

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

MUSICA
FRATTALE

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.
Annamaria Montanari

Presentata da:
Matteo Agresti

Terza Sessione
Anno Accademico 2020-2021

*A coloro che mi vogliono bene,
che mi danno la forza per migliorare;
a coloro che non me ne vogliono,
che mi danno la motivazione per migliorare;
a Kobe Bryant,
da cui ho imparato come migliorare.*

Introduzione

Quanto sono lunghe le coste della Gran Bretagna?

Benoit Mandelbrot in [Mandelbrot] prova a rispondere a questa domanda. Per prima cosa decide di approssimare la costa con una poligonale in maniera molto rozza, con 6 segmenti lunghi tutti 200 chilometri; risulta che la costa è lunga all'incirca 2400 chilometri. Successivamente migliora l'approssimazione considerando una poligonale i cui lati misurano 100 chilometri e ricalcolando la lunghezza della costa trova che essa è aumentata fino a circa 2800 chilometri. In seguito a un'approssimazione di 50 chilometri trova che la lunghezza della costa è di 3200 chilometri circa! Proseguendo si rende conto che quanto più è fine l'approssimazione, tanto più risulta lunga la costa, arrivando a crescere fino all'infinito. Dunque le coste della Gran Bretagna hanno lunghezza finita, pur essendo l'isola inscrivibile dentro un rettangolo di area finita.



Figura 1: Coste della Gran Bretagna. Tre diverse poligonali per approssimarne la lunghezza

Mandelbrot si rende dunque conto che gli strumenti messi a disposizione dalla geometria classica non sono adeguati per studiare la natura.

*La geometria euclidea è incapace di descrivere la natura nella sua complessità, in quanto si limita a descrivere tutto ciò che è regolare . . . mentre osservando la natura vediamo che le montagne non sono dei coni, le nuvole non sono delle sfere, le coste non sono dei cerchi, ma sono oggetti geometricamente molto complessi. (Benoit Mandelbrot, *Les objects fractals*, 1975)*

Gli oggetti della nostra esperienza in effetti non hanno di per sé i bordi lisci e le forme regolari del cono, del cerchio, di una sfera o di una retta come afferma la geometria euclidea. Il mondo è in realtà rugoso, increspato, di forma irregolare. In disordine. È necessario dunque introdurre un nuovo tipo di geometria: la *geometria frattale*. Il termine *frattale* viene proposto dallo stesso Mandelbrot a partire dal latino *fractus* (rotto, spezzato) proprio per sottolineare il carattere fortemente irregolare degli oggetti reali. Gli oggetti frattali sono dunque insiemi apparentemente caotici, ma che possiedono due fondamentali proprietà: autosimilarità e dimensione non intera.

L'autosimilarità è la proprietà di un oggetto di riprodurre un motivo su scala continuamente ridotta: ad ogni ingrandimento l'oggetto originale si ripropone identicamente nelle strutture che lo compongono.

Un esempio è quello del **cavolo romano**. A guardarlo da lontano la sua forma sembra piramidale, dunque avvicinandosi a pochi centimetri ci si aspetterebbe di vedere il lato, o al più una faccia, della piramide. Sorprendentemente, ingrandendo l'immagine di un cavolo romano quello che si vede è ancora un cavolo romano! Quindi il cavolo romano guardato da due scale completamente diverse ci sembra la stessa cosa, ossia riproduce sé stesso anche in scale molto piccole. Ovviamente a un certo punto, arrivando alla struttura molecolare, questo fenomeno si interrompe, ma un'idealizzazione matematica ci porta a pensare che potrebbero esistere oggetti che guardati a tutte le scale sono sempre uguali a sé stessi, autosimiliari appunto.

Un altro esempio nel mondo vegetale è quello della **felce**: osservando la Figura 3 si nota che la foglia grande, in azzurro, è identica alle foglie più piccole laterali, in rosso e blu. Esse sono loro volta uguali alle foglioline che le compongono e così via.

La seconda caratteristica fondamentale dei frattali è quella di non avere una dimensione intera: come nel caso delle coste della Gran Bretagna, i frattali possono avere una



Figura 2: Cavolo romano

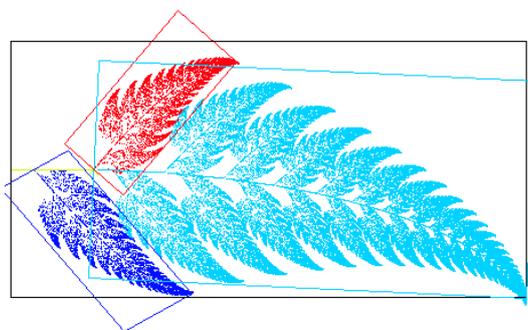


Figura 3: Foglia di felce

misura infinita rispetto a una dimensione e una misura nulla, rispetto alla successiva. Ad esempio i nostri **polmoni** hanno una struttura frattale: dalla trachea parte la biforcazione dei bronchi, che si dividono a loro volta in numerosissime sotto-biforcazioni andando a coprire una superficie enorme (circa quella di un campo da tennis!) pur rimanendo all'interno di un volume molto ridotto.

Anche il **sistema vascolare** è un esempio di frattale, poiché le principali vene si diramano in capillari sempre più piccoli, arrivando a coprire in lunghezza in tutto circa un centinaio di migliaia di chilometri.

Esistono inoltre numerosi esempi di frattali matematici, strutture definite ricorsivamente o sostituendo iterativamente pezzi di un oggetto di partenza.

Questa tesi è strutturata in tre capitoli.

Nel primo viene definita la misura di Hausdorff e la sua relazione con un particolare

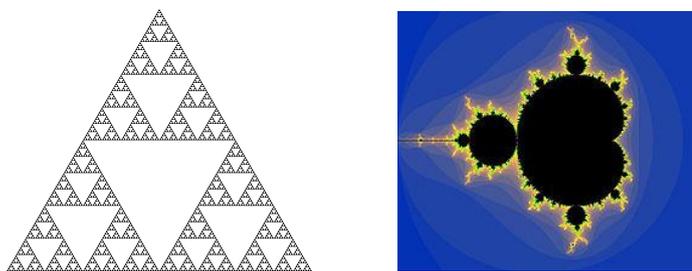


Figura 4: Frattali matematici: a sinistra il triangolo di Sierpinski, a destra l'insieme di Mandelbrot

tipo di funzione: le funzioni lipschitziane. Viene poi spiegato il concetto di dimensione di Hausdorff e sono calcolate le dimensioni di particolari insiemi frattali: l'insieme di Cantor e la curva di Koch.

Nel secondo capitolo si espone la definizione di autosimilarità. Partendo dal Teorema di Barnsley e sfruttando il Teorema di Banach-Caccioppoli si dimostra l'esistenza e unicità di un insieme autosimilare per una famiglia di contrazioni in uno spazio metrico completo. Dopodiché si mostra come vedere alcuni frattali come insiemi autosimilari. Infine viene data la definizione di dimensione di similarità e si calcola la dimensione dei frattali analizzati in precedenza.

Nell'ultimo capitolo viene presentata un'applicazione all'ambito musicale dei concetti teorici visti nei primi due capitoli. Si espone un metodo di composizione musicale a partire da un insieme di punti sul piano; si mostrano alcuni metodi per la generazione di musica casuale e si descrive un procedimento per la creazione di melodie a partire da curve frattali.

Legenda

Per agevolare la lettura, indichiamo qui le principali notazioni utilizzate e convenzioni seguite:

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$$\mathbb{N} := \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$$

$$\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \uparrow := \text{successione monotona crescente di insiemi } (A_k \subseteq A_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N})$$

$$(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \downarrow := \text{successione monotona decrescente di insiemi } (A_k \supseteq A_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N})$$

Siano $A \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^N$, con $N \in \mathbb{N}$, due insiemi. Indichiamo:

$$\mu_N(A) := \text{misura esterna di Lebesgue di } A \text{ in } \mathbb{R}^N$$

$$A^c := \mathbb{R}^N \setminus A$$

$$A' := X \setminus A$$

$$\bar{A} := \text{chiusura di } A \text{ in } \mathbb{R}^N$$

Sia $x \in \mathbb{R}$. Indichiamo:

$$\ln(x) := \text{logaritmo naturale di } x, \text{ se } x \in \mathbb{R}^+$$

$$|x| := \text{valore assoluto di } x$$

Sia $x \in \mathbb{R}^N$. Indichiamo:

$|x|$:= norma euclidea di x

$B(x, r)$:= disco di \mathbb{R}^N di centro x e raggio $r > 0$

$d_\varepsilon(x, y)$:= distanza euclidea tra x e y , se $y \in \mathbb{R}^N$

Indice

Introduzione	i
Legenda	v
1 Misura di Hausdorff in \mathbb{R}^N	1
1.1 Misure astratte	1
1.1.1 Misure metriche	3
1.2 Misura di Hausdorff α -dimensionale	5
1.2.1 Misura di Hausdorff e funzioni lipschitziane	11
1.2.2 Dimensione di Hausdorff	14
1.2.3 Esempi di dimensioni di Hausdorff	16
2 Autosimilarità	21
2.1 Contrazioni e insiemi autosimilari	22
2.1.1 Contrazioni	22
2.1.2 Spazio dei frattali	24
2.1.3 Autosimilarità	30
2.1.4 Costruzione di frattali mediante IFS	33
2.2 Dimensione insiemi autosimilari	35
2.2.1 Calcolo dimensioni di similarità	36
3 Applicazione musicale	38
3.1 Interpolazione musicale	39
3.2 Musica casuale	41

3.2.1	White noise	42
3.2.2	Brown noise	42
3.2.3	Pink noise	43
3.3	Interpolazione di una curva frattale	45
Bibliografia		47

Elenco delle figure

1	Coste della Gran Bretagna	i
2	Cavolo romano	iii
3	Foglia di felce	iii
4	Triangolo di Sierpinski e insieme di Mandelbrot	iv
1.1	Esempi di δ -ricoprimento	7
1.2	Grafico di $H_t(A)$ in funzione di t	16
1.3	Insieme di Cantor	18
1.4	Curva di Koch	20
2.1	Albero matematico	21
3.1	Intervallo di ottava	39
3.2	Rappresentazione cartesiana punti	41
3.3	White noise	42
3.4	Brown noise	43
3.5	Pink noise	45
3.6	Curva di Hilbert	45
3.7	Curva di Hilbert modificata	46
3.8	Curva di Hilbert srotolata	46
3.9	Scala per “Summer Song”	46

Capitolo 1

Misura di Hausdorff in \mathbb{R}^N

Di norma si è abituati a pensare che la dimensione di uno spazio possa assumere unicamente quantità intere in quanto, di solito, si ha a che fare con curve di dimensione 1, piani di dimensione 2, solidi di dimensione 3 e via dicendo. Tuttavia i concetti della geometria classica non si adattano allo studio degli oggetti frattali, pertanto è necessario introdurre e utilizzare dei metodi alternativi. Serve quindi un nuovo concetto di dimensione che sia in grado di fornire più informazioni riguardo al “grado di irregolarità” dell’oggetto frattale preso in esame.

1.1 Misure astratte

Definizione 1.1.1 (Misura). Sia X un insieme non vuoto. Si definisce *misura* su X una funzione

$$m : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$$

tale che:

1. $m(\emptyset) = 0$;
2. $m(A) \leq m(B)$ se $A \subseteq B \subseteq X$ (monotonia);
3. $m\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} m(A_k)$ se $A_k \subseteq X \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (numerabile sub-additività).

Esempio 1.1 (Misura esterna di Lebesgue). La misura esterna di Lebesgue di \mathbb{R}^N è uno degli esempi più importanti di misura.

Esempio 1.2 (Misura di Dirac). Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Si chiama *misura di Dirac* il numero reale $\delta(A)$ definito da

$$\delta(A) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \in A, \\ 0 & \text{se } 0 \notin A. \end{cases}$$

L'applicazione

$$A \mapsto \delta(A)$$

è una misura su \mathbb{R}^N .

