

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea Triennale in Matematica

# GRUPPI E ALGEBRE DI LIE

Tesi di Laurea in Algebra

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
Fioresi Rita

Presentata da:  
Castronuovo Niccolò

Sessione II  
Anno Accademico 2010/2011

“Vi è una bellissima teoria, dovuta all’originalissimo matematico norvegese Sophus Lie (1842-1899), che conduce a un trattamento completo della teoria locale dei gruppi continui.”

Roger Penrose, *La strada che porta alla realtà*.

# Introduzione

In questa tesi introdurremo le nozioni di gruppo e di algebra di Lie, cercando in particolare, di dare una loro interpretazione geometrico-differenziale. I due concetti, introdotti dal matematico norvegese Sophus Lie (1842-1899) per studiare i gruppi di trasformazione continui, sono oggi molto studiati in teoria della rappresentazione e in analisi, oltre che di per sé. Inoltre hanno trovato, nel ventesimo secolo, un grandissimo numero di applicazioni fondamentali, soprattutto alla fisica delle particelle.

Nel primo capitolo definiremo i gruppi e le algebre di Lie in modo astratto; le definizioni di queste due strutture sono algebriche e, inizialmente, appaiono indipendenti l'una dall'altra. Si daranno inoltre alcuni esempi fondamentali.

Nel secondo capitolo si chiarirà il rapporto esistente tra un gruppo di Lie e la sua algebra di Lie, definita come i campi vettoriali invarianti a sinistra su questo gruppo. Questa algebra coincide con lo spazio vettoriale tangente al gruppo nell'elemento neutro e come esempio vedremo le algebre di Lie di alcuni dei gruppi introdotti nel primo capitolo.

I tre teoremi di Lie, poi, renderanno più chiara questa corrispondenza: questi, infatti, ci danno una corrispondenza biettiva tra sottogruppi e sottoalgebre, inoltre ci dicono che un isomorfismo tra le algebre induce un diffeomorfismo locale tra i gruppi e ci assicurano che, data un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ , esiste sempre un gruppo  $G$  tale che  $\mathfrak{g} = Lie(G)$ , cioè  $G$  ha proprio  $\mathfrak{g}$  come algebra associata.

Nel terzo capitolo si definirà l'algebra involupante universale di un algebra di Lie, si spiegheranno le sue proprietà algebriche e si dimostrerà il teorema di Poincaré-Birkhoff-Witt, che ne dà una base a partire da una base dell'algebra di Lie. Otterremo come conseguenza che l'algebra di Lie si immerge nella sua algebra involupante universale. Questo risultato è fondamentale in teoria della rappresentazione.

Si farà poi vedere che, dato un gruppo di Lie con la sua algebra, esiste un isomorfismo tra l'algebra involupante universale e gli operatori differenziali invarianti a sinistra sul gruppo, estendendo quanto visto nel secondo capitolo.

# Indice

<b>1</b>	<b>Gruppi di Lie e Algebre di Lie</b>	<b>3</b>
1.1	Gruppi di Lie . . . . .	3
1.2	Algebre di Lie . . . . .	6
1.3	Campi vettoriali e operatori differenziali . . . . .	8
<b>2</b>	<b>L'algebra di Lie associata a un gruppo di Lie</b>	<b>12</b>
2.1	Campi vettoriali invarianti a sinistra . . . . .	12
2.2	L'algebra di Lie di un gruppo di Lie . . . . .	13
2.3	I tre teoremi di Lie . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Algebra involupante universale</b>	<b>18</b>
3.1	L'algebra involupante universale di un gruppo di Lie . . . . .	18
3.2	L'algebra involupante universale di un'algebra di Lie . . . . .	19
	<b>Bibliografia</b>	<b>29</b>

# Capitolo 1

## Gruppi di Lie e Algebre di Lie

In questo capitolo vogliamo introdurre le nozioni di gruppo di Lie e di algebra di Lie e fare qualche esempio saliente.

### 1.1 Gruppi di Lie

Un gruppo di Lie è una varietà (differenziabile o analitica) con una struttura di gruppo le cui operazioni (moltiplicazione e inversa) sono compatibili con la struttura di varietà.

**Definizione 1.1.** Un *gruppo di Lie reale* è un gruppo topologico  $G$  munito di una struttura di varietà differenziabile (resp. analitica) tale che le operazioni di gruppo

$$\begin{array}{ccc} G \times G \rightarrow G & e & G \rightarrow G \\ (a, b) \mapsto a \cdot b & & a \mapsto a^{-1} \end{array}$$

siano entrambe differenziabili (resp. analitiche).

Analogamente un *gruppo di Lie complesso* è un gruppo topologico munito della struttura di varietà complessa e tale che le operazioni di gruppo risultino olomorfe.

**Definizione 1.2.** Dati due gruppi di Lie reali (resp. complessi)  $G$  e  $H$ , un *morfismo di gruppi di Lie* è un omomorfismo differenziabile o analitico, vale a dire un'applicazione  $f : G \rightarrow H$  che sia un omomorfismo per la struttura di gruppo ( $f(ab) = f(a)f(b)$ ) e un'applicazione differenziabile o analitica (resp. olomorfa) per la struttura di varietà di  $G$  e  $H$ .

*Osservazione 1.3.* I gruppi di Lie con i loro morfismi costituiscono una categoria.

**Esempi 1.4.** • Dato uno spazio vettoriale  $V$  finito dimensionale su  $\mathbb{R}$  o su  $\mathbb{C}$ , esso è un gruppo di Lie. Infatti  $V$  possiede una struttura di varietà analitica e le operazioni di moltiplicazione e di inversa sono analitiche.

Per esempio, gli spazi vettoriali  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{C}^n$ , sono gruppi di Lie con l'operazione  $+$ .

Anche  $M_n(\mathbb{R})$ , il gruppo delle matrici  $n \times n$ , essendo un  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale, è un gruppo di Lie.

Infatti tramite l'identificazione:

$$M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$$

$$A = (a_{ij}) \mapsto (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{nn})$$

possiamo dare a  $M_n(\mathbb{R})$  la topologia euclidea di  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

- Consideriamo  $GL(n, \mathbb{R})$ , il gruppo delle matrici invertibili reali  $n \times n$ . Nella varietà delle matrici  $M_n(\mathbb{R})$ ,  $GL(n, \mathbb{R})$  è un aperto in quanto  $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  t.c.  $A \mapsto \det(A)$  è continua e  $GL(n, \mathbb{R}) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ . Questo fornisce a  $GL(n, \mathbb{R})$  una struttura di varietà in modo naturale. Inoltre le funzioni prodotto riga per colonna e inversa sono analitiche.

Questo ci dice che  $GL(n, \mathbb{R})$  è effettivamente un gruppo di Lie reale. Analogamente  $GL(n, \mathbb{C})$ , il gruppo delle matrici invertibili complesse  $n \times n$ , risulta essere un gruppo di Lie complesso.

- Consideriamo il gruppo  $SL(n, \mathbb{R})$ , il gruppo delle matrici invertibili di determinante 1. Questo è un sottogruppo di  $GL(n, \mathbb{R})$  chiuso, in quanto  $SL(n, \mathbb{R}) = f^{-1}(1)$  dove  $f$  è definita come sopra. Per vedere che è un gruppo di Lie si può usare il seguente risultato classico di geometria differenziale.

**Teorema 1.5** (Teorema della sommersione). *Siano  $X$  e  $Y$  due varietà differenziabili analitiche con  $\dim X \geq \dim Y$ . Sia  $\psi : X \rightarrow Y$  una applicazione differenziabile. Sia  $x \in X$  e  $y = \psi(x)$ . Se  $(d\psi)_x : T_x X \rightarrow T_{\psi(x)} Y$  è suriettivo, allora  $\psi^{-1}(y)$  è una sottovarietà di  $X$  e  $T_x \psi^{-1}(y) = \text{Ker}(d\psi)_x$ .*

Tutti i dettagli del teorema e la relativa dimostrazione si possono trovare in [5] (pag. 175, cap. 3) oppure in [6] (pag. 21, cap. 1).

- Analogamente si vede che:

$$\begin{aligned}
 O(n, \mathbb{R}) &= \{A \in M_n(\mathbb{R}), A^T A = A A^T = I\} && \text{gruppo ortogonale} \\
 SO(n, \mathbb{R}) &= \{A \in O(n, \mathbb{R}), \det A = 1\} && \text{gruppo speciale ortogonale} \\
 U(n) &= \{A \in M_n(\mathbb{C}), A^\dagger A = A A^\dagger = I\} && \text{gruppo unitario} \\
 SU(n) &= \{A \in U(n), \det A = 1\} && \text{gruppo speciale unitario}
 \end{aligned}$$

(dove  $A^\dagger$  denota l'aggiunto di  $A$ ) sono gruppi di Lie reali e che

$$\begin{aligned}
 O(n, \mathbb{C}) &= \{A \in M_n(\mathbb{C}), A^T A = A A^T = I\} \\
 SO(n, \mathbb{C}) &= \{A \in O(n, \mathbb{C}), \det A = 1\} \\
 SL(n, \mathbb{C}) &= \{A \in M_n(\mathbb{C}), \det A = 1\}
 \end{aligned}$$

sono gruppi di Lie complessi (tutti considerati con l'operazione di prodotto fra matrici).

- $S^1$  pensato come i numeri complessi di modulo 1 muniti della moltiplicazione è un gruppo di Lie (reale).

**Definizione 1.6.** Dato un gruppo di Lie  $G$ , diremo che  $H$  è un suo *sottogruppo di Lie*, quando  $H$  è ancora gruppo di Lie con l'operazione ereditata da  $G$  ed è una sottovarietà della varietà  $G$ .

