostrazione del Lemma 3. Si ricordi che (X_t, V_t) indica il processo canonico di C_T; inoltre, per semplicità, verrà denotata con $\{\mathbb{P}^{\epsilon,N}\}_{N\geq 1}$ la sottosuccessione debolmente convergente a $\mathbb{P}^{\epsilon,\infty}$. Poiché C_T è separabile si consideri

[1] Utilizzato con $E = C_T$, μ_N come la legge del sistema (4.1) con N particelle e $\mu_N \circ Emp_N^{-1} = \mathbb{P}^{\epsilon,N}$

$\mathcal{J}$ una famiglia densa e numerabile di C_T. Per la Legge dei grandi numeri, data $f \in \mathcal{J}$ si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,v)\mu^{\epsilon,N} \circ (X_0,V_0)^{-1}(dx,dv) \tag{4.3}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_0^{i,\epsilon,N}, V_0^{i,\epsilon,N}) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}^2} f(x,v)\mu_0(dx,dv) \qquad Q\text{- q.c..}$$

Per la numerabilità di $\mathcal{J}$ allora vi è $M \subseteq \Omega$ con $Q(M) = 1$ per il quale se $\omega \in M$ allora (4.3) è valida per ogni $f \in \mathcal{J}$. Per la densità di $\mathcal{J}$ segue che se $\omega \in M$

$$\mu^{\epsilon,N}(\omega) \circ (X_0,V_0)^{-1} \xrightarrow[N\to+\infty]{d} \mu_0.$$

Di conseguenza su M, comunque presa $f \in C_b(\mathbb{R}^2)$ (M è indipendente dalla scelta di f) risulta

$$\int_M \left| \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_0^{i,\epsilon,N}(\omega), V_0^{i,\epsilon,N}(\omega)) - \int_{\mathbb{R}^2} f(x,v)\mu_0(dx,dv) \right| Q(d\omega) =$$

$$\int_{\mathcal{M}(C_T)} \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(x,v) m\circ (X_0,V_0)^{-1}(dx,dv) - \int_{\mathbb{R}^2} f(x,v)\mu_0(dx,dv) \right| \mathbb{P}^{\epsilon,N}(dm)$$

$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} \int \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(x,v) m\circ (X_0,V_0)^{-1}(dx,dv) - \int f(x,v)\mu_0(dx,dv) \right| \mathbb{P}^{\epsilon,\infty}(dm)$$

in quanto $\mathbb{P}^{\epsilon,N} \xrightarrow[N\to+\infty]{d} \mathbb{P}^{\epsilon,\infty}$. Tuttavia per quanto già mostrato tale quantità tende a 0 per $N \to +\infty$ e quindi $\mathbb{P}^{\epsilon,\infty}-$ quasi certamente

$$\int f(x,v) m\circ (X_0,V_0)^{-1}(dx,dv) = \int f(x,v)\mu_0(dx,dv) \qquad \forall f \in C_b(\mathbb{R}^2);$$

ossia

$$m\circ (X_0,V_0)^{-1}(dx,dv) = \mu_0 \qquad \mathbb{P}^{\epsilon,\infty} - \text{q.c.}$$

Ciò dimostra dunque il punto $i)$ per il **(MP)** per la SDE di McKean-Vlasov regolarizzata. Va dunque mostrato che $\mathbb{P}^{\epsilon,\infty}$ quasi certamente valgono i punti $(ii) - (iv)$ della Definizione 5 (esistenza della densità congiunta e soluzione del problema della martingala per il processo canonico). Si definisca α :

$[0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{M}(C_T) \longrightarrow \mathbb{R}$ come

$$\alpha(t,\xi,\nu,m) := \frac{\int_{C_T} b(\bar{v}_t,\nu)\phi_\epsilon(\xi-\bar{x}_t)m(d\bar{x},d\bar{v})}{\int_{C_T} \phi_\epsilon(\xi-\bar{x}_t)m(d\bar{x},d\bar{v})+\epsilon} = \frac{\int_{\mathbb{R}^2} b(u,\nu)\phi_\epsilon(\xi-y)m\circ(X_t,V_t)^{-1}(dy,du)}{\int_{\mathbb{R}^2} \phi_\epsilon(\xi-y)m\circ(X_t,V_t)^{-1}(dy,du)+\epsilon}.$$

Si osservi che per m fissato è possibile applicare il Teorema di Fubini ai termini a numeratore e denominatore che definiscono α e dedurre così che α è misurabile rispetto alle prime tre componenti.
Per l'Osservazione 3 è sufficiente mostrare $iv)$ per ogni funzione $f \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$; si fissino $0 \le t_1 \le \ldots \le t_n \le s < t \le T$ insieme ad funzione $\Psi \in C_b(\mathbb{R}^{2n})$. In virtù di quanto appena mostrato circa la misurabilità di α è ben definito il seguente termine:

$$\begin{aligned} F^\epsilon(m) := \mathbb{E}_m\Bigg[\Psi(X_{t_1},V_{t_1},\ldots,X_{t_n},V_{t_n})\Bigg(f(X_t,V_t)-f(X_s,V_s)-\int_s^t(V_\tau\partial_x f(X_\tau,V_\tau))d\tau \\ -\int_s^t(\alpha(\tau,X_\tau,V_\tau,m)\partial_v f(X_\tau,V_\tau))d\tau \\ -\int_s^t\frac{1}{2}a(\tau,X_\tau,V_\tau)\partial_{vv}f(X_\tau,V_\tau)d\tau\Bigg)\Bigg]. \end{aligned}$$

Si supponga ora di aver dimostrato che $F^\epsilon = 0$, $\mathbb{P}^{\epsilon,\infty}$-q.c. Data la separabilità di $C_c^2(\mathbb{R}^2) \subset C_c(\mathbb{R}^2)$ (ciò è dovuto al Teorema di Stone-Weierstrass ed alla σ-compattezza di $\mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned} f(X_t,V_t)-f(X_s,V_s)-\int_s^t(V_\tau\partial_x f(X_\tau,V_\tau))d\tau \\ -\int_s^t(\alpha(\tau,X_\tau,V_\tau,m)\partial_v f(X_\tau,V_\tau))d\tau \\ -\int_s^t\frac{1}{2}a(\tau,X_\tau,V_\tau)\partial_{vv}f(X_\tau,V_\tau)d\tau \end{aligned}$$

è m-martingala, $\mathbb{P}^{\epsilon,\infty}$ q.c., per ogni $f \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$. Per il Teorema 16 esistono uno spazio di probabilità, un moto browniano W' e un processo (X',V') avente la stessa legge di (X,V) definiti su tale spazio tali che (X',V') risolve

la SDE di McKean-Vlasov regolarizzata rispetto a W'.
Essendo però α limitata, il Teorema di Girsanov afferma che esiste $m' \in \mathcal{M}(C_T)$ equivalente a m per la quale

$$f(X'_t, V'_t) - f(X'_0, V'_0) - \int_0^t (V'_\tau \partial_x f(X'_\tau, V'_\tau))d\tau \\ - \int_0^t \frac{1}{2} a(\tau, X'_\tau, V'_\tau) \partial_{vv} f(X'_\tau, V'_\tau) d\tau$$

è una m' martingala per ogni $f \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$. Si ha dunque che (X_t, V_t) risolve il problema della martingala associato alla SDE di Langevin e dall'unicità della soluzione debole di tale sistema segue che $m' \circ (X_t, V_t)^{-1}$ ha densità data da $\int \Gamma(0, y, u; t, x, v)\mu_0(dy, du) > 0$. Infine, sempre grazie al Teorema di Girsanov, risulta che anche $m \circ (X_t, V_t)^{-1}$ possiede una densità ρ_t^ϵ (la quale risulta essere positiva).
Per poter concludere la dimostrazione va dunque mostrato che

$$\int F^\epsilon(m)\mathbb{P}^{\epsilon,\infty}(dm) = 0.$$

Si osservi che $\forall i = 1, \dots, N$

$$\alpha(\tau, X_\tau^{i,\epsilon,N}, V_\tau^{i,\epsilon,N}, \mu^{\epsilon,N}) = \\ \frac{\sum_{j=1}^N b(V_\tau^{j,\epsilon,N}, V_\tau^{i,\epsilon,N})\phi_\epsilon(X_\tau^{i,\epsilon,N} - X_\tau^{j,\epsilon,N})}{\sum_{j=1}^N \phi_\epsilon(X_\tau^{i,\epsilon,N} - X_\tau^{j,\epsilon,N}) + N\epsilon} = B^{i,\epsilon,N}(X_\tau^{\epsilon,N}, V_\tau^{\epsilon,N}). \quad (4.4)$$

Inoltre, poiché $(X^{\epsilon,N}, V^{\epsilon,N})$ è definito mediante (4.1) esso è soluzione del relativo problema della martingala ed in particolare per ogni $i = 1, \dots, N$

$$f(X_t^{i,\epsilon,N}, V_t^{i,\epsilon,N}) - f(X_0^{i,\epsilon,N}, V_0^{i,\epsilon,N}) - \\ \int_0^t \partial_x f(X_s^{i,\epsilon,N}, V_s^{i,\epsilon,N})V_s^{i,\epsilon,N} ds - \int_0^t \partial_v f(X_s^{i,\epsilon,N}, V_s^{i,\epsilon,N})B^{i,\epsilon,N}(X_s^{\epsilon,N}, V_s^{\epsilon,N})ds - \\ \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s, X_s^{i,\epsilon,N}, V_s^{i,\epsilon,N})\partial_{vv} f(X_s^{i,\epsilon,N}, V_s^{i,\epsilon,N})ds$$

è una martingala. Allora

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\epsilon,N}}[F^\epsilon] = \int_{\mathcal{M}(C_T)} F^\epsilon\left(\mu^{\epsilon,N}(\omega)\right) P_N(d\omega) = \\
\mathbb{E}_{P_N}\Bigg[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Bigg(\Psi(X^{i,\epsilon,N}_{t_1}, V^{i,\epsilon,N}_{t_1}, \dots, X^{i,\epsilon,N}_{t_n}, V^{i,\epsilon,N}_{t_n}) \\
\left\{\int_s^t \left(B^{i,\epsilon,N}(X^{\epsilon,N}_\tau, V^{\epsilon,N}_\tau) - \alpha(\tau, X^{i,\epsilon,N}_\tau, V^{i,\epsilon,N}_\tau, \mu^{\epsilon,N})\right)\partial_v f(X^{i,\epsilon,N}_\tau, V^{i,\epsilon,N}_\tau)d\tau\right\}\Bigg)\Bigg]
\end{aligned}
$$

e per la (4.4)

$$
\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\epsilon,N}}[F^\epsilon] = 0.
$$

A questo punto per la convergenza debole di $\{\mathbb{P}^{\epsilon,N}\}$ a $\mathbb{P}^{\epsilon,\infty}$ e per il fatto che F^ϵ è limitata è sufficiente dimostrare che essa è anche continua; in particolare basta mostrare la continuità di

$$
\begin{aligned}
\Phi(m) &:= \mathbb{E}_m\left[\int_s^t \alpha(\tau, x_\tau, v_\tau, m)\partial_v f(x_\tau, v_\tau)d\tau\right] \\
&= \int_{C_T} J^\epsilon(x, v, m)m(dX, dV)
\end{aligned}
$$

con

$$
J^\epsilon(x, v, m) := \int_s^t \alpha(\tau, x_\tau, v_\tau, m)\partial_v f(x_\tau, v_\tau)d\tau.
$$

Fissato m e data $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathcal{M}(C_T)$ debolmente convergente a m.

$$
\begin{aligned}
&|\Phi(m_n) - \Phi(m)| \\
&\quad\leq \left|\int_{C_T} J^\epsilon(x, v, m)m_n(dx, dv) - \int_{C_T} J^\epsilon(x, v, m)m(dx, dv)\right| \\
&\qquad + \left|\int_{C_T}\left(J^\epsilon(x, v, m_n) - J^\epsilon(x, v, m)\right)m_n(dx, dv)\right|.
\end{aligned}
$$

