Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Istituzioni di Matematiche: un'esperienza di tirocinio

Tesi di Laurea in
Elementi di Algebra e Geometria da un punto di vista superiore

Relatore:
Chiar.mo Professore
Libero Verardi

Presentata da:
Valentina Conti

Sessione prima

Anno Accademico
2010/2011

"Marta, Marta tu ti inquieti
e ti affanni per mille cose,
mentre una sola è quella,
è quella che vale."
Claudio Chieffo

Alla mia famiglia e a tutti coloro che
in questi anni mi hanno fatto camminare

Introduzione

Con questa tesi presento alcuni dei momenti più significativi della mia esperienza di tirocinio svolta presso il corso di laurea di Scienze Naturali per il corso di Istituzioni di Matematiche, tenuto dal professor Libero Verardi.

Nel corso di Laurea Magistrale di Matematica con indirizzo Didattico che ho frequentato in questi due anni ho avuto modo di costruire una serie di idee riguardo al processo di insegnamento, ma fino ad ora non mi era mai capitato di poterle attuare all'interno di un contesto "classe".
Il tirocinio è stata la prima grande occasione di poter mettere in pratica quanto appreso in questi anni.

La tesi si articola in quattro fasi.

- Nel primo capitolo presento una breve storia dell'insegnamento di Istituzioni di Matematiche, ne espongo le finalità e il ruolo che ha rispetto ad altri insegnamenti che necessitano di conoscenze matematiche quali Fisica, Ecologia e Genetica.
- Nel secondo capitolo presento come è strutturato il corso e descrivo quelle che sono state le attività svolte durante il periodo del tirocinio.
- Nel terzo capitolo analizzo l'esperienza di insegnamento che ho svolto in classe, ponendo attenzione alle difficoltà incontrate nelle ore di esercitazioni in aula, agli esiti delle prove scritte che sono state sostenute

dagli studenti durante il periodo del tirocinio e alle strategie messe in atto per far fronte alla verie situazioni in cui mi sono trovata.

- Completano la tesi le Conclusioni e l'Appendice legata al capitolo 2.

Indice

Capitolo 1

L'insegnamento di Istituzioni di Matematiche

1.1 Un po' di storia del corso di Istituzioni Matematiche

Il corso di laurea in Scienze Naturali fino al 2000 era articolato su quattro anni. L'insegnamento di Istituzioni di Matematiche naturalmente è sempre stato collocato al primo anno, per ovvie ragioni di propedeuticità.
Negli ultimi tre decenni, in concomitanza con le varie riforme ministeriali (introduzione dei crediti, riforma Zecchino, riforma Mussi e poi la prossima riforma Gelmini), ma anche per riassetti interni anche rilevanti (spostamento di insegnamenti da un anno all'altro, enfasi maggiore o minore su certi temi, etc.), la durata annuale di questo insegnamento è passata da circa 130 ore a 110, poi è scesa a 90, poi con la riforma "3+2" è stata fissata in 62 ore complessive, di cui 32 di lezioni frontali e 30 di laboratorio. Di conseguenza, i contenuti si sono via via ridotti, sia come argomenti presentati agli allievi, sia soprattutto come conoscenze e competenze richieste durante gli esami.
Sono così man mano scomparsi dal corso il ripasso delle principali curve del piano cartesiano, le isometrie del piano e dello spazio, la geometria analitica dello spazio, le nozioni elementari di probabilità e statistica, il calcolo combi-

natorio, quel minimo di studio delle funzioni di due variabili e delle equazioni differenziali, le successioni.
Sono rimasti, perché ormai indispensabili data l'eterogeneità delle provenienze degli allievi, il ripasso delle funzioni "elementari", oggetto del primo parziale, lo studio delle funzioni (limiti, continuità, derivate, massimi e minimi, flessi, etc.), integrali di Riemann e primitive (ma senza pretesa di tecniche di integrazione tipo per parti o sostituzione), oggetto del secondo parziale e un po' di nozioni sulle matrici (operazioni, rango, determinante) e sui sistemi lineari. Per lo svolgimento degli esercizi e in particolare lo studio di funzioni meno elementari è stato ideato nel 2001 il laboratorio, basato sulle calcolatrici TI-92[1], che è diventato l'ambiente per rivedere concetti e tecniche di calcolo.
Coloro che non avrebbero potuto imparare a maneggiare in tre settimane strumenti complessi come le derivate e gli integrali, se non già noti dalla scuola superiore, avrebbero avuto così la possibilità di farlo mediante questo software.
La riforma Zecchino aveva consentito di spezzare il primo anno in tre trimestri, due di lezione e uno di esami. Dal 2001 al 2008 l'insegnamento di Istituzioni Matematiche era così al primo trimestre insieme a Statistica, Chimica Inorganica e Geografia.
I compitini parziali consentivano alla grande maggioranza (67 per cento in media nei primi anni della riforma) degli allievi di chiudere entro Natale il discorso con la Matematica.
La riforma Mussi ha costretto ad eliminare i trimestri, diluendo il corso su alcune settimane in più, ma affiancandolo anche con Fisica (che era al terzo trimestre) e Genetica, sicché il carico di materie da seguire nel primo semestre (ossia tra fine settembre e Natale) è diventato pesante. L'unione con l'idoneità di informatica, che vale due crediti e richiede di superare un test da giugno in poi per poter registrare il superamento anche del modulo di Isti-

[1]Le calcolatrici TI-92 con l'ausilio di un C.A.S. simile a Derive sono state usate in via sperimentale in molte scuole.

tuzioni di Matematiche, impone agli allievi di attendere almeno la sessione estiva per chiudere con la Matematica e acquisire i crediti.
La riforma Gelmini, che partirà nel 2011-2012, ha costretto ad unire alla Matematica anche la Statistica, cosicché il corso, che si svolgerà nel primo semestre, comprenderà 6 crediti di Istituzioni Matematiche, 2 di Statistica e i 2 dell' idoneità di informatica.
Se il tutor di quest'ultima attività sarà nominato in tempo, entro Febbraio 2012 vari allievi potranno chiudere il discorso con Matematica, Statistica ed Informatica.
Ci saranno 5+2 crediti di lezioni frontali, per 56 ore complessive, più un credito di 12 ore di esercitazioni, più le due ore di presentazione del modulo di Informatica (che è per il resto attività di autoapprendimento via Internet), per un totale di 70 ore e 10 crediti.

È possibile che si arrivi presto ad una nuova variazione. Infatti, la laurea magistrale per l'insegnamento della Matematica e Scienze nella ex scuola media inferiore, in via di istituzione, prevede che all'atto dell'iscrizione ogni allievo possieda 12 crediti di Matematica, 6 di Fisica, 6 di Chimica e 6 di Informatica.
Poiché tipicamente la laurea in Scienze Naturali era la più adatta per l'insegnamento nelle scuole medie inferiori, forse sarà necessario prevedere un aumento da 6 a 12 dei crediti di Matematica e da 2 a 6 di quelli di Informatica o mediante nuovi corsi o mediante ampliamento di quell'unico esistente. Ma questo riguarda il futuro.

1.2 Il corso di Istituzioni Matematiche

Il corso di Istituzioni Matematiche ha tre obiettivi:

- strumentale: fornire le basi di Matematica per le altre discipline;
- culturale: oltre alle altre scienze conoscere un po' di Matematica

- formativo: allenare gli studenti ad affrontare argomenti difficili

Vediamo più nel dettaglio il primo obiettivo andando ad analizzare le conoscenze matematiche richieste nei corsi di Fisica, Ecologia e Genetica.

Nel corso di Fisica, che ovviamente necessita maggiormente di strumenti matematici, vengono trattati i seguenti argomenti: Teoria degli Errori, Cinematica, Dinamica, i Fluidi, Termodinamica, Campo Elettrico e Ottica.

Guardando gli appunti del corso ho potuto rilevare che le conoscenze matematiche richieste sono sicuramente la trigonometria, vettori e scalari e prodotti scalare e vettoriale, e infine le derivate.
La professoressa di Fisica ha accennato un po' questi argomenti durante il corso. Faccio presente che il corso di Fisica e il corso di Istituzioni Matematiche attualmente si svolgono entrambi nel primo semestre del primo anno, quindi in certi casi si rende necessario che la professoressa accenni già dall'inizio degli strumenti matematici che verranno approfonditi successivamente nell'altro corso. Il corso di Fisica solo da pochi anni si svolge nel primo semestre del primo anno, ma dal 2011/2012 verrà rispostato al secondo semestre, proprio per consentire le necessarie propedeuticità.

Nel corso di Ecologia vengono trattati i seguenti argomenti: Introduzione all'Ecologia, Ecosistema e sue componenti, Fattori Abiotici dell'Ecosistema e loro influenza sulla Componente Biologica, Fattori Limitanti, Cicli Biogeochimici, Catene Alimentari, Ecosistemi Acquatici, Ecosistemi Terrestri, Successione di Comunità, Dinamica di Popolazione (Accrescimento, Classi di età, Determinazione dell'età, Natalità, Mortalità, Fluttuazioni di Popolazioni)

Gli strumenti matematici che si rendono necessari per comprendere questa materia sono la capacità di leggere un grafico e conoscere le funzioni esponenziali e logaritmiche, in quanto viene fatto uso anche della scala logaritmica.

In altri tempi servivano anche un po' di equazioni differenziali, matrici e autovalori, ma la riforma del 2001 ha spinto il docente verso un'impostazione più qualitativa[2].

Programma di Genetica
Natura del materiale ereditario. Struttura del DNA ed enzimologia della replicazione. La funzione genica. Controllo dell'espressione genica. Eredità dei singoli geni: incroci mendeliani, geni autosomici e legati al sesso. Interazioni alleliche e geniche. La ricombinazione dei geni: crossing-over e mappe di associazione. Genetica dei batteri e dei fagi. Struttura genetica delle popolazioni. La tecnologia del DNA ricombinante.

Dunque per quanto riguarda il programma di Genetica, le conoscenze matematiche richieste sono un po' di probabilità e statistica. In particolare sarebbe bene che lo studente già avesse un'idea di variabile aleatoria, valore atteso, distribuzione discreta di probabilità. Di prettamente analitico è richiesta una conoscenza di base delle sommatorie[3].

Vediamo ora gli obiettivi culturale e formativo:

«La matematica non smetterà mai di stupirmi: un prodotto della libera immaginazione umana che corrisponde esattamente alla realtà» (Albert Einstein)
«La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara la lingua e conoscer i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri sono triangoli, cerchi e altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un labirinto oscuro.» (Ga-

[2] Si veda l'Appendice
[3] Si veda l'Appendice

lileo)

Galileo dà inizio a un metodo fondamentale: la scelta dello strumento matematico come linguaggio privilegiato di tutta la scienza della Natura materiale: in questo celebre passo, Galileo dichiara che la matematica è la lingua in cui è scritto il libro dell'Universo, e quindi è anche la lingua che permette la lettura di questo libro.

Dunque, noi sappiamo che la visione di Galileo potrebbe per certi aspetti risultare un po' semplicistica, in quanto egli riduce l'individuato aspetto matematico della realtà alla sola geometria, ma come poi ha mostrato la storia, e soprattutto il '900, il linguaggio privilegiato con cui l'universo si dispiega allo scienziato è matematico!

Ora, in un Corso di Laurea come Scienze Naturali, dove l'oggetto degli insegnamenti è proprio la Natura si capisce che un corso di Matematica anche solo per motivi culturali è d'obbligo!

In particolare per quanto riguarda l'ecologia ho trovato un testo[4] che rende ragione dell'uso della matematica all'interno di questa disciplina. Dà ben quattro ragioni, dice: « Può sembrare sorprendente che chi è interessato al mondo vivente naturale dedichi tempo a ricostruirlo in forma matematica artificiale, ma ci sono parecchie valide ragioni per farlo.
La prima è che i modelli matematici sono capaci di cristallizzare, o almeno di riunire mediante un piccolo numero di parametri, le proprietà importanti comuni a una moltitudine di esempi peculiari.
La seconda ragione, affine alla prima, è che un modello è capace di fornire un «linguaggio comune» in cui può essere espresso ogni esempio peculiare.
La terza ragione, affine alle prime due, è che un modello è capace di fornire uno standard di comportamento «ideale» o idealizzato rispetto al quale si

[4]Robert E. Ricklefs (1993), "Ecologia", Zanichelli

può giudicare e misurare la realtà.
Ultima ragione, ma non da meno, è che i modelli matematici sono capaci di fare luce effettivamente sul mondo reale di cui sono imitatori imperfetti.»

E infine il valore formativo:

«La matematica è una ginnastica dello spirito e una introduzione alla filosofia.» Isocrate

Il valore formativo della matematica comunemente riconosciuto e che ho ritrovato in tanta letteratura didattica suona generalmente così: «Lo studio della matematica deve favorire lo sviluppo di alcuni strumenti intellettuali quali astrazione, rigore, precisione, uso univoco del linguaggio, induzione deduzione».
Questa idea di matematica come palestra della mente è molto diffusa, ma se non si cerca di capire perché la matematica insegni a ragionare si rischia di mettere in campo un insegnamento che insegni piuttosto a sragionare. Ci sono molte situazioni celebri come ad esempio l'*età del capitano*[5]che mostrano come gli studenti spesso perdano la capacità di affrontare e risolvere problemi in modo razionale e sensato. Il problema del senso è la prima causa di insuccesso in matematica.[5]
Enriques quasi un secolo fa già sosteneva che
«Quella specie di uguaglianza democratica che qualche maestro pretende stabilire fra le proposizioni dimostrate, col pretesto che tutto è importante e perciò di nulla si può perdonare l'oblio, riesce soltanto a deformare le intelligenze privandole del lume della valutazione, sicché - pigliando a prestito le

[5]Celeberrimo esperimento che è stato compiuto all'inizio degli anni Ottanta. Un gruppo di ricercatori pose ai bambini delle scuole elementari problemi del tipo «Su una nave ci sono 26 pecore 10 capre; quanti anni ha il capitano?». I bambini in grande quantità risposero:«$36 = 26 + 10$». La prova fu ripetuta più volte, ma i risultati cambiarono poco.

[6]Giorgio Bolondi, Bruno D'Amore, *La matematica non serve a nulla*, Editrice Compositori, 2010

parole d'un filosofo- la scienza che si offre in tal guisa allo studioso si potrebbe dire "l'infinita notte, in cui tutte le vacche sono nere"».[7] (Enriques)

«*Il matematico è uno che non sa fare nulla ma impara in fretta*» (Ermanno Lanconelli)

Mi è capitato in più occasioni di sentire il Professor Lanconelli dire questa frase. Generalmente questa era la sua risposta a coloro che gli domandavano in quali campi diversi da quello dell'insegnamento o accademico un laureato in matematica avrebbero potuto implicarsi. Questa frase rivela una grande peculiarità dello studio della matematica che è quella di dover affrontare "cose difficili". Non è l'unica disciplina che lo fa, e non è l'unica ad allenare la mente; io ho frequentato il liceo classico e ho bene im mente che anche tradurre una versione di Latino o Greco è un buon esercizio per la mente. Come, però, mi faceva notare il mio professore, la Matematica ha la capacità di porre davanti a problemi difficili con "poca spesa". Si possono porre problemi difficili che riguardino anche conoscenze elementari della Matematica. Un esempio per tutti, la congettura di Goldbach: "ogni numero pari maggiore di 2 è somma di due numeri primi", comprensibile anche da uno studente della scuola media inferiore, ma tuttora non dimostrato!
Inoltre la Matematica di per sé è una disciplina che non richiede di prendere posizioni filosofiche o ideologiche, per affrontarla basta stare alle sue regole del gioco, e questo può essere molto educativo per uno studente che si accinga allo studio della natura e che dovrà studiare e scoprire le regole del gioco di questa.

