

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

**TEOREMI DI NO-GO PER
TEORIE DELLE VARIABILI NASCOSTE**

Relatore:
Prof. Elisa Ercolessi

Presentata da:
Matteo Bergonzoni

Anno Accademico 2020/2021

Sommario

Le teorie delle variabili nascoste si basano sull'introduzione di un nuovo insieme di variabili per riprodurre tutti i risultati e le predizioni della meccanica quantistica eliminando però l'indeterminazione degli osservabili quantistici. I teoremi di no-go sono una serie di risultati teorici che impongono vincoli alle ipotesi e assunzioni su cui questi teoremi possono fondarsi. In particolare in questo elaborato esamineremo il teorema di Bell e il teorema del Libero Arbitrio che impongono alle teorie di variabili nascoste la non località e il teorema Kochen-Specker che impone a questo genere di teorie la contestualità. Si tratta di risultati solidi che sono stati confermati da una lunga serie di verifiche sperimentali e che benché non giungano ad escludere la possibilità di formulare una teoria delle variabili nascoste mostrano come non si possa ricondurre la teoria quantistica alla logica classica senza rinunciare a principi cardine come quello di località e non contestualità.

Indice

INTRODUZIONE	3
1 TEOREMA di BELL	5
1.1 Entanglement quantistico	5
1.1.1 Prodotto tensoriale tra spazi di Hilbert	5
1.1.2 Entanglement quantistico	8
1.2 Paradosso Einstein-Podolsky-Rosen	9
1.2.1 Premesse	9
1.2.2 Formulazione originale del paradosso	10
1.2.3 Formulazione di Bohm	14
1.2.4 Considerazioni aggiuntive	17
1.3 Teorema di Bell	18
1.3.1 Disuguaglianza di Bell	18
1.3.2 Disuguaglianza CHSH	24
1.4 Prove sperimentali del teorema di Bell	29
1.4.1 Generalità	29
1.4.2 Esperimento senza falle	32
2 TEOREMA di KOCHEN-SPECKER	36
2.1 Premesse	36
2.1.1 Prolegomeni	36
2.1.2 Osservabili e operatori	38
2.1.3 Proiettori ortogonali e FUNC STAT	39
2.1.4 Ipotesi e assunzioni	42
2.2 Teorema di Kochen-Specker	47
2.2.1 Versione di Cabello	47
2.2.2 Versione di Peres	54
2.2.3 Considerazioni aggiuntive	58
2.3 Questione della verifica sperimentale	60
2.3.1 Esperimento proposto da Kochen e Specker	60
2.3.2 Esperimento proposto da Cabello e Garcia	62

2.3.3	Esperimento proposto da Simon	66
3	TEOREMA del LIBERO ARBITRIO	73
3.1	Assiomi	73
3.1.1	Premesse	73
3.1.2	Assioma SPIN	74
3.1.3	Assioma TWIN	75
3.1.4	Assioma MIN	76
3.2	Teorema Libero Arbitrio	79
3.2.1	Teorema	79
3.2.2	Implicazioni	81
	CONCLUSIONI	83

INTRODUZIONE

La meccanica quantistica è nata agli inizi del '900 per spiegare fenomeni come la radiazione di corpo nero, l'effetto fotoelettrico o l'esperimento della doppia fenditura, a cui la fisica classica non era in grado di fornire una spiegazione. Da allora la meccanica quantistica si è evoluta notevolmente, divenendo una delle più importanti e potenti teorie fisiche fondamentali che l'uomo abbia mai elaborato. Il suo formalismo ci permette di fare predizioni accurate sul comportamento di una vasta gamma di fenomeni microscopici che coinvolgono le particelle atomiche e subatomiche, inoltre ha aperto a un gran numero di applicazioni pratiche, alcune delle quali hanno permesso lo sviluppo di tecnologie che ormai pervadono la nostra vita quotidiana. Allo stesso tempo però dalla teoria quantistica emergono diversi problemi concettuali e interpretativi a cui è difficile dare una risposta e che sembrano mettere duramente alla prova alcuni dei concetti che classicamente davamo per scontati, a partire dal significato della probabilità, il vero ruolo della misura, quindi l'esistenza o meno di valori definiti per gli osservabili, la riduzione della funzione d'onda, l'entanglement quantistico e altri ancora. In un approccio puramente pragmatico questi problemi possono essere attentamente schivati, limitandosi ad utilizzare la macchinaria quantistica per fare calcoli e senza interrogarsi mai troppo su questioni concettuali che non mostrano un immediato campo d'applicazione. Un approccio del genere per quanto funzionale non è certo intellettualmente soddisfacente e quindi non sorprende che i tentativi di far luce sulle zone d'ombra della meccanica quantistica siano stati innumerevoli e abbiano coinvolto molti dei più eminenti fisici del secolo scorso e contemporanei.

In questo elaborato ci occuperemo in particolar modo delle difficoltà che emergono nel tentativo di fornire un'interpretazione realista ed epistemica della meccanica quantistica. All'interno di questa interpretazione si assume che i sistemi fisici quantistici, già come era dato per scontato per quelli classici, possiedano proprietà ben definite. L'incertezze e le probabilità di cui si parla in teoria quantistica non sarebbero quindi da intendersi come proprietà reali ed intrinseche, ma soltanto come una conseguenza della nostra ignoranza sul vero stato dei sistemi. Si tratta di una visione simile a quella della meccanica statistica, dove macroscopicamente ci è concesso di conoscere soltanto certe grandezze termodinamiche, mentre ci è preclusa per ragioni pratiche la conoscenza esatta del microstato in cui il sistema si trova. Si tratta comunque non di un'ignoranza assoluta, infatti attraverso la conoscenza delle grandezze termodinamiche è comunque possibile ricostruire quale sia la distribuzione di probabilità di grandezze che in-

vece riguardano le singole particelle che formano il sistema. Il fatto che noi siamo in grado di parlare di queste grandezze soltanto in termini probabilistici non toglie che le singole particelle possiedano singolarmente dei valori ben definiti. Dato che la meccanica quantistica non è in grado di specificare univocamente i valori degli osservabili si può immaginare di completare la teoria aggiungendovi delle variabili nascoste che determinino univocamente le proprietà fisiche del sistema. È questo quello che nel 1935 Einstein, Podolsky e Rosen suggerirono al termine del loro articolo nel quale presentavano un paradosso tra il realismo locale e la meccanica quantistica.