Il primo termine tende a 0 al tendere di n a $+\infty$ per la convergenza debole di $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Per quanto riguarda il secondo termine è sufficiente mostrare che esiste una successione $\gamma_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ tale che

$$
\sup_{(x,v)\in C_T} |J^\epsilon(x, v, m_n) - J^\epsilon(x, v, m)| \leq \gamma_n. \tag{4.5}
$$

Indicando K_f il supporto di f si ha che

$$\sup_{(x,v)\in C_T} |J^\epsilon(x,v,m_n) - J^\epsilon(x,v,m)| \le C\int_s^t \Gamma_n(\tau)d\tau,$$

dove

$$\Gamma_n(\tau) := \sup_{(\xi,\nu)\in K_f}\left|\frac{\int b(\bar v_\tau,\nu)\phi_\epsilon(\xi-\bar x_\tau)m_n(d\bar x,d\bar v)}{\int \phi_\epsilon(\xi-\bar x_\tau)m_n(d\bar x,d\bar v)+\epsilon} - \frac{\int b(\bar v_\tau,\nu)\phi_\epsilon(\xi-\bar x_\tau)m(d\bar x,d\bar v)}{\int \phi_\epsilon(\xi-\bar x_\tau)m(d\bar x,d\bar v)+\epsilon}\right|.$$

Verrà ora mostrato che

$$\gamma_n = C\int_s^t \Gamma_n(\tau)d\tau \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Data la relazione

$$\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1-a_2}{b_2} + \frac{a_1(b_2-b_1)}{b_2 b_1}$$

basta mostrare che per ogni b limitata e continua, $\tau\in[s,t]$, $\eta>0$, esiste $N(\eta)\in\mathbb{N}$ t.c. $\forall n > N(\eta)$,

$$\sup_{(\xi,\nu)\in K_f}\left|\int b(\bar v_\tau,\nu)\phi_\epsilon(\xi-\bar x_\tau)m_n(d\bar x,d\bar v) - \int b(\bar v_\tau,\nu)\phi_\epsilon(\xi-\bar x_\tau)m(d\bar x,d\bar v)\right| < \eta. \tag{4.6}$$

Per $R>0$ sia

$$A(R) := \{(\bar x,\bar v); |x_\tau|+|v_\tau|\ge R\}\subset C_T.$$

Poiché $m_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d} m$, il Teorema di Portamentau (Teorema 11) afferma che

$$\limsup_{n\to+\infty} m_n(A(R)) \le m(A(R));$$

dato che gli integrandi in (4.6) sono limitati, allora per R sufficientemente grande si ha che

$$\sup_{(\xi,\nu)\in K_f}\left|\int_{A(R)} b(\bar v_\tau,\nu)\phi_\epsilon(\xi-\bar x_\tau)m_n(d\bar x,d\bar v) - \int_{A(R)} b(\bar v_\tau,\nu)\phi_\epsilon(\xi-\bar x_\tau)m(d\bar x,d\bar v)\right| < \frac{\eta}{2}.$$

Si consideri ora h continua a supporto compatto t.c $h(x,v)=1$ per $|x|+|v|\le R$. La mappa su $K_f\times\mathbb{R}^2$

$$(\xi,\nu,x,v)\longmapsto b(v,\nu)\phi_\epsilon(\xi-x)h(x,v)$$

è uniformemente continua; di conseguenza $\{F^{\xi,\nu} : (\xi,\nu) \in K_f\}$ in cui ogni elemento $F^{\xi,\nu}$ è definito come

$$\begin{aligned} F^{\xi,\nu} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,v) &\longmapsto b(v,\nu)\phi_\epsilon(\xi - x)h(x,v) \end{aligned}$$

è un sottoinsieme di $C(\mathbb{R}^2)$ equicontinuo ed uniformemente limitato. Applicando il Corollario 3 alla famiglia $\{F^{\xi,\nu} : (\xi,\nu) \in K_f\}$ si ha che per n sufficientemente grande

$$\sup_{(\xi,\nu)\in K_f} \left| \int b(\bar{v}_\tau,\nu)\phi_\epsilon(\xi - \bar{x}_\tau)h(\bar{x}_\tau, v_\tau)m_n(d\bar{x}, d\bar{v}) \right.$$
$$\left. - \int b(\bar{v}_\tau,\nu)\phi_\epsilon(\xi - \bar{x}_\tau)h(\bar{x}_\tau, v_\tau)m(d\bar{x}, d\bar{v}) \right| \leq \frac{\eta}{2}$$

e ciò conclude la dimostrazione. □

4.4 Convergenza della SDE regolarizzata

Si ricordi la notazione già utilizzata in precedenza

- $C_T := C([0,T],\mathbb{R}^2)$.
- (X,V) indica il processo canonico su C_T.
- $\mathbb{P}^\epsilon$ è la soluzione del **(MP)** della SDE regolarizzata (2.4).

In questa sezione verrà mostrata la convergenza debole per $\epsilon \to 0^+$ della soluzione del **(MP)** di (2.4) alla soluzione del **(MP)** del problema di McKean-Vlasov originale (2.3).

Si cominci col considerare $\tilde{\mathbb{P}}^\epsilon \in \mathcal{M}(C([0,T],\mathbb{R}^3))$ definita come

$$\tilde{\mathbb{P}}^\epsilon = \mathbb{P}^\epsilon \circ \left((X_t, V_t, V_t - V_0 - \int_0^t B_\epsilon[X_s, V_s; \rho^\epsilon_s]ds);\ \ t \in [0,T] \right)^{-1}. \quad (4.7)$$

Proposizione 1. *La successione $\{\tilde{\mathbb{P}}^\epsilon\}_{\epsilon>0}$ è tight per $\epsilon \to 0^+$.*

Dimostrazione. Sia (X', V') un processo di Itô definito come nel Teorema 9; allora

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\epsilon}\left[|V_t - V_s|^4\right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\epsilon'}}\left[|V'_t - V'_s|^4\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\epsilon'}}\left[\left|\int_s^t B_\epsilon[X'_\tau, V'_\tau; \rho^\epsilon_s]d\tau + \int_s^t \sigma(\tau, X'_\tau, V'_\tau)dW_\tau\right|^4\right] \\
&\leq 2^3\left(\|b\|^4_\infty |t-s|^4 + \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\epsilon}\left[\left|\int_s^t \sigma(\tau, X_\tau, V_\tau)dW_\tau\right|^4\right]\right) \\
&\leq C|t-s|^2. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Inoltre si mostra facilmente che

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\epsilon}\left[|V_t - V_s|^2\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\epsilon'}}\left[|V'_t - V'_s|^2\right] \leq C|t-s| \qquad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\epsilon}\left[|X_t - X_s|^2\right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\epsilon'}}\left[\left|\int_s^t V'_\tau d\tau\right|^2\right] \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\epsilon'}}\left[|t-s|\int_s^t |V'_\tau|^2 d\tau\right] \\
&\leq 2|t-s|\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\epsilon'}}\left[\int_s^t |V'_\tau - V'_0|^2 + |V'_0|^2 d\tau\right] \\
&\leq C|t-s|^2. \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Infine per la terza componente si ha che (X', V') risolve (2.4), di conseguenza

$$M_t := V'_t - V'_0 - \int_0^t B_\epsilon[X'_s, V'_s; \rho^\epsilon_s]ds = \int_0^t \sigma(\tau, X'_\tau, V'_\tau)dW'_\tau$$

e

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\epsilon}[|M_t - M_s|^4] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\epsilon'}}\left[\left|\int_s^t \sigma(\tau, X'_\tau, V'_\tau)dW'_\tau\right|^4\right] \leq C|t-s|^2.$$

È stato dunque mostrato che su ognuna delle tre componenti che definiscono $\tilde{\mathbb{P}}^\epsilon$ sono soddisfatte le ipotesi per il criterio di Kolmogorov enunciato nel Teorema 15 e dunque si ha che l'insieme $\{\tilde{\mathbb{P}}^\epsilon;\ \epsilon > 0\}$ è tight. □

Come immediata conseguenza di tale risultato esiste una successione $\{\epsilon_n\}$ t.c $\epsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ e $\{\tilde{\mathbb{P}}^{\epsilon_n}\}$ converge debolmente; si denoti con $\tilde{\mathbb{P}}$ il suo limite. Si caratterizzi ora il supporto di $\tilde{\mathbb{P}}$ considerando $\mathcal{H} \subset C([0,T],\mathbb{R}^3)$ così definito:

$$(x,v,D) \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow \begin{cases} x(t) = x(0) + \int_0^t v(s)ds \\ v(t) - v(0) - D(t) = \int_0^t \beta(s)ds \\ \text{ dove } \beta : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ misurabile e} \\ \|\beta\|_{\mathbb{L}^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{t\in[0,T]} |\beta(t)| \le \|b\|_\infty \end{cases}.$$

Lemma 4. *Il supporto di $\tilde{\mathbb{P}}$ è contenuto in $\mathcal{H}$.*

Dimostrazione. Per il Teorema di Portamentau (Teorema 11) la convergenza debole di $\tilde{\mathbb{P}}^\epsilon$ a $\tilde{\mathbb{P}}$ è equivalente ad affermare che per ogni F chiuso di $C([0,T],\mathbb{R}^3)$

$$\limsup_{\epsilon\to 0^+} \tilde{\mathbb{P}}^\epsilon(F) \le \tilde{\mathbb{P}}(F).$$

Dal Teorema 9 segue facilmente che $\tilde{\mathbb{P}}^\epsilon(\mathcal{H}) = 1$ per ogni $\epsilon > 0$; di conseguenza è sufficiente mostrare che $\mathcal{H}$ è un chiuso. Sia $\{(x_n, v_n, D_n); n \in \mathbb{N}\}$ una successione in $\mathcal{H}$ convergente a (x,v,D). Siano $A_n(t) := v_n(t) - v_n(0) - D_n(t)$ e $A(t) := v(t) - v(0) - D(t)$. Poiché la successione converge uniformemente vale che

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(s)ds, \quad t \in [0,T];$$
$$\lim_{n\to+\infty} \|A_n - A\|_\infty = 0.$$

Verrà mostrato che A è assolutamente continua con derivata limitata. Si ha che

$$\left|\int_0^T A(t)f'(t)dt\right| \le \|b\|_\infty \int_0^T |f(t)|dt, \qquad \forall f \in C_c^1([0,T]).$$

$A_n(t) = \int_0^t \beta_n(s)ds$, $\|\beta_n(t)\|_{\mathbb{L}^\infty} \le \|b\|_\infty$ e dunque integrando per parti si ottiene che

$$\left|\int_0^T A(t)f'(t)dt\right| \le \left|\lim_{n\to+\infty} \int_0^T \beta_n(t)f(t)dt\right| \le \|b\|_\infty \int_0^T |f(t)|dt.$$

Per il Teorema di rappresentazione di Riesz sui funzionali lineari continui di $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ si ha che $A(t)$ ammette una derivata debole $\beta \in \mathbb{L}^\infty([0,T])$ con $\|\beta\|_{\mathbb{L}^\infty} \leq \|b\|_\infty$; applicando infine il Teorema di Rademacher si ha la tesi. $\square$

Si definisca quindi la distribuzione di probabilità $\mathbb{P} \in \mathcal{M}(C_T)$ definita come

$$\mathbb{P} := \tilde{\mathbb{P}} \circ ((X_t, V_t);\ t \in [0,T])^{-1} \tag{4.11}$$

Theorem 10. *$\mathbb{P}$ è la soluzione del **(MP)** per* (2.3) *nel senso della definizione 5. In particolare, dall'unicità della soluzione debole, $\mathbb{P}$ non dipende dalla scelta della successione $\{\epsilon_n\}$.*