Definizione 1.1.2 (Insieme misurabile). Siano m misura su X e $A \subseteq X$. A si dice *m -misurabile* se per ogni $E \subseteq X$

$$m(E) = m(E \cap A) + m(E \cap A'). \quad (1.1)$$

Osservazione 1.1. A partire dalle proprietà 1 – 3 della Definizione 1.1.1 e dalla (1.1) si possono ottenere le seguenti proprietà. Sia $A \subseteq X$:

- A è m -misurabile se e solo se A' è m -misurabile.
- Se A ha misura nulla, ossia $m(A) = 0$, è m -misurabile.
- \emptyset e X sono m -misurabili.
- Se $(A_k)_{k \in \mathcal{A}}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$, è una famiglia finita o numerabile di sottoinsiemi m -misurabili di X , allora

$$\bigcup_{k \in \mathcal{A}} A_k \quad \text{e} \quad \bigcap_{k \in \mathcal{A}} A_k$$

sono m -misurabili. Inoltre, se $A_k \cap A_h = \emptyset$ per $k \neq h$,

$$m\left(\bigcup_{k \in \mathcal{A}} A_k\right) = \sum_{k \in \mathcal{A}} m(A_k).$$

- Siano A e B sottoinsiemi m -misurabili di X , allora $A \setminus B$ è m -misurabile. Inoltre, se $B \subseteq A$ e $m(B) < +\infty$,

$$m(A \setminus B) = m(A) - m(B).$$

- Se $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione monotona crescente di sottoinsiemi m -misurabili di X , allora

$$m \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m(A_k);$$

dove poniamo, se $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \uparrow$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k.$$

- Se $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione monotona decrescente di sottoinsiemi m -misurabili di X e se $m(A_1) < +\infty$, allora

$$m \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m(A_k);$$

dove poniamo, se $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \downarrow$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k.$$

Definizione 1.1.3 (Supporto di una misura). Sia m una misura su \mathbb{R}^N . Si definisce *supporto di m* il più piccolo insieme chiuso F tale che

$$m(F^c) = 0.$$

Diciamo che m è una misura sull'insieme A se A contiene il supporto di m .

1.1.1 Misure metriche

Ricordiamo brevemente la definizione di distanza.

Definizione 1.1.4 (Distanza). Sia X un insieme non vuoto. Si definisce *distanza* su X una funzione

$$d : X \times X \rightarrow [0, +\infty[$$

tale che:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$ (simmetria);

3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$ (disuguaglianza triangolare).

La coppia (X, d) si chiama *spazio metrico*.

Consideriamo ora misure definite su uno spazio metrico (X, d) . In particolare siamo interessati a studiare la m -misurabilità dei sottoinsiemi *chiusi* (o equivalentemente dei sottoinsiemi *aperti*) di X .

Definizione 1.1.5 (Distanza fra insiemi). Siano A e B due sottoinsiemi non vuoti di X . Si chiama *distanza di A da B* il numero reale

$$d(A, B) := \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

Sia $x \in X$. Si indica $d(x, A)$ la distanza di $\{x\}$ da A . Ossia

$$d(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$$

Proposizione 1.1.1. Siano $A \subseteq X$, $x \in X$. Allora

$$d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}.$$

Dimostrazione. Se $x \in \bar{A}$ risulta

$$d(x, A) = d(x, \bar{A}) = 0.$$

Se $x \notin \bar{A}$ allora esiste $\rho > 0$ tale che $B(x, \rho) \cap A = \emptyset$. Vale a dire

$$d(x, y) \geq \rho > 0 \quad \forall y \in A.$$

Per cui

$$d(x, A) > 0.$$

□

Definizione 1.1.6 (Misura metrica). Sia m una misura su (X, d) . Si dice che m è una *misura metrica*, rispetto alla distanza d , se

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) \quad \forall A, B \subseteq X : d(A, B) > 0. \quad (1.2)$$

Teorema 1.1.2 (Carathéodory). *Sia m una misura metrica su (X, d) . Allora ogni sottoinsieme chiuso di X è m -misurabile.*

Dimostrazione. Si veda [Lanconelli, Teorema 2.3 p.6]. □

Corollario 1.1.3. *Sia m una misura metrica su (X, d) . Allora ogni sottoinsieme aperto di X è m -misurabile.*

Dimostrazione. Segue direttamente dal Teorema 1.1.2 e dall'Osservazione 1.1. □

Definizione 1.1.7 (σ -algebra). Si chiama σ -algebra una famiglia \mathcal{A} di sottoinsiemi di X tale che

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;
2. $A \setminus B \in \mathcal{A}$ se $A, B \in \mathcal{A}$;
3. $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$ se $A_k \in \mathcal{A} \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Definizione 1.1.8 (Boreliani). L'intersezione di tutte le σ -algre contenenti i chiusi (e quindi gli aperti) di X è una σ -algebra i cui elementi si chiamano *boreliani* di (X, d) .

Se m è una misura metrica su (X, d) la totalità dei sottoinsiemi di X m -misurabili è una σ -algebra che contiene i chiusi di X (cfr. Teorema 1.1.2 e Osservazione 1.1). Tale σ -algebra contiene quindi quella dei boreliani. Vale pertanto la seguente Proposizione.

Proposizione 1.1.4. *Sia m una misura metrica su (X, d) . Allora ogni boreliano di (X, d) è m -misurabile.*

Definizione 1.1.9 (σ -algebra generata). Sia \mathcal{H} una famiglia di sottoinsiemi di X . Si chiama σ -algebra generata da \mathcal{H} e si indica $\sigma(\mathcal{H})$ l'intersezione di tutte le σ -algre che contengono \mathcal{H} .

1.2 Misura di Hausdorff α -dimensionale

Introduciamo ora un particolare tipo di misura, definita dal matematico Felix Hausdorff.

Definizione 1.2.1. Sia $\alpha \geq 0$. Poniamo

$$\omega_\alpha := \frac{\pi^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)},$$

dove Γ indica la *funzione gamma* di Eulero definita, per $s > 0$, nel modo seguente

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt.$$

Osservazione 1.2. Il numero reale positivo ω_α , per $\alpha \in \mathbb{N}^*$, è la misura di Lebesgue α -dimensionale del disco unitario di \mathbb{R}^α .

Definizione 1.2.2. Sia $B \subseteq \mathbb{R}^N, B \neq \emptyset$. Poniamo

$$r(B) := \frac{1}{2} \text{diam}(B) := \frac{1}{2} \sup\{|x - y| : x, y \in B\}.$$

Poniamo inoltre $m_\alpha(\emptyset) = 0$ e

$$m_\alpha(B) = \omega_\alpha (r(B))^\alpha.$$

Esempio 1.3. Sia

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq r^2\}$$

il disco di \mathbb{R}^3 di centro (a, b, c) e raggio r . Risulta $r(B) = r$ e $m_\alpha(B) = \omega_\alpha r^\alpha$.

In particolare

$$m_\alpha(B) = \begin{cases} \frac{4}{3} \pi r^3 & \text{se } \alpha = 3, \\ \pi r^2 & \text{se } \alpha = 2, \\ 2r & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Definizione 1.2.3 (δ -ricoprimento). Siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$ e $\delta \in \mathbb{R}^+$. Si chiama δ -ricoprimento di A una famiglia $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$ di sottoinsiemi di \mathbb{R}^N tali che:

1. \mathcal{A} è finito o numerabile;
2. $\text{diam}(B_k) \leq \delta \quad \forall k \in \mathcal{A}$;
3. $A \subseteq \bigcup_{k \in \mathcal{A}} B_k$.



Figura 1.1: Due differenti δ -ricoprimenti di uno stesso insieme

Definizione 1.2.4. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Definiamo:

$$H_\alpha^{(\delta)}(A) := \inf \left\{ \sum_{k \in \mathcal{A}} m_\alpha(B_k) \mid (B_k)_{k \in \mathcal{A}} \text{ è } \delta\text{-ricoprimento di } A \right\}.$$

Osservazione 1.3. Se $0 < \delta' < \delta$ ogni δ' -ricoprimento di A è anche un δ -ricoprimento di A ; pertanto

$$H_\alpha^{(\delta)}(A) \leq H_\alpha^{(\delta')}(A).$$

La funzione

$$\begin{aligned}]0, +\infty[&\rightarrow [0, +\infty] \\ \delta &\mapsto H_\alpha^{(\delta)}(A) \end{aligned}$$

è quindi monotona decrescente e, di conseguenza, ha limite in $[0, +\infty]$ per $\delta \rightarrow 0^+$.

Definizione 1.2.5 (Misura di Hausdorff α -dimensionale). Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Si chiama *misura di Hausdorff α -dimensionale* il numero reale esteso

$$H_\alpha(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\alpha^{(\delta)}(A) = \sup_{\delta > 0} H_\alpha^{(\delta)}(A).$$

Osservazione 1.4. Poiché esiste una iniezione naturale di \mathbb{R}^N in \mathbb{R}^{N+p} , $p \geq 1$ (basta infatti identificare \mathbb{R}^N con il sottospazio $\mathbb{R}^N \times \{0\}$, $0 \in \mathbb{R}^p$), ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^N è quindi anche contenuto in \mathbb{R}^{N+p} .

Tuttavia la misura di Hausdorff α -dimensionale di A *non* dipende dallo spazio euclideo nel quale A si considera *immerso*. Basta infatti osservare che

$$m_\alpha(B \cap \mathbb{R}^N) \leq m_\alpha(B) \quad \forall B \subseteq \mathbb{R}^{N+p}.$$

Cerchiamo di motivare la definizione di misura di Hausdorff α -dimensionale. Se decidessimo di limitarci a considerare come definizione quella data da 1.2.4, non soddisfaremmo la nostra esigenza di una misura che segua le tortuosità e la rugosità di un

insieme. Infatti, finiremmo con l'approssimare un insieme molto complicato con un semplice disco che racchiuda la curva, perdendo importanti informazioni. Facendo invece tendere a zero δ , abbiamo come garanzia che il ricoprimento segua l'insieme.

Proposizione 1.2.1. $H_\alpha^{(\delta)}$ e H_α sono misure su \mathbb{R}^N . Inoltre H_α è una misura metrica rispetto la distanza euclidea.

Dimostrazione. Procediamo con la dimostrazione per punti.

Per prima cosa mostriamo che $H_\alpha^{(\delta)}$ soddisfa le proprietà di una misura definite in 1.1.1. Dalle proprietà dei limiti segue direttamente che anche H_α è una misura.

1. Fissato un $\delta > 0$ consideriamo un cubo di lato $\epsilon < \delta$ come ricoprimento dell'insieme vuoto. Allora per definizione avremo che $H_\alpha^{(\delta)}(\emptyset) \leq \text{cost} \cdot \epsilon^\alpha$, da cui segue, facendo tendere ϵ a zero,

$$H_\alpha^{(\delta)}(\emptyset) = 0;$$

2. Monotonia: siano $A \subseteq B$. Certamente ogni ricoprimento di B è anche ricoprimento di A , dunque si ha che

$$H_\alpha^{(\delta)}(A) \leq H_\alpha^{(\delta)}(B);$$

3. Sub-additività: sia $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi di \mathbb{R}^N . Prendiamo per ogni $j \in \mathbb{N}$ un ricoprimento $(B_k^j)_{k \in \mathbb{N}}$ di A_j tale che $\text{diam}(B_k^j) \leq \delta \quad \forall j, k \in \mathbb{N}$. Abbiamo così che $(B_k^j)_{j, k \in \mathbb{N}}$ è un δ -ricoprimento di $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$. Avremo perciò

$$H_\alpha^{(\delta)}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) \leq \sum_{j, k \in \mathbb{N}} m_\alpha(B_k^j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \omega_\alpha \left(\frac{\text{diam}(B_k^j)}{2} \right)^\alpha.$$

In particolare passando all'inf della seconda sommatoria del termine a destra otteniamo

$$H_\alpha^{(\delta)}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} H_\alpha^{(\delta)}(A_j).$$

Verifichiamo ora che H_α è una misura metrica.

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$ tali che $d(A, B) > 0$. Dobbiamo provare che

$$H_\alpha(A \cup B) = H_\alpha(A) + H_\alpha(B).$$

Essendo H_α sub-additiva, è sufficiente dimostrare la disuguaglianza

$$H_\alpha(A \cup B) \geq H_\alpha(A) + H_\alpha(B). \quad (1.3)$$

Se $H_\alpha(A \cup B) = +\infty$, la (1.3) è ovvia. Supponiamo dunque che $H_\alpha(A \cup B) < +\infty$.

