

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI CESENA

DIPARTIMENTO DI
INGEGNERIA DELL'ENERGIA ELETTRICA E DELL'INFORMAZIONE
"GUGLIELMO MARCONI"

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica per l'Energia e l'Informazione

STUDIO DI UN MODELLO RECIPROCO DI
SCATTERING DA PARETI DI EDIFICI

Elaborato in
CAMPI ELETTROMAGNETICI

Relatore:
Chiar.mo Prof. Ing.
Vittorio Degli Esposti

Presentata da:
Nicolò Cenni

Correlatore:
Chiar.mo Prof. Ing.
Enrico Maria Vitucci

Anno Accademico 2020/2021

Indice

Introduzione	1
1 Il modello "Effective Roughness"	2
1.1 Introduzione allo scattering diffuso	2
1.2 Il modello ER	2
1.2.1 Formulazione preesistente	3
1.2.2 Diagramma di scattering a singolo lobo	5
2 Il modello "Effective Roughness" reciproco	7
2.1 Reciprocità del modello	7
2.2 Esempi di funzioni di scattering che non rispettano la reciprocità	7
2.3 Funzione di scattering reciproca (o "quasi reciproca")	8
2.4 Modello reciproco	12
2.4.1 Versione con lobo secondario	12
2.4.2 Versione a singolo lobo	12
2.5 Osservazioni	14
3 Il modello di Kirchhoff	15
3.1 Limiti di validità	16
3.2 Principio di reciprocità	17
4 Confronto tra i diagrammi di scattering dei vari modelli	18
4.1 Modello ER direttivo	18
4.2 Modello ER reciproco con lobo secondario	19
4.3 Modello ER reciproco a singolo lobo	21
4.4 Modello di Kirchhoff	22
A Funzioni Gamma e Beta di Eulero	24
A.1 Funzione Gamma	24
A.2 Funzione Beta	25
B Dimostrazione modello ER direttivo	26

C Dimostrazione modello ER reciproco con lobo secondario	29
D Dimostrazione modello ER reciproco a singolo lobo	31
Conclusioni	33
Bibliografia	34
Ringraziamenti	35

Introduzione

La propagazione in ambiente urbano è ben diversa da quella di spazio libero. Vi sono infatti numerosi meccanismi che possono influenzare il cammino ottico dell'onda elettromagnetica rendendo la propagazione estremamente complicata da studiare. Le pareti di edifici, in particolare, hanno un forte impatto sulla creazione di cammini multipli e distorsioni, risulta quindi di fondamentale importanza lo studio di modelli in grado di descrivere al meglio il campo generato da un'onda elettromagnetica incidente su di una superficie "reale". Sarà perciò necessario tenere in considerazione le non idealità causate dalle irregolarità delle superfici, dalle non omogeneità volumetriche, dai singoli materiali, eccetera (scattering diffuso). Lo scopo principale di questo documento è di presentare un nuovo modello per lo scattering diffuso da pareti di edifici, che segua l'approccio "Effective Roughness" descritto in [1] ma a differenza del modello direttivo riportato in [2], rispetti il principio di reciprocità della tratta radio.

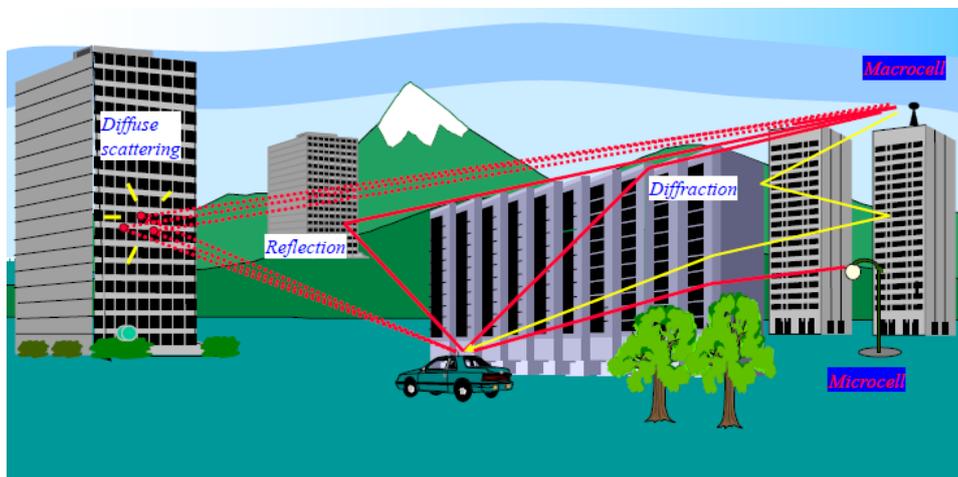


Figura 1: Propagazione in ambiente urbano

Capitolo 1

Il modello "Effective Roughness"

1.1 Introduzione allo scattering diffuso

Lo scattering diffuso è un fenomeno elettromagnetico generato dall'interazione di un campo incidente con una superficie irregolare e disomogenea. La riflessione avverrà su più angoli anziché unicamente in direzione di riflessione speculare, quindi l'energia riflessa risulterà diffusa su di un'ampia gamma di direzioni. Non essendo descrivibile mediante le ipotesi dell'ottica geometrica, la caratterizzazione rigorosa di tale fenomeno può essere molto complicata. Per affrontare questo problema è possibile attuare un approccio di tipo statistico, per il quale è però necessario conoscere parametri come valor medio e deviazione standard delle irregolarità superficiali. In certi casi è possibile adottare anche l'approccio di Kirchhoff (che verrà esaminato più nel dettaglio nel capitolo 3), il quale però presenta numerose limitazioni in termini di applicabilità in particolare nel caso di pareti di edifici "reali". Proprio per sopperire a tali limitazioni è nato il modello "Effective Roughness" (che verrà spesso abbreviato con ER).

1.2 Il modello ER

Si basa sull'assunzione che se un campo elettromagnetico è incidente su di un certo elemento di superficie, allora una parte della potenza incidente risulterà diffusa in accordo con un determinato "scattering pattern". Il modello ER non consiste quindi nel caratterizzare le pareti di incidenza considerando le effettive irregolarità presenti, ma attraverso dei parametri in grado di descrivere, nella maniera più accurata possibile, il campo re-irradiato dalla superficie. Andando a modulare tali parametri si potrà adattare il modello alla specifica parete in esame, ovvero regolare il diagramma di scattering e quindi la potenza irradiata nelle varie direzioni. Per esempio una superficie regolare quasi liscia avrà un contributo di scattering, per quanto riguarda la potenza re-irradiata, molto minore rispetto ad una fortemente irregolare e rugosa. La potenza viene diffusa

secondo il diagramma di scattering, a spese della riflessione speculare. Si tratta quindi di un modello macroscopico, basato sul principio fisico del bilancio di potenza. Tuttavia, i suoi parametri necessitano di essere calibrati tramite misure sperimentali.

1.2.1 Formulazione preesistente

In questa sezione si riporta il modello preesistente descritto in [2]. Come schematizzato in figura 1.1, nel modello ER si considera un elemento infinitesimo di superficie dS , il campo incidente \bar{E}_i , il campo di scattering \bar{E}_S e il campo di riflessione speculare \bar{E}_R . Le direzioni di incidenza, riflessione speculare e scattering sono date rispettivamente dalle coppie di angoli (θ_i, ϕ_i) , (θ_s, ϕ_s) e (θ_R, ϕ_R) con $\theta_R = \theta_i$ e $\phi_R = \phi_i - \pi$.

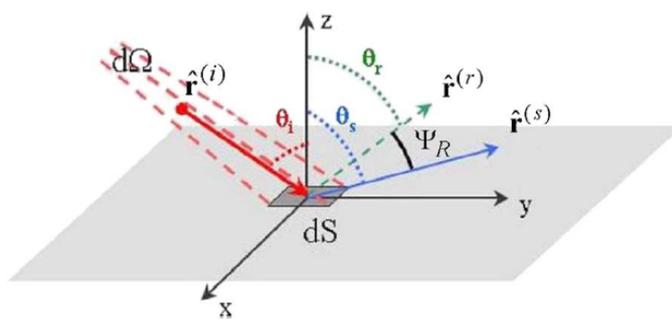


Figura 1.1: Generico elemento di superficie che produce riflessione e scattering diffuso

Ora si possono seguire due diversi approcci. Per quanto riguarda il primo, si definisce il coefficiente di scattering S nel seguente modo:

$$S = \frac{|\bar{E}_S|}{|\bar{E}_i|} \Big|_{ds} \quad (1.1)$$

Essendo dS infinitesimale, si assume che i campi siano su di esso costanti. Si può quindi vedere S^2 come la porzione di potenza incidente che viene diffusa in tutte le direzioni. Seguendo il secondo approccio, invece, si definisce:

$$S = \frac{|\bar{E}_S|}{|\bar{E}_R|} \Big|_{ds} \quad (1.2)$$

In questo caso S^2 rappresenta la parte di potenza re-irradiata nella sola direzione speculare, diffusa in tutte le direzioni. Siano R il "reflection reduction factor" e $\Gamma = \frac{|\bar{E}_S|}{|\bar{E}_i|}$, il bilancio di potenza complessivo sull'elemento di superficie è espresso nella seguente equazione:

$$1 = \Gamma^2 R^2 + U^2 S^2 + P_p/P_i \quad (1.3)$$

Dove P_p/P_i indica il rapporto tra la potenza che penetra nell'elemento di superficie e quella incidente, mentre U è una funzione che permette di considerare entrambi gli approcci sopracitati, definita come nel seguente modo:

$$U = \begin{cases} 1, & \text{se } S = \left. \frac{|\bar{E}_S|}{|\bar{E}_i|} \right|_{ds} \\ \Gamma, & \text{se } S = \left. \frac{|\bar{E}_S|}{|\bar{E}_R|} \right|_{ds} \end{cases} \quad (1.4)$$

Assumendo che P_p/P_i dipenda debolmente dalle irregolarità della superficie, si può considerare tale rapporto costante al variare di S e R . Allora nel caso di superficie ideale ($R = 1, S = 0$) dalla 1.3 si ottiene

$$1 = \Gamma^2 + P_p/P_i \quad (1.5)$$

Combinando 1.3 e 1.5 si ricava

$$R \simeq \sqrt{1 - \frac{U^2 S^2}{\Gamma^2}} \quad (1.6)$$

Considerando S non dipendente dalla direzione di incidenza, è facile notare come il secondo approccio possa risultare vantaggioso. Infatti la 1.6 si riduce a $R \simeq \sqrt{1 - S^2}$, ovvero anche R risulta indipendente dalla direzione incidente e può assumere tutti i valori tra 0 e 1. A prescindere dall'approccio adottato, deve valere il seguente bilancio di potenza di scattering:

$$S^2 U^2 |\bar{E}_i|^2 \Delta\Omega_i r_i^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\bar{E}_S|^2 r_S \sin\theta_S d\theta_S d\phi_S \quad (1.7)$$

In cui $\Delta\Omega_i = \frac{\Delta S}{r_i^2} = \frac{dS \cos\theta_i}{r_i^2}$ per le proprietà dell'angolo solido. Quindi considerando un'onda sferica ($\bar{E}_i \propto \frac{1}{r_i}$) risulta

$$\left(\frac{KS}{r_i r_S} \right)^2 U^2 dS \cos\theta_i = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\bar{E}_S|^2 \sin\theta_S d\theta_S d\phi_S \quad (1.8)$$

Dove K è una costante che dipende dall'ampiezza del campo incidente. $|\bar{E}_S|^2$ può essere espresso nella seguente forma:

$$|\bar{E}_S|^2 = E_{S_0}^2 f(\theta_i, \theta_S, \phi_i, \phi_S) \quad (1.9)$$

E_{S_0} è la massima ampiezza del campo diffuso e $f(\theta_i, \theta_S, \phi_i, \phi_S)$ è la funzione che identifica il diagramma di scattering.