Dimostrazione. Si mostra ora che vale il punto *i*) della definizione 5: sia $f \in C_b(\mathbb{R}^2)$, allora

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(y,u)\tilde{\mathbb{P}} \circ (X_0, V_0)^{-1}(dy, du) = \int_{C([0,T],\mathbb{R}^3)} f(x_0, v_0)\tilde{\mathbb{P}}(dx, dv, dD) =$$
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{C([0,T],\mathbb{R}^3)} f(x_0, v_0)\tilde{\mathbb{P}}^{\epsilon_n}(dx, dv, dD) = \lim_{n\to+\infty} \int_{C_T} f(x_0, v_0)\mathbb{P}^{\epsilon_n}(dx, dv)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} f(y,u)\mu_0(dy, du)$$

e ciò dimostra che $\mathbb{P} \circ (X_0, V_0)^{-1} = \mu_0$.
Per mostrare il punto *ii*), ossia l'esistenza di una densità positiva, si consideri $((X_t, V_t, D_t);\ t \in [0,T])$ il processo canonico di $C([0,T],\mathbb{R}^3)$. Per il Lemma 4 si ha che $\tilde{\mathbb{P}}$-q.c. per ogni $t \in [0,T]$,

$$X_t = X_0 + \int_0^t V_s ds,$$
$$V_t = V_0 + \int_0^t \beta_s ds + D_t,$$

con $\|\beta\|_{\mathbb{L}^\infty} \leq \|b\|_\infty$. Si definisca il processo

$$\tilde{D}_t := V_t - V_0 - \int_0^t B_\epsilon[X_\tau, V_\tau, ; \rho^\epsilon_\tau] d\tau,$$

e data $f \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$ si consideri per $t \in [0,T]$

$$M_t := f(D_t) - f(D_0) - \frac{1}{2}\int_s^t a(\tau, X_\tau, V_\tau)\partial_{vv} f(D_\tau)d\tau.$$

Siano inoltre $(\Omega', \mathscr{F}', \mathbb{P}^{\epsilon'}, (\mathscr{F}'_t)_{t\in[0,T]})$, (X', V') e W' definiti come nel Teorema 9, ovvero come soluzione debole della SDE di MKV regolarizzata (2.4) e

$$\Sigma_t := \int_0^t \sigma(\tau, X'_\tau, V'_\tau)d\tau.$$

Infine per $0 \le 0 \le t_1 \le \ldots \le t_k \le s < t \le T$ fissati e per ogni $\Psi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^{3k})$ si usi la notazione

$$\Psi(X_\pi, V_\pi, D_\pi) := \Psi(X_{t_1}, V_{t_1}, D_{t_1}, \ldots, X_{t_k}, V_{t_k}, D_{t_k}).$$

Allora

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}^\epsilon}\left[\Psi(X_\pi, V_\pi, D_\pi)\left(f(D_t) - f(D_s) - \frac{1}{2}\int_s^t a(\tau, X_\tau, V_\tau)\partial_{vv} f(D_\tau)d\tau\right)\right]\\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\epsilon}\left[\Psi(X_\pi, V_\pi, \tilde{D}_\pi)\left(f(\tilde{D}_t) - f(\tilde{D}_s) - \frac{1}{2}\int_s^t a(\tau, X_\tau, V_\tau)\partial_{vv} f(\tilde{D}_\tau)d\tau\right)\right]\\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\epsilon'}}\left[\Psi(X'_\pi, V'_\pi, \Sigma_\pi)\left(f(\Sigma_t) - f(\Sigma_s) - \frac{1}{2}\int_s^t a(\tau, X'_\tau, V'_\tau)\partial_{vv} f(\Sigma_\tau)d\tau\right)\right] = 0
\end{aligned}$$

in quanto

$$f(\Sigma_t) - f(\Sigma_0) - \frac{1}{2}\int_s^t a(\tau, X'_\tau, V'_\tau)\partial_{vv} f(\Sigma_\tau)d\tau$$

è una $\mathbb{P}^{\epsilon'}$-martingala. Poiché $\tilde{\mathbb{P}}^{\epsilon_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \tilde{\mathbb{P}}$ ed $a = \sigma^2$ è continua e limitata allora M è una $\tilde{\mathbb{P}}$-martingala.

Per il Teorema 16 esistono $(\hat{\Omega}, \hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathbb{P}}, (\hat{\mathscr{F}}_t)_{t\in[0,T]})$, $\hat{W}$ e $(\hat{X}, \hat{V}, \hat{D})$ t.c.

$$\begin{cases} d\hat{X}_t = \hat{V}_t dt \\ d\hat{V}_t = \beta_t dt + \sigma(t, \hat{X}_t, \hat{V}_t)d\hat{W}_t \\ d\hat{D}_t = \sigma(t, \hat{X}_t, \hat{V}_t)d\hat{W}_t \end{cases}$$

e $\tilde{\mathbb{P}} = \hat{\mathbb{P}} \circ (X_t, V_t, D_t)^{-1}$. Analogamente a quanto fatto nel definire il sistema di particelle, grazie al Teorema di Girsanov esiste una misura di probabilità $\mathbb{Q}$ equivalente a $\hat{\mathbb{P}}$ rispetto alla quale

$$dW_t := d\hat{W}_t - \sigma^{-1}(t, \hat{X}_t, \hat{V}_t)\beta_t dt$$

è un moto browniano e $\mathbb{Q} \circ (\hat{X}_t, \hat{V}_t)^{-1}$ è la legge del sistema di Langevin stocastico

$$(\hat{X}_t, \hat{V}_t) = \left(\hat{X}_0 + \int_0^t \hat{V}_s ds, \hat{V}_0 + \int_0^t \sigma(s, \hat{X}_s, \hat{V}_s) d\hat{W}_s \right).$$

In virtù del Teorema 6, per ogni $t \in [0, T]$ la legge di $(\hat{X}_t, \hat{V}_t)$ è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue con densità strettamente positiva. Come conseguenza del Teorema di Girsanov anche $\hat{\mathbb{P}} \circ (X_t, V_t)^{-1}$ ammette una densità ρ_t strettamente positiva. Allora $\hat{\mathbb{P}} \circ (X_t, V_t)^{-1} = \tilde{\mathbb{P}} \circ (X_t, V_t)^{-1} = \mathbb{P} \circ (X_t, V_t)^{-1}$ ammette densità positiva ρ_t.
Rimane infine da dimostrare il punto *iv)* del problema della martingala; a tal scopo è sufficiente dimostrare che per ogni $f \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$ e tutti i processi

$$\Psi_s = \Psi(X_{t_1}, V_{t_1}, \ldots, X_{t_n}, V_{t_n}),$$

con Ψ continua e limitata, si ha che

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\Psi_s \left(f(X_t, V_t) - f(X_s, V_s) - \int_s^t [\mathcal{A}_{\rho_\tau} f](\tau, X_\tau, V_\tau) d\tau \right) \right] = 0 \qquad (4.12)$$

per ogni scelta di $0 \le t_1 < \ldots < t_n \le s < t \le T$.
Poiché $\tilde{\mathbb{P}}^{\epsilon_n}$ converge debolmente a $\tilde{\mathbb{P}}$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\epsilon_n}} &\left[\Psi_s \left(f(X_t, V_t) - f(X_s, V_s) - \int_s^t [\mathcal{L}'_\tau f(\tau, X_\tau, V_\tau) d\tau \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\Psi_s \left(f(X_t, V_t) - f(X_s, V_s) - \int_s^t [\mathcal{L}'_\tau f(\tau, X_\tau, V_\tau) d\tau \right) \right], \end{aligned}$$

dove

$$\mathcal{L}'_\tau f(x, v) := v \partial_x f(x, v) + \frac{1}{2} a(t, x, v) \partial_{vv} f(x, v).$$

Per ottenere la (4.12) rimane da dimostrare che

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\epsilon_n}} &\left[\Psi_s \int_s^t \left(B_{\epsilon_n} [X_\tau, V_\tau; \rho_\tau^{\epsilon_n}] \partial_v f(X_\tau, V_\tau) \right) d\tau \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\Psi_s \int_s^t \left(B [X_\tau, V_\tau; \rho_\tau] \partial_v f(X_\tau, V_\tau) \right) d\tau \right]. \qquad (4.13) \end{aligned}$$

A tal scopo sia $\xi > 0$ un parametro positivo che verrà scelto in seguito. Si sostituisca in (4.13) ϵ_n con ϵ e si aggiungano e sottraggano i termini

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\epsilon}\left[\Psi_s \int_s^t \big(B_\xi\big[X_\tau, V_\tau; \rho^\epsilon_\tau\big]\partial_v f(X_\tau, V_\tau)\big)\, d\tau\right]$$

e

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\Psi_s \int_s^t \big(B_\xi\big[X_\tau, V_\tau; \rho_\tau\big]\partial_v f(X_\tau, V_\tau)\big)\, d\tau\right].$$

Si ottiene così

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\epsilon}\left[\Psi_s \int_s^t \big(B_\epsilon\big[X_\tau, V_\tau; \rho^\epsilon_\tau\big]\partial_v f(X_\tau, V_\tau)\big)\, d\tau\right] \\
&\qquad -\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\Psi_s \int_s^t \big(B\big[X_\tau, V_\tau; \rho_\tau\big]\partial_v f(X_\tau, V_\tau)\big)\, d\tau\right]\Bigg| \\
&\le \Bigg|\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\epsilon}\left[\Psi_s \int_s^t \big(B_\xi\big[X_\tau, V_\tau; \rho^\epsilon_\tau\big]\partial_v f(X_\tau, V_\tau)\big)\, d\tau\right] \\
&\qquad -\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\Psi_s \int_s^t \big(B_\xi\big[X_\tau, V_\tau; \rho_\tau\big]\partial_v f(X_\tau, V_\tau)\big)\, d\tau\right]\Bigg| \\
&+\left|\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\epsilon}\left[\Psi_s \int_s^t \big((B_\epsilon\big[X_\tau, V_\tau; \rho^\epsilon_\tau\big] - B_\xi\big[X_\tau, V_\tau; \rho^\epsilon_\tau\big])\partial_v f(X_\tau, V_\tau)\big)\, d\tau\right]\right| \\
&+\left|\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\Psi_s \int_s^t \big((B_\xi\big[X_\tau, V_\tau; \rho_\tau\big] - B\big[X_\tau, V_\tau; \rho_\tau\big])\partial_v f(X_\tau, V_\tau)\big)\, d\tau\right]\right| \\
&=: I_{\epsilon,\xi} + J_{\epsilon,\xi} + K_\xi.
\end{aligned}$$

Per il Lemma 5 qui sotto, facendo tendere ξ ed ϵ a 0 si ottiene (4.13) e ciò conclude la dimostrazione del punto *iv*) del **(MP)**. □

Lemma 5. *Valgono le seguenti relazioni*

$$\forall \xi > 0 \qquad \lim_{\epsilon \to 0^+} I_{\epsilon,\xi} = 0, \tag{4.14}$$

e

$$\lim_{\xi \to 0^+} K_\xi = 0. \tag{4.15}$$

Inoltre, esiste una funzione $\delta_1(\epsilon)$ indipendente da ξ, e una funzione $\delta_2(\xi)$ indipendente da ϵ, tali che

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \delta_1(\epsilon) = \lim_{\xi \to 0^+} \delta_2(\xi) = 0$$

e

$$J_{\epsilon,\xi} \leq \delta_1(\epsilon) + \delta_2(\xi). \tag{4.16}$$

4.4.1 Risultati preliminari alla dimostrazione del Lemma 5

Proposizione 2. *Per ogni* $t \in (0, T]$

$$\rho_t^\epsilon \xrightarrow[\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)]{\epsilon \to 0^+} \rho_t.$$

Tale risultato è conseguenza immediata del Lemma 9 e del seguente risultato.