La suggestione di introdurre una teoria delle variabili nascoste per eliminare alcune delle stranezze della meccanica quantistica e reintrodurre nel bizzarro mondo microscopico che essa descrive un pò della logica classica, è tutt'altro che banale. Da un lato ci sono le predizioni della meccanica quantistica, confermate da migliaia di esperimenti e che andranno quindi riprodotte anche dalla teoria delle variabili nascoste; dall'altro lato vi sono gli stringenti vincoli geometrici e algebrici che emergono dall'introduzione di assunzione apparentemente innocue come quelle di località e non contestualità. Questa difficoltà è stata tradotta in impossibilità da una lunga serie di risultati (prima teorici ma poi anche sperimentalmente verificati) che vanno sotto il nome di teoremi di no-go per le teorie delle variabili nascoste e che impongono vincoli e limitazioni alle proprietà che una teoria di questo tipo può possedere. Due dei principali teoremi di no-go sono senza dubbio il teorema di Bell (1964) e quello di Kochen-Specker (1967). Questi non proibiscono la formulazioni di teorie delle variabili nascoste ma richiedono perentoriamente l'abbandono alcuni paradigmi della logica classica, in particolare se si vogliono assegnare valori definiti a tutti gli osservabili di un sistema si è costretti a rinunciare all'ipotesi di località e non contestualità.

Nel primo capitolo di questo elaborato discuteremo del fenomeno dell'entanglement quantistico per poi vederne un'applicazione all'interno del paradosso Einstein-Podolsky-Rosen, da cui la lunga, e ancora non conclusa, discussione sulle variabili nascoste ha preso inizio. Si passerà poi ad analizzare il teorema di Bell, con l'omonima disuguaglianza ed una sua simile, la disuguaglianza CHSH. Infine si discuterà degli esperimenti eseguiti per la verifica sperimentale dell'enunciato del teorema.

Nel secondo capitolo tratteremo invece il teorema Kochen-Specker, fornendone più di una dimostrazione, analizzando attentamente il complicato intreccio delle ipotesi su cui si fonda per poi passare a esaminare la questione della verifica sperimentale.

In ultimo, nel terzo capitolo tratteremo del Teorema del Libero Arbitrio di Conway e Kochen (2006), che ha uno stretto legame con i teoremi dei primi due capitoli e per certi versi può essere considerato come un rafforzamento di entrambi.

Capitolo 1

TEOREMA di BELL

In questo capitolo si discuterà del peculiare fenomeno quantistico dell'entanglement e verranno introdotte le proprietà fondamentali del prodotto tensoriale tra gli spazi di Hilbert, lo strumento matematico utilizzato per descrivere sistemi entangled. Si procederà poi con la descrizione del paradosso di Einstein, Podolsky e Rosen prima nella sua formulazione originale e poi in quella, più semplice, di Bohm; verranno discusse le implicazioni di questo paradosso sull'incompletezza della meccanica quantistica e la località, in particolar modo sull'eventualità di poter completare la meccanica quantistica con teorie delle variabili nascoste. Infine si passerà ad esaminare il teorema di Bell, che con l'omonima disuguaglianza mostra un'incongruenza tra le predizioni della meccanica quantistica e quelle di una qualsiasi teoria delle variabili nascoste locale, si vedrà anche come i dati sperimentali sembrino confermare le predizioni della meccanica quantistica.

1.1 Entanglement quantistico

1.1.1 Prodotto tensoriale tra spazi di Hilbert

Per la descrizione del paradosso di Einstein, Podolsky e Rosen ricopre un'importanza cruciale l'entanglement quantistico. Si tratta di un fenomeno che non trova nessun corrispettivo nella fisica classica e costituisce così uno dei principali problemi concettuali della meccanica quantistica.

Per mettere in risalto il contrasto tra l'entanglement quantistico e la fisica classica partiamo con il considerare un sistema S composto da due sottosistemi S_1 e S_2 , si potrà poi facilmente generalizzare ad un insieme di sottosistemi S_i . Classicamente è sempre possibile assegnare a ciascuno dei due sottosistemi uno stato, rispettivamente s_1 e s_2 ; indicheremo con \mathcal{S}_1 l'insieme di tutti i possibili stati per il sottosistema S_1 , e con \mathcal{S}_2 l'insieme di tutti i possibili stati per il sottosistema S_2 . In fisica classica è possibile esprimere lo stato complessivo del sistema S attraverso la coppia (s_1, s_2) , che è un elemento di $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$, ovvero il prodotto cartesiano tra gli

spazi degli stati dei due sottosistemi. Un'immediata conseguenza di ciò è che ogni stato del sistema composto S è associato ad un unico microstato per ognuno dei suoi due sottosistemi. In meccanica quantistica lo stato di un sistema è matematicamente codificato, a meno di un fattore di fase, da un ket normalizzato $|\psi\rangle$ in uno spazio di Hilbert complesso \mathcal{H} . Nel nostro caso avremo che lo stato dei due sottosistemi è codificato dai ket $|\psi\rangle_1$ e $|\phi\rangle_2$, elementi dei due spazi di Hilbert \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 che rappresentano rispettivamente lo spazio degli stati di S_1 e lo spazio degli stati di S_2 . Lo stato del sistema composto sarà invece codificato dal ket $|\psi\rangle_1 \otimes |\phi\rangle_2$, un elemento di un nuovo spazio di Hilbert $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ che corrisponde al prodotto tensoriale tra \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 . Lo spazio degli stati quantistici del sistema composto è quindi il prodotto tensoriale, e non più quello cartesiano, degli spazi degli stati quantistici dei sottosistemi che lo costituiscono.