1.2.2 Diagramma di scattering a singolo lobo

Sperimentalmente è possibile notare come la potenza diffusa tenda ad essere maggiore in corrispondenza della direzione di riflessione speculare e a diminuire allontanandosi da essa. Ragionando in termini di diagramma di scattering significa che esso può essere rappresentato da un lobo direttivo, orientato nella direzione di riflessione speculare.

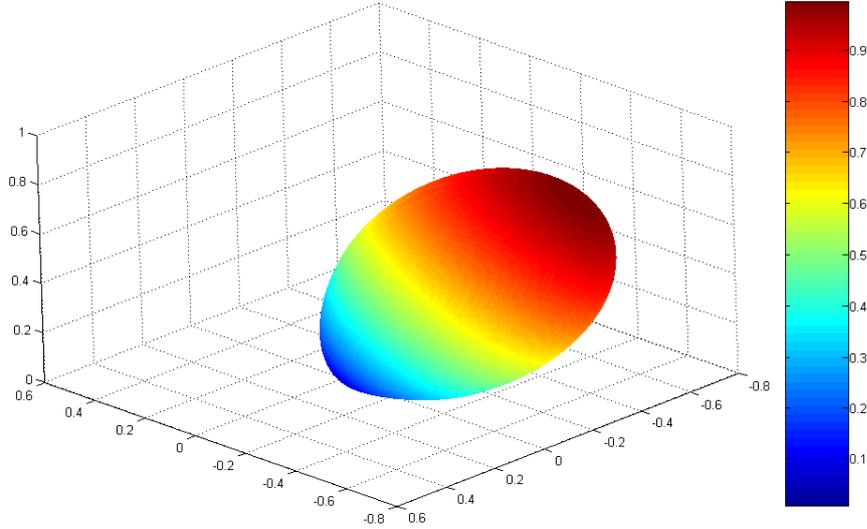


Figura 1.2: Esempio di diagramma di scattering in 3D utilizzando il modello direttivo con angolo di incidenza $\theta_i = 45^\circ$

Il modello direttivo prevede che $|\bar{E}_S|^2$ abbia la seguente espressione:

$$|\bar{E}_S|^2 = E_{S_0}^2 \left(\frac{1 + \cos \psi_R}{2} \right)^{\alpha_R} \quad (1.10)$$

Dove ψ_R è l'angolo tra la direzione di riflessione speculare e la direzione di scattering (si ha $\cos \psi_R = \cos \theta_i \cos \theta_S - \sin \theta_i \sin \theta_S \cos(\phi_S - \phi_i)$), mentre α_R è il parametro che permette di regolare la larghezza del lobo e quindi di adattare al meglio il modello alla parete di studio. Andando quindi a sostituire l'espressione 1.10 in 1.8, dopo aver risolto l'integrale al secondo membro e riassembleato i termini dell'equazione si ottiene $E_{S_0}^2$ dal quale è immediato risalire a $|\bar{E}_S|^2$:

$$|\bar{E}_S|^2 = \left(\frac{SK}{r_i r_S} \right)^2 U^2 \frac{dS \cos \theta_i}{F_{\alpha_R}} \left(\frac{1 + \cos \psi_R}{2} \right)^{\alpha_R} \quad (1.11)$$

Dove

$$F_{\alpha_R} = \frac{2\pi \alpha_R!}{2^{\alpha_R}} \sum_{j=0}^{\alpha_R} \frac{1}{(\alpha_R - j)! (j + 1)!!} \sum_{l=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} \frac{\cos^{j-2l} \theta_i \sin^{2l} \theta_i}{2^l l! (j - 2l)!!} \quad (1.12)$$

Questa formulazione matematica più sintetica del modello preesistente, è stata ricavata nell'ambito del lavoro di tesi (la dimostrazione dell'espressione 1.12 si trova nell'appendice B). La funzione $f(\theta_i, \theta_S, \phi_i, \phi_S) = \left(\frac{1+\cos\psi_R}{2}\right)^{\alpha_R}$, che rappresenta il diagramma di scattering, avrà il proprio massimo per $\psi_R = 0$ ovvero quando la direzione di scattering coincide con quella di riflessione speculare.

Capitolo 2

Il modello "Effective Roughness" reciproco

2.1 Reciprocità del modello

Affinché sia valido il principio di reciprocità della tratta radio è necessario che il rapporto tra il campo diffuso e campo incidente rimanga invariato scambiando la direzione di scattering con quella di incidenza. Sostituendo 1.9 in 1.8 si ricava

$$|\bar{E}_S|^2 = \frac{\left(\frac{KS}{r_i r_S}\right)^2 U^2 dS \cos \theta_i}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta_i, \theta_S, \phi_i, \phi_S) \sin \theta_S d\theta_S d\phi_S} f(\theta_i, \theta_S, \phi_i, \phi_S) \quad (2.1)$$

Nel caso del modello direttivo, è facile verificare, da 1.11, come la condizione di reciprocità non sia soddisfatta. Si può infatti ipotizzare che per la soluzione ricercata debba valere

$$\frac{\cos \theta_i f(\theta_i, \theta_S, \phi_i, \phi_S)}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta_i, \theta_S, \phi_i, \phi_S) \sin \theta_S d\theta_S d\phi_S} = (\cos \theta_i \cos \theta_S)^r f_1(\theta_i, \theta_S, \phi_i, \phi_S) \quad (2.2)$$

Dove $f_1(\theta_i, \theta_S, \phi_i, \phi_S)$ è una funzione che risulta invariata scambiando θ_i con θ_S e ϕ_i con ϕ_S e r è un generico esponente reale.

2.2 Esempi di funzioni di scattering che non rispettano la reciprocità

1. Se si sceglie $f(\theta_i, \theta_S, \phi_i, \phi_S) = (\cos \psi_R)^{\alpha_R}$, nel caso α_R sia pari, è possibile dimostrare che $\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta_i, \theta_S, \phi_i, \phi_S) \sin \theta_S d\theta_S d\phi_S$ è una costante, ovvero non dipende

da θ_i e ϕ_i . Si avrà quindi che

$$\frac{\cos \theta_i f(\theta_i, \theta_S, \phi_i, \phi_S)}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta_i, \theta_S, \phi_i, \phi_S) \sin \theta_S d\theta_S d\phi_S} \propto \cos \theta_i (\cos \psi_R)^{\alpha_R} \quad (2.3)$$

Ma la 2.3 non rispetta quanto espresso dalla 2.2, la condizione di reciprocità non è soddisfatta.

2. Scegliendo $f(\theta_i, \theta_S, \phi_i, \phi_S) = \cos \theta_S (\cos \psi_R)^{\alpha_R}$, con α_R dispari, si può dimostrare che $\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta_i, \theta_S, \phi_i, \phi_S) \sin \theta_S d\theta_S d\phi_S$ risulta essere proporzionale a $\cos \theta_i$, quindi

$$\frac{\cos \theta_i f(\theta_i, \theta_S, \phi_i, \phi_S)}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta_i, \theta_S, \phi_i, \phi_S) \sin \theta_S d\theta_S d\phi_S} \propto \cos \theta_S (\cos \psi_R)^{\alpha_R} \quad (2.4)$$

Proprio come per il caso precedente, non viene rispettata la condizione 2.2.

2.3 Funzione di scattering reciproca (o "quasi reciproca")

Ragionando in maniera intuitiva considerando i due esempi precedenti, dato che nel primo caso il risultato dell'integrale è una costante, mentre nel secondo è proporzionale a $\cos \theta_i$ è logico ipotizzare che in un caso intermedio, $f(\theta_i, \theta_S, \phi_i, \phi_S) = \sqrt{\cos \theta_S} (\cos \psi_R)^{\beta_R}$, si possa avere

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta_i, \theta_S, \phi_i, \phi_S) \sin \theta_S d\theta_S d\phi_S \propto \sqrt{\cos \theta_i}$$

Se ciò fosse verificato si avrebbe

$$\frac{\cos \theta_i f(\theta_i, \theta_S, \phi_i, \phi_S)}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta_i, \theta_S, \phi_i, \phi_S) \sin \theta_S d\theta_S d\phi_S} \propto \sqrt{\cos \theta_i \cos \theta_S} (\cos \psi_R)^{\beta_R} \quad (2.5)$$

E quindi, essendo rispettata la 2.2, sarebbe rispettato anche il principio di reciprocità della tratta radio. Prima di risolvere analiticamente l'integrale appena citato, può essere conveniente risolverlo in maniera numerica (con l'ausilio di MATLAB), al fine di verificare visivamente se il risultato abbia un andamento $\sqrt{\cos \theta_i}$ o per lo meno ad esso approssimabile. Sia $F_{\beta_R}(\theta_i) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \theta_S} (\cos \psi_R)^{\beta_R} \sin \theta_S d\theta_S d\phi_S$, dalle figure 2.2, 2.3 si nota come all'aumentare di β_R , $F_{\beta_R}^*(\theta_i)$ (cioè $F_{\beta_R}(\theta_i)$ normalizzato ad 1) tenda ad avvicinarsi sempre più a $\sqrt{\cos \theta_i}$. In particolare per $\beta_R = 5$ rappresenta già una buona approssimazione. Inoltre per piccoli angoli di incidenza, la differenza tra i due andamenti risulta quasi inesistente. Considerando valori di β_R dispari, $F_{\beta_R}^*(\theta_i)$ rimane sempre al di sotto di $\sqrt{\cos \theta_i}$. Se invece si considerano valori pari per β_R , si riscontra un particolare

andamento per $F_{\beta_R}^*(\theta_i)$, infatti per angoli vicini a 90° tenderà a discostarsi in maniera netta da $\sqrt{\cos\theta_i}$, mentre per angoli inferiori sarà quasi coincidente. Se si confrontano due andamenti ottenuti per valori di β_R che distano 1 tra loro (ad esempio 11 e 12) si nota come per β_R pari lo scostamento tra $F_{\beta_R}^*(\theta_i)$ e $\sqrt{\cos\theta_i}$ sia minore rispetto al caso dispari, per la quasi totalità di angoli nel range $\theta_i \in [0, \pi/2]$. In particolare nel caso riportato in figura 2.1, la quantità $\Delta = |F_{\beta_R}^*(\theta_i) - \sqrt{\cos\theta_i}|$ ottenuta per $\beta_R = 12$ supera quella per $\beta_R = 11$ solo in corrispondenza di $\theta_i = 1.486 \text{ rad} \simeq 85^\circ$.

