

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Astronomia
Dipartimento di Fisica e Astronomia

EMISSIONE DI CORPO NERO E APPLICAZIONI ASTROFISICHE

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Daniele Dallacasa

Presentata da:
Francesca Felici

Sessione II
Anno Accademico 2020-2021

*A Matilde.
Croce e delizia della
mia quotidianità.*

Indice

1	Il corpo nero	1
1.1	Definizione	1
1.2	Il teorema di Kirchhoff	2
1.3	Le leggi empiriche	2
1.3.1	Legge di Stefan-Boltzmann	2
1.3.2	Legge dello spostamento di Wien	3
1.4	Lo spettro di corpo nero	3
1.4.1	Approccio classico di Rayleigh-Jeans	3
1.4.2	Approccio quantistico di Planck	5
1.4.3	Approssimazioni alla legge di Planck	6
2	Applicazioni Astrofisiche	8
2.1	Le stelle	8
2.2	La radiazione cosmica di fondo (CMB)	10
2.2.1	Lo spettro della CMB	11
2.2.2	L'effetto Sunyaev-Zel'dovich	13
	Bibliografia	15

Sommario

Questo elaborato si propone di descrivere il modello teorico per la radiazione termica di Corpo Nero, e di illustrarne alcune applicazioni astrofisiche. Nel primo capitolo verrà discusso il concetto teorico di Corpo Nero: partendo dal teorema di Kirchhoff, che dimostra come per questo modello si stabilisca un ben definito spettro di energia. A seguire si esporranno brevemente le leggi empiriche di Stefan-Boltzmann e Wien. Dopodiché si passerà alla determinazione dello spettro di Corpo Nero. Prima analizzando la trattazione classica proposta da Rayleigh e Jeans, e successivamente quella quantistica proposta da Planck. Quest'ultima garantisce una soluzione al problema della *catastrofe ultravioletta* prevista dal modello classico, e getta le basi per la nascita della Teoria Quantistica. Infine si dimostra come la legge ricavata da Planck soddisfi le sopracitate leggi empiriche.

Nel secondo capitolo saranno esposte le principali applicazioni astrofisiche del modello teorico di Corpo Nero. In particolare per quanto riguarda gli spettri delle stelle, e la Radiazione Cosmica di Fondo (CMB).

Capitolo 1

Il corpo nero

1.1 Definizione

Con Corpo Nero ci si riferisce ad un oggetto fisico ideale la cui superficie assorbe qualsiasi radiazione elettromagnetica incidente, senza rifletterla, e che può a sua volta emettere le radiazioni assorbite. Si immagini una cavità chiusa con pareti termalizzate alla temperatura T , perfettamente isolata dall'esterno. Si supponga di poter aprire un foro nella cavità, tale da non perturbare sensibilmente il sistema, che consenta di misurare la radiazione in equilibrio alla temperatura T . Il foro in questione, osservato dall'esterno, si comporta come un perfetto Corpo Nero. Infatti la radiazione emessa dal foro sarà la stessa di un corpo alla temperatura T , mentre il foro stesso assorbirà qualsiasi radiazione che lo colpisca. Per descrivere il comportamento di un Corpo Nero ci si avvale di una grandezza fondamentale, caratteristica dei corpi che emettono radiazione elettromagnetica, detta potere emissivo specifico (o emittanza), $M(\nu, T)$. Essa rappresenta l'energia emessa per unità di tempo, unità di superficie e per intervallo unitario di frequenza. Il potere emissivo, $M(T)$, che è l'energia totale emessa su tutte le frequenze per unità di tempo e unità di superficie, è dato da

$$M(T) = \int_0^{\infty} M(\nu, T) d\nu \quad (1.1)$$

ed è espresso in $\frac{W}{m^2}$. Definendo a questo punto $\alpha(\nu, T)$ e $r(\nu, T)$, rispettivamente la frazione di intensità assorbita e quella riflessa, avremo, per la conservazione dell'energia

$$\alpha(\nu, T) + r(\nu, T) = 1$$

In base a queste definizioni, un Corpo Nero sarà tale se, per una qualsiasi temperatura T , a tutte le frequenze vale che

$$\alpha_{bb}(\nu, T) = 1 \quad e \quad r_{bb}(\nu, T) = 0$$

Il potere emissivo di un qualsiasi corpo può essere confrontato con quello di un Corpo Nero alla stessa temperatura, definendo la sua emissività spettrale

$$\epsilon(\nu, T) = \frac{M(\nu, T)}{M_{bb}(\nu, T)} \quad (1.2)$$

poiché un Corpo Nero ha massimo potere emissivo possibile, per un corpo generico vale che

$$M(\nu, T) \leq M_{bb}(\nu, T)$$

che per l'emissività spettrale $\epsilon(\nu, T)$ implica

$$\epsilon(\nu, T) \leq \epsilon_{bb}(\nu, T) = 1$$

1.2 Il teorema di Kirchhoff

Nel 1860 il fisico tedesco Gustav Robert Georg Kirchhoff dimostrò che ad una data frequenza ν e ad una data temperatura T , il rapporto tra potere emissivo specifico $M(\nu, T)$ e la frazione di intensità assorbita $\alpha(\nu, T)$ è lo stesso per tutti i corpi. Dunque il loro rapporto definisce una funzione universale $f(\nu, T)$ di ν e di T

$$\frac{M(\nu, T)}{\alpha(\nu, T)} = f(\nu, T) \quad (1.3)$$

Alcuni corpi sono in grado di assorbire più di altri la radiazione incidente. Al limite, si può pensare ad un oggetto ideale che assorba completamente tutta la radiazione incidente, per il quale $\alpha(\nu, T) = 1$, che è proprio il Corpo Nero. Perciò è possibile scrivere

$$\frac{M(\nu, T)}{\alpha(\nu, T)} = \frac{M_{bb}(\nu, T)}{1} = f(\nu, T)$$

da cui

$$f(\nu, T) = M_{bb}(\nu, T)$$

In definitiva, per determinare la funzione universale $f(\nu, T)$ è sufficiente determinare l'emittanza di un Corpo Nero ad una certa temperatura.

