Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

UNA FORMULA PER IL VALORE DI UN GIOCO STOCASTICO

Tesi di Laurea in Probabilità

Relatore:
Chiar.mo Prof.
STEFANO PAGLIARANI

Presentata da:
IRENE BALZANI

Anno Accademico 2020-2021
Sessione III · 24 SETTEMBRE 2021

Introduzione

La teoria dei giochi prese forma negli anni 50 del 1900, prima con gli articoli pubblicati da John Nash nel 1950 in merito al concetto di equilibrio di Nash [4] e al problema della contrattazione [5], poi con quelli pubblicati da Lloyd Shapley nel 1953 riguardanti i giochi stocastici [9] e il cosiddetto valore di Shapley per giochi cooperativi [8]. I due fecero amicizia durante il periodo di studi a Princeton ed entrambi hanno vinto in seguito il premio Nobel per l'economia: Nash nel 1994 e Shapley nel 2013.

I giochi stocastici furono quindi introdotti da Shapley nel 1953 [9] per modellizzare le interazioni dinamiche in cui l'ambiente cambia in risposta al comportamento dei giocatori e alle loro decisioni. Un gioco stocastico ammette un insieme di giocatori. Ad ogni fase il gioco è in uno stato noto, preso da un insieme di stati, e ogni giocatore sceglie un'azione da un insieme di azioni possibili. Le azioni scelte dai giocatori e lo stato corrente del gioco determinano il *payoff* di ciascun giocatore e la distribuzione di probabilità che caratterizza lo stato successivo del gioco. La complessità dei giochi stocastici risiede nel fatto che le scelte prese dai giocatori hanno talvolta effetti contraddittori. Infatti le azioni dei giocatori, insieme allo stato corrente del gioco, determinano in primo luogo il payoff immediato di ogni giocatore e, in secondo luogo, influenzano la scelta di un nuovo stato che determina poi i potenziali *payoffs* futuri. In particolare quando un giocatore sceglie le proprie azioni deve bilanciare il voler ottenere grandi payoffs immediati e il provare a raggiungere stati che garantiscono grandi payoffs futuri. Tale decisione spesso può risultare difficile. Sebbene questa dicotomia sia presente anche nel caso di un singolo giocatore, la presenza di più giocatori che cercano di massimizzare il proprio payoff rende l'analisi della situazione ben più complicata.

Nel primo capitolo di questa tesi viene presentato il modello dei **giochi stocastici competitivi finiti**, cioè con due giocatori aventi lo stesso obiettivo ma in conflitto l'uno con l'altro, caratterizzati da un numero finito di stati e di azioni, e in cui la somma dei payoffs dei due giocatori ad ogni fase di gioco è zero. Questo significa che il guadagno del primo giocatore è sempre uguale alla perdita del secondo giocatore. Questa tipologia di giochi rientra dunque tra i cosiddetti **giochi a somma zero**. Una condizione sufficiente affinchè un gioco a somma zero abbia un valore v è che esista una strategia per il primo giocatore, detta ottimale, che garantisce che il proprio payoff atteso non sia minore di v qualunque strategia segua il secondo giocatore, e al contempo esista una strategia per il secondo giocatore che garantisce che il payoff atteso del primo giocatore, qualunque strategia questo segua, non superi v. Shapley dimostrò in [9] che i giochi stocastici competitivi ammettono un **valore attualizzato** rispetto ad un certo fattore di sconto: questo rappresenta quanto vale il gioco, per i giocatori stessi, quando i payoffs futuri sono scontati rispetto ad un tasso positivo costante. Il modello di Shapley è equivalente ad uno in cui i giocatori attualizzano i propri payoffs futuri rispetto ad un fattore di sconto che dipende dallo stato corrente e dalle azioni dei giocatori stessi. I modelli dei cosiddetti **giochi stocastici attualizzati** sono spesso utilizzati in campo economico e in tal caso il fattore di sconto ha una chiara interpretazione. Inoltre, dato che i parametri che definiscono il gioco sono indipendenti dal tempo, la situazione che i giocatori affrontano oggi se il gioco è in un certo stato, è la stessa che affronteranno domani se il gioco sarà in quello stesso stato. Nel 1982, Mertens e Neyman in [2] e [3] provarono che i giochi stocastici competitivi ammettono un **valore**, che è proprio uguale al limite dei valori attualizzati quando il fattore di sconto tende a zero. Questo rappresenta il valore del gioco per i giocatori quando questi sono sufficientemente pazienti. Nel secondo capitolo sono presentati i risultati di Luc Attia e Miquel Oliu-Barton, pubblicati nel 2019 in [1], in merito a una formula per il valore di un gioco stocastico competitivo. Trovare una formula che fosse trattabile dal punto di vista computazionale è stato per circa 40 anni uno dei principali problemi aperti in questo ambito. Il risultato si basa sulla caratterizzazione dei valori attualizzati che si ottiene riducendo un gioco stocastico attualizzato con un numero finito n di stati, a n matrici di gioco, una per ogni stato iniziale possibile.

La teoria dei giochi stocastici e le sue applicazioni sono oggetto di studio di diverse discipline scientifiche, tra cui economia, biologia e computer science. Inoltre gli strumenti matematici utilizzati e sviluppati nello studio dei giochi stocastici, vengono sfruttati da matematici e informatici in molti altri campi. Sebbene la comprensione delle situazioni dinamiche sia migliorata notevolmente grazie ai lavori di Shapley, le domande a cui sappiamo rispondere sono ancora molto limitate e i modelli analizzati ancora molto stilizzati. Pertanto sono necessari nuovi strumenti che permettano di analizzare modelli più aderenti alla realtà e conseguentemente di fare previsioni più accurate. Questa è la sfida per i prossimi anni.

Indice

Capitolo 1

Preliminari

I giochi stocastici procedono per fasi. Ad ogni fase il gioco è in uno stato noto, preso da un insieme di stati, e ogni giocatore sceglie un'azione da un insieme di azioni possibili. Lo stato attuale e le scelte prese dai giocatori determinano il *payoff* della fase per ogni giocatore e la distribuzione di probabilità che caratterizza gli stati della nuova fase. La complessità dei giochi stocastici risiede nel fatto che le scelte prese dai giocatori hanno due effetti a volte anche contraddittori. Queste infatti, insieme allo stato attuale, determinano in primo luogo il payoff immediato che viene ricevuto da ogni giocatore e, in secondo luogo, influenzano la scelta del nuovo stato, che a sua volta determina poi i possibili *payoffs* futuri. In particolare quando un giocatore sceglie le proprie azioni deve bilanciare il voler ottenere grandi payoffs nel presente e il provare a raggiungere stati che assicurano grandi payoffs nel futuro. La decisione spesso può essere difficile. Sebbene questa dicotomia sia presente anche nel caso di un solo giocatore, la presenza di altri giocatori rende l'analisi della situazione ben più complicata.

D'ora in poi verranno utilizzate le seguenti notazioni: per ogni insieme finito E denotiamo l'insieme delle probabilità su $(E, \mathcal{P}(E))$, dove $\mathcal{P}(E)$ indica l'insieme delle parti di E, con

$$\Delta(E) := \left\{ P : E \to [0,1] \ \text{ t.c. } \sum_{e \in E} P(e) = 1 \right\}$$

e la cardinalità dell'insieme E con $|E|$.

1.1 Giochi a somma zero a due giocatori

Analizziamo il caso semplice di un gioco a somma zero a due giocatori che si svolge in una sola fase.

Definizione 1. *Un gioco* ***a somma zero a due giocatori*** *è descritto da una tripletta* (S, T, ρ) *in cui* S *e* T *sono gli insiemi delle strategie possibili rispettivamente per il primo e per il secondo giocatore e* $\rho : S \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ *è una funzione di payoff. Indipendentemente e simultaneamente il primo giocatore sceglie* $s \in S$ *e il secondo* $t \in T$*; il primo giocatore riceve* $\rho(s,t)$ *e il secondo* $-\rho(s,t)$*.*
Questo gioco ha un ***valore*** *quando*

$$\sup_{s\in S}\inf_{t\in T}\rho(s,t) = \inf_{t\in T}\sup_{s\in S}\rho(s,t).$$

In tal caso denotiamo questa quantità $v = v(\rho)$*.*

Osservazione 1. *In questa tipologia di giochi il guadagno del primo giocatore è sempre uguale alla perdita del secondo.*

D'ora in poi faremo riferimento al caso di giochi a somma zero a due giocatori utilizzando l'espressione *giochi a somma zero.*

Definizione 2. *Sia* (S, T, ρ) *un gioco a somma zero che ha un valore* v*.*
Una ***strategia ottimale per il primo giocatore*** *è un elemento*

$$s^* \in S \text{ tale che } \rho(s^*, t) \geq v \ \forall t \in T. \tag{1.1}$$

Analogamente una ***strategia ottimale per il secondo giocatore*** *è*

$$t^* \in T \text{ tale che } \rho(s, t^*) \leq v \ \forall s \in S. \tag{1.2}$$

Osservazione 2. *Se esiste* v *t.c. valgono le condizioni* (1.1) *e* (1.2) *allora* v *è un valore del gioco a somma zero* (S, T, ρ)*.*

Dimostrazione. Vogliamo mostrare che

$$v = \sup_{s \in S} \inf_{t \in T} \rho(s,t) = \inf_{t \in T} \sup_{s \in S} \rho(s,t).$$

Sfruttando le proprietà delle funzioni inf e sup e sapendo che per ipotesi valgono le condizioni (1.1) e (1.2), otteniamo la seguente catena di disuguaglianze

$$v \leq \inf_{t \in T} \rho(s^*,t) \leq \sup_{s \in S} \inf_{t \in T} \rho(s,t) \leq \sup_{s \in S} \rho(s,t^*) \leq v.$$

Questo implica che

$$v = \sup_{s \in S} \inf_{t \in T} \rho(s,t).$$

In modo analogo si ottiene che

$$v \geq \sup_{s \in S} \rho(s,t^*) \geq \inf_{t \in T} \sup_{s \in S} \rho(s,t) \geq \inf_{t \in T} \rho(s^*,t) \geq v.$$

Dunque si ha

$$v = \inf_{t \in T} \sup_{s \in S} \rho(s,t).$$

A questo punto possiamo concludere che v è un valore di (S,T,ρ). $\square$

Vediamo ora alcune proprietà del valore $v(\rho)$ di un gioco. Il seguente risultato si trova in [11] ed è una generalizzazione del Teorema Minimax di John Von Neumann presente in [6].