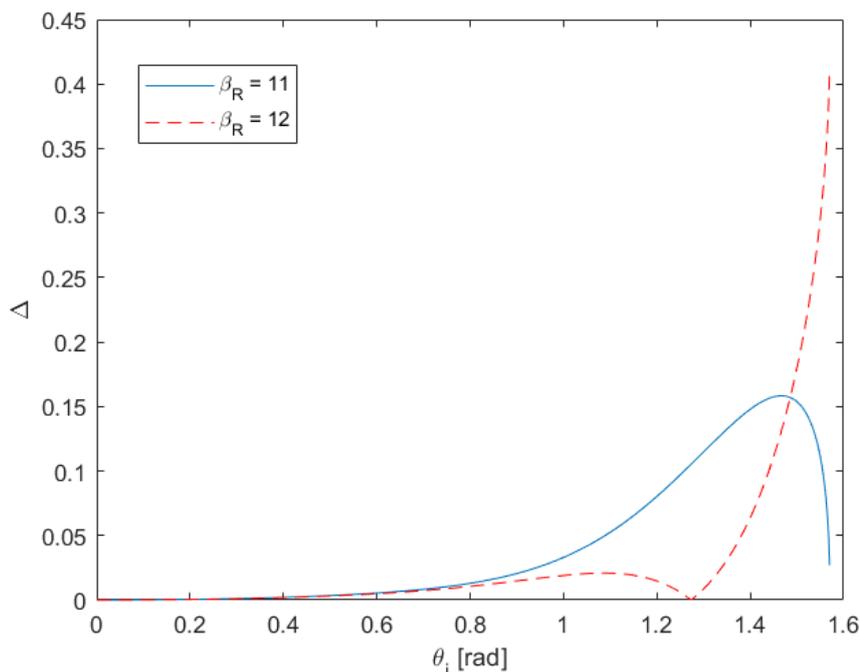


Figura 2.1: Grafico di $\Delta = |F_{\beta_R}^*(\theta_i) - \sqrt{\cos\theta_i}|$ per $\beta_R = 11$ e $\beta_R = 12$

Inoltre dalla 2.6 si evince un'importante osservazione, ovvero che al fine di evitare una condizione di assurdo matematico è necessario assicurarsi che β_R non sia dispari, il che potrebbe infatti portare ad eguagliare una quantità positiva ad una negativa.

$$|\bar{E}_S|^2 = \frac{\left(\frac{KS}{r_i r_S}\right)^2 U^2 dS \cos\theta_i}{F_{\beta_R}(\theta_i)} \sqrt{\cos\theta_S} (\cos\psi_R)^{\beta_R} \quad (2.6)$$

Si sceglie quindi di imporre $2\alpha_R = \beta_R$, oltre a ciò si può anche assicurare che α_R non sia troppo piccolo affinché le due curve siano l'una sufficientemente approssimabile con l'altra, per esempio imponendo $\alpha_R = 3, 4, 5, 6 \dots$

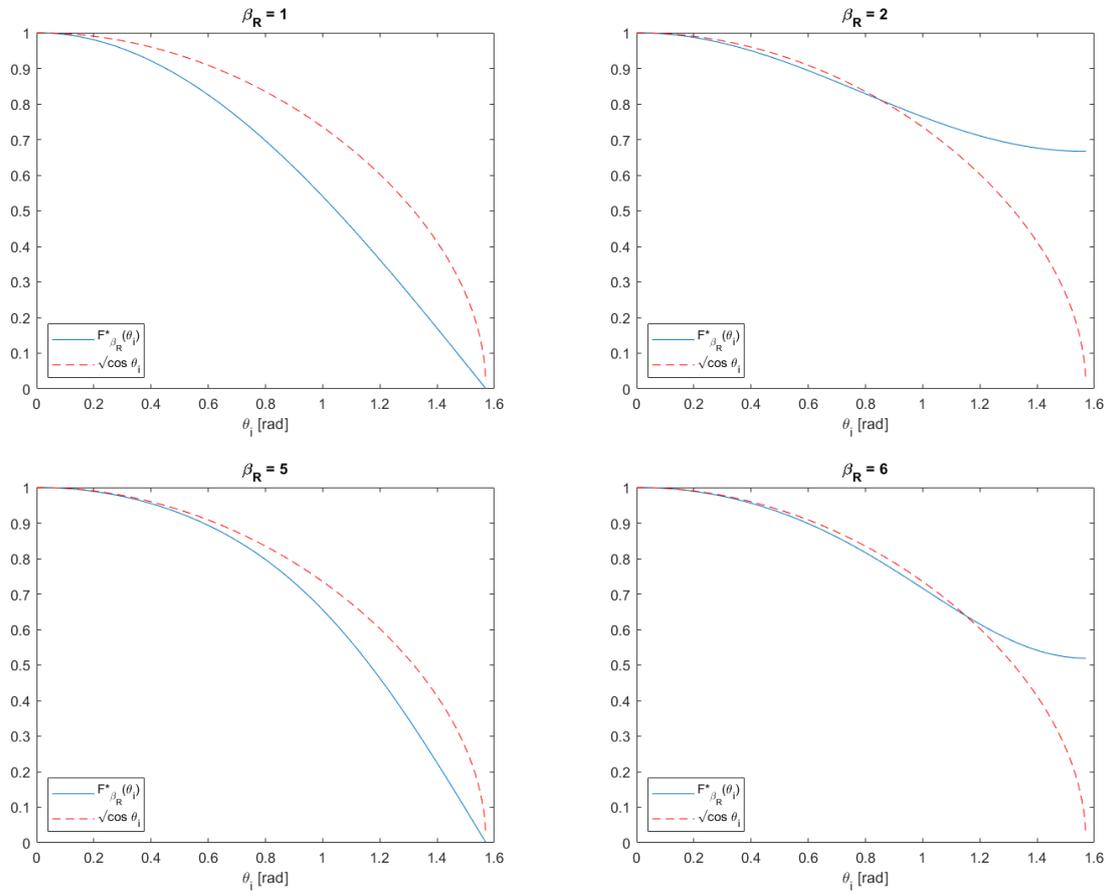


Figura 2.2: Andamento di $F_{\beta_R}(\theta_i)$ normalizzato ad 1 ($F_{\beta_R}^*(\theta_i)$) confrontato con $\sqrt{\cos \theta_i}$ per vari valori di β_R , in particolare $\beta_R = 1, 2, 5, 6$ (modello reciproco, versione con lobo secondario)

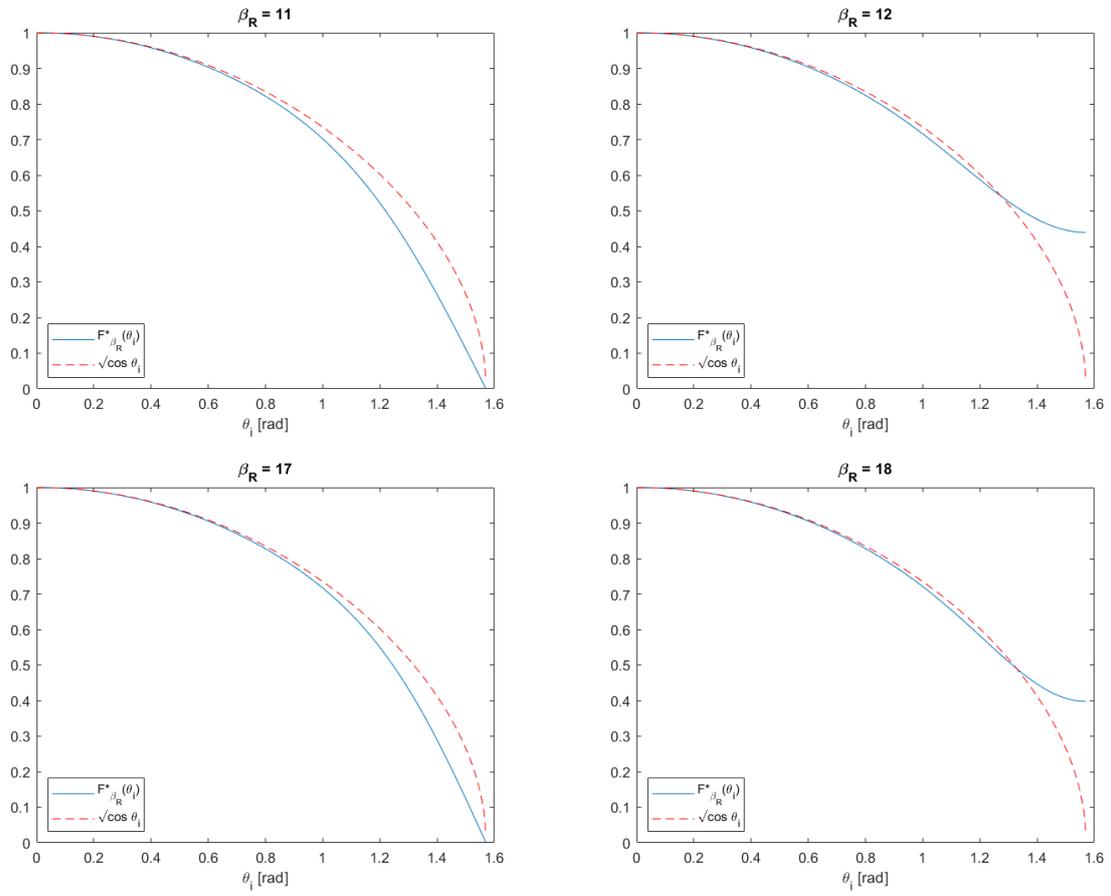


Figura 2.3: Andamento di $F_{\beta_R}(\theta_i)$ normalizzato ad 1 ($F_{\beta_R}^*(\theta_i)$) confrontato con $\sqrt{\cos \theta_i}$ per vari valori di β_R , in particolare $\beta_R = 11, 12, 17, 18$ (modello reciproco, versione con lobo secondario)

2.4 Modello reciproco

2.4.1 Versione con lobo secondario

Risolvendo analiticamente l'integrale $F_{\alpha_R}(\theta_i)$, si ottiene (si veda l'appendice C per la dimostrazione):

$$\begin{aligned} F_{\alpha_R} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \theta_S} (\cos \psi_R)^{2\alpha_R} \sin \theta_S d\theta_S d\phi_S = \\ &= \pi (2\alpha_R)! \sum_{j=0}^{\alpha_R} \frac{\cos^{2\alpha_R-2j} \theta_i \sin^{2j} \theta_i}{2^{2j} (j!)^2 (2\alpha_R - 2j)!} B\left(j + 1, \alpha_R - j + \frac{3}{4}\right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dove $B(x, y)$ è la funzione beta di Eulero. Sostituendo 2.7 in 2.8 si ricava l'espressione di $|\bar{E}_S|^2$:

$$|\bar{E}_S|^2 = \frac{\left(\frac{KS}{r_i r_S}\right)^2 U^2 dS \cos \theta_i}{F_{\alpha_R}} \sqrt{\cos \theta_S} (\cos \psi_R)^{2\alpha_R} \quad (2.8)$$

Come illustrato nella sezione precedente, la 2.8 non rispetta il principio di reciprocità, o per lo meno lo rispetta solo in maniera approssimativa. Il bilancio di potenza dato dalla 1.8 è però rispettato in quanto si giunge al risultato proprio mediante tale relazione. E' possibile, sfruttando la relazione C.13 dell'appendice e le osservazioni fatte nel paragrafo precedente, ricavare un'ulteriore espressione di $|\bar{E}_S|^2$ che, a differenza della 2.8, rispetti il principio di reciprocità ma non rispetti la 1.8 (solo in maniera approssimativa):

$$|\bar{E}_S|^2 = \left(\frac{KS}{r_i r_S}\right)^2 U^2 dS \frac{4\alpha_R + 3}{4\pi} \sqrt{\cos \theta_S \cos \theta_i} (\cos \psi_R)^{2\alpha_R} \quad (2.9)$$

Tra le due espressioni appena mostrate la 2.9 risulta preferibile sia per la maggiore compattezza sia in quanto rispetta il requisito fondamentale di non violare il principio di reciprocità. Questa versione è detta "con lobo secondario" in quanto, come verrà illustrato nel capitolo 4, nel relativo diagramma di scattering è presente oltre al lobo principale anche uno secondario, la cui presenza è percepibile solo per angoli di incidenza vicini ai 90° .