[7]Federico Enriques, *Insegnamento dinamico*(1921)

Capitolo 2

Introduzione al progetto

2.1 Il corso in cui ho svolto il tirocinio

Il corso in cui ho svolto l'attività di tirocinio è denominato Istituzioni di Matematiche ed è tenuto dal Professor Verardi, per il primo anno di Scienze Naturali. Gli immatricolati al corso di laurea nel 2010-11 sono 138.
Ho collaborato con altri tre tirocinanti e ci siamo occupati di svolgere la seguenti attività

- esercitazioni in aula in preparazione ai compitini
- assistenza nelle ore di Laboratorio
- ricevimento agli studenti
- sorveglianza durante lo svolgimento delle prove scritte

Come spiegherò meglio nel seguito, sono state fondamentali sia la supervisione del professor Verardi, sia la collaborazione con gli altri tirocinanti. Ogni mercoledì il professore usava aggiornarci sul programma che aveva svolto fino a quel momento in aula e ci consigliava gli esercizi da svolgere nelle ore di esercitazioni, indicandoci gli argomenti a cui fare più attenzione per la loro difficoltà e quelli su cui insistere per la loro importanza. Spesso noi tirocinanti ci siamo trovati a preparare insieme gli esercizi da svolgere in classe.

Infine ogni lunedì dopo le esercitazioni ci fermavamo a raccontare al Professore quello che era successo e a chiedere consigli su eventuali problemi riscontrati.
Questa esperienza mi ha dato il grande vantaggio da una parte di potermi scontrare con una classe nel ruolo di insegnante, dall'altra però di poter domandare e essere corretta nel modo di farlo. Questo corso era distribuito su sette ore settimanali, tre il lunedì e quattro il mercoledì. Le tre ore del lunedì il Professor Verardi ha pensato insieme a noi tirocinanti di svolgerle in questo modo: avendo diviso il corso in A-L e M-Z, nella prima ora e mezza una parte stava col professore in aula a fare Laboratorio con due tirocinanti, mentre l'altra si spostava in un'altra aula con gli altri due tirocinanti a fare esercitazioni; nell'ora e mezza successiva i due gruppi di studenti con i rispettivi tirocinanti si scambiavano.

2.1.1 Il laboratorio

La parte di Laboratorio del corso è stata dedicata a un primo uso della calcolatrice grafico-simbolica TI-92 Plus. Gli studenti generalmente potevano seguire la lezione con una calcolatrice a testa, o al massimo dividendola con un compagno. Le ore di Laboratorio sono state usate dal Professore, oltre che per fornire i comandi base della calcolatrice, anche per anticipare o approfondire argomenti visti nella parte di lezione frontale, come ad esempio risolvere equazioni, tracciare e manipolare grafici, scoprire le proprietà di limiti derivate e integrali, eseguire operazioni con matrici, risolvere sistemi lineari. Il compito di noi tirocinanti durante le ore di Laboratorio è stato quello di seguire passo a passo la lezione del docente adoperando la calcolatrice TI-92 Plus collegata ad un proiettore, in modo che gli studenti avessero man mano modo di confrontare quello che compariva sul display della propria calcolatrice.

Il rischio che corre lo studente in un tipo di lezione come quelle di Laboratorio, in cui si trova a dover ascoltare il docente, appuntarsi eventualmente

comandi importanti e poi attuarli sulla calcolatrice è quello di non riuscire a seguire passo a passo la lezione, ma grazie all'uso della lavagna da parte del docente, e del proiettore, direi che gli studenti, o almeno quelli non troppo distratti da altro che non riguardasse la lezione, sono stati molto agevolati nel poter seguire al meglio.
Durante queste ore ho notato che gli studenti non si sono mai mostrati restii a chiedere aiuto al docente, o qualche volta anche a noi tirocinanti, per problemi tecnici con la calcolatrice; molto più rare mi sono sembrate le domande sui contenuti, questo perché negli studenti universitari, non meno che in studenti di altre età, forse anche di più, vige quello che in Didattica della Matematica viene chiamato Contratto Didattico, che in questo caso si traduce con la continua paura di essere valutati.

2.1.2 Le esercitazioni e il ricevimento

Il ruolo attivo di noi tirocinanti era costituito senza dubbio dalle esercitazioni e dalle ore di ricevimento agli studenti.
La scelta degli argomenti da trattare nelle esercitazioni dipendeva sia dagli argomenti trattati a lezione dal professore, sia dalla preparazione alle prove parziali. Generalmente il professore ci forniva alcuni dei compitini degli anni precedenti, e noi tirocinanti svolgevamo in aula sia esercizi presi da questi, sia esercizi tratti da libri di testo o da internet.
A ricevimento gli studenti venivano sia per chiedere aiuto su argomenti non capiti a lezione, sia molto spesso chiedendo esercizi da svolgere in più come allenamento in vista del compito.

2.2 Il programma del corso

L'insegnamento di Istituzioni di Matematiche per Scienze Naturali, secondo la programmazione didattica dell'anno 2010-2011, è un corso di 6 crediti che comprende lezioni frontali ed esercitazioni alla lavagna per 32 ore; esercitazioni di laboratorio con l'ausilio delle calcolatrici TI-92 Plus per 30 ore. Il corso è diviso in tre cicli, ciascuno dei quali viene concluso da un compitino.

I. - Funzioni elementari e loro grafici (polinomi e loro radici, funzioni esponenziali, logaritmiche, trigonometriche, valore assoluto e segno, ecc).

II. - I classici argomenti dell'Analisi Matematica: topologia della retta reale, limiti, continuità, derivate, studio di funzioni, integrali e qualche applicazione.

III. - Matrici, determinanti, sistemi lineari, vettori ed applicazioni lineari, elementi di calcolo combinatorio.

2.3 Obiettivi specifici

Al termine del modulo, lo studente dovrebbe possedere le conoscenze di base di Matematica necessarie per affrontare le altre discipline del corso di Laurea di Scienze Naturali, come abbiamo già visto nell'introduzione. In particolare, lo studente dovrebbe essere in grado di:

- comprendere ed usare il grafico di una funzione per i modelli matematici;
- comprendere l'uso degli strumenti del calcolo differenziale ed integrale e di algebra lineare nelle applicazioni;
- usare un semplice software matematico, simile a Derive, per:
  - risolvere equazioni,
  - tracciare grafici e studiarli,
  - eseguire calcoli meno elementari con derivate, integrali e matrici.

Capitolo 3

Presentazione dei contenuti dell'esperienza

Premessa

All'inizio della prima esercitazione ho voluto far notare agli studenti la grande occasione che potevano essere per loro le attività gestite da noi e non dal professore. Occasione nel senso che per loro c'era la possibilità di domandare a tutti i livelli e in tutta libertà, in quanto da noi non sarebbero mai stati valutati. Questa forma di apprendimento in cui chi spiega non ha anche il compito di valutare è una forma che dovrebbe poter vincere il contratto didattico[8]. Quello che ho sempre ribadito durante le ore di esercitazione era di sfruttarle per capire e basta, e che chiunque fosse lì per altri motivi o non avesse la pretesa di capire, stava perdendo tempo.
Da molti non è stato colto questo mio incitamento e per questi il fatto che davanti non avessero il professore, ma dei semplici tirocinanti, ha avuto il solo vantaggio di potersi concedere qualche distrazione in più, ma molti altri

[8]contratto didattico: l'insieme dei comportamenti dell'insegnante che sono attesi dall'allievo e l'insieme dei comportamenti dell'allievo che sono attesi dall'insegnante. [Bessot A. (1991), La Didattica della Matematica in Francia. Una introduzione alla Teoria delle situazioni di Guy Brousseau, C.R.S.E.M.]

l'hanno colto fino al punto di chiedere aiuto su lacune anche gravi o anche semplicemente facendo presenti le proprie incertezze.

3.1 L'esercitazione di ripasso

All'inizio del corso il professore ha predisposto una esercitazione di ripasso facoltativa. Questa esercitazione viene valutata in decimi e non fa media con gli altri compitini, ma dà un bonus di tanti trentesimi quanti sono i decimi al di sopra del 7.
Hanno partecipato alla prova 103 studenti e la media in decimi è stata di 4,83. Il compito toccava i seguenti argomenti:
equazioni fratte, sistemi lineari, proprietà del triangolo rettangolo e teoremi di Euclide, proprietà delle operazioni di somma e prodotto tra numeri reali, disequazioni fratte, sistemi di disequazioni, arrotondamento di numeri decimali, riconoscere il grafico di una retta data la sua equazione.
La prima esercitazione svolta da noi tirocinanti è stata tenuta il lunedì seguente a questa prova ed è quindi stata dedicata alla correzione di questa.
Già da questa prima esercitazione abbiamo potuto constatare il grande dislivello di preparazione di questi ragazzi.
Nel correggere il primo esercizio uno studente addirittura di fronte all'equazione fratta

$$\frac{2x+3}{x+5} - 1 = \frac{x}{3x+15}$$

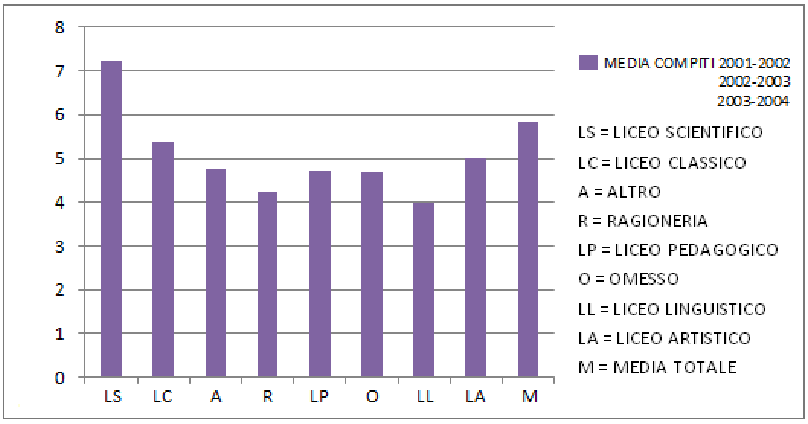
mi ha detto che il campo di esistenza era $\mathbb{R} - \{-5\}$, ma arrivati nella risoluzione dell'equazione al passaggio

$$\frac{2(x-3)}{x+5} = 0$$

ha affermato che le soluzioni dell'equazione erano x=-5 e x=3, poichè era necessario che si annullassero numeratore e denominatore. Allora ho provato a chiedergli a cosa fosse servito secondo lui determinare il campo di esistenza di questa equazione.

Dopo un attimo di indugio ha risposto che a lui era stato insegnato che nel caso di una equazione fratta il campo di esistenza si otteneva escludendo i numeri che rendevano nullo il denominatore.
A quel punto gli ho spiegato che determinare il campo di esistenza di un'equazione non è altro che determinare l'insieme di valori entro i quali l'equazione ha senso, e nel caso di un'equazione fratta, questa non ha senso nel caso in cui al denominatore si abbia 0, perché non ha senso la divisione per 0.
Inoltre gli ho spiegato che quando si trova di fronte ad un'equazione fratta, questa vale 0 se il numeratore vale 0 in quanto 0 fratto una qualsiasi quantità, diversa da 0, vale 0.

NOTA Quest'anno non è stato richiesto agli allievi di indicare sul foglio la scuola di provenienza. Nei primi anni una simile indagine portò ai dati riportati di seguito:



Si può dire che l'esercitazione di ripasso permette di avere un feedback delle conoscenze pregresse degli studenti, il fatto di conoscere la provenienza scolastica di questi ultmi permette di rintracciarne le cause!

Come si può riscontrare nel grafico generalmente gli studenti provenienti dal liceo scientifico sono quelli più preparati le altre scuole presentano una preparazione di livello molto inferiore, che non raggiunge la sufficienza.

3.2 Il Primo Compitino

3.2.1 Preparazione

In preparazione al primo compitino, che è stato fissato per il 27 Ottobre, è stata fatta una sola esercitazione, il 25 Ottobre. In questa esercitazione abbiamo proposto alcuni esercizi presi dai compitini degli anni precedenti. Lo schema degli esercizi proposti rimane infatti essenzialmente invariato negli anni. Primo esercizio: domande a crocette sulle proprietà di alcune funzioni. Secondo esercizio: dominio di una funzione irrazionale. Terzo esercizio: risoluzione di una disequazione logaritmica. Quarto esercizio: Domande a crocette sulla formulazione corretta di alcune proprietà di funzioni. Quinto esercizio: riconoscere quale funzione corrisponde ad un grafico assegnato per esclusione motivata. Sesto esercizio: dato il grafico di una funzione, indicare punti di max/min, intervalli di crescenza e convessità. Settimo esercizio: risoluzione di una equazione trigonometrica. Ottavo esercizio: proprietà di una funzione trigonometrica, esponenziale, logaritmica o polinomiale (a seconda degli appelli). Nono esercizio:"risoluzione"di un triangolo rettangolo. Decimo esercizio: data una funzione e più grafici, riconoscere il grafico della funzione e motivare la risposta.
Mi soffermo sul terzo esercizio proposto da noi tirocinanti preso da un compitino del 2009. Riporto di seguito il testo:
3. Per quali $x \in \mathbb{R}$ ha senso l'espressione $\ln(x^2 - x)$?
Innanzitutto una buona percentuale aveva come ricordo dal liceo, o dalla lezione col professore, che l'argomento del logaritmo doveva essere posto maggiore di "qualcosa", sul fatto poi se questo qualcosa fosse 1 o 0, i pareri erano molto contrastanti. Quindi le risposte che abbiamo avuto sono state per la maggior parte:
"Sono gli x che soddisfano la disequazione $x^2 - x > 0$"
Altri invece "Si prendono gli x tali che $x^2 - x > 1$"
e addirittura, anche se in percentuale minore, alcuni sostenevano che bastasse prendere $x > 0$ o $x > 1$

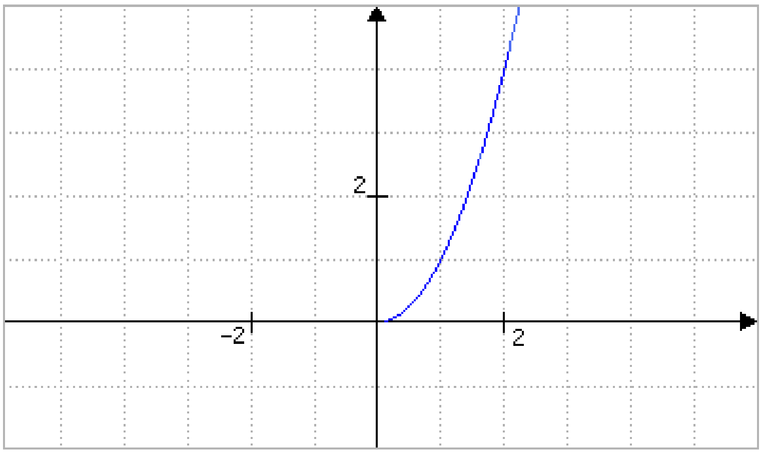
Per prima cosa disegnando alla lavagna il grafico del logaritmo abbiamo cercato di fare chiarezza su quale fosse il significato del porre l'argomento maggiore di 0 piuttosto che maggiore di 1. Mi sono anche soffermata sulle altre due risposte errate che consideravano x e non l'argomento del logaritmo, spiegando che, quando, sicuramente, era capitato loro di sentire «quando c'è il logaritmo, allora ponete $x > 0$» si stava intendendo x come argomento del logaritmo. In particolare già solo tracciando il grafico del logaritmo, senza che avessimo dato ancora spiegazioni, molti hanno saputo riconoscere la risposta corretta. Questo esempio rivela il rischio che spesso corrono gli insegnanti delle scuole superiori nell'insegnare la loro disciplina come una serie di formule non troppo motivate, per cui a volte lo studente prende una regola come "da sapere a memoria", senza un adeguato processo conoscitivo, per cui generalmente la nozione viene persa molto in fretta. Ora poi, visto che come mostrerò nel seguito, nel compitino che gli studenti hanno svolto la settimana dopo, questa tipologia di esercizio è stata sbagliata da tanti, riconosco che non entra in gioco solo l'insegnamento, ma c'è anche un problema di apprendimento legato a questo tipo di esercizi, che dipende direttamente dalla natura dell'esercizio, soprattutto per i meno allenati. Il problema è che molti studenti, come ho potuto vedere meglio nelle ore di ricevimento, a volte fanno fatica a capire la differenza tra funzione positiva e funzione di dominio positivo. Questi concetti niente affatto banali necessiterebbero forse di essere assimilati gradualmente.