Poiché $H_\alpha^{(\delta)} \leq H_\alpha$, sarà allora

$$H_\alpha^{(\delta)}(A \cup B) < +\infty \quad \forall \delta > 0.$$

Fissato un arbitrario $\epsilon > 0$ scegliamo un δ -ricoprimento $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$ di $A \cup B$, con $0 < \delta < d(A, B)$, tale che

$$H_\alpha^{(\delta)}(A \cup B) + \epsilon > \sum_{k \in \mathcal{A}} m_\alpha(B_k). \quad (1.4)$$

Poniamo ora

$$\mathcal{A}' = \{k \in \mathcal{A} \mid B_k \cap A \neq \emptyset\} \quad e \quad \mathcal{A}'' = \{k \in \mathcal{A} \mid B_k \cap B \neq \emptyset\}.$$

Poiché $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$ è un δ -ricoprimento di $A \cup B$, le famiglie $(B_k)_{k \in \mathcal{A}'}$ e $(B_k)_{k \in \mathcal{A}''}$ sono δ -ricoprimenti, rispettivamente, di A e di B . Inoltre risulta $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}'' = \emptyset$. Infatti, se per assurdo esistesse $\bar{k} \in \mathcal{A}' \cap \mathcal{A}''$, gli insiemi $B_{\bar{k}} \cap A$ e $B_{\bar{k}} \cap B$ sarebbero entrambi non vuoti, e si avrebbe

$$d(A, B) \leq \text{diam}(B_{\bar{k}}) \leq \delta,$$

contrariamente all'ipotesi. Da $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}'' = \emptyset$ e da (1.4) otteniamo dunque

$$\begin{aligned} H_\alpha^{(\delta)}(A \cup B) + \epsilon &> \sum_{k \in \mathcal{A}'} m_\alpha(B_k) + \sum_{k \in \mathcal{A}''} m_\alpha(B_k) \geq \\ &\geq H_\alpha^{(\delta)}(A) + H_\alpha^{(\delta)}(B). \end{aligned}$$

Da cui, per $\delta, \epsilon \rightarrow 0$, si ottiene la (1.3). □

Corollario 1.2.2. *Ogni boreliano di \mathbb{R}^N è H_α -misurabile qualunque sia $\alpha \geq 0$.*

Dimostrazione. Segue direttamente dalla Proposizione precedente e dalla Proposizione 1.1.4. □

Alla misura di Hausdorff H_α si riconosce una proprietà di regolarità, definita dal seguente Teorema.

Teorema 1.2.3. *Qualunque sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ esiste un boreliano B di \mathbb{R}^N tale che*

$$B \supseteq A \quad e \quad H_\alpha(B) = H_\alpha(A).$$

Dimostrazione. Se $H_\alpha(A) = +\infty$ l'affermazione è banale: è sufficiente prendere $B = \bar{A}$. Supponiamo ora $H_\alpha(A) < +\infty$.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un $\frac{1}{k}$ -ricoprimento di A , sia esso $(B_j^k)_{j \in \mathcal{A}_k}$, tale che

$$\sum_{j \in \mathcal{A}_k} m_\alpha(B_j^k) < H_\alpha^{\frac{1}{k}}(A) + \frac{1}{k}.$$

Poniamo

$$B^k = \bigcup_{j \in \mathcal{A}_k} \bar{B}_j^k \quad e \quad B = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B^k.$$

L'insieme B è un boreliano di \mathbb{R}^N contenente A e

$$H_\alpha^{\frac{1}{k}}(B) \leq H_\alpha^{\frac{1}{k}}(B^k) \leq \sum_{j \in \mathcal{A}_k} m_\alpha(\bar{B}_j^k) < H_\alpha^{\frac{1}{k}}(A) + \frac{1}{k}. \quad (1.5)$$

Per $k \rightarrow +\infty$ da (1.5) si ottiene $H_\alpha(B) \leq H_\alpha(A)$.

D'altra parte, essendo $A \subseteq B$, $H_\alpha(A) \leq H_\alpha(B)$. Quindi $H_\alpha(A) = H_\alpha(B)$. \square

Corollario 1.2.4. *Sia A è un sottoinsieme di \mathbb{R}^N H_α -misurabile tale che $H_\alpha(A) < +\infty$. Allora esistono un boreliano B di \mathbb{R}^N e un insieme $M \subseteq \mathbb{R}^N$ di H_α -misura nulla tali che $A = B \setminus M$.*

Dimostrazione. Per il precedente Teorema esiste un boreliano $B \supseteq A$ tale che $H_\alpha(A) = H_\alpha(B)$. Posto $M = B \setminus A$ risulta certamente $A = B \setminus M$. Inoltre, essendo sia A che B misurabili, M è misurabile e, poiché $H_\alpha(A) = H_\alpha(B) < +\infty$,

$$H_\alpha(M) = H_\alpha(B) - H_\alpha(A) = 0.$$

\square

Presentiamo ora un importante teorema che mette in relazione la misura di Hausdorff N -dimensionale e la misura di Lebesgue N -dimensionale. Per la dimostrazione si rimanda a [Lanconelli, Teorema 2.1 p.19].

Teorema 1.2.5. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Si ha*

$$H_N(A) = \mu_N(A).$$

1.2.1 Misura di Hausdorff e funzioni lipschitziane

Definizione 1.2.6 (Funzione lipschitziana). Una funzione

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad A \subseteq \mathbb{R}^p,$$

si dice *lipschitziana* in A se esiste una costante $L \geq 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in A.$$

La costante L che figura al secondo membro della disuguaglianza si dice che è una *costante di Lipschitz* di f .

Esempio 1.4 (Trasformazioni lineari). Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz $L = \|T\|$.

Infatti

$$|T(x) - T(y)| = |T(x - y)| \leq \|T\| |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^p.$$

Esempio 1.5 (Isometrie). Chiamiamo *isometria* in \mathbb{R}^N ogni funzione

$$F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$$

tale che

$$|F(x) - F(y)| = |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Evidentemente ogni isometria è una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz $L = 1$. Segue immediatamente che sono funzioni lipschitziane, in quanto isometrie:

- le *trasformazioni ortogonali* di \mathbb{R}^N . Infatti, se T è una trasformazione ortogonale si ha:

$$|T(x) - T(y)| = |T(x - y)| = |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N;$$

- le *traslazioni* di \mathbb{R}^N . Infatti, se $\alpha \in \mathbb{R}^N$ e τ_α è la traslazione di ampiezza α :

$$\tau_\alpha : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \tau_\alpha(x) = x + \alpha,$$

risulta

$$|\tau_\alpha(x) - \tau_\alpha(y)| = |(x + \alpha) - (y + \alpha)| = |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Esempio 1.6 (Dilatazioni). Sia $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ un vettore di \mathbb{R}^N avente tutte le componenti positive:

$$\alpha_j > 0 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Chiamiamo α -*dilatazione* di ampiezza $\lambda > 0$ la trasformazione lineare

$$\delta(\alpha, \lambda) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \delta(\alpha, \lambda)(x_1, \dots, x_N) = (\lambda^{\alpha_1} x_1, \dots, \lambda^{\alpha_N} x_N).$$

$\delta(\alpha, \lambda)$ è una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz

$$L = \max_{1 \leq j \leq N} \lambda^{\alpha_j}.$$

Infatti, per ogni $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ si ha

$$|\delta(\alpha, \lambda)(x)|^2 = \sum_{j=1}^N (\lambda^{\alpha_j} x_j)^2 \leq L^2 \sum_{j=1}^N x_j^2$$

e quindi

$$|\delta(\alpha, \lambda)(x)| \leq L \cdot |x|.$$

Se $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N = 1$, scrivendo $\delta(\lambda)$ in luogo di $\delta((1, \dots, 1), \lambda)$, si ha, più precisamente,

$$|\delta(\lambda)(x)| = \lambda|x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \forall \lambda > 0.$$

Enunciamo ora il principale risultato che mette in relazione la misura di Hausdorff e le funzioni lipschitziane.

Teorema 1.2.6. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^p$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^N$ una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz L .*

Allora, per ogni $\alpha \geq 0$, risulta

$$H_\alpha(f(A)) \leq L^\alpha H_\alpha(A). \tag{1.6}$$

Dimostrazione. Mostriamo che per ogni $\delta > 0$ risulta

$$H_\alpha^{(L\delta)}(f(A)) \leq L^\alpha H_\alpha^{(\delta)}(A). \tag{1.7}$$

Da questa, per $\delta \rightarrow 0^+$, segue la (1.6).

Osserviamo preliminarmente che risulta, per ogni $B \subseteq A$,

$$\text{diam}(f(B)) = \sup_{x,y \in B} |f(x) - f(y)| \leq L \cdot \sup_{x,y \in B} |x - y| = L \cdot \text{diam}(B). \quad (1.8)$$

Allora, se $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$ è un arbitrario δ -ricoprimento di A , $(f(B_k))_{k \in \mathcal{A}}$ è un $L\delta$ -ricoprimento di $f(A)$, e quindi

$$\begin{aligned} H_\alpha^{(L\delta)}(f(A)) &\leq \sum_{k \in \mathcal{A}} m_\alpha(f(B_k)) \leq \quad \text{per la (1.8)} \\ &\leq \sum_{k \in \mathcal{A}} L^\alpha m_\alpha(B_k). \end{aligned}$$

Da questa, per l'arbitrarietà del δ -ricoprimento $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$ di A , segue direttamente la (1.7), e quindi la tesi. \square

Corollario 1.2.7. *Siano F un'isometria di \mathbb{R}^N , $A \subseteq \mathbb{R}^N$ e $\alpha \geq 0$. Allora*

$$H_\alpha(F(A)) = H_\alpha(A).$$

Dimostrazione. F e F^{-1} , in quanto isometrie, sono entrambe lipschitziane con costante di Lipschitz $L = 1$. Allora per il precedente Teorema,

$$H_\alpha(F(A)) \leq H_\alpha(A) = H_\alpha(F^{-1}(F(A))) \leq H_\alpha(F(A))$$

e quindi

$$H_\alpha(F(A)) = H_\alpha(A).$$

\square

Corollario 1.2.8. *Siano $\lambda > 0$, A e α come sopra. Risulta*

$$H_\alpha(\lambda A) = \lambda^\alpha H_\alpha(A).$$

Dove abbiamo posto

$$\lambda A = \delta(\lambda)(A) := \{\lambda x \mid x \in A\}.$$

Dimostrazione. Poiché $\delta(\lambda)$ è una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz $L = \lambda$ (cfr. Esempio 1.6), per il Teorema 1.2.6 risulta

$$\begin{aligned} H_\alpha(\lambda A) &\leq \lambda^\alpha H_\alpha(A) = \lambda^\alpha H_\alpha\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda A)\right) \leq \\ &\leq \lambda^\alpha \left(\frac{1}{\lambda}\right)^\alpha H_\alpha(\lambda A) = H_\alpha(\lambda A). \end{aligned}$$

Quindi $H_\alpha(\lambda A) = \lambda^\alpha H_\alpha(A)$. □

1.2.2 Dimensione di Hausdorff

La definizione di dimensione di Hausdorff si fonda sulla seguente Proposizione.

Proposizione 1.2.9. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ tale che*

$$H_\alpha(A) < +\infty$$

per un opportuno $\alpha \geq 0$. Allora

$$H_{\alpha+t}(A) = 0 \quad \forall t > 0.$$

Dimostrazione. Per ogni δ e $t > 0$ e per ogni δ -ricoprimento di A , $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$, si ha

$$\begin{aligned} H_{\alpha+t}^{(\delta)}(A) &\leq \sum_{k \in \mathcal{A}} m_{\alpha+t}(B_k) = \\ &= \sum_{k \in \mathcal{A}} \omega_{\alpha+t} \left(\frac{\text{diam}(B_k)}{2}\right)^{\alpha+t} \leq (\text{poiché } \text{diam}(B_k) \leq \delta) \\ &\leq \frac{\omega_{\alpha+t}}{\omega_\alpha} \left(\frac{\delta}{2}\right)^t \sum_{k \in \mathcal{A}} \omega_\alpha \left(\frac{\text{diam}(B_k)}{2}\right)^\alpha = (\text{posto } c_{\alpha,t} = \frac{\omega_{\alpha+t}}{\omega_\alpha} 2^{-t}) \\ &= c_{\alpha,t} \delta^t \sum_{k \in \mathcal{A}} m_\alpha(B_k). \end{aligned}$$

Prendendo, all'ultimo membro, l'estremo inferiore rispetto a tutti i δ -ricoprimenti di A , si ottiene

$$H_{\alpha+t}^{(\delta)}(A) \leq c_{\alpha,t} \delta^t H_\alpha^{(\delta)}(A) \leq c_{\alpha,t} \delta^t H_\alpha(A).$$

Per $\delta \rightarrow 0^+$ l'ultimo membro di queste disuguaglianze tende a zero, in quanto $t > 0$ e $H_\alpha(A) < +\infty$ per ipotesi. Allora

$$H_{\alpha+t}(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_{\alpha+t}^{(\delta)} = 0.$$

□

Corollario 1.2.10. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Risulta*

$$H_{N+t}(A) = 0 \quad \forall t > 0. \quad (1.9)$$

Dimostrazione. Si ha certamente $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A \cap B(0, k))$ e quindi, per la numerabile sub-additività della misura di Hausdorff,

$$H_{N+t}(A) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} H_{N+t}(A \cap B(0, k)). \quad (1.10)$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} H_N(A \cap B(0, k)) &= \mu_N(A \cap B(0, k)) \leq \\ &\leq \mu_N(B(0, k)) = \omega_N k^N < +\infty, \end{aligned}$$

e quindi per la Proposizione 1.2.9,

$$H_{N+t}(A \cap B(0, k)) = 0 \quad \forall t > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Da questa e dalla (1.10) segue subito la (1.9). □

In virtù dei risultati precedenti, è ben posta la seguente Definizione di dimensione di Hausdorff.