Lemma 6. *Per ogni* $t \in (0, T]$ *vale*

$$\lim_{|h|,|\delta| \to 0} \limsup_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^2} |\rho_t^\epsilon(y+h, u+\delta) - \rho_t^\epsilon(y, u)| \, dydu = 0.$$

Dimostrazione. La dimostrazione di questo lemma sfrutta l'esistenza e l'unicità della SDE regolarizzata ed il fatto che le marginali di tale soluzione risolvano la già utilizzata equazione mild.

Dato che $\mathbb{P}^\epsilon$ è l'unica soluzione del problema della martingala della SDE regolarizzata, le sue marginali soddisfano un'equazione mild del tipo (3.7). Per ogni $t \in (0, T]$,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^2} |\rho_t^\epsilon(y+h, u+\delta) - \rho_t^\epsilon(y, u)| \, dydu = 0 \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} \left| S^*_{t,0}(\mu_0)(y+h, u+\delta) - S^*_{t,0}(\mu_0)(y, u) \right| dydu \\
&+ \limsup_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^t |S'_{t,s} \left(\rho_s^\epsilon(\cdot) B_\epsilon[\cdot; \rho_s^\epsilon] \right)(y+h, u+\delta) \\
&\qquad - S'_{t,s} \left(\rho_s^\epsilon(\cdot) B_\epsilon[\cdot; \rho_s^\epsilon] \right)(y, u)| dyduds.
\end{aligned}$$

Dal momento che $S^*_{t,0}(\mu_0) \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)$, per la continuità della norma in $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)$[2]

$$\lim_{|h|,|\delta| \to 0} \int_{\mathbb{R}^2} \left| S^*_{t,0}(\mu_0)(y+h, u+\delta) - S^*_{t,0}(\mu_0)(y, u) \right| dydu = 0.$$

[2] $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \int |f(x+h) - f(x)| dx \xrightarrow[|h| \to 0]{} 0.$

In più dalla definizione di S' segue che

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_0^t |S'_{t,s}\left(\rho^\epsilon_s(\cdot)B_\epsilon[\cdot;\rho^\epsilon_s]\right)(y+h,u+\delta) - S'_{t,s}\left(\rho^\epsilon_s(\cdot)B_\epsilon[\cdot;\rho^\epsilon_s]\right)(y,u)|dyduds$$
$$\leq \|b\|_\infty \int_{\mathbb{R}^2}\int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_v\Gamma(s,x,v;t,y+h,u+\delta) - \partial_v\Gamma(s,x,v;t,y,u)|dydu\right)$$
$$\times\, \rho^\epsilon_s(x,v)dxdvds.$$

Si ponga

$$L_{h,\delta}(t,s,x,v) := \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_v\Gamma(s,x,v;t,y+h,u+\delta) - \partial_v\Gamma(s,x,v;t,y,u)|dydu;$$

poiché $\tilde{\mathbb{P}}^\epsilon$ converge debolmente a $\tilde{\mathbb{P}}$ allora fissato $t \in (0,T]$ $\rho^\epsilon_t(x,v)dxdv$ converge debolmente e

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^2}\int_0^t L_{h,\delta}(t,s,x,v)\rho^\epsilon_s(x,v)dxdvds = \int_{\mathbb{R}^2}\int_0^t L_{h,\delta}(t,s,x,v)\rho_s(x,v)dxdvds.$$

Per la stima (3.4) del Teorema 6

$$\sup_{(x,v)\in\mathbb{R}^2} L_{h,\delta}(t,s,x,v) \leq \frac{C}{\sqrt{t-s}}$$

per ogni $t > s$ e quindi

$$\int_{\mathbb{R}^2} L_{h,\delta}(t,s,x,v)\rho_s(x,v)dxdv \leq \frac{C}{\sqrt{t-s}} \in \mathbb{L}^1((0,t)).$$

A questo punto è allora possibile applicare il Teorema della Convergenza Dominata e quindi per $|h|,|\delta| \to 0$ si ha la tesi. □

Corollario 1. *Vale*

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^T \|\rho^\epsilon_\tau - \rho_\tau\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)}d\tau = 0$$

Dimostrazione. Per $\tau \in (0,T]$ $\|\rho^\epsilon_\tau\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)} = 1$ e quindi la tesi segue dalla Proposizione 2 ed il Teorema della Convergenza Dominata. □

Lemma 7. *Vale*

$$\lim_{\xi\to 0^+}\int_0^T \|\phi_\xi * \rho_\tau - \rho_\tau\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)}d\tau = 0.$$

Dimostrazione.

$$\|\phi_\xi * \rho_\tau - \rho_\tau\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)} \leq \int_{\mathbb{R}} \phi(y) \int_{\mathbb{R}^2} |\rho_\tau(x - \xi y, v) - \rho_\tau(x, v)| dx dv dy,$$

il quale tende a 0 per $\xi \to 0^+$ per la continuità in norma $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)$ di ρ_τ, ossia

$$\|\rho_\tau(x + h, v) - \rho_\tau(x, v)\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)} \xrightarrow[h \to 0^+]{} 0.$$

Inoltre $\phi \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ e ciò permette di applicare il Teorema della Convergenza Dominata ed ottenere così la tesi. □

Lemma 8. *Sia*

$$\bar{\rho}_\tau(x) := \int_{\mathbb{R}} \rho_\tau(x, v) dv.$$

Si ha che

$$\lim_{\xi \to 0^+} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi \bar{\rho}_\tau(x)}{\bar{\rho}_\tau(x) + \xi} dx d\tau = 0.$$

Dimostrazione. $\rho_\tau > 0 \Rightarrow \bar{\rho}_\tau > 0$ e la funzione

$$\xi \in [0, 1] \mapsto D(\xi; x, \tau) := \frac{\xi \bar{\rho}_\tau(x)}{\bar{\rho}_\tau(x) + \xi}$$

assume valori limitati dall'alto da $\bar{\rho_\tau}$. Allora per il Teorema della Convergenza Dominata $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} D(\xi; x, \tau) dx d\tau$ tende a 0 per $\xi \to 0^+$. □

4.4.2 Dimostrazione del Lemma 5

Dimostrazione di (4.14). Per ogni $(X, V) \in C_T$ si definiscano

$$F_\xi^{\epsilon'}(X, V) := \Psi_s \int_s^t \Big(B_\xi[X_\tau, V_\tau; \rho_\tau^{\epsilon'}] \partial_v f(X_\tau, V_\tau) \Big) d\tau$$

$$F_\xi(X, V) := \Psi_s \int_s^t \left(B_\xi[X_\tau, V_\tau; \rho_\tau] \partial_v f(X_\tau, V_\tau) \right) d\tau.$$

Allora,

$$\begin{aligned} I_{\epsilon,\xi} &= \left| \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\epsilon} F_\xi^\epsilon - \mathbb{E}_{\mathbb{P}} F_\xi \right| \\ &\leq \sup_{\epsilon' > 0} \left| \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\epsilon} F_\xi^{\epsilon'} - \mathbb{E}_{\mathbb{P}} F_\xi^{\epsilon'} \right| + \left| \mathbb{E}_{\mathbb{P}} F_\xi^\epsilon - \mathbb{E}_{\mathbb{P}} F_\xi \right|. \end{aligned}$$

Si osservi che $|F_\xi^\epsilon - F_\xi|$ tende a 0 per $\epsilon \to 0^+$; infatti

$$\begin{aligned} &|F_\xi^\epsilon - F_\xi| \\ &= \left|\Psi_s \int_s^t \left(B_\xi[X_\tau, V_\tau; \rho_\tau^\epsilon] - B_\xi[X_\tau, V_\tau; \rho_\tau]\right) \partial_v f(X_\tau, V_\tau) d\tau\right| \end{aligned}$$

ed il termine

$$\begin{aligned} &|B_\xi[X_\tau, V_\tau; \rho_\tau^\epsilon] - B_\xi[X_\tau, V_\tau; \rho_\tau]| \\ &\quad = \left|\frac{\int_{\mathbb{R}} b(u, V_\tau)\phi_\xi * \rho_\tau^\epsilon(X_\tau, u)du}{\int_{\mathbb{R}} \phi_\xi * \rho_\tau^\epsilon(X_\tau, u)du + \xi} - \frac{\int_{\mathbb{R}} b(u, V_\tau)\phi_\xi * \rho_\tau(X_\tau, u)du}{\int_{\mathbb{R}} \phi_\xi * \rho_\tau(X_\tau, u)du + \xi}\right| \\ &= \left|\frac{\int_{\mathbb{R}^2} b(u, V_\tau)\phi_\xi(X_\tau - y)\rho_\tau^\epsilon(y, u)dydu}{\int_{\mathbb{R}^2} \phi_\xi(X_\tau - y)\rho_\tau^\epsilon(y, u)dydu + \xi} - \frac{\int_{\mathbb{R}^2} b(u, V_\tau)\phi_\xi(X_\tau - y)\rho_\tau(y, u)dydu}{\int_{\mathbb{R}^2} \phi_\xi(X_\tau - y)\rho_\tau(y, u)dydu + \xi}\right| \end{aligned}$$

tende a 0 per $\epsilon \to 0^+$ in quanto $\rho_\tau^\epsilon(x, v)dxdv \xrightarrow[\epsilon \to 0^+]{d} \rho_\tau(x, v)dxdv$.

Si passi a considerare il primo termine: denotando con K_f il supporto compatto di f e con $\pi_v(K_f)$ la proiezione di K_f sulla seconda componente, verrà ora mostrato che $\{F_\xi^{\epsilon'};\ \epsilon' > 0\}$ è una famiglia di elementi $C([0, T], K_f) \longrightarrow \mathbb{R}$; inoltre essa è equicontinua ed uniformemente limitata. Date $(x, v), (x', v') \in C([0, T], K_f)$

$$\begin{aligned} &\left|B_\xi[x_\tau, v_\tau; \rho_\tau^{\epsilon'}] - B_\xi[x'_\tau, v'_\tau; \rho_\tau^{\epsilon'}]\right| \\ &\quad = \left|\frac{\int_{\mathbb{R}} b(u, v_\tau)\phi_\xi * \rho_\tau^{\epsilon'}(x_\tau, u)du}{\int_{\mathbb{R}} \phi_\xi * \rho_\tau^{\epsilon'}(x_\tau, u)du + \xi} - \frac{\int_{\mathbb{R}} b(u, v'_\tau)\phi_\xi * \rho_\tau^{\epsilon'}(x'_\tau, u)du}{\int_{\mathbb{R}} \phi_\xi * \rho_\tau^{\epsilon'}(x'_\tau, u)du + \xi}\right| \\ &\qquad = \left|\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2}\right| \le \left|\frac{a_1 - a_2}{b_2}\right| + \left|\frac{a_1(b_2 - b_1)}{b_2 b_1}\right|. \end{aligned}$$

Si verifica facilmente che

$$\left|\frac{a_1}{b_1}\right| \le \|b\|_\infty, \quad b_2 \ge \xi.$$

Preso $\eta > 0$, per la tightness di $\mathbb{P}^{\epsilon'}$ è possibile considerare un $R = R(\eta) > 0$ tale che

$$\int_{\mathbb{R} \times \{|u| > R\}} \rho_\tau^{\epsilon'}(z, u)dzdu < \eta \qquad \forall \epsilon' > 0;$$

Le funzioni $b\big|_{\{|u|\leq R\}\times\pi_v(K_f)}$ e ϕ_ξ sono uniformemente continue: sia dunque $\delta(\eta) > 0$ tale che

$$y, y' \in \mathbb{R} \Rightarrow \ |\phi_\xi(y) - \phi_\xi(y')| < \eta,$$

$$(u,z),(u',z') \in \{|u| \leq R\}\times\pi_v(K_f),\ |u-u'|+|z-z'| < \delta \Rightarrow \ |b(u,z)-b(u',z')| < \eta.$$