2.4.2 Versione a singolo lobo

E' possibile ricavare un altro modello reciproco che però presenti un diagramma di scattering a singolo lobo. Ragionando in maniera del tutto simile a quanto fatto precedentemente si sceglie $f(\theta_i, \theta_S, \phi_i, \phi_S) = \sqrt{\cos \theta_S} \left(\frac{1+\cos \psi_R}{2}\right)^{\beta_R}$ e si verifica graficamente che l'andamento di $F_{\beta_R}(\theta_i) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \theta_S} \left(\frac{1+\cos \psi_R}{2}\right)^{\beta_R} \sin \theta_S d\theta_S d\phi_S$ sia approssimabile con $k(\beta_R)\sqrt{\cos \theta_i}$, dove $k(\beta_R)$ è funzione di sola β_R .

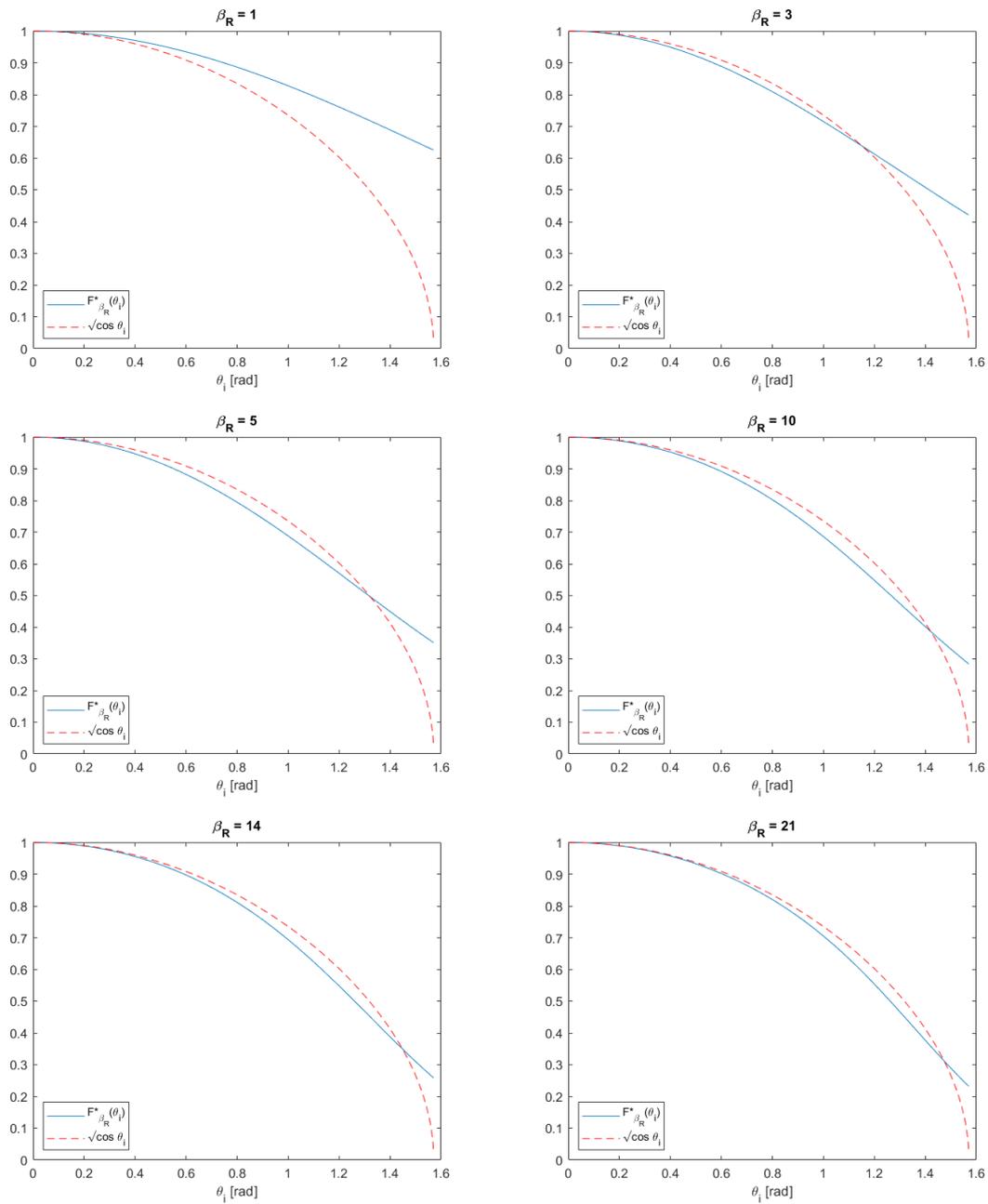


Figura 2.4: Andamento di $F_{\beta_R}(\theta_i)$ normalizzato ad 1 ($F_{\beta_R}^*(\theta_i)$) confrontato con $\sqrt{\cos \theta_i}$ per vari valori di β_R , in particolare $\beta_R = 1, 3, 5, 10, 14, 21$ (modello reciproco, versione a singolo lobo)

I diagrammi in figura 2.4 mostrano come l'approssimazione risulti essere accettabile, in particolare per piccoli angoli di incidenza e valori non eccessivamente bassi di β_R . Inoltre non esistono particolari distinzioni tra β_R pari e dispari. Ritenendo valida l'approssimazione, grazie alla relazione D.7 dell'appendice si ricava la relativa espressione reciproca di $|\bar{E}_S|^2$:

$$|\bar{E}_S|^2 = \left(\frac{KS}{r_i r_S} \right)^2 U^2 dS \frac{2^{\beta_R}}{4\pi \sum_{j=0}^{\beta_R} \binom{\beta_R}{j} \frac{1}{2j+3}} \sqrt{\cos \theta_S \cos \theta_i} \left(\frac{1 + \cos \psi_R}{2} \right)^{\beta_R} \quad (2.10)$$

2.5 Osservazioni

Se si adotta il modello reciproco, in entrambe le versioni dalle figure 2.2, 2.3, 2.4 si osserva come il bilancio di potenza dato da 1.8 non risulti rispettato in maniera evidente per angoli di incidenza vicini a 90° . Tale discrepanza può essere ricondotta all'assunzione fatta inizialmente, secondo la quale il rapporto tra la potenza incidente e quella penetrata rimanga costante al variare della rugosità della superficie. Questa assunzione non è in realtà giustificabile per angoli di incidenza radenti, infatti se per esempio si considera una superficie perfettamente liscia per $\theta_i = 90^\circ$ la potenza penetrata è nulla. Se ora, con lo stesso angolo di incidenza, si considera una superficie rugosa, la presenza di irregolarità fa sì che parte della potenza incidente penetri all'interno della superficie rendendo falsa l'assunzione di partenza.

Capitolo 3

Il modello di Kirchhoff

L'approccio di Kirchhoff è di tipo analitico. Si basa sull'assunzione che il campo in ogni punto della superficie, possa essere descritto dal campo presente sul piano tangente a tale punto, sommando la componente incidente e quella riflessa. Ipotizzando una

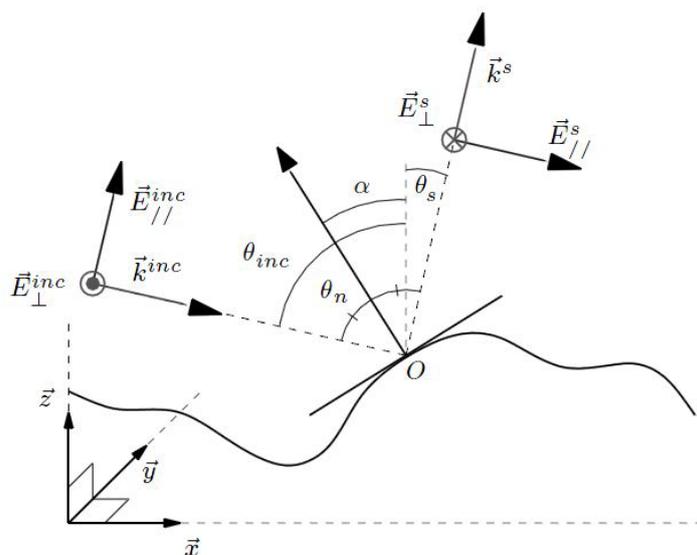


Figura 3.1: Approssimazione del piano tangente nel punto O assunta nel modello di Kirchhoff

superficie infinitamente conduttiva e assumendo che i limiti di validità (che verranno illustrati in seguito) siano soddisfatti, l'espressione del coefficiente di scattering, che descrive la potenza di scattering rispetto a quella incidente, risulta essere

$$\langle \rho \rho^* \rangle_\infty = e^{-g} \left(\rho_0 + \frac{\pi L^2 F^2}{A} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g^m}{m! m} e^{-\left(\frac{v_{xy}^2 L^2}{4m}\right)} \right) \quad (3.1)$$

Dove:

- k è il numero d'onda di spazio libero;
- $\theta_1 = \theta_i$;
- $\theta_2 = \theta_S$;
- $\theta_3 = \phi_S - \phi_i$;
- σ è la deviazione standard della distribuzione delle altezze della superficie;
- L è la lunghezza di correlazione;
- A è l'area illuminata;
- $v_x = k (\sin \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_3)$;
- $v_y = k (-\sin \theta_2 \sin \theta_3)$;
- $v_{xy} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = k \sqrt{\sin^2 \theta_1 - 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + \sin^2 \theta_2}$;
- $\rho_0 = \text{sinc}(v_x l_x) \text{sinc}(v_y l_y)$;
- $g = k^2 \sigma^2 (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)^2$;
- $F = \frac{1 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3}{\cos \theta_1 (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)}$;