Definizione 1.2.7 (Dimensione di Hausdorff). Si chiama *dimensione di Hausdorff* di un sottoinsieme A di \mathbb{R}^N il numero reale non negativo

$$\alpha(A) := \inf\{s > 0 \mid H_s(A) = 0\}.$$

In tal caso A è definito α -insieme.

Osservazione 1.5. Come conseguenza del Corollario 1.2.10, qualunque siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$ e $s > N$, risulta $H_s(A) = 0$. Pertanto

$$\alpha(A) \leq N \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^N.$$

Proposizione 1.2.11. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ tale che $\alpha(A) > 0$, allora*

$$H_t(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } t > \alpha(A), \\ +\infty & \text{se } 0 \leq t \leq \alpha(A). \end{cases}$$

Dimostrazione. Se $t > \alpha(A)$ esiste $s < t$ tale che $H_s(A) = 0$. Per la Proposizione 1.2.9 risulta quindi $H_t(A) = 0$. Sia ora $0 \leq t < \alpha(A)$ e supponiamo per assurdo che $H_t(A) < +\infty$. Ancora per la Proposizione 1.2.9 di avrebbe $H_s(A) = 0$ per ogni $s > t$. Ne verrebbe, per la Definizione 1.2.7, $\alpha(A) \leq t$, contro le ipotesi. \square

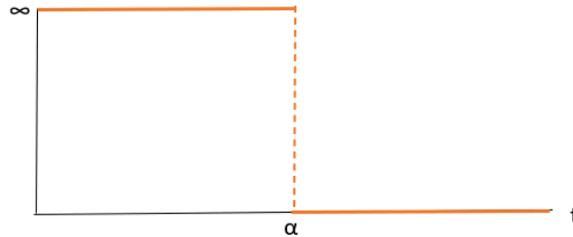


Figura 1.2: Grafico di $H_t(A)$ in funzione di t

La Proposizione 1.2.11 ci mostra il comportamento di H_t intesa come funzione di t : il suo grafico presenta una discontinuità a salto in $t = \alpha$, come si vede nella Figura 1.2. Ciò significa che dato un insieme A , se $H_t(A) = 1$ allora è come se stessimo provando a misurare l'insieme con un “righello” talmente piccolo da far sembrare A molto grande; se $H_t(A) = 0$ è come se l'insieme A fosse misurato tramite un “righello” troppo grande per riuscire a percepirlo. L'unico modo per misurare con cura l'insieme è proprio un “righello” che possa misurare oggetti di dimensione $\alpha(A)$.

1.2.3 Esempi di dimensioni di Hausdorff

Mostriamo ora alcuni esempi di calcolo di dimensioni di Hausdorff di particolari insiemi.

Esempio 1.7. Sia $a \in \mathbb{R}^N$. Allora

$$H_0(\{a\}) = 1.$$

Infatti se $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$ è un δ -ricoprimento di $\{a\}$, allora

$$\sum_{k \in \mathcal{A}} m_0(B_k) = \sum_{k \in \mathcal{A}} \omega_0(r(\{a\}))^0 = \omega_0 \cdot \text{card } \mathcal{A} = \text{card } \mathcal{A} \geq 1.$$

Pertanto $H_0^{(\delta)}(\{a\}) \leq 1$ per ogni $\delta > 0$. D'altra parte, essendo ovviamente $(\{a\})$ un ricoprimento di $\{a\}$, qualunque sia $\delta > 0$, risulta

$$H_0^{(\delta)}(\{a\}) \leq m_0(\{a\}) = \omega_0(r\{a\})^0 = 1.$$

Allora $H_0^{(\delta)}(\{a\}) = 1$ per ogni $\delta > 0$, e quindi $H_0(\{a\}) = 1$.

Esempio 1.8. Sia A un sottoinsieme di \mathbb{R}^N finito o numerabile. Allora

$$H_0(A) = \text{card } A \quad \text{e} \quad \alpha(A) = 0. \quad (1.11)$$

Infatti, se $A = \{a_k \mid k \in \mathcal{A}\}$ con $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$ e $a_k \neq a_h$ se $k \neq h$, allora, essendo $\{a_k\}$ H_0 -misurabile (in quanto chiuso) e $\{a_k\} \cap \{a_h\} = \emptyset$ per $k \neq h$,

$$H_0(A) = H_0\left(\bigcup_{k \in \mathcal{A}} \{a_k\}\right) = \sum_{k \in \mathcal{A}} H_0(\{a_k\}) = \text{card } \mathcal{A} = \text{card } A.$$

Questo dimostra la prima delle (1.11). Per dimostrare la seconda basta osservare che, per ogni $t > 0$, si ha

$$H_t(A) \leq \sum_{k \in \mathcal{A}} H_t(\{a_k\}) = 0$$

in quanto, essendo $H_0(\{a_k\}) = 1$, risulta $H_t(\{a_k\}) = 0$ per ogni $t > 0$.

Insieme di Cantor

Tra i sottoinsiemi di \mathbb{R} aventi dimensione di Hausdorff non intera il più noto è probabilmente l'*insieme di Cantor*, che indicheremo C , così definito:

$$C = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k,$$

Dove la successione $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è la successione di plurintervalli chiusi definita, per ricorrenza, con il procedimento seguente:

C_0 è l'intervallo $[0, 1]$;

C_1 si ottiene rimuovendo da C_0 l'intervallo aperto $\left] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right[$; quindi

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1 \right];$$

C_2 si ottiene rimuovendo dal centro di entrambe le componenti connesse di C_1 un intervallo aperto di lunghezza $\left(\frac{1}{3}\right)^2$; quindi

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9} \right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9} \right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1 \right];$$

C_{k+1} si ottiene rimuovendo dal centro di ciascuna delle 2^k componenti connesse di C_k un intervallo aperto di lunghezza $\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}$ (cfr. Figura 1.3).



Figura 1.3: Insieme di Cantor. La k -esima riga dall'alto corrisponde a C_{k-1}

Calcoliamo la misura di Lebesgue di C . Ciascuno degli insiemi C_k è unione di 2^k intervalli chiusi e disgiunti ciascuno dei quali ha lunghezza $\left(\frac{1}{3}\right)^k$. Dunque

$\mu(C_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Si ha quindi che

$$\mu(C) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0.$$

Abbiamo cioè che l'insieme di Cantor ha misura di Lebesgue nulla pur non essendo un insieme vuoto.

Calcoliamo ora la dimensione di Hausdorff di C . Indichiamo con $\mathcal{I}_k = (I_{k,j})_{j=1,\dots,2^k}$ la famiglia delle componenti connesse di C_k per ogni $k \in \mathbb{N}$; certamente \mathcal{I}_k è un δ_k -ricoprimento di C , con $\delta_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k$. Risulta quindi, per ogni $t \geq 0$,

$$H_t^{(\delta_k)}(C) \leq \sum_{j=1}^{2^k} m_t(I_{k,j}) = 2^k \omega_t \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^k \right)^t = \omega_t 2^{k-t} 3^{-kt}. \quad (1.12)$$

Dalla (1.12), indicando con s il numero reale

$$s := \frac{\ln(2)}{\ln(3)},$$

si ottiene

$$H_t^{(\delta_k)}(C) \leq \omega_t 2^{-t} \exp(k(s-t) \ln(3))$$

e quindi, per ogni $t > s$

$$H_t(C) = \lim_{k \rightarrow +\infty} H_t^{(\delta_k)}(C) = 0,$$

mentre, per $t = s$

$$H_s(C) = \lim_{k \rightarrow +\infty} H_s^{(\delta_k)}(C) \leq \omega_s 2^{-s}.$$

Si può dimostrare (si veda [Falconer, Teorema 1.14 p.14]) che vale anche la disuguaglianza inversa:

$$H_s(C) \geq \omega_s 2^{-s}.$$

Pertanto

$$H_s(C) = \omega_s 2^{-s} \quad \text{e} \quad \alpha(C) = s \approx 0.6309.$$

Curva di Koch

Un altro esempio di frattale matematico molto famoso è la curva di Koch, che verrà nel seguito indicata K , è definita ricorsivamente a partire da un segmento e iterando all'infinito il seguente procedimento:

K_0 è l'intervallo $[0, 1]$;

K_1 si ottiene prima dividendo K_0 in tre parti uguali, poi costruendo un triangolo equilatero avente per base la parte centrale, vale a dire il segmento di estremi $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$, e infine rimuovendo quest'ultimo segmento. In questo modo si ha una spezzata costituita da quattro segmenti uguali, di lunghezza pari a $\frac{1}{3}$;

K_2 si ottiene ripetendo la stessa operazione vista nel punto precedente a ognuno dei quattro segmenti di K_1 . Si ha così una spezzata costituita da sedici segmenti uguali, di lunghezza pari a $\frac{1}{9}$;

K_{i+1} si ottiene ripetendo la solita operazione a ognuno dei 4^i segmenti di K_i . Il risultato è dunque una spezzata costituita da 4^{i+1} segmenti uguali, di lunghezza pari a $\frac{1}{3^{i+1}}$ (cfr. Figura 1.4).

Il limite per $i \rightarrow +\infty$ della successione $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ è la curva di Koch K .

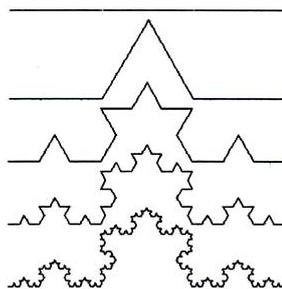


Figura 1.4: Curva di Koch. L' i -esima riga dall'alto corrisponde a K_{i-1}

Calcoliamo la misura di Lebesgue di K . Abbiamo visto che ciascuno dei K_i è una spezzata formata da 4^i segmenti di lunghezza $\frac{1}{3^i}$. Quindi risulta $\mu(K_i) = \left(\frac{4}{3}\right)^i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Perciò

$$\mu(K) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^i = +\infty.$$

Ossia la curva di Koch ha lunghezza infinita, dunque non “vive” in uno spazio di dimensione 1; poiché sta in una superficie finita, avrà dimensione di Hausdorff compresa tra 1 e 2.

Seguendo un procedimento totalmente analogo a quanto visto per l'insieme di Cantor, si dimostra che $\alpha(K) = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 1.2618$.

Capitolo 2

Autosimilarità

Analizziamo la seconda caratteristica fondamentale degli insiemi frattali ovvero l'autosimilarità, cioè la proprietà che hanno gli insiemi frattali di ripetersi identicamente a tutte le scale. Ad esempio, in un albero (matematico) ogni ramo è simile all'intero albero e ogni rametto è a sua volta simile al proprio ramo, e così via (cfr. Figura 2.1).

Si mostrerà usando la teoria degli spazi metrici ed il teorema di punto fisso come caratterizzare dal punto di vista matematico gli insiemi autosimilari.

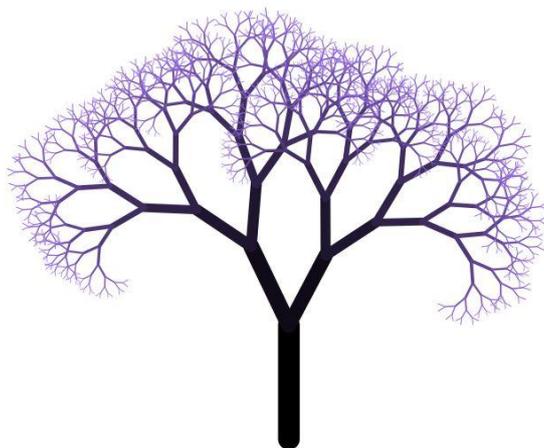


Figura 2.1: Albero matematico. Ogni ramo corrisponde ad una miniatura dell'albero originale

2.1 Contrazioni e insiemi autosimilari

2.1.1 Contrazioni

Definizione 2.1.1 (Contrazione). Sia (X, d) uno spazio metrico. Una mappa $\psi : X \rightarrow X$ si dice *contrazione* se esiste una costante $c \in]0, 1[$ tale che

$$d(\psi(x), \psi(y)) \leq c \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in X. \quad (2.1)$$

Si definisce inoltre *fattore di contrazione* di ψ il più piccolo valore di c per cui valga la (2.1).

