

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Disuguaglianza di Poincaré
E
Hölderianità delle soluzioni deboli di PDE

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Annamaria Montanari

Presentata da:
Arianna Luzi

IV Sessione
Anno Accademico 2020/2021

*A mio fratello Matteo,
che possa sempre avere coraggio ...*

Introduzione

Lo scopo della tesi è studiare l'Hölderianità delle soluzioni deboli di equazioni alle derivate parziali (PDE).

Il nostro punto di partenza sarà la disuguaglianza di Poincaré, si inizierà dunque, nel primo capitolo, con alcuni richiami di definizioni e risultati che ci consentiranno di enunciare e dimostrare la suddetta disuguaglianza; nel secondo capitolo ci concentreremo poi su due applicazioni di Poincaré: le disuguaglianze di Morrey e John- Nirenberg, da esse infatti possiamo ricavare una disuguaglianza importantissima, ovvero la disuguaglianza di Harnack.

A questo punto inizieremo a parlare di equazioni alle derivate parziali, ne definiremo le soluzioni, classiche e deboli, classificheremo le PDE concentrandoci poi su quelle Ellittiche del secondo ordine.

Il nostro interesse risiede nella Teoria della Regolarità delle soluzioni di PDE, difatti vedremo, nel terzo capitolo, quando una soluzione debole è anche classica.

Dalla disuguaglianza di Harnack possiamo dedurre delle stime Hölderiane per le soluzioni deboli; definiremo quindi, nell'ultimo capitolo, le funzioni Hölderiane (o Hölder continue) e gli spazi di Hölder.

Arriveremo dunque alle stime Hölderiane per soluzioni deboli di equazioni alle derivate parziali di tipo uniformemente ellittico e, in particolare, affronteremo prima l'Hölderianità nell'interno del dominio delle soluzioni e in un secondo momento l'Hölderianità al bordo sui domini che verificano la condizione del cono esterno.

Indice

Introduzione	i
Indice	iii
1 Disuguaglianza di Poincaré	1
1.1 Richiami	1
1.2 Disuguaglianza di Poincaré	4
2 Disuguaglianze di Morrey e John-Nirenberg	8
2.1 L'operatore V_μ e il Teorema di Morrey	8
2.2 Teorema di Morrey generalizzato e Teorema di John-Nirenberg	10
3 Disuguaglianza di Harnack	15
3.1 Introduzione	16
3.2 Equazioni alle derivate parziali(PDE)	16
3.3 Classificazione delle PDE del secondo ordine	17
3.4 Operatori ellittici	18
3.5 Disuguaglianza debole di Harnack	20
3.6 Disuguaglianza di Harnack	26
4 Hölderianità delle soluzioni di PDE	29
4.1 Hölderianità interna	30
4.2 Hölderianità al bordo	32
Conclusioni	38

Bibliografia

40

Capitolo 1

Disuguaglianza di Poincaré

1.1 Richiami

Per tutta la trattazione, Ω denota un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n .

Definizione 1. Per ogni $p \geq 1$ definiamo i seguenti spazi [7]

$$L^p(\Omega) = \left\{ u \mid u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty \right\}$$

$$L^p_{loc}(\Omega) = \left\{ u \mid u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \int_K |u|^p dx < \infty, \forall \text{ compatto } K \subset \Omega \right\}$$

$$L^\infty(\Omega) = \{ u \mid u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \exists M \geq 0, \mu(\{x \in \Omega \mid |u(x)| > M\}) = 0 \}$$

Definizione 2. Sia $1 \leq p < \infty$, definiamo la seguente norma

$$\| u \|_{L^p} \equiv \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p}$$

che talvolta indicheremo più semplicemente con $\| u \|_p$.

Definizione 3. Siano $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $1 \leq i \leq n$. Diciamo che $v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ è la **derivata parziale debole** di u rispetto a x_i in Ω se

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v_i \phi dx$$

per ogni $\phi \in C^1_0(\Omega)$. [3]

Osservazione 1.1.0.1. *Si vede facilmente che la derivata parziale debole rispetto a x_i , se esiste, è univocamente determinata. Scriviamo inoltre*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \equiv v_i, \quad (i = 1, \dots, n)$$

e

$$Du \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right),$$

purché le derivate deboli $\partial u/\partial x_1, \dots, \partial u/\partial x_n$ esistano.

Più in generale possiamo definire la derivata debole di multi indice α di una funzione in questo modo

Definizione 4. *Siano $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Diciamo che $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ è la **derivata debole** di multi indice α di u se*

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_\alpha \phi dx$$

per ogni $\phi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega)$. [3]

Definizione 5. *Siano $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $p \geq 1$.*

1. *La funzione u appartiene allo **Spazio di Sobolev***

$$W^k(\Omega)$$

se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e la derivata debole $D^\alpha u \in L^1_{loc}(\Omega)$ esiste per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq k$.

2. *La funzione u appartiene allo **Spazio di Sobolev***

$$W^{k,p}$$

Se $u \in W^k(\Omega)$ e $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| \leq k$. [3]

Definizione 6. *Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$ definiamo la seguente norma*

$$\| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} \equiv \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha u \|_{L^p}^p \right)^{1/p}$$

Osservazione 1.1.0.2. *Chiaramente $C^k(\Omega) \subset W^k(\Omega)$*

Altri Spazi di Sobolev che citeremo sono i seguenti [7]

Definizione 7. *Per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $p \geq 1$*

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}$$

In conclusione ricordiamo alcuni risultati che ci serviranno in seguito

Teorema 1 (Disuguaglianza di Hölder). *Siano $1 \leq p_j \leq \infty, j = 1, \dots, n$ tali che*

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{r} \leq 1$$

Se $f_j \in L^{p_j}, \forall j = 1, \dots, n$ allora $\prod_{j=1}^n f_j \in L^r$ e

$$\left\| \prod_{j=1}^n f_j \right\|_r \leq \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{p_j}$$

[4]

Osservazione 1.1.0.3. *Scegliendo $n = 2$ nella disuguaglianza di Hölder e $p_1 = p_2 = 2$ otteniamo la **disuguaglianza di Schwarz**.*

Teorema 2 (Disuguaglianze di Sobolev).

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{np/(n-p)}(\Omega), & \text{per } p < n \\ C^0(\overline{\Omega}) & \text{per } p > n. \end{cases}$$

Inoltre, esiste una costante $C = C(n, p)$ tale che, per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \|u\|_{np/(n-p)} &\leq C \|Du\|_p && \text{per } p < n, \\ \sup_{\Omega} |u| &\leq C |\Omega|^{1/n-1/p} \|Du\|_p && \text{per } p > n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

[1]

Teorema 3 (Disuguaglianza di interpolazione). *Siano p, q, r reali positivi tali che*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

e

$$p \leq q \leq r$$

allora vale la seguente

$$\|u\|_q \leq \epsilon \|u\|_r + \epsilon^{-\mu} \|u\|_p, \quad (1.2)$$

dove $\epsilon > 0$ e

$$\mu = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \Big/ \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right).$$

[1]

1.2 Disuguaglianza di Poincaré

Siamo pronti ora per affrontare il discorso sulla disuguaglianza di Poincaré, cominciando con un teorema che utilizzeremo per la dimostrazione [1]

Teorema 4. $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ è denso in $W^{k,p}(\Omega)$.

Ricordiamo la definizione di **partizione dell'unità** [6].

Definizione 8. Sia Ω_j un ricoprimento aperto di Ω . Allora esiste una famiglia di funzioni $\psi_j \in C^\infty(\Omega)$ tali che

1. $\psi_j \geq 0, \forall j$;
2. la famiglia $\text{supp}(\psi_j)$ è localmente finita;
3. $\text{supp}(\psi_j) \subset \Omega_j, \forall j$;
4. $\sum_j \psi_j \equiv 1$.

La famiglia delle funzioni ψ_j è chiamata **partizione dell'unità subordinata al ricoprimento** Ω_j .

Dimostrazione. Siano $\Omega_j, j = 1, 2, \dots$, contenuti strettamente in Ω tali che $\Omega_j \subset\subset \Omega_{j+1}$ e $\cup \Omega_j = \Omega$ e sia $\psi_j, j = 0, 1, 2, \dots$, una partizione dell'unità relativa al ricoprimento

$\{\Omega_{j+1} - \Omega_{j-1}\}$, con Ω_0 e Ω_{-1} vuoti. Allora presi arbitrariamente $u \in W^{k,p}(\Omega)$ e $\epsilon > 0$, possiamo scegliere $h_j, j = 1, 2, \dots$, tali che:

$$h_j \leq \text{dist}(\Omega_j, \partial\Omega_{j+1}), \quad j \geq 1$$

$$\|(\psi_j u)_{h_j} - \psi_j u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Ponendo poi $v_j = (\psi_j u)_{h_j}$ notiamo che solamente un numero finito di v_j sono non nulli su un generico insieme $\Omega' \subset\subset \Omega$. Di conseguenza la funzione $v = \sum v_j$ appartiene a C^∞ . Inoltre

$$\|u - v\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \sum \|v_j - \psi_j u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \epsilon.$$

Questo completa la dimostrazione. \square

Quindi possiamo enunciare e dimostrare la **disuguaglianza di Poincaré** [1]

Teorema 5 (Disuguaglianza di Poincaré). *Sia Ω un insieme convesso e sia $u \in W^{1,1}(\Omega)$, allora*

$$|u(x) - u_s| \leq \frac{d^n}{n|S|} \int_{\Omega} |x - y|^{1-n} |Du(y)| dy \quad (1.3)$$

dove

$$u_s = \frac{1}{|S|} \int_S u \, dx, \quad d = \text{diam}\Omega,$$

e S è un generico sottoinsieme misurabile di Ω .

