

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

MECCANISMI DI TRASPORTO DELL'ENERGIA IN ASTROFISICA

Tesi di laurea

Presentata da:
Martina Loriga

Relatore:
Chiar.mo Prof. Daniele Dallacasa

Anno accademico 2020-2021

*A chi c'è sempre stato
e a chi si è unito durante il viaggio*

INDICE

Introduzione	2
1. Produzione dell'energia	3
2. Meccanismi di trasporto dell'energia	5
2.1. Trasporto radiativo	5
2.1.1. Cammino libero medio	6
2.1.2. Opacità	7
2.1.3. Equazione del trasporto radiativo negli interni stellari	8
2.1.4. Trasporto radiativo nelle atmosfere stellari	9
2.2. Trasporto conduttivo	11
2.3. Trasporto convettivo	11
2.3.1. Gradiente adiabatico	12
2.3.2. Criterio di Schwarzschild	13
2.3.3. Equazione del flusso convettivo	14
3. Trasporto dell'energia nell'atmosfera terrestre	16
Bibliografia	17

Introduzione

L'elaborato si propone di descrivere i principali meccanismi di trasporto dell'energia, ovvero le modalità con le quali l'energia si propaga nello spazio.

L'ambiente scelto per questa trattazione è quello stellare che permette di capire il funzionamento dei tre meccanismi principali di trasporto, ovvero quello *radiativo*, *conduttivo* e *convettivo*, e come essi si combinano.

Per comprendere a pieno l'argomento in esame è utile una breve introduzione sui meccanismi di produzione dell'energia negli interni stellari.

Si parla perciò principalmente delle reazioni termonucleari di fusione, le quali necessitano di temperature molto elevate per essere innescate e forniscono informazioni sulla fase evolutiva della stella considerata.

Un punto fondamentale in questa trattazione è il fatto che le stelle possono essere considerate come dei corpi neri ¹, la cui emissione è governata dalla *legge di Planck*

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

con una forte dipendenza dalla temperatura e $h = 6.626 \cdot 10^{-27} \text{ erg s}$ la costante di Planck.

Gli spettri stellari, quindi, sono ben descritti da una curva di corpo nero, la quale risulta essere solcata da numerose righe di assorbimento come si vede dalla **fig. 1**.

Esse si formano a seguito del passaggio della radiazione in strati freddi e opachi nell'atmosfera, dove viene assorbita a particolari lunghezze d'onda da elementi chimici differenti. Questo ci fornisce perciò numerose informazioni sulla composizione chimica.

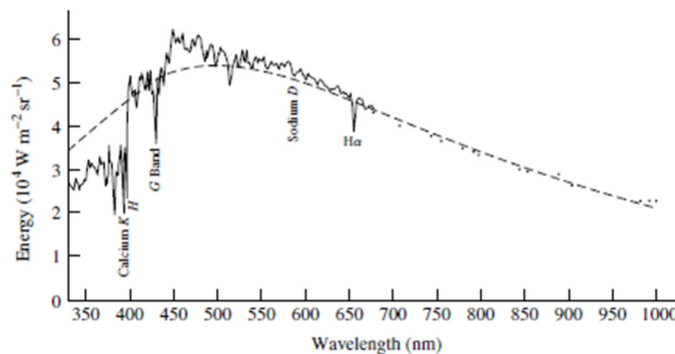


Fig.1: Porzione di spettro solare confrontata con la curva di corpo nero (linea tratteggiata) alla temperatura effettiva del sole

(B.W. Carroll, D. A. Ostlie, An introduction to modern astrophysics, Chapter 9.2)

Nella trattazione del trasporto dell'energia svolgono un ruolo molto importante il gradiente di temperatura, l'intensità specifica e il flusso che permettono di descrivere il funzionamento del meccanismo in esame e la sua efficienza nel trasporto.

Per l'ultimo capitolo, invece, l'ambiente di studio cambia per mostrare gli effetti della radiazione solare nell'atmosfera terrestre e in modo particolare è presente un breve accenno ai meccanismi di trasporto dell'energia dominanti in essa.

Una trattazione approfondita richiederebbe una lunghezza dell'elaborato molto maggiore, perciò verranno illustrati solo gli aspetti essenziali per la comprensione dell'argomento.

¹Corpi ideali con coefficiente di emissività e di assorbimento pari a 1

CAPITOLO I

Produzione dell'energia

Negli interni stellari la produzione di energia avviene principalmente tramite il meccanismo delle *reazioni termonucleari di fusione*, nelle quali nuclei leggeri si fondono per formarne altri più pesanti. Si tratta di reazioni che possono avvenire spontaneamente, essendo esoenergetiche, il cui punto di arrivo è la formazione del ferro (**fig.2**), che rappresenta il punto terminale dell'evoluzione dei nuclei stellari.

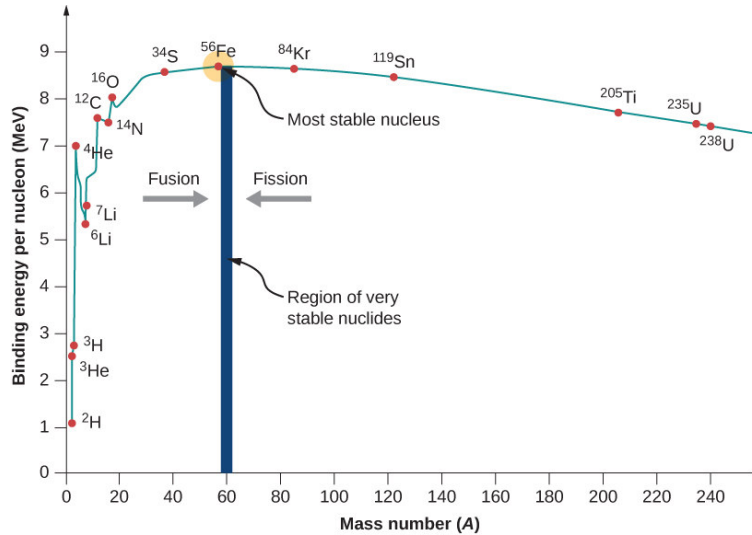


Fig.2: Rappresentazione dell'energia di legame per nucleone in funzione del numero di massa (University Physics, chapter 43.2)

La produzione dell'energia si basa sul fatto che la massa totale di un nucleo atomico è minore della somma di tutti i nucleoni che lo compongono.