*Osservazione 1.7.* È naturale domandarsi quanto la definizione di gruppo di Lie differenziabile sia più debole di quella di gruppo di Lie analitico. In particolare se abbiamo un gruppo topologico munito di una struttura di varietà  $C^k$ ,  $0 \leq k \leq \infty$ , e tale che le operazioni di gruppo siano pure  $C^k$  allora possiamo trovare per questo una struttura di varietà analitica compatibile con quella  $C^k$ ? Non è difficile far vedere che se tale struttura esiste allora è unica. Il problema dell'esistenza invece è meno banale. Per  $k = \infty$  o comunque abbastanza grande, un risultato classico di Schmidt garantisce l'esistenza di tale struttura. Per  $k = 0$  la domanda precedente è essenzialmente il quinto problema di Hilbert. La soluzione per gruppi compatti fu data da von Neumann nel 1933; la soluzione del caso generale è più recente e si deve a Gleason, Montgomery, Zippin e altri che provarono che qualunque sia  $k$  tale struttura analitica esiste. Tutti questi risultati si trovano in [1].

Quindi possiamo restringerci a considerare il caso analitico senza perdere in generalità. In altre parole, d'ora in poi, supporremo sempre di avere una struttura di varietà analitica quando parliamo di gruppo di Lie.

## 1.2 Algebre di Lie

Vogliamo cominciare col definire le algebre di Lie in modo astratto come spazi vettoriali su un generico campo  $\mathbb{K}$  con una opportuna operazione interna.

Sia  $\mathbb{K}$  un campo di caratteristica  $\neq 2, 3$ .

**Definizione 1.8.** Una *algebra di Lie* è un  $\mathbb{K}$  – spazio vettoriale  $\mathfrak{g}$  sul quale è definita un'operazione binaria bilineare  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , detta *bracket* o *parentesi di Lie*, con le seguenti proprietà:

- 1)  $[x, y] = -[y, x] \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$  (proprietà antisimmetrica).
- 2)  $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$  (identità di Jacobi).

Tutte le algebre di Lie che considereremo saranno finite dimensionalità salvo specifico avviso.

**Definizione 1.9.** Se  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{s}$  sono due algebre di Lie, una applicazione lineare  $\tau : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{s}$  si dice *morfismo di algebre di Lie* se preserva le bracket cioè  $\tau([x, y]) = [\tau(x), \tau(y)] \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$ .

**Esempi 1.10.** • Si consideri uno spazio vettoriale finite dimensionale  $\mathfrak{g}$  su  $\mathbb{K}$ . Se si pone  $[x, y] = 0 \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$  si ottiene banalmente un'algebra di Lie. In questo caso si dice che  $\mathfrak{g}$  è *abeliana*.

- Si consideri uno spazio vettoriale finite dimensionale  $V$  su  $\mathbb{K}$ . Se si considera lo spazio degli endomorfismi di  $V$ , denotato con  $\text{End}(V)$ , e si pone  $[x, y] = x \circ y - y \circ x$ ,  $\forall x, y \in \text{End}(V)$  si ottiene un'algebra di Lie. Verifichiamo solo l'identità di Jacobi in quanto la bilinearità e la proprietà antisimmetrica sono ovvie. Siano  $x, y, z \in \text{End}(V)$ ,

$$\begin{aligned}
 [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] &= x \circ [y, z] - [y, z] \circ x + y \circ [z, x] - [z, x] \circ y \\
 &\quad + z \circ [x, y] - [x, y] \circ z \\
 &= x \circ (y \circ z - z \circ y) - (y \circ z - z \circ y) \circ x \\
 &\quad + y \circ (z \circ x - x \circ z) - (z \circ x - x \circ z) \circ y \\
 &\quad + z \circ (x \circ y - y \circ x) - (x \circ y - y \circ x) \circ z \\
 &= x \circ y \circ z - x \circ y \circ z + x \circ z \circ y - x \circ z \circ y \\
 &\quad + y \circ z \circ x - y \circ z \circ x + y \circ x \circ z - y \circ x \circ z \\
 &\quad + z \circ y \circ x - z \circ y \circ x + z \circ x \circ y - z \circ x \circ y \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Questa algebra di Lie si indica anche con  $\mathfrak{gl}(V)$  e si dice *algebra di Lie generale lineare*.

In particolare considerando  $M_n(\mathbb{K})$  con la bracket definita come sopra:  $[x, y] = xy - yx \quad \forall x, y \in M_n(\mathbb{K})$  otteniamo l'algebra di Lie denotata con  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ .

- Definiamo  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) := \{A \in M_n(\mathbb{K}), \text{tr}A = 0\}$  e  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K}) := \{A \in M_n(\mathbb{K}), A = -A^T\}$ . Queste sono algebre di Lie con la stessa bracket definita sopra, ereditata da  $M_n(\mathbb{K})$ . Per verificarlo basta mostrare che l'operazione  $[\cdot, \cdot]$  è chiusa in  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$  e in  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$ .

Viste le proprietà della traccia e della trasposta si ha che, date due matrici  $A, B$   $n \times n$  tali che  $A = -A^T$  e  $B = -B^T$ ,

$$\begin{aligned} -[A, B]^T &= -(AB - BA)^T = -((AB)^T - (BA)^T) \\ &= -B^T A^T + A^T B^T = AB - BA = [A, B]. \end{aligned}$$

e, date due matrici matrici  $A, B$   $n \times n$  tali che  $\text{tr}(A) = 0$  e  $\text{tr}(B) = 0$ ,

$$\begin{aligned} \text{tr}([A, B]) &= \text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) \\ &= \text{tr}(AB) - \text{tr}(AB) = 0. \end{aligned}$$

- Data un'algebra associativa  $B$ , se si pone come sempre  $[a, b] = ab - ba, \forall a, b \in B$  si ottiene un'algebra di Lie. La verifica delle proprietà è la stessa del caso  $B = \text{End}(V)$ .
- Se  $\mathfrak{g}$  è una algebra di Lie sul campo  $\mathbb{L}$  con  $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$ , il  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale  $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{L}} \mathbb{K}$  ha una unica struttura di algebra di Lie con la bracket data da:

$$[X \otimes a, Y \otimes b] = [X, Y] \otimes ab \quad (X, Y \in \mathfrak{g}; \quad a, b \in \mathbb{K}).$$

Denotiamo questa algebra di Lie con  $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$  e la chiamiamo *estensione di  $\mathfrak{g}$  da  $\mathbb{L}$  a  $\mathbb{K}$* . Si identifica  $\mathfrak{g}$  con la sua immagine in  $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$  tramite la mappa iniettiva  $:X \mapsto X \otimes 1, X \in \mathfrak{g}$ .

**Definizione 1.11.** Se  $\mathbb{L} = \mathbb{R}$  e  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , chiamiamo  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  la *complessificazione di  $\mathfrak{g}$* .

**Definizione 1.12.** Data un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ , un suo sottospazio lineare  $\mathfrak{h}$  si dice *sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{g}$*  se  $\mathfrak{h}$  è ancora un'algebra di Lie con la stessa bracket di  $\mathfrak{g}$  o, in altri termini, se la bracket di  $\mathfrak{g}$  è una operazione chiusa in  $\mathfrak{h}$ .

## 1.3 Campi vettoriali e operatori differenziali

Prima di procedere è opportuno ricordare alcune definizioni e proprietà di geometria differenziale che saranno utili anche nel seguito. Tutto quello che diremo per funzioni e varietà  $C^\infty$  vale anche nel caso analitico anche se le dimostrazioni possono cambiare, anche considerevolmente.

Sia  $M$  una varietà  $C^\infty$  di dimensione  $m$ . Sia  $x \in M$  e sia  $A$  un aperto di  $M$  contenente  $x$ . Diremo che una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è *differenziabile infinite volte* su  $A$  e scriveremo  $f \in C^\infty(A)$  se per ogni carta locale  $(U, \varphi_U)$  con  $U \cap A \neq \emptyset$ ,  $f \circ \varphi_U^{-1} : \varphi_U(U \cap A) \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione  $C^\infty$ . Due funzioni a valori reali definite attorno ad  $x$  sono dette *equivalenti* se coincidono su un intorno aperto di  $x$ . Le classi di equivalenza sono dette *germi di funzioni  $C^\infty$  in  $x$* . Data una funzione  $C^\infty$   $f$  definita attorno a  $x$  indichiamo il corrispondente germe con  $\mathbf{f}_x$  e il valore comune delle sue funzioni in  $x$  con  $\mathbf{f}(x)$ . L'insieme dei germi in  $x$ , detto *spiga del fascio delle funzioni  $C^\infty$* , ha una naturale struttura di algebra su  $\mathbb{R}$ ; questa algebra è denotata con  $\mathbf{D}_x$ . Ora, sia  $\mathbf{D}_x^*$  il duale algebrico dello spazio vettoriale reale  $\mathbf{D}_x$ , cioè lo spazio vettoriale reale delle mappe lineari  $\mathbf{D}_x \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definizione 1.13.** Un *vettore tangente a  $M$  in  $x$*  è un elemento  $v$  di  $\mathbf{D}_x^*$  che sia una derivazione cioè tale che:

$$v(\mathbf{fg}) = \mathbf{f}(x)v(\mathbf{g}) + \mathbf{g}(x)v(\mathbf{f}).$$

L'insieme dei vettori tangenti a  $M$  in  $x$  è un sottospazio  $\mathbb{R}$ -lineare di  $\mathbf{D}_x^*$  denotato con  $T_x M$  e chiamato *spazio tangente a  $M$  in  $x$* .