D'ora in poi, dove non vi sarà ambiguità, verranno omessi i pedici 1 e 2 all'esterno dei ket, lasciando che sia l'ordine in cui questi sono disposti a indicare quale sia lo spazio di Hilbert di provenienza. Seguendo la trattazione del capitolo 8.4 di "*Lectures on Quantum Notes*" di C. J. Isham [31] e facendo uso della notazione di Dirac, dove il prodotto tensoriale di due ket si scrive $|\psi\rangle_1 \otimes |\phi\rangle_2 \equiv |\psi\rangle |\phi\rangle$, elenchiamo alcune proprietà del prodotto tensoriale rilevanti in questo contesto:

1. Il prodotto tensoriale è lineare in entrambi gli argomenti, cioè $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}; |\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}_1$ e $|\chi\rangle \in \mathcal{H}_2$ abbiamo

$$(|\psi\rangle \alpha + |\phi\rangle \beta) |\chi\rangle = (|\psi\rangle \alpha) |\chi\rangle + (|\phi\rangle \beta) |\chi\rangle, \quad (1.1.1)$$

e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}; |\psi\rangle \in \mathcal{H}_1$ e $|\phi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{H}_2$ abbiamo

$$|\psi\rangle (|\phi\rangle \alpha + |\chi\rangle \beta) = |\psi\rangle (|\phi\rangle \alpha) + |\psi\rangle (|\chi\rangle \beta), \quad (1.1.2)$$

e $\forall \alpha \in \mathbb{C}; |\psi\rangle \in \mathcal{H}_1$ e $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_2$ abbiamo

$$(|\psi\rangle |\phi\rangle) \alpha = (|\psi\rangle \alpha) |\phi\rangle = |\psi\rangle (|\phi\rangle \alpha). \quad (1.1.3)$$

2. Ogni elemento di $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ può essere scritto come somma di prodotti tensoriali tra un elemento di \mathcal{H}_1 e uno di \mathcal{H}_2 . In particolare se $\{|i\rangle_1\}$, con $i = 1, 2, \dots, N_1$ e $\{|j\rangle_2\}$, con $j = 1, 2, \dots, N_2$ sono due basi rispettivamente per \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 (dove si assume che i due spazi siano finito dimensionali), allora l'insieme degli $|i\rangle_1 |j\rangle_2$ è una base per $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Un generico $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ potrà quindi essere scritto come

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} |i\rangle_1 |j\rangle_2 \psi_{ij}, \quad (1.1.4)$$

dove i ψ_{ij} sono coefficienti complessi. Risulta immediato notare come la dimensione di $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ sia il prodotto delle dimensioni di \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 .

Un fatto importante e da mettere in evidenza per la teoria dell'entanglement quantistico è che non tutti gli elementi di $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ possono essere scritti come un singolo prodotto $|\psi\rangle|\phi\rangle$ per un qualche $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1$ e un certo $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_2$, potrebbe essere necessario sommare più prodotti tensoriali di questo tipo.

3. Il prodotto scalare nello spazio $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ tra il bra $\langle\psi| = \langle\psi_1|\langle\psi_2|$ e il ket $|\phi\rangle = |\phi_1\rangle|\phi_2\rangle$ è definito come

$$\langle\psi|\phi\rangle = \langle\psi_1|\phi_1\rangle\langle\psi_2|\phi_2\rangle, \quad (1.1.5)$$

dove i prodotti scalari $\langle\psi_1|\phi_1\rangle$ e $\langle\psi_2|\phi_2\rangle$ sono calcolati nei corrispettivi spazi di Hilbert \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 . Il prodotto scalare di $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ è lineare in entrambi i suoi argomenti.

4. Siano \hat{A}_1 e \hat{A}_2 operatori rispettivamente su \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , allora possiamo definire l'operatore $\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2$ sullo spazio $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ come

$$(\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2) |\psi_1\rangle |\psi_2\rangle = (\hat{A}_1 |\psi_1\rangle)(\hat{A}_2 |\psi_2\rangle), \quad (1.1.6)$$

dove $|\psi_1\rangle |\psi_2\rangle$ è un ket di $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. La proprietà si può estendere alla somma di prodotti tensoriali linearmente, in particolare usando un generico stato $|\psi\rangle$ del sistema composto dato dalla (1.1.4) si ha

$$(\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2) |\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} (\hat{A}_1 |i\rangle_1)(\hat{A}_2 |j\rangle_2) \psi_{ij}. \quad (1.1.7)$$

Analogamente a quanto accade con i ket, ci sono operatori sullo spazio $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ non esprimibili come il singolo prodotto tensoriale $\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2$, e dove è necessario sommare due o più di questi prodotti.

5. Se A_1 e A_2 sono una coppia di osservabili rispettivamente dei sottosistemi S_1 e S_2 , rappresentati dagli operatori \hat{A}_1 e \hat{A}_2 , allora

$$[\hat{A}_1 \otimes \mathbb{1}, \mathbb{1} \otimes \hat{A}_2] = 0. \quad (1.1.8)$$

Ciò implica che per il sistema composto S gli osservabili A_1 e A_2 sono compatibili e possono essere definiti simultaneamente. $\hat{A}_1 \otimes \mathbb{1}$ e $\mathbb{1} \otimes \hat{A}_2$ costituiscono così un insieme di operatori autoaggiunti e commutanti, ammettono perciò una base ortonormale di autoket simultanei costituita dai ket $|a_1\rangle |a_2\rangle$, dove a_1 e a_2 variano nel range degli autovalori degli operatori \hat{A}_1 e \hat{A}_2 . Valgono quindi le relazioni agli autovalori seguenti

$$\hat{A}_1 |a_1\rangle = |a_1\rangle a_1, \quad (1.1.9)$$

$$\hat{A}_2 |a_2\rangle = |a_2\rangle a_2, \quad (1.1.10)$$

$$(\hat{A}_1 \otimes \mathbb{1}) |a_1\rangle |a_2\rangle = |a_1\rangle |a_2\rangle a_1, \quad (1.1.11)$$

$$(\mathbb{1} \otimes \hat{A}_2) |a_1\rangle |a_2\rangle = |a_1\rangle |a_2\rangle a_2. \quad (1.1.12)$$

Un'applicazione comune per il formalismo appena introdotto è quello della fattorizzazione spin-orbita per la descrizione di una particella quantistica dotata di spin. Per descriverla compiutamente occorrerà tenere conto oltre che dei gradi di libertà orbitali, descritti dagli operatori posizione \hat{q} e impulso \hat{p} , anche di quelli di spin codificati invece dall'operatore di spin \hat{S} . Avremo dunque che lo spazio di Hilbert della particella sarà $\mathcal{H} = \mathcal{H}_o \otimes \mathcal{H}_s$, dove \mathcal{H}_o è lo spazio di Hilbert orbitale ∞ -dimensionale, mentre \mathcal{H}_s è lo spazio di Hilbert di spin, isomorfo a \mathbb{C}^d , dove d è un intero positivo che dipende dal tipo di particella (ad esempio, per una particella di spin $1/2$ è pari a 2). Uno stato generico $|\psi\rangle$ sarà dato da

$$|\psi\rangle = \sum_a |\psi_a\rangle_o |\psi_a\rangle_s, \quad (1.1.13)$$

con $\forall a |\psi_a\rangle_o \in \mathcal{H}_o, |\psi_a\rangle_s \in \mathcal{H}_s$. Una base ortonormale di questo spazio è quella degli autoket dell'insieme completo di operatori autoaggiunti posizione $\hat{q} \otimes \mathbb{1}$ e terza componente di spin $\mathbb{1} \otimes \hat{s}_z$, ovvero $|\mathbf{x}, m_s\rangle = |\mathbf{x}\rangle |m_s\rangle$. Utilizzando questa base possiamo scrivere uno stato generico $|\psi\rangle$ servendoci della (1.1.4) come

$$|\psi\rangle = \sum_{m_s} \int |\mathbf{x}, m_s\rangle \psi_{\mathbf{x}, m_s} d^3x. \quad (1.1.14)$$