Il difetto di massa Δm , perciò, corrisponde alla quantità di energia liberata durante la formazione del nucleo stabile, seguendo la celebre *legge di equivalenza massa-energia*

$$E = \Delta mc^2$$

Il rate con il quale viene rilasciata l'energia per unità di massa e di tempo, considerando i vari processi che intervengono in un dato ciclo di n reazioni, è dato dal termine $\varepsilon(x, \rho, T)$

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n E_i x_1 x_2 c_i \rho T^{-2/3} e^{-1.89 \left(\frac{E_0}{kT}\right)^{1/3}} \quad [erg \ s^{-1} g^{-1}] \quad (1.1)$$

Dove E rappresenta l'energia prodotta dalla singola reazione, c è una costante che dipende dal nuovo nucleo creato, x_1, x_2 le abbondanze degli elementi interagenti, E_0 la caratterizzazione in termini energetici del potenziale di repulsione e dipendente perciò dai nuclei coinvolti. Si nota inoltre la presenza della densità ρ e della temperatura T , caratteristiche dell'ambiente.

Spesso il valore di ε considerato è quello della reazione che condiziona l'intero ciclo, ovvero quella con il tempo scala più lungo, essendo quella più improbabile.

Tra le più importanti per una stella di MS (Main Sequence) si considerano le *reazioni termonucleari di fusione dell'idrogeno*, ovvero la catena protone-protone (PPI, PPII, PPIII)

e il ciclo CNO. Le differenze tra queste riguardano le reazioni presenti e quindi il budget energetico, per la presenza di neutrini, la temperatura di attivazione e il tempo scala.

Il risultato finale dei cicli sopracitati è la produzione di un nucleo di He^4 a seguito della fusione di 4 nuclei di H^1 .

Il ciclo più efficiente è la catena PPI con un budget energetico di $\sim 26 \text{ Mev}$ ($4 \cdot 10^{-5} \text{ erg}$), una temperatura di attivazione di $\sim 10^7 \text{ K}$ e un tempo scala di $\sim 10^9 \text{ yr}$, fornito dalla reazione meno probabile, ovvero la formazione di H^2 a partire da due nuclei di H^1 tramite il decadimento β^+ dove un protone decade in un neutrone, un positrone e un neutrino.

All'aumentare della temperatura si innescano anche le altre catene per la produzione di He^4 e la probabilità di attivazione di una catena rispetto a un'altra dipende dalle condizioni ambientali, dall'abbondanza e dalle proprietà degli elementi considerati nella reazione.

In base alla fase evolutiva nella quale si trova la stella vengono innescate reazioni differenti che possono coinvolgere, oltre la produzione di He^4 , anche la produzione di C^{12} , tramite il processo 3α , e/o di elementi più pesanti fino al Fe^{56} .

Per la produzione di energia partendo da elementi più pesanti di quest'ultimo, le reazioni utilizzate sono quelle di fissione dove nuclei pesanti vengono "spaccati" per formarne altri più leggeri, come si nota nella **fig.2**. L'energia prodotta negli interni stellari, perciò, deriva anche in misura minore da queste reazioni.

La vita evolutiva di una stella è caratterizzata dall'alternarsi di periodi di equilibrio che derivano dalla presenza delle reazioni termonucleari nel nucleo stellare, durante i quali la struttura rimane invariata, e fasi transitorie, caratterizzate dalla contrazione del nucleo con conseguenti variazioni strutturali, dall'innescò delle reazioni in shell esterne, con la conseguente produzione di energia che va a sommarsi a quella nucleare e dall'espansione dell'envelope esterno.

Inoltre, considerando la stella come un sistema autogravitante, formata da gusci sferici di spessore dr e $L(r)$ la quantità totale di energia liberata in un secondo dalla massa posta ad una distanza r dal centro della stella, si ottiene

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon \quad (1.2)$$

che rappresenta l'equazione del bilancio energetico per ogni guscio stellare, dato che l'energia persa per irraggiamento dev'essere bilanciata da quella prodotta negli interni stellari. Come si nota dalla **fig.3** gli strati che contribuiscono a $L(r)$ sono solo quelli più interni dove si sviluppano le reazioni termonucleari, mentre quelli più esterni si occupano solo del trasferimento di energia sulla superficie.

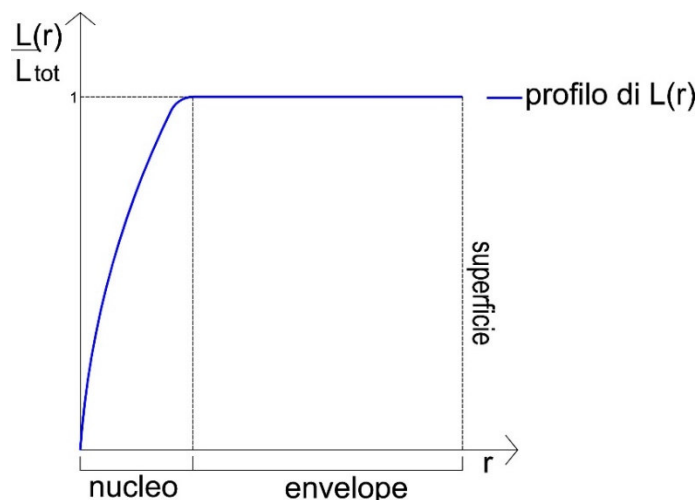


Fig.3: Profilo qualitativo di $L(r)$ al variare dello strato stellare

CAPITOLO II

Meccanismi di trasporto dell'energia

Il trasporto dell'energia dagli interni stellari verso l'esterno avviene principalmente tramite tre meccanismi, i quali utilizzano portatori di energia differenti: *irraggiamento* (fotoni), *conduzione* (elettroni) e *convezione* (celle di gas).