Di conseguenza se $\|x - x'\|_\infty + \|v - v'\|_\infty < \delta$ si ha che per ogni $\epsilon' > 0$

$$\begin{aligned} |b_2 - b_1| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \phi_\xi * \rho_\tau^{\epsilon'}(x_\tau, u) - \phi_\xi * \rho_\tau^{\epsilon'}(x'_\tau, u) du \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| (\phi_\xi(x_\tau - z) - \phi_\xi(x'_\tau - z))\, \rho_\tau^{\epsilon'}(z, u) \right| dz du \leq \eta; \end{aligned}$$

inoltre

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2| &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| b(u, v_\tau)\phi_\xi * \rho_\tau^{\epsilon'}(x_\tau, u) - b(u, v'_\tau)\phi_\xi * \rho_\tau^{\epsilon'}(x'_\tau, u) \right| du \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| (b(u, v_\tau) - b(u, v'_\tau))\, \phi_\xi * \rho_\tau^{\epsilon'}(x_\tau, u) \right| du \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \left| b(u, v'_\tau) \left(\phi_\xi * \rho_\tau^{\epsilon'}(x_\tau, u) - \phi_\xi * \rho_\tau^{\epsilon'}(x'_\tau, u) \right) \right| du, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \left| (b(u, v_\tau) - b(u, v'_\tau))\, \phi_\xi * \rho_\tau^{\epsilon'}(x_\tau, u) \right| du \\ &\leq \int_{|u|\leq R} \left| (b(u, v_\tau) - b(u, v'_\tau))\, \phi_\xi * \rho_\tau^{\epsilon'}(x_\tau, u) \right| du + 2\|b\|_\infty \int_{|u|>R} \left| \phi_\xi * \rho_\tau^{\epsilon'}(x_\tau, u) \right| du \\ &< \|\phi_\xi\|_\infty \eta + 2\|b\|_\infty \|\phi_\xi\|_\infty \eta. \end{aligned}$$

Ciò dimostra che esiste $C = C(\xi) > 0$ tale che per ogni $\epsilon' > 0$

$$\left| B_\xi[x_\tau, v_\tau; \rho_\tau^{\epsilon'}] - B_\xi[x'_\tau, v'_\tau; \rho_\tau^{\epsilon'}] \right| < C\eta$$

e di conseguenza la famiglia $\{F_\xi^{\epsilon'};\ \epsilon' > 0\}$ definita su $C([0,T], K_f)$ è equicontinua. È infine immediata la verifica che tale famiglia è uniformemente limitata e quindi applicando il Corollario 3 si ha che

$$\sup_{\epsilon'>0} \left| \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\epsilon} F_\xi^{\epsilon'} - \mathbb{E}_{\mathbb{P}} F_\xi^{\epsilon'} \right| \xrightarrow[\epsilon\to 0^+]{} 0.$$

□

Dimostrazione di (4.15). Si ricordi la notazione

$$\bar{\rho}_\tau(x) := \int_{\mathbb{R}} \rho_\tau(x,v)dv.$$

Si osservi che

$$\begin{aligned} &|B_\xi[x,v;\rho_\tau] - B[x,v;\rho_\tau]| \\ \leq &\left| \frac{\int_{\mathbb{R}} b(u,v)\phi_\xi * \rho_\tau(x,u)du}{\phi_\xi * \bar{\rho}_\tau(x) + \xi} - \frac{\int_{\mathbb{R}} b(u,v)\rho_\tau(x,u)du}{\bar{\rho}_\tau(x) + \xi} \right| \\ &+ \left| \frac{\int_{\mathbb{R}} b(u,v)\rho_\tau(x,u)du}{\bar{\rho}_\tau(x) + \xi} - \frac{\int_{\mathbb{R}} b(u,v)\rho_\tau(x,u)du}{\bar{\rho}_\tau(x)} \right|. \end{aligned}$$

Utilizzando la relazione elementare (3.11) si ha

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\int_{\mathbb{R}} b(u,v)\phi_\xi * \rho_\tau(x,u)du}{\phi_\xi * \bar{\rho}_\tau(x) + \xi} - \frac{\int_{\mathbb{R}} b(u,v)\rho_\tau(x,u)du}{\bar{\rho}_\tau(x) + \xi} \right| \\ &\leq \left| \frac{\int_{\mathbb{R}} b(u,v) \left(\phi_\xi * \rho_\tau(x,u) - \rho_\tau(x,u)\right) du}{\phi_\xi * \bar{\rho}_\tau(x) + \xi} \right| \\ &+ \frac{\left|\int_{\mathbb{R}} b(u,v)\phi_\xi * \rho_\tau(x,u)du\right| \left|\int_{\mathbb{R}} b(u,v) \left(\phi_\xi * \rho_\tau(x,u) - \rho_\tau(x,u)\right) du\right|}{\left(\phi_\xi * \bar{\rho}_\tau(x) + \xi\right)\left(\bar{\rho}_\tau(x) + \xi\right)} \\ &\leq \frac{2\|b\|_\infty}{\bar{\rho}_\tau(x) + \xi} \int_{\mathbb{R}} |\phi_\xi * \rho_\tau(x,u) - \rho_\tau(x,u)|\, du, \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\left| \frac{\int_{\mathbb{R}} b(u,v)\rho_\tau(x,u)du}{\bar{\rho}_\tau(x) + \xi} - \frac{\int_{\mathbb{R}} b(u,v)\rho_\tau(x,u)du}{\bar{\rho}_\tau(x)} \right| \leq \|b\|_\infty \frac{\xi}{(\bar{\rho}_\tau(x) + \xi)} \tag{4.18}$$

Ciò implica insieme al Teorema di Fubini che

$$\begin{aligned} K_\xi &\leq \|\Psi_s\|_\infty \|\partial_v f\|_\infty \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} |B_\xi[x,v,\rho_\tau] - B[x,v;\rho_\tau]|\rho_\tau(x,v)dxdvd\tau \\ &\leq C\left(\int_0^t \|\phi_\xi * \rho_\tau - \rho_\tau\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)}d\tau + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi\bar{\rho}_\tau(x)}{\bar{\rho}_\tau(x) + \xi}dxd\tau \right). \end{aligned}$$

Applicando il Lemma 7 al primo termine ed il Lemma 8 al secondo per $\xi \to 0^+$ entrambi i termini tendono a 0. $\square$

Dimostrazione di (4.16). È facile verificare che

$$J_{\epsilon,\xi} \leq \|\Psi_s\|_\infty \|\partial_v f\|_\infty \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} |B_\xi[x,v;\rho^\epsilon_\tau] - B[x,v;\rho^\epsilon_\tau]| \, \rho^\epsilon_\tau(x,v) dx dv d\tau \right.$$
$$\left. + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} |B[x,v;\rho^\epsilon_\tau] - B_\epsilon[x,v;\rho^\epsilon_\tau]| \, \rho^\epsilon_\tau(x,v) dx dv d\tau \right)$$
$$=: \|\Psi_s\|_\infty \|\partial_v f\|_\infty \left(J^1_{\epsilon,\xi} + J^2_\epsilon \right). \quad (4.19)$$

Per stimare $J^1_{\epsilon,\xi}$ si osservi che

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} |B_\xi[x,v;\rho^\epsilon_\tau] - B[x,v,;\rho^\epsilon_\tau]| \, \rho^\epsilon_\tau(x,v) dx dv d\tau \\ &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\int_{\mathbb{R}} b(u,v) \phi_\xi * \rho^\epsilon_\tau(x,u) du}{\phi_\xi * \bar\rho^\epsilon_\tau(x) + \xi} - \frac{\int_{\mathbb{R}} b(u,v) \rho^\epsilon_\tau(x,u) du}{\bar\rho^\epsilon_\tau(x) + \xi} \right| \rho^\epsilon_\tau(x,v) dx dv d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\int_{\mathbb{R}} b(u,v) \rho^\epsilon_\tau(x,u) du}{\bar\rho^\epsilon_\tau(x) + \xi} - \frac{\int_{\mathbb{R}} b(u,v) \rho^\epsilon_\tau(x,u) du}{\bar\rho^\epsilon_\tau(x)} \right| \rho^\epsilon_\tau(x,v) dx dv d\tau. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Si stimino ora i termini di (4.20).

Usando nuovamente la relazione elementare (3.11) similmente a quanto già fatto nel mostrare (4.17) si ottiene

$$\left| \frac{\int_{\mathbb{R}} b(u,v) \phi_\xi * \rho^\epsilon_\tau(x,u) du}{\phi_\xi * \bar\rho^\epsilon_\tau(x) + \xi} - \frac{\int_{\mathbb{R}} b(u,v) \rho^\epsilon_\tau(x,u) du}{\bar\rho^\epsilon_\tau(x) + \xi} \right| \leq \frac{2\|b\|_\infty}{\bar\rho^\epsilon_\tau(x) + \xi} \int_{\mathbb{R}} |\phi_\xi * \rho^\epsilon_\tau(x,u) - \rho^\epsilon_\tau(x,u)| \, du.$$

Di conseguenza il primo termine di (4.20) è limitato dall'alto da

$$\begin{aligned} &C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} |\phi_\xi * \rho^\epsilon_\tau(x,v) - \rho^\epsilon_\tau(x,v)| dx dv d\tau \\ &\leq C \int_0^t \|\phi_\xi * \rho^\epsilon_\tau - \phi_\xi * \rho_\tau\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)} d\tau + C \int_0^t \|\rho^\epsilon_\tau - \rho_\tau\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)} d\tau \\ &\qquad + C \int_0^t \|\phi_\xi * \rho_\tau - \rho_\tau\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)} d\tau \\ &\leq C \int_0^t \|\rho^\epsilon_\tau - \rho_\tau\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)} d\tau + C \int_0^t \|\phi_\xi * \rho_\tau - \rho_\tau\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)} d\tau. \end{aligned}$$

Il secondo termine di (4.20) può essere stimato in modo analogo a quanto fatto nel dimostrare (4.18); si ottiene così che esso è limitato da

$$\|b\|_\infty \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi \bar\rho^\epsilon_\tau(x)}{\bar\rho^\epsilon_\tau(x) + \xi} dx d\tau.$$

Inoltre per ogni $\xi > 0$, per la (3.11)

$$\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi \bar{\rho}_\tau^\epsilon(x)}{\bar{\rho}_\tau^\epsilon(x) + \xi} dx d\tau - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi \bar{\rho}_\tau(x)}{\bar{\rho}_\tau(x) + \xi} dx d\tau\right| \\ \leq 2 \int_0^t \|\rho_\tau^\epsilon - \rho_\tau\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)} d\tau.$$

Da quest'ultima relazione è immediato verificare che

$$J_{\epsilon,\xi}^1 \leq C \int_0^t \|\rho_\tau^\epsilon - \rho_\tau\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)} d\tau + C \int_0^t \|\phi_\xi * \rho_\tau - \rho_\tau\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)} d\tau \\ + C \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\epsilon \bar{\rho}_\tau(x)}{\bar{\rho}_\tau(x) + \xi} dx d\tau.$$

Con conti analoghi a quelli già utilizzati si mostra che

$$J_\epsilon^2 \leq C \int_0^t \|\phi_\epsilon * \rho_\tau^\epsilon - \rho_\tau^\epsilon\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)} d\tau \\ + C \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\epsilon \bar{\rho}_\tau(x)}{\bar{\rho}_\tau(x) + \epsilon} dx d\tau,$$

ma

$$\|\phi_\epsilon * \rho_\tau^\epsilon - \rho_\tau^\epsilon\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)} \\ \leq \|\phi_\epsilon * \rho_\tau^\epsilon - \phi_\epsilon * \rho_\tau\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)} + \|\phi_\epsilon * \rho_\tau - \rho_\tau\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)} + \|\rho_\tau - \rho_\tau^\epsilon\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)}$$

e quindi utilizzando le stime già dimostrate si ottiene la tesi. □

Appendice A

Richiami sulla topologia debole

In questa sezione vengono enunciati i risultati generali sulla topologia debole nello spazio di misure di probabilità; la maggior parte delle dimostrazioni sono presenti nel Capitolo I di [27].