**Esempio 1.14.** Sia  $M = \mathbb{R}^n$  e  $x = 0$ . I vettori tangenti a  $M = \mathbb{R}^n$  in  $0$  sono gli elementi di  $\mathbf{D}_0^*$  della forma

$$\sum_{i=1}^n a_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0 \right)$$

con  $a_i \in \mathbb{R}$

Sia  $(U, \varphi)$  una carta locale, con  $U$  aperto contenente  $x$  su  $M$  e con funzioni coordinate  $x_1, \dots, x_m$ . Allora,  $\forall j \in (1, \dots, m)$ , definiamo un vettore tangente  $(\partial/\partial x_j)_x$  ponendo  $\forall f \in C^\infty(U)$ ,

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_x \right) (f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial \xi_j}(\varphi(x)).$$

I vettori  $(\partial/\partial x_j)_x$  per  $j = 1, \dots, m$  formano una base per  $T_x M$ .

Sia  $\mathbf{J}_x = \{\mathbf{f} : \mathbf{f} \in \mathbf{D}_x, \mathbf{f}(x) = 0\}$  e  $\mathbf{J}_x^p = \{\mathbf{f}_1 \cdot \dots \cdot \mathbf{f}_p : \mathbf{f}_i \in \mathbf{J}_x, 1 \leq i \leq p\}$  dove  $p \in \mathbb{N}$ . Si verifica subito che  $\mathbf{J}_x$  e  $\mathbf{J}_x^p$  sono ideali di  $\mathbf{D}_x$ .

**Definizione 1.15.** Per ogni intero  $r \geq 0$  definiamo una *espressione differenziale di ordine  $\leq r$*  ogni elemento di  $\mathbf{D}_x^*$  che sia identicamente nullo su  $\mathbf{J}_x^{r+1}$ .

L'insieme delle espressioni differenziali di ordine  $\leq r$  è un sottospazio  $\mathbb{R}$ -lineare di  $\mathbf{D}_x^*$  che si denota con  $T_x^{(r)} M$ . Ora, sia  $1_x \in \mathbf{D}_x^*$  l'elemento definito da:  $1_x(\mathbf{f}) = \mathbf{f}(x)$  con  $\mathbf{f} \in \mathbf{D}_x$ . Si ha che  $T_x^{(0)} M = \mathbb{R} \cdot 1_x$ ,  $T_x^{(1)} M = \mathbb{R} \cdot 1_x + T_x M$  e in generale  $T_x^{(r)} M \subseteq T_x^{(r+1)} M$ . Si pone per convenzione:  $T_x^{(\infty)} M = \bigcup_{r \geq 0} T_x^{(r)} M$ .

Non è difficile costruire basi naturali per  $T_x^{(r)} M$  nelle coordinate locali. Sia  $(U, \varphi)$  come sopra. Sia  $(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  un multiindice dove  $\alpha_i, 1 \leq i \leq m$ , sono interi  $\geq 0$  e sia  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$  l'altezza di  $\alpha$ . Allora definiamo  $\partial_x^{(\alpha)}$  come mappa lineare da  $\mathbf{D}_x$  in  $\mathbb{R}$  tale che:

$$\partial_x^{(\alpha)}(f) = \frac{\partial^{|\alpha|}(f \circ \varphi^{-1})}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \dots \partial \xi_m^{\alpha_m}}(\varphi(x)) \quad (f \in C^\infty(U))$$

(poniamo  $\partial_x^{(\alpha)} = 1_x$  quando  $(\alpha) = (0)$ ). Si verifica subito che  $\partial_x^{(\alpha)} \in T_x^{(r)} M$  se  $|\alpha| \leq r$ . Si può provare il seguente lemma.

**Lemma 1.16.** Sia  $r \geq 0$  un intero e sia  $x \in M$ . Allora le espressioni differenziali  $\partial_x^{(\alpha)}$  con  $|\alpha| \leq r$  formano una base per  $T_x^{(r)} M$  su  $\mathbb{R}$ .

La dimostrazione si trova in [2] (pag. 4, cap. 1).

Sia data una varietà  $M$  di dimensione  $m$ . Sia  $X$  una applicazione  $X : p \mapsto X_p$  dove  $p \in M$  e  $X_p \in T_p M$ ; allora per ogni funzione  $f \in C^\infty(M)$  la funzione  $Xf : p \mapsto X_p(\mathbf{f}_p)$  è ben definita su  $M$ , dove  $\mathbf{f}_p$  è il germe in  $p$  definito da  $f$ . Se  $U$  è un aperto e  $x_1, \dots, x_m$  sono un sistema di coordinate su  $U$ , allora esistono uniche  $m$  funzioni  $a_1, \dots, a_m$  su  $U$  tali che

$$X_y = \sum_{j=1}^m a_j(y) \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_y \quad (y \in U).$$

**Definizione 1.17.**  $X$  è chiamato un *campo vettoriale* su  $M$  se  $Xf \in C^\infty(M)$ ,  $\forall f \in C^\infty(M)$  o, equivalentemente, se  $\forall x \in M$  esistono un aperto  $U$  contenente  $x$  e un sistema di coordinate  $x_1, \dots, x_m$  su  $U$  tali che le  $a_j$  sopra definite siano funzioni  $C^\infty$  su  $U$ .

Dato un campo vettoriale  $X$ , la mappa  $f \mapsto Xf$  è una derivazione dell'algebra  $C^\infty(M)$ ; i.e.  $\forall f, g \in C^\infty(M)$ ,

$$X(fg) = f \cdot X(g) + g \cdot X(f).$$

Questa corrispondenza tra campi vettoriali e derivazioni è iniettiva e suriettiva: mappa l'insieme di tutti i campi vettoriali su quello delle derivazioni di  $C^\infty(M)$ .

Indichiamo con  $\mathfrak{X}(M)$  lo spazio vettoriale di tutti i campi vettoriali reali  $C^\infty$  su  $M$ .  $\mathfrak{X}(M)$  è un modulo sulle funzioni  $C^\infty(M)$  infatti se  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f \in C^\infty(M)$  allora anche  $fX \in \mathfrak{X}(M)$  dove  $fX : x \mapsto f(x)X_x$ .

**Esempio 1.18.** Sfruttando i campi vettoriali possiamo dare un'altro esempio molto importante di algebra di Lie:

Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  allora  $X \circ Y - Y \circ X$  è un endomorfismo delle funzioni  $C^\infty$  su  $M$  che è una derivazione; verifichiamolo:

$$\begin{aligned} (X \circ Y - Y \circ X)(fg) &= X \circ Y(fg) - Y \circ X(fg) \\ &= X(f \cdot Y(g) + g \cdot Y(f)) - Y(f \cdot X(g) + g \cdot X(f)) \\ &= X(f \cdot Y(g)) + X(g \cdot Y(f)) - Y(f \cdot X(g)) - Y(g \cdot X(f)) \\ &= X(f) \cdot Y(g) + X(Y(g)) \cdot f + X(g) \cdot Y(f) + g \cdot X(Y(f)) \\ &\quad - Y(f) \cdot X(g) - f \cdot Y(X(g)) - Y(g) \cdot X(f) - Y(X(f)) \cdot g \\ &= f \cdot (X \circ Y - Y \circ X)(g) + g \cdot (X \circ Y - Y \circ X)(f). \end{aligned}$$

Dove si è usata la linearità di  $X$  e  $Y$  derivante dal fatto che  $X_p \in \mathbf{D}_p^*$ .

Ricordando che si possono identificare i campi vettoriali con le derivazioni,  $\mathfrak{X}(M)$  risulta essere un'algebra di Lie su  $\mathbb{R}$ . Questa algebra di Lie è, in generale, infinito-dimensionale tuttavia esistono numerosi esempi importanti in cui si considerano sue sottoalgebre finito-dimensionali, come vedremo nel capitolo successivo.

Ora, sia:

$$\begin{aligned} D : M &\rightarrow T_x^{(r)}M \\ x &\mapsto D_x \end{aligned}$$

una applicazione definita su  $M$ .

Se  $f \in C^\infty(M)$ , la funzione

$$\begin{aligned} D : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto D_x(\mathbf{f}_x) \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{f}_x$  è il germe definito da  $f$  in  $x$ , è ben definita su  $M$ . Se  $U$  è un aperto sul quale è definito un sistema di coordinate  $x_1, \dots, x_m$ , allora, per il Lemma 1.16, esistono uniche delle funzioni reali  $a_\alpha$  su  $U$  tali che

$$D_y = \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha(y) \partial_y^{(\alpha)} \quad y \in U$$

dove  $\alpha$  è un multiindice.

**Definizione 1.19.**  $D$  è chiamato *operatore differenziale su  $M$*  se  $Df \in C^\infty(M) \forall f \in C^\infty(M)$  o, equivalentemente, se  $\forall x \in M, \exists U \ni x$  ed  $\exists x_1, \dots, x_m$  sistema di coordinate su  $U$  tali che le  $a_\alpha$  siano tutte  $C^\infty(U)$ . Il più piccolo intero  $r$  per cui  $D_x \in T_x^{(r)}M \forall x \in M$  è chiamato *ordine o grado di  $D$*  e si indica con  $\text{deg}(D)$  o con  $\text{ord}(D)$ .

L'insieme degli operatori differenziali su  $M$ , denotato con  $\text{Diff}(M)$ , è un modulo su  $C^\infty(M)$  ( $fD : x \mapsto f(x)D_x$ ). Per esempio, un campo vettoriale è un operatore differenziale di grado = 1.