1.1.2 Entanglement quantistico

L'entanglement quantistico è matematicamente associato all'esistenza di ket dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ che non sono fattorizzabili come prodotto tensoriale di stati dei suoi sottosistemi, cioè non sono scrivibili come $|\psi\rangle |\phi\rangle$ per nessun $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1$ e $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_2$. I sistemi entangled sono sistemi il cui stato è esprimibile soltanto come una sovrapposizione lineare di prodotti tensoriali degli stati dei suoi sottosistemi.

Come esempio si consideri il caso di un decadimento di una particella subatomica in una coppia di particelle figlie. Il decadimento dovrà soddisfare una serie di leggi di conservazione in modo tale che l'impulso, il momento angolare e l'energia totali rimangano gli stessi prima e dopo il processo. Un'ovvia conseguenza di ciò è che il risultato di una misura di una di queste grandezze conservate su una delle due particelle figlie è fortemente correlato con l'esito di una misura analoga sull'altra particella figlia. La coppia di particelle si dice così entangled. Per esempio si consideri il decadimento di una particella di spin nullo in una coppia di particelle di spin $1/2$. Dato che il momento angolare di spin si deve conservare dovremo avere che anche dopo il decadimento la somma degli spin delle due particelle figlie deve essere zero; così se misurando lo spin di una delle due particelle lungo un certo asse trovassimo che è $\frac{1}{2}\hbar$, allora sapremmo con certezza che misurando anche lo spin dell'altra particella lungo la medesima direzione troveremmo $-\frac{1}{2}\hbar$. Questo è un caso di spin anticorrelati e se a priori la probabilità di misurare ciascuno dei due spin è la stessa la coppia si dice in uno stato di singoletto $|\psi\rangle$ dato da

$$|\psi\rangle = (|\uparrow\rangle |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (1.1.15)$$

dove $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ sono gli autoket dell'operatore di spin lungo la direzione scelta, corrispondenti rispettivamente agli autovalori $\frac{1}{2}\hbar$ e $-\frac{1}{2}\hbar$.

1.2 Paradosso Einstein-Podolsky-Rosen

1.2.1 Premesse

Nel 1935 A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen (EPR) pubblicarono un articolo dal titolo "*Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*" [19], nel quale proposero per la prima volta il paradosso che porta il loro nome. Nel loro articolo viene analizzato lo stato quantistico di una coppia di particelle separate spazialmente con impulsi massimamente correlati e posizioni massimamente anticorrelate. Si tratta di un esempio di entanglement, anche se EPR nel loro articolo non utilizzarono mai questo termine che verrà coniato solo successivamente. Dall'analisi di questo sistema e attraverso un esperimento mentale viene messa in mostra un'apparente inconsistenza tra l'esistenza di questi particolari stati entangled e l'ipotesi di realismo locale. Secondo EPR questa inconsistenza suggerirebbe che la meccanica quantistica è incompleta ed è probabile che intendessero che potesse essere completata con una teoria delle variabili nascoste consistente con gli elementi di realtà.

Prima di analizzare la versione originale del paradosso EPR conviene soffermarsi su alcuni concetti fondamentali di cui si è appena affatto accenno, in particolare quelli di *completezza di una teoria fisica*, *elementi di realtà*, *osservabili non compatibili* e infine *realismo locale*.

Innanzitutto una teoria fisica, come la meccanica quantistica, può dirsi completa se ogni elemento della realtà fisica ha una controparte nella teoria fisica. A priori non è possibile stabilire quali siano gli elementi di realtà fisica, bisogna perciò basarsi sui risultati degli esperimenti empirici. EPR forniscono come criterio per stabilire se una certa quantità fisica è o meno un elemento di realtà, il seguente: "*Se, senza disturbare in alcun modo il sistema, possiamo predire con certezza (ovvero con probabilità pari a 1) il valore di una quantità fisica, allora esiste un elemento di realtà fisica corrispondente a questa quantità fisica*" [19]. Il concetto di elemento di realtà, che in fisica classica viene spesso dato per scontato, diviene tutt'altro che ovvio in meccanica quantistica dove esistono osservabili che in certi stati non possiedono valori definiti, ovvero eseguendo più volte la stessa misura sullo stessa quantità fisica nel medesimo stato si possono ottenere valori di volta in volta diversi. Esistono poi quantità fisiche che non sono tra di loro compatibili, ovvero la conoscenza precisa di uno dei due osservabili preclude una conoscenza altrettanto precisa dell'altro. Gli operatori che rappresentano osservabili non compatibili non commutano. Queste considerazioni portano a concludere che solo una delle seguenti proposizioni può essere vera.

1. La descrizione quantomeccanica della realtà è incompleta.
2. Se due operatori corrispondenti a due quantità fisiche non commutano tra loro le due quantità fisiche non hanno elementi di realtà simultaneamente.

Tradizionalmente si pensa che la descrizione quantomeccanica della realtà sia completa e che quantità fisiche corrispondenti a operatori non commutanti non possiedano elementi di realtà simultanei. Nel loro articolo EPR cercano di dimostrare che questi elementi di realtà simultanei esistono e che quindi la meccanica quantistica è incompleta.

Un'altra importante premessa è quella della località, che postula la non esistenza di azioni a distanza, in accordo con i dettami della relatività ristretta. In particolare le misure eseguite su un sistema S_1 non possono immediatamente disturbare un sistema S_2 spazialmente separato dal primo. Con realismo locale non si intende altro che un approccio nel quale si ritengono validi sia il criterio di realtà di EPR che l'assunzione di località.