Uno studente addirittura mi ha detto:«Senta, è inutile che cerca di farci ricordare che $log(1) = 0$, non si può fare affidamento sulla memoria, io mi fido solo della calcolatrice!»
Gli ho quindi chiesto se ogni volta lui se lo ricalcolasse e mi ha risposto di sì! Posto che il mio obiettivo non era affatto quello che gli studenti si ricordassero solo per memoria che $log(1) = 0$, ma avevo tanto sperato attraverso le mie spiegazioni "grafiche" che gli studenti ne intuissero almeno un pochettino le ragioni, ho sfidato lo studente a spiegarmi come potesse non fare affidamento

sulla memoria nello studio della matematica, ma solo sulla calcolatrice, posto che secondo me non si stava rendendo conto che esperienzialmente il suo metodo non poteva funzionare e che fino in fondo non lo usava nemmeno lui.
Mi ha detto che lui in generale non cercava tanto di capire le spiegazioni, ma piuttosto gli interessava capire come gli esercizi che spiegavamo potessero essere risolti con una normale calcolatrice scientifica, ed era certo che dovesse bastare, perché tanto non aveva fiducia di imparare a fare quegli esercizi, ma era assolutamente certo che la calcolatrice potesse farlo al suo posto. Non so se poi questo studente nel secondo compitino sia ricorso all'uso della calcolatrice $TI - 92$, che viene messa a disposizione dal professore durante lo svolgimento della prova scritta; a posteriori penso che per la sua totale fiducia, un po' ingenua, nella calcolatrice scientifica di base dovesse essere uno dei tanti che invece di andare a seguire col professore la lezione di laboratorio preferivano rimanere alla esercitazione per gli M-Z.
Mi ha anche chiesto come si potessero risolvere le disequazioni con la calcolatrice scientifica; gli ho risposto che non ci avevo mai provato e dubitavo fortemente del fatto che potessero esserne in grado.
La sua risposta è stata:«ma se calcola i logaritmi, il seno e il coseno che sono più difficili dovrà risolvere anche le disequazioni».
Gli ho voluto far notare comunque che a non voler capire, ma a voler trovare strategie (molto più dispendiose di tempo e non sempre efficaci) che esonerassero il suo ragionamento, quello che davvero si stava perdendo era il gusto della matematica che non è appena un problema di imparare a memoria o di risolvere dei calcoli, ma poteva essere un grande mezzo per imparare a ragionare in un certo modo ed anche un grande strumento di conoscenza per gli esami che si sarebbe trovato a dover affrontare in seguito.. Non so se sia stato per quello che gli ho detto, ma quel ragazzo all'ora di ricevimento di quella settimana è venuto a chiedere di aiutarlo a capire degli esercizi! E nelle lezioni successive si è mostrato molto più partecipe e più volenteroso di capire.

Una altro esercizio su cui sono emersi aspetti interessanti è il quinto, di cui riporto di seguito il testo:

5. Questa è una parte del grafico di una funzione $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$. Quale delle quattro possibilità sotto elencate è quella giusta?



a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = log(x)$ c) $f(x) = \sqrt{x}$ d) $f(x) = |x|$

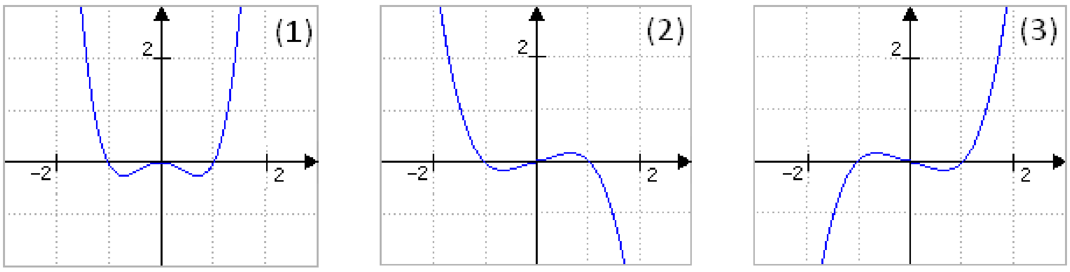
Perché le altre tre sono errate?

Abbiamo cercato di impostare la risoluzione di questo esercizio a partire dalle conoscenze che il professore aveva fornito agli studenti durante le lezioni svolte fino a quel momento. In particolare abbiamo cercato di farli ragionare sulla positività della funzione data e delle funzioni candidate. Rispetto alla funzione data guardando la positività, subito è stato possibile scartare la risposta b), ovvero il logaritmo, poiché il logaritmo contrariamente alla funzione data non assume solo valori positivi in $\mathbb{R}^+$. Poi ragionando insieme abbiamo scartato la risposta d) in quanto gli studenti hanno riconosciuto che il grafico di $f(x) = |x|$ sarebbe dovuto essere la semiretta bisettrice del primo quadrante. Infine si è passati a scartare la c) per mezzo di calcoli. In particolare abbiamo visto che $\sqrt{x}$ per $x = 2$ assume il valore $\sqrt{2} \sim 1,4$

mentre nel grafico riportato per $x = 2$ si ha che la funzione assume un valore molto maggiore di 2.
Questo esercizio permette, ancor prima che lo studente abbia tutti gli strumenti, come ad esempio la conoscenza delle derivate, per procedere ad uno studio di funzione vero e proprio, di inziare a trattare grafici delle funzioni e vederne le peculiarità. Questo porta con sé un duplice vantaggio: da una parte lo studente può iniziare a mettere in atto le conoscenze che sta apprendendo, dall'altro questo fa sì anche quando avrà in più la conoscenza delle derivate, che gli permetterà di avere "notizie più certe e dirette"della funzione che sta studiando, non dovrebbe dimenticarsi delle potenzialità degli altri strumenti appresi in precedenza.

Esercizio analogo, ma in un certo senso "duale", è il decimo di cui riporto di seguito il testo:

10. Uno dei tre seguenti è un tratto del grafico della funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - x^2$. Quale?



Perchè gli altri due non vanno bene?

Anche in questo esercizio abbiamo cercato la soluzione andando per esclusione. Ed è bastato guardare la positività della funzione data:

$x^4 - x^2 > 0 \Longleftrightarrow x < -1$ oppure $x > 1$

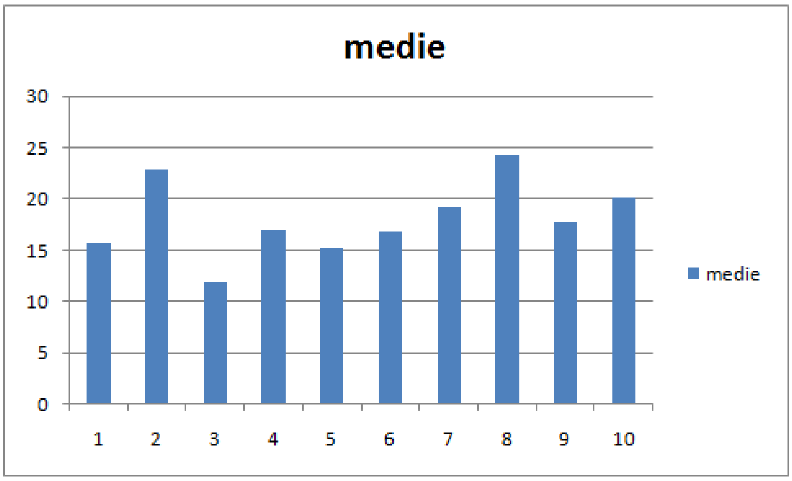
Dunque, poiché invece la 2) per $x > 1$ è negativa e la 3) è negativa per $x < -1$, l'unica funzione accettabile rimasta era la 1).
Due grandi difficoltà ho riscontrato da parte degli studenti nella risoluzione di questo esercizio. La prima di metodo: in generale facevano fatica a capire quale proprietà della funzione data fosse più conveniente guardare; quelli che avevano più ricordi dalla scuola superiore suggerivano di guardare la crescenza della funzione attraverso le derivate o di confrontare i grafici con i limiti all'infinito della fuzione data, argomenti che il professore non aveva ancora spiegato a lezione, altri invece non avevano proprio idea da dove partire. La seconda difficoltà, che dettaglierò meglio nel seguito, è emersa quando ho chiesto di giustificare quindi l'esclusione dei grafici 2 e 3.

3.2.2 Esito prova scritta

Il 27 ottobre, gli studenti hanno appunto sostenuto il primo compitino. L'ora immediatamente precente alla loro prova, noi tirocinanti abbiamo fatto un'ora di ricevimento per eventuali dubbi e domande. L'affluenza è stata incredibilmente alta. Ne sono venuti almeno una quarantina per chiarimenti di vario tipo. Le tipologie di esercizi di cui hanno chiesto maggiormente sono sicuramente la prima, la quarta e l'ottava che sono quelle in cui la risposta è a crocette. Ovviamente per sostenere il compitino, chi più chi meno, si saranno allenati a casa sui procedimenti, quindi è normale che a mezz'ora, un'ora dalla prova quello che al massimo si può sperare sia di avere qualche nozione in più, qualche certezza in più sulle domande a crocette. In tanti casi infatti non ci chiedevano nemmeno la giustificazione delle nostre risposte, si cercava piuttosto di memorizzarle sperando che magari proprio quelle domande fossero presenti nei loro compitini.
Quando mi sono accorta di ciò ho pensato bene di spiegare loro che l'arma migliore per affrontare il compitino non era imparare più risposte giuste pos-

sibili a memoria, ma anzi di capire perché le risposte che noi gli stavamo offrendo fossero corrette, facendogli notare che non era poi così alta la probabilità che nel compitino ci fossero proprio le domande a cui noi avevamo dato risposta. Questo ha un po' cambiato il loro atteggiamento.

Il compitino è stato sostenuto da 106 studenti e la media dei voti è stata di 17,45 trentesimi. In particolare mi è sembrato interessante fare una statistica dei punti totalizzati in ogni esercizio del compitino per gli A-L che sono gli studenti che ho seguito per tutto il semestre. La riporto graficamente in trentesimi di seguito:



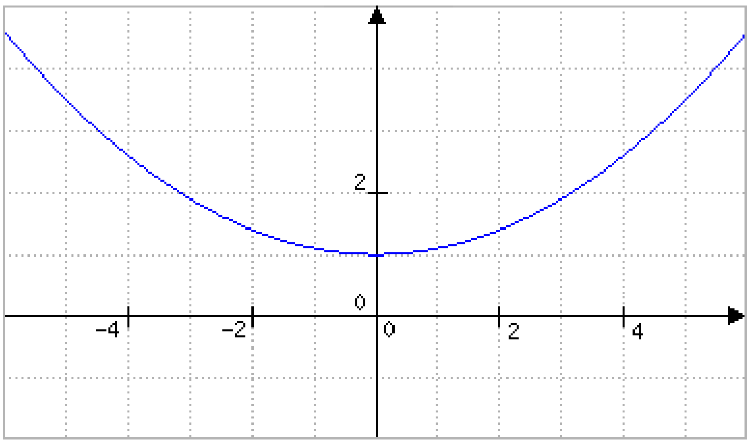
Ebbene l'esercizio su cui hanno avuto maggiori difficoltà è il terzo. Riporto di seguito il terzo esercizio del compito A (generalmente il professore differenzia in quattro tipologie il compito):

Per quali x si ha $ln(x^2 - 3) > 0$?

Ben $\frac{1}{3}$ degli studenti ha fatto il medesimo errore di porre $x^2 - 3 > 0$, nonostante ahimè la spiegazione di questa stessa tipologia di esercizio due giorni prima. Ora, di fronte a questo eclatante insuccesso mi permetto una parziale giustificazione. A posteriori mi sono resa conto che nell'esercitazione precedente al compito abbiamo sì dedicato molto tempo all'esercizio che riguardava i logaritmi e abbiamo cercato di chiarire la differenza tra il cercare i valori che rendono positivo un logaritmo e quelli invece che fanno sì che un dato logaritmo abbia senso, ma non abbiamo mostrato poi un esercizio in cui si richiedesse la positività del logaritmo. Quindi in fondo nella mente di tanti studenti quelle spiegazioni sono rimaste astratte, tanto che di fronte all'esercizio del compito si sono forse limitati a imitare l'esercizio fatto in classe senza essersi resi conto che nel compito veniva richiesta una consegna diversa!

Al secondo posto, in ordine di esercizio andato peggio, troviamo il quinto quesito. Prendo il testo sempre dal compitino A:

5. Questa è una parte del grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Quale delle quattro possibilità sotto elencate è la giusta?



a) $f_1(x) = 2 - cos(x)$ b) $f_2(x) = \frac{10+x^2}{10}$
c) $f_3(x) = \exp(x)$ d) $f_4(x) = \frac{x^3}{16} + 1$

Perché le altre tre sono errate?

È curioso notare che ha sbagliato totalmente la risposta appena $\frac{1}{7}$ degli studenti. Ciò significa che la vera difficoltà di questo esercizio non è stata tanto individuare quale fosse l'equazione del grafico riportato, ma piuttosto giustificare l'esclusione delle altre equazioni. Guardando le giustificazioni che gli studenti hanno riportato ci si stupisce quasi del fatto che questi siano riusciti ad arrivare alla risposta esatta. Tantissima ad esempio hanno scartato $f_1(x) = 2 - cos(x)$ perché periodica. Di per sé questa caratteristica della funzione $2 - cos(x)$ non è un motivo per scartarla. Questo errore rivela la misconcezione[9] per cui una funzione è periodica se il suo grafico "si ripete", il problema in questo caso è che gli studenti non hanno considerato che la figura riportava una parte di grafico, per cui eventualmente il grafico si poteva "ripetere" nelle zone "non riportate"! Non hanno invece notato che $f_1(x)$ è compresa tra 1 e 3, mentre nel grafico la funzione è maggiore di 3. Molti di loro magari avranno anche avuto in mente che il grafico del seno e del coseno sono sempre compresi tra -1 e 1, ma poichè in questo caso il coseno era traslato è stato più facile "trarli in inganno"!
Gli errori più sconvolgenti in questo esercizio non sono tanto di natura matematica, ma piuttosto legati alla incapacità di esprimersi in italiano corretto per certi studenti. Si trovano frasi ancora prima che scorrette a livello matematico, prive di senso:
«*non può essere* $f_4(x) = \frac{x^3}{16} + 1$ *perché avrebbe avuto un disegno differente con limiti*»
«$f_4(x)$ *ha soluzione anche per i numeri negativi*»
La prima non credo di riuscire ad interpretarla, la seconda rivela una duplice confusione nello studente che ha riportato questa frase: per prima cosa rivela l'incapacità di distinguere un'equazione da una funzione, dall'altra addirittura sembrerebbe che per questo studente dire che un'equazione ha soluzione anche per numeri negativi sia equivalente a dire che la funzione può assumere

[9] Concezione erronea che si è formato l'apprendente e che non coincide con la concezione che avrebbe dovuto farsi. È un ostacolo nell'apprendimento che porta al conflitto cognitivo. Bruno D'amore (1999), Elementi di Didattica della Matematica, Pitagora Editrice Bologna

valori negativi.

UNA NOTA DI ATTUALITÀ

Durante la redazione di questa tesi, si è saputo che è in preparazione una iniziativa dell'Università per migliorare la redazione delle tesi , in particolare della laurea Magistrale, per quello che riguarda l'uso dell'italiano. Il problema esiste, è molto sentito dai docenti soprattutto del triennio, ed ha un primo tentativo di soluzione durante la redazione della laurea triennale. Appare ben strano comunque che alunni reduci da 13 anni di scuola tra elementari, medie e superiori, non abbiano imparato ad esprimersi con semplicità e chiarezza, in particolare in campo scientifico.
Eppure le risposte a questo tipo di quesiti mostrano che non è così: l'italiano è usato in modo scorretto sia grammaticamente che sintatticamente, il linguaggio tecnico resta estraneo alla mentalità di moltissimi allievi, e forse per questo essi trovano difficoltà enormi a spiegare le ragioni di una risposta a quesiti come quelli di cui si è parlato.