1.3 Le leggi empiriche

Di seguito vengono riportate e discusse due leggi empiriche, quella di Stefan-Boltzmann e quella di Wien, ricavate da osservazioni sperimentali. Il tentativo di interpretare queste due leggi portò al passaggio dalla Fisica Classica, basata sulla meccanica newtoniana e l'elettromagnetismo, alla Meccanica Quantistica.

1.3.1 Legge di Stefan-Boltzmann

Nel 1879 il fisico austriaco Josef Stefan scoprì che il potere emissivo di un Corpo Nero è proporzionale alla quarta potenza della temperatura.

$$M_{bb}(T) = \int_0^{\infty} M(\nu, T) d\nu = \sigma_B T^4 \quad (1.4)$$

con $\sigma_B = 5,67 \cdot 10^{-5} \frac{erg}{cm^2 s K^4}$. I risultati riguardanti tale legge empirica furono inizialmente approssimativi. Questa venne infatti dimostrata teoricamente dal fisico austriaco Ludwig Boltzmann cinque anni dopo (da cui Legge di Stefan-Boltzmann).

1.3.2 Legge dello spostamento di Wien

La legge empirica dello spostamento di Wien, enunciata dal fisico tedesco Wilhelm Wien nel 1893, stabilisce che la curva dello spettro di Corpo Nero in funzione della lunghezza d'onda presenta un massimo caratteristico al variare della temperatura T .

$$\lambda_{max} \cdot T = \alpha \quad (1.5)$$

con $\alpha = 2.89 \text{ cm} \cdot K$. Come si vedrà in seguito, la legge di Wien rappresentò una conferma sperimentale del modello di Planck, in contrasto col modello di Rayleigh-Jeans che non prevede alcuna presenza di massimi nello spettro.

1.4 Lo spettro di corpo nero

I tentativi di giustificare teoricamente le leggi di Stefan-Boltzmann e di Wien sopracitate furono molteplici. In particolare verrà affrontato quello dei fisici John William Strutt Rayleigh e James Hopwood Jeans, che, basandosi sui principi della Fisica Classica, proposero una legge per il potere emissivo specifico del Corpo Nero. La formula risultante, pur essendo in accordo con i risultati sperimentali per grandi valori di λ , diverge per $\lambda \rightarrow 0$, prevedendo quindi un'enorme emissione in corrispondenza della regione ultravioletta e dei raggi X. Questo fenomeno prende il nome di *catastrofe ultravioletta*. Sarà Max Planck a trovare una soluzione con l'introduzione di una nuova ipotesi: la radiazione viene emessa sotto forma di pacchetti di Energia, detti *quanti*, che possono trasportare solo una fissata quantità di energia $\epsilon = h\nu$, dove $h = 6.63 \cdot 10^{-27} \text{ erg s}$ è la costante di Planck.

1.4.1 Approccio classico di Rayleigh-Jeans

La brillantezza $B(\nu, T)$ di Corpo Nero può essere espressa in termini della densità energetica delle onde elettromagnetiche all'interno della cavità $u(\nu, T)$ secondo la legge

$$B(\nu, T) \equiv M_{bb}(\nu, T) = \frac{c}{4\pi} u(\nu, T) \quad (1.6)$$

Per derivare la legge di Rayleigh-Jeans per lo spettro di Corpo Nero è necessario dunque calcolare la densità di energia di radiazione contenuta nella cavità di frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$

$$u(\nu, T)d\nu = \bar{\epsilon}N(\nu)d\nu$$

dove $\bar{\epsilon}$ è l'energia media degli oscillatori delle pareti della cavità, assunta di forma cubica di lato L , e $N(\nu)d\nu$ è il numero di onde stazionarie all'interno. Le onde si propagano in ogni direzione con versore di propagazione $(\cos\theta_1, \cos\theta_2, \cos\theta_3)$. Se si

prendesse in considerazione un'unica direzione, un'onda stazionaria dovrebbe avere un numero intero di mezze lunghezze d'onda pari al lato della cavità L . In tre dimensioni è necessario imporre questa condizione in tutte e tre le direzioni del cubo. Perciò un'onda stazionaria risonante ha

$$n_i = \frac{2L}{\lambda} \cos\theta_i \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

odi, da cui quadrando e sommando

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \frac{4\nu^2}{c^2} L^2$$

che rappresenta l'equazione dei punti a coordinate intere positive o nulle sulla sfera di raggio $R = \frac{2\nu L}{c}$. Il numero di onde stazionarie con frequenza compresa tra ν e $d\nu$, nel limite termodinamico ¹, approssima il volume dell'ottante positivo del guscio sferico compreso tra R e $R + dR$

$$\frac{1}{8} 4\pi R^2 dR = \frac{4\pi\nu^2}{c^3} L^3 d\nu$$

La densità dei modi di vibrazione sarà uguale al numero di onde stazionarie diviso il volume della cavità moltiplicato per 2, in quanto le onde elettromagnetiche hanno due direzioni di polarizzazione indipendenti.

$$N(\nu)d\nu = 8\pi \frac{\nu^2 d\nu}{c^3}$$

La densità energetica $u(\nu)$ si ottiene moltiplicando questo numero per il valor medio dell'energia di un oscillatore $\bar{\epsilon}$. Per calcolare quest'ultima si utilizza la procedura di media statistica con la distribuzione di Boltzmann ²

$$f(\epsilon) = C e^{-\frac{\epsilon}{kT}}$$

dove $k = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{ erg/K}$ è la costante di Boltzmann. Perciò il valor medio dell'energia degli oscillatori sarà pari a

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int_0^\infty \epsilon f(\epsilon) d\epsilon}{\int_0^\infty f(\epsilon) d\epsilon}$$

Introducendo la notazione $\beta = 1/kT$, si ottiene

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int_0^\infty \epsilon e^{-\beta\epsilon} d\epsilon}{\int_0^\infty e^{-\beta\epsilon} d\epsilon} = -\frac{d}{d\beta} \log \int_0^\infty e^{-\beta\epsilon} d\epsilon = \frac{d}{d\beta} \log \beta = \frac{1}{\beta} = kT$$

A questo punto è possibile scrivere la densità di energia come

$$u(\nu, T) d\nu = 8\pi kT \frac{\nu^2}{c^3} d\nu$$

da cui si ottiene l'espressione per la brillantezza proposta da Rayleigh e Jeans

$$B(\nu, T) = \frac{c}{4\pi} u(\nu, T) = 2kT \frac{\nu^2}{c^2} \quad (1.7)$$

Questa formula sposa molto bene i dati sperimentali ad elevate lunghezze d'onda, ma diverge per $\lambda \rightarrow 0$ dando origine alla catastrofe ultravioletta.