Teorema 1. *Sia (S,T,ρ) un gioco a somma zero. Supponiamo che S e T siano due sottoinsiemi compatti di uno spazio vettoriale topologico e ρ una funzione continua t.c. la funzione $s \longmapsto \rho(s,t)$ sia concava $\forall t \in T$ e la funzione $t \longmapsto \rho(s,t)$ sia convessa $\forall s \in S$. Allora (S,T,ρ) ha un valore ed entrambi i giocatori hanno delle strategie ottimali.*

Osservazione 3. *Questo teorema fornisce condizioni sufficienti per l'esistenza del valore $v(\rho)$ e di strategie ottimali per entrambi i giocatori di un gioco a somma zero.*

Osservazione 4. *Ovviamente vale la proprietà di monotonia. Supponiamo infatti che (S,T,ρ) e (S,T,ν) abbiano un valore e che $\rho(s,t) \leq \nu(s,t)$ $\forall (s,t) \in S \times T$. Allora $v(\rho) \leq v(\nu)$.*

Inoltre si utilizza spesso la seguente identificazione: ogni matrice $M \in \mathcal{M}^{p\times r}(\mathbb{R})$ corrisponde ad una terna (S_M, T_M, ρ_M) riconducibile ad un gioco a somma zero a una fase, dove:

$$S_M := \Delta(\{1,\ldots,p\}) = \left\{ s : \{1,\ldots,p\} \to [0,1] \text{ t.c } \sum_{a=1}^{p} s(a) = 1 \right\},$$

$$T_M := \Delta(\{1,\ldots,r\}) = \left\{ t : \{1,\ldots,r\} \to [0,1] \text{ t.c } \sum_{b=1}^{r} t(b) = 1 \right\},$$

$$\rho_M(s,t) := \sum_{a=1}^{p}\sum_{b=1}^{r} s(a)\ m_{a,b}\ t(b) \quad \forall (s,t) \in S_M \times T_M.$$

Queste matrici prendono il nome di **matrici di gioco**. Il valore della matrice M, che indichiamo con $v(M)$, è il valore del gioco a somma zero a una fase (S_M, T_M, ρ_M); tale valore esiste per il Teorema 1.

Osservazione 5. *Supponiamo che $M(\tau)$ sia una matrice con entrate che dipendono con continuità da un parametro $\tau \in \mathbb{R}$. Allora $\tau \longmapsto v(M(\tau))$ è una funzione continua.*

Dimostrazione. Per comodità useremo la notazione $\rho(s,t,M)$ per indicare la funzione $\rho_M(s,t)$. Osserviamo che tale funzione è continua in tutte le sue variabili per come è definita. Sia $M_0 \in \mathcal{M}^{p\times r}$ fissata. Vogliamo dimostrare che $v(M) := \sup_{s\in S_M} \inf_{t\in T_M} \rho(s,t,M)$ è continua in M_0. Osserviamo che S_M e T_M sono compatti rispettivamente di $\mathbb{R}^p$ e di $\mathbb{R}^r$ e quindi il sup e l'inf della definizione sono dei veri e propri max e min. Consideriamo un intorno compatto U di M_0. La funzione $\rho(s,t,M)$ è continua sul compatto $S_M \times T_M \times U$ e pertanto è anche uniformemente continua su tale insieme. Segue quindi che la funzione $\min_{t\in T_M} \rho(s,t,M)$ è continua sul compatto $S_M \times U$ nelle variabili (s,M), e quindi è anche uniformemente continua su tale insieme. Per lo stesso motivo si ha che la funzione $\max_{s\in S_M} \min_{t\in T_M} \rho(s,t,M)$ è continua su U. Quindi $v(M)$ è continua in M_0. A questo punto la tesi segue dal fatto che $v(M(\tau))$ è composizione di funzioni continue. $\square$

Inoltre si deve a Shapley e Snow [10] la seguente formula per il valore di una matrice di gioco: $\forall M$, $\exists \hat{M}$ sottomatrice quadrata di M tale che

$$v(M) = \frac{\det \hat{M}}{\varphi(\hat{M})}$$

con $\varphi(\hat{M}) := \sum_{i,j} c_{i,j}$ somma di tutti i cofattori $c_{i,j} := (-1)^{i+j} \det(\hat{M}_{i,j})$ di $\hat{M}$, dove $\hat{M}_{i,j}$ indica la matrice $\hat{M}$ a cui togliamo l'i-esima riga e la j-esima colonna, e con la convenzione che $\varphi(\hat{M}) = 1$ se $\hat{M}$ è 1×1.

1.2 Giochi stocastici a somma zero

Presentiamo il modello, introdotto da Shapley nel 1953 in [9], dei **giochi stocastici finiti competitivi**, cioè:

- con due giocatori aventi lo stesso obiettivo ma in conflitto l'uno con l'altro,
- caratterizzati da un numero finito di stati e azioni,
- in cui la somma dei payoffs dei giocatori ad ogni fase è zero.

D'ora in avanti con l'espressione *giochi stocastici* faremo sempre riferimento a questa tipologia di giochi.

Definizione 3. *Un* ***gioco stocastico*** *è descritto da una sestupla* (K, I, J, g, q, k)*:*

- $K = \{1, \dots, n\}$ *è un insieme finito di stati;*
- $I = \{1, \dots, p\}$ *e* $J = \{1, \dots, r\}$ *sono rispettivamente gli insiemi finiti delle azioni del primo e del secondo giocatore;*
- $g : K \times I \times J \to \mathbb{R}$ *è la funzione di payoff del primo giocatore;*
- $q : K \times I \times J \to \Delta(K)$ *è una funzione di transizione;*
- $k \in K$ *è lo stato iniziale.*

In ogni fase di gioco $m \geq 1$, entrambi i giocatori conoscono lo stato corrente $k_m \in K$ dove $k_1 = k$; allora indipendentemente e simultaneamente il primo giocatore sceglie un'azione $i_m \in I$ e il secondo giocatore sceglie un'azione $j_m \in J$. La coppia (i_m, j_m) è osservata da entrambi i giocatori e da questa essi possono dedurre il payoff in quella fase, cioè $g(k_m, i_m, j_m)$. Nella fase successiva $m+1$ viene generato un nuovo stato k_{m+1} secondo la distribuzione di probabilità $q(k_m, i_m, j_m)$ e il gioco procede come sopra.

Osservazione 6. *La funzione di transizione $q : K \times I \times J \to \Delta(K)$ si può identificare con una funzione a valori nello spazio delle matrici quadrate, cioè $q : I \times J \to \mathcal{M}^{n \times n}$. In questo modo possiamo associare alla funzione di transizione una matrice di dimensione $n \times n$, cioè $(q(i,j))_{l,l'} := q(l'|l,i,j)$ è la probabilità di transizione dallo stato l allo stato l' sapendo che i giocatori hanno scelto rispettivamente le azioni i e j.*

Definizione 4. *Formalmente una **strategia per il primo giocatore** è una successione di funzioni $\sigma = (\sigma_m)_{m \geq 1}$ t.c. $\sigma_m : (K \times I \times J)^m \times K \to \Delta(I)$. Analogamente, una **strategia per il secondo giocatore** è una successione di funzioni $\tau = (\tau_m)_{m \geq 1}$ t.c. $\tau_m : (K \times I \times J)^m \times K \to \Delta(J)$. Gli insiemi delle strategie per il primo e per il secondo giocatore si indicano rispettivamente Σ e T.*

Il modello di Shapley è equivalente ad uno in cui i giocatori attualizzano i propri payoffs futuri rispetto ad un fattore di sconto che dipende dallo stato attuale e dalle azioni dei giocatori stessi.

Definizione 5. *$\forall \lambda \in (0,1]$ fattore di sconto, definiamo il **gioco stocastico attualizzato** $(K, I, J, g, q, k, \lambda)$. Si tratta del gioco stocastico (K, I, J, g, q, k) in cui il primo giocatore massimizza il suo payoff totale scontato normalizzato*

$$\sum_{m \geq 1} \lambda (1-\lambda)^{m-1} g(k_m, i_m, j_m),$$

mentre il secondo giocatore minimizza tale quantità.

Questa è una caratteristica dei giochi a somma zero. Consideriamo λ e k parametri, mentre (K, I, J, g, q) fissati.

Vediamo ora che sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di estensione di Kolmogorov enunciato nell'appendice A. Osserviamo che $K \times I \times J$ è un insieme finito e quindi possiamo considerare come σ-algebra su tale insieme l'insieme delle parti $\mathcal{P}(K \times I \times J)$. In particolare consideriamo $\forall N \in \mathbb{N}$, l'insieme $A := A_1 \times \cdots \times A_N \subset (K \times I \times J)^N$ dove $A_t := \{(k_t, i_t, j_t)\}$ $\forall t = 1, \ldots, N$. Dunque il cilindro N-dimensionale su A è

$$\begin{aligned} C_{1,\ldots,N}(A) &:= \left\{x \in (K \times I \times J)^{\mathbb{N}} \text{ t.c. } (x_1, \ldots, x_N) \in A\right\} \\ &= \left\{x \in (K \times I \times J)^{\mathbb{N}} \text{ t.c. } x_1 = (k_1, i_1, j_1), \ldots, x_N = (k_N, i_N, j_N)\right\}. \end{aligned}$$

Si tratta cioè dell'insieme dei giochi in cui sono fissati i primi N stati e le prime N azioni di entrambi i giocatori. Questo discorso vale per ogni scelta dei $(k_m, i_m, j_m) \in K \times I \times J$ con $m = 1, \ldots, N$. Sia $(\sigma, \tau) \in \Sigma \times T$ una coppia di strategie con un certo stato iniziale k fissato. Per ogni N consideriamo la distribuzione $(P^k_{\sigma,\tau})_{1,\ldots,N}$ su $(K \times I \times J)^N$ definita ricorsivamente sugli insiemi A nel seguente modo:

$N = 1$:

$$(P^k_{\sigma,\tau})_1(A_1) := P(x_1 = (k_1, i_1, j_1)) = \sigma(i_1) \cdot \tau(j_1) ,$$

dove $\sigma(i_1)$ è la probabilità che il primo giocatore scelga l'azione $i_1 \in I$ seguendo la strategia σ, $\tau(j_1)$ è la probabilità che il secondo giocatore scelga l'azione $j_1 \in J$ seguendo la strategia τ. Inoltre sfruttiamo il fatto che i giocatori scelgono le loro azioni in modo simultaneo e indipendente e che l'istante iniziale $k = k_1$ è fissato.

$N = 2$:

$$\begin{aligned} (P^k_{\sigma,\tau})_{1,2}(A_1 \times A_2) &:= P(x_1 \in A_1) \cdot P(x_2 \in A_2 | x_1 \in A_1) = \\ &= (P^k_{\sigma,\tau})_1(A_1) \cdot q(k_2 | k_1, i_1, j_1) \cdot \sigma(i_2) \cdot \tau(j_2) , \end{aligned}$$

dove $q(k_2|k_1, i_1, j_1)$ è la probabilità di transizione dallo stato k_1 allo stato k_2 quando il primo e il secondo giocatore hanno scelto rispettivamente le azioni i_1 e j_1.