Osservazione 2.1 (Continuità delle contrazioni). Sia ψ una contrazione di fattore c su (X, d) spazio metrico.

Fissiamo $x_0 \in X$, $\epsilon > 0$ e prendiamo $0 < \delta < \frac{\epsilon}{c}$.

Sia dunque $x \in X$ tale che $d(x, x_0) < \delta$. Si ha che

$$d(\psi(x), \psi(x_0)) \leq c \cdot d(x, x_0) < c \cdot \delta < \epsilon.$$

Vale a dire che ψ è continua.

Definizione 2.1.2 (Punto fisso). Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $f : X \rightarrow X$ una funzione. Un punto $x \in X$ è detto *punto fisso* di f se vale

$$f(x) = x.$$

Teorema 2.1.1 (Banach-Caccioppoli). Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $\psi : X \rightarrow X$ una contrazione di fattore c . Allora esiste un unico punto fisso per ψ .

Dimostrazione. Mostriamo per prima cosa l'esistenza del punto fisso. Sia $x \in X$ e consideriamo la successione definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} x_0 = x; \\ x_{k+1} = \psi(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si ha che

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(\psi(x_n), \psi(x_{n-1})) \leq c \cdot d(x_n, x_{n-1}) = \\ &= c \cdot d(\psi(x_{n-1}), \psi(x_{n-2})) \leq c^2 \cdot d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \dots \\ &\leq c^n \cdot d(x_1, x_0). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Preso dunque $p \in \mathbb{N}^*$, avremo che

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq \text{per la disuguaglianza triangolare} \\ &\leq \sum_{j=0}^{p-1} d(x_{n+j+1}, x_{n+j}) \leq \text{per la (2.2)} \\ &\leq \sum_{j=0}^{p-1} c^{n+j} \cdot d(x_1, x_0) = c^n \cdot d(x_1, x_0) \sum_{j=0}^{p-1} c^j \leq \\ &\leq c^n \cdot d(x_1, x_0) \sum_{j=0}^{\infty} c^j = \frac{c^n}{1-c} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Dunque, se $m \geq n$, $m \in \mathbb{N}$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_m, x_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c^n}{1-c} d(x_1, x_0) = 0.$$

Ossia la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy. Essendo X completo, (x_n) converge a un certo valore $\bar{x} \in X$.

Poiché per costruzione abbiamo che $x_n = \psi(x_{n-1})$ e ψ è continua, in quanto contrazione, otteniamo

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \psi(x_{n-1}) = \psi \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n-1} \right) = \psi(\bar{x}).$$

Perciò \bar{x} è un punto fisso per ψ .

Mostriamo ora che esso è unico. Supponiamo per assurdo che esista un diverso punto $x' \in X$ fisso per ψ . Si otterrebbe

$$d(\bar{x}, x') = d(\psi(\bar{x}), \psi(x')) \leq c \cdot d(\bar{x}, x').$$

Da ciò seguirebbe direttamente che

$$0 \leq d(\bar{x}, x')(1-c) \leq 0$$

Vale a dire $d(\bar{x}, x') = 0$, ossia $x' = \bar{x}$. □

Definizione 2.1.3 (IFS). Sia (X, d) uno spazio metrico e siano ψ_1, \dots, ψ_n , $n \in \mathbb{N}^*$, contrazioni su X aventi fattore di contrazione, rispettivamente, c_1, \dots, c_n . Si definisce *IFS* (sistema iterato di funzioni) la $n+1$ -upla $((X, d), \psi_1, \dots, \psi_n)$.

Il numero $c := \max\{c_i \mid i = 1, \dots, n\}$ si dice *fattore di contrazione dell'IFS*.

2.1.2 Spazio dei frattali

Definizione 2.1.4 ($\mathcal{P}_0(X)$). Sia X un insieme. Chiamiamo $\mathcal{P}_0(X)$ la famiglia dei sottoinsiemi non vuoti di X . Ossia

$$\mathcal{P}_0(X) := \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}.$$

Definizione 2.1.5 (ϵ -intorno). Siano $\epsilon > 0$ e $A \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^N)$. Si chiama ϵ -intorno di A l'insieme

$$N_\epsilon(A) := \{x \in \mathbb{R}^N \mid d_\epsilon(x, A) \leq \epsilon\}.$$

Definiamo ora formalmente una metrica su in $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^N)$.

Definizione 2.1.6 (Metrica di Hausdorff). Siano $A, B \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^N)$. Si chiama *distanza di Hausdorff* tra A e B la quantità

$$d_H(A, B) := \min\{\epsilon \geq 0 \mid A \subset N_\epsilon(B) \wedge B \subset N_\epsilon(A)\}.$$

Questa definizione non costituisce una metrica in generale. È sufficiente prendere come controesempio $A = \{0\}$, $B = [0, +\infty[\in \mathcal{P}_0(\mathbb{R})$, che sono tali che $d_H(A, B) = +\infty$. Pertanto d_H è una metrica estesa su $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^N)$ (perché può assumere come valore $+\infty$). Tuttavia per il nostro scopo serve una metrica nella sua definizione rigorosa, per ottenerla è sufficiente imporre dei vincoli sull'insieme $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^N)$: considerare gli insiemi compatti.

Definizione 2.1.7 ($\mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N)$). Definiamo $\mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N)$ la famiglia dei sottoinsiemi compatti non vuoti di \mathbb{R}^N . Vale a dire:

$$\mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N) := \{A \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^N) \mid A \text{ è compatto}\}.$$

Proposizione 2.1.2. *L'applicazione d_H :*

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\mapsto d_H(A, B) \end{aligned}$$

è una metrica su $\mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N)$.

Dimostrazione. Mostriamo che d_H soddisfa le proprietà di distanza definite in 1.1.4.

1. Siano $A, B \in \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N)$.

\Rightarrow) Supponiamo $A = B$. Certamente per ogni $\epsilon > 0$ si ha $A \subset N_\epsilon(A)$, quindi

$$d_H(A, A) = 0.$$

\Leftarrow) Supponiamo $d_H(A, B) = 0$. Allora per ogni $\epsilon > 0$ si ha $A \subset N_\epsilon(B)$ e ciò implica che, fissando $x \in A$, $d_\epsilon(x, B) \leq \epsilon$, ossia

$$d_\epsilon(x, B) = 0.$$

Segue dalla Proposizione 1.1.1 che $x \in \bar{B}$. Ma B è compatto, dunque chiuso, per cui $x \in \bar{B} = B$. Questo prova che $A \subseteq B$.

Ragionando in maniera analoga si ottiene che $B \subseteq A$ e quindi

$$A = B.$$

Vale a dire

$$d_H(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B;$$

2. Simmetria: è un immediata conseguenza della definizione;

3. Disuguaglianza triangolare: siano $A, B, C \in \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N)$. Fissiamo $\epsilon > 0$ e prendiamo $x \in A$, esiste $y \in B$ tale che $d_\epsilon(x, y) \leq d_H(A, B) + \epsilon$. Analogamente se $y \in B$ esiste $z \in C$ tale che $d_\epsilon(y, z) \leq d_H(B, C) + \epsilon$. Da qui possiamo affermare che, posto $r = d_H(A, B) + d_H(B, C) + 2\epsilon$ e sfruttando la disuguaglianza triangolare per d_ϵ ,

$$\forall x \in A \exists z \in C \mid d_\epsilon(x, z) \leq r.$$

Vale a dire che $A \subset N_r(C)$.

Ripetendo lo stesso ragionamento nel verso opposto si ottiene che $C \subset N_r(A)$.

Abbiamo quindi verificato che

$$d_H(A, C) \leq r = d_H(A, B) + d_H(B, C) + 2\epsilon.$$

Di conseguenza

$$d_H(A, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C).$$

□

Definizione 2.1.8 (Spazio dei frattali). Lo spazio metrico $(\mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N), d_H)$ è chiamato *spazio dei frattali*.

Lemma 2.1.3. Sia $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy decrescente in $\mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N)$. Allora (A_n) ammette limite in $\mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N)$ uguale a

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Dimostrazione. A è certamente chiuso e limitato, quindi compatto, in quanto intersezione di insiemi chiusi e limitati.

Fissiamo $\epsilon > 0$ e supponiamo A sia non vuoto. Supponiamo inoltre che esista $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_\epsilon$, $n \in \mathbb{N}$, si abbia che

$$\forall y \in A_n \exists x \in A \mid d_\epsilon(y, x) \leq \epsilon. \quad (2.3)$$

Ciò significa che

$$\forall y \in A_n \quad d_\epsilon(y, A) \leq \epsilon,$$

ossia

$$\forall n \geq n_\epsilon \quad A_n \subset N_\epsilon(A). \quad (2.4)$$

Naturalmente per ogni $n \in \mathbb{N}$, e in particolare per $n \geq n_\epsilon$, $A \subseteq A_n$, per cui

$$\forall n \geq n_\epsilon \quad A \subset N_\epsilon(A_n). \quad (2.5)$$

Dalla (2.4) e dalla (2.5), si ottiene dunque che esiste $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$n \geq n_\epsilon \Rightarrow d_H(A_n, A) \leq \epsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ϵ segue che $A_n \rightarrow A$.

Dimostreremo perciò che $A \neq \emptyset$ e che effettivamente si verifica la (2.3). Poiché (A_n) è di Cauchy, si ha che

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N_0, n, m \in \mathbb{N}, \quad d_H(A_n, A_m) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Inoltre si ha che

$$\exists N_1 > N_0, N_1 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N_1, n, m \in \mathbb{N}, \quad d_H(A_n, A_m) < \frac{\epsilon}{4}.$$

Abbiamo quindi che per ogni $k \in \mathbb{N}^*$

$$\exists N_k > N_{k-1}, N_k \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N_k, n, m \in \mathbb{N}, \quad d_H(A_n, A_m) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}.$$

Si è così costruita una sottosuccessione $(A_{N_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tale che

$$d_H(A_{N_{k-1}}, A_{N_k}) < \frac{\epsilon}{2^k}. \quad (2.6)$$

Sia ora $x_0 \in A_{N_0}$.

Poiché $d_H(A_{N_0}, A_{N_1}) < \frac{\epsilon}{2}$, esiste $x_1 \in A_{N_1}$ tale che $d_\epsilon(x_0, x_1) < \frac{\epsilon}{2}$.

In generale, in virtù della (2.6), si ha che per ogni $k \in \mathbb{N}^*$

$$\exists x_k \in A_{N_k} \mid d_\epsilon(x_{k-1}, x_k) < \frac{\epsilon}{2^k}. \quad (2.7)$$

Si è così costruita, per ogni $x_0 \in A_{N_0}$, una successione $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, con $x_k \in A_{N_k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, per cui vale la (2.7).

Mostriamo ora che (x_k) è di Cauchy.

Sia $\eta > 0$, vogliamo mostrare che esiste $\bar{k} = \bar{k}_\eta$ tale che

$$\forall n > m > \bar{k}, m, n \in \mathbb{N}, \quad d_\epsilon(x_m, x_n) < \eta$$

Scegliamo \bar{k} tale che $\frac{\epsilon}{2^{\bar{k}-1}} < \eta$ e siano $n > m > \bar{k}$.

Si ha

$$\begin{aligned} d_\epsilon(x_m, x_n) &\leq \text{per la disuguaglianza triangolare} \\ &\leq \sum_{i=m+1}^n d_\epsilon(x_{i-1}, x_i) \leq \sum_{i=m+1}^{\infty} d_\epsilon(x_{i-1}, x_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=\bar{k}}^{\infty} d_\epsilon(x_{i-1}, x_i) \leq \text{per la (2.7)} \\ &\leq \sum_{i=\bar{k}}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} = \frac{\epsilon}{2^{\bar{k}-1}} < \eta. \end{aligned}$$

Quindi la successione (x_k) è di Cauchy in \mathbb{R}^N , dunque converge a $x \in \mathbb{R}^N$.