¹Con limite termodinamico ci si riferisce alla condizione per cui in un sistema il numero di particelle tende all'infinito.

²Questa funzione in meccanica statistica dà la probabilità che un oscillatore abbia energia compresa tra ϵ e $\epsilon + d\epsilon$.

1.4.2 Approccio quantistico di Planck

Planck ipotizzò che la radiazione potesse essere emessa dagli oscillatori delle pareti solo a pacchetti discreti che, per ogni frequenza, potevano trasportare solo una ben precisa energia $\epsilon = h\nu$. Ovvero, l'emissione a una data frequenza può solo essere del tipo

$$\epsilon_n = n\epsilon = nh\nu$$

La modifica che ciò comporta nei conti di Rayleigh e Jeans riguarda solo il calcolo del valor medio dell'energia degli oscillatori.

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n e^{-\beta\epsilon_n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\epsilon_n}} = -\frac{d}{d\beta} \log \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\epsilon_n} \\ &= -\frac{d}{d\beta} \log \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta h\nu})^n = -\frac{d}{d\beta} \log \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}}\end{aligned}$$

Ciò porta al seguente risultato

$$\bar{\epsilon} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad \rightarrow \quad u(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

da cui si ottiene lo spettro di brillantezza di Corpo Nero

$$B(\nu, T) = \frac{c}{4\pi} u(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (1.8)$$

passando alla brillantezza in funzione di λ , si ha invece

$$B(\lambda, T) = \frac{2c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad (1.9)$$

A questo punto è possibile derivare le leggi empiriche dalla legge di Planck. Integrando la 1.8 su tutte le frequenze si ottiene la legge di Stefan-Boltzmann 1.4

$$\begin{aligned}B(T) &= \int_0^{\infty} B(\nu, T) d\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu \\ &= \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} T^4 \left(\frac{\pi^4}{15}\right)\end{aligned}$$

Inserendo i valori numerici delle costanti h , k e c si ottiene il valore misurato sperimentalmente della costante di Stefan-Boltzmann

$$\sigma_B = 5.67 \cdot 10^{-5} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{K}^4}$$

Per quanto riguarda la legge di Wien 1.5, si considera la 1.9 scritta in funzione della variabile adimensionale $y = \frac{hc}{\lambda kT}$

$$B(\lambda, T) = \frac{2\pi(kT)^5}{h^4 c^3} \frac{y^5}{e^y - 1}$$

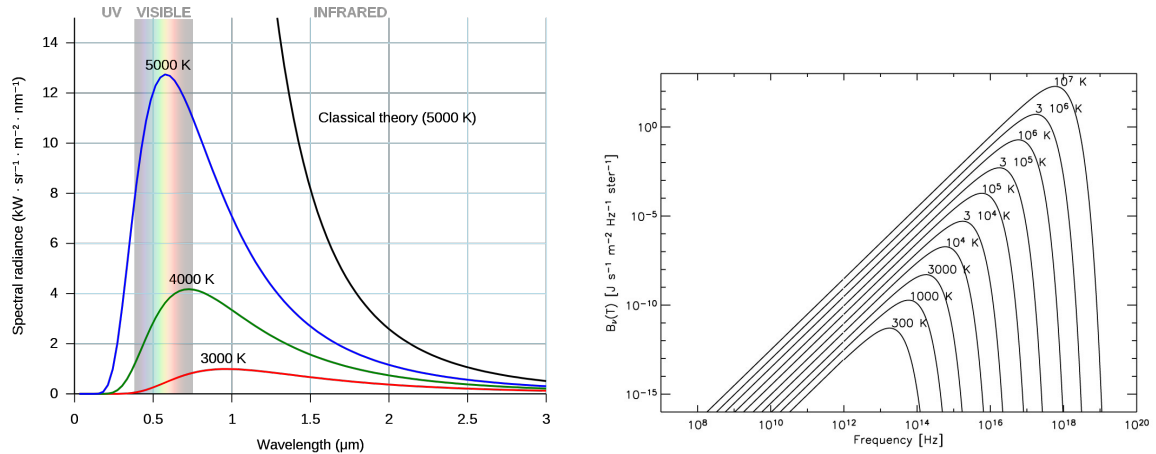


Figura 1.1: Spettro di Corpo Nero previsto dalla legge di Planck, in funzione della lunghezza d'onda a destra, e della frequenza a sinistra.

il massimo si ottiene per

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{y^5}{e^y - 1} \right) = \frac{5y^4(e^y - 1) - y^5 e^y}{(e^y - 1)^2} = 0$$

ovvero per

$$1 - e^{-y} = \frac{y}{5}$$

Risolvendo, ad esempio graficamente, l'equazione si ottiene $y = 4.97$ da cui

$$\lambda_{max} \cdot T \simeq \frac{hc}{k} \frac{1}{4.97} \simeq 2.89 \cdot 10^{-3} m K = 2.89 cm K$$

1.4.3 Approssimazioni alla legge di Planck

Ci sono due approssimazioni che si possono adottare per la funzione di Planck, una alle basse frequenze e l'altra alle alte frequenze:

- **Approssimazione di Rayleigh-Jeans:** valida per i fotoni di bassa energia. L'esponenziale nella formula di Planck assume valori molto piccoli, per cui

$$h\nu \ll kT$$

da cui si ottiene

$$B(\nu, T) \approx 2 \frac{h\nu^3}{c^2} \left(\frac{\nu^2}{c^2} \right) \quad (1.10)$$

- **Approssimazione di Wien:** valida per i fotoni di alta energia. L'esponenziale risulta così grande da poter trascurare il termine unitario.

$$h\nu \gg kT$$

da cui deriva la seguente formula approssimata

$$B(\nu, T) \approx \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}} \quad (1.11)$$

In Figura 1.2 è rappresentato il confronto tra lo spettro di Planck e le due leggi approssimate. Si osservi come le approssimazioni di Rayleigh-Jeans e Wien riproducano in modo fedele la planckiana, rispettivamente alle basse e alle alte frequenze.