Si definisce "mean power reflection coefficient" $\langle |R_1|^2 \rangle$:

$$\langle |R_1|^2 \rangle = \frac{\langle |E_2|^2 \rangle}{E_0^2} = \langle \rho \rho^* \rangle_\infty \frac{A^2 \cos^2 \theta_1}{\lambda^2 r^2} \quad (3.2)$$

3.1 Limiti di validità

L'approssimazione di Kirchhoff risulta valida esclusivamente sotto determinate condizioni. Non devono infatti essere presenti irregolarità troppo pronunciate, più precisamente deve valere

$$L \gg \lambda \quad (3.3)$$

Inoltre le dimensioni della superficie l_x e l_y (con $A = l_x l_y$) devono risultare tali che

$$l_x, l_y \gg L \quad (3.4)$$

Sono proprio tali condizioni a limitare l'applicabilità del modello a situazioni reali. Impongono infatti determinate proporzioni tra i parametri in gioco che raramente sono

riscontrabili fisicamente. Se, per esempio, si considerano frequenze dell'ordine di 1 GHz, per la relazione 3.3 la superficie in esame dovrà essere tale da presentare una lunghezza di correlazione superiore a tre metri. Significherebbe avere a che fare con una superficie estremamente "liscia", ovvero in cui le irregolarità sono quasi impercettibili e che quindi molto raramente può rappresentare pareti di edifici. Per frequenze nettamente superiori tuttavia, la teoria di Kirchhoff può risultare applicabile, ad esempio in [3] viene trattato lo studio dello scattering in comunicazioni THz mediante l'approssimazione di Kirchhoff. Inoltre è importante precisare che l'approssimazione di Kirchhoff è basata su un'assunzione di piccoli angoli di incidenza che limita la possibilità di considerare θ_1 , cioè θ_i , grande a piacere (per una trattazione più approfondita della teoria di Kirchhoff si faccia riferimento a [4]).

3.2 Principio di reciprocità

Il modello di Kirchhoff, ipotizzando che le condizioni appena esposte siano valide, rispetta il principio di reciprocità della tratta radio. Ciò può essere verificato graficamente, in figura 3.2 a sinistra sono rappresentati gli andamenti del coefficiente $\langle |R_1|^2 \rangle$ normalizzato ad 1 (chiamato $\langle |R_1^*|^2 \rangle$) al variare di θ_2 fissando θ_1 e θ_3 , mentre a destra vi è $\langle |R_1^*|^2 \rangle$ ottenuto scambiando θ_1 con θ_2 e θ_3 con $-\theta_3$ nell'espressione. I due grafici coincidono.

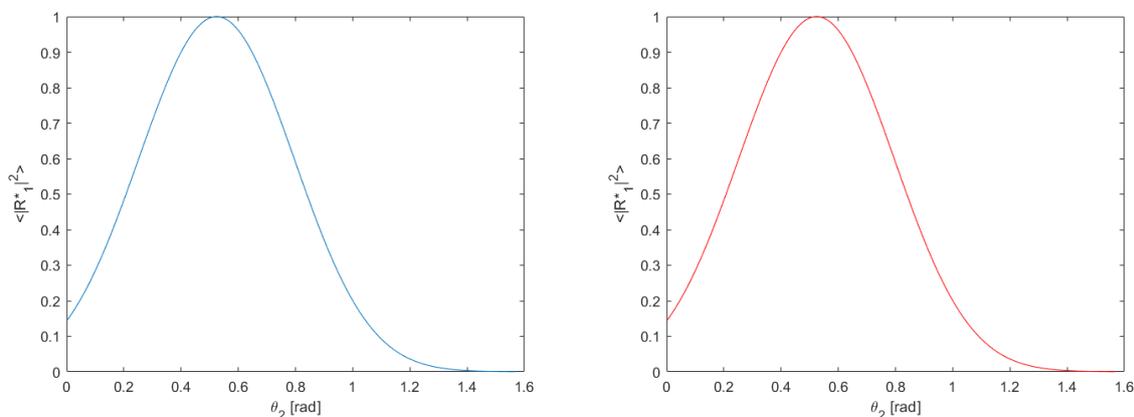


Figura 3.2: A sinistra si ha il grafico del coefficiente $\langle |R_1|^2 \rangle$ normalizzato ad 1 al variare di θ_2 utilizzando come parametri $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$, $\theta_3 = 0$, $f = 1 THz$, $L = 2.7 mm$, $l_x = l_y = 0.5 m$, $\sigma = 0.252 mm$. Il grafico di destra è stato ottenuto semplicemente scambiando θ_1 con θ_2 nell'espressione per verificare la condizione di reciprocità

Capitolo 4

Confronto tra i diagrammi di scattering dei vari modelli

I diagrammi di scattering sono stati ottenuti fissando $\phi_S = \phi_i - \pi$ per il semipiano di destra mentre $\phi_S = \phi_i$ per quello di sinistra in maniera da ottenere un grafico bidimensionale.

4.1 Modello ER direttivo

Per quanto riguarda il modello ER, dall'espressione 1.11 si ricava che la direzione di massima irradiazione è data da $\psi_R = 0$, cioè da $\theta_S = \theta_R = \theta_i$ e $\phi_S = \phi_R = \phi_i - \pi$. Nella figura 4.1 sono riportati alcuni esempi di diagrammi di scattering ottenuti per diversi angoli di incidenza θ_i e per diversi valori del parametro α_R . Come ci si aspettava il diagramma è costituito da un unico lobo orientato esattamente in direzione di riflessione speculare. Il parametro α_R permette di rendere più o meno direttivo il lobo, adattando quindi il modello alla parete in esame.

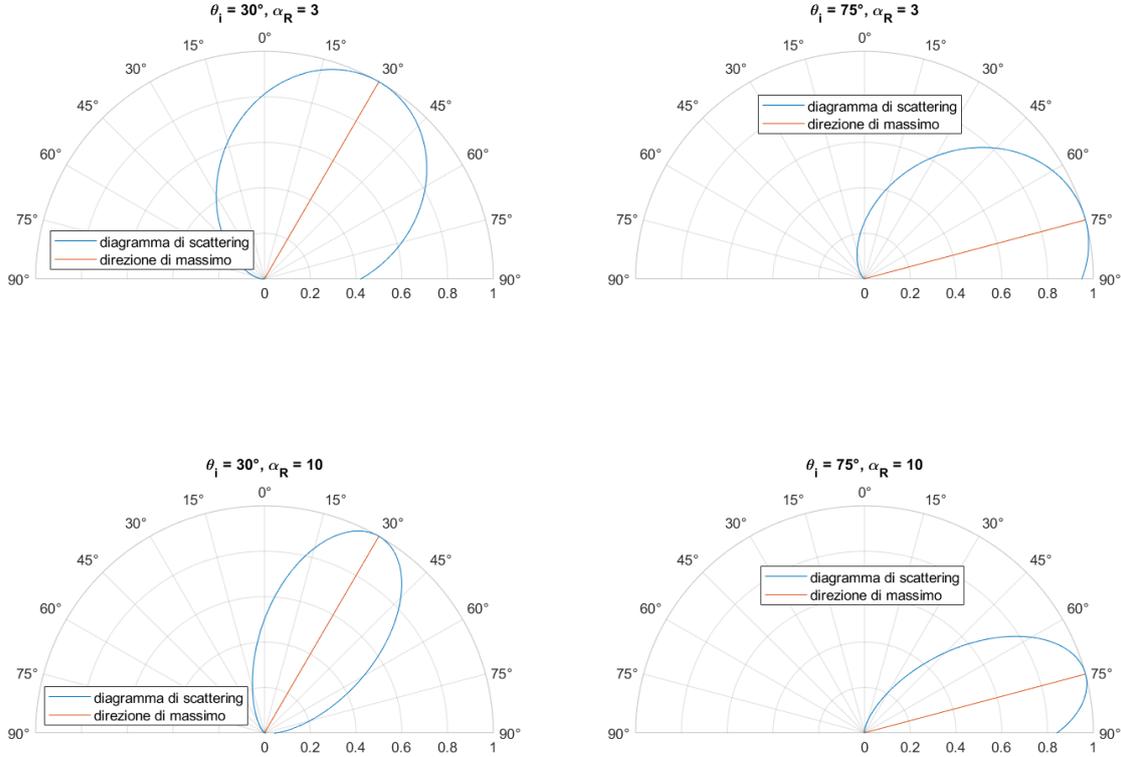


Figura 4.1: Diagrammi di scattering modello ER direttivo ottenuti per diversi valori di α_R e θ_i

4.2 Modello ER reciproco con lobo secondario

Nel modello reciproco con lobo secondario, considerando la formulazione espressa in 2.9, la presenza del termine $\sqrt{\cos \theta_S}$ fa sì che la direzione di massimo non sia più esattamente in corrispondenza di $\psi_R = 0$ inoltre, a differenza del modello precedente, per $\theta_S = 90^\circ$ si avrà sempre $|\bar{E}_S|^2$ nullo. Dai diagrammi in figura 4.2 è infatti possibile notare come la direzione di massima irradiazione risulti precedere leggermente quella di riflessione speculare (la differenza è pressochè nulla per piccoli angoli mentre diventa più consistente avvicinandosi ai 90°). In questo caso, l'aumento del parametro α_R porta sia ad una maggiore direttività, sia ad un avvicinamento della direzione di massima irradiazione nei confronti di quella di riflessione speculare. Infine vi è la presenza di un lobo secondario, il cui contributo è nullo per $\theta_i = 0$ e cresce all'aumentare di θ_i (diventa osservabile

tipicamente non prima di $\theta_i = 45^\circ$ o anche per angoli superiori se α_R ha un valore più alto).