In questa sezione vengono utilizzate le seguenti notazioni:

- (E, d) denota uno spazio metrico completo e separabile.
- $\mathcal{M}(E)$ rappresenta lo spazio delle misure di probabilità sui boreliani di (E, d) munito della topologia debole.

Tale topologia su $\mathcal{M}(E)$ è definita mediante la seguente nozione di convergenza

Definizione 6. *Una successione $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ su $\mathcal{M}(E)$ converge debolmente a $\mu \in \mathcal{M}(E)$ per $n \to +\infty$, i.e.*

$$\mu_n \xrightarrow[d]{n\to+\infty} \mu$$

se e solo se per ogni $f \in \mathcal{C}_b(E)$ si ha che

$$\int_E f d\mu_n \xrightarrow{n\to+\infty} \int_E f d\mu.$$

Risultati generali

Theorem 11 (Teorema di Portamentau). *Dati* (E, d) *spazio metrico separabile,* $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *su* $\mathcal{M}(E)$ *e* $\mu \in \mathcal{M}(E)$ *sono equivalenti:*

i) $\mu_n \xrightarrow[d]{n\to+\infty} \mu$.

ii) $\limsup_{n\to+\infty} \mu_n(C) \leq \mu(C)$ *per ogni chiuso* C *di* E.

iii) $\liminf_{\to+\infty} \mu_n(A) \geq \mu(A)$ *per ogni aperto* A *di* E.

iv) $\lim_{n\to+\infty} \mu_n(B) = \mu(B)$ *per ogni boreliano* B *tale che* $\mu(\partial B) = 0$.

Theorem 12. *Dato* (E, d)*, la topologia debole su* $\mathcal{M}(E)$ *è metrizzabile.*

Definizione 7 (Tightness). *Un sottoinsieme* $\Gamma \subseteq \mathcal{M}(E)$ *è tight se per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste un compatto* $K \subseteq E$ *tale che*

$$\mu(E \setminus K) \leq \epsilon \qquad \forall \mu \in \Gamma.$$

Theorem 13 (Teorema di Prokhorov). *Dati* (E, d) *e* $\Gamma \subseteq \mathcal{M}(E)$ *allora* Γ *è tight se e soltanto se* Γ *è precompatto rispetto alla topologia debole.*

Corollario 2 (Teorema di Helly). *Siano* (E, d) *e* $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di* $\mathcal{M}(E)$*. Se l'insieme* $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è tight allora esiste una sottosuccessione di* $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *debolmente convergente ad un elemento* $\mu \in \mathcal{M}(E)$.

Corollario 3. *Sia* $\{F_{\epsilon'}, \epsilon' > 0\}$ *una famiglia di funzioni uniformemente limitata ed equicontinua in ogni punto di* (E, d)*. Date* $\{\mu_\epsilon;\ \epsilon > 0\}$ *e* μ *in* $\mathcal{M}(E)$*, se* $\lim_{\epsilon\to0^+} \mu_\epsilon = \mu$ *allora*

$$\lim_{\epsilon\to0^+} \sup_{\epsilon'>0} \left| \int_E F_{\epsilon'} d\mu_\epsilon - \int_E F_{\epsilon'} d\mu \right| = 0.$$

Lemma 9 (Lemma 11.4.1 di [27]). *Sia* $\{f_n\}_{n\geq1}$ *una successione di funzioni di* $\boldsymbol{B}(\mathbb{R}^d)$ *positive con* $\int f_n(x)dx = 1$ *per ogni* $n \geq 1$ *e tali che*

$$\lim_{|h|\to0} \sup_{n\geq1} \int |f_n(x+h) - f_n(x)| dx = 0.$$

Se esiste $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)$ *per la quale*

$$\int f(x)\psi(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int f_n(x)\psi(x)dx \qquad \psi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$$

allora $f_n \xrightarrow[\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)]{n\to+\infty} f$.

A.1 Tightness in $\mathcal{M}(C([0,T],\mathbb{R}^d))$

I seguenti risultati sono presenti nella sezione 4 del Capitolo I di [17]. Si denoti con X il processo canonico di $C([0,T],\mathbb{R}^d)$.

Data $f \in C([0,T],\mathbb{R}^d)$, $\delta > 0$ si definisce

$$\omega_f(\delta) := \sup_{|t-s|\leq\delta,\ 0\leq s,t\leq T} |f(t)-f(s)|.$$

Theorem 14. *Sia* I *insieme non vuoto di indici e* $(\mathbb{P}^i)_{i\in I}$ *una famiglia di elementi di* $\mathcal{M}(C([0,T],\mathbb{R}^d))$*. Allora* $(\mathbb{P}^i)_{i\in I}$ *è precompatto se e solo se valgono le seguenti condizioni:*

i) $(\mathbb{P}^i \circ (X(0))^{-1})_{i\in I}$ *è tight in* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$*,*

ii) Per ogni $\epsilon > 0$

$$\lim_{\delta\to 0^+} \sup_{i\in I} \mathbb{P}^i\left(\left\{f \in C([0,T],\mathbb{R}^d)\ : \omega_f(\delta) > \epsilon\right\}\right) = 0.$$

Theorem 15 (Criterio di Kolmogorov)**.** *Sia* I *insieme non vuoto di indici,* $(\mathbb{P}_i)_{i\in I}$ *una famiglia di elementi di* $\mathcal{M}(C([0,T],\mathbb{R}^d))$*. Se valgono*

i) $(\mathbb{P}^i \circ (X(0))^{-1})_{i\in I}$ *è tight in* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$*;*

ii) esistono delle costanti positive C, α, β *tali che per ogni* $s,t \in [0,T]$ *e per ogni* $i \in I$*,*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^i}[|X(s)-X(t)|^\alpha] \leq C|t-s|^{1+\beta}$$

allora $(\mathbb{P}^i)_{i\in I}$ *è precompatto.*

Dimostrazione. Per ipotesi vale l'ipotesi $i)$ del Teorema 14 e dunque per dimostrare la tesi è sufficiente mostrare che vale anche l'ipotesi $ii)$. In questa dimostrazione non è restrittivo supporre T intero positivo. Indicando con $\mathbb{P}$ un generico $\mathbb{P}^i$ $i \in I$, per la disuguaglianza di Markov si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|X\left(\frac{i+1}{2^m}\right)-X\left(\frac{i}{2^m}\right)\right| > 2^{-mp}\right) &\leq C2^{-m(1+\beta)}2^{mp\alpha} \\ &= C2^{-m(1+\beta-p\alpha)}, \qquad i=0,1,\ldots,2^mT-1.\end{aligned}$$

Per $p \in (0, \frac{\beta}{\alpha})$, dalla precedente disuguaglianza segue che

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\max_{0\leq i\leq 2^mT-1}\left|X\left(\frac{i+1}{2^m}\right)-X\left(\frac{i}{2^m}\right)\right| > 2^{-mp}\right) \\ &\leq \sum_{i=0}^{2^mT-1}\mathbb{P}\left(\left|X\left(\frac{i+1}{2^m}\right)-X\left(\frac{i}{2^m}\right)\right| > 2^{-mp}\right) \leq CT2^{-m(\beta-p\alpha)},\end{aligned}$$

e comunque scelti $\epsilon, \delta > 0$ è possibile scegliere $\nu(\epsilon,\delta)$ tale che $\frac{(1+\frac{2}{(2^p-1)})}{2^{\nu p}} \leq \epsilon$ e

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\bigcup_{m=\nu}^{+\infty}\left\{\max_{0\leq i\leq 2^mT-1}\left|X\left(\frac{i+1}{2^m}\right)-X\left(\frac{i}{2^m}\right)\right| > 2^{-mp}\right\}\right) \\ &\qquad\leq CT\sum_{m=\nu}^{+\infty}2^{-m(\beta-p\alpha)} < \delta.\end{aligned}$$

Ponendo allora $\Omega_\nu := \bigcup_{m=\nu}^{+\infty}\left\{\max_{0\leq i\leq 2^mT-1}\left|X\left(\frac{i+1}{2^m}\right)-X\left(\frac{i}{2^m}\right)\right| > 2^{-mp}\right\}$ si ha che $\mathbb{P}(\Omega_\nu) < \delta$ e se $\omega \notin \Omega_\nu$

$$\left|X\left(\frac{i+1}{2^m}\right)-X\left(\frac{i}{2^m}\right)\right| \leq \frac{1}{2^{p\alpha}}$$

per ogni $m \geq \nu$ e i tali che $\frac{i+1}{2^m} \leq T$.

Indicando con $\mathbf{D}_T := \mathbb{Q} \cap [0,T]$, allora preso $s \in \mathbf{D}_T$ nell'intervallo $[\frac{i}{2^\nu}, \frac{(i+1)}{2^\nu})$ esso si scrive come $s = \frac{i}{2^\nu} + \sum_{l=1}^{j}\frac{a_l}{2^{\nu+l}}$ per un qualche $j \geq 1$ e a_l a valori in $\{0,1\}$. Quindi se $\omega \notin \Omega_\nu$,

$$\begin{aligned}\left|X(s)-X\left(\frac{i}{2^m}\right)\right| &\leq \sum_{k=1}^{j}\left|X\left(\frac{i}{2^\nu}+\sum_{l=1}^{k}\frac{a_l}{2^{\nu+l}}\right)-X\left(\frac{i}{2^\nu}+\sum_{l=1}^{k-1}\frac{a_l}{2^{\nu+l}}\right)\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{j}\frac{1}{2^{(\nu+k)p}} \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{(\nu+k)p}} = \frac{1}{(2^p-1)2^{\nu p}}.\end{aligned}$$

Di conseguenza, se $s, t \in \mathbf{D}_T$, $|s-t| < 2^{-\nu}$ e $\omega \notin \Omega_\nu$, allora si verifica facilmente che

$$|X(t) - X(s)| \leq \frac{(1 + \frac{2}{(2^p - 1)})}{2^{\nu p}} \leq \epsilon.$$

Poiché $\mathbf{D}_T$ è denso in $[0, T]$ tale relazione è vera per ogni $s, t \in [0, T]$ tali che $|s - t| < 2^{-\nu}$. Ciò dimostra che per ogni $i \in I$

$$\mathbb{P}^i \left(\max_{t,s \in [0,T],\ |s-t| < 2^{-\nu}} |X(t) - X(s)| > \epsilon \right) \leq \mathbb{P}^i(\Omega_\nu) < \delta$$

e quindi vale l'ipotesi $ii)$ del Teorema 13. $\square$

Appendice B

Problema della martingala

Questa sezione tratta alcuni risultati sul problema della martingala, le cui dimostrazioni sono presenti nella sezione 5.4 di [18].

Siano

- $b_i(t,x) \in \mathbf{B}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, $b_i(\cdot, x) \in \mathbb{L}^1([0,T])$ con $1 \le i \le d$.
- $\sigma_{i,j}(t,x) \in \mathbf{B}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, $\sigma_i(\cdot, x) \in \mathbb{L}^2([0,T])$ con $1 \le i \le d$, $1 \le j \le r$.

Definita $a(t,x) := \sigma(t,x)\sigma^T(t,x)$ si introduca per $t \in [0,T]$ l'operatore differenziale del secondo ordine

$$(\mathcal{A}_t f)(x) := \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{d} a_{ik}(t,x) \partial^2_{x_i x_k} f(x) + \sum_{i=1}^{d} b_i(t,x) \partial_{x_i} f(x); \quad f \in C^2(\mathbb{R}^d). \tag{B.1}$$

Si denoti con X il processo canonico di $C([0,T], \mathbb{R}^d)$.