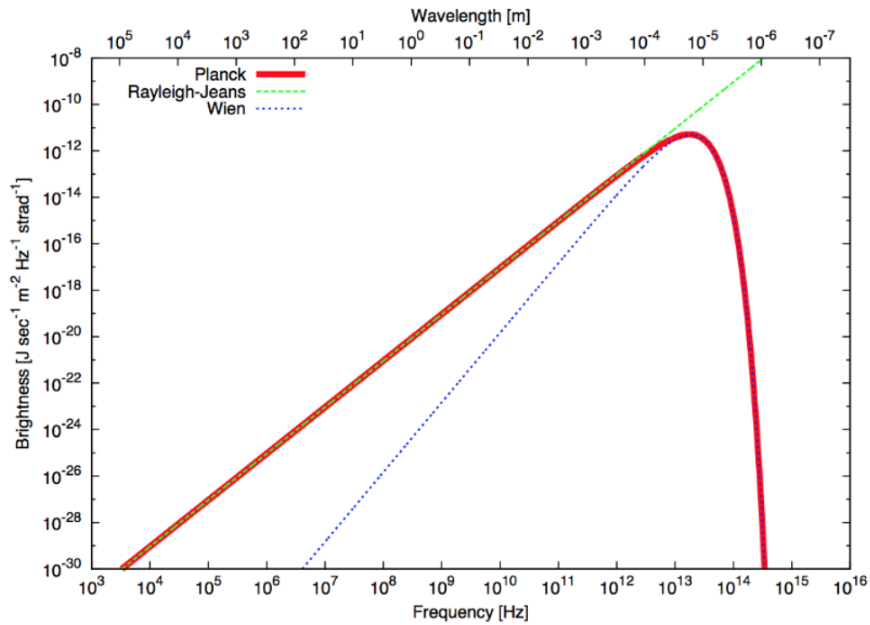


Figura 1.2: Confronto tra le curve previste da la legge di Planck (rossa), e le leggi approssimate di Rayleigh-Jeans (blu) e Wien (verde) per un Corpo Nero con temperatura di 300 K.

Capitolo 2

Applicazioni Astrofisiche

2.1 Le stelle

Le stelle possono essere approssimate a Corpi Neri, poiché le uniche onde elettromagnetiche che non assorbono sono quelle aventi lunghezza d'onda di dimensione pari o maggiore al loro diametro. I fotoni che compongono lo spettro provengono dallo strato superficiale esterno detto fotosfera, ovvero la regione in cui la stella passa dal regime otticamente spesso al regime otticamente sottile.

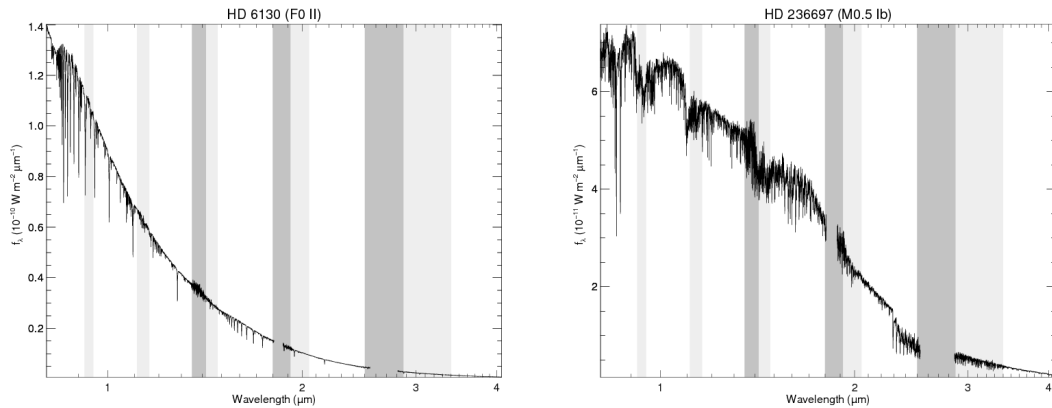


Figura 2.1: Spettri di due stelle appartenenti alla classe F0 (a sinistra) e M0(a destra). Da [7]

Dall'analisi degli spettri è possibile risalire a informazioni fondamentali sulla stella, come la temperatura, il colore e la composizione chimica. Approssimando una stella ad una sfera di raggio R , e utilizzando la legge di Stefan-Boltzmann (1.4) si ottiene una luminosità bolometrica pari a

$$L = 4\pi R^2 \sigma_B T_{eff}^4 \quad (2.1)$$

dove l'uso della temperatura efficace ³ è dettato dal fatto che le stelle non sono perfetti Corpi Neri. Dalla relazione 2.1 si comprende che stelle con stessa temperatura effettiva

³La temperatura efficace è definita come la temperatura equivalente di un Corpo Nero che ha la stessa luminosità della stella. Viene comunemente calcolata con la legge di Stefan-Boltzmann.

possono avere luminosità differenti, al variare del raggio. Partendo dalla relazione del flusso $F = \frac{L}{4\pi D^2}$ è possibile determinare il *flusso superficiale* della stella in funzione di T_{eff} come

$$F_{sup} = \sigma_B T_{eff}^4 \quad (2.2)$$

La temperatura gioca un ruolo fondamentale nella definizione dello spettro; Innanzitutto determina il picco di emissione, come previsto dalla legge di Wien (1.5). Inoltre è responsabile della formazione di righe in assorbimento dovute a transizioni elettroniche tra differenti livelli energetici degli elementi presenti nell'atmosfera. In Figura 2.1 sono riportati gli spettri di due stelle appartenenti a classi diverse, in cui si può osservare come il picco di emissione cambi a seconda del tipo di stella. Si noti inoltre la presenza di numerose righe in emissione. La presenza delle righe rappresenta la maggiore differenza degli spettri stellari dal modello teorico del Corpo Nero. Esse infatti sottraggono radiazione al continuo.