Dimostriamo ora che $x \in A$ e di conseguenza $A \in \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N)$.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$, (x_k) è definitivamente contenuta in A_{N_k} , che è chiuso in quanto compatto, per cui

$$x \in A_{N_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

Inoltre $(A_n) \downarrow$ per ipotesi, per cui

$$x \in A_n \quad \forall n < N_k \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

Dalla (2.8) e dalla (2.9) segue immediatamente che $x \in A_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A.$$

Resta solo da dimostrare che si verifica la (2.3). Fissiamo $n > N_0$, $n \in \mathbb{N}$ e prendiamo $y_0 \in A_n \subseteq A_{N_0}$. La successione $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ che soddisfa la (2.7) converge a un certo $y \in A$. Perciò si ha

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(y_0, y) &= d_\varepsilon(y_0, \lim_{k \rightarrow +\infty} y_k) = \text{per continuità di } d_\varepsilon \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} d_\varepsilon(y_0, y_k) \leq \text{per la disuguaglianza triangolare} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} d_\varepsilon(y_{i-1}, y_i) \leq \text{per la (2.7)} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Abbiamo dunque dimostrato la (2.3) con $n_\varepsilon = N_0$. □

Lemma 2.1.4. *Sia $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $\mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N)$. Allora per ogni $m \in \mathbb{N}$ vale che*

$$\overline{\bigcup_{n \geq m} A_n} = B_m \in \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N).$$

Inoltre la successione $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy.

Dimostrazione. Sicuramente B_m è chiuso e non vuoto per ogni $m \in \mathbb{N}$.

Essendo (A_n) di Cauchy, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $d_H(A_{n_\varepsilon}, A_n) < \varepsilon$ per ogni $n \geq n_\varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$. A_{n_ε} è limitato, essendo compatto, dunque esistono $x \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$

tali che $A_{n_\epsilon} \subseteq B(x, r)$. Applicando la disuguaglianza triangolare otteniamo che per ogni $n \geq n_\epsilon$, $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n \subseteq B(x, r + \epsilon).$$

Poichè vale per ogni n , varrà anche per l'unione degli A_n , più precisamente

$$\left(\bigcup_{n \geq n_\epsilon} A_n \right) \subseteq B(x, r + \epsilon).$$

Passando alle chiusure dei due insiemi abbiamo

$$B_{n_\epsilon} \subseteq \overline{B(x, r + \epsilon)},$$

vale a dire che B_{n_ϵ} è limitato.

Essendo

$$B_0 = \left(\bigcup_{n < n_\epsilon} A_n \right) \cup B_{n_\epsilon},$$

si ha che B_0 è unione finita di insiemi limitati, dunque è limitato; poiché $B_m \subseteq B_0$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, si ha che B_m è limitato, oltre che chiuso, e quindi $B_m \in \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.

Per ogni $m, n \geq n_\epsilon$, $m, n \in \mathbb{N}$ si ha, essendo (A_n) di Cauchy, $d_H(A_n, A_m) < \epsilon$, in particolare $A_m \subset N_\epsilon(A_n)$. Segue immediatamente, passando prima alle unioni degli A_n e degli A_m , e poi alle loro chiusure, che

$$\bigcup_{i \geq m} A_i \subset N_\epsilon \left(\bigcup_{j \geq m} A_j \right)$$

e quindi che

$$B_m \subset N_\epsilon(B_n). \quad (2.10)$$

Ripetendo un ragionamento analogo si ottiene l'inclusione inversa

$$B_n \subset N_\epsilon(B_m). \quad (2.11)$$

Combinando le equazioni (2.10) e (2.11) si ottiene la condizione di Cauchy per $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}$, infatti

$$\exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n, m \geq n_\epsilon, n, m \in \mathbb{N}, \quad d_H(B_n, B_m) < \epsilon.$$

□

Teorema 2.1.5. *Lo spazio dei frattali è uno spazio metrico completo.*

Dimostrazione. Sia $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $\mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N)$. Per il Lemma 2.1.4 la successione $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}$, dove

$$B_m = \overline{\bigcup_{n \geq m} A_n},$$

è di Cauchy e ovviamente decrescente in $\mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N)$. Quindi per il Lemma 2.1.3 converge in $\mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N)$ a

$$A = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} B_m.$$

Certamente $A_n \subseteq B_n$, per cui

$$A_n \subset N_\epsilon(B_n) \quad \forall \epsilon > 0. \quad (2.12)$$

D'altra parte, poiché (A_n) è di Cauchy, fissato $\epsilon > 0$ esiste $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che $d_H(A_n, A_m) < \epsilon$ per ogni $n, m \geq n_\epsilon$, $n, m \in \mathbb{N}$. Ciò implica che per ogni $n \geq n_\epsilon$, $n \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{i \geq n} A_i \subset N_\epsilon(A_n).$$

Passando alla chiusura si ha che

$$B_n \subset N_\epsilon(A_n) \quad \forall n \geq n_\epsilon, n \in \mathbb{N}.$$

Da questa e dalla (2.12) si ottiene che esiste $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale per cui

$$d_H(A_n, B_n) < \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon, n \in \mathbb{N}.$$

Abbiamo dimostrato che $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_H(A_n, B_n) = 0$.

Ossia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = A,$$

cioè $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ad A . □

2.1.3 Autosimilarità

Estendiamo la definizione di punto fisso ad un IFS.

Definizione 2.1.9 (Insieme autosimilare). Sia $((\mathbb{R}^N, d_\varepsilon), \psi_1, \dots, \psi_m)$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, un IFS. Si dice che $A \in \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N)$ è *autosimilare* se vale

$$A = \bigcup_{i=1}^m \psi_i(A).$$

Lemma 2.1.6. *Sia ψ una contrazione di fattore c su $(\mathbb{R}^N, d_\varepsilon)$. Allora essa induce una contrazione su $(\mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N), d_H)$.*

In particolare, se $A, B \in \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N)$, si ha

$$d_H(\psi(A), \psi(B)) \leq c \cdot d_H(A, B).$$

Dimostrazione. Sia $A \in \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N)$. Poiché ψ è continua (cfr. Osservazione 2.1), manda compatti in compatti, perciò si ha che $\psi(A) \in \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N)$.

Siano ora $B, C \in \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N)$ e sia $s = d_H(B, C)$. Allora per ogni $x \in B$ esiste $y \in C$ tale che $d_\varepsilon(x, y) \leq s$. Di conseguenza si ha che

$$d_\varepsilon(\psi(x), \psi(y)) \leq c \cdot d_\varepsilon(x, y) \leq c \cdot s =: \lambda.$$

Abbiamo mostrato che

$$\psi(x) \in N_\lambda(\psi(C)) \quad \forall x \in B.$$

Dunque $\psi(B) \subset N_\lambda(\psi(C))$. Analogamente si trova che $\psi(C) \subset N_\lambda(\psi(B))$, dunque $d_H(\psi(B), \psi(C)) \leq \lambda = c \cdot d_H(B, C)$. Ossia ψ è una contrazione su $(\mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N), d_H)$. \square

Lemma 2.1.7. *Siano $B_1, B_2, C_1, C_2 \in \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N)$. Allora*

$$d_H(B_1 \cup C_1, B_2 \cup C_2) \leq \max\{d_H(B_1, B_2), d_H(C_1, C_2)\}.$$

Dimostrazione. Poniamo $s = d_H(B_1, B_2)$, $t = d_H(C_1, C_2)$ e $r = \max\{s, t\}$.

Certamente $B_1 \subset N_r(B_2)$ e $C_1 \subset N_r(C_2)$, per cui

$$(B_1 \cup C_1) \subset (N_r(B_2) \cup N_r(C_2)) = N_r(B_2 \cup C_2).$$

Ottenendo l'inclusione inversa in maniera del tutto analoga, si ottiene che

$$d_H(B_1 \cup C_1, B_2 \cup C_2) \leq r.$$

\square

Teorema 2.1.8 (Barnsley). *Sia $((\mathbb{R}^N, d_\varepsilon), \psi_1, \dots, \psi_m)$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, un IFS avente fattore di contrazione c . Allora esiste un unico insieme autosimilare.*

Dimostrazione. Sia $\psi : \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N)$ la mappa definita da

$$\psi(A) := \bigcup_{i=1}^m \psi_i(A) \quad \forall A \in \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N).$$

$\psi(A) \in \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N)$ essendo unione finita di compatti ($\psi_i(A) \in \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N)$ per ogni $i = 1, \dots, m$ per quanto visto nella dimostrazione del Lemma 2.1.6), dunque è compatta.

Se dimostriamo che ψ è una contrazione su $(\mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N), d_H)$, che è uno spazio metrico completo per il Teorema 2.1.5, allora il Teorema 2.1.1 ci garantisce l'esistenza e unicità di un punto fisso $V \in \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N)$. Questo insieme V sarà tale che

$$V = \psi(V) = \bigcup_{i=1}^m \psi_i(V),$$

ossia V è autosimilare.

Non ci resta che dimostrare che ψ è una contrazione. Siano quindi $A, B \in \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N)$ e poniamo $s = d_H(A, B)$, si ha

$$\begin{aligned} d_H(\psi(A), \psi(B)) &= d_H\left(\bigcup_{i=1}^m \psi_i(A), \bigcup_{i=1}^m \psi_i(B)\right) \leq \text{applicando iterativamente il Lemma 2.1.7} \\ &\leq \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \{d_H(\psi_i(A), \psi_i(B))\} \leq \text{per il Lemma 2.1.6} \\ &\leq \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \{c_i \cdot d_H(A, B)\} \leq \max_{i \in \{1, \dots, m\}} c_i \cdot s = c \cdot s. \end{aligned}$$

ψ è perciò una contrazione. □

Osservazione 2.2. Cerchiamo di dare un'interpretazione del Teorema di Barnsley. Prendiamo un insieme A compatto in \mathbb{R}^N . Ripetendo i passaggi della dimostrazione del Teorema di Banach-Caccioppoli (cfr. Teorema 2.1.1), si ha che il punto fisso della contrazione ψ , vale a dire l'insieme autosimilare per l'IFS, è il limite della successione $(\psi^k(A))_{k \in \mathbb{N}}$, dove per ψ^k si intende la composizione k -esima di ψ con se stessa. In particolare, prendendo per esempio un insieme $B \in \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^N)$ tale che $\psi(B) \subset B$, come

può essere un disco chiuso centrato nell'origine e avente raggio sufficientemente grande, avremo che la successione di compatti $\psi^k(B)$ è monotona decrescente e che il suo limite, cioè $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \psi^k(B)$, è appunto l'insieme autosimilare.

2.1.4 Costruzione di frattali mediante IFS

Mostriamo ora come costruire i frattali visti nel sottoparagrafo 1.2.3 a partire da un IFS sfruttando il Teorema di Barnsley. Tali frattali saranno infatti i punti fissi della contrazione ψ definita nella dimostrazione del teorema (cfr. Teorema 2.1.8).

Insieme di Cantor

Consideriamo $([0, 1], d_\varepsilon)$, che è uno spazio metrico completo. Definiamo ora le contrazioni $\psi_1, \psi_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ come segue:

$$\psi_1(x) := \frac{1}{3}x$$

e

$$\psi_2(x) := \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

ψ_1 e ψ_2 sono certamente contrazioni di fattore $\frac{1}{3}$, quindi $(([0, 1], d_\varepsilon), \psi_1, \psi_2)$ è un IFS di fattore $\frac{1}{3}$.

L'applicazione ψ :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0([0, 1]) &\rightarrow \mathcal{K}_0([0, 1]) \\ B &\mapsto \psi_1(B) \cup \psi_2(B) \end{aligned}$$

è, per il Teorema di Barnsley, una contrazione sullo spazio metrico $(\mathcal{K}_0([0, 1]), d_H)$. Dunque, per il Teorema di Banach-Caccioppoli, ψ ha un unico punto fisso

$$C' = \psi(C') := \lim_{k \rightarrow +\infty} \psi^k(B),$$

dove B è un arbitrario elemento di $\mathcal{K}_0([0, 1])$.

Mostriamo ora che C' è l'insieme di Cantor C definito in 1.2.3. Sia $C'_0 = [0, 1]$ (C'_0 coincide con C_0) allora, chiamando $(C'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la successione $(\psi^k(C'_0))_{k \in \mathbb{N}}$, si ha che:

$$C'_1 = \psi(C'_0) = \psi_1(C'_0) \cup \psi_2(C'_0) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] = C_1;$$

$$C'_2 = \psi^2(C'_0) = \psi(C'_1) = \psi_1(C'_1) \cup \psi_2(C'_1) = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] = C_2;$$

$$C'_k = \psi^k(C'_0) = \psi(C'_{k-1}) = \psi_1(C'_{k-1}) \cup \psi_2(C'_{k-1}) = \dots = C_k.$$

Ecco dunque che gli insiemi C'_k coincidono con gli insiemi C_k definiti in 1.2.3 per ogni $k \in \mathbb{N}$. Segue quindi che

$$C' = \lim_{k \rightarrow +\infty} \psi^k(C'_0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (C'_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (C_k) = C.$$

Vale a dire che l'insieme di Cantor è autosimilare per l'IFS $(([0, 1], d_\varepsilon), \psi_1, \psi_2)$.