Definizione 8. $\mathbb{P} \in \mathcal{M}(C([0,T], \mathbb{R}^d))$ *per la quale il processo continuo*

$$M_t^f = f(X(t)) - f(X(0)) - \int_0^t (\mathcal{A}_s f)(X) ds \quad t \in [0,T]$$

è una martingala locale per ogni $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$*, è detta soluzione del problema locale della martingala associato ad* $\{\mathcal{A}_t\}$*. La filtrazione* $\mathscr{F}_t$ *scelta per* M^f *è la filtrazione standard generata dal processo canonico* X*.*

Theorem 16. *Sia* $\mathbb{P} \in \mathcal{M}(C([0,T],\mathbb{R}^d))$ *per la quale il processo* M^f *è una martingala locale per* $f(x) = x_i$ *e* $f(x) = x_i x_k$; $1 \leq i,k \leq d$. *Allora esiste un moto browniano r-dimensionale* W_t *definito su un'estensione* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, \tilde{\mathbb{P}}, \{\tilde{\mathscr{F}}_t\})$ *di* $\big(C([0,T],\mathbb{R}^d), \mathscr{B}, \mathbb{P}\big)$, *tale che* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, \tilde{\mathbb{P}}, \{\tilde{\mathscr{F}}_t\})$, W_t *ed il processo canonico* X_t *di* $\tilde{\Omega}$ *è una soluzione debole, nel senso della Definizione 3, per la SDE*

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t; \quad t \in [0,T]. \tag{B.2}$$

Inoltre $\mathbb{P} = \tilde{\mathbb{P}} \circ X^{-1}$.

Corollario 4. *L'unicità della soluzione del **(MP)** associato a* $\{\mathcal{A}_t\}$ *con distribuzione iniziale arbitrariamente fissata è equivalente all'unicità in senso debole della soluzione di* (B.2) *nel senso della Definizione 4.*

Proposizione 3. *Sia* (**MP**) *un problema della martingala nella forma* (3.12). *Si supponga che per ogni* $\mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ *e per ogni coppia di soluzioni* $(\mathbb{P}, \bar{\mathbb{P}})$ *di* (**MP**) *con dato iniziale* μ_0 *valga:*

$$\mathbb{P}(X(t) \in B) = \bar{\mathbb{P}}(X(t) \in B) \qquad t \in [0,T],\ B \in \mathscr{B}_2,$$

dove X *è il processo canonico su* $C([0,T],\mathbb{R}^2)$. *Allora due soluzioni* $\mathbb{P}$ *e* $\bar{\mathbb{P}}$ *di* (**MP**) *con dato iniziale* μ_0 *hanno le stesse distribuzioni finito dimensionali.*

Tale risultato è un caso particolare di un risultato classico valido per le soluzioni di un generico problema della martingala presente in [11] e di cui si seguono ora i passi della dimostrazione.

Dimostrazione. Per dimostrare la tesi è sufficiente mostrare che comunque scelti $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 < \ldots < t_n \leq T$ e $g_1, \ldots, g_n \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^2)$ vale

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\prod_{i=1}^{n} g_i(X(t_i))\right] = \mathbb{E}_{\bar{\mathbb{P}}}\left[\prod_{i=1}^{n} g_i(X(t_i))\right] \tag{B.3}$$

In particolare per il secondo Teorema di Dynkin e il Teorema di Beppo Levi è sufficiente considerare le funzioni test $g_1, \ldots, g_n$ che sono strettamente positive (approssimazione di funzioni caratteristiche mediante funzioni strettamente positive e misurabili). Si proceda per induzione su n:

Passo Base: per ipotesi (B.3) è soddisfatta quando $n = 1$. Supponiamo valga (B.3) per $n \in \mathbb{N}$ e siano $0 \leq t_1 < \ldots < t_n \leq T$ e $g_1, \ldots, g_n \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^2)$ strettamente positive. Si definiscano su $\mathscr{F}$ le misure di probabilità

$$Q(H) := \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\prod_{i=1}^n g_i(X(t_i))\right]} E_{\mathbb{P}}\left[\mathbf{1}_H \prod_{i=1}^n g_i(X(t_i))\right], \qquad H \in \mathscr{F}$$

$$\bar{Q}(H) := \frac{1}{\mathbb{E}_{\bar{\mathbb{P}}}\left[\prod_{i=1}^n g_i(X(t_i))\right]} E_{\bar{\mathbb{P}}}\left[\mathbf{1}_H \prod_{i=1}^n g_i(X(t_i))\right], \qquad H \in \mathscr{F}.$$

(il fatto che esse siano sigma additive segue dalla linearità del valor medio e dal Teorema di Beppo Levi, il quale garantisce la continuità dal basso). Si considerino i processi $Y(t) := X(t_n + t)$ su $(C([0, T - t_n], \mathbb{R}^2), \mathscr{F}, Q, (\mathscr{F}_{t_n+t}))$ e $\bar{Y}(t) = X(t_n + t)$ su $(C([0, T - t_n], \mathbb{R}^2), \mathscr{F}, \bar{Q}, (\mathscr{F}_{t_n+t}))$. Siano ora $f \in C_b^2(\mathbb{R}^2)$ e $H \in \mathscr{F}_{t_n+r}$ con $r \in [0, T - t_n]$,

$$\Psi(Y(t)) := f(Y(t)) - f(Y(0)) - \int_0^t [\mathcal{A}_s f](s, Y(s)) ds.$$

Poiché $\mathbb{P}$ è soluzione debole vale

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[(\Psi(Y(t)) - \Psi(Y(r)))\, \mathbf{1}_H \cdot \prod_{i=1}^n g_i(X(t_i))\right]$$
$$= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[(\Psi(X(t_n + t)) - \Psi(X(t_n + r)))\, \mathbf{1}_H \cdot \prod_{i=1}^n g_i(X(t_i))\right] = 0$$
$$\Rightarrow \mathbb{E}_Q\left[(\Psi(Y(t)) - \Psi(Y(r)))\, \mathbf{1}_H\right]$$
$$= \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\prod_{i=1}^n g_i(X(t_i))\right]} E_{\mathbb{P}}\left[(\Psi(Y(t)) - \Psi(Y(r)))\, \mathbf{1}_H \cdot \prod_{i=1}^n g_i(X(t_i))\right] = 0,$$

ossia $\Psi(Y(t))$ è una martingala rispetto alla filtrazione $(\mathscr{F}_{t_n+t})_t$ e lo stesso dicasi per $\Psi(\bar{Y}(t))$. Inoltre per ipotesi si ha $Y(0) = X(t_n) \sim \bar{Y}(0)$ e sfruttando l'ipotesi induttiva, comunque presa $g \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^2)$ strettamente positiva

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[g(Y(0)) \prod_{i=1}^n g_i(X(t_i))\right] = \mathbb{E}_{\bar{\mathbb{P}}}\left[g(\bar{Y}(0)) \prod_{i=1}^n g_i(X(t_i))\right]$$

e quindi $Q \circ (Y(0))^{-1} = \bar{Q} \circ (\bar{Y}(0))^{-1}$. Si è appena dimostrato che Y e $\bar{Y}$ risolvono (**MP**) con lo stesso dato iniziale e quindi per ipotesi hanno le stesse distribuzioni marginali; allora,

$$\mathbb{E}_Q[g(Y(t))] = \mathbb{E}_{\bar{Q}}[g(\bar{Y}(t))] \quad \forall g \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^2) \text{ positiva, } t \in [0, T - t_n]$$

e quindi per $n+1$ vale (B.3):

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[g(X(t_{n+1}))\prod_{i=1}^{n} g_i(X(t_i))\right] = \mathbb{E}_{\bar{\mathbb{P}}}\left[g(X(t_{n+1}))\prod_{i=1}^{n} g_i(X(t_i))\right] \quad \text{con } t_n < t_{n+1} \leq T.$$

□

Appendice C

Risultati generali di propagazione del chaos

Seguendo Sznitman [28] in questa sezione si definiscono e mostrano risultati generali sulla propagazione del chaos per un insieme $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(E)$, dove (E,d) è uno spazio metrico separabile.

Dati (E,d) spazio metrico separabile, $\mu \in \mathcal{M}(E)$, $f \in \mathbf{B}(E)$ integrabile si denoti $\int_E f(x)\mu(dx)$ con $\langle \mu, f\rangle$.

Definizione 9. *$\mu_n \in \mathcal{M}(E^n)$ è detta simmetrica se è invariante rispetto all'azione di $\mathcal{S}^n$ sulle componenti di E^n.*

Definizione 10. *Siano $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(E^n)$ e $\mu \in \mathcal{M}(E)$. La sequenza $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è μ-caotica se, per ogni $k \geq 1$ e per ogni famiglia di funzioni $\phi_1, \dots, \phi_k \in C_b(E)$*

$$\lim_{n\to+\infty} \langle \mu_n, \phi_1 \otimes \ldots \otimes \phi_k \otimes 1 \cdots \otimes 1\rangle = \prod_{i=1}^{n} \langle \mu, \phi_i\rangle. \tag{C.1}$$

In altre parole, una sequenza di misure sullo spazio prodotto E^n è μ-caotica se, per ogni k fissato, la successione delle marginali sulle prime k componenti converge debolmente a $\mu^{\otimes k}$ su $\mathcal{M}(E^k)$.

Come già mostrato nella sezione 4.2 la mappa $Emp_n : E^n \longrightarrow \mathcal{M}(E)$

$$Emp_n(s_1, \dots, s_n) := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} \delta_{s_i}$$

è continua.

Theorem 17. *Una successione di misure simmetriche* $\mu_n \in \mathcal{M}(E^n)$ *è* μ*-caotica se e soltanto se*

$$\mu_n \circ Emp_n^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \delta_\mu$$

in $\mathcal{M}(\mathcal{M}(E))$*. Inoltre, ciò è equivalente alla condizione* (C.1) *per* $k = 2$*.*

Dimostrazione. Si supponga che la successione $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ soddisfi (C.1) per $k = 2$ e di conseguenza anche per $k = 1$. Per ogni $n \geq 1$ sia $(X_1, \ldots, X_n)$ una variabile aleatoria su E^n con legge μ_n.

Allora data $\phi \in C_b(E)$ e per la simmetria di μ_n si ha che

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mu_n}[\langle Emp_n - \mu, \phi\rangle^2] \\
&\quad = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{E}_{\mu_n}[\phi(X_i)\phi(X_j)] - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{\mu_n}[\phi(X_i)]\langle\mu,\phi\rangle + \langle\mu,\phi\rangle^2 \\
&\qquad = \frac{1}{n}\mathbb{E}_{\mu_n}[\phi(X_1)^2] + \frac{n-1}{n}\mathbb{E}_{\mu_n}[\phi(X_1)\phi(X_2)] \\
&\qquad\qquad - 2\langle\mu,\phi\rangle\mathbb{E}_{\mu_n}[\phi(X_1)] + \langle\mu,\phi\rangle^2
\end{aligned}$$

e per (C.1) con $k = 1, 2$ tale quantità tende a zero. Di conseguenza

$$\mathbb{E}_{\mu_n}[\langle Emp_n, \phi\rangle] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle\mu,\phi\rangle,$$

ossia $\mu_n \circ Emp_n^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \delta_\mu$.