Dimostrazione. Dal Teorema 4 possiamo dedurre la (1.3) per $u \in C^1(\Omega)$.

Inoltre si ha che per $x, y \in \Omega$,

$$u(x) - u(y) = - \int_0^{|x-y|} D_r u(x + r\omega) dr, \quad \omega = \frac{y - x}{|y - x|}.$$

Integrando rispetto ad y su S si ottiene

$$|S|(u(x) - u_s) = - \int_S dy \int_0^{|x-y|} D_r u(x + r\omega) dr.$$

Definiamo

$$V(x) = \begin{cases} |D_r u(x)|, & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}$$

ottenendo di conseguenza

$$\begin{aligned} |u(x) - u_S| &\leq \frac{1}{|S|} \int_{|x-y|<d} dy \int_0^\infty V(x+r\omega) dr \\ &= \frac{1}{|S|} \int_0^\infty \int_{|\omega|=1} \int_0^d V(x+r\omega) \rho^{n-1} d\rho d\omega dr \\ &= \frac{d^n}{n|S|} \int_0^\infty \int_{|\omega|=1} V(x+r\omega) d\omega dr \\ &= \frac{d^n}{n|S|} \int_\Omega |x-y|^{1-n} |D_r u(y)| dy. \end{aligned}$$

□

Capitolo 2

Disuguaglianze di Morrey e John-Nirenberg

Nel presente capitolo affronteremo due importanti conseguenze di Poincaré, ovvero la disuguaglianza di Morrey e la disuguaglianza di John-Nirenberg. Entrambe trovano la loro più significativa applicazione nell'ambito della regolarità delle soluzioni di equazioni alle derivate parziali che studieremo successivamente.

Notazione 1. *Nel seguito indicheremo con $B_R(x)$ la palla aperta di raggio R e centro x .*

2.1 L'operatore V_μ e il Teorema di Morrey

Sia $\mu \in (0,1]$, definiamo l'operatore V_μ su $L^1(\Omega)$ tramite il potenziale di Riesz:

$$(V_\mu f)(x) = \int_\Omega |x - y|^{n(\mu-1)} f(y) dy. \quad (2.1)$$

Il fatto che V_μ sia ben posto e che mandi $L^1(\Omega)$ in se stesso segue direttamente dal prossimo lemma, inoltre ponendo $f \equiv 1$ in (2.1),

$$V_\mu 1 \leq \mu^{-1} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^\mu. \quad (2.2)$$

Scegliendo $R > 0$ così che $|\Omega| = |B_R(x)| = \omega_n R^n$ allora si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |x - y|^{n(\mu-1)} dy &\leq \int_{B_R(x)} |x - y|^{n(\mu-1)} dy \\ &= \mu^{-1} \omega_n R^{n\mu} \\ &= \mu^{-1} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^\mu. \end{aligned}$$

Lemma 1. *L'operatore V_μ è un funzionale continuo definito su $L^p(\Omega)$ a valori in $L^q(\Omega)$ per ogni q , con $1 \leq q \leq \infty$ tale che*

$$0 \leq \delta = \delta(p, q) = p^{-1} - q^{-1} < \mu. \quad (2.3)$$

Inoltre per ogni $f \in L^p(\Omega)$,

$$\|V_\mu f\|_q \leq \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^{\mu-\delta} \|f\|_p. \quad (2.4)$$

Dimostrazione. Scelto $r \geq 1$ tale che

$$r^{-1} = 1 + q^{-1} - p^{-1} = 1 - \delta.$$

Da ciò segue che $h(x-y) = |x-y|^{n(\mu-1)} \in L^p(\Omega)$ e da (2.2) si ottiene

$$\|h\|_r \leq \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^{\mu-\delta}.$$

La stima (2.4) si può dedurre scrivendo

$$h|f| = h^{r/q} h^{r(1-1/p)} |f|^{p/q} |f|^{p\delta},$$

utilizzando poi la disuguaglianza di Hölder

$$|V_\mu f(x)| \leq \left\{ \int_{\Omega} h^r(x-y) |f(y)|^p dy \right\}^{1/q} \left\{ \int_{\Omega} h^r(x-y) dy \right\}^{1-1/p} \left\{ \int_{\Omega} |f(y)|^p dy \right\}^\delta,$$

infine si ha

$$\begin{aligned} \|V_\mu f\|_q &\leq \sup_{\Omega} \left\{ \int h^r(x-y) dy \right\}^{1/r} \|f\|_p \\ &\leq \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^{\mu-\delta} \|f\|_p. \end{aligned}$$

□

2.2 Teorema di Morrey generalizzato e Teorema di John-Nirenberg 10

Possiamo provare ora il **Teorema di Morrey**

Teorema 6 (Teorema di Morrey). *Sia $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > n$. Allora $u \in C^\gamma(\bar{\Omega})$, dove $\gamma = 1 - n/p$. Inoltre, per ogni palla $B = B_R$*

$$\operatorname{osc}_{\Omega \cap B_R} u \leq CR^\gamma \|Du\|_p, \quad (2.5)$$

dove $C = C(n, p)$.

Dimostrazione. Mettendo insieme (1.3) e (2.4) per $S = \Omega = B$, $q = \infty$ e $\mu = n^{-1}$, abbiamo

$$|u(x) - u_B| \leq C(n, p)R^\gamma \|Du\|_p \quad q.d.(\Omega \cap B).$$

Arriviamo al risultato voluto sfruttando la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - u_B| + |u_B - u(y)| \\ &\leq 2C(n, p)R^\gamma \|Du\|_p \quad q.d.(\Omega \cap B). \end{aligned}$$

□

2.2 Teorema di Morrey generalizzato e Teorema di John-Nirenberg

Procediamo considerando l'operatore potenziale V_μ , definito precedentemente, su una tipologia diversa di spazi per poter poi dimostrare dei lemmi da cui seguono le disuguaglianze di Morrey (generale) e di John-Nirenberg.

Diciamo che la funzione integrabile f appartiene a $M^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, se esiste una costante K tale che

$$\int_{\Omega \cap B_R} |f| dx \leq KR^{n(1-1/p)} \quad (2.6)$$

per tutte le palle B_R . Definiamo poi la p norma $\|f\|_{M^p(\Omega)}$ come l'estremo inferiore delle costanti K che soddisfano (2.6).

Si nota facilmente che $L^p(\Omega) \subset M^p(\Omega)$, $L^1(\Omega) = M^1(\Omega)$, $L^\infty = M^\infty(\Omega)$.

Invece di considerare in dettaglio l'azione dell'operatore V_μ su uno spazio $M^p(\Omega)$ arbitrario, sarà sufficiente limitarci al caso $p \geq \mu^{-1}$.

2.2 Teorema di Morrey generalizzato e Teorema di John-Nirenberg 11

Lemma 2. *Sia $f \in M^p(\Omega)$, $\delta = p^{-1} < \mu$. Allora*

$$|V_\mu f(x)| \leq \frac{1-\delta}{\mu-\delta} (\text{diam}\Omega)^{n(\mu-\delta)} \|f\|_{M^p(\Omega)} \text{ q.d.}(\Omega) \quad (2.7)$$

Dimostrazione. Estendiamo f in modo tale che sia 0 al di fuori di Ω e scriviamo

$$\nu(\rho) = \int_{B_\rho} |f(y)| dy.$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} |V_\mu f(x)| &\leq \int_\Omega \rho^{n(\mu-1)} |f(y)| dy, \quad \rho = |x-y| \\ &= \int_0^d \rho^{n(\mu-1)} \nu'(\rho) d\rho, \quad d = \text{diam}\Omega \\ &= d^{n(\mu-1)} \nu(d) + n(1-\mu) \int_0^d \rho^{n(\mu-1)-1} \nu(\rho) d\rho \\ &\leq \frac{1-\delta}{\mu-\delta} d^{n(\mu-\delta)} K \text{ dalla (2.6)} \end{aligned}$$

□

Si arriva quindi al seguente Teorema che generalizza il Teorema 6

Teorema 7 (Teorema di Morrey generale). *Sia $u \in W^{1,1}(\Omega)$ e supponiamo che esistano due costanti positive K e α ($\alpha \leq 1$) tali che*

$$\int_{B_R} |Du| dx \leq K R^{n-1+\alpha} \text{ per ogni palla } B_R \subset \Omega \quad (2.8)$$

Allora $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, e per ogni palla $B_R \subset \Omega$

$$\text{osc}_{B_R} \leq C K R^\alpha, \quad (2.9)$$

dove $C = C(n, \alpha)$. Se $\Omega = \Phi \cap \mathbb{R}_+^n = \{x \in \Phi \mid x_n > 0\}$ per un qualche aperto $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ e (2.8) vale per tutte le palle $B_R \subset \Phi$, allora $u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega} \cap \Phi)$ e (2.9) vale per tutte le palle $B_R \subset \Phi$.