Come abbiamo visto, nel caso dei campi vettoriali esiste una biezione con l'insieme delle derivazioni di  $C^\infty(M)$ . Un risultato più generale vale per  $\text{Diff}(M)$  come vedremo nel Teorema 3.2. Sia  $D : x \mapsto D_x$  un operatore differenziale,  $\text{ord}(D) \leq r$ . Denotiamo con  $D$  anche l'endomorfismo  $f \mapsto Df$  di  $C^\infty(M)$ . Si verifica facilmente che questo endomorfismo verifica le seguenti proprietà:

- (i) è *locale*, cioè se  $f \in C^\infty(M)$  si annulla su un aperto  $U$ , anche  $Df$  si annulla su  $U$ .
- (ii) se  $x \in M$  e  $f_1, \dots, f_{r+1} \in C^\infty(M)$  sono funzioni che si annullano in  $x$ , allora  $(D(f_1 f_2 \cdots f_{r+1}))(x) = 0$ .

Viceversa dato un endomorfismo  $E$  di  $C^\infty(M)$  che verifichi (ii) questo è locale ed esiste unico un operatore differenziale  $D$  con  $Df = Ef \forall f \in C^\infty(M)$  e  $\text{ord}(D) \leq r$ . Quindi possiamo non fare distinzioni tra operatori differenziali ed endomorfismi con le proprietà (i) e (ii). Inoltre se  $D_1$  e  $D_2$  sono operatori differenziali con  $\text{ord}(D_1) = r_1, \text{ord}(D_2) = r_2$  allora pure  $D_1 D_2$  (rispettiv.  $D_1 D_2 - D_2 D_1$ ) lo sono e  $\text{ord}(D_1 D_2) \leq r_1 + r_2$  (rispettiv.  $\text{ord}(D_1 D_2 - D_2 D_1) \leq r_1 + r_2 - 1$ ).

*Osservazione 1.20.* Per quanto detto  $\text{Diff}(M)$  è un'algebra con l'operazione di composizione e un'algebra di Lie con bracket data da  $[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1$ .

Tutti i concetti fin qui introdotti per funzioni  $C^\infty(M)$ , in particolare spazi tangenti, campi vettoriali e operatori differenziali, si possono dare allo stesso modo anche per funzioni analitiche.

# Capitolo 2

## L'algebra di Lie associata a un gruppo di Lie

Esiste una correlazione fondamentale fra i concetti di algebra e di gruppo di Lie che abbiamo introdotto: infatti a ogni gruppo di Lie possiamo associare un'algebra di Lie il cui spazio vettoriale soggiacente  $\tilde{\mathfrak{A}}$  proprio lo spazio tangente al gruppo nell'elemento neutro. Come vedremo, questa algebra di Lie cattura completamente la struttura locale del gruppo.

### 2.1 Campi vettoriali invarianti a sinistra

Sia  $G$  un gruppo di Lie reale. Denotiamo con  $e$  il suo elemento neutro. Per ogni  $b \in G$ ,  $l_b : x \mapsto bx$  è un diffeomorfismo analitico della varietà  $G$ . Quindi  $l_b$  induce un automorfismo  $X \mapsto X^{l_b}$  di  $\mathfrak{X}(G)$ , l'algebra di Lie dei campi vettoriali su  $G$ . Un elemento  $X \in \mathfrak{X}(G)$  è detto *invariante a sinistra* se  $X = X^{l_b}, \forall b \in G$  o in altri termini se si ha  $dl_b \circ X = X \circ l_b, \forall b \in G$ .

**Proposizione 2.1.** *L'insieme dei campi vettoriali analitici reali invarianti a sinistra forma una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{X}(G)$ .*

*Dimostrazione.* Se  $X$  e  $Y$  sono campi vettoriali invarianti a sinistra, anche  $[X, Y]$  è invariante a sinistra; per dimostrarlo dobbiamo far vedere che  $dl_b \circ [X, Y] = [X, Y] \circ l_b$  cioè che, fissati  $m \in G$  e  $f \in C^\infty(G)$ , si ha  $dl_b([X, Y]_m)(f) = [X, Y]_{l_b(m)}(f)$ .

Verifichiamolo:

$$\begin{aligned}
dl_b([X, Y]_m)(f) &= [X, Y]_m(f \circ l_b) \\
&= X_m(Y(f \circ l_b)) - Y_m(X(f \circ l_b)) \\
&= X_m((dl_b \circ Y)(f)) - Y_m((dl_b \circ X)(f)) \\
&= X_m(Y(f) \circ l_b) - Y_m(X(f) \circ l_b) \\
&= dl_b(X_m)(Y(f)) - dl_b(Y_m)(X(f)) \\
&= X_{l_b(m)}(Y(f)) - Y_{l_b(m)}(X(f)) \\
&= [X, Y]_{l_b(m)}(f).
\end{aligned}$$

□

Allo stesso modo si possono definire i campi vettoriali *invarianti a destra* e si può costruire una teoria delle algebre di Lie basata su questi ultimi. Bisogna notare però che in generale un campo vettoriale invariante a sinistra può non esserlo a destra e viceversa. Certamente se il gruppo  $G$  è abeliano le due nozioni coincidono.

**Definizione 2.2.** Dato un gruppo di Lie reale  $G$ , l'algebra di Lie data dai campi vettoriali analitici reali su  $G$  invarianti a sinistra si dice *algebra di Lie di  $G$*  e si denota con  $\mathfrak{g}$ .

## 2.2 L'algebra di Lie di un gruppo di Lie

Non è ancora chiaro quale sia la correlazione tra  $\mathfrak{g}$  e spazio tangente in  $e$ , l'identità del gruppo  $G$ . Questa correlazione è resa chiara dal seguente Teorema.

**Teorema 2.3.** *Sia  $G$  un gruppo di Lie reale e sia  $\mathfrak{g}$  la sua algebra di Lie. Allora la mappa*

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathfrak{g} &\rightarrow T_e G \\
X &\mapsto X_e
\end{aligned}$$

*è un isomorfismo lineare di  $\mathfrak{g}$  sullo spazio tangente  $T_e G$  a  $G$  in  $e$ . In particolare  $\dim(\mathfrak{g}) = \dim(T_e G) = \dim(G)$ .*

*Dimostrazione.* Se  $X \in \mathfrak{g}$  e  $b \in G$  l'invarianza a sinistra di  $X$  implica che

$$X_b = (dl_b)_e(X_e)$$

infatti  $X_b = (X \circ l_b)_e = (dl_b)_e(X_e)$ . Quindi  $X_e = 0$  implica  $X_b = 0$  per ogni  $b \in G$ ; i.e.  $X = 0$ . Di conseguenza la mappa  $\varphi$  è iniettiva. Proviamo ora la suriettività. Sia  $v \in T_e G$ . Per ogni  $b \in G$  definiamo il vettore tangente  $X_b \in T_b G$  così:

$$X_b = (dl_b)_e(v).$$

Proviamo che  $X : b \mapsto X_b$  è un elemento di  $\mathfrak{g}$ . Se  $x \in G$ , la relazione  $l_{xb} = l_x \circ l_b$  implica che

$$(dl_x)_b(X_b) = (dl_x)_b((dl_b)_e(v)) = (dl_{xb})_e(v) = X_{xb}.$$

Quindi  $X$  risulta invariante per traslazione a sinistra. Adesso vediamo che  $X$  è anche un campo vettoriale analitico (reale). Vista l'invarianza a sinistra è sufficiente provare che  $X$  è analitico attorno all'elemento  $e$ . Scegliamo delle coordinate  $x_1, \dots, x_n$  su un aperto  $U$  di  $G$ ,  $e \in U$ , tali che  $x_1(e) = \dots = x_n(e) = 0$ . poiché la mappa  $(x, y) \mapsto xy$  di  $G \times G$  in  $G$  è analitica esistono delle funzioni  $F_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), analitiche e definite in un intorno dell'origine di  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  tali che

$$F_i(x_1(a), \dots, x_n(a), x_1(b), \dots, x_n(b)) = x_i(ab) \quad (1)$$

per  $1 \leq i \leq n$  e per tutti gli  $a, b \in V$  dove  $V$  è un intorno di  $e$  tale che  $VV \subseteq U$ . Siano  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  tali che  $X_1 = \sum_{j=1}^n c_j (\partial/\partial x_j)_e$ . Se  $a \in V$ ,  $X_a x_i = X_e y_i$  dove la  $y_i$  è la funzione  $b \mapsto x_i(ab)$  su  $V$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Così da (1) segue

$$X_a x_i = \sum_{j=1}^n c_j \left( \frac{\partial}{\partial v_j} F_i(x_1(a), \dots, x_n(a), v_1, \dots, v_n) \right)_{v_1=\dots=v_n=0}. \quad (2)$$

L'espressione (2) mostra che le funzioni  $a \mapsto X_a x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) sono analitiche su  $V$ . Allora si ha che  $X$  è un campo vettoriale analitico, quindi  $X \in \mathfrak{g}$ .

È chiaro che  $\varphi(X) = v$ . La mappa  $\varphi$  è pertanto una biezione lineare di  $\mathfrak{g}$  su  $T_e G$ . □

Un risultato del tutto analogo vale per i gruppi di Lie complessi e per i campi vettoriali olomorfi invariati a sinistra.

*Osservazione 2.4.* Il teorema fornisce un *identificazione canonica* tra l'algebra di Lie di  $G$  e lo spazio tangente in  $e$ . In questo modo lo spazio tangente acquista una struttura naturale di algebra di Lie. D'ora in poi utilizzeremo questa identificazione senza bisogno di menzionarla.