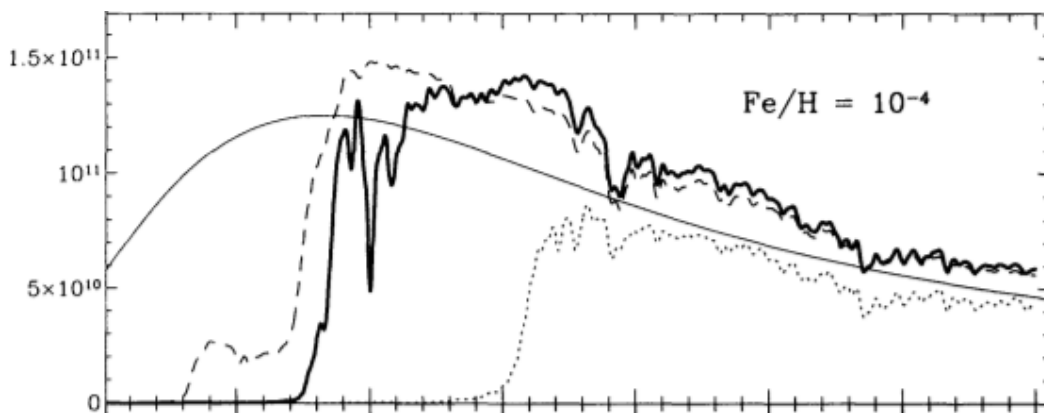


Figura 2.2: Simulazioni del fenomeno di line blanketing su una stella con abbondanza di Ferro pari a $Fe/H = 10^{-4}$. Da [9].

In particolare le righe generate dai metalli possono essere tanto fitte da generare una sensibile diminuzione dell'intensità del continuo. Questo fenomeno viene chiamato *line blanketing*, se ne riporta un esempio in Figura 2.2. A partire dalla temperatura efficace è possibile classificare le stelle in differenti classi spettrali. In particolare la classificazione di Harvard si basa su linee in assorbimento, che sono sensibili alla temperatura stellare. Si ricordano tra le righe fondamentali quelle di Balmer dell'idrogeno ($H\alpha$: [HI] $\lambda 6562.81\text{\AA}$), le linee dell'elio neutro e il doppietto H e K di calcio ionizzato ([CaII] $\lambda 3968.47\text{\AA}$, [CaII] $\lambda 3933.68$). La maggior parte delle stelle è classificata usando le lettere O, B, A, F, G, K, e M. Ulteriori notazioni sono utilizzate per le novae con la lettera Q, P per le nebulose planetarie e W per le stelle di Wolf-Rayet. Infine ci sono le classi spettrali L e T, che rappresentano le nane brune. Ogni classe spettrale è a sua volta suddivisa in sottoclassi, denotate da numeri che vanno da 0 a 9. Analizzando la radiazione solare (stella di classe G2) si può ricavare la temperatura superficiale valutando il picco dell'intensità dello spettro di emissione. Come si osserva in Figura 2.3, questo è situato all'interno del range del visibile (regione verde) a circa 5030\AA . Dalla legge dello spostamento di Wien 1.5 si ottiene

$$T_{\odot} = \frac{\alpha}{\lambda_{max}} \approx 5800K$$

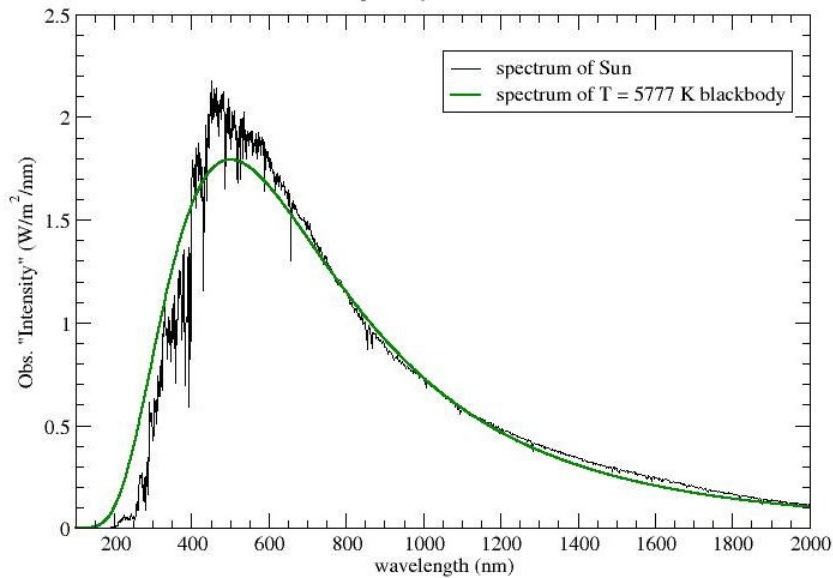


Figura 2.3: Spettro solare sovrapposto allo spettro di Corpo Nero con temperatura $T = 5777 K$.