Curva di Koch

Sia $A = [0, 1] \times [0, 1]$ e consideriamo ora lo spazio metrico completo (A, d_ε) . Ripercorrendo il procedimento seguito per costruire la curva di Koch K definita in 1.2.3, si nota che l'insieme K_1 si ottiene a partire dall'insieme K_0 dapprima contraendolo in un segmento B , dopodiché congiungendo a B tre sue copie, due delle quali (i lati del triangolo equilatero privato della base) in seguito a una rotazione.

Definiamo quindi le contrazioni $\phi_j : \mathcal{K}_0(A) \rightarrow \mathcal{K}_0(A)$, $j = 1, \dots, 4$ in questo modo:

$$\begin{aligned} \phi_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &:= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \\ \phi_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &:= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \phi_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &:= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \phi_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &:= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Per ogni $j = 1, \dots, 4$ si ha che ϕ_j è una contrazione di fattore $\frac{1}{3}$, perciò $((A, d_\varepsilon), \phi_1, \dots, \phi_4)$ è un IFS di fattore $\frac{1}{3}$.

Analogamente a quanto visto per l'insieme di Cantor, l'applicazione ϕ :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0(A) &\rightarrow \mathcal{K}_0(A) \\ B &\mapsto \bigcup_{j=1}^4 \phi_j(B) \end{aligned}$$

è una contrazione sullo spazio metrico $(\mathcal{K}_0(A), d_H)$ e ammette un unico punto fisso

$$K' = \phi(K') := \lim_{i \rightarrow +\infty} \phi^i(B),$$

con B arbitrario elemento di $\mathcal{K}_0(A)$.

Come nel caso dell'insieme di Cantor, K' non è altro che la curva di Koch K definita in 1.2.3. Posto infatti $K'_0 = [0, 1] = K_0$ e chiamando $(K'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la successione $(\phi^i(K'_0))_{i \in \mathbb{N}}$, si ottiene, per costruzione delle ϕ_j , che

$$K'_i = \phi^i(K'_0) = \dots = K_i \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

dove i K_i sono gli insiemi definiti nel sottoparagrafo 1.2.3. Segue immediatamente che

$$K' = \lim_{i \rightarrow +\infty} \phi^i(K'_0) = \lim_{i \rightarrow +\infty} (K'_i) = \lim_{i \rightarrow +\infty} (K_i) = K$$

Ciò significa che la curva di Koch è autosimilare per l'IFS $((A, d_\varepsilon), \phi_1, \dots, \phi_4)$.

2.2 Dimensione insiemi autosimilari

Definizione 2.2.1 (Dimensione di similarità). Sia $((\mathbb{R}^N, d_\varepsilon), \psi_1, \dots, \psi_m)$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, un IFS e sia V il suo insieme autosimilare. Si definisce *dimensione di similarità* di V e si indica $\dim_S(V)$ la radice positiva dell'equazione nell'incognita d

$$\sum_{i=1}^m (c_i)^d = 1, \tag{2.13}$$

dove c_i è il fattore di contrazione di ψ_i per ogni $i = 1, \dots, m$.

L'equazione (2.13) ha effettivamente una sola radice reale positiva poichè la funzione continua $f(x) = \sum_{i=1}^m (c_i)^x - 1$ è monotona decrescente e si ha che $f(0) = m - 1 \geq 1$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$, dunque per il Teorema di Bolzano ammette uno zero, che sarà unico.

Teorema 2.2.1. *Sia $((\mathbb{R}^N, d_\varepsilon), \psi_1, \dots, \psi_m)$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, un IFS e sia V il suo insieme autosimilare. Risulta*

$$\alpha(V) \leq \dim_S(V).$$

Dimostrazione. Si veda [Yamaguti, Hata, Kigami, Teorema 2.3 p.20]. □

È importante capire quando la disuguaglianza del Teorema precedente diventa un'uguaglianza, poiché solitamente calcolare la dimensione di Hausdorff è complesso, mentre per calcolare la dimensione di similarità ci si riduce a risolvere un'equazione.

Definizione 2.2.2 (Condizione insieme aperto). Un IFS $((\mathbb{R}^N, d_\varepsilon), \psi_1, \dots, \psi_m)$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, soddisfa la *condizione di insieme aperto* se esiste un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^N$, $U \neq \emptyset$, tale che per ogni $i, j \in \{1, \dots, m\}$

- $\psi_i(U) \subseteq U$;
- $\psi_i(U) \cap \psi_j(U) = \emptyset$ se $i \neq j$.

Definizione 2.2.3 (Contrazione similare). Una contrazione $\psi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ di fattore c si definisce *similare* se

$$d_\varepsilon(\psi(x), \psi(y)) = c \cdot d_\varepsilon(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Teorema 2.2.2 (Hutchinson). *Sia $((\mathbb{R}^N, d_\varepsilon), \psi_1, \dots, \psi_m)$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, un IFS che soddisfa la condizione di insieme aperto e tale che ψ_i sia una contrazione similare per ogni $i = 1, \dots, m$ e sia V il suo insieme autosimilare. Allora vale*

$$\alpha(V) = \dim_S(V).$$

Dimostrazione. Si veda [Yamaguti, Hata, Kigami, Teorema 2.4 p.21]. □

2.2.1 Calcolo dimensioni di similarità

Vediamo ora calcoli diretti di dimensioni di similarità dei frattali visti in precedenza.

Insieme di Cantor

Consideriamo l'IFS $(([0, 1], d_\varepsilon), \psi_1, \psi_2)$ visto nel sottoparagrafo 2.1.4 per il quale l'insieme di Cantor C è autosimilare. Abbiamo che $c_1 = c_2 = \frac{1}{3}$, con c_i fattore di contrazione di ψ_i , $i = 1, 2$.

L'equazione (2.13) diventa perciò

$$\left(\frac{1}{3}\right)^d + \left(\frac{1}{3}\right)^d = 1$$

che ha come soluzione

$$d = \dim_S(C) = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}.$$

Notiamo che l'IFS $(([0, 1], d_\varepsilon), \psi_1, \psi_2)$ soddisfa la condizione insieme aperto con $U =]0, 1[$. Dunque per il Teorema di Hutchinson $\alpha(C) = \dim_S(C) = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$, come avevamo verificato in 1.2.3.

Curva di Koch

Riprendiamo l'IFS $((A, d_\varepsilon), \phi_1, \dots, \phi_4)$ definito nel sottoparagrafo 2.1.4, che ammette come insieme autosimilare la curva di Koch K . Per ogni $j = 1, \dots, 4$ risulta $c_j = \frac{1}{3}$, con c_j fattore di contrazione di ϕ_j .

Riscriviamo dunque l'equazione (2.13)

$$\left(\frac{1}{3}\right)^d + \left(\frac{1}{3}\right)^d + \left(\frac{1}{3}\right)^d + \left(\frac{1}{3}\right)^d = 1,$$

ottenendo come soluzione

$$d = \dim_S(K) = \frac{\ln(4)}{\ln(3)}.$$

Anche in questo caso l'IFS soddisfa la condizione insieme aperto con l'insieme V dato dall'interno del triangolo isoscele avente per vertici i punti:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}; \quad z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Capitolo 3

Applicazione musicale

Presentiamo in questo capitolo un'applicazione degli oggetti frattali all'ambito musicale: vedremo come creare composizioni musicali a partire da una struttura frattale.

Diamo preliminarmente alcune rudimentali nozioni di teoria musicale. Faremo riferimento al *sistema temperato equabile*, inventato dal compositore tedesco Andreas Werckmeister alla fine del 1600.

Definizione 3.0.1 (Ottava). Siano $\nu_2 > \nu_1$ le frequenze di due suoni. Esse definiscono la distanza (intervallo) di un'*ottava* se

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = 2.$$

Definizione 3.0.2 (Semitono). Si definisce *semitono* l'intervallo più piccolo che distanzia un suono dal successivo e dal precedente e corrisponde alla differenza più piccola in altezza chiaramente percepibile dall'udito umano.

La distanza (ossia il rapporto fra le altezze) definita da un semitono è costante e vale

$$\sqrt[12]{2} \approx 1.0595.$$

Il sistema temperato equabile divide l'ottava in 12 semitoni, che corrispondono ai tasti di un pianoforte presenti tra due note uguali che differiscono di un'ottava.

Esempio 3.1 (Scala diatonica). Nel sistema musicale occidentale, l'intervallo di ottava è coperto da sette note, corrispondenti ai tasti bianchi del pianoforte: *do, re, mi, fa, sol,*

la ,si. Tra di esse si trovano i *diesis* (\sharp), che innalzano la relativa nota di un semitono, e i *bemolle* (b), che la abbassano di un semitono; diesis e bemolle corrispondono ai tasti neri del pianoforte (cfr. Figura 3.1).



Figura 3.1: Note che costituiscono l'intervallo di ottava tra due do successivi in un pianoforte

3.1 Interpolazione musicale

Vediamo come creare una composizione musicale a partire da un insieme di punti di un piano cartesiano.

L'idea di base consiste nell'associare all'ascissa di ogni punto uno dei dodici suoni che compongono l'ottava (le sette note e i cinque innalzamenti dovuti al diesis), mentre all'ordinata del punto si fa corrispondere l'ottava di appartenenza. Rimane infine da determinare la durata del suono associata ad ogni punto, che viene calcolata considerando la distanza euclidea con il punto successivo.

Avendo a disposizione solo dodici suoni per ogni ottava, occorre ricorrere all'aritmetica modulare: la nota corrispondente a un punto di coordinate intere (x, y) sarà il resto della divisione tra x e 12. In particolare la funzione f che associa ad ogni ascissa la relativa nota agisce come segue

$$f(x) = x \pmod{12}.$$

La Tabella 3.1 riassume la mappa di associazione delle tra le immagini di f e le dodici note.

Tabella 3.1: Mappa di associazione

$f(x)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nota	do	do♯	re	re♯	mi	fa	fa♯	sol	sol♯	la	la♯	si

Supponiamo ora di avere a disposizione uno strumento capace di suonare n ottave. La funzione g definita da

$$g(y) = y \pmod{n}$$

associa all'ordinata di ogni punto l'ottava relativa alla nota determinata a partire dall'ascissa del punto.

Per quanto riguarda la durata di ciascun suono, dapprima si fissa un'unità di base, che corrisponde a $\frac{1}{2^m}$, con $m = 1, \dots, 6$. Dopodiché viene calcolata la distanza d' tra un punto e il successivo e si arrotonda il valore ottenuto al numero intero d più vicino; si calcola quindi il resto della divisione per m tramite la funzione

$$h(d) = d \pmod{m}$$

e si moltiplica per l'unità base scelta. Alla nota associata all'ultimo punto si assegna la durata necessaria a completare la battuta.

Per chiarire meglio il funzionamento dell'algoritmo presentiamo il seguente Esempio.

Esempio 3.2. Supponiamo di avere a disposizione uno strumento dotato di un'estensione di $n = 4$ ottave e scegliamo come unità di base la semicroma, ossia $\frac{1}{16}$. Consideriamo i punti $P_1 = (3, 2)$, $P_2 = (4, 3)$ e $P_3 = (5, 3)$, la cui rappresentazione è visibile nella Figura 3.2.

Posto $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, applicando le funzioni f e g ai punti otteniamo le relative note e ottave:

$$f(x_1) = 3 \quad \text{e} \quad g(x_1) = 2;$$

$$f(x_2) = 4 \quad \text{e} \quad g(x_2) = 3;$$

$$f(x_3) = 5 \quad \text{e} \quad g(x_3) = 5.$$

Quindi, in riferimento alla Tabella 3.1, abbiamo che a P_1 corrisponde il re♯ della seconda ottava, a P_2 si associa il mi della terza ottava e a P_3 il fa della terza ottava.