3.2.3 Correzione

Nella lezione successiva alla prova scritta abbiamo consegnato agli studenti le prove corrette e abbiamo fatto la correzione di tutto il compito.
Ho notato che una buona parte degli studenti, in particolare quelli con una valutazione insufficiente, visto l'esito della propria prova, non si sono fermati alla correzione.
Abbiamo svolto alla lavagna ciascun esercizio, mi soffermo innanzitutto sul terzo che è quello su cui gli studenti hanno trovato maggiori difficoltà.
Proprio per la constatazione fatta nel paragrafo precedente non ci siamo limitati a mostrare solo la soluzione dell'esercizio del compito, ma ancora una volta abbiamo ribadito la differenza tra dominio e positività della funzione logaritmica, mostrando esempi dell'uno e dell'altra.

Per quanto riguarda il quinto esercizio molti studenti avevano delle polemiche sulla correzione fatta dal professore alle loro risposte. Molti sostenevano che già le proprie risposte fossero esaurienti.

Una studentessa che aveva il compito A[10]sosteneva ad esempio che per escludere $f_1(x) = 2 - cos(x)$ bastasse dire che la funzione data non era evidentemente periodica. Le ho chiesto che cosa glielo facesse escludere e lei mi ha risposto che si vedeva dal grafico "perché non si ripeteva", allora ho disegnato alla lavagna il grafico della funzione $f(x) = sen(x)$ e poi ho cancellato la parte di grafico per valori minori di $-\frac{\pi}{2}$ e per valori maggiori di $\frac{\pi}{2}$ e le ho mostrato che considerando localmente un grafico non si può dire con certezza se sia o no parte di una funzione periodica e che di conseguenza la sua risposta non poteva essere esauriente. Le ho quindi suggerito di andare piuttosto a vedere che valori le funzioni candidate possono assumere e di mostrare dove queste non coincidono con il grafico dato. In questo caso ad esempio si aveva che la funzione $f_1(x) = 2 - cos(x)$ può assumere solo valori compresi tra 1 e 3, mentre la funzione data no. A quel punto inaspettatamente mi ha replicato che per scartare la funzione $f_4(x) = \frac{x^3}{16} + 1$ era ricorsa alla sostituzione di valori nella funzione e che comunque il professore non aveva considerato corretta la sua risposta, quindi me l'ha letta: "$f_4(x)$ dando alcuni valori alle x risulterà sempre una funzione crescente" e poi ha aggiunto che non essendo la funzione del grafico sempre crescente, non poteva essere $f_4(x)$ la risposta corretta.
Rispetto a questa obiezione le ho chiesto se lei prendendo due tre anche dieci valori della funzione data, e trovandoli ordinati in modo crescente, potesse dirmi con certezza che quella funzione era sempre crescente. Ha esitato, le ho risposto io di no. Le ho quindi spiegato che ha senso andare a sostituire dei valori all'interno delle funzioni candidate proprio per dire cosa non sono le funzioni candidate, non il viceversa, e che quindi sarebbe stato meglio che lei avesse sostituito un valore in f_4, ad esempio 3, per vedere che $f_4(3) = -\frac{27}{16} + 1 = \frac{-11}{16}$ assume un valore negativo in 3, mentre la funzione del grafico no!

[10]il testo dell'esercizio è dato nel paragrafo 3.2.3

3.3 Il Secondo Compitino

3.3.1 Preparazione

In preparazione al secondo compitino, che, come mostrerò nel paragrafo successivo, è quello che è andato peggio tra i tre compitini e ha raggiunto il minimo storico a partire dal 2001, sono state fatte ben tre esercitazioni.

Prima esercitazione

Nella prima siamo partiti con esercizi sui limiti e qualche studio di funzione tralasciando lo studio delle derivate.
Come primo esercizio abbiamo proposto il seguente:

Quali fra i seguenti limiti valgono -3?

1. $\lim_{x\to 1} \frac{-3\ln(x)}{x}$
2. $\lim_{x\to \infty} \frac{2-9x^2}{3x^2-4x}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{cos(x)-4}{x+1}$

Sul primo limite proposto molti hanno risposto che il risultato dovesse proprio essere -3! Ancora una volta ho dovuto scontrarmi col fatto che i logaritmi a tanti proprio continuavano a risultare poco poco chiari!
Ho disegnato il grafico del logaritmo alla lavagna e ho mostrato che per $x = 1$ il logaritmo di x vale appunto zero e ho provato a richiamarli all'esercizio 3 del compitino che per l'appunto chiedeva dove il logaritmo fosse positivo, sia per vedere se almeno si ricordavano di tutta la spiegazione precedentemente fatta, sia perché speravo che rimettendoli nel contesto in cui avevano appena

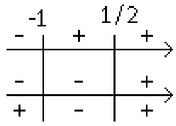
visto i logaritmi questo li potesse aiutare a ricordare meglio e a ricontestualizzare la nozione $log(1) = 0$ in modo più profondo e cosciente.

Il secondo limite invece l'ho riscritto alla lavagna e ho spiegato il metodo del raccoglimento della x di esponente maggiore al numeratore e al denominatore, ci ho tenuto, affinchè non lo vedessero solo come un procedimento meccanico, a ripuntualizzare che alla base di questo metodo c'era il fatto che una frazione con al numeratore un numero qualsiasi e al denominatore una x che tende all'infinito, tende a zero, per questo valeva la pena raccogliere.
Alcuni studenti mi hanno detto: «ma se invece del suo ragionamento, facciamo come ci hanno insegnato a scuola e nel caso di frazioni con lo stesso grado più alto al numeratore e al denominatore, prendiamo i loro coefficienti, va bene lo stesso?»
Ho risposto loro che la ragione di quello strano metodo che avevano imparato a scuola era proprio quello che stavo spiegando io, che il motivo per cui potevano curarsi unicamente delle x con esponente maggiore dipendeva dal fatto che, raccogliendo, tutti i termini di grado minore tendevano a zero!
Ecco qual è tante volte il rischio della scuola che avevo già accennato nel primo paragrafo di questo capitolo, di fornire più dei risultati, delle risposte preconfezionate che non una formazione reale che renda lo studente cosciente di quello che sta apprendendo. Sul terzo limite invece non ci sono stati particolari problemi.

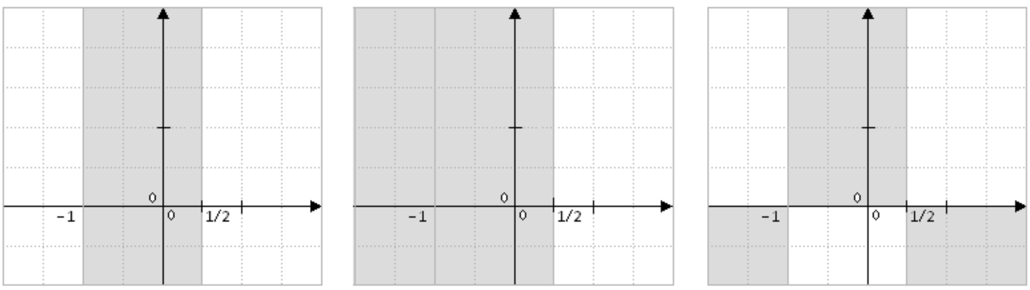
Siamo poi passati ad analizzare uno studio di funzione di cui riporto il testo:
Sia $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$

1. segno: f(x)>0
2. limiti : $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} f(x) \\ \lim_{x\to-1} f(x) \end{cases}$

Per quanto riguarda il segno abbiamo considerato prima il segno del numeratore e poi del denominatore e poi ho chiesto come dovessero essere "messi insieme" e su questo ho trovato pareri discordanti. C'era chi sosteneva che si dovessero considerare i valori dove erano positivi sia numeratore che denominatore, chi proponeva di mettere a sistema e chi sosteneva la soluzione giusta, quella che io chiamo moltiplicazione dei segni:



Giunti a questo risultato ho chiesto graficamente cosa significasse e se mi potessero dire con certezza dove di sicuro non sarebbe "passata la funzione". Ho riscontrato una grande difficoltà rispetto questa domanda, riporto graficamente le risposte che ho ricevuto:



Chi mi ha proposto il primo grafico non si è reso conto che stavamo cercando dove la funzione in questione è positiva e non il suo dominio.
Curioso il secondo grafico che mi ha suggerito uno studente giustificandolo in questo modo:
«Noi stiamo cercando dove la funzione è positiva, ci viene $x < -1$ e $x > \frac{1}{2}$, quindi prendiamo solo i valori maggiori di $\frac{1}{2}$ che sono positivi»
Mi sono resa conto che quello studente continuava a confondere dominio e codominio della funzione...
In breve gli ho rispiegato come si rappresenta graficamente una funzione e che nel richiedere dove $f(x) > 0$ la richiesta era quella di trovare gli x ai quali

corrisponde una f(x) che sia positiva!

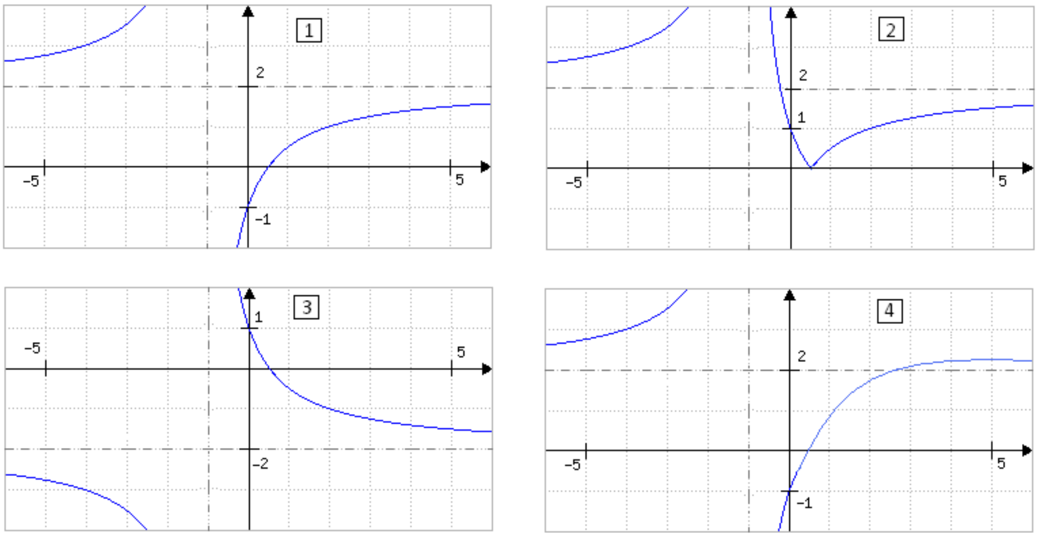
Gli ho fatto notare poi che per $x = -2$, quindi con x negativo, la funzione da noi considerata
$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$$
assume un valore positivo, 5, e gli ho mostrato sul grafico il punto $(-2, 5)$, gli ho rispiegato allora che nella ricerca del segno noi, visto che farlo punto per punto sarebbe stato impossibile, non facevamo altro che trovare valori x, a cui corrispondesse una $f(x)$ positiva e quindi graficamente sapevamo che per quegli intervalli la funzione si sarebbe trovata al di sopra dell'asse delle x, altrimenti sotto! E ho quindi mostrato il terzo grafico che è quello corretto.

Il primo limite ho chiamato uno studente alla lavagna a farlo per vedere se la spiegazione fatta in quella stessa lezione era stata efficace e questo studente lo ha risolto correttamente, gli ho chiesto allora di rispiegare alla classe il metodo ed è stato bravo.
Il secondo limite invece ha un po' spaventato gli studenti, poichè si richiedeva appunto il limite con $x \to -1^-$. Ho fatto notare agli studenti che in $x = -1$ la funzione considerata non esisteva, ma che appunto bisognava capire come si comportasse vicino a -1, in particolare in questo caso in cui veniva richiesto il limite sinistro, ci chiedevamo come si comportasse un po' prima di -1. Ho spiegato che l'idea era che x si avvicinava a -1, restando però sempre minore di -1, e quindi nel caso specifico di questo limite potevano ragionare in questo modo:
considerato $\lim_{x\to-1^-} \frac{2x-1}{x+1}$, si aveva al numeratore -3 (in questo caso il- non lo consideriamo) e al denominatore $-1^- + 1$. Si può pensare che 1^- essendo più piccolo di -1 assumerà valori negativi in modulo più grandi di -1 e che quindi questa somma restituisce un valore negativo prossimo allo zero; avendo già trovato che il numeratore era negativo si ottiene così che il limite va a $+\infty$

L'esercizio richiedeva anche il calcolo della derivata della funzione, ma le derivate le abbiamo trattate nell'esercitazione successiva.

L'esercizio successivo era collegato a questo, ne riporto il testo:

Uno di questi quattro grafici è parte di quello della funzione dell'esercizio precedente. Quale?



Lo studio del segno e dei limiti ci permetteva già di scartare i grafici 2) e 4), mentre il 3) e 1) rimanevano dei buoni candidati anche guardando allo studio dei limiti. Per la scelta tra questi due abbiamo pensato di andare a vedere il valore della funzione in $x = 5$ e abbiamo visto che in quel punto la funzione vale meno di 2, quindi abbiamo individuato la soluzione nel primo grafico!

Seconda esercitazione

Nella seconda esercitazione al secondo compitino ci siamo dedicati soprattutto alle derivate.

Siamo partiti con il seguente esercizio:
Si calcoli la derivata della seguente funzione, dove esiste:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$$

Ho chiamato per questo esercizio uno studente alla lavagna a farlo.

Ha scritto

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x - 2}}$$

Gli ho chiesto che regola di derivazione stesse usando, non mi ha risposto. Gli ho posto delle alternative: somma, moltiplicazione, composizione. Ha azzardato composizione, così gli ho chiesto di scrivermi la formula di derivazione della composizione, ma non ne è stato in grado. Così ho pensato di spiegare il metodo di risoluzione di tale esercizio a partire dalla regola:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ho chiesto allo studente se la formula scritta alla lavagna gli dicesse qualcosa e se avesse da suggerire dei cambiamenti alla derivata calcolata poco prima. Mi ha detto che questa formula l'aveva già studiata, ma che lì per lì non gli era venuta in mente; invece rispetto l'esercizio non capiva cosa ci fosse di sbagliato. Ho domandato a lui e agli altri studenti quali fossero le funzioni f e g nell'esercizio proposto.
Con qualche tentativo siamo arrivati a poter dire

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad , f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}, \qquad g(x) = x^2 - 2x + 3$$

Quindi a questo punto è diventata molto più chiara la formula e così uno degli studenti che aveva individuato f e g nell'esercizio è venuto poi a svolgere correttamente il calcolo della derivata.
Uno studente ha affermato:«ah ma quindi quella formula voleva dire quello, non l'avevo mai capito così!»

Ho poi analogamente scritto alla lavagna la formula della derivazione della somma e del prodotto e ho svolto esercizi in cui dovessero essere applicate.

Molto interessante è stato l'esercizio di cui di seguito riporto il testo:

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^3+x^2}$

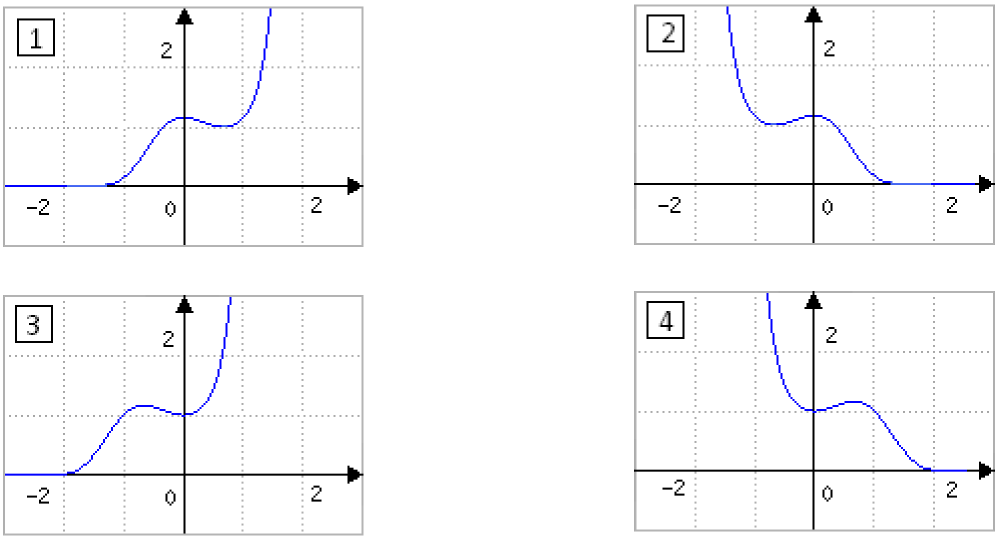
a) Segno

b) Limiti: $\left\{ \lim_{x\to 0} f(x) \lim_{x\to -\infty} f(x) \right.$

c) Derivata: quale fra le seguenti funzioni è la sua derivata?

$$1) \quad e^{x^3+x^2}(3x^2+2x) \qquad 2) \; e^{3x^2+2x} \qquad 3) \; e^{3x^2+2x}(x^3+x^2)$$

d) Grafico. Uno di questi quattro grafici è parte di quello della funzione data. Quale?