Negli interni stellari, dato che l'energia degli elettroni è maggiore di quella dei fotoni, verrebbe spontaneo pensare che il meccanismo di trasporto dominante sia quello conduttivo, ma in realtà la situazione è più complessa.

Infatti, il cammino libero medio, ovvero la distanza media percorsa dalle particelle tra due urti consecutivi, è molto minore per gli elettroni rispetto che per i fotoni; questo fa sì che il meccanismo dominante negli interni stellari sia quello radiativo, ovvero tramite irraggiamento.

Negli interni stellari, perciò, in condizioni di gas perfetto, i meccanismi considerati sono quello radiativo e quello convettivo, mentre in caso di gas degenere, come per esempio nei nuclei delle nane bianche, anche il meccanismo conduttivo è da tenere in considerazione, dato che il cammino libero medio degli elettroni risulta essere confrontabile con quello dei fotoni.

Per descrivere il trasporto dell'energia bisogna stabilire un legame tra il gradiente di temperatura ∇T , che risulta essere più elevato in caso di trasporto convettivo rispetto a quello radiativo, e il flusso locale di energia definito come $F = \frac{L(r)}{4\pi r^2}$, ovvero, riprendendo le considerazioni del capitolo precedente, flusso entrante/uscente da ogni guscio sferico.

Un ulteriore meccanismo tramite il quale avviene l'emissione e la perdita di energia è quello descritto dai neutrini², i quali possiedono una sezione d'urto con la materia molto piccola e riescono quindi a fuggire molto velocemente. Questo spiega perché le differenze nei budget energetici delle reazioni termonucleari dipendono dalla presenza dei neutrini.

In questo capitolo verranno descritti i tre principali meccanismi di trasporto dell'energia citati precedentemente, tralasciando le perdite per neutrini che necessiterebbero di una trattazione più complessa.

2.1 Trasporto Radiativo

Il meccanismo di trasporto radiativo permette all'energia, prodotta dalle reazioni termonucleari e dalla gravitazione, di essere trasportata in superficie tramite i fotoni, i quali possono essere assorbiti e riemessi in ogni direzione quando incontrano la materia.

Questo significa che i portatori di energia si spostano dalle regioni più calde a quelle più fredde riscaldandole.

Dato che, considerando la stella complessivamente, essa non risulta essere in equilibrio termodinamico per la presenza di una temperatura non uniforme, di un flusso di radiazione uscente dalla superficie e di una composizione chimica non costante nel tempo, per questa trattazione si utilizza un'approssimazione.

Si assume la struttura stellare come formata da gusci sferici in *equilibrio termodinamico locale* (LTE), con la temperatura considerata uniforme in ogni guscio.

Si può intuire perciò che due concetti fondamentali per la trattazione del trasporto radiativo (e non solo) sono *il cammino libero medio* e *l'opacità*.

²Particelle subatomiche elementari di massa quasi nulla e carica elettrica pari a 0

2.1.1 Cammino libero medio

Il cammino libero medio dei fotoni, l , viene definito come la distanza percorsa da un fotone prima di incontrare una particella

$$l = \frac{1}{n\sigma} \quad (2.1)$$

Dove n rappresenta il numero di particelle nell'unità di volume e σ la sezione d'urto per l'interazione tra un fotone e una particella.

Si può quindi ottenere una formulazione per la descrizione della distanza (d) percorsa da un fotone come risultato di N moti casuali di lunghezza l , come mostrato nella **fig.4**

$$d = l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_N \quad (2.2)$$

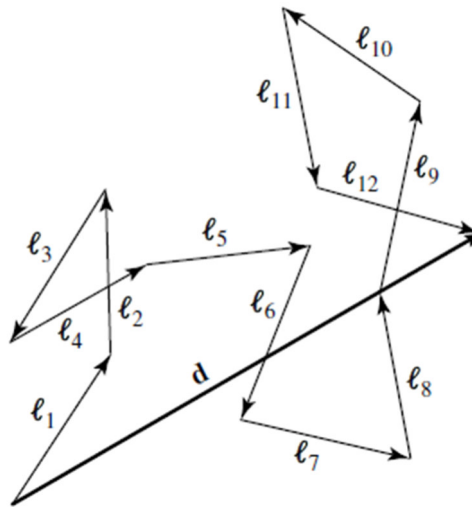


Fig.4: Distanza d percorsa dal fotone
(B.W. Carroll, D. A. Ostlie, An introduction to modern astrophysics, Chapter 9.3)

Si ottiene perciò

$$d^2 = Nl^2 + l^2[\cos\vartheta_{12} + \cos\vartheta_{13} + \dots + \cos\vartheta_{1N} + \dots + \cos\vartheta_{2N} + \dots + \cos\vartheta_{N(N-1)}]$$

La quale per un gran numero di urti si può approssimare a

$$d^2 = Nl^2 \rightarrow d = l\sqrt{N} \quad (2.3)$$

Si nota perciò che il trasporto potrebbe essere poco efficiente, per esempio servono 10^2 scambi per percorrere solo $10l$ e 10^4 scambi per percorrere $100l$.

È necessario però, ricordare che il trasporto radiativo non è da considerarsi come un flusso ordinato di fotoni che si muovono verso la superficie, essi infatti subiscono dei processi di assorbimento, diffusione e riemissione.

Questo fa sì che si tratti comunque di un meccanismo efficiente con un tempo impiegato dalla radiazione per diffondere dal centro alla superficie di $\sim 10^{5/6}$ anni.

2.1.2 Opacità

L'opacità del materiale stellare (k_ν) è una misura della resistenza offerta dalla materia al passaggio della radiazione, perciò dipende da come i fotoni interagiscono con le particelle presenti (elettroni liberi, atomi, ioni).

Infatti, se il fotone passa entro la sezione d'urto σ_ν di una particella, esso può essere assorbito oppure essere scatterato, ovvero viene modificata la sua direzione di propagazione.