*Osservazione 2.5.* Si noti che il Teorema 2.3 ci assicura che  $\mathfrak{g}$ , l'algebra di Lie di un gruppo di Lie  $G$ , è completamente determinata dalla componente connessa di  $G$  contenente  $e$ . Infatti, sia  $G^0$  la componente di  $G$  contenente  $e$ .  $G^0$  è una sottovarietà aperta di  $G$ . Sia  $\mathfrak{g}^0$  la sua algebra di Lie. Per ogni  $Y \in \mathfrak{g}$  sia  $Y^0$  la restrizione di  $Y$  a  $\mathfrak{g}^0$ . Allora, per il Teorema 2.3, l'applicazione  $\zeta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^0$  tale che  $\zeta(Y) = Y^0$ , è un isomorfismo di  $\mathfrak{g}$  con  $\mathfrak{g}^0$  (in quanto  $\varphi = \zeta \circ \varphi^0$ ).

Vorremmo ora trovare, grazie al teorema visto, qualche algebra di Lie associata ad un gruppo riferendoci agli esempi precedenti:

### Esempi:

- Ovviamente, se consideriamo  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{C}^n$  ed  $S^1$ , le algebre di Lie associate sono rispettivamente  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{C}^n$  ed  $\mathbb{R}$  con le bracket banali. Infatti questi sono gli spazi tangenti ai tre gruppi negli elementi identici ed, essendo abeliani, le bracket non possono che essere quelle banali.
- Essendo  $GL(n, \mathbb{R})$  un aperto dello spazio vettoriale  $M_n(\mathbb{R})$ , lo spazio tangente in  $e$  è tutto  $M_n(\mathbb{R})$ . Questo corrisponde agli endomorfismi di uno spazio vettoriale  $V$  una volta fissata una base. Allora l'algebra di Lie associata a  $GL(n, \mathbb{R})$  è data da  $M_n(\mathbb{R})$  e si può far vedere che la bracket è proprio  $[A, B] = AB - BA$ .
- Cosa si può dire dell'algebra di Lie associata a  $SL(n, \mathbb{R})$ ? Intuitivamente se  $A(t)$  è una curva in  $SL(n, \mathbb{R})$  passante per  $e$ , deve risultare  $\det(A(t)) = 1 \forall t$ . Quindi  $\det(1 + tX + O(t^2)) = 1 \forall t$  dove  $X$  è il vettore tangente alla curva in 1. Allora svolgendo il determinante si ottiene  $1 + t \cdot \text{tr}(X) + O(t^2) = 1 \forall t$  che derivando dà  $\text{tr}(X) = 0$ . Questo ci spinge a pensare che l'algebra di Lie abbia come spazio soggiacente quello delle matrici  $n \times n$  con traccia nulla. Infatti il Teorema della sommersione citato nel primo capitolo assicura proprio che lo spazio tangente in  $e$  a  $SL(n, \mathbb{R})$  sia proprio  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ . La bracket è ancora  $[A, B] = AB - BA$  perché deve essere quella ereditata da  $GL(n, \mathbb{R})$ .
- Analogamente si trovano gli spazi tangenti nell'identità ai gruppi di Lie di matrici visti sopra. Per esempio l'algebra di Lie di  $O(n, \mathbb{R})$  sono le matrici  $n \times n$  antisimmetriche mentre quella di  $U(n)$  sono le matrici complesse  $n \times n$  che verificano la relazione  $A = -A^\dagger$ .

## 2.3 I tre teoremi di Lie

In questo paragrafo esponiamo i tre teoremi di Lie che mostrano lo stretto rapporto esistente tra gruppi e algebre di Lie.

Sia  $G$  un gruppo di Lie (reale o complesso) e  $\mathfrak{g}$  la sua algebra di Lie. Sia  $H$  un sottogruppo di Lie di  $G$  e  $\mathfrak{h}$  la sua algebra di Lie. Denotiamo con  $i$  l'inclusione di  $H$  in  $G$ . Poiché  $\forall \tilde{X} \in \mathfrak{h}$ ,  $(di)_e(\tilde{X}_e) \in T_e G$ , per il Teorema 2.3, esiste unico  $X \in \mathfrak{g}$  tale che  $X_e = (di)_e(\tilde{X}_e)$ . Quindi abbiamo una applicazione (iniettiva) che porta  $\tilde{X} \in \mathfrak{h}$  in  $X \in \mathfrak{g}$ ; chiamiamo questa applicazione  $(di)$  e scriviamo:

$$X = (di)(\tilde{X}).$$

Siccome  $X$  è invariante a sinistra si ha:  $X_x = X(x) = (X \circ l_x)(e) = ((dl_x) \circ X)(e) = (dl_x)(X_e) = (dl_x)(di)_e(\tilde{X}_e) = (dl_x)(di)(\tilde{X})(e) = (di \circ \tilde{X} \circ l_x)(e) = (di)_x(\tilde{X})_x$ .

Da qui segue che  $[(di)(\tilde{X}), (di)(\tilde{Y})] = (di)([\tilde{X}, \tilde{Y}])$ ,  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{h}$ .

Quindi  $(di)$  è un morfismo iniettivo di algebre di Lie. Possiamo identificare  $\mathfrak{h}$  con la sua immagine isomorfa  $(di)(\mathfrak{h})$  in  $\mathfrak{g}$ .

$\mathfrak{h}$  è una sottoalgebra di  $\mathfrak{g}$ , chiamata *sottoalgebra di  $\mathfrak{g}$  definita da  $H$* . Ovviamente  $\mathfrak{h}$  è anche la sottoalgebra di  $\mathfrak{g}$  definita da  $H^0$ , la componente connessa di  $H$  contenente  $e$ .

È naturale domandarsi quando si può costruire, fissata una sottoalgebra  $\mathfrak{h}$  di  $\mathfrak{g}$ , un sottogruppo di Lie  $H$  di  $G$  con algebra di Lie  $\mathfrak{h}$ ; e, nel caso sia possibile, quando questo  $H$  sia unico. Per quanto detto sopra non ha senso aspettarsi l'unicità se non chiediamo che  $H$  sia connesso. La questione dell'unicità è risolta dal seguente Teorema.

**Teorema 2.6** (Primo teorema di Lie). *La corrispondenza, che assegna a ogni sottogruppo di Lie connesso di  $G$  la sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{g}$  corrispondente, è una biezione dall'insieme di tutti i sottogruppi di Lie connessi di  $G$  all'insieme delle sottoalgebre di Lie di  $\mathfrak{g}$ .*

La dimostrazione si trova in [2] (pag. 58, cap. 2) oppure in [3] (pag. 95, cap. 3).

*Osservazione 2.7.* Esiste anche una *costruzione* di  $H$  a partire da  $\mathfrak{h}$  che fa uso di un teorema di Frobenius per la quale rimandiamo a [2] (pag. 57 e seguenti, cap. 2) e [3] (pag. 94 e seguenti, cap. 3).

Vorremmo ora enunciare il fondamentale teorema di Lie che assicura che l'algebra di Lie associata a un gruppo di Lie definisce univocamente la struttura locale del gruppo.

**Definizione 2.8.** Siano  $G_1$  e  $G_2$  due gruppi di Lie. Diciamo che sono *localmente analiticamente isomorfi* se esistono due intorni aperti  $U_1$  e  $U_2$  dei rispettivi elementi neutri e un diffeomorfismo analitico  $\omega : U_1 \rightarrow U_2$  tale che le seguenti condizioni siano soddisfatte:

- se  $x, y \in U_1$ , allora  $xy \in U_1 \Leftrightarrow \omega(x)\omega(y) \in U_2$ .

- $\omega(xy) = \omega(x)\omega(y) \quad \forall x, y \in U_1.$

È ovvio che l'isomorfismo analitico locale è una relazione di equivalenza e che due gruppi di Lie sono localmente analiticamente isomorfi se e solo se lo sono le loro componenti connesse contenenti gli elementi identici.

**Teorema 2.9** (Secondo teorema di Lie). *Siano  $G_1$  e  $G_2$  due gruppi di Lie e siano  $\mathfrak{g}_1$  e  $\mathfrak{g}_2$  le loro algebre di Lie associate. Allora  $\mathfrak{g}_1$  e  $\mathfrak{g}_2$  sono isomorfe se e solo se  $G_1$  e  $G_2$  sono localmente analiticamente isomorfi.*

La dimostrazione si trova in [2] (pag. 73, cap. 2).

Infine vorremmo sapere se, data una algebra di Lie (reale o complessa), esiste sempre o meno un gruppo di Lie reale la cui algebra di Lie è proprio quella data; e, in tal caso, che tipo di regolarità possiamo sperare che questo gruppo abbia.

Lie provò un risultato sui campi vettoriali e sui gruppi di Lie locali che fu esteso da Cartan. Infine Ado dimostrò quello che oggi è noto come il Terzo Teorema di Lie:

**Teorema 2.10** (Terzo teorema di Lie o teorema di Ado). *Sia  $\mathfrak{g}$  una algebra di Lie su  $\mathbb{K}$  con  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ . Allora esiste un gruppo analitico semplicemente connesso la cui algebra di Lie è isomorfa a  $\mathfrak{g}$ .*

La dimostrazione utilizza un teorema di Levi e di Mal'čev e si può trovare in [2] (pag. 230, cap. 3) e in [4] (pag. 662).

# Capitolo 3

## Algebra involupante universale

In questo capitolo vogliamo definire l'algebra involupante universale  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  di un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  e vogliamo mostrare che, quando  $\mathfrak{g}$  è l'algebra di Lie di un gruppo di Lie  $G$ ,  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  coincide con l'algebra di tutti gli operatori differenziali analitici invarianti a sinistra. Per fare ciò sarà necessario, in particolare, dimostrare il Teorema di Poincaré-Birkhoff-Witt.

### 3.1 L'algebra involupante universale di un gruppo di Lie

In questo paragrafo mostriamo come sia possibile associare a un gruppo di Lie una algebra associativa di grande importanza costruita a partire dai suoi operatori differenziali.