Sul segno gli allievi non hanno riscontrato particolari difficoltà e neanche sul primo limite. Il secondo limite invece li ha trovati un po' spiazzati.
Considerando infatti

$$\lim_{x\to -\infty} e^{x^3+x^2}$$

si trovavano a dover sommare due infiniti di segno opposto. Ho proposto loro di raccogliere, la prima obiezione è stata che non ci trovavamo di fronte a una funzione fratta e che sarebbe stato inutile, ho risposto che il risolvere esercizi è fatto di tentativi e generalmente può servire partire dagli strumenti che si posseggono. Hanno raccolto per x^3 e si sono trovati con un'unica x tendente all'infinito che moltiplicava un numero e una quantità tendente a 0.
A quel punto ho spiegato che il nostro vero problema era di avere degli addendi, quindi poteva essere utile raccogliere in modo da passare a considerare dei fattori! E aveva funzionato.
Riconosco che forse sarebbe stato più efficace prima aiutarli a capire dove stava il problema, ovvero che si trovavano di fronte a degli addendi che tendevano a infiniti di segno opposto e che quindi poteva essere utile cercare un modo per uscire da questa situazione, e poi ipotizzare insieme come farlo, purtroppo lì per lì non ci ho pensato.

Sulla scelta della derivata corretta, forse anche per la presenza di "buoni distrattori", hanno titubato e ho sentito tutt'e tre le risposte possibili in egual numero.

Una nota: l'esponenziale composto o semplice tende sempre a mettere in crisi lo studente nella scelta della sua derivata. Questo perché di per sé l'esponenziale risulta anomalo: gli studenti sanno che e^x derivandolo non cambia e già questo può risultare difficile da accettare, perché le derivate delle altre funzioni sono diverse dalla funzione stessa, mentre nel caso dell'esponenziale, no. Una volta che si sia accettato che la derivata di e^x è ancora e^x, quando poi ci si trova a dover fare i conti con un esponenziale composto allora la domanda che sorge è :«E adesso? Cambia? o non cambia?»

Ho riscritto la formula di derivazione della composizione e ho mostrato che semplicemente in questo la caso la $f(x)$ della formula era e^x e la g(x) era il polinomio $x^3 + x^2$ e che quindi si doveva procedere analogamente a quanto visto nell'esercizio fatto all'inizio della lezione. Per cui la risposta corretta era appunto la 1).

Siamo poi passati ad analizzare i grafici: il segno in questo caso non permetteva di scattarne nessuno, i limiti a zero invece hanno permesso di scartare i grafici 1) e 2). Per la scelta tra il grafico 3) e il grafico 4) siamo passati a guardare la derivata:
ho spiegato in breve che il segno della derivata permette di capire la crescenza e la decrescenza della funzione e che i minimi e massimi della funzione si sarebbero avuti in corrispondenza degli zeri della derivata.
Per questo abbiamo calcolato in corrispondenza di quale x la derivata della funzione si annullava e di conseguenza abbiamo scelto il grafico 3).
In questa lezione abbiamo anche iniziato a risolvere i limiti, dove possibile, con il metodo di De L'Hospital.

Riporto uno degli esercizi che abbiamo proposto:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2}(x+1)-\sqrt{x}}{ln(x)-x+1}$$

Molti studenti appena ho scritto alla lavagna questo limite hanno proposto di usare De L'Hospital, abituati forse al fatto che generalmente appena ci si scontri con un limite difficile, si ricorre subito a De L'Hospital.
Ho chiesto loro se erano sicuri di poter usare quel metodo o se non fosse necessario controllare alcune condizioni. Uno studente dal posto ha detto che era necessario controllare prima che quei limiti portassero alle forme indeterminate $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$; ho precisato che la sua risposta non era del tutto esauriente, erano necessarie altre due condizioni, dopo alcuni indugi ho ottenuto la risposta che le funzioni in questione dovevano essere entrambe derivabili e non nulle.
Siamo così passati al calcolo del limite e abbiamo trovato che era una forma indeterminata $(\frac{0}{0})$ così siamo proceduti ad applicare la regola di De L'Hospital.

Per fare questo esercizio ho chiamato uno studente alla lavagna, è partito bene derivando la funzione sopra, poi però ha continuato a derivare il resto come se stesse facendo la derivata di una frazione, per cui si è trovato immerso in un numero di calcoli molto maggiore rispetto al necessario. L'ho bloccato e gli ho chiesto di enunciarmi il teorema di De L'Hospital, nel provare a dirmelo si è reso conto da solo che stava sbagliando, quindi è riuscito a calcolare il limite.

Terza esercitazione

Nella terza esercitazione abbiamo visto esercizi su limiti, derivate, primitive e integrali; è su questi ultimi due che mi interessa soffermarmi particolarmente.
Abbiamo iniziato con il calcolo di alcune primitive, ne riporto uno:

$$\int \frac{2x^2+6x+1}{3x^2}dx$$

Ho mostrato che in questo caso si poteva spezzare l'integrale in questo modo:

$$\int \frac{2x^2}{3x^2}dx + \int \frac{6x}{3x^2}dx + \int \frac{1}{3x^2}dx$$

e si poteva risolvere il seguente

$$\int \frac{2}{3}dx + \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{1}{3x^2}dx$$

Ho ricordato la regola da usare in questi casi:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad con \quad \alpha \neq -1$$

$$e$$

$$\int x^{-1}dx = log(x) + C$$

ho quindi mostrato alla lavagna come doveva essere svolto un esercizio di questo tipo. Gli studenti non hanno avuto reazioni particolari.
Dopo vari esercizi di questo tipo, in cui ho avuto l'impressione che gli studenti

mi stessero seguendo bene, ho considerato un'altra primitiva che riporto di seguito:

$$\int (2x-5) \cdot \sqrt{x^2-5x+9}dx$$

ho spiegato che in questo caso la regola a cui bisognava rifarsi era:

$$\int f^{\alpha}(x) \cdot f'(x) = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad con\ \alpha \neq -1$$

e qui invece gli studenti hanno iniziato a non capire, ho provato allora a mostrare come si dovesse risolvere nello specifico l'esercizio proposto, ma niente questa formula li spaventava e non riuscivo a capire cosa creasse così grande scandalo in loro.

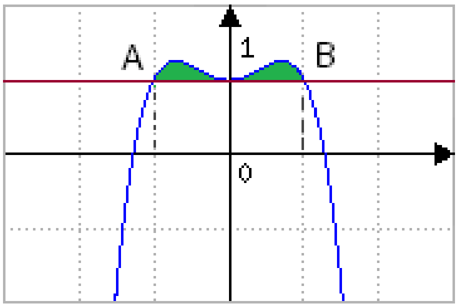
Ho cercato di mostrare che c'era un'analogia con il metodo precedente, solo che in questo caso non considerando più una semplice x^{α}, ma una funzione, ovviamente si rendeva necessario considerare la sua derivata. Niente, facce sempre più perplesse.

Ho ricordato nuovamente che lo scopo di quello che stavamo facendo era trovare una funzione che derivata ci desse l'integrando e che $\frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ derivato era proprio $f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)$ Poi ho capito che la regola precedente non aveva creato tanto scandalo perché era stata accettata come una semplice regola, non legata al significato di primitiva: come esisteva una regola di derivazione per cui $f(x) = x^{\alpha}$ e $f'(x) = (\alpha-1)x^{\alpha-1}$, così poteva esistere una regola di integrazione per cui $\int x^{\alpha} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Venendo la seconda regola a considerare una funzione e la sua derivata questo li ha destabilizzati. Ho ricominciato il discorso dall'inizio dicendo che calcolare una primitiva non significava altro che trovare una funzione che, derivata, corrispondesse all'integrando. Ho quindi mostrato che questo valeva per la prima regola di derivazione che avevo fornito loro. Poi ho mostrato che nel caso della seconda tipologia di esercizio proposta, la funzione che derivata sarebbe corriposta all'integrando era proprio quella data dalla seconda regola.

Nella spiegazione di questi esercizi mi sono resa conto che argomenti, che dopo tanti anni di Università sembrano banali, non lo sono affatto. Nella spiegazione di questo esercizio ho dovuto constatare quanto sia difficile tornare a immedesimarsi con le fatiche di uno studente alle prime armi per comprendere la vera difficoltà che egli riscontra.

Altro esercizio molto importante è il calcolo delle aree; riporto di seguito il testo:
Sono date due curve di equazioni rispettivamente $y = 1$ e $y = 1 - x^4 + x^2$ di cui vediamo i grafici:



Quanto vale l'area della parte di piano limitata compresa tra la retta e la curva?

Abbiamo impostato il problema nel modo seguente:

$$\int_{-1}^{1} 1 - x^4 + x^2 dx - \int_{-1}^{1} 1 dx$$

ovvero abbiamo pensato di considerare l'area sottesa alla curva $y = 1 - x^4 + x^2$ nell'intervallo [-1,1] e poi di sottrarle il rettangolo $\int_{-1}^{1} 1dx$.

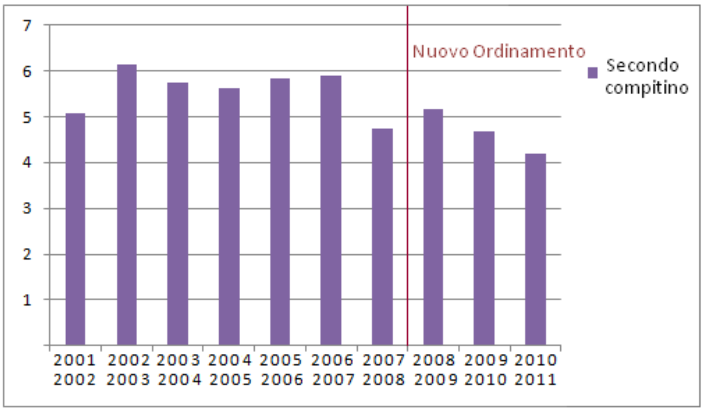
Lì per lì non ci sono state né domande né obiezioni, poi alla fine della lezione uno studente mi si è avvicinato e mi ha detto che al liceo non gli era mai capitato di dover ragionare su un grafico per impostare un integrale, semplicemente la sua professoressa gli aveva insegnato a risolvere integrali da un punto di vista di calcoli e che un esercizio del genere lo metteva in crisi. Mi ha detto che inizialmente quando avevo chiesto alla classe di trovare quell'area, lui per prima cosa aveva pensato che si dovesse impostare un sistema, visto che l'esercizio forniva due funzioni. Mi sono allora fermata a rispiegargli il procedimento fatto a partire dagli appunti della lezione tenuta dal professore. Ho visto che a lezione il professore aveva spiegato un esercizio simile, lo studente mi ha detto che a lezione non aveva avuto il coraggio di chiedere spiegazioni sia per paura della reazione dei compagni, sia per paura che il professore si ricordasse delle sue lacune all'esame.

Le paure di questo studente mostrano come a lezione spesso valgano le regole del contratto didattico, per cui lo studente vede il professore non tanto come una figura da cui poter imparare, ma piuttosto come un giudice che nel giorno dell'esame dovrà giudicarlo, per cui fino a quel momento meglio rimanere nell'ombra per non peggiorare la propria situazione.
Da una parte questo mi ha fatto rendere ancora di più conto che il ruolo di noi tirocinanti poteva davvero essere utile agli studenti che, come lui, non avrebbero mai domandato al professore, dall'altra mi rattrista e gliel'ho detto, che in generale si abbia paura a chiedere ai professori, perché si perdono delle grandi occasioni.
Mi ricordo ancora molto bene di quando l'allora mio professore di Analisi, Ermanno Lanconelli, dopo l'esame orale di Analisi 2 mi disse: «Signorina, vedo che lei le cose le ha studiate, ma vedo che comunque le erano rimasti dei dubbi, perché non è mai venuta a ricevimento a chiedermi aiuto?» e io timidamente ho risposto che generalmente se avevo delle domande le facevo ai miei amici che erano molto bravi. E lui mi ha risposto: «ma se lei va al ristorante, le portate le assaggia lei o si fa dire dai suoi amici come sono?». Come a dire che a non domandare aiuto ai professori che hanno una conoscenza molto più profonda di qualsiasi studente anche molto bravo, ci si perdeva proprio il meglio, il gusto di quello che si stava studiando.
Questo è stato per me un giudizio molto prezioso e a quello studente l'ho

voluto dire.

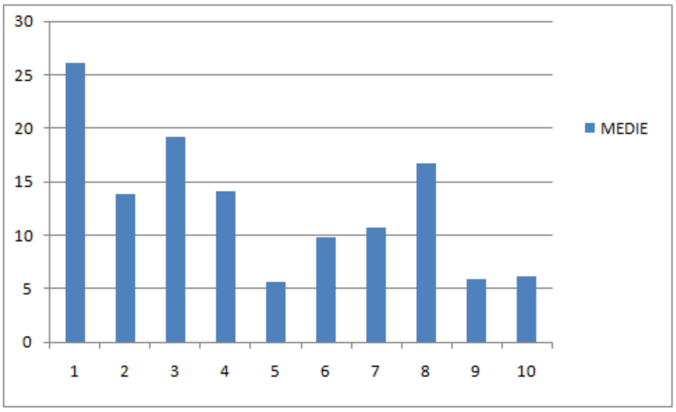
3.3.2 Esito prova scritta

Come ho già accennato, questo compito non è andato bene, anzi: solo il 38% lo ha superato con voto non inferiore a 15/30, e la media generale è poco sopra il 12/30, la più bassa di sempre. Facendo una statistica dei voti del secondo compitino dal 2001 al 2011 si ha il seguente grafico:



Da questo schema si può appunto rilevare come nell'anno 2010/11 si sia raggiunto il minimo storico, ma inoltre si può riscontrare in generale un netto progressivo peggioramento rispetto al vecchio ordinamento.
Guardiamo più nello specifico quali sono gli esercizi che hanno recato maggiori difficoltà attraverso il grafico sottostante:

L'esercizio 5) chiedeva di riconoscere il grafico della funzione di cui nell'esercizio 4) si erano studiati segno, limiti e derivata. Inizialmente mi ha molto stupito che tantissimi studenti non avessero riconosciuto il grafico della funzione da studiare, visto che nel primo compitino tendenzialmente questa tipologia di esercizio era andata abbastanza bene, il problema poi era stato nella giustificazione della loro scelta più che nel riconoscimento. Poi mi sono resa conto che la funzione di cui si doveva riconoscere il grafico era una



funzione logaritmo e quindi ho dovuto constatare che rispetto al primo compitino, la conoscenza e l'uso dei logaritmi non era affatto migliorato, nello studio del segno del logaritmo tantissimi studenti hanno posto l'argomento maggiore di 0 e non di 1!

Poi procedendo in ordine crescente troviamo l'esercizio 9) che richiedeva il calcolo della seguente primitiva (per il compito C):

$$\int \frac{(x+1)^3}{5x^2}dx$$

Tanti studenti hanno proprio lasciato in bianco questo esercizio. Da una parte, di quelli che hanno lasciato in bianco sia il nono che il decimo non possiamo dire se sia stato più un problema di tempo o se abbiano proprio rinunciato a farlo per mancanza di conoscenze; dall'altra questo esercizio secondo me ha mietuto tante vittime non solo o non tanto perché riguardasse contenuti particolarmente difficili, ma per la forma in cui si presentava.
È molto probabile che gli studenti si siano spaventati vedendo un cubo di binomio, per cui invece di pensare di calcolarlo e ottenere un esercizio della prima tipologia di quelli che avevo spiegato sulle primitive, avrà pensato di dover applicare la seconda formula che aveva lasciato tanti perplessi...