$N > 2$: Iterativamente si ottiene che

$$\begin{aligned}(P^k_{\sigma,\tau})_{1,\dots,N}(A_1 \times \cdots \times A_N) &:= P((x_1 \in A_1) \cap \cdots \cap (x_{N-1} \in A_{N-1}))\cdot \\ &\cdot P(x_N \in A_N|(x_1 \in A_1) \cap \cdots \cap (x_{N-1} \in A_{N-1})) = \\ = (P^k_{\sigma,\tau})_{1,\dots,N-1}&(A_1 \times \cdots \times A_{N-1}) \cdot q(k_N|k_{N-1}, i_{N-1}, j_{N-1}) \cdot \sigma(i_N) \cdot \tau(j_N) \ .\end{aligned} \tag{1.3}$$

Verifichiamo che sono soddisfatte le proprietà di consistenza i) e ii) (si veda l'appendice A).

Osservazione 7. *Dato che* $\mathbb{N}$ *è un insieme ordinato basta verificare che le* $(P^k_{\sigma,\tau})_{1,\dots,N}$ *soddisfano la seconda proprietà, che in questo caso risulta essere: per ogni* $N \in \mathbb{N}$ *e per ogni* $H := H_1 \times \cdots \times H_N \in \mathcal{P}(K \times I \times J)^N$ *dove* $H_t \in \mathcal{P}(K \times I \times J)$ $\forall t = 1, \dots, N$,

$$(P^k_{\sigma,\tau})_{1,\dots,N}(H_1 \times \cdots \times H_{N-1} \times (K \times I \times J)) = (P^k_{\sigma,\tau})_{1,\dots,N-1}(H_1 \times \cdots \times H_{N-1}).$$

Dimostrazione. Verifichiamo che vale sugli insiemi A definiti in precedenza. Dobbiamo quindi dimostrare che: $\forall A := A_1 \times \cdots \times A_N \subset (K \times I \times J)^N$ dove $N \in \mathbb{N}$, si ha

$$(P^k_{\sigma,\tau})_{1,\dots,N}(A_1 \times \cdots \times A_{N-1} \times (K \times I \times J)) = (P^k_{\sigma,\tau})_{1,\dots,N-1}(A_1 \times \cdots \times A_{N-1}).$$

Questo è sufficiente poichè un qualunque $H_t \subset (K \times I \times J)$ è unione finita di singoletti. Sfruttiamo la definizione ricorsiva (1.3) e otteniamo:

$$\begin{aligned}&(P^k_{\sigma,\tau})_{1,\dots,N}(A_1 \times \cdots \times A_{N-1} \times (K \times I \times J)) = \\ &\sum_{(k,i,j)\in(K\times I\times J)} (P^k_{\sigma,\tau})_{1,\dots,N}(A_1 \times \cdots \times A_{N-1} \times (x_N = (k,i,j))) := \\ &\sum_{(k,i,j)\in(K\times I\times J)} (P^k_{\sigma,\tau})_{1,\dots,N-1}(A_1 \times \cdots \times A_{N-1}) \cdot q(k|k_{N-1}, i_{N-1}, j_{N-1}) \cdot \sigma(i) \cdot \tau(j) = \\ &(P^k_{\sigma,\tau})_{1,\dots,N-1}(A_1 \times \cdots \times A_{N-1}) \cdot \sum_{(k,i,j)\in(K\times I\times J)} q(k|k_{N-1}, i_{N-1}, j_{N-1}) \cdot \sigma(i) \cdot \tau(j) = \\ &(P^k_{\sigma,\tau})_{1,\dots,N-1}(A_1 \times \cdots \times A_{N-1}) \cdot \sum_{k\in K} q(k|k_{N-1}, i_{N-1}, j_{N-1}) \cdot \sum_{i\in I}\sigma(i) \sum_{j\in J}\tau(j) = \\ &(P^k_{\sigma,\tau})_{1,\dots,N-1}(A_1 \times \cdots \times A_{N-1}) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1\,.\end{aligned}$$

□

Dal teorema di estensione di Kolmogorov segue quindi che ogni coppia di strategie $(\sigma, \tau) \in \Sigma \times T$ con un certo stato iniziale k, insieme alla funzione di transizione q, induce un'unica probabilità $P^k_{\sigma,\tau}$ sull'insieme dei giochi $(K \times I \times J)^{\mathbb{N}}$ con la σ-algebra generata dai cilindri $\sigma(\mathcal{C})$. Questo significa che esiste un'unica misura di probabilità $P^k_{\sigma,\tau}$ su $\left((K \times I \times J)^{\mathbb{N}}, \sigma(\mathcal{C})\right)$ tale che per ogni $N \in \mathbb{N}$ e per ogni $H \in \mathcal{P}(K \times I \times J)^N$ vale

$$P^k_{\sigma,\tau}(C_{1,\ldots,N}(H)) = (P^k_{\sigma,\tau})_{1,\ldots,N}(H).$$

Un elemento dello spazio di probabilità $\left((K \times I \times J)^{\mathbb{N}}, \sigma(\mathcal{C})\right)$ è una traiettoria di tutto il gioco, cioè $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots)$ dove $\omega_m = (k_m, i_m, j_m)$. Siano quindi $\mathbf{i}_m(\omega) := i_m$ e $\mathbf{j}_m(\omega) := j_m$ le variabili aleatorie che rappresentano le azioni rispettivamente del primo e del secondo giocatore alla fase di gioco m e sia $\mathbf{k}_m(\omega) := k_m$ la variabile aleatoria che rappresenta lo stato della m-esima fase. Dunque ad ogni coppia di strategie $(\sigma, \tau) \in \Sigma \times T$ corrisponde un unico *payoff atteso* $\gamma^k_\lambda(\sigma, \tau)$ per il gioco attualizzato $(K, I, J, g, q, k, \lambda)$:

$$\gamma^k_\lambda(\sigma, \tau) := \mathbb{E}^k_{\sigma,\tau}\left[\sum_{m \geq 1} \lambda (1-\lambda)^{m-1} g(\mathbf{k}_m, \mathbf{i}_m, \mathbf{j}_m)\right] \tag{1.4}$$

dove il valore atteso è fatto rispetto alla misura di probabilità $P^k_{\sigma,\tau}$.

Osservazione 8. *Il ruolo del parametro λ nella definizione di $\gamma^k_\lambda(\sigma, \tau)$ è cruciale per avere una serie convergente.*

1.3 Strategie stazionarie

Definizione 6. *Una **strategia stazionaria** è una strategia che dipende solo dallo stato corrente del gioco. Così $(x_m)_{m \geq 1}$ t.c. $x_m = x : K \to \Delta(I)$ è una strategia stazionaria per il primo giocatore mentre $(y_m)_{m \geq 1}$ t.c. $y_m = y : K \to \Delta(J)$ è una strategia stazionaria per il secondo giocatore. Gli insiemi delle strategie stazionarie per il primo e per il secondo giocatore si identificano rispettivamente con $\Delta(I)^n$ e $\Delta(J)^n$.*

Definizione 7. *Una **strategia stazionaria pura** è una strategia stazionaria deterministica. Dunque* $(x_m)_{m\geq 1}$ *t.c.* $x_m = x : K \to I$ *è una strategia stazionaria pura per il primo giocatore mentre* $(y_m)_{m\geq 1}$ *t.c.* $y_m = y : K \to J$ *è una strategia stazionaria pura per il secondo giocatore. Gli insiemi delle strategie stazionarie pure per il primo e per il secondo giocatore si identificano rispettivamente con* I^n *e* J^n*.*

Supponiamo che entrambi i giocatori usino strategie stazionarie nel gioco stocastico attualizzato $(K, I, J, g, q, k, \lambda)$ per un certo $\lambda \in (0, 1]$. Siano quindi $x \in \Delta(I)^n$ e $y \in \Delta(J)^n$ tali strategie. La legge delle variabili aleatorie $\mathbf{i}_m$ e $\mathbf{j}_m$ si ottiene condizionando rispetto allo stato. Questo significa che se $\mathbf{k}_m = l$ è lo stato iniziale della fase di gioco m, allora $(\mathbf{i}_m|\mathbf{k}_m = l)$ ha distribuzione x_l su I e $(\mathbf{j}_m|\mathbf{k}_m = l)$ ha distribuzione y_l su J. Indichiamo con $q(l'|l, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ la variabile aleatoria che rappresenta la transizione da l a l'. Definiamo $Q(x, y) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathbf{g}(x, y) \in \mathbb{R}^n$ indicando con $Q_{l,l'}(x, y)$ l'elemento di posto (l, l') della matrice $Q(x, y)$ e con $\mathbf{g}_l(x, y)$ la componente l-esima del vettore $\mathbf{g}(x, y)$. Si ha che $Q_{l,l'}(x, y)$ è il valore atteso condizionato allo stato $\mathbf{k}_m = l$ della probabilità di transizione da l a l' mentre $\mathbf{g}_l(x, y)$ è il valore atteso del payoff condizionato allo stato $\mathbf{k}_m = l$ e dipende solo da uno stato l poichè non si considera la transizione ad un nuovo stato. Formalmente, per ogni $l, l' \in \{1, \ldots, n\}$ si ha

$$Q_{l,l'}(x, y) := \mathbb{E}_{x,y}\left[\, q\left(l'|\mathbf{k}_m, \mathbf{i}_m, \mathbf{j}_m\right) \mid \mathbf{k}_m = l\,\right] = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_l(i)\, y_l(j)\, q\left(l'|l, i, j\right), \tag{1.5}$$

$$\mathbf{g}_l(x, y) := \mathbb{E}_{x,y}\left[\, g(\mathbf{k}_m, \mathbf{i}_m, \mathbf{j}_m) \mid \mathbf{k}_m = l\,\right] = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_l(i)\, y_l(j)\, g\left(l, i, j\right). \tag{1.6}$$

Osservazione 9. *Condizionatamente a* $\mathbf{k}_m$*, per costruzione* $\mathbf{i}_m$ *e* $\mathbf{j}_m$ *sono indipendenti; questo spiega perchè in* (1.5) *e* (1.6) *è presente il prodotto delle marginali e non la distribuzione congiunta.*

Osservazione 10. $Q(x, y)$ *è una matrice stocastica di transizione infatti tutti i coefficienti sono compresi tra* 0 *e* 1 *e per ogni* $l = 1, \ldots, n$ *si ha* $\sum_{l'=1}^{n} Q_{l,l'}(x, y) = 1$*.*

Proposizione 1. *Sia* $\gamma_\lambda(x,y) = (\gamma^1_\lambda(x,y), \dots, \gamma^n_\lambda(x,y)) \in \mathbb{R}^n$ *il vettore dei payoffs attesi al variare di* $k = 1, \dots, n$*, allora* $Q(x,y)$*,* $\mathbf{g}(x,y)$ *e* $\gamma_\lambda(x,y)$ *soddisfano le seguenti relazioni:*

$$\gamma_\lambda(x,y) = \sum_{m\geq 1} \lambda(1-\lambda)^{m-1} Q^{m-1}(x,y)\,\mathbf{g}(x,y) = \lambda\mathbf{g}(x,y) + (1-\lambda)\,Q(x,y)\,\gamma_\lambda(x,y).$$