Il Teorema 7 si ottiene mettendo insieme la disuguaglianza di Poincaré ($S = \Omega$) con il Lemma 2.

Come conseguenza diretta del Lemma 2 abbiamo il seguente

2.2 Teorema di Morrey generalizzato e Teorema di John-Nirenberg¹²

Lemma 3. Sia $f \in M^p(\Omega)$ ($p > 1$) e $g = V_{\mu}f, \mu = p^{-1}$. Allora esistono due costanti c_1 e c_2 dipendenti solo da n e da p tali che

$$\int_{\Omega} \exp\left(\frac{|g|}{c_1 K}\right) dx \leq c_2 (\text{diam}\Omega)^n \quad (2.10)$$

dove $K = \|f\|_{M^p(\Omega)}$.

Dimostrazione. Scrivendo per ogni $q \geq 1$

$$|x - y|^{n(\mu-1)} = |x - y|^{(\mu/q-1)n/q} |x - y|^{n(1-1/q)(\mu/q+\mu-1)}$$

dalla disuguaglianza di Hölder si ottiene

$$|g(x)| \leq (V_{\mu/q}|f|)^{1/q} (V_{\mu+\mu/q}|f|)^{1-1/q}$$

Dal Lemma 2

$$\begin{aligned} V_{\mu+\mu/q}|f| &\leq \frac{(1-\mu)q}{\mu} d^{n/pq} K, \quad d = \text{diam}\Omega \\ &\leq (p-1)q d^{n/pq} K. \end{aligned}$$

Inoltre dal Lemma 1

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} V_{\mu/q}|f| dx &\leq pq\omega_n^{1-1/pq} |\Omega|^{1/pq} \|f\|_1 \\ &\leq pq\omega_n K d^{n(1-1/p+1/pq)}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |g|^q dx &\leq p(p-1)^{q-1} \omega_n q^q d^n K^q \\ &\leq p'\omega_n \{(p-1)qK\}^q d^n, \quad p' = p/(p-1). \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{m=0}^N \frac{|g|^m}{m!(c_1 K)^m} dx &\leq p'\omega_n d^n \sum_{m=0}^N \left(\frac{p-1}{c_1}\right)^m \frac{m^m}{m!} \\ &\leq c_2 d^n \text{ se } (p-1)e < c_1. \end{aligned}$$

Mandando poi $N \rightarrow \infty$ otteniamo (2.10). □

2.2 Teorema di Morrey generalizzato e Teorema di John-Nirenberg

Mettendo insieme la disuguaglianza di Poincaré e il Lemma 3 otteniamo finalmente il **Teorema di John-Nirenberg**

Teorema 8 (Teorema di John-Nirenberg). *Sia $u \in W^{1,1}(\Omega)$ dove Ω è convesso, e si suppone esista una costante K tale che*

$$\int_{\Omega \cap B_R} |Du| dx \leq KR^{n-1} \text{ per tutte le palle } B_R. \quad (2.11)$$

Allora esistono due costanti positive σ_0 e C che dipendono solo da n tali che

$$\int_{\Omega} \exp\left(\frac{\sigma}{K}|u - u_{\Omega}|\right) dx \leq C(\text{diam}\Omega)^n \quad (2.12)$$

dove $\sigma = \sigma_0|\Omega|(\text{diam}\Omega)^{-n}$.

Il riferimento del capitolo è [1].

Capitolo 3

Disuguaglianza di Harnack

Siamo interessati ora ad analizzare alcune importanti applicazioni dei risultati precedentemente ottenuti, concentrandoci sulle equazioni alle derivate parziali, che talvolta indicheremo più brevemente con la sigla PDE; in particolare ci interessa studiare alcune proprietà delle soluzioni deboli delle PDE.

Il presente capitolo è dedicato ad una conseguenza del Teorema di John-Nirenberg, la disuguaglianza di Harnack, che ci permette di vedere come sia possibile stimare dall'alto l'estremo superiore di una soluzione debole.

Inizieremo dunque richiamando la definizione di derivata parziale, successivamente definiremo le PDE prendendo in considerazione soprattutto le PDE del secondo ordine ellittiche e ne definiremo le relative soluzioni deboli per arrivare alla disuguaglianza debole di Harnack; questa infatti è importante per l'analisi delle proprietà locali di soluzioni deboli.

Infine generalizzeremo il risultato arrivando alla disuguaglianza di Harnack vera e propria.

3.1 Introduzione

Si consideri la funzione $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Dato $x \in \Omega$, chiamiamo **derivata parziale del primo ordine** [5]

$$\partial_{x_i} u = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h},$$

se il limite esiste. Per indicare tale derivata parziale, si utilizza una delle seguenti notazioni:

$$\partial_{x_i} u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i} = D_{x_i} u.$$

Le **derivate parziali del secondo ordine** hanno invece la seguente forma

$$\partial_{x_i x_j}^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u_{x_i x_j} = D_{x_i x_j} u.$$

Dati un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $|\alpha|$ il suo ordine, denotiamo con

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u(x),$$

la derivata parziale di ordine α . Denotiamo con

$$D^k u(x) = \{D^\alpha u(x) \mid |\alpha| = k\},$$

l'insieme di tutte le derivate parziali di ordine k .

3.2 Equazioni alle derivate parziali(PDE)

Siamo pronti ora per definire le PDE. [2]

Un'espressione della forma

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0 \quad (3.1)$$

è un'**equazione alle derivate parziali** di ordine k , dove

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

è una funzione nota, mentre la funzione $u(x)$ è incognita dal momento che si vuole determinarne l'espressione a partire dall'equazione stessa.

Definizione 9. Una PDE come in (3.1) si dice **lineare** se si presenta come

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x),$$

dove si assumono noti sia i coefficienti $a_\alpha(x)$ che la funzione $f(x)$. Se u e v sono soluzioni, allora per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vale che $\alpha u + \beta v$ è una soluzione.

Se la funzione $f \equiv 0$, allora la PDE si dice **omogenea** altrimenti la PDE si dice **non omogenea**.

Definizione 10. Una PDE come in (3.1) si dice **semi-lineare** se corrisponde a

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u + f(D^{k-1}u, D^{k-2}u, \dots, Du, u, x) = 0$$

dove si ha la linearità per il termine di ordine massimo, mentre si ha la non-linearità per i termini di ordine minore.

Definizione 11. Una PDE come in (3.1) si dice **quasi-lineare** se corrisponde a

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) D^\alpha u + f(D^{k-1}u, \dots, u, x) = 0,$$

dove si ha dipendenza non lineare per le derivate di ordine inferiore e coefficienti non lineari per il termine di ordine massimo.

Definizione 12. Una PDE come in (3.1) si dice **completamente non lineare** se non ricade in uno dei precedenti casi.

3.3 Classificazione delle PDE del secondo ordine

[5] Data una funzione $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la forma generale di una PDE del secondo ordine è la seguente

$$F(D^2u, Du, u, x) = 0.$$

Tale forma generale è equivalente a scrivere:

$$F(u_{x_i x_j}, u_{x_i}, u, x) = 0, \quad \text{per } i, j \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.2)$$

Dunque si hanno $n \times n$ e n alternative rispettivamente per i termini $u_{x_i x_j}$ e u_{x_i} .

Notazione 2. Indichiamo con $[F_{P_{ij}}]_{ij}$ la matrice di dimensione $n \times n$ dei coefficienti delle derivate di ordine massimo di una PDE come in (3.2), notiamo in particolare che essa è simmetrica.

Definizione 13. Una PDE come in (3.2) è un'equazione **ellittica** in $u(x)$ se è definita positiva la matrice

$$[F_{P_{ij}}(u_{x_i x_j}(x), u_i(x), u(x), x)]_{i,j=1,\dots,n}$$

Definizione 14. Una PDE come in (3.2) è un'equazione **iperbolica** se si verifica che la matrice $[F_{P_{ij}}]_{ij}$ ha esattamente 1 autovalore negativo e $n-1$ autovalori positivi.

Definizione 15. Un'equazione della forma $u_t = F(D^2u, Du, u, x)$ è detta **equazione parabolica** se $F(D^2u, Du, u, x) = 0$ è un'equazione ellittica.

3.4 Operatori ellittici

Prima di procedere ricordiamo il Teorema della divergenza in \mathbb{R}^n [1]

Teorema 9 (Teorema della divergenza). Sia Ω_0 un dominio limitato con bordo $\partial\Omega_0$ di classe C^1 ; sia ν la normale esterna a $\partial\Omega_0$.