Per questo compitino il professore aveva chiesto a noi tirocinanti di propor-

gli qualche tipologia, e questo esercizio in particolare l'aveva ideato Gloria, che non aveva assolutamente immaginato le conseguenze che avrebbe potuto avere scrivere l'esercizio in quella forma!
Ci siamo dovuti rendere conto del fatto che non è affatto banale la scelta di esercizi di verifica delle conoscenze degli studenti che diano un feedback che il più possibile riveli il livello di comprensione degli studenti.
E in generale capire il livello di difficoltà che l'esercizio deve avere in relazione a quanto si è spiegato non è affatto semplice, ad esempio dei quattro esercizi che avevo proposto al professore, lui ne ha usato solo uno modificandolo un po' perchè si era accorto che gli esercizi da me proposti erano troppo difficili, cosa che io, con meno esperienza, non avevo pensato.

E infine il 10), ovvero il limite con De L'Hospital. Ho notato che pochi di quelli che hanno preso 0 in questo esercizio lo avevano lasciato in bianco, la maggior parte ha proprio sbagliato ad impostare questo limite dall'inizio: da chi non è stato neppure in grado di capire che si trovava di fronte a una forma indeterminata e ha trovato:

$$\lim_{x\to 0} \frac{cos(x) - e^{x^2}}{sin^2(x)} = \frac{1-e}{0}$$

a chi si è fermato al fatto di avere trovato una forma indeterminata, ma forse non l'ha riconosciuta come tale e come risultato ha posto

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin^2(x)}{cos(x) - e^{x^2}} = \frac{0}{0}$$

fino a chi si è ostinato a voler trattare questo limite come una funzione fratta e ha svolto una grande quantità di conti. Non saprei risalire alla causa di questo insuccesso nell'esercizio 10), quel che è certo è che è stato molto trascurato anche da studenti che hanno preso alla fine un voto alto.

Continuando in ordine crescente troviamo l'esercizio 6) in cui si richiedeva il calcolo di un'area. Il fatto che questo esercizio sia andato meglio di quello sulla primitiva conferma quanto avevo detto commentando l'esercizio 9), cioè che c'è stato più un problema di forma che di contenuti.

3.3.3 Correzione

Visto l'esito di questa prova abbiamo rispiegato in aula il metodo di svolgimento di tutti gli esercizi. Mi soffermo in particolare sul 4) e sul 5) e ne riporto di seguito i testi:

4.Sia $f :]-3, 3[\longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = ln(9 - x^2)$

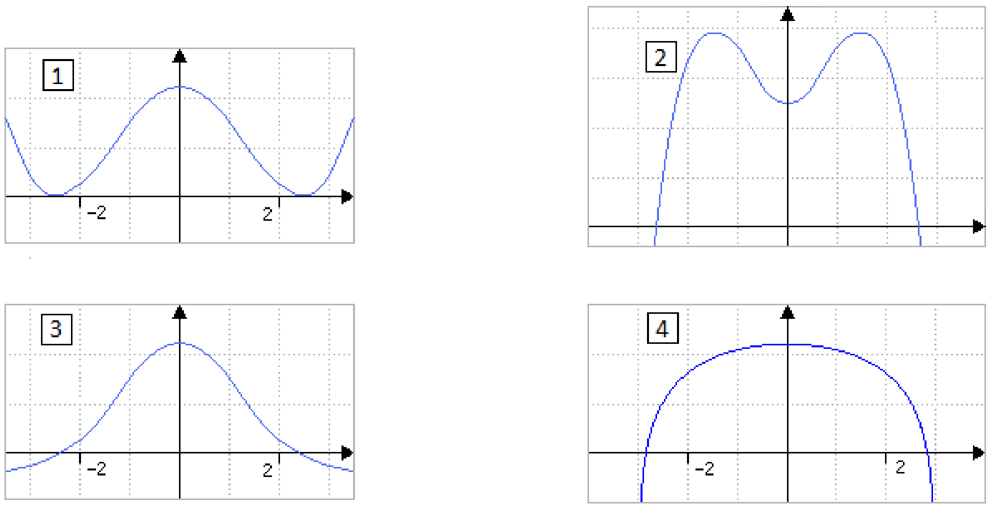
a) Segno: $f(x) > 0$

b)Limiti: $\begin{cases} \lim_{x\to 0} f(x) \\ \lim_{x\to -3} f(x) \end{cases}$

c)Derivata: quale fra le seguenti funzioni è la sua derivata?

$$1) \quad -2xln(9-x^2) \qquad 2) \; \frac{2x}{x^2-9} \qquad 3) \quad -2xln(x) + \frac{9-x^2}{x}$$

5. Uno di questi quattro grafici è parte di quello della funzione dell'esercizio precedente. Quale?



Come appunto dicevo l'esercizio 5) è quello che ha mietuto più vittime. La riuscita di tale esercizio dipendeva essenzialmente da uno svolgimento

corretto dell'esercizio 4).
Il motivo per cui l'esercizio 4) ha avuto un esito migliore rispetto al 5) sta nel fatto che l'esercizio 4) era composto di tre quesiti per cui un punteggio minimo lo si poteva ottenere anche solo svolgendo correttamente uno dei tre, mentre il 5) conteneva una sola domanda a cui era molto difficile poter rispondere non avendo risposto correttamente a tutti e tre i quesiti della 4).

Ho rispiegato per l'ennesima volta che la positività del logaritmo la si trovava ponendo l'argomento maggiore di uno. Un ragazzo mi ha detto che inizialmente aveva posto

$$9 - x^2 > 1$$

si era poi accorto che i calcoli venivano con la radice, e che sarebbero venuti più semplici ponendo

$$9 - x^2 > 0$$

e questo lo aveva convinto, più di tutte le spiegazioni ricevute, aggiungo io, a considerare la seconda disequazione.
Sul limite a -3 ho avuto le più svariate risposte da chi sosteneva che $ln(0)$ valesse 1, a chi sosteneva che $ln(0)$ fosse un limite impossibile.
Per la correzione della derivata ho chiamato alla lavagna una ragazza che avevo visto che aveva usato un procedimento inspiegabile nel compitino che riporto:

$$(ln(9 - x^2))' = \frac{1}{x}(9 - x^2) + ln(-2x) = -2xln(x) + \frac{9 - x^2}{x}$$

Il primo passaggio, me l'ha ripetuto uguale, il secondo ovviamente no, avevo infatti già avuto il sospetto che avesse azzardato quel passaggio solo per potersi riallacciare a una delle risposte multiple fornite!
Le ho chiesto di spiegarmi il procedimento che stava mettendo in atto, mi ha risposto: «Derivata del primo per il secondo + la derivata del secondo»
Evidentemente qui mancava proprio una preparazione adeguata.
Le ho chiesto di scrivermi la formula di derivazione che stavamo usando e non ne è stata capace. Le ho allora scritto io alla lavagna la formula per

vedere se poi una volta studiata la teoria sarebbe stata in grado di svolgere l'esercizio. Ha fatto fatica soprattutto ad arrivare a scrivere la

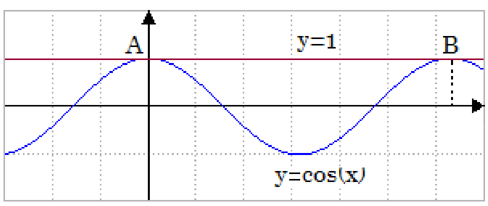
$$f'(g(x)) = \frac{1}{x^2 - 9}$$

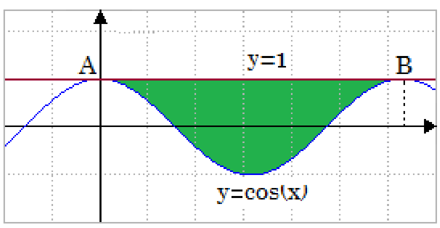
Sul fatto che la derivata del $ln(x)$ fosse $\frac{1}{x}$ non aveva dubbi, ma continuava ad immaginarsi che quella derivata in $f'(g(x))$ dovesse comparire.
Capito questo passaggio, poi il calcolo della derivata è riuscita a farlo.

A quel punto ho disegnato alla lavagna tutti e quattro i grafici e guardando il segno abbiamo scartato il grafico 1), guardando i limiti si poteva scartare il grafico 3) e infine nella sceltra tra i grafici 2) e 4) abbiamo guardato gli zeri e il segno della derivata che ci hanno permesso di scartare il grafico 2). Come dicevo l'esercizio 5) aveva come condizione necessaria lo svolgimento dell'esercizio 4), ma questa non era una condizione sufficiente, alcuni studenti hanno sbagliato nella scelta del grafico nonostante avessero svolto correttemente tutto l'esercizio 4).
Non era infatti scontato che chi sapeva calcolare la derivata correttamente poi pensasse di guardarne segno e zeri per giungere alla soluzione dell'esercizio 5).

Infine mi sembra interessante riportare la correzione dell'esercizio 6). Ne riporto il testo:

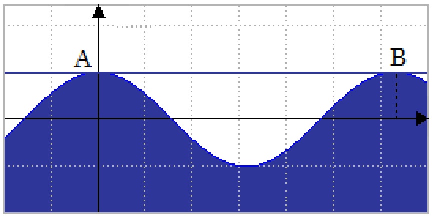
6. Sono date due curve di equazioni rispettivamente $y = 1$ e $y = cos(x)$, di cui vediamo parte dei grafici.





a) Si determinino le coordinate dei punti di intersezione visibili sullo schermo A e B.
b) Quanto vale l'area della parte di piano in verde compresa fra le due curve?

Alcuni studenti mi hanno detto che per loro la maggiore difficoltà di fronte a questo esercizio era stata nel fatto di dover trovare un'area non semplicemente sottesa al grafico, ma a "cavallo dell'asse x" per cui non capivano proprio come partire di fronte ad un esercizio del genere.
Qualcuno mi ha detto che gli era quasi venuto il dubbio che in generale l'area sottesa al grafico non fosse quella delimitata dall'asse x, ma comprendesse i quadranti sottostanti, come riporto sotto:



Una studentessa mi ha detto che aveva provato a fare la somma degli integrali delle due funzioni e poi si era bloccata.
Ho spiegato che molto più semplicemente di tutti i pensieri che avevano fatto avrebbero potuto scegliere uno dei due semplici metodi da me proposti.
Il primo era quello di accorgersi che l'area che si trovava al di sotto dell'asse delle x era equivalente alla somma degli integrali del coseno nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\left[\frac{3}{2}\pi\right]$ e che quindi bastava considerare l'area sottesa alla retta $y = 1$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ e risolvere l'integrale

$$\int_0^{2\pi} 1dx$$

L'altro un po' più lungo poteva essere quello di calcolare l'area sottostante alla retta e sottrarle l'area sottesa al coseno negli intervalli $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\left[\frac{3}{2}\pi\right]$, poi sommare l'integrale (cambiato di segno) del coseno calcolato nell'intervallo

$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)dx - \int_{\frac{3}{2}}^{2\pi} cos(x)dx$$

3.4 Il Terzo Compitino

3.4.1 Preparazione

In preparazione al terzo compitino è stata fatta un'unica esercitazione. Non so per quale strano motivo a questa esercitazione si sono presentati molti studenti che non erano mai venuti alle altre, ma con non tanta voglia di ascoltare, per cui da un punto di vista di clima di lavoro è stata molto più faticosa delle altre esercitazioni.

Tra i vari esercizi proposti ne riporto uno in cui si richiedeva di indicare il rango delle matrici riportate:

Per ciascuna delle matrici seguenti si indichi il rango:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Questo esercizio siamo riusciti a risolverlo con non tante difficoltà.
Gli studenti hanno subito riconosciuto che la prima matrice era ridotta a scala per righe e di conseguenza il suo rango corrispondeva al numero delle righe non nulle.
La seconda matrice si vedeva abbastanza velocemente che aveva rango 1, in quanto tutte le righe non nulle erano multiple della prima riga e infine la terza aveva rango 3, in quanto due righe erano uguali, dopo averne tolta una si otteneva una matrice a scala per righe.
Un esercizio in cui ho ricevuto delle obiezioni, non corrette, è il seguente:

Si risolva l'equazione

$$det\left(\left(\begin{array}{cc} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{array}\right) - t\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)\right) = 0 \quad in \;\; t$$

Stavo spiegando il metodo da usare, ovvero che per prima cosa bisognava moltiplicare la matrice identità per t, poi fare la sotttrazione tra matrici e infine calcolare il determinante della matrice così ottenuta, quando una studentessa, facente parte del gruppetto di studenti che non avevo mai visto a lezione fino a quel giorno, un po' stizzita forse per il fatto che avevo ripreso lei e il suo gruppetto di amici un paio di volte durante la lezione, con aria di sufficienza mi obbietta: «Ma così lei ci fa fare tantissimi calcoli in più rispetto al dovuto, io l'ho risolto più velocemente», le ho chiesto allora di spiegarmi quale fosse il metodo da lei usato e mi ha spiegato che prima lei calcolava i determinanti delle matrici e poi sottraeva al primo determinante il secondo moltiplicato per t.
Le ho allora spiegato che non era affatto detto che determinante della differenza tra matrici fosse uguale alla differenza dei determinanti, anzi, proprio no. Per un po' ha persistito nella sua idea, sostenendo che non avevo capito il suo ragionamento, poi però si è accorta che i risultati non coincidevano e mi ha dato retta.

Poi abbiamo visto l'esercizio 6) riporto di seguito il testo:

6. Completa le frasi seguenti, in modo da ottenere affermazioni vere su di un sistema lineare con m equazioni ed n incognite. Siano A la matrice incompleta e $C = [A|B]$ la completa.
a) Se $r(A) = r(C) - 1$ il sistema è....................
b) Se $r(A) = r(C) = n - 2$, allora le soluzioni dipendono da ......parametri
c) Affinché il sistema abbia soluzioni, è necessario che si abbia $r(A) =$.............................
d) Se B è il vettore nullo, il sistema è chiamato.........................ed ha certamente la soluzione.......................
e) Se $m = n$ e $det(A) \neq 0$, allora il sistema è...............................

Per risolvere questo esercizio ho fatto domande dal posto in modo da poter vedere anche la preparazione generale su questo argomento.

Alla domanda a) un ragazzo mi ha risposto che un sistema che avesse quelle condizioni era impossibile, in quanto a lezione il professore aveva spiegato che un sistema aveva soluzione se il rango della matrici associate completa e incompleta coincidevano. Anche sulle altre domande non hanno avuto particolari difficoltà apparte la b). Essenzialmente erano divisi tra chi sosteneva che i parametri dovessero essere 2 e chi invece n-2.
Allora per aiutarli ho scritto alla lavagna un'equazione in 3 incognite e ho chiesto quale fosse il rango della matrice associata, mi hanno risposto 1, e visto che appunto le incognite erano 3, eravamo proprio nel caso $rank(A) = n - 2$. È stato allora molto semplice vedere che la soluzione dipendeva proprio da 2 parametri e non da $n - 2 = 1$. Poi ho spiegato la regola generale.