1.2.2 Formulazione originale del paradosso

Nella versione originale del paradosso, quella descritta nell'articolo del 1935 di EPR [19], abbiamo a che fare con un sistema composto S costituito da due sottosistemi S_1 e S_2 , ciascuno descrivibile con un solo grado di libertà. Assumiamo per ipotesi che dopo un iniziale periodo di iterazione i due sottosistemi vengano posti in condizioni tali da non poter più interagire l'uno con l'altro in alcun modo (ad esempio ponendoli a grande distanza). Lo spazio degli stati del sottosistema S_1 sarà matematicamente codificato dallo spazio di Hilbert \mathcal{H}_1 , lo spazio degli stati del sottosistema S_2 sarà codificato dallo spazio di Hilbert \mathcal{H}_2 , mentre lo spazio degli stati del sistema complessivo S sarà codificato dal prodotto tensoriale dei due spazi di Hilbert $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, come già visto nella precedente sezione.

Definiamo poi gli operatori \hat{q}_1 e \hat{q}_2 che corrispondono alle variabili che usiamo per descrivere rispettivamente il primo e il secondo sottosistema, un esempio di queste variabili potrebbero essere le posizioni. L'operatore \hat{q}_1 è autoaggiunto e completo, esisterà quindi una base ortonormale di suoi autoket $|x_1\rangle$ nello spazio \mathcal{H}_1 , con x_1 che è la variabile usata per descrivere il primo sottosistema. Valgono le seguenti relazioni agli autovalori, di completezza e ortonormalità

$$\hat{q}_1 |x_1\rangle = |x_1\rangle x_1, \quad (1.2.1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x_1\rangle dx_1 \langle x_1| = \mathbb{1}, \quad (1.2.2)$$

$$\langle x'_1|x_1\rangle = \delta(x_1 - x'_1). \quad (1.2.3)$$

Un discorso analogo è applicabile anche all'operatore \hat{q}_2 , anch'esso ammette una base ortonormale di autoket $|x_2\rangle$ nello spazio \mathcal{H}_2 , con x_2 che è la variabile usata per descrivere il secondo sottosistema. Anche in questo caso valgono le relazioni agli autovalori, di completezza e ortonormalità

$$\hat{q}_2 |x_2\rangle = |x_2\rangle x_2, \quad (1.2.4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x_2\rangle dx_2 \langle x_2| = \mathbb{1}, \quad (1.2.5)$$

$$\langle x'_2|x_2\rangle = \delta(x_2 - x'_2). \quad (1.2.6)$$

Sia poi A un osservabile del sottosistema S_1 matematicamente rappresentato dall'operatore \hat{A} , siano a_n con $n = 1, 2, 3, \dots$ i suoi autovalori e $|u_n\rangle$ con $n = 1, 2, 3, \dots$ i suoi autoket. Varrà quindi la relazione agli autovalori

$$\hat{A}|u_n\rangle = |u_n\rangle a_n, \quad (1.2.7)$$

mentre il rappresentativo degli autoket nella rappresentazione $|x_1\rangle$ sarà $\langle x_1|u_n\rangle = u_n(x_1)$. Possiamo scrivere lo stato iniziale $|\Psi\rangle$ del sistema composto S utilizzando la base di autoket dell'operatore \hat{A} in questo modo

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n\rangle |\psi_n\rangle, \quad (1.2.8)$$

dove il ket $|\psi_n\rangle$ dello spazio \mathcal{H}_2 , facendo riferimento alla (1.1.4) e ponendo $|n\rangle_1 = |u_n\rangle$, è dato da $\sum_{j=1}^{\infty} |j\rangle_2 \Psi_{nj}$ con $|j\rangle_2$ base di \mathcal{H}_2 . Il rappresentativo di $|\Psi\rangle$ nella base $|x_1\rangle |x_2\rangle$ dello spazio $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ è

$$(\langle x_1| \langle x_2|) |\Psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_1) \psi_n(x_2) = \Psi(x_1, x_2). \quad (1.2.9)$$

Possiamo quindi vedere i $\psi_n(x_2)$ come coefficienti dell'espansione di Ψ in una serie delle funzioni ortonormali $u_n(x_1)$.

Procediamo con l'esperimento mentale immaginando di misurare l'osservabile A del sottosistema S_1 quando il sistema complessivo si trova nello stato rappresentato da $|\Psi\rangle$. La teoria quantistica ci dice che l'esito della misura non potrà che essere uno degli autovalori di \hat{A} , poniamo a_k , e che dopo la misura assisteremo alla riduzione del pacchetto d'onda $|\Psi\rangle$ al solo termine $|u_k\rangle |\psi_k\rangle$. Quindi dopo la misura il primo sottosistema si troverà nello stato $|u_k\rangle$, un autostato dell'osservabile A , mentre il secondo si troverà nello stato $|\psi_k\rangle$.

La base di autoket $|u_n\rangle$ è determinata dalla scelta dell'osservabile A , così se io invece di scegliere A scegliesti un osservabile B , potrei considerare i suoi autovalori b_s con $s = 1, 2, 3, \dots$ e i suoi autoket $|v_s\rangle$ con $s = 1, 2, 3, \dots$. Varrà quindi la relazione agli autovalori

$$\hat{B}|v_s\rangle = |v_s\rangle b_s, \quad (1.2.10)$$

mentre il rappresentativo degli autoket nella rappresentazione di $|x_1\rangle$ sarà $\langle x_1|v_s\rangle = v_s(x_1)$. Possiamo scrivere lo stato iniziale $|\Psi\rangle$ del sistema composto S utilizzando la base di autoket dell'operatore \hat{B} in questo modo

$$|\Psi\rangle = \sum_{s=1}^{\infty} |v_s\rangle |\phi_s\rangle, \quad (1.2.11)$$

dove il ket $|\phi_s\rangle$ dello spazio \mathcal{H}_2 , facendo riferimento alla (1.1.4) e ponendo $|s\rangle_1 = |v_s\rangle$, è dato da $\sum_{j=1}^{\infty} |j\rangle_2 \Psi_{sj}$ con $|j\rangle_2$ base di \mathcal{H}_2 . Il rappresentativo di $|\Psi\rangle$ nella base $|x_1\rangle |x_2\rangle$ dello spazio

$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ è

$$\langle x_1 | \langle x_2 | | \Psi \rangle = \sum_{s=1}^{\infty} v_s(x_1) \phi_s(x_2) = \Psi(x_1, x_2). \quad (1.2.12)$$

Possiamo quindi vedere i $\phi_s(x_2)$ come coefficienti dell'espansione di Ψ in una serie delle funzioni ortonormali $v_s(x_1)$.