Allora per ogni campo vettoriale \mathbf{w} in $C^1(\overline{\Omega_0})$ vale

$$\int_{\Omega_0} \operatorname{div} \mathbf{w} \, dx = \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{w} \cdot \nu \, ds \quad (3.3)$$

dove ds indica l'elemento d'area di dimensione $(n-1)$ in $\partial\Omega_0$

Ci concentriamo in particolare sugli operatori lineari ellittici, quindi della forma

$$Lu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u, \quad a^{ij} = a^{ji} \quad (3.4)$$

con $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ e supponiamo $u \in C^2$.

Essendo L ellittico in x per ipotesi, in accordo con la definizione data precedentemente, significa che se $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$ denotano rispettivamente l'autovalore minimo e massimo di $[a^{ij}(x)]$ si ha

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2$$

$\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Se $\lambda > 0$ in Ω allora L è ellittico in Ω ed è **strettamente ellittico** se $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ per una qualche costante λ_0 . Se Λ/λ è finito in Ω allora diciamo che L è **uniformemente ellittico** in Ω .

Nel seguito considereremo operatori lineari ellittici aventi la parte principale in forma della divergenza, cioè del tipo

$$Lu = D_i (a^{ij}(x)D_j u + b^i(x)u) + c^i(x)D_i u + d(x)u \quad (3.5)$$

dove si suppone che i coefficienti a^{ij}, b^i, c^i, d ($i, j = 1, \dots, n$) siano funzioni misurabili definite su Ω .

Un operatore L come in (3.4) può essere scritto nella forma (3.5) se i coefficienti a^{ij} sono differenziabili.

D'altra parte se in (3.5) i coefficienti a^{ij} e b^i sono differenziabili e la funzione $u \in C^2(\Omega)$ allora L può essere scritto nella forma generale (3.4), ad ogni modo la forma della divergenza possiede il vantaggio che l'operatore L in questo caso possa essere definito su una classe di funzioni significativamente più ampia di quella delle funzioni C^2 .

Infatti possiamo assumere che la funzione u sia semplicemente debolmente differenziabile e che le funzioni $a^{ij}D_j u + b^i u, c^i D_i u + du, i = 1, \dots, n$ siano localmente integrabili, allora, in senso **debole** o **generalizzato**, si dice che u soddisfa rispettivamente $Lu = 0$ ($\geq 0, \leq 0$) in Ω se:

$$\mathcal{L}(u, v) = \int_{\Omega} \{(a^{ij}D_j u + b^i u) D_i v - (c^i D_i u + du) v\} dx = 0 \quad (\leq 0, \geq 0)$$

per ogni funzione non negativa $v \in C_0^1(\Omega)$.

Supponendo che i coefficienti di L siano localmente integrabili, segue dal Teorema della divergenza (3.3) che se una funzione $u \in C^2(\Omega)$ soddisfa $Lu = 0$ ($\geq 0, \leq 0$) in senso classico, allora la soddisfa anche nel senso debole o generalizzato.

Infatti basta moltiplicare la (3.5) per una funzione test v e integrare per parti.

Inoltre, se i coefficienti a^{ij}, b^i hanno derivate localmente integrabili, allora una soluzione debole o generalizzata $u \in C^2(\Omega)$ è anche soluzione classica.

Siano ora $f^i, g, i = 1, \dots, n$ funzioni localmente integrabili in Ω .

Una funzione debolmente differenziabile u è chiamata **soluzione debole o generaliz-**

zato dell'equazione non omogenea

$$Lu = g + D_i f^i \quad (3.6)$$

in Ω se

$$\mathcal{L}(u, v) = F(v) = \int_{\Omega} (f^i D_i v - gv) dx \quad \forall v \in C_0^1(\Omega).$$

Come prima notiamo che una soluzione classica di (3.6) è anche soluzione generalizzata e viceversa che una soluzione generalizzata di classe C^2 è anche soluzione classica quando i coefficienti di L sono sufficientemente regolari.

Nel seguito ipotizzeremo che L sia strettamente ellittico in Ω ; cioè che esista un numero positivo λ tale che

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (3.7)$$

Assumeremo inoltre che i coefficienti di L siano limitati, ovvero che esistano delle costanti Λ e $\nu \geq 0$ per le quali $\forall x \in \Omega$

$$\sum |a^{ij}(x)|^2 \leq \Lambda^2, \quad \lambda^{-2} \sum (|b^i(x)|^2 + |c^i(x)|^2) + \lambda^{-1}|d(x)| \leq \nu^2 \quad (3.8)$$

[1]

3.5 Disuguaglianza debole di Harnack

Riscriviamo (3.6) nella forma

$$D_i A^i(x, u, Du) + B(x, u, Du) = 0 \quad (3.9)$$

dove

$$\begin{aligned} A^i(x, z, p) &= a^{ij}(x)p_j + b^i(x)z - f^i(x), \\ B(x, z, p) &= c^i(x)p_i + d(x)z - g(x), \end{aligned}$$

per $(x, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Una funzione debolmente differenziabile u è chiamata **sottosoluzione**(**soprasoluzione**, **soluzione**) debole dell'equazione (3.9) in Ω se le funzioni $A^i(x, u, Du)$ e $B(x, u, Du)$ sono localmente integrabili e vale

$$\int_{\Omega} (D_i v A^i(x, u, Du) - v B(x, u, Du)) dx \leq (\geq, =) 0 \quad (3.10)$$

per ogni $v \geq 0, \in C_0^1(\Omega)$.

Scriviamo $\mathbf{b}=(b^1, \dots, b^n), \mathbf{c}=(c^1, \dots, c^n), \mathbf{f}=(f^1, \dots, f^n)$ e usando la condizione (3.7) assieme alla disuguaglianza di Schwarz, otteniamo le seguenti stime

$$\begin{aligned} p_i A^i(x, z, p) &\geq \frac{\lambda}{2} |p|^2 - \frac{1}{\lambda} (|\mathbf{b}z|^2 + |\mathbf{f}|^2) \\ |B(x, z, p)| &\leq |\mathbf{c}| |p| + |dz| + |g|. \end{aligned} \quad (3.11)$$

L'equazione (3.6) deve soddisfare le disuguaglianze (3.11).

Possiamo inoltre semplificare la forma di queste disuguaglianze scrivendo

$$\bar{z} = |z| + k, \quad \bar{b} = \lambda^{-2} (|\mathbf{b}|^2 + |c|^2 + k^{-2} |f|^2) + \lambda^{-1} (|d| + k^{-1} |g|) \quad (3.12)$$

per qualche $k > 0$.

Otteniamo quindi, per ogni $0 < \epsilon < 1$,

$$\begin{aligned} p_i A^i(x, z, p) &\geq \frac{\lambda}{2} (|p|^2 - 2\bar{b}\bar{z}^2), \\ |\bar{z}B(x, z, p)| &\leq \frac{\lambda}{2} \left(\epsilon |p|^2 + \frac{\bar{b}}{\epsilon} \bar{z}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Denotiamo ora la matrice dei coefficienti $[a^{ij}(x)]$ con $a(x), x \in \Omega$, aggiungiamo alle disuguaglianze (3.11) e (3.13) la seguente

$$|A(x, z, p)| \leq |a| |p| + |\mathbf{b}z| + |\mathbf{f}|. \quad (3.14)$$

Dividendo (3.6) per la costante $\lambda/2$, possiamo assumere $\lambda = 2$, quindi dalle (3.11), (3.13), (3.14) otteniamo

$$\begin{aligned} |A(x, z, p)| &\leq |a| |p| + 2(\bar{b})^{1/2} \bar{z}, \\ p \cdot A(x, z, p) &\geq |p|^2 - 2\bar{b}\bar{z}^2, \\ |\bar{z}B(x, z, p)| &\leq \epsilon |p|^2 + \frac{1}{\epsilon} \bar{b}\bar{z}^2, \end{aligned} \quad (3.15)$$

per ogni $0 < \epsilon \leq 1$, dove \bar{z} e \bar{b} sono definiti da (3.12) con $\lambda = 2$.

In seguito considereremo la quantità k definita in questo modo

$$k = k(R) = \lambda^{-1} (R^\delta \| \mathbf{f} \|_q + R^{2\delta} \| g \|_{q/2}) \quad (3.16)$$

dove $R > 0$ e $\delta = 1 - n/q$.

Teorema 10. *Supponiamo che l'operatore L soddisfi le condizioni (3.7) e (3.8) e consideriamo $f^i \in L^q(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$, $g \in L^{q/2}(\Omega)$ per qualche $q > n$. Allora se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ ed è una sottosoluzione (soprasoluzione) dell'equazione (3.6) in Ω , abbiamo, per ogni palla $B_{2R}(y) \subset \Omega$ e $p > 1$*

$$\sup_{B_R(y)} u(-u) \leq C(R^{-n/p} \|u^+(u^-)\|_{L^p(B_{2R}(y))} + k(r)) \quad (3.17)$$

dove $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu R, q, p)$.