Altro esercizio interessante è il numero 8). Riporto il testo:

Le seguenti sono le matrici "complete" di tre sistemi lineari. Collocate nelle caselle e indicate un numero reale a vostra scelta, in modo che i sistemi lineari cui si riferiscono abbiano soluzioni:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & [\,] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & [\,] & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & [\,] \end{pmatrix}$$

Per affrontare tale esercizio ho chiesto allo studente che aveva risposto correttamente alla domanda a) dell'esercizio 6) di venirlo a svolgere alla lavagna. Innanzitutto ha constatato che nella prima matrice la seconda e la terza riga erano una multipla dell'altra a meno della determinazione della casella vuota

al termine noto. Rifacendosi alla regola che aveva enunciato, mi ha appunto detto che lui avrebbe posto nella casella vuota il termine -4, in modo che la seconda riga fosse esattamente il doppio della terza, altrimenti il rango della matrice completa e incompleta non sarebbero stati uguali. Poi guardando il secondo sistema mi ha detto che bastava porre nella casella zero.
La terza matrice ho preferito risolverla io perché richiedeva quache passaggio in più e mi interssava quindi soffermarmici con più precisione.
Innanzitutto ho mostrato che era necessario ridurla per righe in modo da poter vedere quali fossero i ranghi della matrice completa e incompleta. E ho fatto notare che nelle due matrici viste prima questo passaggio non era stato necessario perché erano già ridotte per riga.
Ho anche spiegato che al posto della casella vuota potevano usare un' incognita t e che questo li avrebbe agevolati nei calcoli. Come primo passaggio nella riduzione ho pensato di porre come terza riga la sottrazione dell'ultima dalla prima

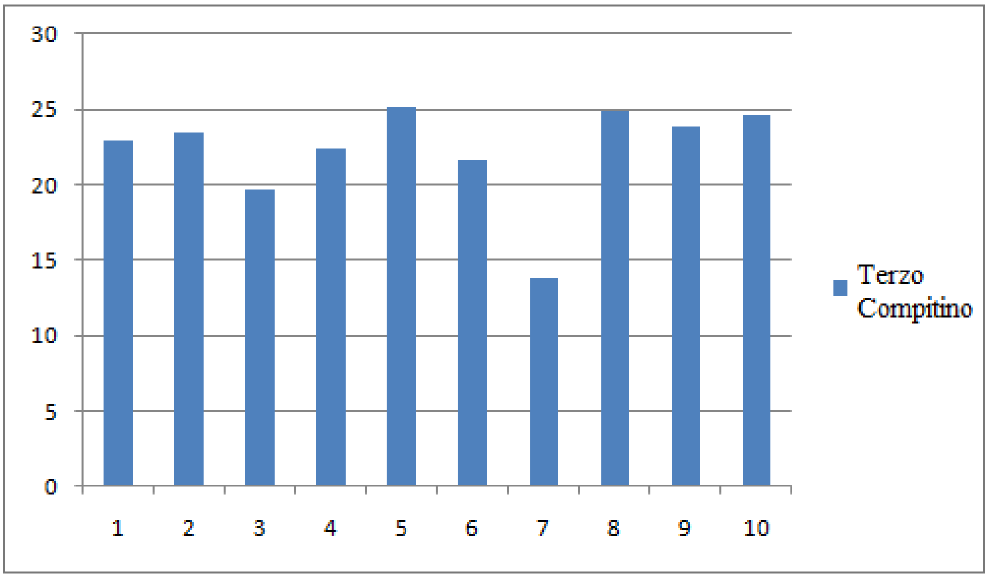
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 5-t \end{pmatrix}$$

A questo punto ho fatto notare che, come per la prima matrice, ci trovavamo di fronte a una matrice con due righe una l'opposta dell'altra a meno della casella con l'incognita t, per cui rimaneva da porre

$$5 - t = 3 \ \Rightarrow t = 2$$

3.4.2 Esito prova scritta

Il terzo compitino ha avuto un esito molto migliore degli altri due compitini, la media è stata 22,78 trentesimi. Vediamo le medie di ogni tipologia di esercizio:



L'unico esercizio che in media non ha raggiunto la sufficienza è l'esercizio 7) che però a quanto ho potuto vedere, ha creato difficoltà a livello di calcoli. In ordine crescente troviamo il 3) poco sopra la sufficienza, e anche questo ha creato difficoltà a livello di calcoli.

Probabilmente il terzo compitino ha riscosso un così buon esito perché rispetto ai primi due non richiedeva delle particolari conoscenze pregresse, per cui anche gli studenti, che a causa di lacune derivanti dalle scuole precedentemente frequentate, non erano riusciti ad ottenere buoni risultati nei primi due, in questo compitino hanno potuto vedere premiato il loro studio.

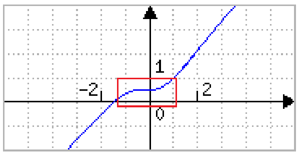
3.5 Il Laboratorio

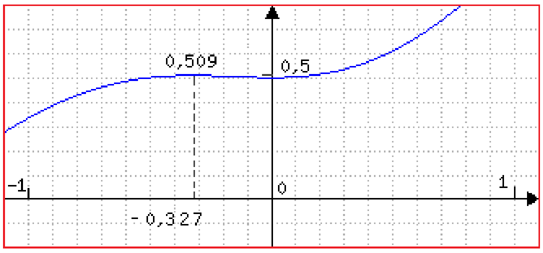
Per quanto riguarda il laboratorio mostro un'esercitazione fatta in aula dal professore e poi vediamo gli esiti della prova.
Il ruolo di noi tirocinanti come appunto ho già accennato era quello da una parte di mostrare come i passaggi fatti dal professore alla lavagna dovessero essere riportati sulla calcolatrice, dall'altra di assistere gli studenti in caso di problemi con l'uso della calcolatrice.
La prova di laboratorio consiste generalmente dello studio di una funzione, del cacolo della sua area, di svolgere un esercizio sulle matrici e infine di fare uso delle coordinate polari. In particolare nel primo esercizio viene chiesto di riportare la riga di introduzione nella calcolatrice della funzione data. Nel secondo di tracciarne il grafico in coordinate cartesiane. Nel terzo di riportare valori della funzione in corrispondenza di determinate ascisse. Nel quarto esercizio si richiede di individuare il massimo della funzione data. Nel quinto di trovare eventuali flessi. Nel sesto di calcolare la derivata della funzione. Nel settimo si chiede il calcolo dell'area sottesa al grafico della funzione. Nell'ottavo si chiede la risoluzione di un'equazione data. Nel nono esercizio si richiede appunto di risolvere un sistema lineare. Infine nel decimo esercizio si chiede il grafico di una funzione in coordinate polari.

In una lezione di laboratorio il professore ha proposto agli studenti lo studio per mezzo della calcolatrice TI-92 della funzione

$$y = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 2}$$

Tale funzione ha un flesso per x = -0,1608894..., che dal grafico sembra ascendente, o alla peggio orizzontale, ma invece la tangente ha coefficiente angolare -0,040...
Solo con opportuni zoom si riescono a individuare un massimo ed un minimo relativi molto vicini, precisamente (-0,32748...; 0,50878...) e (0; 0,5): come si vede, la differenza tra le ordinate del massimo e del minimo è 0,0087..., ben poco visibile.

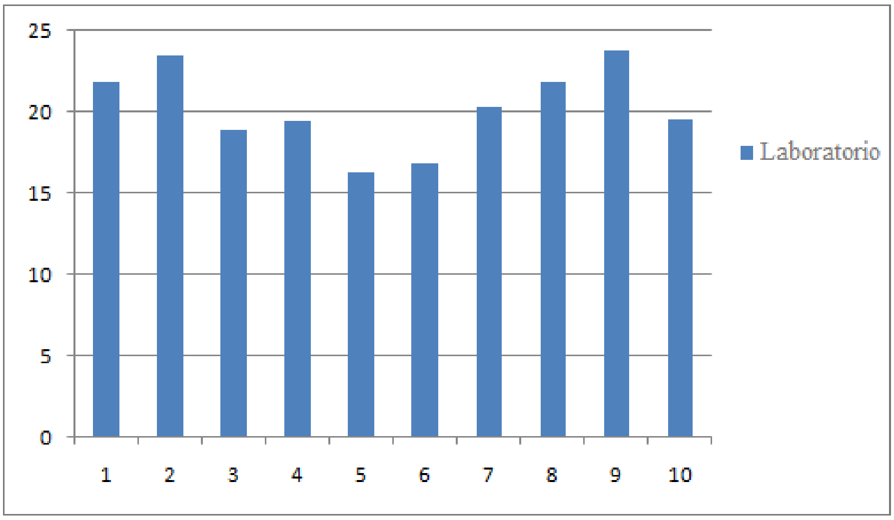




Il professore ha poi domandato alla classe di motivare la stranezza di un flesso discendente mentre sembrava ascendente.
Si sono così potuti constatare i limiti di risoluzione della calcolatrice per cui per differenze così minime nei valori, si parla di un ordine di grandezza di 10^{-3}, il grafico tracciato sembra resti costante.

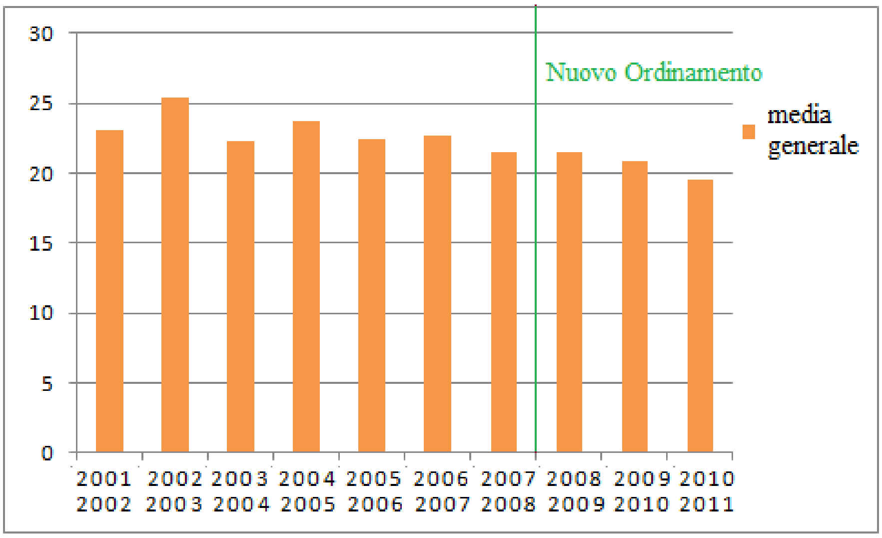
La prova di laboratorio è andata discretamente bene, è stata sostenuta da 79 studenti in totale e la media in trentesimi è stata di 19,82.
Per completezza[11] riporto di seguito le medie degli esercizi:

[11]Su questo argomento si veda la tesi di Gloria Bartolini "Una sperimentazione in un liceo scientifico: le tassellazioni del piano con l'uso di un software di geometria dinamica"
Nuove tecnologie e nuova scuola: quali opportunità per una didattica sensata della matematica?, D.Paola
Dall'abaco al computer: formazione e pratica professionale dell'insegnante, M.G.Bartolini Bussi
Il laboratorio di matematica: storia e osservazioni, M.Bartolini Bussi
Le calcolatrici grafiche nell'insegnamento della matematica, S.Cappuccio
Il computer in classe nuove strategie di intervento: spunti e riflessioni per la formazione e la pratica professionale dell'insegnante, M.A.Mariotti
Riflessioni sui problemi attuali della formazione dell'insegnante di matematica e l'utilizzo delle nuove tecnologie nell'insegnamento, L.Tomasi
Dalla ricerca in didattica alle proposte didattiche in rete: il caso del progetto SET, P.Boero, R.Garuti
Conoscenze scientifiche: le rappresentazioni mentali degli studenti, a cura di N.G.Tomasini, G.Segrè, La Nuova Italia editrice, 1991



3.6 NOTA

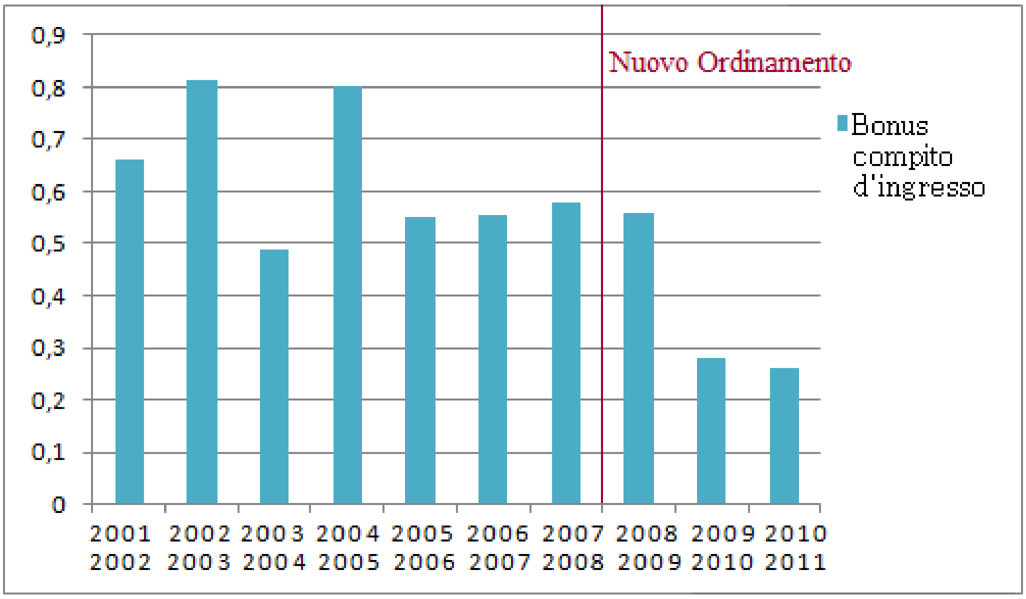
Quest'anno si è avuto il minimo storico come media dei compitini rispetto agli altri anni, ma in generale dal grafico sottostante si può notare che l'andamento delle medie dei compitini negli anni, e in particolare dal nuovo ordinamento, è sempre stata pressoché decrescente.



Mi è sembrato dunque interessante paragonare il programma svolto quest'anno con quello svolto nel 2006, e rintracciarne eventuali differenze che potrebbero avere portato a esiti tanto diversi, come possiamo vedere nel grafico.

Guardando i programmi svolti in questi due diversi anni non ho rilevato differenze nei contenuti. L'unica differenza che ho potuto riscontrare è che nel 2006 il professore ha usato spesso le ore di laboratorio con la calcolatrice TI-92 per introdurre argomenti quali le funzioni esponenziali, le funzioni circolari, e per questo ha fatto uso anche del software Cabri, e le matrici, mentre quest'anno si è limitato per lo più a mostrare come gli argomenti spiegati trovassero applicazioni nella calcolatrice.
Dubito fortemente che le cause degli insuccessi di quest'anno possano dipendere da questo.

Mi sono dunque interessata di paragonare i voti del compito d'ingresso, per vedere se già il livello di conoscenze pregresse fosse differente nelle due annate e poi ho voluto approfondire come il passaggio dal vecchio al nuovo ordinamento abbia potuto eventualmente influenzare gli esiti e la preparazione degli studenti.
Per quanto riguarda i voti del compito di ingresso si ha che quest'anno gli studenti hanno ottenuto il bonus minimo. E guardando l'andamento del bonus dal 2001 ad oggi, si può notare che anche questo è pressoché decrescente.



Quindi un fattore da tener presente in questa valutazione è sicuramente il fatto che già il livello di formazione con cui gli studenti si presentano si è abbassato negli anni. Le ragioni sarebbero da ricercare nella scuola.

Come dicevo mi è sembrato interessante anche andare a vedere le differenze tra vecchio e nuovo ordinamento, in particolare i crediti attribuiti al corso e il carico di studio richiesto agli studenti durante lo svolgimento di questo corso. Ho quindi considerato il piano didattico del primo trimestre per l'anno 2006-07, che riporto di seguito

Attivita' Formativa	SSD	CFU	Docente
41347-CORSO INTEGRATO DI CHIMICA GENERALE E INORGANICA			
1 58075 - CHIMICA GENERALE E INORGANICA I	CHIM/03	3	Roveri Norberto
58076 - CHIMICA GENERALE E INORGANICA II	CHIM/03	3	Roveri Norberto
1 41348-CORSO INTEGRATO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE			
1 00543 - ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I	MAT/01	3	Verardi Libero
1 00545 - ISTITUZIONI DI MATEMATICHE II	MAT/01	3	Verardi Libero
1 58374 - GEOGRAFIA E CARTOGRAFIA	GEO/04	7	De Waele Jo
1 16692 - LABORATORIO DI INFORMATICA	INF/01	2	Barbieri Roberto
1 00914 - STATISTICA	SECS-S/02	3	Cavicchi Sandro

e l'ho confrontato con il piano didattico per il primo semestre di quest'anno Si ha che la somma dei crediti richiesti nel primo trimestre del 2006 era di

Attivita' Formativa	SSD	CFU	Docente
58075 - CHIMICA GENERALE E INORGANICA	CHIM/03	6	Roveri Norberto
27894 - MATEMATICA E INFORMATICA(C.I)			
00541 - ISTITUZIONI DI MATEMATICHE	MAT/01	6	Verardi Libero
00455 - GEOGRAFIA	GEO/04	7	De Waele Jo
13520 BIOLOGIA ANIMALE	BIO/05	6	Zaccanti Francesco
00405 - FISICA	FIS/01	6	Cavalcoli Daniela

24 cfu, contro i 31 cfu richiesti nel 2011.
Sicuramente un carico di studio maggiore può andare a penalizzare la preparazione degli studenti, soprattutto se si considera che ci stiamo riferendo al primo semestre del primo anno, momento molto delicato per lo studente che si trova in una realtà totalmente nuova rispetto alle esperienze di scuola precedenti.