Anche in questo caso eseguendo una misura dell'osservabile B sul sottosistema S_1 otterremo come esito un certo autovalore b_r e potremmo concludere che dopo la misura il primo sottosistema si troverà nello stato $|v_r\rangle$, autostato dell'osservabile B , mentre il secondo nello stato $|\phi_r\rangle$.

Siamo così giunti alla conclusione che il sottosistema S_2 in seguito a due differenti misure eseguite sul sottosistema S_1 potrà trovarsi con certezza in due stati descritti da ket differenti, cioè $|\psi_k\rangle$ e $|\phi_r\rangle$. D'altra parte i due sottosistemi non hanno avuto, per ipotesi, alcun modo per interagire e quindi nessun reale cambiamento può aver avuto luogo nel secondo sottosistema come conseguenza di una misura effettuata sul primo (località). Possiamo così utilizzare il criterio di realtà di EPR per assegnare due elementi di realtà ai ket di S_2 , $|\psi_k\rangle$ e $|\phi_r\rangle$. Il paradosso nasce dal fatto che si può verificare che questi due ket possono rappresentare gli autostati di due operatori non commutanti, poniamo \hat{P} e \hat{Q} , cioè operatori che rappresentano due quantità fisiche non compatibili e che non potrebbero, almeno secondo la meccanica quantistica, essere definite simultaneamente.

Per mostrare quest'ultima osservazione consideriamo un sistema dove i due sottosistemi sono costituiti da due particelle quantistiche con un solo grado di libertà di traslazione, con quantità di moto massimamente correlate e posizioni anticorrelate. Siano quindi x_1 e x_2 le variabili che descrivono la posizione rispettivamente della prima e della seconda particella, mentre \hat{q}_1 e \hat{q}_2 gli operatori posizione rispettivamente della prima e della seconda particella. Scegliamo come osservabile A l'impulso p_1 della prima particella, ad esso sarà associato un operatore autoaggiunto \hat{p}_1 . A differenza del caso generale visto prima ora lo spettro dell'operatore non è più discreto ma bensì continuo, abbiamo perciò che gli autovalori p_1 e gli autoket $|u_{p_1}\rangle$ sono parametrizzati da un numero libero di variare in tutto il range dei reali. Nella rappresentazione di Schroedinger costituita dalla base $|x_1\rangle$ l'operatore \hat{p}_1 assume la forma

$$\langle x_1 | \hat{p}_1 = -i\hbar \frac{d}{dx_1} \langle x_1 |, \quad (1.2.13)$$

mentre gli autoket $|u_{p_1}\rangle$ corrispondenti all'autovalore p_1 diventano

$$\langle x_1 | u_{p_1} \rangle = u_{p_1}(x_1) = \exp(i\hbar^{-1} p_1 x_1). \quad (1.2.14)$$

Con questo spettro continuo la (1.2.8) che descrive lo stato iniziale del sistema delle due particelle prende la forma seguente

$$|\Psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |u_{p_1}\rangle |\psi_{p_1}\rangle dp_1. \quad (1.2.15)$$

Scegliamo di definire ψ_{p_1} come

$$\langle x_2 | \psi_{p_1} \rangle = \psi_{p_1}(x_2) = \exp(-i\hbar^{-1}(x_2 - x_0)p_1), \quad (1.2.16)$$

dove x_0 è una qualche costante. Allora il rappresentativo nella rappresentazione di Schroedinger di $|\Psi\rangle$ diventa

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{p_1}(x_1) \psi_{p_1}(x_2) dp_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\hbar^{-1}(x_1 - x_2 + x_0)p_1) dp_1. \quad (1.2.17)$$

Si può notare come $|\psi_{p_1}\rangle$ sia un autoket dell'operatore impulso \hat{p}_2 per la seconda particella, definito come

$$\langle x_2 | \hat{p}_2 = -i\hbar \frac{d}{dx_2} \langle x_2 |, \quad (1.2.18)$$

e l'autovalore corrispondente è $p_2 = -p_1$. Ci troviamo quindi alle prese con uno stato $|\Psi\rangle$ che descrive un sistema di due particelle i cui impulsi sono entangled, in particolare anticorrelati. Infatti se eseguiamo una misura dell'osservabile impulso sulla prima particella S_1 e troviamo come risultato che questa possiede un impulso p_1 , allora oltre a sapere che questa prima particella dopo la misura si troverà nell'autostato $|u_{p_1}\rangle$, saremo anche certi che l'altra particella S_2 si troverà in uno stato $|\psi_{p_1}\rangle$, che è un autostato di \hat{p}_2 con impulso definito e pari a $-p_1$.

Si consideri ora come secondo osservabile B la coordinata della prima particella, descritta dall'operatore posizione \hat{q}_1 . Nella rappresentazione di Schroedinger costituita dalla base $|x_1\rangle$ l'operatore \hat{q}_1 assume la forma già vista in (1.2.1). Gli autovalori x_1 e gli autoket $|v_{x_1}\rangle$ sono indicizzati dal parametro continuo x_1 nello spazio delle configurazioni. Il rappresentativo degli autoket è una delta di Dirac nello spazio delle configurazioni

$$\langle x'_1 | v_{x_1} \rangle = v_{x_1}(x'_1) = \delta(x'_1 - x_1). \quad (1.2.19)$$

In questo caso continuo la (1.2.11) che descrive lo stato iniziale delle due particelle diventa

$$|\Psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |v_{x_1}\rangle |\phi_{x_1}\rangle dx_1. \quad (1.2.20)$$

Definiamo $|\phi_{x_1}\rangle$ come

$$\begin{aligned} \langle x_2 | \phi_{x_1} \rangle &= \phi_{x_1}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\hbar^{-1}(x_1 - x_2 + x_0)p) dp \\ &= 2\pi\hbar\delta(x_1 - x_2 + x_0). \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

Si noti come le due espressioni dello stato iniziale $|\Psi\rangle$, cioè la (1.2.17) e la (1.2.20) siano del tutto equivalenti. Inoltre si può vedere come $|\phi_{x_1}\rangle$ sia un autoket dell'operatore posizione della seconda particella \hat{q}_2 , corrispondente all'autovalore $x_2 = x_1 + x_0$. Quindi abbiamo a che fare con due particelle la cui posizione è correlata: se attraverso una misura determino che la prima

si trova in x_1 allora potrò concludere con certezza che la seconda si troverà in $x_1 - x_0$. Dato che $[\hat{q}_2, \hat{p}_2] = i\hbar$, in meccanica quantistica gli operatori posizione e momento di una stessa particella non commutano.