In generale si possono identificare quattro processi che contribuiscono alla diminuzione del flusso di radiazione a una certa frequenza:

- *Transizione bound-bound* avviene quando un elettrone effettua una transizione da un orbitale a un altro. Si tratta del meccanismo dominante nelle atmosfere stellari ed è alla base della formazione delle righe spettrali di assorbimento o di emissione, a seconda che l'elettrone passi da stati di energia minore a quelli di energia maggiore assorbendo un fotone o viceversa emettendo un fotone. I fotoni considerati sono solo quelli di energia pari alla differenza di energia tra i due stati considerati nella transizione, ovvero $h\nu_{BB} = E_2 - E_1$.
- *Transizione bound-free* rappresenta un processo di fotoionizzazione, dove un elettrone in uno stato legato assorbe un fotone di energia superiore alla soglia di ionizzazione, ovvero $h\nu_{BF} = E_3 - E_1 > \chi_{ion}$ e si trasforma in elettrone libero.
- *Transizione free-free* caratterizzata da un elettrone libero che assorbe un fotone di energia $h\nu_{FF}$, aumentando quindi la sua velocità e spostandosi in un altro stato libero E_4 , ovvero $h\nu_{FF} = E_4 - E_3$. Questo significa che non ci sono restrizioni sull'energia del fotone.
È anche possibile che l'elettrone libero perda energia emettendo un fotone, questo processo di emissione free-free è chiamato bremsstrahlung.
- *Scattering* rappresenta un processo differente dai primi tre, in quanto non avviene l'assorbimento di un fotone ma semplicemente la sua diffusione, tramite un meccanismo che può essere interpretato come una collisione tra due particelle e che ritarda l'uscita del fotone dalla stella.

Negli interni stellari, perciò, si considerano soltanto gli ultimi tre processi, date le elevate temperature. In modo particolare le transizioni bound-free sono rilevanti solo per gli elementi pesanti che sono quasi completamente ionizzati e possono essere considerati come atomi a un solo elettrone; mentre le altre due sfruttano la presenza di He e H ionizzati che forniscono gli elettroni liberi necessari per il processo.

È utile allora illustrare le *leggi di Kramers*, equazioni approssimate che forniscono le dipendenze dalla densità e dalla temperatura dei processi che contribuiscono all'opacità.

$$k_{BF} \propto 10^{25} Z(1 + X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \quad (2.4)$$

$$k_{FF} \propto 10^{22} (X + Y)(1 + X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \quad (2.5)$$

$$k_E \propto 0.2(1 + X) \quad (2.6)$$

Si nota la dipendenza da Z per k_{BF} , mentre quella da X e Y per k_{FF} a conferma del concetto esposto precedentemente con X , Y e Z abbondanze in massa rispettivamente di H, He ed elementi pesanti.

Inoltre, lo scattering risulta essere dominante in caso di bassa densità e/o alta temperatura.

Come si nota dalla **fig.5** l'opacità aumenta all'aumentare della densità, a parità di T, con un picco attorno a $\log T \sim 4$ (freccia blu) per la ionizzazione dell'H e la prima ionizzazione dell'He. Successivamente il declino è determinato da $k \propto T^{-3.5}$, con una "gobba" (freccia rossa) visibile attorno a $\log T \sim 4.6$ per la seconda ionizzazione dell'He.

Si può notare inoltre che ad alte T, ovvero nella regione dove domina il processo di scattering, l'opacità rimane costante (freccia verde).

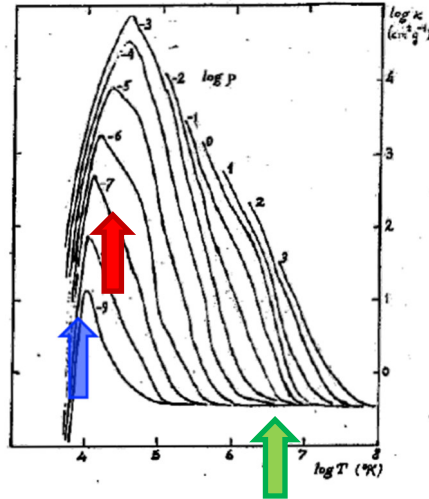


Fig.5: Dipendenza dell'opacità dalla temperatura e dalla densità in scala logaritmica
(Dispense astrofisica stellare, F.R. Ferraro, e riadattata)

Andando perciò ad assumere la struttura stellare in LTE, in ogni strato si può considerare l'opacità mediata sulle frequenze, sfruttando la *media di Rosseland*, la quale utilizza come peso la derivata della funzione di Planck rispetto alla temperatura

$$k(\nu) = k_{BF}(\nu) + k_{FF}(\nu) + k_E \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{\bar{k}} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{k_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu} \quad (2.8)$$

2.1.3 Equazione del trasporto radiativo negli interni stellari

Per derivare l'equazione del trasporto radiativo negli interni stellari è necessario esprimere il gradiente di pressione, derivando l'espressione della pressione radiativa rispetto a r

$$P_{rad} = \frac{1}{3} a T^4 \rightarrow \frac{dP_{rad}}{dr} = \frac{4}{3} a T^3 \frac{dT}{dr} \quad (2.9)$$

Con $a = \frac{4\sigma}{c} = 7.564 \cdot 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$ e $\sigma = 5.670 \cdot 10^{-5} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ K}^{-4}$, la costante di Stefan-Boltzmann.

Però il gradiente di pressione può essere anche riscritto in termini del flusso di radiazione, ovvero il flusso di energia per unità di tempo e di superficie, come

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = -\frac{k\rho}{c} F_{rad} \quad (2.10)$$

Perciò uguagliando i due si ottiene

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{k\rho}{T^3} F_{rad} \quad (2.11)$$

E ricordando che $F_{rad} = \frac{L_r}{4\pi r^2}$, si ottiene la formulazione per il gradiente termico in caso di trasporto radiativo

$$\frac{dT}{dr} |_{rad} = -\frac{3k\rho}{4ac} \frac{L_r}{4\pi r^2} \frac{1}{T^3} \quad (2.12)$$

dove si nota la dipendenza dall'opacità e dal flusso che rappresentano le “manopole” che permettono l'aumento in valore assoluto del gradiente termico. Si considera il valore assoluto perché il gradiente diminuisce all'aumentare della coordinata r .