Capitolo 4

Conclusioni

L'esperienza di tirocinio è stata per me molto formativa e profonda sotto molteplici aspetti.
Innanzitutto mi ha permesso di mettere alla prova le conoscenze finora acquisite e di ricapirle e reinventarle per renderle più accessibili agli studenti. Mi sono quindi dovuta porre per la prima volta il problema della trasposizione didattica[1] , perché a uno studente di Scienze Naturali non si possono spiegare argomenti con lo stesso rigore e complessità come li si è appressi in un corso di laurea di Matematica. In questo è stato fondamentale l'aiuto del professore Verardi, che avendo scelto i contenuti del corso e avendone più presenti di noi le finalità ci ha guidato fino nel particolare su come insistere e approfondire alcuni argomenti rispetto ad altri.
Indispensabile si è rivelata la continua immedesimazione con gli studenti nelle loro fatiche, nelle loro concezioni erronee o imprecise, per poter poi venire realmente in aiuto a loro, senza fermarci alla sola esposizione di procedimenti formali per la risoluzione di esercizi.

[1]Lavoro di adattamento, di trasformazione del sapere in oggetto di insegnamento, in funzione del luogo, del pubblico e delle finalità, didattiche che ci si pone (tenendo conto anche delle orientazioni fornite dalle istruzioni e dai programmi). L'insegnante non deve banalizzare il proprio sapere, ma deve creare un nuovo sapere che possa essere appreso dagli studenti. Bruno D'Amore (1999) Elementi di Didattica della Matematica, Pitagora editrice Bologna

Nell'entrare in aula da insegnante e non da discente si sono poste poi tutta una serie di altre problematiche, quali il farsi rispettare dagli studenti, il mantenere un clima che aiutasse nell'apprendimento, ma allo stesso mostrarsi disponibili alle difficoltà degli studenti in modo che quelle ore di insegnamento potessero essere fruttuose sia per noi che per loro.
Per loro in quanto ci avrebbero guadagnato in apprendimento, per noi in quanto scontrarci con le loro fatiche più profonde sarebbe stato una buon allenamento per il futuro.
Per questo, come ho già accennato nel corso della tesi, ho esplicitamente detto all'inizio della prima esercitazione che quello che mi interessava di più e che di più doveva interessare a loro era che quelle ore realmente le usassero come uno strumento per loro stessi di apprendimento, in cui potevano esplicitare tutti i loro dubbi senza paura di un'eventuale valutazione da parte nostra e, visto che già di fronte a me non vedevo un buon clima di lavoro, ho invitato chiunque non fosse interessato al tipo di lavoro da noi proposto a non stare lì a perdere tempo.
Devo dire che questo approccio, guardando a come poi si sono svolte le esercitazioni nell'arco dei mesi, è risultato a mio parere vincente. Nel tempo sempre di più gli studenti hanno iniziato a rispettarci e soprattutto come ho mostrato nel corso della tesi a "sfruttarci" per quello che potevamo portare loro.
Ora so che se andrò a insegnare in una scuola media superiore o inferiore non potrò sicuramente porre la questione in questi termini, ma in generale credo che gli studenti vadano sfidati e responsabilizzati, in modo da farli accorgere del fatto che il problema dell'apprendimento non è dell'insegnante che deve valutarli, ma è il loro e che a scuola hanno la possibilità di imparare cose che difficilmente potranno poi imparare altrove.
Infine ritengo che questa esperienza di tirocinio sia stata per me molto formativa in quanto mi è stata data la possibilità, sia durante l'esperienza, sia grazie a questo lavoro di tesi, di poterla giudicare sia con i miei compagni, ma soprattutto con il Professore Verardi, che ci ha continuamente aiutati e

guidati per tutto il percorso.

Ringraziamenti:

Desidero ringraziare di cuore il mio relatore, il Professore Libero Verardi, per la fiducia, la pazienza e la stima dimostratemi nel corso del tirocinio e della redazione della tesi. Nella collaborazione con lui ho avuto modo di imparare tanto sia a livello professionale che umano: il suo entusiasmo per l'insegnamento e la sua continua voglia di mettersi alla prova, mi hanno testimoniato un modo di essere insegnante che mi ha affascinato e che vorrei diventasse anche mio.

Capitolo 5

Appendice

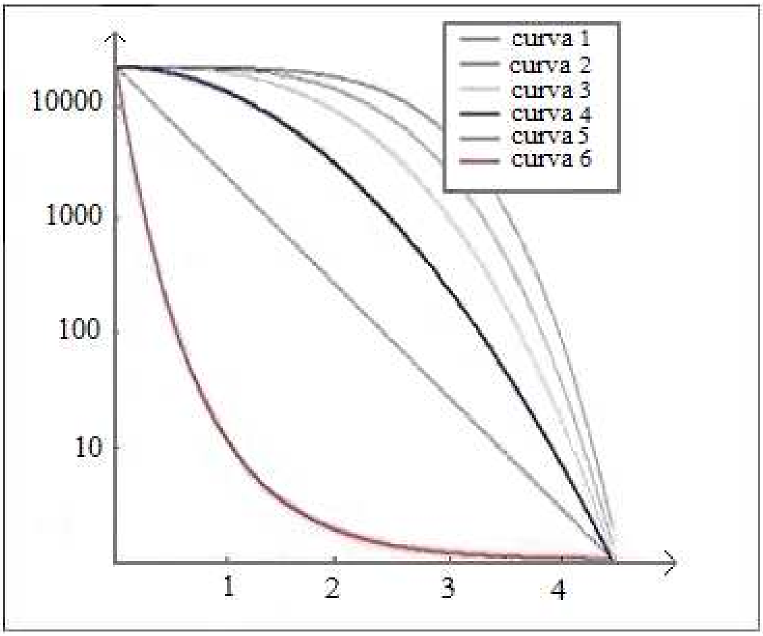
5.1 Ecologia

Nello studio della dinamica di popolazione si considerano quelle che vengono chiamate **curva di sopravvivenza** e **curva di mortalità**, delle quali la prima si ottiene ponendo in ascissa l'età di morte e in ordinata il numero di individui che muoiono per classi di età, mentre la seconda si ottiene ponendo sull'ascissa l'età in scala normale e sull'ordinata il numero di individui sopravvissuti delle successive classi di età, in scala logaritmica.
La curva di sopravvivenza ha forme diverse in funzione della mortalità[1] di individui giovani o vecchi:

- nelle curve 1) 2) e 3) la mortalità è concentrata negli individui più vecchi, per cui la probabilità di morte cresce con l'età

- nella curva la 4) la mortalità è costante per unità di tempo, per cui la probabilità di morte aumenta gradualmente con l'età

[1]La mortalità si rileva come rapporto tra il numero di morti per unità di tempo e la dimensione media della popolazione



- nella curva 5) la mortalità diminuisce con il passare del tempo per cui la probabilità di morte è costante con l'età

- nella curva 6) la mortalità è concentrata in età giovanile con probabilità di morte che diminuisce con l'età

Per quanto riguarda invece l'accrescimento si considera un fattore detto **fattore di accrescimento**[2], indicato con r, e due modelli: esponenziale e logistico.

Quando le risorse ambientali sono in eccesso rispetto alle esigenze della popolazione, la natalità[3] è maggiore della mortalità; di conseguenza il fattore r è positivo e lo sviluppo numerico della popolazione assume un andamento

[2]Il fattore di accrescimento si ottiene come rapporto tra la differenza tra nati e morti e la dimensione media della popolazione in un intervallo di tempo Δt

[3]La natalità si rileva come rapporto tra il numero di nati per unità di tempo e la dimensione media della popolazione

esponenziale.

In caso contrario il fattore r assume segno negativo per cui la popolazione subirà una diminuzione numerica; in questo caso l'evoluzione delle dimensioni della popolazione segue una curva esponenziale in diminuzione.

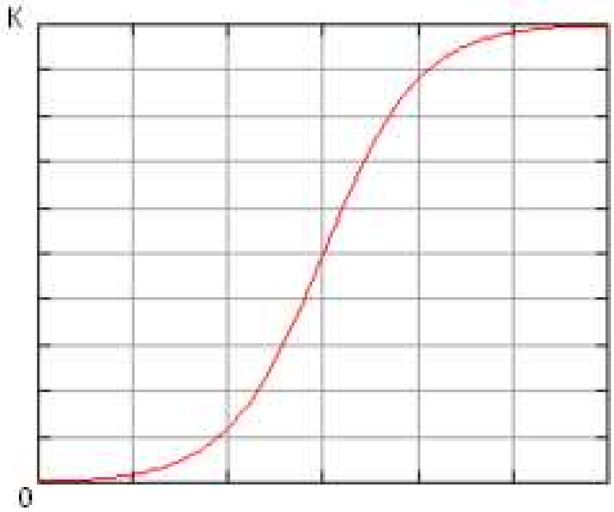
Quando i fattori limitanti non sono così drastici da determinare il collasso di una popolazione, si realizza un meccanismo, detto feedback, che controlla gradualmente la dimensione della popolazione fino a farla stabilizzare intorno a un valore di densità massima per quelle condizioni ambientali. Si ha che allo sviluppo esponenziale segue un rallentamento graduale, dovuto a fattori ambientali, fino ad arrivare ad un equilibrio tra natalità e mortalità.
Il valore di dimensione K, corrspondente all'asintoto della logistica, è detto capacitaà portante e rappresenta la situazione di equilibrio dipendente dalle risorse ambientali disponibili e dalle esigenze globali della popolazione. A questo livello, poichè il numero di nati e il numero di morti si equivalgono, l'accrescimento numerico è pari a zero. Questo tipo di accrescimento viene descritto con una formulazione matematica[4] e l'andamento prende il nome di **curva logistica**.

5.2 Genetica

LEGGI DI MENDEL

Legge dell' uniformità degli ibridi (o legge della omogeneità di fenotipo): Gli individui nati dall'incrocio tra due individui omozigoti

[4] L'equazione della curva logistica, che però in questo corso non viene più riportata dopo la riforma 2001, è l'equazione differenziale $\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K})$ dove con N si indica la dimensione della popolazione e con K si indica la *capacità portante* che corrisponde al numero di individui di una popolazione che l'ambiente può mantenere senza alcun aumento o decremento netto.



che differiscono per una coppia allelica, avranno il fenotipo dato dall'allele dominante.

$$AA \quad aa$$

$$A = viola \quad a = bianco \quad => \quad Aa = viola$$

Legge della segregazione (o legge della disgiunzione): gli alleli di un singolo locus segregano al momento della formazione dei gameti (in seguito fu evidente che ciò era dovuto al fenomeno noto come meiosi).

$$Aa \quad Aa => \quad AA \;\; Aa \;\; Aa \;\; aa$$

Legge dell'assortimento indipendente (o legge di indipendenza dei caratteri): i diversi alleli si trasmettono indipendentemente l'uno dagli altri, secondo precise combinazioni.

viola e rugosi(dominante) $\frac{9}{16}$
Viola e lisci $\frac{3}{16}$
Bianchi rugosi $\frac{3}{16}$
Bianchi lisci(recessivo) $\frac{1}{16}$

Regola generale

n = numero di geni considerato (nell'esempio $n = 4 :$ A a B b)

	AB	Ab	aB	ab
AB	AABB	AABb	aABB	AaBb
Ab	AABb	AAbb	AaBb	Aabb
aB	aABB	AaBb	aaBB	aabB
ab	AaBb	Aabb	aabB	aabb

2^n= numero di gameti possibili

Regola del prodotto: Qual'è la probabilità che una F2 produca semi gialli e lisci (dominanti)?

Consideriamo il caso in cui F2 sia generata da 2 F1 eterozigoti

Probabilità di giallo $\frac{3}{4}$

Probabilità di liscio $\frac{3}{4}$ => probabilità di giallo e liscio $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

Analisi del χ-quadrato:

Il test del χ-quadro testa se le differenze dal rapporto atteso sono dovute al caso o se sono differenze reali.

Passo 1: Stabilire l'ipotesi Nulla (H_0): *Non vi è alcuna differenza reale tra i valori osservati e i valori attesi*

Nel caso di un incrocio Diibrido l'ipotesi Nulla quindi sarà: *il rapporto osservato non è diverso dal rapporto atteso* (9 : 3 : 3 : 3 : 1)

Passo 2: Usiamo l'equazione del χ-quadro per determinare se possiamo accettare l'ipotesi nulla (differenze dovute al caso) oppure se dobbiamo rifiutarla (differenze reali)

$$\chi^2 = \sum \frac{(osservati - attesi)^2}{attesi}$$

Passo 3 : Calcolare il valore di χ-quadrato per l'incrocio in esame
Passo 4 : Determinare i gradi di libertà per quell'incrocio $= n - 1$ dove $n =$numero di differenti classi (fenotipi in questo caso)
Passo 5 : Determinare il valore p associato a quel χ-quadrato per accettare o rifiutare l'ipotesi Nulla(H_0)
In genetica quasi sempre si usa $p = 0.05$. Si usa la tabella del χ-quadrato per trovare il valore di χ^2 tabulare
Passo 6 : Confrontare il valore di χ^2 calcolato con il valore di χ^2 tabulare:
Se il valore di χ^2 è minore del valore tabulare, accettiamo l'ipotesi H_0
Se il valore di χ^2 calcolato è maggiore del valore tabulare, rifiutiamo l'ipotesi H_0 e diciamo che la differenza non è dovuta al caso.

Anche queste nozioni, così come il calcolo di rette di regressione e nozioni di base di probabilità, non fanno più parte del programma del corso di Istituzioni di matematiche dal 2001.

Bibliografia

□ [1] Anna Paola Longo, Stefania Barbieri (2008), *“Insegnare matematica: esempi di buone prassi in Lombardia”*, Guerrini e associati.

□ [2] Beatrice Caponi, Grazia Falco, Roberta Focchiatti, Cesare Cornoldi, Daniela Lucangeli (2006),*“Didattica metacognitiva della matematica. Nuove prospettive e strumenti”*, Erickson

□ [3] Bessot A., (1991), *“La Didattica della Matematica in Francia. Una introduzione alla Teoria delle situazioni di Guy Brousseau*, C.R.S.E.M.

□ [4] Bruno D’Amore (1999)*“Elementi di Didattica della Matematica”*, Pitagora editrice Bologna

□ [5] Bruno D’Amore, Alberta De Flora (1974), *“Una introduzione moderna alla Algebra Elementare per gli Istituti Magistrali”*, Zanichelli

□ [6] Eugene P. Odum (1973), *“Principi di Ecologia”*, Piccin Editore Padova

□ [7] Giorgio Bolondi, Bruno D’Amore (2010), *“La matematica non serve a nulla. Provocazioni e risposte per capire di più”*, Guerrini e associati

□ [8] Marusca Buttazzi, Libero Verardi (2003), *“Istituzioni di Matematiche con Laboratorio”*, Clueb

□ [9] Richard Courant, Herbert Robbins (1950), *“Che cos’è la matematica? Introduzione elementare ai suoi concetti e metodi”*, Einaudi

□ [10] Robert E. Ricklefs (1993), *“Ecologia”*, Zanichelli

□ [11] Federico Enriques, *"Insegnamento dinamico"*, Periodico di matematiche, 1921