2.2 La radiazione cosmica di fondo (CMB)

La radiazione cosmica di fondo a microonde (*Cosmic Microwave Background, CMB*) è il campo di radiazione, pressoché isotropo, che permea tutto l'universo, risalente a circa 14 miliardi di anni fa [8]. La prima osservazione della CMB avvenne per caso nel 1964, ad opera di due radio-astronomi: A. Penzias e R. Wilson. Questi osservarono un segnale isotropo e costante nel tempo, ad una lunghezza d'onda di 7.35 cm , che corrisponde alla coda dello spettro della CMB. Precedentemente a tale osservazione era già stata avanzata l'ipotesi dell'esistenza di una radiazione nelle microonde, che avrebbe costituito la testimonianza di un universo primordiale caldo, denso e opaco. L'origine della radiazione cosmica di fondo infatti, viene fatta risalire all'epoca della ricombinazione, prevista dalla teoria cosmologica del Big Bang. Con epoca della ricombinazione si fa riferimento al tempo in cui la componente barionica dell'universo passa da essere un plasma ionizzato ad un gas di atomi neutri. I principali costituenti del plasma in equilibrio erano protoni, elettroni e fotoni. In particolare per i primi 380,000 anni, i fotoni interagivano costantemente con gli elettroni liberi, non potendo perciò viaggiare su lunghe distanze. Ciò significa che l'Universo primordiale risultava completamente opaco alla radiazione. Successivamente il plasma si è raffreddato, raggiungendo una temperatura di circa 3000 Kelvin, condizione in cui gli elettroni sono liberi di combinarsi con i protoni per formare gli atomi di idrogeno[14]. Nel corso dei miliardi di anni intercorsi, l'universo si è ulteriormente espanso e raffreddato. A causa dell'espansione dello spazio, le lunghezze d'onda dei fotoni sono cresciute (*'redshift'*) e quindi la loro temperatura effettiva è scesa a soli 2,7 Kelvin, appena sopra lo zero assoluto. Questi

fotoni oggi permeano tutto l'universo (ce ne sono circa 400 in ogni centimetro cubo di spazio) e creano la radiazione di fondo, che può essere rilevato dai telescopi nel lontano infrarosso e dai radiotelescopi.

2.2.1 Lo spettro della CMB

In ogni direzione angolare si osservi, lo spettro della radiazione cosmica di fondo è estremamente vicino a quello di un Corpo Nero ad una temperatura di $T_{CMB} = 2.725 \pm 0.002 K$ [5]. Utilizzando la legge di Wien 1.5, si può calcolare dove cade il picco di emissione. Questo si trova nella zona delle microonde alla frequenza $\nu_{max} = 160.2 GHz$, corrispondenti ad una lunghezza d'onda $\lambda_{max} = 1.9 mm$.

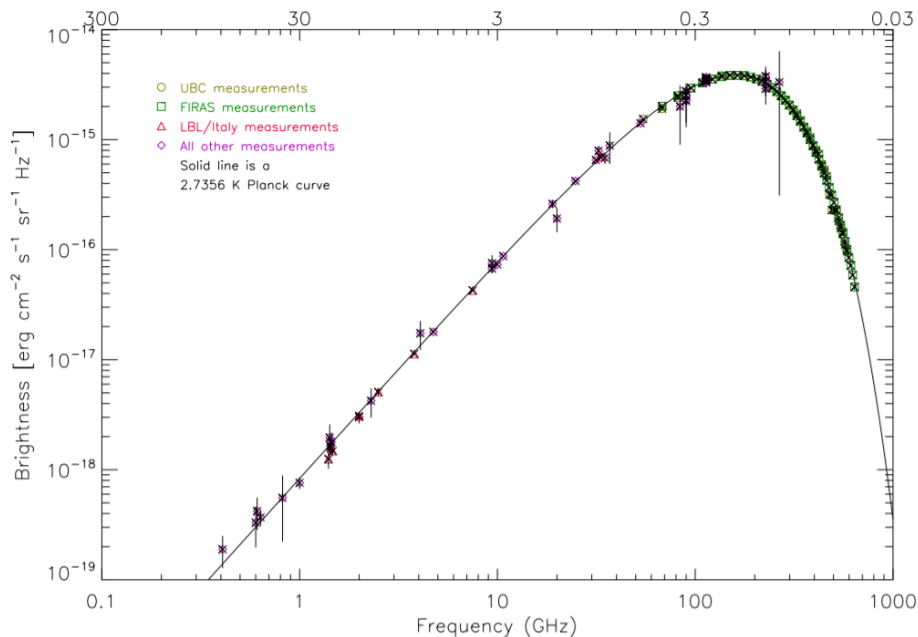


Figura 2.4: Spettro di Corpo Nero della radiazione cosmica di fondo sovrapposto alla curva planckiana a temperatura $T = 2.7356K$ (linea continua). Da [13].

Nel 1989 venne lanciato in orbita il COsmic Background Explorer (COBE) allo scopo di misurare con precisione lo spettro della CMB su un ampio valore di frequenze. I tre strumenti posti a bordo permisero di dedurre che in qualsiasi direzione angolare si osservasse, lo spettro della CMB è estremamente vicino a quello di un Corpo Nero. FIRAS, ⁴ che avrebbe potuto individuare fluttuazioni dall'anadamento di Corpo Nero dell'ordine di 10^4 , non trovò alcuna deviazione. Venne tuttavia riscontrata una distorsione di dipolo: nonostante in ogni punto del cielo la radiazione avesse uno spettro di Corpo Nero, per metà era leggermente spostato a temperature maggiori ('*blueshift*') e per metà verso temperature minori ('*redshift*'). Questa anisotropia viene definita non intrinseca, bensì derivante dal moto di COBE rispetto al sistema di riferimento in cui la CMB è isotropa. Infatti un osservatore in moto con velocità v rispetto alla radiazione,

⁴Far-InfraRed Absolute Spectrophotometer. Strumento utilizzato per mappare la CMB nel range compreso fra 0.1 mm e 10 mm.

a causa dell'effetto Doppler, vede una variazione della temperatura pari a

$$\frac{\Delta T_{CMB}}{T_{CMB}} = \gamma \frac{v \cos \theta}{c} \quad (2.3)$$

dove γ è il fattore di Lorentz e θ è l'angolo compreso fra la linea di vista e la direzione del moto. Come si osserva in Figura 2.5, una volta sottratta l'anisotropia di dipolo, le fluttuazioni di temperatura sono minime. Infatti considerando la temperatura media della CMB come $\langle T_{CMB} \rangle = 2.725K$ e la temperatura in un generico punto del cielo $T(\theta, \phi)$, è possibile misurare le fluttuazioni adimensionali di temperatura come

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \frac{T(\theta, \phi) - \langle T_{CMB} \rangle}{\langle T_{CMB} \rangle} \quad \longrightarrow \quad \left(\left\langle \left(\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) \right)^2 \right\rangle \right)^{1/2} \simeq 1.1 \cdot 10^{-5} \quad (2.4)$$

Dalla 2.4 si deduce che la radiazione è notevolmente vicina ad essere isotropa. In Figura 2.5, nella prima immagine si osservano le fluttuazioni della temperatura dovute all'anisotropia di dipolo, mentre in quella sottostante si osserva la radiazione una volta sottratto l'effetto della distorsione di dipolo.