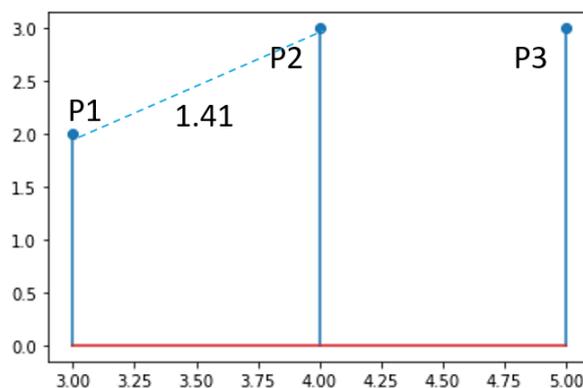


Figura 3.2: Rappresentazione cartesiana dei punti P_1 , P_2 e P_3

Avendo a disposizione tre note, possiamo calcolare la durata delle prime due. Le distanze d'_1 tra i punti P_1 e P_2 , e d'_2 tra P_2 e P_3 sono:

$$d'_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{2};$$

$$d'_2 = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = 1.$$

Da qui ricaviamo che $d_1 = d_2 = 1$. Dunque la durata di entrambe le note è

$$\frac{1}{16}h(1) = \frac{1}{16}.$$

3.2 Musica casuale

Nel paragrafo precedente abbiamo visto un modo per ottenere musica a partire da un insieme di punti su un piano cartesiano. Dopo aver mostrato il *come*, ci possiamo domandare *cosa* interpolare: a partire da quale tipo di insieme di punti, o di curva, si ottiene un risultato musicale migliore?

Il Professor Michael Bulmer in [Bulmer] ha studiato la melodia generata a partire da tre diverse tipologie di curve: la prima ottenuta mediante un procedimento totalmente aleatorio, la seconda in maniera molto prevedibile e la terza con un metodo che si presenta come una via di mezzo tra i precedenti. Vediamoli nello specifico.

3.2.1 White noise

Uno dei metodi più semplici per comporre musica casuale è generare le note una alla volta usando dei dadi. Supponiamo dunque di avere uno strumento dotato di un'estensione di n ottave, allora saranno sufficienti $2n$ dadi a 6 facce per poter coprire tutte le possibili note: lanciando i dadi insieme e sommando gli esiti di ciascun dado si ottiene infatti un numero compreso tra 1 e $12n$, al quale si fa corrispondere ordinatamente la relativa nota, associando al numero 1 il do dell'ottava zero, al numero due il do♯ dell'ottava zero, e così via fino al numero $12n$ che rappresenta il si dell'ottava n .

Ad ogni lancio dei dadi viene registrata quindi la somma dei numeri presenti su ciascuna faccia associandola al numero progressivo del lancio. Si può quindi costruire un grafico in cui sull'asse delle ascisse si mette il numero del lancio, mentre su quello delle ordinate l'esito. Mediante un metodo analogo è possibile stabilire la durata di ciascuna nota.

Nella Figura 3.3 si può vedere il grafico ricavato congiungendo i punti che rappresentano i risultati di un esperimento fatto generando 256 note e ponendo $n = 3$ il numero di ottave.

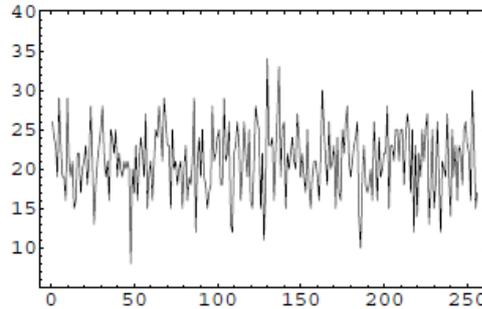


Figura 3.3: Grafico di generazione di un white noise

Ascoltando la melodia ottenuta, si nota che il suono risulta piuttosto sgradevole, quasi come un rumore statico che è stato rallentato. Il termine *white*, bianco, associato a questa metodologia è dovuto proprio a questo tipo di effetto.

3.2.2 Brown noise

Un evidente problema del white noise è che non c'è connessione tra le note. Per risolvere tale aspetto si può pensare a un metodo che ricordi il cammino dell'ubriaco, che si

muove in una certa direzione barcollando e compiendo lievi variazioni di direzione ad ogni passo. Il nome *brown noise* deriva proprio dalla camminata casuale descritta dal moto Browniano.

Scegliamo dunque una nota di partenza e per ottenere la nota successiva lanciamo un dado. Se esce il numero 1, si abbassa la nota precedente di un semitono; se esce 2 si abbassa di due semitoni; con un 3 si alza di un semitono; con un 4 si alza di due; con un 5 o un 6 si ripete la nota. La Figura 3.4 mostra un esempio di composizione di 256 note generata attraverso il metodo appena descritto.

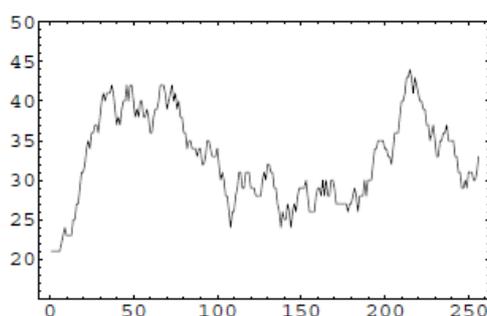


Figura 3.4: Grafico di generazione di un brown noise

Anche qui è possibile utilizzare un processo simile per stabilire le durate dei suoni. Il brown noise risulta meno fastidioso rispetto al white noise, ma comunque abbastanza noioso, a causa della prevedibilità e ripetitività dei suoni percepiti.

3.2.3 Pink noise

White noise e brown noise possono essere visti come due estremi della musica random. Nel primo non c'è legame tra note successive, mentre nel secondo la connessione è molto forte. Il White noise è noioso essendo troppo imprevedibile, ma anche il brown noise risulta tedioso per via della sua eccessiva prevedibilità.

D'altra parte, la musica tradizionale sembra aver trovato un equilibrio tra questi estremi. I teorici musicali sostengono che il godimento della musica nasce in parte dalle sue caratteristiche strutturali, come la generazione e la violazione di aspettative. Molti ascoltatori di musica, infatti, trovano piacevole quando si crea un ideale bilanciamento tra prevedibilità e sorpresa.

Un compositore può creare musica a partire da una visione dell'intero pezzo musicale, dopodiché inventare strutture più fini per le sezioni più piccole e alla fine scrivere le note su di esse. Ciò fornisce un modello di dipendenza nel lungo periodo, pur mantenendo casualità a breve termine. Il risultato è una composizione con caratteristiche di autosimilarità che le forniscono una struttura frattale.

Né il white noise, né il brown noise presentano la necessaria autosimilarità richiesta dalla musica "gradevole". Presentiamo dunque un metodo che genera musica che si pone tra gli estremi rappresentati dal white e dal brown noise. Esso si chiama *pink* noise, o $\frac{1}{f}$ noise, come descritto da Richard Voss e John Clarke in [Voss, Clarke].

Ottenere pink noise è estremamente complicato, tuttavia valide approssimazioni possono essere generate in modo molto facile. Il metodo inventato da Voss consiste nell'utilizzare n dadi per generare 2^n note. Per ragioni di semplicità, illustreremo il metodo considerando $n = 3$ dadi, che indicheremo con A , B , C . Si comincia con il fare una lista dei numeri da 0 a $2^n - 1$ nella loro rappresentazione binaria, come nella Tabella 3.2. Si procede tirando i dadi e sommando i valori di ciascuna faccia. Per generare la nota seguente si guardano le cifre che cambiano nella riga successiva della tabella. Per esempio, facendo riferimento alla Tabella 3.2, spostandosi dalla nota 0 alla nota 1, la cifra relativa al dado C cambia, mentre quelle relative ai dadi A e B restano invariate. Dunque solamente il dado C deve essere rilanciato, lasciando fermi gli altri due. Si sommano infine i valori sulle facce dei dadi e si ripete il procedimento finché tutte le 2^n note non sono state generate.

Tabella 3.2: Metodo binario per li pink noise con $n = 3$ dadi

Nota	A	B	C
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

È evidente che questo metodo fornisce una serie di note che esibiscono una dipendenza a lungo raggio. Le cifre più alte cambiano meno frequentemente, per cui il relativo dato fornisce una stabilità a lungo termine nella sequenza di note. La Figura 3.5 mostra un esempio di pink noise creato con 8 dadi.

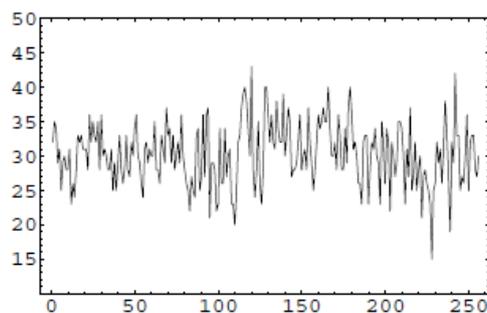


Figura 3.5: Grafico di generazione di un pink noise

3.3 Interpolazione di una curva frattale

Abbiamo visto che le composizioni musicali più “gradevoli” sono quelle che hanno alla base una struttura autosimilare. Si potrebbe pensare di comporre musica a partire direttamente da una curva frattale, che certamente possiede la proprietà di autosimilarità richiesta. Il compositore Gary Lee Nelson in [Nelson] illustra il procedimento che ha seguito per comporre diversi brani a partire da curve frattali; ne presentiamo un esempio.

Esempio 3.3 (Summer Song). Il brano per assolo di flauto “Summer Song” è generato a partire dalla un frattale matematico chiamato *curva di Hilbert*, rappresentato nella Figura 3.6.

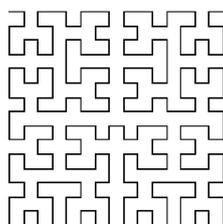


Figura 3.6: Curva di Hilbert

La forte simmetria della figura produrrebbe strutture ripetitive e una scarsa varietà in ritmo e altezza dei suoni, dunque Nelson ha deciso di modificarla cambiando ogni angolo della curva da 90 a 110 gradi e successivamente allungando, attorcigliando e deformando quanto ottenuto. Il risultato è la curva mostrata nella Figura 3.7. Essa è ora asimmetrica, con una compressione verso l'angolo in alto a destra.

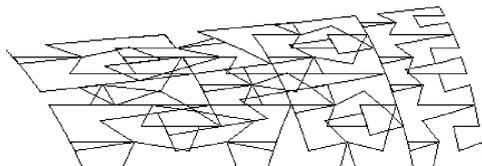


Figura 3.7: Curva di Hilbert allungata, attorcigliata e deformata

Rimane solo da tradurre la curva in note e durate.

Le coordinate verticali sono state interpretate come altezze, mentre le distanze orizzontali tra due vertici collegati rappresentano la durata. Tuttavia nella curva mostrata in Figura 3.7 ci sono movimenti orizzontali sia verso destra, che verso sinistra; per rendere l'immagine interpretabile è stata srotolata creando una curva che si muove con continuità da sinistra verso destra.

Il risultato finale di questo procedimento è mostrato nella Figura 3.8



Figura 3.8: Curva di Hilbert srotolata

Una volta ottenuta la curva finale, le coordinate verticali sono state tradotte in note attraverso la mappa presente nella Figura 3.9. La scala copre un'estensione di circa due ottave e mezza.



Figura 3.9: Scala per "Summer Song"

Bibliografia

- [Lanconelli] E. Lanconelli, *Lezioni di Analisi Matematica 2, Seconda parte*, Pitagora Editrice Bologna, 1997.
- [Busiello] S. Busiello, *Frattali e Musica*, Aracne Editrice, 2000.
- [Yamaguti, Hata, Kigami] M. Yamaguti, M. Hata, J. Kigami, *Mathematics of Fractals*, traduzione a cura di K. Hudson, American Mathematical Society, 1997.
- [Falconer] K. J. Falconer, *The geometry of fractal sets*, Cambridge University Press, 1985.
- [Bulmer] M. Bulmer, *Music from fractal noise*, Proceedings of Mathematics 2000 Festival, Australian Association of Mathematics Teachers, pp. 15-22, 2000.
- [Nelson] G. L. Nelson, *Real Time Transformation of Musical Material with Fractal Algorithms*, Computers and Mathematics with Applications, 32(1), pp. 109–116, 1996.
- [Voss, Clarke] R. F. Voss, J. Clarke, “*1/f noise*” in music: *Music from 1/f noise*, Journal of the Acoustical Society of America, 63(1), pp. 258–263, 1978.
- [Mandelbrot] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, 1977.
- [Ferri, Franz, Glaudo] F. Ferri, G. Franz, F. Glaudo, *Dispense sulla distanza di Hausdorff*, 2014. <https://docplayer.it/123186858-Dispense-sulla-distanza-di-hausdorff.html>