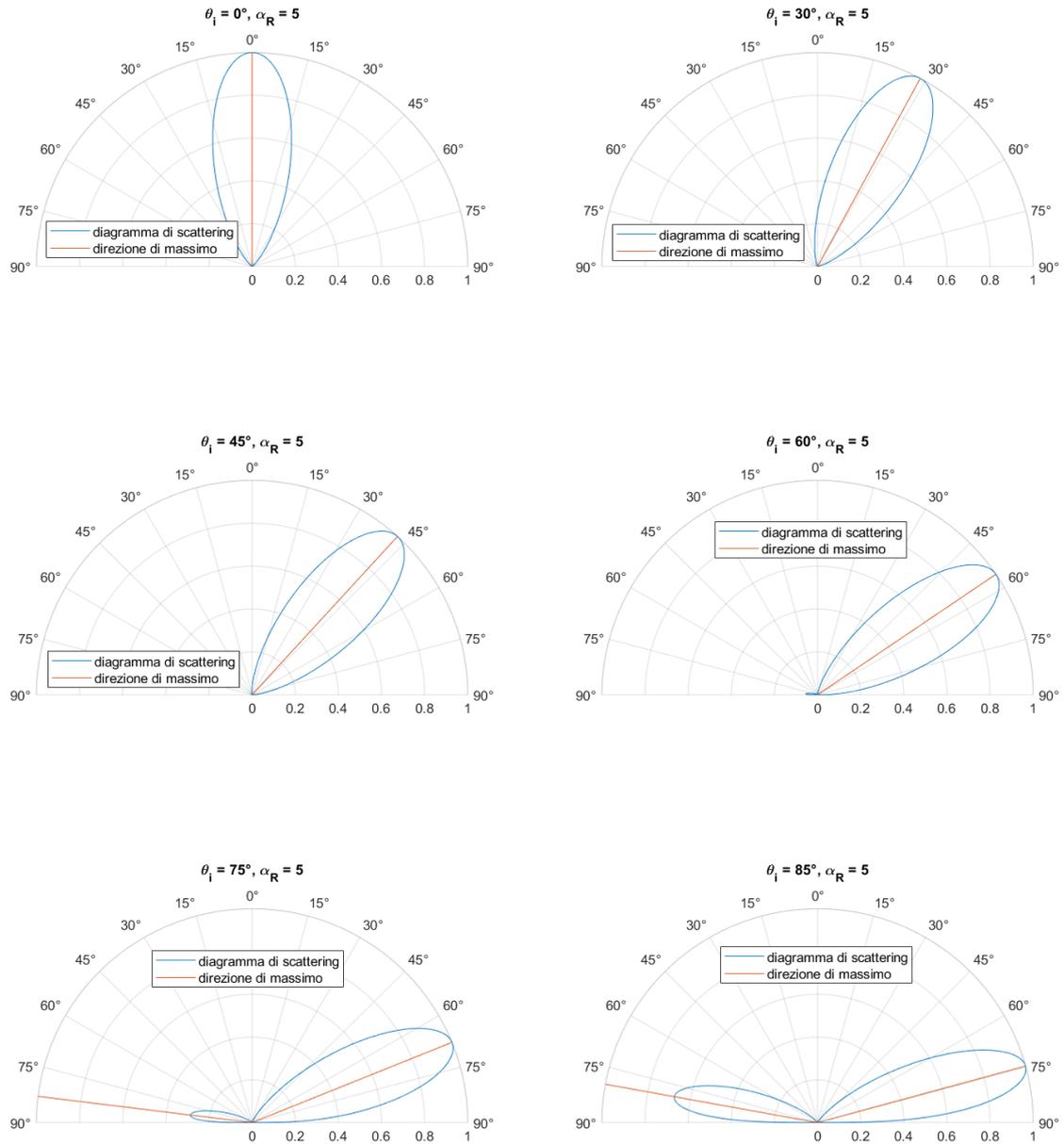


Figura 4.2: Diagrammi di scattering modello ER reciproco con lobo secondario ottenuti per diversi valori di α_R e θ_i

4.3 Modello ER reciproco a singolo lobo

Per quanto riguarda il modello reciproco a singolo lobo ($|\bar{E}_S|^2$ definito dalla 2.10), considerando i diagrammi di scattering in figura 4.3, essi hanno una direzione di massima irradiazione che precede leggermente quella di riflessione speculare, proprio come accadeva per il modello con lobo secondario. Discorso identico al caso precedente anche per il ruolo del parametro β_R e per il fatto che il termine $\sqrt{\cos \theta_S}$ rende $|\bar{E}_S|^2$ nullo per $\theta_S = 90^\circ$. La principale differenza tra i due modelli sta nel fatto che quest'ultimo non presenta alcun lobo secondario.

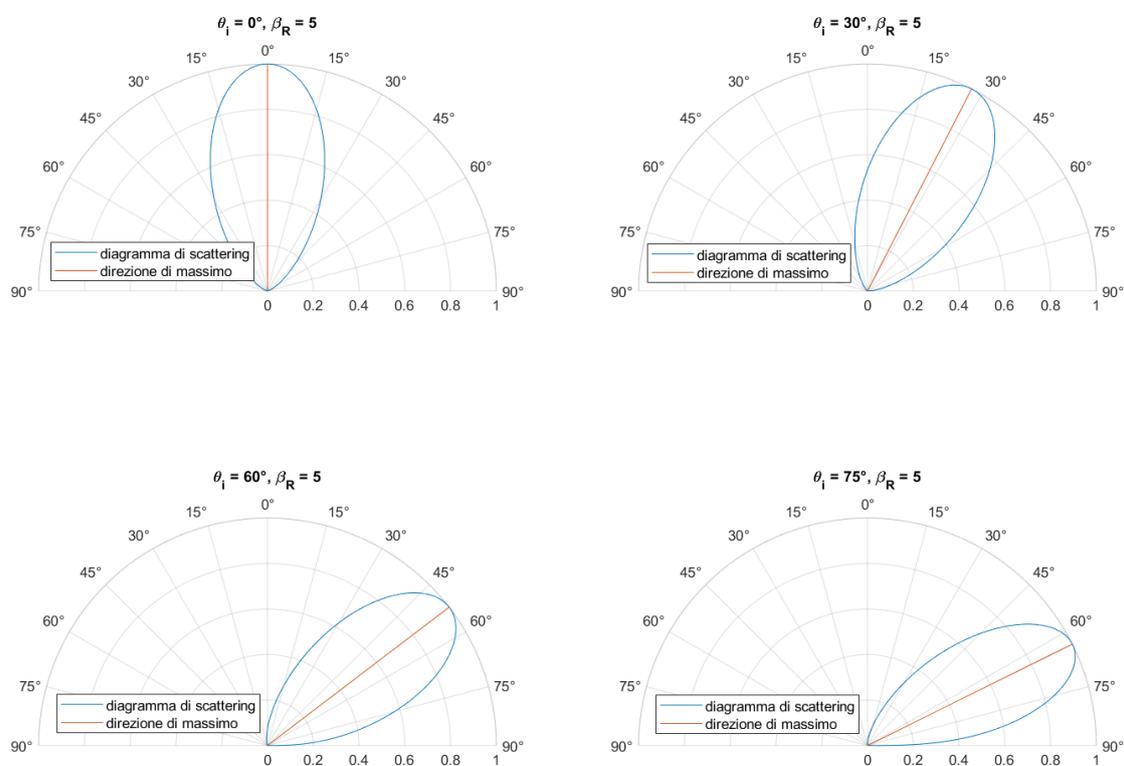


Figura 4.3: Diagrammi di scattering modello ER reciproco a singolo lobo ottenuti per diversi valori di β_R e θ_i

4.4 Modello di Kirchhoff

Se invece si considera il modello di Kirchhoff, scegliendo i parametri in maniera tale da rispettare le condizioni di validità e al contempo assegnare i parametri relativi alla superficie affinché possano essere riconducibili ad una superficie realistica, un tipico scattering pattern che si ottiene è graficato nelle figure 4.4, 4.5.

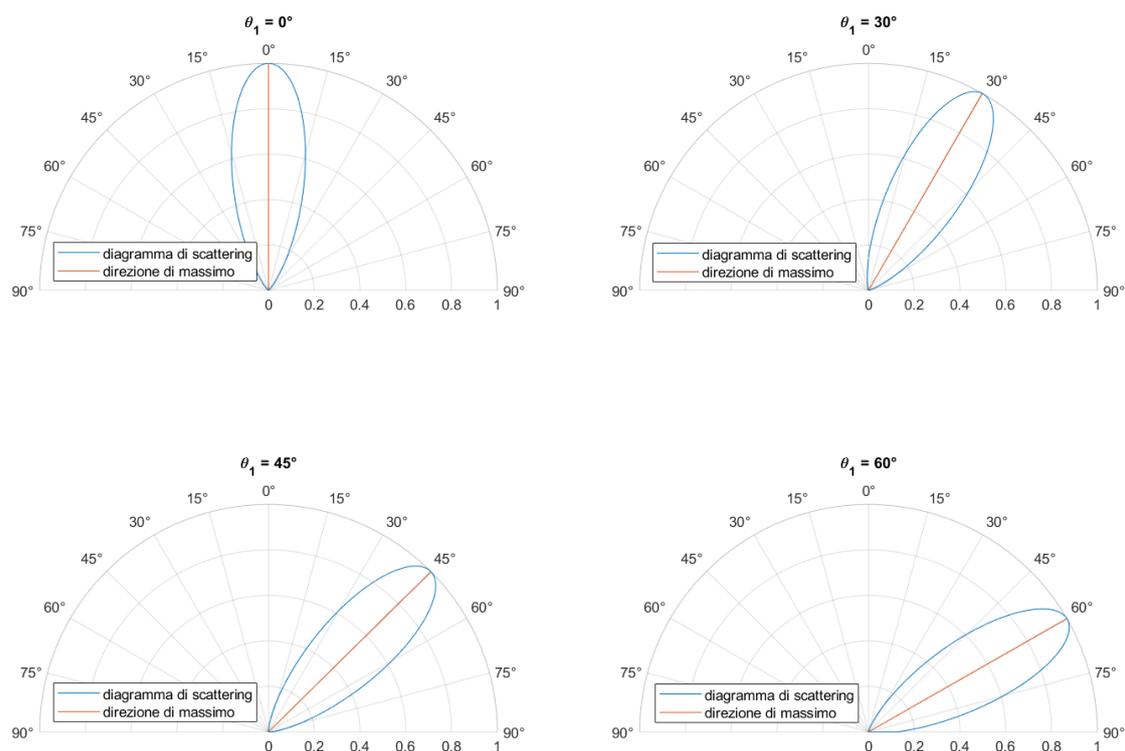


Figura 4.4: Diagramma di scattering modello di Kirchhoff con parametri $\theta_3 = 0$, $f = 1 \text{ THz}$, $L = 2.7 \text{ mm}$, $l_x = l_y = 0.5 \text{ m}$, $\sigma = 0.252 \text{ mm}$ e scegliendo angoli di incidenza (θ_1) non radenti

I diagrammi ottenuti per angoli di incidenza non radenti (figura 4.4) risultano estremamente simili a quanto visto per i modelli precedenti. Per θ_i superiore a 75° (figura 4.5) sono però presenti distorsioni nel diagramma, riconducibili all'assunzione di piccoli angoli di incidenza su cui si basa l'approssimazione di Kirchhoff.