2.1.4 Trasporto radiativo nelle atmosfere stellari

Nelle atmosfere stellari, per trattare il trasporto radiativo, bisogna andare a definire una nuova grandezza, l'intensità specifica al variare della lunghezza d'onda λ (**fig.6**), ovvero la quantità di radiazione avente una lunghezza d'onda compresa tra λ e $\lambda + d\lambda$ che passa nell'unità di tempo dt attraverso l'area dA con un angolo θ e in un angolo solido $d\Omega$

$$I_\lambda = \frac{E_\lambda d\lambda}{d\lambda dt dA \cos\theta d\Omega} \quad \left[\frac{erg}{s cm^3 sr} \right] \quad (2.13)$$

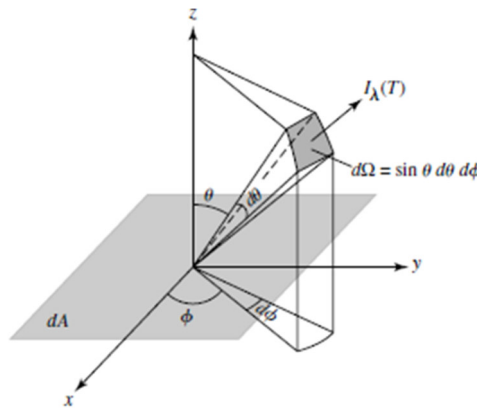


Fig.6: Intensità specifica I_λ

(B.W. Carroll, D. A. Ostlie, An introduction to modern astrophysics, Chapter 9.1)

La relazione tra flusso radiativo specifico ed intensità è data da

$$F_\lambda d\lambda = \int I_\lambda d\lambda \cos\theta d\Omega = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} I_\lambda d\lambda \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi \quad (2.14)$$

Per determinare l'equazione del trasporto radiativo bisogna quindi considerare i vari processi di emissione e assorbimento di fotoni durante il passaggio del fascio di radiazione

$$dI_\lambda = -I_\lambda k_\lambda \rho ds + j_\lambda \rho ds \quad (2.15)$$

con il primo termine che riguarda l'assorbimento, con una dipendenza dall'opacità, mentre il secondo l'emissione tramite il coefficiente di emissione j_λ .

Entrambi dipendono inoltre dalla distanza percorsa ds .

L'equazione ci dice perciò che il tasso con cui i processi di emissione e assorbimento avvengono determina quanto rapidamente l'intensità del flusso varia.

A questo punto è utile definire la *profondità ottica*, la quale ci permette di capire quanto in profondità si vede emergere la radiazione ad una particolare λ

$$d\tau_\lambda = -k_\lambda \rho ds \rightarrow \tau_\lambda = \int_0^s k_\lambda \rho ds \quad (2.16)$$

considerando la radiazione generata in $s = 0$.

Si nota allora che la profondità ottica aumenta nella direzione nella quale la coordinata s diminuisce, ovvero spostandosi verso l'interno.

Quindi, dividendo la (2.15) per $k_\lambda \rho ds$ e definendo la funzione sorgente $S_\lambda = \frac{j_\lambda}{k_\lambda}$ si ottiene l'equazione del trasporto radiativo scritta come

$$\frac{dI_\lambda}{d\tau_\lambda} = I_\lambda - S_\lambda \quad (2.17)$$

Nel caso di emissione trascurabile ($S_\lambda = 0$) perciò si può integrare e ottenere

$$I_\lambda = I_{\lambda,0} e^{-\tau_\lambda} \quad (2.18)$$

Nel caso di $\tau_\lambda \gg 1$ si parla di materiale otticamente spesso, il quale attenua in maniera significativa la radiazione, mentre se $\tau_\lambda \ll 1$ il materiale è detto otticamente sottile.

Tornando al caso di emissione + assorbimento, la formula (2.17) non fornisce informazioni dirette sullo strato da cui fuoriesce la radiazione perché se θ aumenta, allora anche s e τ_λ aumentano, nonostante lo strato sia sempre lo stesso, come si nota dalla **fig.7**.

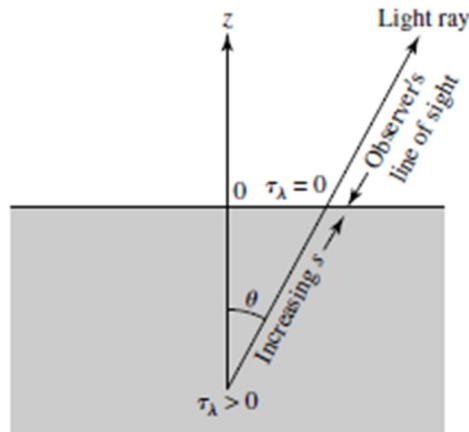


Fig.7: Profondità ottica τ_λ

(B.W. Carroll, D. A. Ostlie, An introduction to modern astrophysics, Chapter 9.2)

A questo punto si può perciò introdurre l'approssimazione di atmosfera a strati piani paralleli in modo tale da definire una profondità ottica verticale $\tau_{\lambda,v}$ che rappresenta la proiezione della profondità ottica sull'asse z

$$\tau_{\lambda,v} = \tau_\lambda \cos\theta \quad (2.19)$$

Quindi sostituendo e introducendo l'approssimazione di atmosfera grigia per eliminare la dipendenza da λ , ovvero utilizzando la media di Rosseland sull'opacità, si ottiene

$$\cos\theta \frac{dI}{d\tau_v} = I - S \quad (2.20)$$

Tramite questa formulazione è possibile caratterizzare in termini di temperatura la struttura stellare, associando a ogni strato un valore di temperatura e di τ_v ; si può dimostrare che lo strato dal quale vengono emessi i fotoni è la fotosfera, corrispondente a $\tau_v = \frac{2}{3}$, e che la sua temperatura rappresenta quella effettiva della stella.

2.2 Trasporto conduttivo

Il trasporto conduttivo normalmente risulta essere trascurabile, tranne in casi particolari come nei nuclei delle nane bianche o nelle stelle giganti rosse, ovvero in gas di elettroni degeneri.