Enunciamo il seguente Lemma che ci servirà in seguito

Lemma 4. *Sia Ω un dominio limitato di \mathbb{R}^n . Se u è una funzione misurabile definita su Ω tale che $|u|^p \in L^1(\Omega)$ per qualche $p \in \mathbb{R}$ definiamo*

$$\Phi_p(u) = \left[\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u|^p dx \right]^{1/p}.$$

Allora valgono le seguenti

1. $\lim_{p \rightarrow \infty} \Phi_p(u) = \sup_{\Omega} |u|$;
2. $\lim_{p \rightarrow -\infty} \Phi_p(u) = \inf_{\Omega} |u|$.

Arriviamo dunque al risultato cruciale per lo studio delle proprietà locali di soluzioni deboli: la **disuguaglianza debole di Harnack**

Teorema 11 (Disuguaglianza debole di Harnack). *Supponiamo che l'operatore L soddisfi le condizioni (3.7) e (3.8) e consideriamo $f^i \in L^q(\Omega)$, $g \in L^{q/2}(\Omega)$ per qualche $q > n$. Allora se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ ed è una soprasoluzione dell'equazione (3.6) in Ω non negativa in una palla $B_{4R}(y) \subset \Omega$ e $1 \leq p < n/(n-2)$, abbiamo la seguente disuguaglianza*

$$R^{-n/p} \|u\|_{L^p(B_{2R}(y))} \leq C \left(\inf_{B_R(y)} u + k(R) \right) \quad (3.18)$$

dove $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu R, q, p)$.

Dimostrazione. Per il caso in cui nel Teorema 10 si considera una sottosoluzione u limitata e non negativa, conviene dimostrare il Teorema 10 assieme alla disuguaglianza debole di Harnack.

Invece il caso più generale del Teorema 10 si può ottenere semplicemente variando le funzioni test utilizzate durante la dimostrazione.

Assumiamo inizialmente $R = 1$ e $k = 0$.

Il caso generale si ottiene mediante una semplice trasformazione del tipo $x \rightarrow x/R$ e mandando k a zero.

Definiamo, per $\beta \neq 0$ e per una funzione non negativa $\eta \in C_0^1(B_4)$ la seguente funzione test

$$v = \eta^2 \bar{u}^\beta \quad (\bar{u} = u + k). \quad (3.19)$$

Grazie alle regole della catena e del prodotto, possiamo dire che v sia una valida funzione test per l'equazione (3.10) e inoltre

$$Dv = 2\eta D\eta \bar{u}^\beta + \beta \eta^2 \bar{u}^{\beta-1} Du, \quad (3.20)$$

e sostituendo in (3.10) otteniamo

$$\begin{aligned} \beta \int_{\Omega} \eta^2 \bar{u}^{\beta-1} Du \cdot A(x, u, Du) dx + 2 \int_{\Omega} \eta D\eta \cdot A(x, u, Du) \bar{u}^\beta dx \\ - \int_{\Omega} \eta^2 \bar{u}^\beta B(x, u, Du) dx \\ \leq 0 \text{ se } u \text{ una sottosoluzione,} \\ \geq 0 \text{ se } u \text{ una soprasoluzione.} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Usando le disuguaglianze (3.15), possiamo scrivere, per ogni $0 < \epsilon \leq 1$,

$$\begin{aligned} \eta^2 \bar{u}^{\beta-1} Du \cdot A(x, u, Du) &\geq \eta^2 \bar{u}^{\beta-1} |Du|^2 - 2\bar{b} \eta^2 \bar{u}^{\beta+1} \\ |\eta D\eta \cdot A(x, u, Du) \bar{u}^\beta| &\leq |a| \eta |D\eta| \bar{u}^\beta |Du| + 2\bar{b}^{1/2} \eta |D\eta| \bar{u}^{\beta+1} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \eta^2 \bar{u}^{\beta-1} |Du|^2 + \left(1 + \frac{|a|^2}{2\epsilon}\right) |D\eta|^2 \bar{u}^{\beta+1} \\ &\quad + \bar{b} \eta^2 \bar{u}^{\beta+1} \\ |\eta^2 \bar{u}^\beta B(x, u, Du)| &\leq \epsilon \eta^2 \bar{u}^{\beta-1} |Du|^2 + \frac{1}{\epsilon} \bar{b} \eta^2 \bar{u}^{\beta+1} \end{aligned} \quad (3.22)$$

D'ora in poi assumiamo $\beta > 0$ se u è una sottosoluzione e $\beta < 0$ se u è una soprasoluzione. Scegliendo $\epsilon = \min\{1, |\beta|/4\}$, otteniamo dalla (3.21) e dalla (3.22)

$$\int_{\Omega} \eta^2 \bar{u}^{\beta-1} |Du|^2 dx \leq C(|\beta|) \int_{\Omega} (\bar{b} \eta^2 + (1 + |a|^2) |D\eta|^2) \bar{u}^{\beta+1} dx, \quad (3.23)$$

Introduciamo ora la seguente funzione w

$$w = \begin{cases} \bar{u}^{(\beta+1)/2} & \text{se } \beta \neq -1, \\ \log \bar{u} & \text{se } \beta = -1 \end{cases}$$

Ponendo $\gamma = \beta + 1$ possiamo riscrivere la (3.23)

$$\int_{\Omega} |\eta Dw|^2 dx \leq \begin{cases} C(|\beta|)\gamma^2 \int_{\Omega} (\bar{b}\eta^2 + (1 + |a|^2)|D\eta|^2)w^2 dx & \text{se } \beta \neq -1 \\ C \int_{\Omega} (\bar{b}\eta^2 + (1 + |a|^2)|D\eta|^2) dx & \text{se } \beta = -1 \end{cases} \quad (3.24)$$

Dalla prima parte di (3.24) e utilizzando la disuguaglianza di Sobolev abbiamo

$$\| \eta w \|_{2\hat{n}/(\hat{n}-2)}^2 \leq C \int_{\Omega} (|\eta Dw|^2 + |w D\eta|^2) dx$$

Dove $\hat{n} = n$ per $n > 2$, $2 < \hat{n} < q$ e $C = C(\hat{n})$. Usando la disuguaglianza di Hölder e la disuguaglianza di interpolazione (1.2), otteniamo, per ogni $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \bar{b}(\eta w)^2 dx &\leq \| \bar{b} \|_{q/2} \| \eta w \|_{2q/(q-2)}^2 \\ &\leq \| \bar{b} \|_{q/2} (\epsilon \| \eta w \|_{2\hat{n}/(\hat{n}-2)} + \epsilon^{-\sigma} \| \eta w \|_2)^2 \end{aligned}$$

dove $\sigma = \hat{n}(q - \hat{n})$.

Quindi sostituendo in (3.24) per una scelta appropriata di ϵ ,

$$\| \eta w \|_{2\hat{n}/(\hat{n}-2)} \leq C(1 + |\gamma|)^{\sigma+1} \| (\eta + |D\eta|w) \|_2 \quad (3.25)$$

dove $C = C(\hat{n}, \Lambda, \nu, q, |\beta|)$.

A questo punto conviene definire la funzione cut-off η più nello specifico. Siano r_1, r_2 tali che $1 \leq r_1 < r_2 \leq 3$ e poniamo $\eta \equiv 1$ in B_{r_1} , $\eta \equiv 0$ in $\Omega - B_{r_2}$ con $|D\eta| \leq 2/(r_2 - r_1)$.

Scrivendo $\chi = \hat{n}/(\hat{n} - 2)$ tramite la (3.25) risulta

$$\| w \|_{L^{2\chi}(B_{r_1})} \leq \frac{C(1 + |\gamma|)^{\sigma+1}}{r_2 - r_1} \| w \|_{L^2(B_{r_2})}. \quad (3.26)$$

Per $r < 4$ e $p \neq 0$ introduciamo la seguente quantità

$$\Phi(p, r) = \left(\int_{B_r} |\bar{u}|^p dx \right)^{1/p} \quad (3.27)$$

Da 4 abbiamo

$$\Phi(\infty, r) = \lim_{p \rightarrow \infty} \Phi(p, r) = \sup_{B_r} \bar{u},$$

e

$$\Phi(-\infty, r) = \lim_{p \rightarrow -\infty} \Phi(p, r) = \inf_{B_r} \bar{u}$$

Successivamente, dalla disuguaglianza (3.26) si ha

$$\begin{aligned} \Phi(\chi\gamma, r_1) &\leq \left(\frac{C(1 + |\gamma|)^{\sigma+1}}{r_2 - r_1} \right)^{2/|\gamma|} \Phi(\gamma, r_2) \text{ se } \gamma > 0 \\ \Phi(\gamma, r_2) &\leq \left(\frac{C(1 + |\gamma|)^{\sigma+1}}{r_2 - r_1} \right)^{2/|\gamma|} \Phi(\chi\gamma, r_1) \text{ se } \gamma < 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Queste disuguaglianze possono essere iterate per ottenere le stime desiderate.