Abbiamo così mostrato che in generale è possibile che gli stati visti prima, $|\psi_k\rangle$ e $|\phi_r\rangle$, siano autoket di operatori non commutanti \hat{P} e \hat{Q} corrispondenti perciò a quantità fisiche non compatibili (in questo caso P e Q sono rispettivamente l'impulso p_2 e la posizione q_2 della seconda particella).

Torniamo ora al caso generale e riassumiamo i risultati a cui siamo approdati sino ad ora. Misurando uno dei due osservabili del primo sottosistema, A o B , siamo in grado di determinare con certezza il valore di altre quantità del secondo sottosistema, P o Q , e senza aver in alcun modo interferito con esso. In accordo con il criterio di realtà di EPR dobbiamo considerare P e Q due elementi di realtà del sistema S_2 , ma abbiamo anche dimostrato che questi P e Q possono essere in generale non compatibili.

Nelle premesse avevamo visto come o (1) la descrizione fornita dalla meccanica quantistica della realtà è incompleta o (2) due osservabili corrispondenti a operatori non commutanti non hanno realtà simultanee. Attraverso il loro paradosso EPR sembrano aver mostrato che partendo dall'ipotesi di una meccanica quantistica completa (negazione della (1)) si approda alla conclusione che osservabili non compatibili possono possedere elementi di realtà simultaneamente (negazione della (2), l'unica alternativa alla (1)). Siamo così forzati a pensare che la descrizione delle funzioni d'onda quantistiche della realtà non sia completa.

1.2.3 Formulazione di Bohm

La formulazione originale del paradosso EPR può risultare tecnicamente complessa e poco immediata, così spesso si preferisce trattare il problema utilizzando una formulazione successiva che si deve a D. Bohm [6].

Si considerino come sistema complessivo S due particelle di spin $1/2$ tali per cui il momento angolare di spin totale sia nullo, ad esempio perché sono il frutto del decadimento di una particella di spin nullo. Questo vincolo sullo spin totale fa sì che se due osservatori concordano di misurare lo spin delle due particelle lungo la stessa direzione \mathbf{n} allora se uno troverà come risultato $+\frac{1}{2}\hbar$ l'altro dovrà necessariamente ottenere $-\frac{1}{2}\hbar$, e viceversa.

Fissiamo il sistema di riferimento in maniera tale per cui le misure di spin siano effettuate lungo l'asse z . Consideriamo poi l'operatore della terza componente di spin \hat{S}_z di ogni singola particella (questa fungerà un ruolo analogo a quello dell'osservabile A nella formulazione originale). Questo operatore ammette una base ortonormale composta di due autoket che possiamo indicare con $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$, i corrispettivi autovalori sono rispettivamente $+\frac{1}{2}\hbar$ e $-\frac{1}{2}\hbar$. Esplicitamente le relazioni agli autovalori sono

$$\hat{S}_z |\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \frac{1}{2}\hbar, \quad (1.2.22)$$

$$\hat{S}_z |\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle \frac{1}{2}\hbar. \quad (1.2.23)$$

Se entrambe le particelle hanno probabilità $\frac{1}{2}$ di trovarsi in ciascuno dei due autostati, allora lo stato complessivo delle due particelle $|\psi\rangle$, usando la notazione tensoriale, potrà essere scritto come

$$|\psi\rangle = (|\uparrow\rangle |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (1.2.24)$$

L'anticorrelazione tra gli spin delle due particelle può essere spiegata dicendo che quando il primo osservatore esegue una misura sulla terza componente di spin della prima particella (che corrisponde quindi all'operatore $\hat{S}_z \otimes \mathbb{1}$) causa il collasso dello stato $|\psi\rangle$ o in $|\uparrow\rangle |\downarrow\rangle$, se trova un risultato di spin up, o in $|\downarrow\rangle |\uparrow\rangle$, se trova un risultato di spin down. Il nuovo stato risulterà un autostato dell'operatore $\mathbb{1} \otimes \hat{S}_z$, associato alla terza componente di spin della seconda particella, e con un autovalore che è l'opposto di quello trovato dal primo osservatore. Lo stato (1.2.24) è l'unico stato per cui questo vale per ogni direzione dello spin, non solo per z .

Dimostrazione. Per dimostrare quest'ultima affermazione mostriamo che lo stato (1.2.24) è l'unico per il quale, scelta una qualsiasi direzione α , la probabilità di ottenere $+\frac{1}{2}\hbar$ misurando la componente di spin lungo quella direzione è pari a $\frac{1}{2}$, la stessa di trovare $-\frac{1}{2}\hbar$. Gli unici due stati candidati possono essere scritti come

$$|\psi_{\pm}\rangle = (|\uparrow\rangle |\downarrow\rangle \pm |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (1.2.25)$$

Consideriamo l'operatore che rappresenta la componente di spin lungo una generica direzione α , cioè \hat{S}_{α} , e i suoi due autoket che indichiamo con $|\pm\alpha\rangle$; varranno le due seguenti relazioni agli autovalori

$$\hat{S}_{\alpha} |\pm\alpha\rangle = \pm |\pm\alpha\rangle \frac{1}{2}\hbar. \quad (1.2.26)$$

Per prima cosa scriviamo i due autoket dell'operatore \hat{S}_z , cioè $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$, in termini di $|\pm\alpha\rangle$, utilizzando la teoria di Pauli per il sistema a due stati

$$|\uparrow\rangle = |+\alpha\rangle \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + |-\alpha\rangle \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \exp(i\phi), \quad (1.2.27)$$

$$|\downarrow\rangle = -|+\alpha\rangle \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \exp(-i\phi) + |-\alpha\rangle \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (1.2.28)$$

dove θ è l'angolo tra la direzione z e quella α , mentre ϕ è l'angolo tra la direzione x e la proiezioni di α sul piano $x - y$. Allora gli stati (1.2.25) potrà scriverli come

$$\begin{aligned}
|\psi_{\pm}\rangle &= [|\uparrow\rangle |\downarrow\rangle \pm |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle] \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \left[|+\alpha\rangle |+\alpha\rangle \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \exp(-i\phi)(-1 \mp 1) \right. \\
&\quad + |-\alpha\rangle |-\alpha\rangle \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \exp(i\phi)(1 \pm 1) \\
&\quad + |+\alpha\rangle |-\alpha\rangle \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \mp \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \\
&\quad \left. + |-\alpha\rangle |+\alpha\rangle \left(-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \pm \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \right] \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned} \tag{1.2.29}$$