Infatti, dato che gli stati di minore energia sono occupati a causa della degenerazione elettronica, gli elettroni sono costretti a spostarsi in quelli di energia maggiore e questo fa sì che il loro cammino libero medio aumenti e diventi confrontabile con quello dei fotoni.

Nelle nane bianche questo meccanismo è talmente efficiente che i loro interni sono quasi isotermi.

Il flusso di energia associato alla conduzione dipende dal gradiente di temperatura ed è pari a

$$F_{cond} = -\Lambda \frac{dT}{dr} \quad (2.21)$$

con $\Lambda = \frac{4acT^3}{3k_c\rho}$ determinata dalla teoria dei gas degeneri e dipendente da k_c , ovvero un'opacità legata alla conduzione.

Quindi si ottiene

$$F_{cond} = -\frac{4acT^3}{3k_c\rho} \frac{dT}{dr} \quad (2.22)$$

Perciò in caso di convezione trascurabile, il flusso totale è dato da

$$F = F_{rad} + F_{cond} = -\frac{4ac}{3k_{tot}\rho} T^3 \frac{dT}{dr} \quad (2.23)$$

Con $\frac{1}{k_{tot}} = \frac{1}{k_r} + \frac{1}{k_c}$ e k_r il coefficiente di opacità del trasferimento radiativo.

Normalmente nel materiale stellare $k_c > k_r$ e quindi il trasporto conduttivo è trascurabile rispetto a quello radiativo.

2.3 Trasporto convettivo

Il meccanismo convettivo è uno dei più importanti nella struttura stellare e consiste nello spostamento di celle di gas dalle parti più interne, più calde, verso la superficie. Fisicamente quindi, si considera un vero e proprio moto di masse, le quali dopo essere arrivate in superficie si raffreddano e, diventando più dense, tornano verso il basso.

Questo provoca un vero e proprio rimescolamento del materiale stellare, tanto che la composizione delle regioni convettive della stella diventa praticamente omogenea. La sua importanza risiede anche nel fatto che questo meccanismo rappresenta l'unico modo per ottenere informazioni sugli interni della struttura stellare.

Il problema principale nella trattazione del meccanismo convettivo è la parametrizzazione del cammino libero medio, dato che non esiste una trattazione esatta del moto turbolento a cui sono soggette le celle.

Si utilizza, perciò, la *Mixing Length Theory*, la quale permette di definire una lunghezza l , chiamata mixing length, percorsa dagli elementi prima di dissolversi nell'ambiente circostante.

Si definisce allora un parametro α , scelto in modo tale che riproduca le osservazioni ($0.5 < \alpha < 2$), tale per cui $l = \alpha H_p$, con H_p l'altezza scala di pressione,

$$\frac{1}{H_p} = -\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} \quad (2.24)$$

Integrando si dimostra che essa rappresenta la lunghezza caratteristica entro la quale la pressione diminuisce di un fattore $\frac{1}{e}$.

La convezione, quindi, risulta essere efficiente solo quando $l \approx H_p$, dato che se $l \gg H_p$ l'elemento convettivo perde di significato, mentre nel caso opposto il meccanismo non è efficiente.

A questo punto bisogna definire una condizione per l'innescò della convezione, andando a considerare processi adiabatici, ovvero si assume che la cella di gas scambi calore solo dopo aver percorso una distanza pari a l , senza perdite di calore durante il trasporto.

2.3.1 Gradiente adiabatico

Uno dei concetti più importanti all'interno di questa trattazione è il *gradiente adiabatico*, il quale verrà poi utilizzato nella condizione per l'innescò della convezione.

Per ricavarlo si parte dall'equazione di stato dei gas perfetti

$$P = \frac{k\rho T}{\mu H} \quad (2.25)$$

E supponendo di considerare strati lontani dalle regioni termonucleari in modo tale che il peso molecolare medio μ non vari con la distanza, si può esprimere la (2.25) in termini logaritmici e derivare rispetto a r , così da ottenere

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \quad (2.26)$$

A questo punto si utilizza l'assunzione fatta precedentemente sull'adiabaticità dei processi in esame, considerando

$$P = \rho^\gamma \quad (2.27)$$

con $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, rapporto di calori specifici a pressione (c_p) e volume (c_v) costante.

Differenziando e derivando rispetto a r si ottiene

$$\frac{dP}{dr} = \gamma \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \quad (2.28)$$

Quindi sostituendo nella (2.26) si ottiene una prima formulazione del gradiente adiabatico che dipende dalla distanza dal centro

$$\frac{dT}{dr} |_{ad} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \quad (2.29)$$

Questo può essere riscritto in maniera più compatta considerando

$$\frac{dT}{dP} \frac{P}{T} = \frac{d \log T}{d \log P} = \nabla \quad (2.30)$$

E quindi il gradiente adiabatico, in funzione della pressione in scala logaritmica, diventa

$$\nabla_{ad} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \quad (2.31)$$

Nel caso di gas monoatomico $\nabla_{ad} = 0.4$, mentre in caso di gas parzialmente ionizzato c_p e c_v aumentano e si può arrivare anche a $\nabla_{ad} = 0.1$.

2.3.2 Criterio di Schwarzschild

Per trovare la condizione per l'innescio della convezione si considera il gradiente di temperatura, il quale sotto determinate condizioni può diventare instabile e innescare il moto convettivo.

Questo si può comprendere considerando la *forza di Buoyancy* B (per unità di massa), la quale agisce nel momento in cui un elemento di materia ha una densità ρ^* diversa da quella dell'ambiente circostante ρ

$$B = g \frac{(\rho - \rho^*)}{\rho^*} \quad (2.32)$$

Si suppone che un elemento di materia, a distanza r dal centro, venga spostato adiabaticamente verso la superficie, per una variazione infinitesima negativa di densità, fino a una distanza $r + dr$, rimanendo sempre in equilibrio di pressione con l'ambiente circostante. Se il materiale obbedisce all'equazione di stato dei gas perfetti, allora uno spostamento verso regioni con densità minore provoca un aumento di temperatura all'interno dell'elemento considerato.