Dimostrazione. Si ha che

$$\begin{aligned}
&\gamma_\lambda(x,y) = (\gamma^1_\lambda(x,y), \dots, \gamma^n_\lambda(x,y)) := \\
&\left(\mathbb{E}^1_{x,y}\left[\sum_{m\geq 1} \lambda(1-\lambda)^{m-1} g(\mathbf{k}_m, \mathbf{i}_m, \mathbf{j}_m)\right], \dots, \mathbb{E}^n_{x,y}\left[\sum_{m\geq 1} \lambda(1-\lambda)^{m-1} g(\mathbf{k}_m, \mathbf{i}_m, \mathbf{j}_m)\right]\right) = \\
&\qquad = \sum_{m\geq 1} \lambda(1-\lambda)^{m-1} \left(\mathbb{E}^1_{x,y}[g(\mathbf{k}_m, \mathbf{i}_m, \mathbf{j}_m)], \dots, \mathbb{E}^n_{x,y}[g(\mathbf{k}_m, \mathbf{i}_m, \mathbf{j}_m)]\right).
\end{aligned}$$

Dobbiamo quindi mostrare che per ogni $m \geq 1$ si ha

$$\left(\mathbb{E}^1_{x,y}[g(\mathbf{k}_m, \mathbf{i}_m, \mathbf{j}_m)], \dots, \mathbb{E}^n_{x,y}[g(\mathbf{k}_m, \mathbf{i}_m, \mathbf{j}_m)]\right) = Q^{m-1}(x,y)\,\mathbf{g}(x,y).$$

Se $m = 1$ è banalmente vero. Se $m = 2$ si ha: per ogni $l = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^l_{x,y}[g(\mathbf{k}_2, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)] = \mathbb{E}^l_{x,y}\left[g(\mathbf{k}_2, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) \cdot \sum_{l'=1}^{n} \mathbf{1}_{(\mathbf{k}_2 = l')}\right] = \\
&\qquad \sum_{l'=1}^{n} \mathbb{E}^l_{x,y}[g(\mathbf{k}_2, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) | (\mathbf{k}_2 = l')] \cdot \mathbb{E}^l_{x,y}[q(l' | \mathbf{k}_1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) | (\mathbf{k}_1 = l)] = \\
&\qquad\qquad \sum_{l'=1}^{n} \mathbf{g}_{l'}(x,y) \cdot Q_{l,l'}(x,y) = Q_l(x,y) \cdot \mathbf{g}(x,y)
\end{aligned}$$

dove $Q_l(x,y)$ indica la l-esima riga della matrice $Q(x,y)$. Vediamo cosa accade se

$m > 2$: per ogni $l = 1, \dots, n$,

$$\mathbb{E}^l_{x,y}\left[g(\mathbf{k}_m, \mathbf{i}_m, \mathbf{j}_m)\right] = \mathbb{E}^l_{x,y}\left[g(\mathbf{k}_m, \mathbf{i}_m, \mathbf{j}_m) \cdot \sum_{l^{(1)},\dots,l^{(m-1)}=1}^{n} \mathbf{1}_{(\mathbf{k}_m = l^{(m-1)})\cap\dots\cap(\mathbf{k}_2 = l^{(1)})}\right] =$$

$$\sum_{l^{(1)},\dots,l^{(m-1)}=1}^{n} \mathbb{E}^l_{x,y}\left[g(\mathbf{k}_m, \mathbf{i}_m, \mathbf{j}_m)|(\mathbf{k}_m = l^{(m-1)}) \cap \dots \cap (\mathbf{k}_2 = l^{(1)})\right] \cdot$$

$$\cdot \mathbb{E}^l_{x,y}\left[q(l^{(1)}|\mathbf{k}_1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)|(\mathbf{k}_1 = l)\right] =$$

$$\sum_{l^{(1)}=1}^{n} Q_{l,l^{(1)}}(x, y) \cdot \sum_{l^{(2)},\dots,l^{(m-1)}=1}^{n} \mathbb{E}^l_{x,y}\left[g(\mathbf{k}_m, \mathbf{i}_m, \mathbf{j}_m)|(\mathbf{k}_m = l^{(m-1)}) \cap \dots \cap (\mathbf{k}_3 = l^{(2)})\right] \cdot$$

$$\cdot Q_{l^{(1)},l^{(2)}}(x, y).$$

A questo punto possiamo cambiare gli indici e otteniamo così che

$$\sum_{l^{(1)}=1}^{n} Q_{l,l^{(1)}}(x, y) \cdot$$

$$\cdot \sum_{l^{(1)},\dots,l^{(m-2)}=1}^{n} \mathbb{E}^l_{x,y}\left[g(\mathbf{k}_m, \mathbf{i}_m, \mathbf{j}_m)|(\mathbf{k}_m = l^{(m-2)}) \cap \dots \cap (\mathbf{k}_3 = l^{(1)})\right] \cdot Q_{l,l^{(1)}}(x, y) =$$

$$\sum_{l^{(1)}=1}^{n} (Q_{l,l^{(1)}}(x, y))^2 \cdot \sum_{l^{(2)},\dots,l^{(m-2)}=1}^{n} \mathbb{E}^l_{x,y}\left[g(\mathbf{k}_m, \mathbf{i}_m, \mathbf{j}_m)|(\mathbf{k}_m = l^{(m-2)}) \cap \dots \cap (\mathbf{k}_3 = l^{(1)})\right].$$

Procedendo in questo modo arriviamo a

$$\sum_{l^{(1)}=1}^{n} (Q_{l,l^{(1)}}(x, y))^{m-2} \cdot \mathbb{E}^l_{x,y}\left[g(\mathbf{k}_m, \mathbf{i}_m, \mathbf{j}_m)|(\mathbf{k}_m = l^{(1)})\right] \cdot Q_{l,l^{(1)}}(x, y) =$$

$$\sum_{l^{(1)}=1}^{n} (Q_{l,l^{(1)}}(x, y))^{m-1} \cdot \mathbf{g}_{l^{(1)}}(x, y) = (Q_l(x, y))^{m-1} \cdot \mathbf{g}(x, y).$$

Abbiamo dunque dimostrato la prima uguaglianza. Mostriamo ora che vale anche la seconda.

$$\gamma_\lambda\left(x,y\right)=\sum_{m\geq 1}\lambda\left(1-\lambda\right)^{m-1}Q^{m-1}\left(x,y\right)\mathbf{g}\left(x,y\right)=$$
$$\lambda\mathbf{g}(x,y)+\sum_{m\geq 2}\lambda(1-\lambda)^{m-1}Q^{m-1}(x,y)\mathbf{g}(x,y)=$$
$$\lambda\mathbf{g}(x,y)+\sum_{m\geq 2}\lambda(1-\lambda)(1-\lambda)^{m-2}\,Q(x,y)\,Q^{m-2}(x,y)\,\mathbf{g}(x,y)=$$
$$\lambda\mathbf{g}(x,y)+(1-\lambda)Q(x,y)\sum_{m\geq 2}\lambda(1-\lambda)^{m-2}\,Q^{m-2}(x,y).$$

A questo punto cambiando l'indice nella sommatoria si ottiene proprio

$$\gamma_\lambda\left(x,y\right)=\lambda\mathbf{g}(x,y)+(1-\lambda)Q(x,y)\gamma_\lambda\left(x,y\right).$$

□

Dunque riordinando i termini si ha

$$\left(\mathrm{Id}-(1-\lambda)Q(x,y)\right)\gamma_\lambda(x,y)=\lambda\mathbf{g}(x,y)$$

dove Id è la matrice identità di dimensione n.

Proposizione 2. *Per ogni matrice stocastica P di dimensione $n\times n$ e $\forall\lambda\in(0,1]$ si ha*

$$\det\left(\mathrm{Id}-\left(1-\lambda\right)P\right)\geq\lambda^n.$$

Dimostrazione. Sia $M:=\mathrm{Id}-\left(1-\lambda\right)P$. Dato che P è una matrice stocastica la somma dei coefficienti di ogni riga è minore o uguale a 1 e quindi si ha

$$M_{l,l}-\sum_{l'\neq l}|M_{l,l'}|\geq\lambda\ ,\ \forall 1\leq l\leq n.$$

Quindi M è una matrice a dominanza diagonale stretta per righe poichè

$$M_{l,l}>\sum_{l'\neq l}|M_{l,l'}|,\ \forall 1\leq l\leq n.$$

Dunque $\forall\mu\in\mathbb{R}$ tale che $\mu<\lambda$ la matrice $M-\mu\,\mathrm{Id}$ è ancora a dominanza diagonale stretta e quindi in particolare è invertibile. Segue che tutti gli autovalori reali di

M sono maggiori o uguali a λ. Analogamente per ogni $\mu = a + ib \in \mathbb{C}$ tale che $|\mu| := \sqrt{a^2 + b^2} < \lambda$, la matrice $M - \mu \, \mathrm{Id}$ è a dominanza diagonale stretta e quindi invertibile. Segue che, se $\eta = c + id$ è un autovalore complesso di M, allora $|\eta| \geq \lambda$. Si ha quindi che

$$\lambda^2 \leq |c + id|^2 = c^2 + d^2 = (c + id)\,(c - id) = \eta\,\bar{\eta}.$$

Ricordiamo che $\det M = \prod_{l=1}^{n} \mu_l$ con $\mu_1, \ldots, \mu_n$ autovalori di M contati con molteplicità. Quindi dato che ogni autovalore reale contribuisce con un fattore maggiore o uguale a λ e ogni coppia di autovalori complessi coniugati con un fattore maggiore o uguale a λ^2 segue che $\det M \geq \lambda^n$. □

Dato che $Q(x, y)$ è una matrice stocastica di transizione, applichiamo la Proposizione 2 e concludiamo che la matrice $\mathrm{Id} - (1 - \lambda)\, Q\,(x, y)$ è invertibile. Quindi si ha

$$\gamma_\lambda\,(x, y) = \lambda \left(\mathrm{Id} - (1 - \lambda)\, Q\,(x, y)\right)^{-1} \mathbf{g}\,(x, y)\,.$$

La k-esima componente del vettore $\gamma_\lambda\,(x, y)$ per la regola di Cramer è data da

$$\gamma_\lambda^k\,(x, y) = \frac{d_\lambda^k\,(x, y)}{d_\lambda^0\,(x, y)}\ , \tag{1.7}$$

dove $d_\lambda^0\,(x, y) = \det\left(\mathrm{Id} - (1 - \lambda)\, Q\,(x, y)\right)$ e $d_\lambda^k\,(x, y)$ è il determinante della matrice $n \times n$ ottenuta sostituendo la k-esima colonna di $\mathrm{Id} - (1 - \lambda)\, Q\,(x, y)$ con $\lambda \mathbf{g}\,(x, y)$.