Per esempio, quando u è una sottosoluzione abbiamo $\beta > 0$ e $\gamma > 1$. Quindi, prendendo $p > 1$ poniamo $\gamma = \gamma_m = \chi^m p$ e $r_m = 1 + 2^{-m}$, $m = 0, 1, \dots$, così, dalla disuguaglianza (3.28),

$$\begin{aligned} \Phi(\chi^m p, 1) &\leq (C\chi)^{2(1+\sigma)\chi^{-m}p^{-1}} \Phi(p, 2) \\ &= C\Phi(p, 2), \quad C = C(\hat{n}, \Lambda, \nu, q, p). \end{aligned}$$

Mandando poi m a ∞

$$\sup_{B_1} \bar{u} \leq C \| \bar{u} \|_{L^p(B_2)}, \quad (3.29)$$

e considerando la trasformazione $x \rightarrow x/R$ si ottiene la (3.17).

Nel caso in cui u sia soprasoluzione, cioè quando $\beta < 0$ e $\gamma < 1$ possiamo dimostrarlo in modo simile, per ogni p, p_0 tali che $0 < p_0 < p < \chi$,

$$\Phi(p, 2) \leq C\Phi(p_0, 3) \quad (3.30)$$

$$\Phi(-p_0, 3) \leq C\Phi(-\infty, 1), \quad C = C(\hat{n}, \Lambda, q, p, p_0). \quad (3.31)$$

Arriviamo alla conclusione della dimostrazione della disuguaglianza debole di Harnack se mostriamo che, per qualche $p_0 > 0$

$$\Phi(p_0, 3) \leq C\Phi(-p_0, 3) \quad (3.32)$$

Per arrivare alla (3.30) consideriamo la seconda disuguaglianza (3.24).

Sia B_{2r} una palla di raggio $2r$, inclusa in $B_4(= B_4(y))$, e scelta la funzione di cut off η tale che $\eta \equiv 1$ in B_r , $\eta \equiv 0$ in $\Omega - B_4$ e $|D\eta| \leq 2/r$. Da (3.24) e dalla disuguaglianza di Hölder

$$\int_{B_r} |Dw| dx \leq Cr^{n/2} \left(\int_{B_r} |Dw|^2 dx \right)^{1/2} \quad (3.33)$$

$$\leq Cr^{n-1}, \quad C = C(n, \Lambda, \nu). \quad (3.34)$$

Quindi per il Teorema di John-Nirenberg, esiste una costante $p_0 > 0$ dipendente da n, Λ e ν tali che, per

$$w_0 = \frac{1}{|B_3|} \int_{B_3} w dx,$$

si ha

$$\int_{B_3} e^{p_0|w-w_0|} dx \leq C(n, \Lambda, \nu),$$

quindi

$$\int_{B_3} e^{p_0 w} dx \int_{B_3} e^{-p_0 w} dx \leq C e^{p_0 w_0} e^{-p_0 w_0} = C.$$

Richiamando la definizione di w , otteniamo finalmente (3.32) e di conseguenza la (3.18), con $R = 1$ e $k > 0$. Il risultato completo segue considerando la trasformazione $x \rightarrow x/R$ e mandando k a zero. \square

3.6 Disuguaglianza di Harnack

Arriviamo finalmente al risultato cercato mettendo insieme il Teorema 10 e la disuguaglianza debole di Harnack

Teorema 12 (Disuguaglianza di Harnack). *Supponiamo che l'operatore L soddisfi le condizioni (3.7) e (3.8) e sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tale che $u \geq 0$ in Ω e $Lu = 0$ in Ω . Allora per ogni palla $B_{4R}(y) \subset \Omega$ vale la seguente*

$$\sup_{B_R(y)} u \leq C \inf_{B_R(y)} u \quad (3.35)$$

dove $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu R)$.

Da (3.33) e da (3.25) possiamo dedurre che la costante C possa essere stimata in questo modo

$$C \leq C_0^{(\Lambda/\lambda + \nu R)}, \quad C_0 = C_0(n)$$

Dal Teorema 12 deriviamo la seguente forma della disuguaglianza di Harnack

Corollario 13. *Supponiamo che L e u soddisfino le ipotesi del Teorema 12. Allora per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$ abbiamo che*

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u \tag{3.36}$$

dove C è una costante positiva e si ha $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu, \Omega', \Omega)$.

Arriviamo dunque alla seguente conclusione:

l'estremo superiore di u è limitato dall'alto dal suo estremo inferiore moltiplicato per una certa costante C positiva che dipende dalla dimensione del problema, dal rapporto tra l'autovalore massimo e l'autovalore minimo, dalla costante ν definita in (3.8), da un sottoinsieme compattamente contenuto nel dominio e dal dominio stesso.

(Il riferimento dell'intero capitolo è [1] a meno di alcune definizioni scritte all'inizio del capitolo per le quali ho riportato gli specifici riferimenti)

L'importanza della disuguaglianza di Harnack risiede nella possibilità di derivare da essa stime Hölderiane per le soluzioni di PDE, le quali rappresentano lo scopo ultimo della presente tesi e di cui parleremo nel prossimo capitolo.

Capitolo 4

Hölderianità delle soluzioni di PDE

Giungiamo dunque all'ultimo capitolo in cui possiamo finalmente dedurre le stime Hölderiane cercate.

Iniziamo col dare la definizione di funzione Hölder continua e definiamo poi gli spazi di Hölder.

Sia f una funzione definita su Ω e sia $x_0 \in \Omega$. Se $0 < \alpha < 1$ diciamo che f è **Hölder continua o Hölderiana con esponente α in x_0** se la quantità

$$[f]_{\alpha; x_0} = \sup_{\Omega} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} \quad (4.1)$$

è finita. Chiaramente se f è Hölder continua in x_0 , allora f è continua in x_0 .

La definizione di Hölderianità può essere estesa su tutto il dominio. Diciamo infatti che f è **uniformemente Hölder continua con esponente α in Ω** se la quantità

$$[f]_{x; \Omega} = \sup_{x, y \in \Omega; x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (4.2)$$

è finita, ed è **localmente Hölder continua con esponente α in Ω** se f è uniformemente Hölder continua con esponente α su ogni sottoinsieme compatto contenuto in Ω .

Ovviamente se Ω è compatto le due definizioni coincidono.

Sia k un intero non negativo, gli **spazi di Hölder** $C^{k, \alpha}(\overline{\Omega})$ ($C^{k, \alpha}(\Omega)$) sono sottoinsiemi di $C^k(\overline{\Omega})$ ($C^k(\Omega)$) contenenti le funzioni le cui derivate parziali di ordine k sono uniformemente Hölder continue (localmente Hölder continue) con esponente α . Per semplicità scriviamo

$$C^{0, \alpha}(\Omega) = C^\alpha(\Omega) \quad C^{0, \alpha}(\overline{\Omega}) = C^\alpha(\overline{\Omega})$$

4.1 Hölderianità interna

Siamo pronti ora per focalizzarci sulle stime Hölderiane; divideremo l'analisi tra le stime definite sull'interno di Ω e in un secondo momento ci concentreremo su quelle al bordo.

Abbiamo il primo risultato importante che ci permette di vedere che sotto certe condizioni una soluzione debole è localmente Hölder continua

Teorema 14. *Supponiamo che l'operatore L soddisfi le condizioni (3.7) e (3.8) e siano $f^i \in L^q(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$, $g \in L^{q/2}(\Omega)$ per qualche $q > n$. Allora se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ è una soluzione dell'equazione (3.6) in Ω , u è localmente Hölder continua in Ω e per ogni palla $B_0 = B_{R_0}(y) \subset \Omega$ e $R \leq R_0$ abbiamo che*

$$\operatorname{osc}_{B_R(y)} u \leq CR^\alpha (R_0^{-\alpha} \sup_{B_0} |u| + k) \quad (4.3)$$

dove $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu, q, R_0)$ e $\alpha = \alpha(n, \Lambda/\lambda, \nu R_0, q)$ sono costanti positive e $k = \lambda^{-1}(\|f\|_q + \|g\|_{q/2})$.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità possiamo assumere che $R \leq R_0/4$.

Definiamo poi $M_0 = \sup_{B_0} |u|$, $M_4 = \sup_{B_{4R}} u$, $m_4 = \inf_{B_{4R}} u$, $M_1 = \sup_{B_R} u$, $m_1 = \inf_{B_R} u$. Allora abbiamo le seguenti

$$\begin{aligned} L(M_4 - u) &= M_4(D_i b^i + d) - D_i f^i - g \\ L(u - m_4) &= -m_4(D_i b^i + d) + D_i f^i + g. \end{aligned}$$

Quindi se poniamo

$$\begin{aligned} \bar{k}(R) &= \lambda^{-1} R^\delta (\|f\|_q + M_0 \|b\|_q) + \lambda^{-1} R^{2\delta} (\|g\|_{q/2} + M_0 \|d\|_{q/2}), \\ \delta &= 1 - n/q \end{aligned}$$

e applichiamo la disuguaglianza di Harnack (3.18) con $p = 1$ alle funzioni $M_4 - u$, $u - m_4$ in B_{4R} , otteniamo

$$\begin{aligned} R^{-n} \int_{B_{2R}} (M_4 - u) dx &\leq C(M_4 - M_1 + \bar{k}(R)), \\ R^{-n} \int_{B_{2R}} (u - m_4) dx &\leq C(m_1 - m_4 + \bar{k}(R)). \end{aligned}$$

Dunque

$$M_4 - m_4 \leq C(M_4 - m_4 + m_1 - M_1 + \bar{k}(R))$$

e scrivendo

$$\omega(R) = \operatorname{osc}_{B_R(y)} u = M_1 - m_1$$

abbiamo

$$\omega(R) \leq \gamma\omega(4R) + \bar{k}(R)$$

dove $\gamma = 1 - C^{-1}$, $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu R_0, q)$.