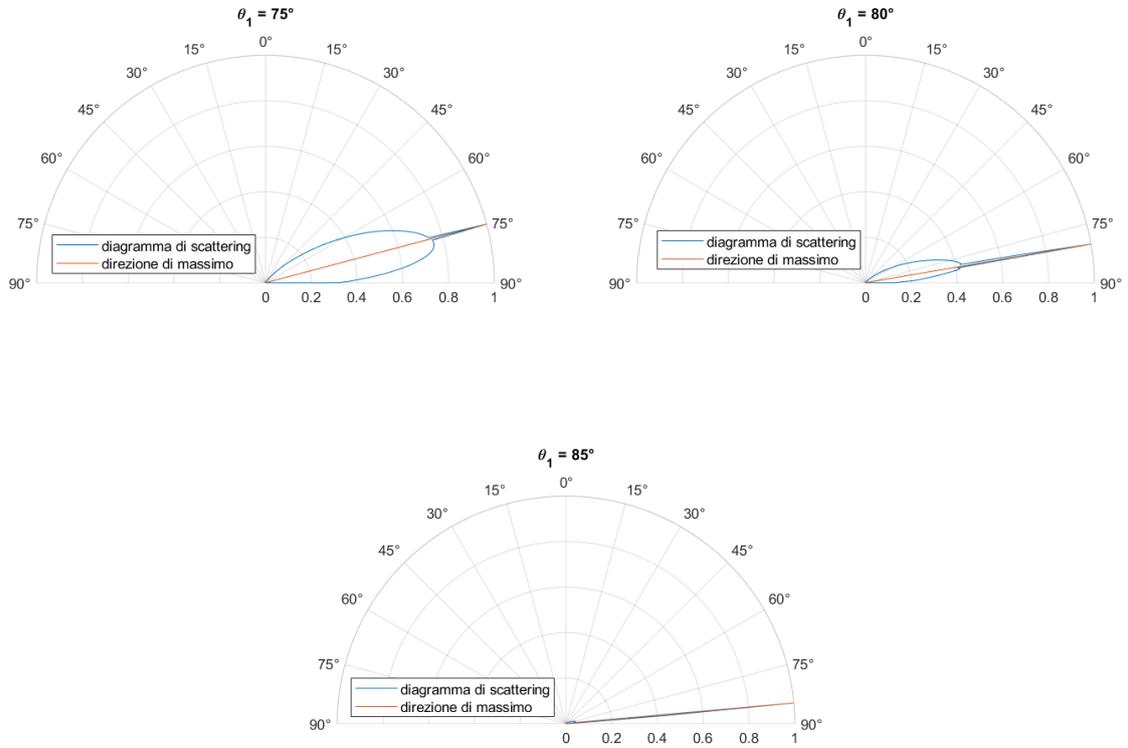


Figura 4.5: Diagramma di scattering modello di Kirchhoff con parametri $\theta_3 = 0$, $f = 1 \text{ THz}$, $L = 2.7 \text{ mm}$, $l_x = l_y = 0.5 \text{ m}$, $\sigma = 0.252 \text{ mm}$ e scegliendo angoli di incidenza (θ_1) prossimi ai 90°

Appendice A

Funzioni Gamma e Beta di Eulero

Le funzioni Gamma e Beta, dette anche integrali di Eulero del secondo e del primo tipo rispettivamente, sono particolari funzioni che hanno importanti applicazioni in campo matematico.

A.1 Funzione Gamma

Mediante la definizione di Eulero si definisce la funzione Gamma nel seguente modo:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (\text{A.1})$$

Dove z è un numero complesso avente parte reale strettamente positiva ($\Re(z) > 0$). Ora saranno elencate alcune proprietà della funzione Gamma che risulteranno utili nei capitoli successivi dell'appendice.

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \quad (\text{A.2})$$

$$\Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi} \Gamma(2z) \quad (\text{A.3})$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (\text{A.4})$$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{(n-2)!!}{2^{\frac{n-1}{2}}} \quad (\text{A.5})$$

Dove n è un numero naturale e $n!!$ rappresenta il fattoriale doppio (o semifattoriale) definito da

$$n!! = \prod_{k=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} (n - 2k) = n(n-2)(n-4) \dots \quad (\text{A.6})$$

A.2 Funzione Beta

La funzione Beta può essere definita tramite la seguente espressione:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (\text{A.7})$$

Con $\Re(x) > 0$, $\Re(y) > 0$. Inoltre è possibile dimostrare che valgono le relazioni:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (\text{A.8})$$

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1} t \cos^{2y-1} t dt \quad (\text{A.9})$$

Per ulteriori dettagli sulle funzioni gamma e beta consultare [5].

Appendice B

Dimostrazione modello ER direttivo

Lo scopo di questo capitolo è dimostrare il risultato dell'espressione 1.12 ovvero risolvere analiticamente

$$F_{\alpha_R} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos \psi_R}{2} \right)^{\alpha_R} \sin \theta_S d\theta_S d\phi_S \quad (\text{B.1})$$

Dove $\cos \psi_R = \cos \theta_i \cos \theta_S - \sin \theta_i \sin \theta_S \cos (\phi_S - \phi_i)$. Applicando il teorema binomiale si ricava

$$F_{\alpha_R} = \frac{1}{2^{\alpha_R}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sum_{j=0}^{\alpha_R} \binom{\alpha_R}{j} \cos^j \psi_R \sin \theta_S d\theta_S d\phi_S \quad (\text{B.2})$$

Da cui si ottiene immediatamente

$$F_{\alpha_R} = \frac{1}{2^{\alpha_R}} \sum_{j=0}^{\alpha_R} \binom{\alpha_R}{j} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\cos \theta_i \cos \theta_S - \sin \theta_i \sin \theta_S \cos (\phi_S - \phi_i))^j \sin \theta_S d\theta_S d\phi_S \quad (\text{B.3})$$

Se si applica nuovamente il teorema binomiale e si eseguono passaggi del tutto analoghi a quanto appena fatto si giunge a

$$F_{\alpha_R} = \frac{1}{2^{\alpha_R}} \sum_{j=0}^{\alpha_R} \binom{\alpha_R}{j} \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (-1)^l \cos^{j-l} \theta_i \sin^l \theta_i \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{j-l} \theta_S \sin^l \theta_S \cos^l (\phi_S - \phi_i) \sin \theta_S d\theta_S d\phi_S \quad (\text{B.4})$$

Sia $I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{j-l} \theta_S \sin^l \theta_S \cos^l (\phi_S - \phi_i) \sin \theta_S d\theta_S d\phi_S$ che può anche essere riscritto come

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^{j-l} \theta_S \sin^{l+1} \theta_S d\theta_S \int_0^{2\pi} \cos^l (\phi_S - \phi_i) d\phi_S = I_1 \cdot I_2 \quad (\text{B.5})$$

Ora si procede considerando prima il fattore $I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^{j-l} \theta_S \sin^{l+1} \theta_S d\theta_S$, applicando la relazione A.9 si ottiene:

$$I_1 = \frac{1}{2} B\left(\frac{l}{2} + 1, \frac{j-l+1}{2}\right) \quad (\text{B.6})$$

Si passa ora al secondo fattore $I_2 = \int_0^{2\pi} \cos^l(\phi_S - \phi_i) d\phi_S$ che può anche essere scritto come

$$I_2 = \int_0^{2\pi} (\cos \phi_S \cos \phi_i + \sin \phi_S \sin \phi_i)^l d\phi_S \quad (\text{B.7})$$

Applicando nuovamente il teorema binomiale si ricava

$$I_2 = \sum_{q=0}^l \binom{l}{q} \cos^{l-q} \phi_i \sin^q \phi_i \int_0^{2\pi} \cos^{l-q} \phi_S \sin^q \phi_S d\phi_S \quad (\text{B.8})$$

Sia $U = \int_0^{2\pi} \cos^{l-q} \phi_S \sin^q \phi_S d\phi_S$, si procede con la risoluzione di U . Spezzando l'integrale in quattro parti:

$$\begin{aligned} U = & \int_0^{\pi/2} \cos^{l-q} \phi_S \sin^q \phi_S d\phi_S + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^{l-q} \phi_S \sin^q \phi_S d\phi_S + \\ & + \int_{\pi}^{3\pi/2} \cos^{l-q} \phi_S \sin^q \phi_S d\phi_S + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos^{l-q} \phi_S \sin^q \phi_S d\phi_S \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Si nota che se q è dispari i termini si eliminano due a due. Stessa cosa succede se q è pari e l è dispari, invece se l e q sono entrambi pari i quattro termini risultano tra loro equivalenti, sommandoli si ottiene perciò

$$U = \begin{cases} 4 \int_0^{\pi/2} \cos^{l-q} \phi_S \sin^q \phi_S d\phi_S, & \text{se } l, q \text{ pari} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

Grazie alla A.9 si ottiene:

$$U = \begin{cases} 2B\left(\frac{q+1}{2}, \frac{l-q+1}{2}\right), & \text{se } l, q \text{ pari} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Combinando le B.4, B.5, B.6, B.8 si giunge a

$$\begin{aligned} F_{\alpha_R} = & \frac{1}{2^{\alpha_R}} \sum_{j=0}^{\alpha_R} \binom{\alpha_R}{j} \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (-1)^l \cos^{j-l} \theta_i \sin^l \theta_i \frac{1}{2} B\left(\frac{l}{2} + 1, \frac{j-l+1}{2}\right) \cdot \\ & \cdot \sum_{q=0}^l \binom{l}{q} \cos^{l-q} \phi_i \sin^q \phi_i U \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Dato che U è non nullo solamente quando gli indici l e q sono pari, combinando la B.11 e la B.12 si ottiene

$$F_{\alpha_R} = \frac{1}{2^{\alpha_R}} \sum_{j=0}^{\alpha_R} \binom{\alpha_R}{j} \sum_{l=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} \binom{j}{2l} \cos^{j-2l} \theta_i \sin^{2l} \theta_i B \left(l+1, \frac{j-2l+1}{2} \right) \cdot \sum_{q=0}^l \binom{2l}{2q} \cos^{2l-2q} \phi_i \sin^{2q} \phi_i B \left(q + \frac{1}{2}, l - q + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{B.13})$$

Adesso ci si concentra su $B \left(l+1, \frac{j-2l+1}{2} \right)$ e $B \left(q + \frac{1}{2}, l - q + \frac{1}{2} \right)$. Tramite le proprietà A.8, A.5, A.4 è semplice ottenere

$$B \left(l+1, \frac{j-2l+1}{2} \right) = 2^{l+1} l! \frac{(j-2l-1)!!}{(j+1)!!} \quad (\text{B.14})$$

In maniera analoga grazie alle A.8, A.4, A.3 si ricava

$$B \left(q + \frac{1}{2}, l - q + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi (2q)! (2l-2q)!}{2^{2l} q! l! (l-q)!} \quad (\text{B.15})$$

Sostituendo la B.14 e la B.15 in B.13 ed effettuando alcune semplificazioni si ha

$$F_{\alpha_R} = \frac{2\pi \alpha_R!}{2^{\alpha_R}} \sum_{j=0}^{\alpha_R} \frac{1}{(\alpha_R - j)! (j+1)!!} \sum_{l=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} \frac{\cos^{j-2l} \theta_i \sin^{2l} \theta_i}{2^l (j-2l)!!} \sum_{q=0}^l \frac{\cos^{2l-2q} \phi_i \sin^{2q} \phi_i}{q! (l-q)!} \quad (\text{B.16})$$

Ma il termine $\sum_{q=0}^l \frac{\cos^{2l-2q} \phi_i \sin^{2q} \phi_i}{q! (l-q)!}$ equivale a $\frac{1}{l!}$ (si deduce direttamente dal teorema binomiale). Con tale sostituzione si giunge alla formulazione finale:

$$F_{\alpha_R} = \frac{2\pi \alpha_R!}{2^{\alpha_R}} \sum_{j=0}^{\alpha_R} \frac{1}{(\alpha_R - j)! (j+1)!!} \sum_{l=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} \frac{\cos^{j-2l} \theta_i \sin^{2l} \theta_i}{2^l l! (j-2l)!!} \quad (\text{B.17})$$

Appendice C

Dimostrazione modello ER reciproco con lobo secondario

Lo scopo di questo capitolo è dimostrare l'espressione 2.7. Si parte quindi dall'integrale

$$F_{\beta_R} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \theta_S} (\cos \psi_R)^{\beta_R} \sin \theta_S d\theta_S d\phi_S \quad (\text{C.1})$$