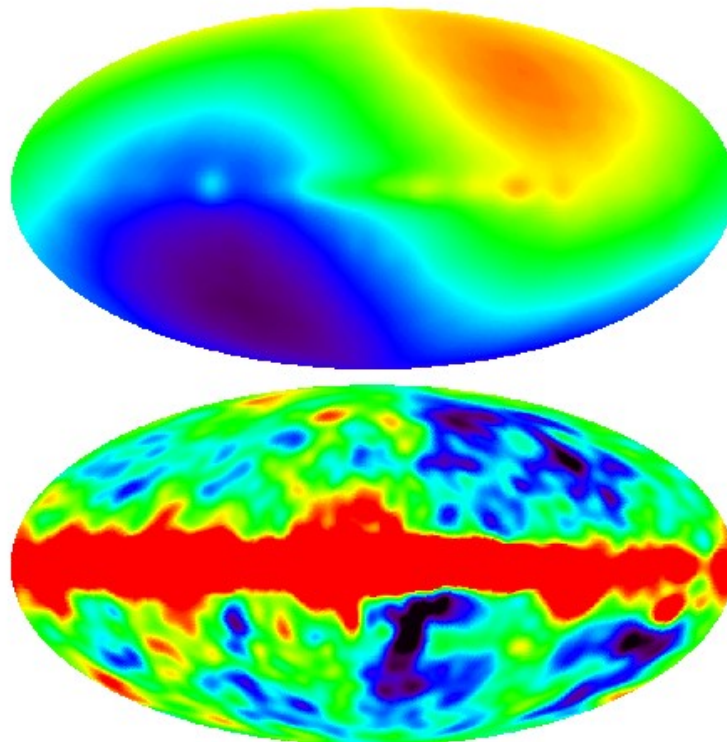


Figura 2.5: Anisotropie nella temperatura della CMB prima della sottrazione della distorsione di dipolo (prima immagine), dopo aver sottratto la distorsione di dipolo (seconda immagine). L'orientamento delle mappe è tale che il piano della Via Lattea corra orizzontalmente al centro di ogni immagine. Da [1]

2.2.2 L'effetto Sunyaev-Zel'dovich

L'effetto Sunyaev-Zel'dovich è una delle principali conseguenze della Comptonizzazione⁵ e consiste in un cambiamento nello spettro di brillantezza di Corpo Nero della CMB, qualora i fotoni della radiazione cosmica di fondo attraversino un ammasso di galassie [3]. La temperatura della radiazione cosmica di fondo è pari a $T_{CMB} = 2.725K$ e i suoi fotoni hanno energie dell'ordine di $10^{-3}eV$. Si consideri un ammasso di galassie con temperature tipiche dell'ordine di $T \approx 10^7 - 10^8K$ e $kT_e \approx 5KeV$. Questa regione emette fotoni X per Bremsstrahlung, quindi gli elettroni sono molto più energetici dei fotoni della radiazione di fondo. Poiché il numero di fotoni in una data regione dello spettro si deve conservare (per l'isotropia della CMB), durante l'interazione i fotoni cambiano la propria energia, spostandosi ad energie maggiori.

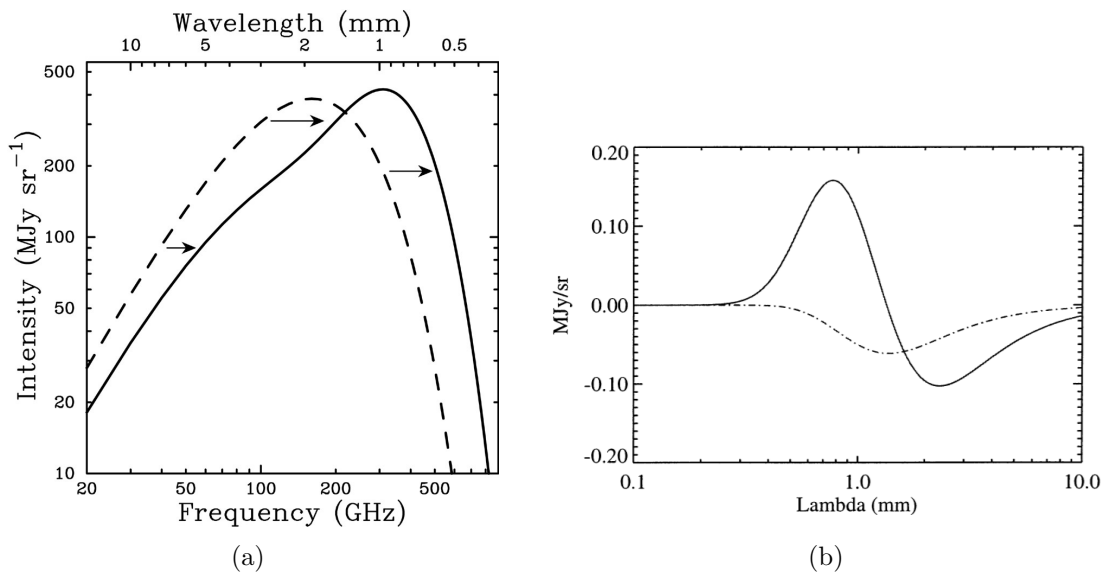


Figura 2.6: (a) Effetto Sunyaev-Zel'dovich sullo spettro di corpo nero della CMB. La linea tratteggiata è la planckiana non modificata. Quella continua invece rappresenta la radiazione modificata dagli scattering Compton (energia maggiore). (b) Spettro dell'effetto Sunyaev Zel'dovich termico (linea continua) e cinetico (linea tratteggiata). Da [6]

Nella regione di Rayleigh-Jeans (radio), confrontando lo spettro della CMB nella direzione di una nube con uno spettro in una direzione in cui non sono presenti elettroni liberi molto energetici, si osserva che l'intensità della radiazione in direzione della nube risulta minore (Figura 2.6(a)). Il grado di distorsione dello spettro è determinato dal parametro Compton y (2.6), ovvero da temperatura e dimensione della nube stessa. Come si osserva in Figura 2.6(a) nello spettro è presente una frequenza di cross-over ν_c , in corrispondenza della quale si ha totale assenza di segnale. Nel limite per $y \ll 1$ la frequenza di cross-over è pari a

$$\nu_c = 3.83 \frac{T_{CMB}}{h} = 3.83 \frac{2.725}{h} \simeq 220 GHz \quad (2.5)$$

⁵La comptonizzazione è il processo tramite cui una popolazione di fotoni, attraversando una regione dove sono presenti elettroni liberi, subisce una modifica dello spettro.