Prima è opportuno dare il seguente fondamentale Teorema:

**Teorema 3.1.** *Siano  $X_1, \dots, X_m$  campi vettoriali su  $M$  tali che  $(X_1)_x, \dots, (X_m)_x$  siano una base per  $T_x M \forall x \in M$ .  $\forall(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  multiindice sia  $X^{(\alpha)}$  l'operatore differenziale:*

$$X^{(\alpha)} = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_m^{\alpha_m} \quad (X^{(0)} = 1).$$

*Allora gli  $X^{(\alpha)}$  sono linearmente indipendenti su  $C^\infty(M)$ . Se  $D$  è un operatore differenziale con  $\text{ord}(D) \leq r$ , esistono uniche delle funzioni  $C^\infty(M)$   $a_{(\alpha)}$  tali che:*

$$D = \sum_{|\alpha| \leq r} a_{(\alpha)} X^{(\alpha)}.$$

La dimostrazione si trova in [2] (pag. 8, cap. 1).

Ora, sia  $G$  un gruppo di Lie reale. Allora,  $\forall a \in G$ , l'applicazione  $l_a : x \mapsto ax$  è un diffeomorfismo analitico di  $G$  in sè; quindi questo induce un automorfismo dell'algebra su  $\mathbb{R}$  di tutti gli operatori differenziali analitici reali su  $G$ . Un operatore differenziale è chiamato *invariante a sinistra* se è invariante per tutte le traslazioni a sinistra. Allora si ha la seguente definizione.

**Definizione 3.2.** Se  $G$  è un gruppo di Lie reale, l'algebra (su  $\mathbb{R}$ ) di tutti gli operatori differenziali invarianti a sinistra si dice *algebra involupante di  $G$*  e si indica con  $\mathfrak{B}$ . Analogamente se  $G$  è un gruppo di Lie complesso l'algebra (su  $\mathbb{C}$ ) di tutti gli operatori differenziali olomorfi invarianti a sinistra si dice *algebra involupante di  $G$*  e si indica con  $\mathfrak{B}$ .

Per il Teorema 3.1, se  $\mathfrak{g}$  è l'algebra di Lie di  $G$ ,  $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{B}$ . Di più:  $\mathfrak{g}$  è una sottoalgebra di  $\mathfrak{B}$ .

**Teorema 3.3.** Sia  $G$  un gruppo di Lie,  $\mathfrak{g}$  la sua algebra di Lie,  $\mathfrak{B}$  la sua algebra involupante. Sia  $\{X_1, \dots, X_n\}$  una base qualunque di  $\mathfrak{g}$ . Per ogni  $n$ -upla di interi  $\geq 0$  ( $r_1, \dots, r_n$ ) definiamo  $X^{(r_1, \dots, r_n)} \in \mathfrak{B}$  come:

$$X^{(r_1, \dots, r_n)} = X_1^{r_1} \dots X_n^{r_n} \quad (X^{(0, \dots, 0)} = 1).$$

Allora, gli  $X^{(r_1, \dots, r_n)}$  formano una base di  $\mathfrak{B}$ . In particolare,  $\mathfrak{B}$  è generata algebricamente da 1 e da  $\mathfrak{g}$ .  $\forall a \in G$  la mappa  $D \mapsto D_a$ , ( $D \in \mathfrak{B}$ ), è un isomorfismo lineare di  $\mathfrak{B}$  su  $T_a^\infty(G)$ .

La dimostrazione si può trovare in [2] (pag. 55, cap. 2).

## 3.2 L'algebra involupante universale di un'algebra di Lie

In questo paragrafo vogliamo definire l'algebra involupante universale di un'algebra di Lie ed enunciare le sue proprietà. Inoltre vogliamo dimostrare il teorema di Poincaré-Birkhoff-Witt che, come vedremo, fornisce una base per questa algebra involupante universale.

Sia  $\mathbb{K}$  un campo fissato. Sia  $\mathfrak{g}$  una algebra di Lie su  $\mathbb{K}$ . Nei discorsi seguenti possiamo considerare  $\mathfrak{g}$  di dimensione qualunque, anche infinita.

È opportuno qui ricordare le definizioni seguenti.

**Definizione 3.4.** Una algebra  $A$  si dice *graduata* quando ad ogni  $n \in \mathbb{N}$  possiamo associare un  $A_n$ , sottospazio vettoriale di  $A$  tale che:

- 1)  $1 \in A_0$ .
- 2)  $A = \bigoplus_n A_n$ .
- 3)  $A_n A_m \subseteq A_{n+m}$ .

$A_n$  si dice sottospazio degli elementi omogenei di grado  $n$ .

Un esempio immediato di algebra graduata sono i polinomi  $A = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ .

**Definizione 3.5.** Dato uno spazio vettoriale  $V$ , si dice *algebra tensoriale su  $V$*  e si indica con  $T(V)$ , l'algebra:

$$T(V) = \mathbb{K} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \dots \oplus V^{\otimes n} \oplus \dots$$

La moltiplicazione in  $T(V)$  è data, come si verifica facilmente, da  $\otimes$ .

Per esempio, un'algebra tensoriale risulta essere in modo naturale un'algebra graduata con  $T(V)_n = V^{\otimes n}$ . Infatti, se  $\{v_i\}_{i \in I}$  è una base per  $V$ , gli elementi di  $T(V)$  saranno della forma  $a + \sum a_i v_i + \sum a_{ij} v_i \otimes v_j + \dots$ . Allora, siccome il prodotto è dato da  $\otimes$ ,  $T(V)_i \times T(V)_j \subseteq T(V)_{i+j}$  dove  $T(V)_i = V^{\otimes i}$ . Quindi  $V^{\otimes i}$  sono i tensori omogenei di grado  $i$ .

Vale la seguente proposizione:

**Proposizione 3.6.** (*Proprietà universale di  $T(V)$* ) Se  $V$  è uno spazio vettoriale,  $A$  un'algebra e  $\psi : V \rightarrow A$  una applicazione lineare, allora esiste ed è unico  $\tilde{\psi} : T(V) \rightarrow A$  morfismo di algebre che rende

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & T(V) \\ & \searrow \psi & \downarrow \tilde{\psi} \\ & & A \end{array}$$

commutativo.

*Dimostrazione.* Se  $\{v_i\}_{i \in I}$  è una base per  $V$ , deve valere  $\tilde{\psi}(v_i) = \psi(v_i)$ . Per definire  $\tilde{\psi}$  su  $T(V)$  è sufficiente definirla sui prodotti del tipo  $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_l$  e si deve avere per quanto detto  $\tilde{\psi}(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_l) = \tilde{\psi}(v_1) \otimes \dots \otimes \tilde{\psi}(v_l) = \psi(v_1) \otimes \dots \otimes \psi(v_l)$ .  $\square$

Ora, sia  $T(\mathfrak{g})$  l'algebra tensoriale sullo spazio vettoriale sottogiacente a  $\mathfrak{g}$ .  $T(\mathfrak{g})_0 = \mathbb{K} \cdot 1$  e  $T(\mathfrak{g})_m$  è il sottospazio di  $T(\mathfrak{g})$  di tutti i tensori omogenei di grado  $m$ . Se  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , sia

$$u_{X,Y} = X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y].$$

Denotiamo con  $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$  il sottospazio di  $T(\mathfrak{g})$  generato da tutti gli elementi della forma  $t \otimes u_{X,Y} \otimes t'$  ( $t, t' \in T(\mathfrak{g}), X, Y \in \mathfrak{g}$ ):

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{g}) = \sum_{X,Y \in \mathfrak{g}} T(\mathfrak{g}) \otimes u_{X,Y} \otimes T(\mathfrak{g}).$$

Siccome  $u_{X,Y} \in T(\mathfrak{g})_1 + T(\mathfrak{g})_2$ ,

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{g}) \subseteq \sum_{m \geq 1} T(\mathfrak{g})_m.$$

Quindi  $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$  è un ideale bilatero proprio in  $T(\mathfrak{g})$ .

**Definizione 3.7.** Nelle condizioni precedenti chiamiamo *algebra involuante universale di  $\mathfrak{g}$* , il quoziente

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = \frac{T(\mathfrak{g})}{\mathfrak{L}(\mathfrak{g})}.$$

*Osservazione 3.8.* Visto che  $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$  è generata da vettori non omogenei,  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  non è graduata in modo naturale.

Chiamiamo  $\gamma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  il naturale morfismo di algebre dato da:

$$\gamma = \pi \circ i$$

dove

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{i} T(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\pi} \mathfrak{U}(\mathfrak{g}).$$

Ricordando che un'algebra associativa è sempre algebra di Lie in modo naturale, si ha:

**Proposizione 3.9.** (*Proprietà universale di  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$* ) Se  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie,  $B$  è un'algebra associativa e  $\xi : \mathfrak{g} \rightarrow B$  è un morfismo di algebre di Lie (cioè deve valere  $\xi[X, Y] = \xi X \xi Y - \xi Y \xi X$ ), allora esiste ed è unico  $\hat{\xi} : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow B$  morfismo di algebre che rende

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{g} & \xrightarrow{\gamma} & \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \\
 & \searrow \xi & \downarrow \hat{\xi} \\
 & & B
 \end{array}$$

commutativo.