Infine dal seguente Lemma si deduce il risultato voluto. \square

Lemma 5. *Sia ω una funzione non decrescente su un intervallo $(0, R_0]$ soddisfacente , $\forall R \leq R_0$, la seguente disuguaglianza*

$$\omega(\tau R) \leq \gamma\omega(R) + \sigma(R) \quad (4.4)$$

dove anche σ è non decrescente e $0 < \gamma, \tau < 1$. Allora, per ogni $\mu \in (0, 1)$ e $R \leq R_0$ abbiamo

$$\omega(R) \leq C \left(\left(\frac{R}{R_0} \right)^\alpha \omega(R_0) + \sigma(R^\mu R_0^{1-\mu}) \right) \quad (4.5)$$

dove $C = C(\gamma, \tau)$ e $\alpha = \alpha(\gamma, \tau, \mu)$ sono costanti positive.

Dimostrazione. Fissiamo inizialmente i numeri $R_1 \leq R_0$. Allora per ogni $R \leq R_1$ abbiamo

$$\omega(\tau R) \leq \gamma\omega(R) + \sigma(R_1)$$

dato che σ è non decrescente. Possiamo iterare questa disuguaglianza per ottenere, per ogni intero positivo m ,

$$\begin{aligned} \omega(\tau^m R_1) &\leq \gamma^m \omega(R_1) + \sigma(R_1) \sum_{i=0}^{m-1} \gamma^i \\ &\leq \gamma^m \omega(R_0) + \frac{\sigma(R_1)}{1-\gamma}. \end{aligned}$$

Per ogni $R \leq R_1$ possiamo scegliere m tale che

$$\tau^m R_1 < R \leq \tau^{m-1} R_1.$$

Dunque

$$\begin{aligned}\omega(R) &\leq \omega(\tau^{m-1}R_1) \\ &\leq \gamma^{m-1}\omega(R_0) + \frac{\sigma(R_1)}{1-\gamma} \\ &\leq \frac{1}{\gamma} \left(\frac{R}{R_1}\right)^{\log \gamma / \log \tau} \omega(R_0) + \frac{\sigma(R_1)}{1-\gamma}.\end{aligned}$$

Ora sia $R_1 = R_0^{1-\mu}R^\mu$ così da ottenere

$$\omega(R) \leq \frac{1}{\gamma} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{(1-\mu)(\log \gamma / \log \tau)} \omega(R_0) + \frac{\sigma(R_0^{1-\mu}R^\mu)}{1-\gamma}.$$

□

Il Teorema 14 segue scegliendo μ tale che $(1-\mu)\log \gamma / \log \tau < \mu\delta$.

Mettendo insieme i Teoremi 10 e 14 abbiamo la seguente stima Hölderiana interna per le soluzioni deboli dell'equazione (3.6).

Teorema 15. *Supponiamo che l'operatore L soddisfi le condizioni (3.7) e (3.8) e siano $f^i \in L^q(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$, $g \in L^{q/2}(\Omega)$ per qualche $q > n$. Allora se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ soddisfa l'equazione (3.6) in Ω , si ha che per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$*

$$\|u\|_{C^\alpha(\overline{\Omega'})} \leq C(\|u\|_{L^2(\Omega)} + k), \quad (4.6)$$

dove $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu, q, d')$, $d' = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, $\alpha = \alpha(n, \Lambda/\lambda, \nu d') > 0$ e $k = \lambda^{-1}(\|f\|_q + \|g\|_{q/2})$.

Dimostrazione. La (4.6) segue dal Teorema 14 prendendo $R_0 = d'$ e usando il Teorema 10 per stimare $\sup |u|$. □

4.2 Hölderianità al bordo

Ora vediamo cosa succede quando consideriamo $\partial\Omega$.

Prima però ci servono alcune nozioni fondamentali

Definizione 16. Diciamo che $u \in W^{1,2}(\Omega)$ soddisfa $u \leq 0$ su $\partial\Omega$ se la sua parte positiva $u^+ = \max\{u, 0\} \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Se u è continua in $\partial\Omega$ allora u soddisfa $u \leq 0$ su $\partial\Omega$ se la disuguaglianza è verificata nel senso classico.

Osservazione 4.2.0.1. Notiamo che altre definizioni di disuguaglianze su $\partial\Omega$ seguono direttamente dalla precedente. Per esempio $u \geq 0$ su $\partial\Omega$ se $-u \leq 0$ su $\partial\Omega$; $u \leq v \in W^{1,2}(\Omega)$ su $\partial\Omega$ se $u - v \leq 0$ su $\partial\Omega$.

Sia ora T un sottoinsieme di $\bar{\Omega}$ e u una funzione in $W^{1,2}(\Omega)$. Allora possiamo dire che $u \leq 0$ su T nel senso di $W^{1,2}(\Omega)$ se u^+ è il limite in $W^{1,2}(\Omega)$ di una successione di funzioni in $C_0^1(\bar{\Omega} - T)$.

Osserviamo che se u è continua in T questa definizione è soddisfatta se $u \leq 0$ su T nel senso usuale.

Quando $T = \partial\Omega$ questa definizione coincide con quella data prima.

Enunciamo i seguenti Teoremi che estendono il Teorema 10 e la disuguaglianza debole di Harnack

Teorema 16. Supponiamo che l'operatore L soddisfi le condizioni (3.7) e (3.8) e siano $f^i \in L^q(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$, $g \in L^{q/2}(\Omega)$ per qualche $q > n$. Allora se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ è una sottosoluzione dell'equazione (3.6) in Ω abbiamo che per ogni $y \in R^n$, $R > 0$ e $p > 1$

$$\sup_{B_R(y)} u_M^+ \leq C(R^{-n/p} \|u_M^+\|_{L^p(B_{2R}(y))} + k(R)) \quad (4.7)$$

dove

$$M = \sup_{\partial\Omega \cap B_{2R}} u^+,$$

$$u_M^+(x) = \begin{cases} \sup\{u(x), M\}, & x \in \Omega, \\ M, & x \notin \Omega, \end{cases} \quad (4.8)$$

e k è definita dalla (3.16), $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu R, qp)$.

Teorema 17. Supponiamo che l'operatore L soddisfi le condizioni (3.7) e (3.8) e siano $f^i \in L^q(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$, $g \in L^{q/2}(\Omega)$ per qualche $q > n$. Allora se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ è una

soprasoluzione dell'equazione (3.6) in Ω ed è non negativa in $\Omega \cap B_{4R}(y)$ per qualche palla $B_{4R}(y) \subset \mathbb{R}^n$, abbiamo, per ogni p tale che $1 \leq p < n/(n-2)$,

$$R^{-n/p} \|u_m^-\|_{L^p(B_{2R}(y))} \leq C \left(\inf_{B_R(y)} u_m^- + k(R) \right) \quad (4.9)$$

dove

$$m = \inf_{\partial\Omega \cap B_{4R}} u, \quad u_m^-(x) = \begin{cases} \inf\{u(x), m\}, & x \in \Omega, \\ m, & x \notin \Omega, \end{cases} \quad (4.10)$$

e $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu R, q, p)$.

Dimostrazione. Poniamo $\bar{u} = u_m^+ + k$ se u è una sottosoluzione e $\bar{u} = u_m^- + k$ se u è una soprasoluzione. Allora scegliamo

$$v = \eta^2 \begin{cases} \bar{u}^\beta - (M+k)^\beta & \text{se } \beta > 0 \\ \bar{u}^\beta - (m+k)^\beta & \text{se } \beta < 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

dove $\eta \in C_0^1(B_{4R})$. Dato che la (3.15) è definita sul supporto di v , per $\bar{z} = \bar{u}$ e $p = Du$, e dato che $v \leq \eta^2 \bar{u}^\beta$ deduciamo la (3.23) per \bar{u} . Le stime volute (4.7) e (4.9) sono ottenute come nella dimostrazione del Teorema 10 e della disuguaglianza debole di Harnack. \square

Diciamo che Ω soddisfa una **condizione di cono esterno** in un punto $x_0 \in \partial\Omega$ se esiste un cono circolare finito $V = V_{x_0}$ di vertice x_0 tale che $\bar{\Omega} \cap V_{x_0} = x_0$.