Perciò se la densità dell'elemento, durante il moto verso l'alto, decresce più rapidamente di quella del mezzo nel quale è immerso, la forza di Buoyancy aumenta e l'elemento continua a salire verso l'alto, trasportando calore verso l'esterno.

Si tratta allora di instabilità alla convezione.

Nel caso opposto invece, ovvero se $\rho^* > \rho$, la forza di Buoyancy diminuisce e l'elemento torna alla posizione di equilibrio iniziale.

In questo caso si parla di una condizione di stabilità alla convezione.

Utilizzando, quindi, la condizione di trasporto adiabatico (2.27) e imponendo la condizione di stabilità rispetto al trasporto convettivo vista precedentemente, si ottiene, tramite passaggi algebrici una prima formulazione del criterio di Schwarzschild

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{1}{P} \left| \frac{dP}{dr} \right| > \frac{1}{T} \left| \frac{dT}{dr} \right| \quad (2.33)$$

la quale può essere riscritta utilizzando la (2.30) e la definizione di ∇_{ad} (2.31) ottenendo

$$\nabla > \nabla_{ad} \quad (2.34)$$

che rappresenta il *criterio di Schwarzschild* per l'innescio del moto convettivo, anche se, imponendo la stabilità, si trova la condizione opposta "contro" i moti convettivi. Dato che $\nabla \sim \nabla_{rad}$, questo significa che il gradiente radiativo dev'essere più "ripido" di quello adiabatico per far sì che si abbia convezione, come si nota dalla **fig.8**.

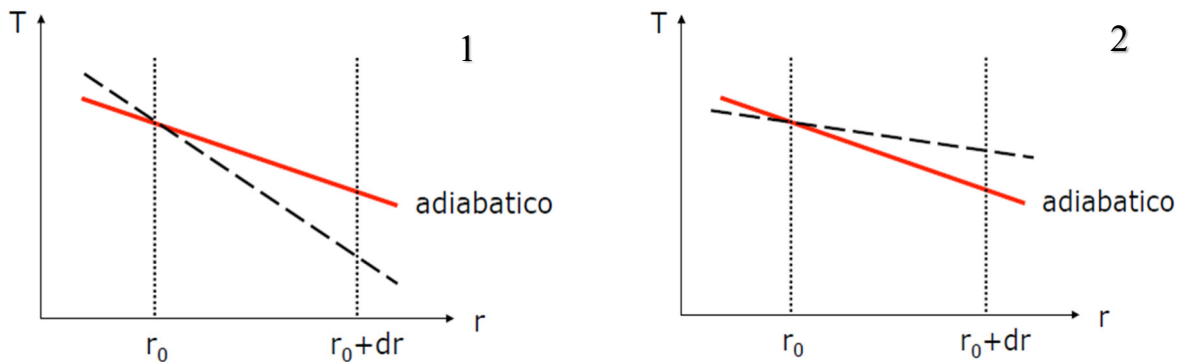


Fig.8: rappresentazione del criterio di Schwarzschild
nel caso di 1) convezione 2) non convezione
(Dispense astrofisica stellare, F.R. Ferraro)

Riprendendo le formule (2.12) e (2.31) si possono ricavare delle condizioni che favoriscono l'innescio della convezione:

- Opacità elevata che implica un ∇_{rad} elevato
- Regioni a ionizzazione parziale che rendono ∇_{ad} minore
- Rate di generazione dell'energia da parte delle reazioni nucleari/gravitazione elevato che causa un grande flusso radiativo ed un aumento di ∇_{rad}

Le prime due condizioni sono caratteristiche delle atmosfere stellari e possono essere presenti anche simultaneamente, mentre la terza è tipica degli interni stellari durante i processi CNO e 3α .

Inoltre, possono esserci anche zone convettive adiacenti a regioni con combustione termonucleare perché è presente un continuo rifornimento di combustibile.

Si può comprendere, quindi, che la convezione è importante in superficie per il raggio e la temperatura, ma anche negli interni per la determinazione della durata della combustione e quindi della fase evolutiva della stella.

2.3.3 Equazione del flusso convettivo

Si considera una cella di massa dm , all'interno di una zona convettiva, che si innalza di una quantità h partendo da una distanza r dal centro della stella.

Allora si ottiene una formulazione per il flusso convettivo, ovvero l'energia termica trasportata dalla cella

$$F_{conv} = \frac{1}{2} c_p \Delta T \rho v \quad (2.35)$$

dipendente dall'energia termica per grammo trasportata dalla cella convettiva mentre si sposta a P costante ($c_p \Delta T$) e dal flusso di massa che attraversa l'unità di superficie nell'unità di tempo ($\frac{1}{2} \rho v$) con v la velocità dell'elemento convettivo.

A questo punto si può riscrivere ΔT in funzione del gradiente superadiabatico utilizzando anche il parametro l

$$\Delta T = \frac{d\Delta T}{dr} dr = \frac{d\Delta T}{dr} l = \left(\frac{dT}{dr} |_{ad} - \frac{dT}{dr} \right) l \quad (2.36)$$

Si può trasformare il gradiente termico lineare in un gradiente logaritmico in funzione della pressione

$$F_{conv} = \frac{1}{2} c_p \rho v l \left(\frac{dT}{dP} |_{ad} - \frac{dT}{dP} \right) \frac{dP}{dr} \frac{P}{T} \quad (2.37)$$

Si utilizza quindi la (2.30) e la definizione di H_p (2.24) per ottenere il flusso convettivo in funzione di ∇

$$F_{conv} = \frac{1}{2} c_p \rho v \alpha (\nabla - \nabla_{ad}) T \quad (2.38)$$