Per $\nu < \nu_c$ il segnale risulta essere negativo, ovvero l'intensità della CMB modificata dalla Comptonizzazione risulta inferiore rispetto a quella non modificata. Viceversa per $\nu > \nu_c$ il segnale risulta positivo, cioè si traduce in un'intensità della CMB modificata maggiore.

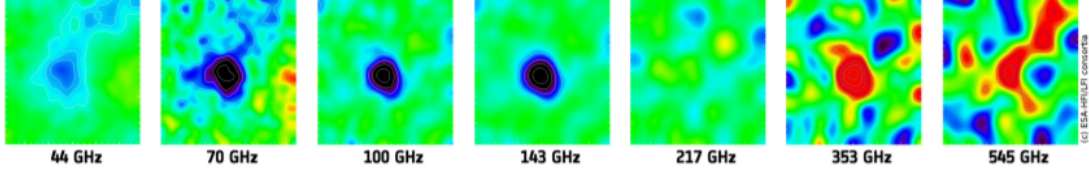


Figura 2.7: Ammasso di galassie Abell 2319 osservato dal satellite Planck. Da [2]

La Figura 2.7 mostra una serie di immagini dell'ammasso di galassie Abell 2319 a diverse frequenze (da 44 GHz a 545 GHz). Si osservi come nelle quattro immagini a sinistra, corrispondenti a frequenze minori di ν_c , il segnale è negativo (in blu), ovvero l'ammasso appare più freddo del segnale medio della CMB. Viceversa, nelle ultime due immagini a destra, l'ammasso appare più caldo (segnale positivo, in rosso). Poiché l'intensità di radiazione è strettamente legata alla temperatura, la distorsione nello spettro della radiazione cosmica di fondo porta ad una variazione ΔT_{S-Z} data da

$$\frac{\Delta T_{S_Z}}{T_{CMB}} = g(\nu)y - \tau_e \frac{v_a}{c} \quad (2.6)$$

in cui $y = \int (kT_e/m_e c^2) \sigma_T n_e dl$ è il parametro Compton, v_a è la velocità dell'ammasso lungo la linea di vista e $g(\nu)$ è una funzione che dipende dalla frequenza ν secondo la legge

$$g(\nu) = x \coth\left(\frac{x}{2}\right)$$

dove $x = \frac{h\nu}{kT_{CMB}}$. Il primo termine dell'equazione 2.6 rappresenta la distorsione dovuta al moto termico della popolazione di elettroni nell'ICM (Intracluster Medium), che causa la caratteristica forma spettrale: la diminuzione nella zona di Rayleigh-Jeans dello spettro e l'aumento in quella di Wien. Questo viene chiamato effetto Sunyaev-Zel'dovich termico (tSZ). Il secondo fa riferimento alla distorsione causata dal moto relativo dell'ammasso rispetto alla radiazione cosmica di fondo, ed è chiamato effetto Sunyaev-Zel'dovich cinetico. L'intensità dei due contributi si può osservare in Figura 2.6(b). Si noti come, generalmente, quello termico sia più rilevante di quello cinetico (almeno un ordine di grandezza).

Bibliografia

- [1] National Aeronautics and Space Administration, NASA. <https://www.nasa.gov/>.
- [2] G Alecian, K Belkacem, R Samadi, et al. Planck sz clusters.
- [3] Mark Birkinshaw. The sunyaev-zel'dovich effect. *Physics Reports*, 310(2-3):97–195, 1999.
- [4] Daniele Dallacasa. *Processi di Radiazione e MHD, dispense*. Università di Bologna.
- [5] DJ Fixsen, ES Cheng, JM Gales, John C Mather, RA Shafer, and EL Wright. The cosmic microwave background spectrum from the full coBE* FIRAS data set. *The Astrophysical Journal*, 473(2):576, 1996.
- [6] Martin Giard. Dust in clusters of galaxies and the sunyaev zel'dovich effect 1. In *Symposium-International Astronomical Union*, volume 204, pages 57–66. Cambridge University Press, 2001.
- [7] Institute for Astronomy, University of Hawaii. *IRTF Spectral Library*. http://irtfweb.ifa.hawaii.edu/~spex/IRTF_Spectral_Library/.
- [8] Lloyd Knox, Nelson Christensen, and Constantinos Skordis. The age of the universe and the cosmological constant determined from cosmic microwave background anisotropy measurements. *The Astrophysical Journal Letters*, 563(2):L95, 2001.
- [9] Thierry Lanz and Ivan Hubeny. Non-lte line-blanketed model atmospheres of hot stars. 2: Hot, metal-rich white dwarfs. *The Astrophysical Journal*, 439:905–916, 1995.
- [10] Michele Nardone. *Introduzione alla fisica Moderna*. Università dell'Aquila, 2016.
- [11] Francesco Ravanini. *Istituzioni di fisica teorica*. Università di Bologna, 2013.
- [12] George B. Rybicki and Alan P. Lightman. *Radiative processes in astrophysics*. John Wiley & Sons, 1991.
- [13] George F Smoot. COBE observations and results. In *AIP Conference Proceedings CONF-981098*, volume 476, pages 1–10. American Institute of Physics, 1999.
- [14] B. Winstein. The cosmic microwave background radiation.