1.4 Valori scontati e valore

Ad ogni gioco stocastico attualizzato $(K, I, J, g, q, k, \lambda)$ corrisponde una terna $\left(\Sigma, T, \gamma_\lambda^k\right)$ che possiamo interpretare come un gioco stocastico a somma zero a una fase. Dunque definiamo il valore di un gioco stocastico attualizzato.

Definizione 8. *Il gioco stocastico attualizzato* $(K, I, J, g, q, k, \lambda)$ *ha un* ***valore*** *quando*

$$\sup_{\sigma \in \Sigma} \inf_{\tau \in T} \gamma_\lambda^k\,(\sigma, \tau) = \inf_{\tau \in T} \sup_{\sigma \in \Sigma} \gamma_\lambda^k\,(\sigma, \tau)$$

Denotiamo questo valore con v_λ^k.

Talvolta si fa riferimento a v_λ^k parlando di **valore scontato** del gioco stocastico (K, I, J, g, q, k). Shapley dimostrò in [9] che ogni gioco stocastico $(K, I, J, g, q, k, \lambda)$ ammette un valore v_λ^k e che per entrambi i giocatori esistono strategie stazionarie ottimali.

Osservazione 11. *Nel modello dei giochi stocastici il fattore di sconto λ rappresenta il grado di impazienza dei giocatori; in questo senso i payoffs futuri sono attualizzati. Alternativamente si può interpretare λ come la probabilità che il gioco termini dopo ogni fase.*

Definizione 9. *Il gioco stocastico (K, I, J, g, q, k) ha un **valore** se esiste un $v^k \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall \varepsilon > 0$ esiste una coppia di strategie ottimali $(\sigma_\varepsilon, \tau_\varepsilon) \in \Sigma \times T$ tali che per un certo $\lambda_0 \in (0, 1]$ le seguenti disuguaglianze valgono $\forall \lambda \in (0, \lambda_0)$:*

$$\gamma_\lambda^k (\sigma_\varepsilon, \tau) \geq v^k - \varepsilon \quad \forall \tau \in T,$$

$$\gamma_\lambda^k (\sigma, \tau_\varepsilon) \leq v^k + \varepsilon \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

All'inizio degli anni '80 Mertens e Neyman in [2] e [3] dimostrarono che ogni gioco stocastico (K, I, J, g, q, k) ha un valore $v^k = \lim_{\lambda \to 0^+} v_\lambda^k$.

Capitolo 2

Risultati principali

Presentiamo ora i risultati di Luc Attia e Miquel Oliu-Barton pubblicati nel 2019 in [1]. Lo scopo è quello di determinare una formula per il valore di un gioco stocastico. Il risultato si basa sulla caratterizzazione dei valori scontati che si ottiene riducendo un gioco stocastico attualizzato con n stati, a n matrici di gioco, una per ogni stato iniziale. Denotiamo con k uno stato iniziale fissato compreso tra 1 e n. Il gioco parametrizzato che corrisponde a k si ottiene semplicemente linearizzando il quoziente in (1.7) per ogni coppia di strategie stazionarie pure. In questo capitolo utilizzeremo il grassetto per riferirci a strategie stazionarie pure $\mathbf{i} \in I^n$ e $\mathbf{j} \in J^n$ rispettivamente per il primo e per il secondo giocatore.

2.1 Formula per i valori scontati

Definizione 10. *Consideriamo $k \in \{1, \dots, n\}$ stato iniziale fissato. Per ogni $z \in \mathbb{R}$, definiamo la matrice $W_\lambda^k(z)$ di dimensione $|I|^n \times |J|^n = p^n \times r^n$ come*

$$W_\lambda^k(z)[\mathbf{i}, \mathbf{j}] := d_\lambda^k(\mathbf{i}, \mathbf{j}) - z d_\lambda^0(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \qquad \forall (\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in I^n \times J^n$$

dove $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ sono strategie stazionarie pure.

Teorema 2 (Formula per i valori scontati). $\forall \lambda \in (0, 1]$ *il valore v_λ^k di un gioco stocastico attualizzato $(K, I, J, g, q, k, \lambda)$ è l'unica soluzione reale di*

$$v\left(W_\lambda^k(z)\right) = 0\,,$$

dove v è la funzione valore introdotta nella sezione 1.1.

Introduciamo la seguente notazione:

- Per ogni $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Delta(I)^n$ strategia stazionaria per il primo giocatore, denotiamo con $\hat{x} \in \Delta(I^n)$ l'elemento che corrisponde al prodotto diretto delle coordinate di x. Formalmente,

$$\hat{x}(\mathbf{i}) := \prod_{l=1}^{n} x_l(\mathbf{i}_l) \qquad \forall \mathbf{i} = (\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n) \in I^n.$$

  In modo analogo per ogni $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \Delta(J)^n$ strategia stazionaria per il secondo giocatore si definisce $\hat{y} \in \Delta(J^n)$ come

$$\hat{y}(\mathbf{j}) := \prod_{l=1}^{n} x_l(\mathbf{j}_l) \qquad \forall \mathbf{j} = (\mathbf{j}_1, \ldots, \mathbf{j}_n) \in J^n.$$

  Osservazione 12. *La mappa $x \longmapsto \hat{x}$ è 1-1 e dà l'inclusione canonica $\Delta(I)^n \subset \Delta(I^n)$. In modo analogo $y \longmapsto \hat{y}$ è 1-1 e dà l'inclusione canonica $\Delta(J)^n \subset \Delta(J^n)$.*

- Le lettere $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ si riferiscono a elementi di $\Delta(I^n)$ e $\Delta(J^n)$ rispettivamente. Esplicitamente si ha

$$\Delta(I^n) := \left\{ \mathbf{x} : I^n \to [0,1] \text{ t.c. } \sum_{\mathbf{i} \in I^n} \mathbf{x}(\mathbf{i}) = 1 \right\},$$

$$\Delta(J^n) := \left\{ \mathbf{y} : J^n \to [0,1] \text{ t.c. } \sum_{\mathbf{j} \in J^n} \mathbf{y}(\mathbf{j}) = 1 \right\}.$$

- Per ogni $z \in \mathbb{R}$ e $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Delta(I^n) \times \Delta(J^n)$ poniamo

$$\begin{aligned} W_\lambda^k(z)[\mathbf{x}, \mathbf{y}] &:= \sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in I^n \times J^n} \mathbf{x}(\mathbf{i}) W_\lambda^k(z)[\mathbf{i}, \mathbf{j}]\, \mathbf{y}(\mathbf{j}) = \\ &= \sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in I^n \times J^n} \mathbf{x}(\mathbf{i}) \left(d_\lambda^k(\mathbf{i}, \mathbf{j}) - z d_\lambda^0(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \right) \mathbf{y}(\mathbf{j}) = \\ &= \sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in I^n \times J^n} \mathbf{x}(\mathbf{i}) d_\lambda^k(\mathbf{i}, \mathbf{j})\, \mathbf{y}(\mathbf{j}) - z \sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in I^n \times J^n} \mathbf{x}(\mathbf{i}) d_\lambda^0(\mathbf{i}, \mathbf{j})\, \mathbf{y}(\mathbf{j}). \end{aligned}$$

Osservazione 13. *Notiamo che si può identificare* $W_\lambda^k(z) \in \mathcal{M}^{p^n \times r^n}$ *con la terna* $\left(\Delta(I^n), \Delta(J^n), W_\lambda^k(z)[\mathbf{x}, \mathbf{y}]\right)$ *sfruttando l'identificazione presentata alla fine della sezione 1.1. Questo significa che* $W_\lambda^k(z)[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ *corrisponde al payoff di un gioco stocastico a somma zero a una fase.*

Per dimostrare il Teorema 2 occorrono alcune proprietà che dimostriamo qui di seguito.

Osservazione 14. *Per ogni* $\lambda \in (0, 1]$ *si ha* $d_\lambda^0(\mathbf{i}, \mathbf{j}) > 0, \ \forall (\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in I^n \times J^n$.

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione 2. □

Lemma 1. *Sia* $\lambda \in (0, 1]$. *Per ogni* $(x, \mathbf{j}) \in \Delta(I)^n \times J^n$ *valgono le seguenti proprietà:*

i) $d_\lambda^0(x, \mathbf{j}) = \sum_{\mathbf{i} \in I^n} \hat{x}(\mathbf{i})\, d_\lambda^0(\mathbf{i}, \mathbf{j})$;

ii) $d_\lambda^k(x, \mathbf{j}) = \sum_{\mathbf{i} \in I^n} \hat{x}(\mathbf{i})\, d_\lambda^k(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$;

iii) $W_\lambda^k(z)[\hat{x}, \mathbf{j}] = d_\lambda^k(x, \mathbf{j}) - z d_\lambda^0(x, \mathbf{j}) \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$ *e* $\forall z \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione.

i) Fissiamo $\mathbf{j} \in J^n$ strategia stazionaria pura per il secondo giocatore. Per ogni strategia stazionaria per il primo giocatore $x \in \Delta(I)^n$, poniamo

$$M(x, \mathbf{j}) := \mathrm{Id} - (1 - \lambda)\, Q(x, \mathbf{j}),$$

così che

$$\det M(x, \mathbf{j}) = d_\lambda^0(x, \mathbf{j}).$$

In particolare, per definizione si ha

$$\det M(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = d_\lambda^0(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \quad \forall \mathbf{i} \in I^n.$$

Sappiamo che vale l'equazione (1.5) quindi la prima riga di $M(x, \mathbf{j})$ dipende da x solo attraverso x_1, ovvero la prima componente di x, e la dipendenza è lineare. Scriviamo x come combinazione convessa di strategie stazionarie $\{(i, x_2, \dots, x_n), i \in I\}$

e usiamo la multilinearità del determinante per ottenere

$$\begin{aligned}\det M(x,\mathbf{j}) &= \det\left(\sum_{i\in I} x_1(i)\, M((i,x_2,\dots,x_n),\mathbf{j})\right)\\ &= \sum_{i\in I} x_1(i)\det M((i,x_2,\dots,x_n),\mathbf{j}).\end{aligned}$$

Usando lo stesso ragionamento sulle altre righe si ottiene per induzione che

$$\det M(x,\mathbf{j}) = \sum_{\mathbf{i}_1\in I} x_1(\mathbf{i}_1)\sum_{\mathbf{i}_2\in I} x_2(\mathbf{i}_2)\cdots\sum_{\mathbf{i}_n\in I} x_n(\mathbf{i}_n)\det M((\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\dots,\mathbf{i}_n),\mathbf{j}).$$

Questo per definizione di $\hat{x}$ è uguale a $\sum_{\mathbf{i}\in I^n}\hat{x}(\mathbf{i})\det M(\mathbf{i},\mathbf{j})$.