*Dimostrazione.* Per la proprietà universale dell'algebra tensoriale  $T(\mathfrak{g})$  esiste ed è unico  $\tilde{\xi} : T(\mathfrak{g}) \rightarrow B$  tale che  $\tilde{\xi} \circ i = \xi$ . Siccome

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = \frac{T(\mathfrak{g})}{\mathfrak{L}(\mathfrak{g})}$$

per avere l'esistenza e l'unicità di  $\hat{\xi}$  è necessario e sufficiente provare che  $\tilde{\xi}$  si annulla su  $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$ , per la proprietà universale del nucleo. Basta verificarlo sui generatori:  
 $\tilde{\xi}(X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]) = \xi(X)\xi(Y) - \xi(Y)\xi(X) - \xi([X, Y]) = 0$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{g} \hookrightarrow T(\mathfrak{g}) & & \\
 \xi \searrow & \downarrow \tilde{\xi} & \searrow \pi \\
 & B & \mathfrak{U}(\mathfrak{g})
 \end{array}$$

□

*Osservazione 3.10.* Questa proposizione dimostra l'unicità a meno di isomorfismo di algebra unico della algebra involupante universale di un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ .

A questo punto, possiamo enunciare uno dei teoremi cardine della teoria delle algebre di Lie. La sua importanza, insieme all'unicità dell'algebra involupante universale, è essenziale sia nello studio delle algebre di Lie in sè, perché permette di passare alla più maneggevole struttura di algebra associativa, sia in teoria della rappresentazione.

**Teorema 3.11** (Teorema di Poincaré-Birkhoff-Witt). *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie, sia  $\gamma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  il morfismo definito come sopra. Se  $\{X_i\}_{i \in I}$  è una base linearmente ordinata e al più numerabile di  $\mathfrak{g}$ , allora  $1, \gamma(X_{i_1}) \cdots \gamma(X_{i_n})$  con  $i_1 \leq \dots \leq i_n$ ,  $i_j \in I$   $1 \leq j \leq n$  e  $n \in \mathbb{N}$ , è una base per  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ . In particolare  $\gamma$  è iniettivo.*

*Dimostrazione.* Sia  $T(\mathfrak{g})_r = \text{span}_{\mathbb{K}}(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_r})$  lo spazio vettoriale dei tensori omogenei di grado  $r$ . Definiamo i tensori ordinati di grado  $r$ :  $T(\mathfrak{g})_r^o = \text{span}_{\mathbb{K}}(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_r}, \quad i_1 \leq \dots \leq i_r)$ . Dato un elemento  $X = X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_n} \in T(\mathfrak{g})$  definiamo l'indice di  $X$ ,  $\text{ind}(X)$ , come il numero di inversioni della permutazione  $(i_1, \dots, i_n)$ . Definiamo ancora  $T(\mathfrak{g})_r^d := \text{span}_{\mathbb{K}}(X = X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_r}, \quad \text{ind}(X) = d)$ . Per dimostrare il teorema è sufficiente verificare che:

1)

$$\bigoplus_r T(\mathfrak{g})_r^o + \mathfrak{L}(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})$$

cioè i monomi ordinati generano  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ .

2)

$$\left( \bigoplus_r T(\mathfrak{g})_r^o \right) \cap \mathfrak{L}(\mathfrak{g}) = (0)$$

cioè i monomi ordinati sono linearmente indipendenti in  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ .

Per mostrare (1) basta far vedere che per ogni  $r$ :

$$T(\mathfrak{g})_r \subseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{g}) + \sum_{q=0}^r T(\mathfrak{g})_q^o.$$

Usiamo l'induzione su  $r$ :  $r = 0$  e  $r = 1$ : sono ovvi.

Siccome

$$T(\mathfrak{g})_r = \bigoplus_{d \geq 0} T(\mathfrak{g})_r^d$$

basta far vedere che:

$$T(\mathfrak{g})_r^d \subseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{g}) + \sum_{q=0}^r T(\mathfrak{g})_q^o.$$

Usiamo l'induzione su  $d$ : il caso  $d = 0$ : è ovvio. Per ipotesi induttiva si ha:

$$T(\mathfrak{g})_r^e \subseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{g}) + \sum_{q=0}^r T(\mathfrak{g})_q^o.$$

quando  $e < d$ . Sia  $t = X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_r} \in T(\mathfrak{g})_r^d$ . Visto che  $d \geq 1$ , esiste una coppia  $(\alpha, \beta)$  tale che  $\alpha < \beta$  e  $i_\alpha > i_\beta$ . Non è restrittivo supporre che  $X_{i_\alpha}$  e  $X_{i_\beta}$  siano adiacenti, cioè  $\beta = \alpha + 1$ , infatti una permutazione che ha numero di inversioni  $\geq 1$  ha almeno una coppia di elementi adiacenti invertiti.

Ora

$$\begin{aligned} t &= X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_\alpha} \otimes X_{i_{\alpha+1}} \otimes \cdots \otimes X_{i_r} \\ &= X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_{\alpha+1}} \otimes X_{i_\alpha} \otimes \cdots \otimes X_{i_r} + X_{i_1} \otimes \cdots \otimes [X_{i_\alpha}, X_{i_{\alpha+1}}] \otimes \cdots \otimes X_{i_r} \\ &\quad + X_{i_1} \otimes \cdots \otimes (X_{i_\alpha} \otimes X_{i_{\alpha+1}} - X_{i_{\alpha+1}} \otimes X_{i_\alpha} - [X_{i_\alpha}, X_{i_{\alpha+1}}]) \otimes \cdots \otimes X_{i_r}. \end{aligned}$$

Il primo termine appartiene a  $T(\mathfrak{g})_r^e$  con  $e < d$ , il secondo appartiene a  $T(\mathfrak{g})_{r-1}$ , il terzo appartiene a  $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$ . Allora sfruttando l'ipotesi induttiva su  $d$  si ha:

$$t \in \mathfrak{L}(\mathfrak{g}) + \sum_{q=0}^r T(\mathfrak{g})_q^o + T(\mathfrak{g})_{r-1}$$

infine si usa l'ipotesi induttiva su  $r$  e si ottiene il risultato.

Vediamo ora (2). È sufficiente mostrare che esiste un endomorfismo  $L : T(\mathfrak{g}) \rightarrow T(\mathfrak{g})$  tale che  $L|_{\bigcup_r T(\mathfrak{g})_r^o} = id$  e  $L|_{\mathfrak{L}(\mathfrak{g})} = 0$ . Infatti in tal caso si ha:

$$\left( \bigoplus_r T(\mathfrak{g})_r^o \right) \cap \mathfrak{L}(\mathfrak{g}) = (0).$$

Vediamo come si può costruire induttivamente  $L$ . Poniamo intanto

$$L(t) = t \text{ se } t \in \bigoplus_r T(\mathfrak{g})_r^o.$$

Vorremmo estendere  $L$  a un endomorfismo di  $\sum_{0 \leq q \leq p} T(\mathfrak{g})_q$ . Per fare ciò basta certamente definirlo sul monomio  $t = X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_r}$ . Poniamo

$$\begin{aligned} L(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_\alpha} \otimes X_{i_{\alpha+1}} \otimes \cdots \otimes X_{i_r}) &= L(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_{\alpha+1}} \otimes X_{i_\alpha} \otimes \cdots \otimes X_{i_r}) + \\ &L(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes [X_{i_\alpha}, X_{i_{\alpha+1}}] \otimes \cdots \otimes X_{i_r}). \end{aligned}$$

Se in questo modo  $L$  è ben definita, abbiamo un endomorfismo di  $\sum_{0 \leq q \leq p-1} T(\mathfrak{g})_q + \sum_{0 \leq e \leq d} T(\mathfrak{g})_p^e$  che soddisfa le proprietà richieste. Dobbiamo dunque far vedere che la definizione di  $L$  non dipende dall'intero  $\alpha$  scelto. Sia  $s$  un altro intero con  $1 \leq s \leq p-1$ , tale che  $i_s \geq i_{s+1}$ . Si può supporre senza perdere generalità  $r \geq s$ .

Se  $r \geq s+2$ , allora applicando  $L$  come definita sopra nei due modi possibili e semplificando ciò che si ottiene tramite le proprietà che abbiamo per ipotesi induttiva otteniamo in entrambi i casi la medesima espressione:

$$\begin{aligned} &L(\cdots \otimes X_{i_s} \otimes X_{i_{s+1}} \otimes \cdots \otimes X_{i_r} \otimes X_{i_{r+1}} \otimes \cdots) = \\ &L(\cdots \otimes X_{i_{s+1}} \otimes X_{i_s} \otimes \cdots \otimes X_{i_{r+1}} \otimes X_{i_r} \otimes \cdots) + \\ &L(\cdots \otimes X_{i_{s+1}} \otimes X_{i_s} \otimes \cdots \otimes [X_{i_r}, X_{i_{r+1}}] \otimes \cdots) + \\ &L(\cdots \otimes [X_{i_s}, X_{i_{s+1}}] \otimes \cdots \otimes X_{i_{r+1}} \otimes X_{i_r} \otimes \cdots) + \\ &L(\cdots \otimes [X_{i_s}, X_{i_{s+1}}] \otimes \cdots \otimes [X_{i_r}, X_{i_{r+1}}] \otimes \cdots). \end{aligned}$$

Se  $r = s+1$ , allora applicando  $L$  come definita sopra nei due modi possibili e semplificando ciò che si ottiene tramite le proprietà abbiamo le due espressioni seguenti:

$$\begin{aligned} &L(\cdots \otimes X_{i_{s+2}} \otimes X_{i_{s+1}} \otimes X_{i_s} \otimes \cdots) + L(\cdots \otimes [X_{i_{s+1}}, X_{i_{s+2}}] \otimes X_{i_s} \otimes \cdots) + \\ &L(\cdots \otimes X_{i_{s+1}} \otimes [X_{i_s}, X_{i_{s+2}}] \otimes \cdots) + L(\cdots \otimes [X_{i_s}, X_{i_{s+1}}] \otimes X_{i_{s+2}} \otimes \cdots). \end{aligned}$$

e

$$L(\cdots \otimes X_{i_{s+2}} \otimes X_{i_{s+1}} \otimes X_{i_s} \cdots) + L(\cdots \otimes [X_{i_s}, X_{i_{s+2}}] \otimes X_{i_{s+1}} \otimes \cdots) + \\ L(\cdots \otimes X_{i_s} \otimes [X_{i_{s+1}}, X_{i_{s+2}}] \otimes \cdots) + L(\cdots \otimes X_{i_{s+2}} \otimes [X_{i_s}, X_{i_{s+1}}] \otimes \cdots).$$

Le due espressioni sono uguali (ancora usando l'ipotesi induttiva) se e solo se

$$L(\cdots \otimes ([X_{i_s}, [X_{i_{s+1}}, X_{i_{s+2}}]] + [X_{i_{s+1}}, [X_{i_{s+2}}, X_{i_s}]] + [X_{i_{s+2}}, [X_{i_s}, X_{i_{s+1}}]]) \otimes \cdots) = 0$$

Questo è certamente vero per l'identità di Jacobi.  $\square$

*Osservazione 3.12.* Quello che si è fatto nella dimostrazione è vedere che esiste un procedimento che porta, tramite la relazione espressa dall'ideale  $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$ , a scrivere ogni elemento dell'algebra involupante universale come combinazione di elementi ordinati e che questo procedimento è ben definito.