Viceversa se si suppone che $\mu_n \circ Emp_n^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \delta_\mu$ allora

$$\begin{aligned}
&|\langle\mu_n, \phi_1 \otimes \ldots \otimes \phi_k \otimes 1 \cdots \otimes 1\rangle - \prod_{i=1}^{k}\langle\mu,\phi_i\rangle| \\
&\leq |\langle\mu_n, \phi_1 \otimes \ldots \otimes \phi_k \otimes 1 \cdots \otimes 1\rangle - \langle\mu_n, \prod_{i=1}^{k}\langle Emp_n, \phi_i\rangle\rangle| \\
&\qquad + |\langle\mu_n, \prod_{i=1}^{k}\langle Emp_n, \phi_i\rangle\rangle - \prod_{i=1}^{k}\langle u, \phi_i\rangle|.
\end{aligned} \tag{C.2}$$

Il secondo termine del membro di destra di (C.2) tende a zero per ipotesi mentre il primo, data la simmetria di μ_n, può essere scritto come

$$\left|\langle \mu_n, \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}^n} \phi(X_{\sigma(1)})\cdots\phi_k(X_{\sigma(k)}) - \prod_{i=1}^{k}\langle Emp_n, \phi_i\rangle\rangle\right|.$$

Siano ora $M \geq \|\phi_i\|$, $1 \leq i \leq k$, $\mathcal{I}_{n,k}$ e $\mathcal{J}_{n,k}$ rispettivamente l'insieme di tutte le funzioni iniettive e di tutte le mappe $\{1,\ldots,k\} \longrightarrow \{1,\ldots,n\}$. Aggiungendo e sottraendo

$$\frac{1}{n^k}\sum_{i\in\mathcal{I}_{n,k}} \phi_1(X_{i(1)})\cdots\phi_k(X_{i(k)})$$

si ottiene che

$$\begin{aligned}
\sup_{E^n}&\left|\langle \mu_n, \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}^n} \phi(X_{\sigma(1)})\cdots\phi_k(X_{\sigma(k)}) - \prod_{i=1}^{k}\langle Emp_n, \phi_i\rangle\rangle\right| \\
&\leq M^k\left[\left|\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}^n} 1 - \frac{1}{n^k}\sum_{i\in\mathcal{I}_{n,k}} 1\right| + \frac{\mathbf{card}\,(\mathcal{J}_{n,k}\setminus\mathcal{I}_{n,k})}{n^k}\right] \\
&= 2M^k\left(1 - \frac{n!}{n^k(n-k)!}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

e ciò dimostra (C.1). $\square$

Si supponga ora che (E, d) sia anche completo; da $Q(dm) \in \mathcal{M}(\mathcal{M}(E))$ è possibile definire l'intensità $I(Q) \in \mathcal{M}(E)$ come l'unica misura di probabilità tale che per ogni $f \in \mathbf{B}(E)$ e limitata si ha che

$$\langle I(Q), f\rangle = \int_{\mathcal{M}(E)} \langle m, f\rangle Q(dm). \tag{C.3}$$

Si osservi che per il Teorema di Portamentau (Teorema 11) $I(Q)$ è univocamente determinata facendo variare $f \in C_b(E)$. Tuttavia, è possibile mostrare che (C.3) è valida per una qualsiasi f boreliana e limitata: un modo consiste nel considerare per ogni chiuso $C \subseteq E$ la successione

$$f_k(x) = \left(\frac{1}{1 + d(x, C)}\right)^k \downarrow \mathbb{1}_C \qquad k \to +\infty$$

ed applicare il Teorema della convergenza dominata e quindi il secondo Teorema di Dynkin.

Si osservi anche che per $f \in C_b(E)$ la mappa $m \longmapsto \langle m, f \rangle$ è continua in $\mathcal{M}(E)$; di conseguenza $Q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d} Q \in \mathcal{M}(\mathcal{M}(E)) \Rightarrow I(Q_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{d} I(Q)$ e dunque I è una funzione continua.

Theorem 18. *Sia (E, d) spazio metrico separabile e completo. Una famiglia $\mathcal{Q}$ di misure di probabilità Q su $\mathcal{M}(E)$ è tight se e solo se la famiglia di misure su E $I(\mathcal{Q}) := \{I(Q);\ Q \in \mathcal{Q}\}$ è tight.*

Dimostrazione. Se la famiglia di misure Q su $\mathcal{M}(E)$ è tight allora la tightness della famiglia $I(Q)$ è conseguenza della continuità di I ed il Teorema 13.

Per l'implicazione inversa è sufficiente mostrare che se per ogni $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{Q}$ la successione $I_n = I(Q_n)$ è tight, allora $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è tight. Per ogni $\epsilon > 0$ si denoti con K_ϵ un compatto di E, con $I_n(K_\epsilon^c) \le \epsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per il Teorema di Portamentau per ogni aperto $A \subseteq E$ la mappa $m \longmapsto m(A)$ è inferiormente semicontinua; di conseguenza per $\epsilon, \eta > 0$ l'insieme $C_{\epsilon,\eta} := \{m, m(K_{\epsilon\eta}^c) \ge \eta\}$ è un chiuso di $\mathcal{M}(E)$. Inoltre per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$Q_n(C_{\epsilon,\eta}) = \frac{1}{\eta}\int_{\mathcal{M}(E)} \eta \mathbb{1}_{C_{\epsilon,\eta}}(m) Q_n(dm)$$
$$\le \frac{1}{\eta}\int_{\mathcal{M}(E)} \langle m, \mathbb{1}_{K_{\epsilon\eta}^c}\rangle Q_n(dm) = \frac{1}{\eta} I_n(K_{\epsilon\eta}^c) \le \epsilon.$$

Da ciò segue che:

$$Q_n\left(\bigcup_{k\ge1}\{m, m(K^c_{\epsilon\frac{2^{-k}}{k}}) \ge \frac{1}{k}\}\right) \le \sum_{k=1}^{+\infty} \epsilon 2^{-k} = \epsilon;$$

ciò significa che Q_n assegna probabilità maggiore o uguale a $1-\epsilon$ a $\mathcal{K}_\epsilon := \bigcap_{k\ge1}\{m, m(K^c_{\epsilon\frac{2^{-k}}{k}}) \le \frac{1}{k}\}$. $\mathcal{K}_\epsilon$ è chiuso ed è tight per costruzione e quindi per il Teorema 13 esso è compatto; ciò prova dunque che Q_n è tight. $\square$

Corollario 5. *Sia (E, d) spazio metrico separabile e completo, $\mu_n \in \mathcal{M}(E^n)$ con $n \ge 1$ simmetriche e $(X_1, \ldots, X_n)$ variabili aleatorie su E^n di legge μ_n. Allora $\mu_n \circ Emp_n^{-1} \in \mathcal{M}(\mathcal{M}(E))$ è tight se e solo se $\mu_n \circ X_1^{-1} \in \mathcal{M}(E)$ è tight.*

Bibliografia

[1] Frédéric Abergel and Rémi Tachet. A nonlinear partial integro-differential equation from mathematical finance. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series A*, 27(3):907–917, 2010.

[2] Ankush Agarwal and Stefano Pagliarani. A fourier-based picard-iteration approach for a class of mckean–vlasov sdes with lévy jumps. *Stochastics*, 93(4):592–624, 2021.

[3] Greg W Anderson, Alice Guionnet, and Ofer Zeitouni. *An introduction to random matrices*. Number 118. Cambridge university press, 2010.

[4] Fabio Antonelli and Arturo Kohatsu-Higa. Rate of convergence of a particle method to the solution of the mckean–vlasov equation. *The Annals of Applied Probability*, 12(2):423–476, 2002.

[5] Mireille Bossy, Jean-François Jabir, and Denis Talay. On conditional mckean lagrangian stochastic models. *Probability theory and related fields*, 151(1-2):319–351, 2011.

[6] Mireille Bossy and Denis Talay. A stochastic particle method for the mckean-vlasov and the burgers equation. *Mathematics of computation*, 66(217):157–192, 1997.

[7] Gerard Brunick and Steven Shreve. Mimicking an itô process by a solution of a stochastic differential equation. *The Annals of Applied Probability*, 23(4):1584–1628, 2013.

[8] Rainer Buckdahn, Juan Li, Shige Peng, and Catherine Rainer. Mean-field stochastic differential equations and associated pdes. *The Annals of Probability*, 45(2):824–878, 2017.

[9] René Carmona and François Delarue. Probabilistic theory of mean field games with applications. i, volume 83 of probability theory and stochastic modelling, 2018.

[10] François Delarue, Sergey Nadtochiy, and Mykhaylo Shkolnikov. Global solutions to the supercooled stefan problem with blow-ups: regularity and uniqueness. *arXiv preprint arXiv:1902.05174*, 2019.

[11] Markus Fischer. Markov processes and martingale problems, 2012.

[12] Marco Di Francesco and Andrea Pascucci. On a class of degenerate parabolic equations of kolmogorov type. *Applied Mathematics Research eXpress*, 2005(3):77–116, 2005.

[13] Emmanuel Gobet. *Méthodes de Monte-Carlo et processus stochastiques: du linéaire au non-linéaire.* Editions de l'Ecole Polytechnique, 2013.

[14] Emmanuel Gobet and Stefano Pagliarani. Analytical approximations of non-linear sdes of mckean–vlasov type. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 466(1):71–106, 2018.

[15] François Golse, Cyril Imbert, Clément Mouhot, and Alexis Vasseur. Harnack inequality for kinetic fokker-planck equations with rough coefficients and application to the landau equation. *arXiv preprint arXiv:1607.08068*, 2016.

[16] István Gyöngy. Mimicking the one-dimensional marginal distributions of processes having an itô differential. *Probability theory and related fields*, 71(4):501–516, 1986.

[17] Nobuyuki Ikeda and Shinzo Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusion processes.* Elsevier, 2014.

[18] Ioannis Karatzas and Steven Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113. Springer Science & Business Media, 2012.

[19] Daniel Lacker, Mykhaylo Shkolnikov, and Jiacheng Zhang. Inverting the markovian projection, with an application to local stochastic volatility models. *The Annals of Probability*, 48(5):2189–2211, 2020.

[20] Alberto Lanconelli, Andrea Pascucci, and Sergio Polidoro. Gaussian lower bounds for non-homogeneous kolmogorov equations with measurable coefficients. *Journal of Evolution Equations*, 20(4):1399–1417, 2020.

[21] PL Lions. Cours au collège de france: Théorie des jeu à champs moyens (2013).

[22] Alexander Lipton, Vadim Kaushansky, and Christoph Reisinger. Semi-analytical solution of a mckean–vlasov equation with feedback through hitting a boundary. *European Journal of Applied Mathematics*, pages 1–34, 2019.

[23] Henry P McKean Jr. A class of markov processes associated with nonlinear parabolic equations. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 56(6):1907, 1966.

[24] Sylvie Méléard. Asymptotic behaviour of some interacting particle systems; mckean-vlasov and boltzmann models. In *Probabilistic models for nonlinear partial differential equations*, pages 42–95. Springer, 1996.

[25] Jing Shao and Fanwei Meng. Gronwall-Bellman type inequalities and their applications to fractional differential equations. *Abstr. Appl. Anal.*, pages Art. ID 217641, 7, 2013.

[26] Mei Song, Andrea Montanari, and P Nguyen. A mean field view of the landscape of two-layers neural networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 115:E7665–E7671, 2018.

[27] Daniel W Stroock and SR Srinivasa Varadhan. *Multidimensional diffusion processes*, volume 233. Springer Science & Business Media, 1997.

[28] Alain-Sol Sznitman. Topics in propagation of chaos. In *Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour XIX—1989*, pages 165–251. Springer, 1991.

[29] Lukasz Szpruch, Shuren Tan, and Alvin Tse. Iterative multilevel particle approximation for mckean–vlasov sdes. *The Annals of Applied Probability*, 29(4):2230–2265, 2019.

[30] Denis Talay and Olivier Vaillant. A stochastic particle method with random weights for the computation of statistical solutions of mckean-vlasov equations. *The Annals of Applied Probability*, 13(1):140–180, 2003.

[31] Viet Chi Tran. A wavelet particle approximation for mckean–vlasov and 2d-navier–stokes statistical solutions. *Stochastic processes and their applications*, 118(2):284–318, 2008.

[32] Cédric Villani. *Optimal transport: old and new*, volume 338. Springer, 2009.