ii) Analogo al punto precedente. Fisso $\mathbf{j}\in J^n$. Per ogni $x\in\Delta(I)^n$, indichiamo $M^k(x,\mathbf{j})$ la matrice ottenuta sostituendo la k-esima colonna di $M(x,\mathbf{j})$ con $\lambda\mathbf{g}(x,\mathbf{j})$ così che

$$\det M^k(x,\mathbf{j}) = d_\lambda^k(x,\mathbf{j}).$$

In particolare si ha

$$\forall\mathbf{i}\in I^n,\ \det M^k(\mathbf{i},\mathbf{j}) = d_\lambda^k(\mathbf{i},\mathbf{j}).$$

Per le equazioni (1.5) e (1.6) la l-esima riga di $M^k(x,\mathbf{j})$ dipende da x soltanto attraverso la componente l-esima di x, cioè x_l, e la dipendenza è lineare. Quindi come nel punto i) si ottiene

$$\det M^k(x,\mathbf{j}) = \sum_{\mathbf{i}\in I^n}\hat{x}(\mathbf{i})\det M^k(\mathbf{i},\mathbf{j}).$$

iii) Segue dalle definizioni di $W_\lambda^k(z)[\hat{x},\mathbf{j}]$ e $W_\lambda^k(z)[\mathbf{i},\mathbf{j}]$ e da i) e ii) :

$$\begin{aligned}W_\lambda^k(z)[\hat{x},\mathbf{j}] &:= \sum_{\mathbf{i}\in I^n}\hat{x}(\mathbf{i})\,W_\lambda^k(z)[\mathbf{i},\mathbf{j}] =\\ &= \sum_{\mathbf{i}\in I^n}\hat{x}(\mathbf{i})\,d_\lambda^k(\mathbf{i},\mathbf{j}) - z\sum_{\mathbf{i}\in I^n}\hat{x}(\mathbf{i})\,d_\lambda^0(\mathbf{i},\mathbf{j}) = \qquad (2.1)\\ &= d_\lambda^k(x,\mathbf{j}) - z d_\lambda^0(x,\mathbf{j}).\end{aligned}$$

□

Osservazione 15. *Osserviamo che il Lemma 1 è enunciato* $\forall\,(x,\mathbf{j})$ *per convenienza, ma vale* $\forall\,(x,y)$. *L'ultima proprietà può essere quindi enunciata come segue: per ogni* $(x,y,z) \in \Delta\,(I)^n \times \Delta\,(J)^n \times \mathbb{R}$,

$$W_\lambda^k\,(z)\,[\hat{x},\hat{y}] = d_\lambda^k\,(x,y) - z d_\lambda^0\,(x,y)\,.$$

Lemma 2. *Per ogni* $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ *con* $z_1 < z_2$ *e per ogni* $\lambda \in (0,1]$ *si ha*

$$v(W_\lambda^k\,(z_1)) - v(W_\lambda^k\,(z_2)) \geq (z_2 - z_1)\,\lambda^n.$$

In particolare $z \longmapsto v(W_\lambda^k\,(z))$ *è una funzione reale strettamente decrescente.*

Dimostrazione. Per definizione la matrice $Q(\mathbf{i},\mathbf{j})$ è una matrice stocastica di dimensione $n \times n$ per ogni $(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in I^n \times J^n$ coppia di strategie stazionarie pure. Quindi per la Proposizione 2 si ha

$$d_\lambda^0\,(\mathbf{i},\mathbf{j}) = \det\left(\mathrm{Id} - (1-\lambda)\,Q\,(\mathbf{i},\mathbf{j})\right) \geq \lambda^n \qquad \forall\,(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in I^n \times J^n.$$

Dunque dalla definizione di $W_\lambda^k\,(z)\,[\mathbf{i},\mathbf{j}]$ e da questa disuguaglianza segue che per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, $z_1 < z_2$ e $\forall\,(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in I^n \times J^n$,

$$\begin{aligned} W_\lambda^k\,(z_1)\,[\mathbf{i},\mathbf{j}] - W_\lambda^k\,(z_2)\,[\mathbf{i},\mathbf{j}] &= d_\lambda^k(\mathbf{i},\mathbf{j}) - z_1 d_\lambda^0(\mathbf{i},\mathbf{j}) - d_\lambda^k(\mathbf{i},\mathbf{j}) + z_2 d_\lambda^0(\mathbf{i},\mathbf{j}) = \\ &= (z_2 - z_1)\,d_\lambda^0\,(\mathbf{i},\mathbf{j}) \geq (z_2 - z_1)\,\lambda^n. \end{aligned}$$

Da questo segue che

$$W_\lambda^k\,(z_1)\,[\mathbf{i},\mathbf{j}] \geq W_\lambda^k\,(z_2)\,[\mathbf{i},\mathbf{j}] + (z_2 - z_1)\,\lambda^n. \tag{2.2}$$

Dato che

$$v(W_\lambda^k\,(z)) := \sup_{\mathbf{x}\in\Delta(I^n)} \inf_{\mathbf{y}\in\Delta(J^n)} W_\lambda^k\,(z)\,[\mathbf{x},\mathbf{y}] =$$
$$\sup_{\mathbf{x}\in\Delta(I^n)} \inf_{\mathbf{y}\in\Delta(J^n)} \sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j})\in I^n\times J^n} \mathbf{x}(\mathbf{i})\,W_\lambda^k\,(z)\,[\mathbf{i},\mathbf{j}]\;\mathbf{y}(\mathbf{j}),$$

allora sfruttando la (2.2) e la monotonia del valore si ha

$$
\begin{aligned}
&v(W_\lambda^k(z_1)) - v(W_\lambda^k(z_2)) \geq \\
&\sup_{\mathbf{x}\in\Delta(I^n)} \inf_{\mathbf{y}\in\Delta(J^n)} \left(\sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j})\in I^n\times J^n} \mathbf{x}(\mathbf{i}) \left(W_\lambda^k(z_2)[\mathbf{i},\mathbf{j}] + (z_2 - z_1)\lambda^n\right) \mathbf{y}(\mathbf{j}) \right) - \\
&\sup_{\mathbf{x}\in\Delta(I^n)} \inf_{\mathbf{y}\in\Delta(J^n)} \sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j})\in I^n\times J^n} \mathbf{x}(\mathbf{i})\, W_\lambda^k(z_2)[\mathbf{i},\mathbf{j}]\ \mathbf{y}(\mathbf{j}) = \\
&\sup_{\mathbf{x}\in\Delta(I^n)} \inf_{\mathbf{y}\in\Delta(J^n)} \left(\sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j})\in I^n\times J^n} \mathbf{x}(\mathbf{i}) W_\lambda^k(z_2)[\mathbf{i},\mathbf{j}]\ \mathbf{y}(\mathbf{j}) + \sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j})\in I^n\times J^n} \mathbf{x}(\mathbf{i})\,(z_2 - z_1)\lambda^n\, \mathbf{y}(\mathbf{j}) \right) - \\
&\sup_{\mathbf{x}\in\Delta(I^n)} \inf_{\mathbf{y}\in\Delta(J^n)} \sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j})\in I^n\times J^n} \mathbf{x}(\mathbf{i})\, W_\lambda^k(z_2)[\mathbf{i},\mathbf{j}]\ \mathbf{y}(\mathbf{j}) = \\
&\sup_{\mathbf{x}\in\Delta(I^n)} \inf_{\mathbf{y}\in\Delta(J^n)} \left(\sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j})\in I^n\times J^n} \mathbf{x}(\mathbf{i}) W_\lambda^k(z_2)[\mathbf{i},\mathbf{j}]\ \mathbf{y}(\mathbf{j}) + (z_2 - z_1)\lambda^n \right) - \\
&\sup_{\mathbf{x}\in\Delta(I^n)} \inf_{\mathbf{y}\in\Delta(J^n)} \sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j})\in I^n\times J^n} \mathbf{x}(\mathbf{i})\, W_\lambda^k(z_2)[\mathbf{i},\mathbf{j}]\ \mathbf{y}(\mathbf{j}) = \\
&\sup_{\mathbf{x}\in\Delta(I^n)} \inf_{\mathbf{y}\in\Delta(J^n)} \left(\sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j})\in I^n\times J^n} \mathbf{x}(\mathbf{i}) W_\lambda^k(z_2)[\mathbf{i},\mathbf{j}]\ \mathbf{y}(\mathbf{j}) \right) + (z_2 - z_1)\lambda^n - \\
&\sup_{\mathbf{x}\in\Delta(I^n)} \inf_{\mathbf{y}\in\Delta(J^n)} \sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j})\in I^n\times J^n} \mathbf{x}(\mathbf{i})\, W_\lambda^k(z_2)[\mathbf{i},\mathbf{j}]\ \mathbf{y}(\mathbf{j}) = (z_2 - z_1)\lambda^n.
\end{aligned}
$$

Quanto appena dimostrato implica che $v(W_\lambda^k(z_1)) - v(W_\lambda^k(z_2)) > 0$. Quindi la funzione $z \longmapsto v(W_\lambda^k(z))$ è strettamente decrescente. □

Lemma 3. *Per ogni $k \in \{1, \ldots, n\}$ e per ogni $\lambda \in (0, 1]$, vale $v(W_\lambda^k(v_\lambda^k)) = 0$.*

Dimostrazione. Per iii) del Lemma 1 si ha che $\forall\,(x, \mathbf{j}) \in \Delta(I)^n \times J^n$ vale la relazione

$$W_\lambda^k(v_\lambda^k)[\hat{x}, \mathbf{j}] = d_\lambda^k(x, \mathbf{j}) - v_\lambda^k d_\lambda^0(x, \mathbf{j}). \tag{2.3}$$

Sia $x^* \in \Delta(I)^n$ una strategia stazionaria ottimale per il primo giocatore nel gioco stocastico attualizzato $(K, I, J, g, q, k, \lambda)$, questa esiste per quanto dimostrato da Shapley in [9]. Sia $\hat{x}^* \in \Delta(I^n)$ il prodotto diretto delle sue coordinate. L'ottimalità di x^* implica che $\gamma_\lambda^k(x^*, \mathbf{j}) \geq v_\lambda^k$, cioè

$$\gamma_\lambda^k(x^*, \mathbf{j}) = \frac{d_\lambda^k(x^*, \mathbf{j})}{d_\lambda^0(x^*, \mathbf{j})} \geq v_\lambda^k .$$

Inoltre $Q(x^*, \mathbf{j})$ è una matrice stocastica di dimensione $n \times n$ quindi per la Proposizione 2 si ha

$$d_\lambda^0(x^*, \mathbf{j}) = \det(\mathrm{Id} - (1-\lambda) Q(x^*, \mathbf{j})) \geq \lambda^n > 0.$$

Di conseguenza la relazione precedente equivale a

$$d_\lambda^k(x^*, \mathbf{j}) - v_\lambda^k d_\lambda^0(x^*, \mathbf{j}) \geq 0. \tag{2.4}$$

Dalle equazioni (2.3) e (2.4) segue che

$$W_\lambda^k\left(v_\lambda^k\right)[\hat{x}^*, \mathbf{j}] \geq 0.$$

Inoltre per ogni matrice $M = (m_{a,b})$ di dimensione $p \times r$, corrispondente ad un gioco a somma zero (S_M, T_M, ρ_M), e $\forall s \in S_M = \Delta(\{1, \ldots, p\})$ la definizione di valore implica che

$$v(M) = \sup_{s \in S_M} \inf_{t \in T_M} \rho_M(s,t) \geq \min_{1 \leq b \leq r} \sum_{a=1}^{p} s(a)\, m_{a,b} .$$

Dunque

$$v(W_\lambda^k\left(v_\lambda^k\right)) \geq \min_{\mathbf{j} \in J^n} W_\lambda^k\left(v_\lambda^k\right)[\hat{x}^*, \mathbf{j}] \geq 0.$$

Invertendo i ruoli dei giocatori si ottiene un risultato analogo al Lemma 1 per ogni $(\mathbf{i}, y) \in I^n \times \Delta(J)^n$ e quindi $v(W_\lambda^k\left(v_\lambda^k\right)) \leq 0$. Questo dimostra la tesi. $\square$

Adesso dimostriamo il Teorema 2 relativo alla formula per i valori scontati.