Per confrontarlo con il flusso radiativo, conviene esprimere anche quest'ultimo in funzione di ∇ , ripartendo dalla (2.11) ed effettuando dei passaggi algebrici simili a quelli visti precedentemente per F_{conv} si ottiene

$$F_{rad} = \frac{4ac}{3k\rho} \frac{T^4}{H_p} \nabla \quad (2.39)$$

Si può inoltre impostare l'equazione generale del flusso negli strati esterni dove $\varepsilon = 0$, utilizzando l'equazione di Stefan-Boltzmann, essendo lo spettro stellare approssimabile a quello di corpo nero

$$F = F_{rad} + F_{conv} = \frac{L}{4\pi R_{TOT}^2} = \sigma T_e^4 \quad (2.40)$$

Perciò sostituendo la (2.38) e la (2.39) si può ottenere una formulazione per ∇

$$\nabla = \frac{\frac{L}{4\pi R_{TOT}^2} + \frac{1}{2} c_p \rho v \alpha \nabla_{ad} T}{\frac{4ac}{3k\rho} \frac{T^4}{H_p} + \frac{1}{2} c_p \rho v \alpha T} \quad (2.41)$$

Si nota che $\nabla \rightarrow \nabla_{rad}$ quando $v \rightarrow 0$, ovvero in assenza di convezione, mentre se v è elevato, cioè se la convezione è dominante, allora $\nabla \rightarrow \nabla_{ad}$.

Si può stimare infine, la velocità v andando a considerare la forza per unità di volume che agisce su ogni cella, determinando il lavoro svolto e uguagliandolo all'energia cinetica

$$v = \sqrt{2g \frac{\Delta T}{T} l} \rightarrow F_{conv} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rho \sqrt{\frac{g}{T}} c_p \left(\frac{d\Delta T}{dr} \right)^{\frac{3}{2}} l^2 \quad (2.42)$$

È stata trovata quindi un'ulteriore formulazione per il flusso convettivo, utilizzando il gradiente superadiabatico (2.36), con una forte dipendenza da l .

CAPITOLO III

Trasporto dell'energia nell'atmosfera terrestre

Per trattare l'atmosfera terrestre vengono realizzati dei modelli di bilancio radiativo considerando l'irradianza solare alla distanza media terra-sole come forzante del sistema.

L'atmosfera terrestre, infatti, è relativamente trasparente alle shortwave (fotoni solari); esse vengono in parte assorbite dalla superficie, soprattutto oceani e mari, in parte riflesse dalla superficie o dalle nubi/atmosfera e in parte assorbite dall'atmosfera.

Per ottenere un bilancio è però necessario che il calore fornito dall'assorbimento della radiazione sia pari a quello derivante dall'emissione della superficie e dell'atmosfera.

È fondamentale, perciò, considerare la *trasmissività dell'atmosfera* e il *trasporto convettivo* di calore tramite i moti atmosferici. Quest'ultimo è dominante nella troposfera, strato atmosferico che si estende dal suolo fino a $\approx 20\text{ km}$ ai tropici e $\approx 10\text{ km}$ ai poli.

Per la presenza dell'atmosfera, il sistema terra-atmosfera non può però essere considerato come un corpo nero che emette alla temperatura della superficie terrestre, come invece può accadere per un pianeta privo di atmosfera.

Questo perché una parte della radiazione emessa dalla superficie viene assorbita dall'atmosfera.

Questo deriva dal fatto che l'atmosfera terrestre si comporta in maniera selettiva riguardo la lunghezza d'onda, facendo sì che la trasmissività alle shortwave sia abbastanza elevata, mentre alle longwave (fotoni terrestri) sia molto minore.

Si può dimostrare infatti che la temperatura superficiale risulta essere maggiore di quella di equilibrio radiativo (temperatura che dovrebbe avere un pianeta se fosse un corpo nero per emettere tutta la radiazione che riceve) proprio perché l'atmosfera processa la radiazione e, emettendo, riscalda la superficie. Si parla perciò di *effetto serra*.

Se si considerasse esclusivamente un equilibrio di tipo radiativo, con le considerazioni viste nel capitolo II, si otterrebbe un profilo di temperatura nella troposfera caratterizzato da un calo molto rapido con la quota in prossimità della superficie.

Questo significherebbe instabilità idrostatica.

In una trattazione più realistica è necessario considerare anche i flussi verticali di energia, dovuti ai moti atmosferici, che rimuovono il calore dalla superficie e provocano un rimescolamento della troposfera. L'equilibrio è quindi di tipo *radiativo-convettivo*.

Questo porta a un profilo di temperatura molto più realistico (**fig.9**), nel quale si può notare anche l'inversione termica permanente nella stratosfera per la presenza di O^3 .

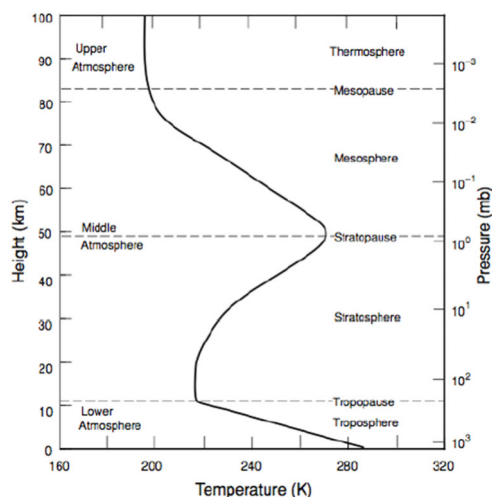


Fig 9: Profilo di temperatura dell'atmosfera terrestre
(Dispense Atmosfere Planetarie, T. Maestri)

BIBLIOGRAFIA

- [1] F.R. Ferraro, *Dispense del corso di Astrofisica Stellare*, Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, 2020
- [2] B. W. Carroll, Dale A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*, Pearson Education Limited, Second Edition 2014
- [3] C. Chiosi, *Struttura ed evoluzione delle stelle*, Dispense
- [4] C. J. Hansen, S. D. Kawaler, V. Trimble, *Stellar Interiors*, Springer, Second Edition 2004
- [5] H. Hannu, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner, *Fundamental Astronomy*, Springer, Sixth Edition 2017
- [6] T. Maestri, *Dispense del corso di Atmosfere Planetarie*, Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, 2021
- [7] S. Davolio, *Radiazione*, Dispense, 2012