Dove $\cos \psi_R = \cos \theta_i \cos \theta_S - \sin \theta_i \sin \theta_S \cos(\phi_S - \phi_i)$. Applicando il teorema binomiale si ottiene

$$F_{\beta_R} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=0}^{\beta_R} \binom{\beta_R}{j} \sqrt{\cos \theta_S} (\cos \theta_i \cos \theta_S)^{\beta_R - j} (\sin \theta_i \sin \theta_S \cos(\phi_S - \phi_i))^j \sin \theta_S d\theta_S d\phi_S \quad (\text{C.2})$$

Che può essere riscritto come

$$F_{\beta_R} = \sum_{j=0}^{\beta_R} \binom{\beta_R}{j} \cos^{\beta_R - j} \theta_i \sin^j \theta_i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\beta_R - j + \frac{1}{2}} \theta_S \sin^{j+1} \theta_S d\theta_S \int_0^{2\pi} \cos^j(\phi_S - \phi_i) d\phi_S \quad (\text{C.3})$$

Si procede risolvendo $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\beta_R - j + \frac{1}{2}} \theta_S \sin^{j+1} \theta_S d\theta_S$. Per la relazione A.9 si ha

$$I_1 = \frac{1}{2} B \left(\frac{j}{2} + 1, \frac{\beta_R - j}{2} + \frac{3}{4} \right) \quad (\text{C.4})$$

Per quanto riguarda $I_2 = \int_0^{2\pi} \cos^j(\phi_S - \phi_i) d\phi_S$, sfruttando quanto ottenuto nel paragrafo precedente, se si combinano le B.8 e B.11 si ottiene

$$I_2 = \begin{cases} \sum_{l=0}^{j/2} \binom{j}{2l} \cos^{j-2l} \phi_i \sin^{2l} \phi_i 2B \left(l + \frac{1}{2}, \frac{j-2l+1}{2} \right), & \text{se } j \text{ pari} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

Combinando C.3, C.4, C.5 e considerando che I_2 è non nullo solo per indici j pari, si ricava

$$F_{\beta_R} = \sum_{j=0}^{\lfloor \beta_R/2 \rfloor} \binom{\beta_R}{2j} \cos^{\beta_R-2j} \theta_i \sin^{2j} \theta_i B \left(j+1, \frac{\beta_R}{2} - j + \frac{3}{4} \right) \cdot \sum_{l=0}^j \binom{2j}{2l} \cos^{2j-2l} \phi_i \sin^{2l} \phi_i B \left(l + \frac{1}{2}, j - l + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{C.6})$$

Per quanto riguarda il termine $B \left(l + \frac{1}{2}, j - l + \frac{1}{2} \right)$ analogamente a quanto ottenuto in B.15 si ha

$$B \left(l + \frac{1}{2}, j - l + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi (2l)! (2j - 2l)!}{2^{2j} j! l! (j - l)!} \quad (\text{C.7})$$

Sostituendo la C.7 in C.6 ed effettuando alcune semplificazioni si giunge a

$$F_{\beta_R} = \pi \beta_R! \sum_{j=0}^{\lfloor \beta_R/2 \rfloor} \frac{\cos^{\beta_R-2j} \theta_i \sin^{2j} \theta_i}{2^{2j} j! (\beta_R - 2j)!} B \left(j+1, \frac{\beta_R}{2} - j + \frac{3}{4} \right) \sum_{l=0}^j \frac{\cos^{2j-2l} \phi_i \sin^{2l} \phi_i}{l! (j - l)!} \quad (\text{C.8})$$

Ma $\sum_{l=0}^j \frac{\cos^{2j-2l} \phi_i \sin^{2l} \phi_i}{l! (j - l)!} = \frac{1}{j!}$ perciò si ha

$$F_{\beta_R} = \pi \beta_R! \sum_{j=0}^{\lfloor \beta_R/2 \rfloor} \frac{\cos^{\beta_R-2j} \theta_i \sin^{2j} \theta_i}{2^{2j} (j!)^2 (\beta_R - 2j)!} B \left(j+1, \frac{\beta_R}{2} - j + \frac{3}{4} \right) \quad (\text{C.9})$$

Se si ipotizza che β_R possa assumere solo valori pari ($\beta_R = 2\alpha_R$) allora si giunge alla formulazione finale

$$F_{\alpha_R} = \pi (2\alpha_R)! \sum_{j=0}^{\alpha_R} \frac{\cos^{2\alpha_R-2j} \theta_i \sin^{2j} \theta_i}{2^{2j} (j!)^2 (2\alpha_R - 2j)!} B \left(j+1, \alpha_R - j + \frac{3}{4} \right) \quad (\text{C.10})$$

A tale espressione per F_{α_R} se ne può aggiungere un'altra ottenuta grazie alle osservazioni presenti nel capitolo 2 (in particolare nella sezione 2.3). Se α_R non ha valore troppo basso (per esempio $\alpha_R > 2$) si può infatti scrivere:

$$F_{\alpha_R} \approx k(\alpha_R) \sqrt{\cos \theta_i} \quad (\text{C.11})$$

Dove $k(\alpha_R)$ non è altro che F_{α_R} calcolato per $\theta_i = 0$. Dalla C.10 si nota che se θ_i è nullo, tutti i termini della sommatoria si annullano tranne quello per $j=0$, ovvero:

$$k(\alpha_R) = F_{\alpha_R}(\theta_i = 0) = \pi B \left(1, \alpha_R + \frac{3}{4} \right) \quad (\text{C.12})$$

Mediante le relazioni A.8, A.2 si può facilmente dimostrare che $B \left(1, \alpha_R + \frac{3}{4} \right) = \frac{4}{4\alpha_R + 3}$. La C.11 può quindi essere riscritta come

$$F_{\alpha_R} \approx \frac{4\pi}{4\alpha_R + 3} \sqrt{\cos \theta_i} \quad (\text{C.13})$$

Appendice D

Dimostrazione modello ER reciproco a singolo lobo

Lo scopo di questo capitolo è giustificare l'espressione 2.10. Per le considerazioni espresse nella sotto-sezione 2.4.2, è valida la seguente relazione:

$$F_{\beta_R} \approx k(\beta_R) \sqrt{\cos \theta_i} \quad (\text{D.1})$$

Ma $k(\beta_R)$ è F_{β_R} quando $\theta_i = 0$. Allora si può scrivere

$$F_{\beta_R} \approx k(\beta_R) \sqrt{\cos \theta_i} = F_{\beta_R}(\theta_i = 0) \sqrt{\cos \theta_i} \quad (\text{D.2})$$

Dopo aver effettuato le dovute sostituzioni, con pochi semplici passaggi si giunge a

$$F_{\beta_R} \approx \frac{2\pi \sqrt{\cos \theta_i}}{2^{\beta_R}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \theta_S} (1 + \cos \theta_S)^{\beta_R} \sin \theta_S d\theta_S \quad (\text{D.3})$$

Applicando il teorema binomiale si ottiene

$$F_{\beta_R} \approx \frac{2\pi \sqrt{\cos \theta_i}}{2^{\beta_R}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta_S \sqrt{\cos \theta_S} \sum_{j=0}^{\beta_R} \binom{\beta_R}{j} \cos^j \theta_S d\theta_S \quad (\text{D.4})$$

La D.4 può essere riscritta come

$$F_{\beta_R} \approx \frac{2\pi \sqrt{\cos \theta_i}}{2^{\beta_R}} \sum_{j=0}^{\beta_R} \binom{\beta_R}{j} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta_S \cos^{j+\frac{1}{2}} \theta_S d\theta_S \quad (\text{D.5})$$

Applicando la relazione A.9 in D.5 si ricava

$$F_{\beta_R} \approx \frac{\pi \sqrt{\cos \theta_i}}{2^{\beta_R}} \sum_{j=0}^{\beta_R} \binom{\beta_R}{j} B\left(1, \frac{j}{2} + \frac{3}{4}\right) \quad (\text{D.6})$$

Grazie alle proprietà A.8, A.2 si giunge all'espressione finale:

$$F_{\beta_R} \approx \frac{4\pi\sqrt{\cos\theta_i}}{2^{\beta_R}} \sum_{j=0}^{\beta_R} \binom{\beta_R}{j} \frac{1}{2j+3} \quad (\text{D.7})$$

Conclusioni

In conclusione, in questo documento partendo dal modello "Effective Roughness" diretto descritto in [2], il quale presenta il problema di non rispettare il principio di reciprocità della tratta radio, si propone un modello (in due versioni) che invece rispetta tale principio, oltre a soddisfare - seppur in modo approssimato - il bilancio di potenza, che è un requisito necessario per un modello "physically sound". La prima versione è detta "con lobo secondario" per la presenza nel diagramma di scattering di un ulteriore lobo oltre a quello principale che però risulta osservabile solamente per angoli di incidenza sufficientemente radenti, la seconda è detta "a lobo singolo". In entrambi i casi se si sceglie la formulazione reciproca, definita rispettivamente da 2.9 e 2.10, il bilancio di potenza dato dall'equazione 1.8 risulta rispettato solo in maniera approssimata, ciò può essere imputato all'assunzione di rapporto tra potenza incidente e potenza penetrata costante al variare delle irregolarità della superficie (tale assunzione non è valida per angoli di incidenza vicini a 90°). Inoltre per la versione "con lobo secondario" è stata ricavata anche una formulazione "quasi reciproca" (definita da 2.8), essa rispetta il bilancio di potenza (equazione 1.8) ma rispetta il principio di reciprocità solo in maniera approssimativa. Infine si è preso in considerazione come riferimento anche l'approccio di Kirchhoff il quale presenta risultati analoghi agli altri modelli sviluppati in questo lavoro di tesi, ma anche diverse limitazioni a livello di applicabilità.

Bibliografia

- [1] L. Minghini, R. D’Errico, V. Degli Esposti, and E. M. Vitucci, “Electromagnetic simulation and measurement of diffuse scattering from building walls,” in *The 8th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP 2014)*. IEEE, 2014, pp. 1298–1302.
- [2] V. Degli-Esposti, F. Fuschini, E. M. Vitucci, and G. Falciasecca, “Measurement and modelling of scattering from buildings,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, no. 1, pp. 143–153, 2007.
- [3] C. Jansen, S. Priebe, C. Moller, M. Jacob, H. Dierke, M. Koch, and T. Kurner, “Diffuse scattering from rough surfaces in thz communication channels,” *IEEE Transactions on Terahertz Science and Technology*, vol. 1, no. 2, pp. 462–472, 2011.
- [4] P. Beckmann and A. Spizzichino, “The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces,” *Norwood*, 1987.
- [5] M. Abramowitz, I. A. Stegun, and R. H. Romer, “Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables,” 1988.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il Professor Degli Esposti ed il Professor Vitucci per i preziosi consigli, la pazienza e il tempo dedicato. Il loro supporto e la loro disponibilità sono stati di essenziale importanza per lo svolgimento della tesi. Infine un ringraziamento speciale alla mia famiglia.