Dimostrazione del Teorema 2. Per il Lemma 2 la funzione $z \longmapsto v(W_\lambda^k(z))$ è strettamente decrescente dunque l'insieme $\left\{z \in \mathbb{R},\ v(W_\lambda^k(z)) = 0\right\}$ contiene al massimo un elemento. Per il Lemma 3 tale elemento è proprio v_λ^k. $\square$

2.2 Formula per il valore di un gioco stocastico

Teorema 3 (Formula per il valore di un gioco stocastico)**.**

$$\textit{Per ogni } z \in \mathbb{R}, \quad \exists F^k(z) := \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{v(W_\lambda^k(z))}{\lambda^n} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\,.$$

Il valore v^k *del gioco stocastico* (K, I, J, g, q, k) *è l'unica soluzione di*

$$w \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} F^k(z) < 0 & \textit{se } z > w \\ F^k(z) > 0 & \textit{se } z < w \end{cases}\,. \tag{2.5}$$

Proviamo innanzitutto che $\exists F^k(z) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ $\forall z \in \mathbb{R}$ e poi che l'equazione data dal sistema ammette un'unica soluzione.

Lemma 4. *Sia* $z \in \mathbb{R}$*. Allora esistono* R *funzione razionale e* $\lambda_0 > 0$ *t.c.*

$$v(W_\lambda^k(z)) = R(\lambda) \quad \forall \lambda \in (0, \lambda_0)\,.$$

Dimostrazione. Per costruzione le entrate di $W_\lambda^k(z)$ sono polinomi in λ. Per quanto visto alla fine della sezione 1.1, sulla formula per il valore delle matrici di gioco, si ha che

$$v(W_\lambda^k(z)) = \frac{\det \widehat{W_\lambda^k(z)}}{\varphi\left(\widehat{W_\lambda^k(z)}\right)}\,,$$

con $\widehat{W_\lambda^k(z)}$ sottomatrice quadrata di $W_\lambda^k(z)$ e $\varphi\left(\widehat{W_\lambda^k(z)}\right)$ somma dei cofattori di $\widehat{W_\lambda^k(z)}$, cioè la somma dei $c_{ij} := (-1)^{i+j} \det\left(W_\lambda^k(z)\right)_{ij}$ dove $\left(W_\lambda^k(z)\right)_{ij}$ è la matrice ottenuta da $W_\lambda^k(z)$ togliendo la i-esima riga e la j-esima colonna. Per convenzione $\varphi\left(\widehat{W_\lambda^k(z)}\right) = 1$ se $\widehat{W_\lambda^k(z)}$ è 1×1. Quindi

$$\forall \lambda \in (0, 1]\,,\ \exists R \text{ t.c. } v(W_\lambda^k(z)) = R(\lambda)\,.$$

Poichè la scelta di una sottomatrice quadrata varia al variare di λ, allora la funzione razionale R corrispondente può variare. Il numero di possibili sottomatrici quadrate di $W_\lambda^k(z)$ è finito, quindi anche il numero di possibili funzioni razionali $R(\lambda)$ che soddisfano questa uguaglianza è finito. Di conseguenza esiste un insieme finito $E = \{R_1, \dots, R_L\}$ tale che

$$\forall \lambda \in (0, 1]\,,\ \exists R \in E \text{ t.c. } v(W_\lambda^k(z)) = R(\lambda)\,.$$

Quindi $\forall\lambda$ il punto $\left(\lambda\,,\,v(W_\lambda^k(z))\right)$ appartiene all'unione dei grafici delle funzioni $R_1,\ldots,R_L$. Sappiamo che la funzione $\lambda\longmapsto v(W_\lambda^k(z))$ è continua in $(0,1]$. Segue quindi che, siccome λ varia nell'intervallo $(0,1]$, la curva $\lambda\longmapsto\left(\lambda\,,\,v(W_\lambda^k(z))\right)$ può saltare dal grafico di R a quello di R', con $R,R'\in E$, soltanto nei punti dove questi si intersecano. Inoltre prese due funzioni razionali, queste o sono congruenti oppure si intersecano un numero finito di volte. Dunque $\exists\lambda_0$ tale che $\forall R,R'\in E$

$$R(\lambda)=R'(\lambda)\ \ \forall\lambda\in(0,\lambda_0)\qquad\text{oppure}\qquad R(\lambda)\neq R'(\lambda)\ \ \forall\lambda\in(0,\lambda_0)\,.$$

In particolare $\exists R\in E$ tale che $v(W_\lambda^k(z))=R(\lambda)\ \ \forall\lambda\in(0,\lambda_0)$. □

Lemma 5. *Il sistema* (2.5) *ammette un'unica soluzione.*

Dimostrazione. Per il Lemma 4 esiste $F^k(z)=\lim_{\lambda\to0^+}\frac{v(W_\lambda^k(z))}{\lambda^n}\quad\forall z\in\mathbb{R}$. Supponiamo per assurdo che l'equazione (2.5) ammetta due soluzioni $w<w'$. Allora $\forall z\in\mathbb{R}$ con $w<z<w'$ si ha:

$$\text{se considero } w \text{ come soluzione } \Rightarrow F^k(z)<0 \text{ poichè } z>w;$$

$$\text{se considero } w' \text{ come soluzione } \Rightarrow F^k(z)>0 \text{ poichè } z<w'.$$

Siamo giunti così ad un assurdo e quindi possiamo concludere che il sistema ammette al massimo una soluzione. Dimostriamo ora che esiste sempre una soluzione per (2.5). Siano z_1,z_2 numeri reali con $z_1<z_2$. Dal Lemma 2, dividendo per λ^n e facendo tendere λ a 0^+, si ottiene

$$F^k(z_1)\geq F^k(z_2)+z_2-z_1. \tag{2.6}$$

In particolare valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} F^k(z')\geq 0 & \forall z'\leq z \quad \text{se } F^k(z)\geq 0\\ F^k(z')\leq 0 & \forall z'\geq z \quad \text{se } F^k(z)\leq 0\\ F^k(z')\neq 0 & \forall z'\neq z \quad \text{se } F^k(z)=0\end{cases}. \tag{2.7}$$

Mostriamo che F^k non è costante. Osserviamo che questo è ancora compatibile con l'equazione (2.6) nel caso in cui $F^k\equiv+\infty$ oppure $F^k\equiv-\infty$. Definiamo $C^-:=\min_{k,i,j}g(k,i,j)$ e $C^+:=\max_{k,i,j}g(k,i,j)$. Allora vale che

$$\forall\lambda\in(0,1]\ \text{si ha } C^-\leq v_\lambda^k\leq C^+.$$

Per il Lemma 2 la funzione $z \longmapsto v(W_\lambda^k(z))$ è strettamente decrescente quindi segue che

$$v(W_\lambda^k\left(C^+\right)) \leq v(W_\lambda^k\left(v_\lambda^k\right)) \leq v(W_\lambda^k\left(C^-\right)).$$

Sappiamo per il Lemma 3 che $v(W_\lambda^k\left(v_\lambda^k\right)) = 0$, dunque dividendo per λ^n e facendo il limite per $\lambda \to 0^+$ si ottiene:

$$F^k\left(C^+\right) \leq 0 \leq F^k\left(C^-\right). \tag{2.8}$$

Definiamo ricorsivamente due successioni reali $(u_m^-)_{m\geq 1}$ e $(u_m^+)_{m\geq 1}$ ponendo $u_1^- := C^-$, $u_1^+ := C^+$, e $\forall m \geq 1$

$$u_{m+1}^- := \begin{cases} \frac{1}{2}\left(u_m^- + u_m^+\right) & \text{se } F^k\left(\frac{1}{2}\left(u_m^- + u_m^+\right)\right) \geq 0 \\ u_m^- & \text{altrimenti} \end{cases},$$

$$u_{m+1}^+ := \begin{cases} \frac{1}{2}\left(u_m^- + u_m^+\right) & \text{se } F^k\left(\frac{1}{2}\left(u_m^- + u_m^+\right)\right) \leq 0 \\ u_m^+ & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Per costruzione $\forall m \geq 1$ si ha $F^k\left(u_m^-\right) \geq 0$ e $F^k\left(u_m^+\right) \leq 0$. Inoltre (2.7) e (2.8) implicano che $\forall m \geq 1$, $C^- \leq u_m^- \leq u_m^+ \leq C^+$. Da queste disuguaglianze e per come sono costruite le due successioni si ha che $(u_m^-)_{m\geq 1}$ è monotona crescente e $(u_m^+)_{m\geq 1}$ è monotona decrescente. Dunque entrambe le successioni ammettono un limite. Inoltre, per ogni $m \geq 1$, si ha

$$0 \leq u_{m+1}^+ - u_{m+1}^- \leq \frac{1}{2}\left(u_m^+ - u_m^-\right).$$

Questo implica che la differenza $u_m^+ - u_m^-$ tende a 0 e quindi che le due successioni ammettono lo stesso limite. Indichiamo tale limite con $\bar{u}$. Dunque, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists m_\varepsilon$ tale che $u_{m_\varepsilon}^- > \bar{u} - \varepsilon$ e dall'equazione (2.6) segue che

$$F^k\left(\bar{u} - \varepsilon\right) \geq F^k\left(u_{m_\varepsilon}^-\right) + u_{m_\varepsilon}^- - \left(\bar{u} - \varepsilon\right) > 0.$$

Analogamente si dimostra che $F^k\left(\bar{u} + \varepsilon\right) < 0$ $\forall \varepsilon > 0$. Infatti $\forall \varepsilon > 0$ $\exists m_\varepsilon$ tale che $u_{m_\varepsilon}^+ < \bar{u} + \varepsilon$ e dall'equazione (2.6) segue che

$$F^k\left(\bar{u} + \varepsilon\right) \leq F^k\left(u_{m_\varepsilon}^+\right) + u_{m_\varepsilon}^+ - \left(\bar{u} + \varepsilon\right) < 0.$$

Quanto appena visto e il sistema (2.7) dimostrano che $\bar{u}$ è soluzione della equazione (2.5). Pertanto possiamo concludere che $\bar{u}$ è l'unica soluzione di (2.5). $\square$

Proviamo ora il risultato più importante, ovvero il Teorema relativo alla formula per il valore di un gioco stocastico.