**Esempio 3.13.** Consideriamo  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ . Come detto negli Esempi 1.10 questa è un'algebra di Lie.

Si vede subito che :

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) = \text{span}_{\mathbb{K}} \left\{ H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

e si ha:

$[H, X] = 2X$ ,  $[H, Y] = -2Y$ ,  $[X, Y] = H$ . L'algebra involupante universale è data da:

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})) = \frac{T(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}))}{\left( \begin{array}{c} H \otimes X - X \otimes H - 2X \\ H \otimes Y - Y \otimes H - (-2Y) \\ X \otimes Y - Y \otimes X - H \end{array} \right)}$$

Fissiamo un ordine nella base  $\{H, X, Y\}$ : poniamo  $H \leq X \leq Y$ .

Allora, per il Teorema di Poincaré-Birkhoff-Witt una base di  $\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}))$  è data da:

$$\{H^h X^x Y^y, h, x, y \in \mathbb{Z}, h, x, y \geq 0\}.$$

Proviamo a ricondurre a tale base l'elemento di  $\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}))$   $YXH$ :

$$\begin{aligned} YXH &= (XY - H)H = XYH - H^2 = X(HY + 2Y) - H^2 \\ &= XHY + 2XY - H^2 = (HX - 2X)Y + 2XY - H^2 \\ &= HXY - H^2. \end{aligned}$$

Il teorema ci assicura che un tale riordino esiste e sempre e porta al medesimo risultato qualunque sia l'ordine delle operazioni con cui riordiniamo la nostra espressione.

*Osservazione 3.14.* Il teorema di Poincaré-Birkhoff-Witt vale ben più in generale di quanto si è dimostrato. Infatti lo si può dimostrare anche per basi non-numerabili e nel caso in cui  $\mathbb{K}$  non sia campo ma solo un anello commutativo e  $\mathfrak{g}$  una "algebra di Lie su un  $\mathbb{K}$ -modulo libero" nonché in casi ancora più generali, tuttavia la dimostrazione è sostanzialmente diversa. Rimandiamo a [7] (pag.178-218) per tutti i dettagli.

Vogliamo ora definire il concetto di algebra filtrata.

**Definizione 3.15.** Una algebra  $A$  si dice *filtrata* quando qualunque sia  $n \in \mathbb{N}$  esiste  $A^n$ , sottospazio vettoriale di  $A$  tale che:

- 1)  $1 \in A^0$ .
- 2)  $A^0 \subset A^1 \subset A^2 \subset \dots$
- 3)  $A^n A^m \subset A^{n+m}$ .
- 4)  $\bigcup_n A^n = A$ .

**Esempi 3.16.** • I polinomi  $A = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  sono un'algebra filtrata con  $A^n$  i polinomi di grado  $\leq n$ .

- Se un'algebra  $A$  è graduata allora essa è anche filtrata, infatti basta porre  $A^n = \bigoplus_{i \leq n} A_i$ . Il contrario invece non vale in generale, però data un'algebra filtrata possiamo costruire la sua *graduata associata*  $gr(A)$ . Infatti ponendo  $gr(A)_n = A^n/A^{n-1}$  e  $gr(A) = \bigoplus_n gr(A)_n$  si vede subito che il prodotto è ben definito e quindi si ha effettivamente un'algebra graduata.
- $\text{Diff}(M)$  è un'algebra non commutativa filtrata: considero come  $A^r$  gli elementi di ordine  $\leq r$ .

**Definizione 3.17.** Dato uno spazio vettoriale  $V$ , si chiama *algebra simmetrica su  $V$* :

$$\text{Sym}(V) = \frac{T(V)}{I}$$

dove  $I$  è l'ideale bilatero generato da  $x \otimes y - y \otimes x$ ,  $x, y \in V$ .

*Osservazione 3.18.*  $\text{Sym}(V)$  coincide con  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  quando  $[\cdot, \cdot] = 0$ .

Allora si ha il seguente Teorema:

**Teorema 3.19.** Se  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie con base  $\{X_1, \dots, X_n\}$ , allora:

- 1)  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  è filtrata con  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^n = \text{span}_{\mathbb{K}}\{X_{i_1} \cdots X_{i_r}, r \leq n\}$  e  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^0 = \langle 1 \rangle$ .

2)  $gr(\mathfrak{U}(\mathfrak{g})) \cong Sym(\mathfrak{g})$ .

*Dimostrazione.* 1) Basta verificare che soddisfa la definizione di algebra filtrata.

2) Per definizione,  $gr(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}))_n = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})^n / \mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{n-1}$  quindi  $gr(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}))$  è commutativa in quanto un'espressione del tipo  $XY - YX$  si può sempre abbassare di grado mediante la relazione  $XY - YX = [X, Y]$ .

Ora considero questa mappa di algebre:

$$Sym(\mathfrak{g})_n \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})^n / \mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{n-1} \quad X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n} \mapsto X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n}.$$

Per quanto detto e per il Teorema di Poincaré-Birkhoff-Witt, questa applicazione è ben definita, iniettiva, suriettiva e conserva il prodotto. Quindi dà luogo ad un isomorfismo di algebre. □

Vogliamo ora esaminare il significato analitico dell'algebra involupante universale di un'algebra di Lie associata a un gruppo di Lie, cercando una correlazione con quella che abbiamo brevemente chiamato algebra involupante di  $G$ .

Siano fissati un gruppo di Lie  $G$  reale e la sua algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ . Sia  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  l'algebra involupante universale di  $\mathfrak{g}$ .

Allora vale il seguente:

**Teorema 3.20.** *Per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ , definiamo l'operatore differenziale invariante a sinistra:*

$$\begin{aligned} \partial(X) : C^\infty(G) &\rightarrow C^\infty(G) \\ f &\mapsto Xf \end{aligned}$$

Allora la mappa:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\rightarrow G \\ X &\mapsto \partial(X) \end{aligned}$$

si estende in modo unico a un isomorfismo  $\partial (a \mapsto \partial(a))$  di  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  con l'algebra di tutti gli operatori differenziali analitici invarianti a sinistra su  $G$ .

*Dimostrazione.* Per come è definita  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ , si ha che

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}, \quad \partial([X, Y]) = \partial(X)\partial(Y) - \partial(Y)\partial(X).$$

Come sopra, sia  $\mathfrak{B}$  l'algebra su  $\mathbb{R}$  di tutti gli operatori differenziali analitici invarianti a sinistra su  $G$ .

Allora la mappa  $X \mapsto \partial(X)$  si estende in modo unico a un omomorfismo  $\partial$  ( $a \mapsto \partial(a)$ ) di  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  su  $\mathfrak{B}$  e ciò viene subito dal teorema.

Supponiamo che  $\{X_1, \dots, X_m\}$  sia una base per  $\mathfrak{g}$  su  $\mathbb{R}$ , allora per il teorema 3.4, gli operatori differenziali  $\partial(X_1)^{r_1}, \dots, \partial(X_m)^{r_m}$  con  $r_1, \dots, r_m \geq 0$  formano una base per  $\mathfrak{B}$  su  $\mathbb{R}$ ; d'altra parte, per il Teorema di Poincaré-Birkhoff-Witt gli elementi  $\{X_1^{r_1}, \dots, X_m^{r_m}, r_1, \dots, r_m \geq 0\}$  formano una base per  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  su  $\mathbb{R}$ . Inoltre  $\partial(X_1^{r_1} \cdots X_m^{r_m}) = \partial(X_1)^{r_1} \cdots \partial(X_m)^{r_m}$ . Così il teorema è provato.

□

*Osservazione 3.21.* Si può pensare che  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  e  $\mathfrak{B}$  siano identificati tramite  $\partial$ . D'ora in poi, allora, assumeremo che coincidano. In questo modo possiamo pensare che gli elementi dell'algebra involupante universale agiscano come operatori differenziali su  $G$ .

# Bibliografia

- [1] D. Montgomery e L. Zippin, *Topological transformation groups*, Interscience Publishers, Inc., 1955.
- [2] V. S. Varadarajan, *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*, Springer, 1984.
- [3] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer, 1983.
- [4] A. W. Knap, *Lie Groups: Beyond an Introduction* Birkhäuser, 2002.
- [5] J. E. Marsden, T. Ratiu e R. Abraham, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Springer, 2002.
- [6] V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, AMS Chelsea Publishing, 2000.
- [7] G. Bergman, *The diamond lemma for ring theory*, Advances in mathematics 29, pag. 178-218, 1978.