Un esempio di dominio che soddisfa una condizione di cono esterno è la palla euclidea. Arriviamo quindi alla seguente stima Hölderiana, estensione di quella vista precedentemente (4.3)

Teorema 18. *Supponiamo che l'operatore L soddisfi le condizioni (3.7) e (3.8) e siano $f^i \in L^q(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$, $g \in L^{q/2}(\Omega)$ per qualche $q > n$. Allora se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ è una soluzione dell'equazione (3.6) in Ω e Ω soddisfa la condizione di cono esterno in un punto $x_0 \in \partial\Omega$ abbiamo che per ogni $0 < R \leq R_0$ e $B_0 = B_{R_0}(x_0)$,*

$$\operatorname{osc}_{\Omega \cap B_R} u \leq C \left\{ R^\alpha (R_0^{-\alpha} \sup_{\Omega \cap B_0} |u| + k) + \sigma(\sqrt{RR_0}) \right\} \quad (4.12)$$

dove $\sigma(R) = \operatorname{osc}_{\partial\Omega \cap B_R(x_0)} u$ e $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu, q, R_0, V_{x_0})$, $\alpha = \alpha(n, \Lambda/\lambda, \nu R_0, q, V_{x_0})$ sono costanti positive.

Nel seguito abbreviamo $\Omega \cap B_r(x_0) = \Omega_R$ per ogni R , $\partial\Omega \cap B_R(x_0) = (\partial\Omega)_R$ con $x_0 \in \partial\Omega$.

Dimostrazione. Inizialmente assumiamo che $R \leq \inf\{R_0/4, \text{altezza di } V_{x_0}\}$ e scriviamo $M_0 = \sup_{\Omega_{R_0}} |u|$, $M_4 = \sup_{\Omega_{4R}} u$, $m_4 = \inf_{\Omega_{4R}} u$, $M_1 = \sup_{\Omega_R} u$, $m_1 = \inf_{\Omega_R} u$. Applicando poi la (4.9) alle funzioni $M_4 - u$, $u - m_4$ in $B_{4R}(x_0)$ otteniamo

$$\begin{aligned} (M_4 - M) \frac{|B_{2R}(x_0) - \Omega|}{R^n} &\leq R^{-n} \int_{B_{2R}(x_0)} (M_4 - u)_{M_4 - M}^- dx \\ &\leq C(M_4 - M_1 + \bar{k}(R)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m - m_4) \frac{|B_{2R}(x_0) - \Omega|}{R^n} &\leq R^{-n} \int_{B_{2R}(x_0)} (u - m_4)_{m - m_4}^- dx \\ &\leq C(m_1 - m_4 + \bar{k}(R)) \end{aligned}$$

dove $M = \sup_{(\partial\Omega)_{4R}} u$, $m = \inf_{(\partial\Omega)_{4R}} u$. Usando la condizione di cono esterno abbiamo

$$\begin{aligned} M_4 - M &\leq C(M_4 - M_1 + \bar{k}(R)) \\ m - m_4 &\leq C(m_1 - m_4 + \bar{k}(R)) \end{aligned}$$

sommandoli risulta

$$\text{osc}_{\Omega_R} u \leq \gamma \text{osc}_{\Omega_{4R}} u + \bar{k}(R) + \text{osc}_{(\partial\Omega)_{4R}} u, \quad (4.13)$$

dove $\gamma = 1 - 1/C$, $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu R_0, q, V_{x_0})$.

Infine la (4.12) segue dal Lemma 5 . □

Da questo Teorema è possibile ottenere una stima Hölderiana uniforme sotto certe ipotesi per Ω .

Diciamo che Ω soddisfa una **condizione uniforme di cono esterno** su $T \subset \partial\Omega$ se Ω soddisfa una condizione di cono esterno per ogni $x_0 \in T$ e i coni V_{x_0} sono tutti congruenti su un certo cono fissato V .

Arriviamo dunque alla seguente stima che generalizza il Teorema 15

Teorema 19. *Supponiamo che l'operatore L soddisfi le condizioni (3.7) e (3.8) e siano $f^i \in L^q(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$, $g \in L^{q/2}(\Omega)$ per qualche $q > n$. Se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ è una soluzione*

dell'equazione (3.6) in Ω e Ω soddisfa una condizione uniforme di cono esterno su T , esistono due costanti $K, \alpha_0 > 0$ tali che

$$\operatorname{osc}_{\partial\Omega \cap B_R(x_0)} u \leq KR^{\alpha_0} \quad \forall x_0 \in T, R > 0, \quad (4.14)$$

segue dunque che $u \in C^\alpha(\Omega \cup T)$ per qualche $\alpha > 0$ e per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega \cup T$,

$$\|u\|_{C^\alpha(\Omega')} \leq C(\sup_\Omega |u| + K + k) \quad (4.15)$$

dove $\alpha = \alpha(n, \Lambda/\lambda, \nu d', V, q, \alpha_0)$, $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu, V, q, \alpha_0, d')$,

$$d' = \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega - T) \text{ e } k = \lambda^{-1}(\|f\|_q + \|g\|_{q/2}).$$

Se $\Omega' = \Omega$, $d' = \operatorname{diam}\Omega$.

Dimostrazione. Sia $y \in \Omega'$, $\delta = \operatorname{dist}(y, \partial\Omega) < d'$. Dal Teorema 14 con $R_0 = \delta$ abbiamo, per ogni $x \in B_\delta$,

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq C(\delta^{-\alpha} \sup_{B_\delta} |u| + k).$$

Ora scegliamo $x_0 \in \partial\Omega$ tale che $|x_0 - y| = \delta$. Dalla (4.12) con $R = 2\delta$, $R_0 = 2d'$ otteniamo

$$\delta^{-\alpha} \operatorname{osc}_{B_\delta} u \leq \delta^{-\alpha} \operatorname{osc}_{\Omega_{2\delta}} u \leq C(\sup_\Omega |u| + k + K).$$

con $2\alpha \leq \alpha_0$. Quindi per ogni $x \in B_\delta(y)$ abbiamo (prendendo $u(x_0) = 0$)

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq C(\sup_\Omega |u| + k + K). \quad (4.16)$$

Utilizzando ancora (4.12) con $R = 2|x - y|$, $R_0 = 2d'$ notiamo che la (4.16) vale per $d' \geq |x - y| \geq \delta$. \square

(Riferimento del capitolo: [1]).

Conclusioni

Abbiamo visto come dalla disuguaglianza di Poincaré sia possibile costruire un percorso che ci ha portato a delle stime Hölderiane per soluzioni deboli di equazioni alle derivate parziali di tipo uniformemente ellittico, utilizzando in particolare anche la disuguaglianza di Harnack.

Per quanto riguarda l'Hölderianità interna siamo prima giunti al risultato per cui, sotto certe ipotesi, una soluzione debole u è localmente Hölder continua ottenendo così una stima della sua oscillazione su ogni palla aperta contenuta nel dominio Ω . Successivamente considerando invece un qualsiasi sottoinsieme compattamente contenuto in Ω abbiamo dedotto una stima Hölderiana che tiene conto della norma di u sull'insieme delle funzioni Hölder continue C^α .

Infine, per arrivare all'Hölderianità al bordo, abbiamo prima esteso la disuguaglianza di Harnack a domini che soddisfano una condizione di cono esterno e grazie a questa abbiamo ottenuto una stima dell'oscillazione di u sull'intersezione tra il dominio Ω e una qualsiasi palla centrata su un punto $x_0 \in \partial\Omega$, successivamente, da quest'ultima, abbiamo concluso con una stima Hölderiana uniforme per il bordo di domini che soddisfano una condizione uniforme di cono esterno.

Bibliografia

- [1] Gilbarg, David e Trudinger, Neil S. - *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, 2015.
- [2] Evans, Lawrence C. - *Partial differential equations - Graduate Studies in Mathematics - Volume 19* , American Mathematical Society , 1998.
- [3] Evans, Lawrence C., Gariepy, Ronald F. - *Measure theory and fine properties of functions* , Routledge , 2018.
- [4] Elena Cordero, Luigi Rodino - *Note del corso di Analisi Superiore - Università degli studi di Torino* , a.a. 2008-2009.
- [5] Bernhard Ruf - *Note del corso di Equazioni alle derivate parziali- Università degli studi di Milano* , a.a. 2019-2020.
- [6] Boothby, William M. - *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry* , Academic press , 1986.
- [7] Fausto Ferrari - *Note personali del corso di Analisi Matematica 3*, a.a. 2020-2021.

Ringraziamenti

Comincio col ringraziare innanzitutto la mia famiglia, che mi ha accompagnata durante l'intero percorso: mamma, papà, Eleonora e Matteo, ringrazio i nonni e gli zii che mi sono sempre stati vicini, tutti loro mi hanno sostenuta in ogni momento, mi hanno sempre dato coraggio e trasmesso affetto continuamente. Ognuno di loro ha contribuito a questo risultato ma soprattutto alla persona che sono attualmente, grazie alla mia famiglia ho imparato valori fondamentali che porto con me giornalmente.

Non posso non ringraziare i miei compagni di corso con cui ho condiviso tanti momenti sia di difficoltà che di gioia, ci siamo sempre fatti forza a vicenda.

Ringrazio ovviamente la mia fedele coinquilina Martina, abbiamo vissuto insieme 3 splendidi anni a Bologna e tra mille peripezie e frittate bruciate non mi sono mai sentita sola.

Ringrazio i miei amici di Ascoli che mi hanno sempre sostenuta e apprezzata, sono stati alleati importanti per me.

Ringrazio infine la professoressa Montanari per la sua disponibilità e cordialità.