Dimostrazione del Teorema 3. Sia w l'unica soluzione dell'equazione (2.5). Fissiamo $\varepsilon > 0$. Si ha quindi $F^k(w - \varepsilon) > 0$ poichè $w - \varepsilon < w$. Segue che $\exists \lambda_0 > 0$ tale che $v(W^k_\lambda(w - \varepsilon)) > 0 \quad \forall \lambda \in (0, \lambda_0)$. Per il Lemma 2 la funzione $z \longmapsto v(W^k_\lambda(z))$ è strettamente decrescente e per il Lemma 3 si ha che $v(W^k_\lambda(v^k_\lambda)) = 0$. Dunque $v^k_\lambda > w - \varepsilon \quad \forall \lambda \in (0, \lambda_0)$. L'arbitrarietà di ε implica che $\liminf_{\lambda \to 0^+} v^k_\lambda \geq w$. Invertendo i ruoli dei giocatori si ottiene in modo analogo che $\limsup_{\lambda \to 0^+} v^k_\lambda \leq w$. Quindi i valori scontati rispetto a λ convergono quando λ tende a 0^+, cioè esiste

$$\lim_{\lambda \to 0^+} v^k_\lambda = w.$$

Possiamo concludere che $w = v^k$ poichè Mertens e Neyman in [2] e [3] hanno dimostrato che

$$\lim_{\lambda \to 0^+} v^k_\lambda = v^k. \tag{2.9}$$

□

Osservazione 16. *Il Teorema 3 segue quindi dall'esistenza del valore v^k e dalla uguaglianza* (2.9) *dimostrata da Mertens e Neyman nel 1982 [3].*

Appendice A

Teorema di estensione di Kolmogorov

In questa appendice sono inseriti alcuni concetti di teoria della probabilità necessari per enunciare il Teorema di estensione di Kolmogorov presente alla fine dell'appendice stessa. Si veda [7] per maggiori dettagli.

Dato un generico insieme I denotiamo $\mathbb{R}^I := \{x : I \to \mathbb{R}\}$ l'insieme delle funzioni da I in $\mathbb{R}$. Interpretiamo $\mathbb{R}^I$ come il prodotto cartesiano di $\mathbb{R}$ con se stesso $|I|$ volte, anche se I non è finito o numerabile. Dunque $x \in \mathbb{R}^I$ può essere vista come una curva parametrizzata in $\mathbb{R}$, dove I è l'insieme dei parametri. Diciamo che $\mathbb{R}^I$ è lo spazio delle traiettorie da I in $\mathbb{R}$. In questo caso $x \in \mathbb{R}^I$ è quindi una traiettoria reale. Potrei considerare al posto di $\mathbb{R}$ anche $\mathbb{R}^d$ o un qualunque altro spazio metrico $(\mathbb{M}, \delta)$ separabile e completo. In tal caso $\mathbb{M}^I$ è lo spazio delle traiettorie $x : I \to \mathbb{M}$.

Muniamo $\mathbb{R}^I$ di una struttura di spazio misurabile introducendo una σ-algebra che generalizza il concetto di σ-algebra prodotto. Chiamiamo **cilindro** un sottoinsieme di $\mathbb{R}^I$ di cui è fissato un numero finito di componenti.

Definizione 11. *Sia $t \in I$, $H \in \mathcal{B}$, x_t la t-esima componente di x, si dice **cilindro***

unidimensionale

$$C_t\left(H\right) := \left\{x \in \mathbb{R}^I \mid x_t \in H\right\}.$$

*Siano $t_1, \ldots, t_n \in I$ distinti, $H_1, \ldots, H_n \in \mathcal{B}$, $H = H_1 \times \cdots \times H_n$, si dice **cilindro finito-dimensionale***

$$C_{t_1,\ldots,t_n}\left(H\right) := \left\{x \in \mathbb{R}^I \mid \left(x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}\right) \in H\right\} = \bigcap_{i=1}^{n} C_{t_i}\left(H\right).$$

*Indichiamo con $\mathcal{C}$ la famiglia dei cilindri e con $\mathcal{B}^I = \sigma\left(\mathcal{C}\right)$ la **σ-algebra generata dai cilindri**.*

Nel caso generale di uno spazio metrico $(\mathbb{M}, \delta)$ separabile e completo, B_δ è la σ-algebra di Borel su $(\mathbb{M}, \delta)$ e $\mathcal{B}^I_\delta$ è la σ-algebra generata dai cilindri finito-dimensionali

$$C_{t_1,\ldots,t_n}(H) := \left\{x \in \mathbb{M}^I \text{ t.c. } \left(x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}\right) \in H\right\},$$

dove $t_1, \ldots, t_n \in I$ e $H = H_1 \times \cdots \times H_n$ con $H_1, \ldots, H_n \in B_\delta$.

Abbiamo introdotto $\mathcal{B}^I$ al fine di dare la seguente definizione.

Definizione 12. *Un **processo stocastico reale** $X = (X_t)_{t\in I}$ sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ è una variabile aleatoria a valori nello spazio delle traiettorie $(\mathbb{R}^I, \mathcal{B}^I)$:*

$$X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^I.$$

*Se I è finito o numerabile allora diciamo che X è un **processo stocastico discreto**.*

Per ogni $t \in I$, denotiamo X_t la t-esima componente del processo stocastico X.

Osservazione 17. *Il fatto che X sia una variabile aleatoria significa che vale la condizione di misurabilità*

$$(X \in C) \in \mathcal{F} \text{ per ogni } C \in \mathcal{B}^I. \tag{A.1}$$

A sua volta, la condizione (A.1) *equivale a*

$$(X_t \in H) \in \mathcal{F} \text{ per ogni } H \in \mathcal{B},\ t \in I.$$

Diamo dunque la seguente definizione equivalente di processo stocastico reale.

Definizione 13. *Un **processo stocastico reale** è una famiglia indicizzata di variabili aleatorie reali $X = (X_t)_{t \in I}$.*

Osserviamo che, per definizione, se $\mu_{t_1,\dots,t_n}$ sono le distribuzioni finito-dimensionali di un processo stocastico $X = (X_t)_{t \in I}$, allora si ha

$$\mu_{t_1,\dots,t_n}(H_1 \times \cdots \times H_n) = P\left((X_{t_1} \in H_1) \cap \cdots \cap (X_{t_n} \in H_n)\right)$$

con $t_1, \dots, t_n \in I$ e $H_1, \dots, H_n \in \mathcal{B}$. Di conseguenza valgono le seguenti **proprietà di consistenza**: per ogni famiglia finita di indici $t_1, \dots, t_n \in I$, per ogni $H_1, \dots, H_n \in \mathcal{B}$ e per ogni γ permutazione degli indici $1, \dots, n$ si ha

i) $\mu_{t_1,\dots,t_n}(H_1 \times \cdots \times H_n) = \mu_{t_{\gamma(1)},\dots,t_{\gamma(n)}}\left(H_{\gamma(1)} \times \cdots \times H_{\gamma(n)}\right)$,

ii) $\mu_{t_1,\dots,t_n}(H_1 \times \cdots \times H_{n-1} \times \mathbb{R}) = \mu_{t_1,\dots,t_{n-1}}(H_1 \times \cdots \times H_{n-1})$.

Quindi i) e ii) sono condizioni necessarie affinchè le $\mu_{t_1,\dots,t_n}$ siano distribuzioni finito-dimensionali di un processo stocastico $(X_t)_{t \in I}$. Il Teorema di estensione di Kolmogorov mostra che sono anche condizioni sufficienti.

Osservazione 18. *La prima proprietà di consistenza è rilevante soltanto nel caso in cui I non ha un ordinamento particolare.*

Teorema 4 (Teorema di estensione di Kolmogorov)**.** *Sia I un insieme. Supponiamo che per ogni famiglia finita di indici $t_1, \dots, t_n \in I$ sia data una distribuzione $\mu_{t_1,\dots,t_n}$ su $\mathbb{R}^n$ e siano soddisfatte le condizioni i) e ii). Allora esiste un'unica misura di probabilità μ su $\left(\mathbb{R}^I, \mathcal{B}^I\right)$ tale che*

$$\mu\left(C_{t_1,\dots,t_n}(H)\right) = \mu_{t_1,\dots,t_n}(H) \ ,$$

per ogni $t_1, \dots, t_n \in I$ famiglia finita di indici e $H = H_1 \times \cdots \times H_n \in \mathcal{B}_n$.

Questo teorema si generalizza al caso di uno spazio metrico separabile e completo $(\mathbb{M}, \delta)$.

Bibliografia

[1] Attia, Luc, and Miquel Oliu-Barton. "A formula for the value of a stochastic game." Proceedings of the National Academy of Sciences 116.52 (2019): 26435-26443.

[2] Mertens, J-F., and Abraham Neyman. "Stochastic games." International Journal of Game Theory 10.2 (1981): 53-66.

[3] Mertens, J-F., and Abraham Neyman. "Stochastic games have a value." Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 79.6 (1982): 2145.

[4] Nash, John F. "Equilibrium points in n-person games." Proceedings of the national academy of sciences 36.1 (1950): 48-49.

[5] Nash, John F. "4. The Bargaining Problem." The Essential John Nash. Princeton University Press, 2016. 37-48.

[6] Neumann, J. V. "Zur theorie der gesellschaftsspiele." Mathematische annalen 100.1 (1928): 295-320.

[7] Pascucci, Andrea. "Teoria della probabilità." Materiale didattico, dispense (2021): https://sites.google.com/view/andrea-pascucci/home/teaching

[8] Shapley, Lloyd S. "A value for n-person games." Contributions to the Theory of Games, II, Annals of Mathematical Studies, eds Kuhn WH, Tucker AW (Princeton Univ Press, Princeton),(1953): Vol 28, pp 307–317

[9] Shapley, Lloyd S. "Stochastic games." Proceedings of the national academy of sciences 39.10 (1953): 1095-1100.

[10] Shapley, Lloyd S., and Snow, R. "Basic solutions of discrete games." Contributions to the Theory of Games, Vol. I, Kuhn, H., Tucker, A., Eds. Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton, NJ, (1950): vol. 24: 27-35

[11] Sion, Maurice. "On general minimax theorems." Pacific Journal of mathematics 8.1 (1958): 171-176.

[12] Solan, Eilon, and Nicolas Vieille. "Stochastic games." Proceedings of the National Academy of Sciences 112.45 (2015): 13743-13746.