Nel caso di $|\psi_{+}\rangle$ abbiamo una probabilità non nulla di ottenere risultati come $|\pm\alpha\rangle |\pm\alpha\rangle$, nei quali le misure di spin sulle due particelle non conducono a risultati opposti, quindi escludiamo questa opzione. Nel caso di $|\psi_{-}\rangle$ i termini sopracitati si annullano e rimangono solo quelli con risultati di spin discordi, infatti

$$|\psi_{-}\rangle = (|+\alpha\rangle |-\alpha\rangle - |-\alpha\rangle |+\alpha\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{1.2.30}$$

Consideriamo ora l'operatore della prima componente di spin \hat{S}_x per ciascuna particella. Anche questo operatore ammette una base ortonormale di autoket che indichiamo con $|\rightarrow\rangle$ e $|\leftarrow\rangle$, i corrispettivi autovalori sono rispettivamente $+\frac{1}{2}\hbar$ e $-\frac{1}{2}\hbar$. Le relazioni agli autovalori sono

$$\hat{S}_x |\rightarrow\rangle = |\rightarrow\rangle \frac{1}{2}\hbar, \tag{1.2.31}$$

$$\hat{S}_x |\leftarrow\rangle = -|\leftarrow\rangle \frac{1}{2}\hbar. \tag{1.2.32}$$

Lo stato (1.2.24) può ora essere scritto in termini degli autoket di \hat{S}_x come

$$|\psi\rangle = (|\rightarrow\rangle |\leftarrow\rangle - |\leftarrow\rangle |\rightarrow\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{1.2.33}$$

Anche in questo caso, come da ipotesi iniziale, ci troviamo a che fare con una perfetta anti-corrispondenza tra le misure di S_x , come già visto per S_z . Ovvero una misura della componente di spin lungo x della prima particella (che corrisponde all'operatore $\hat{S}_x \otimes \mathbb{1}$) causa il collasso dello stato $|\psi\rangle$ o in $|\rightarrow\rangle |\leftarrow\rangle$, se si trova uno spin di $\frac{1}{2}\hbar$, o in $|\leftarrow\rangle |\rightarrow\rangle$, se si trova uno spin di $-\frac{1}{2}\hbar$. In entrambi i casi il nuovo stato sarà un'autoket dell'operatore $\mathbb{1} \otimes \hat{S}_x$ corrispondente alla

componente lungo l'asse x dello spin della seconda particella, e avrà un autovalore di segno opposto a quello della prima particella.

Questo ragionamento può essere generalizzato mostrando che per ogni vettore unitario \mathbf{n} posso scrivere lo stato iniziale $|\psi\rangle$ come somma di due termini anticorrelati contenenti autoket dell'operatore $\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{S}}$ che rappresenta la componente di spin lungo la direzione \mathbf{n} .

Le due particelle dopo essere state generate da un decadimento possono essere allontanate l'una dall'altra al punto da escludere che tra le due vi sia alcun tipo di iterazione o scambio di informazioni. Se non vi è allora alcun modo in cui, in seguito ad una misura del primo osservatore, la prima particella possa comunicare alla seconda lo stato in cui questa si è ridotta come è possibile che con assoluta certezza, ovvero con probabilità pari a 1, il secondo osservatore troverà la seconda particella nello stato opposto? Per non violare l'ipotesi di realismo locale di EPR bisogna postulare l'esistenza all'interno delle due particelle di elementi di realtà che determinino univocamente i valori di spin lungo tutte le possibili direzioni \mathbf{n} già dal momento del decadimento, prima cioè che le due particelle vengano allontanate e sottoposte a misurazioni. Secondo la meccanica quantistica però non è possibile definire simultaneamente tutte le possibili componenti del momento angolare di spin, infatti si può verificare che gli operatori che rappresentano tre componenti ortonormali di spin \hat{S}_i con $i = 1, 2, 3$ non commutano tra loro e vale

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{S}_k. \quad (1.2.34)$$

1.2.4 Considerazioni aggiuntive

Riassumiamo in questa sezione le conclusioni che possono essere tratte dal paradosso EPR, in entrambe le sue formulazioni.

Se si parte dal presupposto che la meccanica quantistica sia una teoria completa sappiamo che grandezze fisiche come posizione e impulso, o tutte le direzioni del momento angolare di spin, non possono avere valori definiti simultaneamente, cioè se le si misura allo stesso tempo non è possibile predirne con certezza i valori. Secondo il criterio di realtà di EPR questo significa che non esiste alcun elemento di realtà corrispondente a queste quantità.

Allo stesso tempo la meccanica quantistica prevede l'esistenza di particolari stati entangled che esibiscono però proprietà apparentemente inconciliabili con quanto appena detto. Come mostrato dal paradosso EPR è possibile che dal risultato di una misura su una particella un primo osservatore sia in grado di predire con certezza l'esito di una misura compiuta da un altro osservatore su una seconda particella senza che vi sia scambio di informazione tra le due. Nasce spontanea la domanda su come sia possibile che l'informazione sul risultato di ciascuna misura raggiunga l'altra particella per garantire che il risultato che otterrà il secondo osservatore sarà quello corretto. Va considerato poi un altro problema, sempre legato alla compatibilità con la relatività ristretta: se i due eventi di misura delle due particelle da parte dei due osservatori sono spazio-temperamentale separati da un intervallo di tipo spazio allora non

è possibile stabilire in maniera assoluta quale delle due misure sia avvenuta per prima. Ragionando secondo la fisica classica e invocando il criterio di realtà di EPR viene naturale pensare che entrambe le particelle possiedano un elemento di realtà corrispondente a quell'osservabile, ovvero ad ogni tempo, sin da quando le particelle sono state messe in entanglement, esse possiedono un valore definito per quella grandezza. Questo approccio realista, nel quale si assume che gli oggetti possiedano al loro interno le proprietà già definite, finisce però inevitabilmente per cozzare con la meccanica quantistica. Infatti come evidenziato nel paradosso EPR tra le quantità che dovrebbero essere già possedute e definite dalle due particelle vi sono anche i valori di osservabili non compatibili i cui operatori non commutano, per i quali la meccanica quantistica non prevede elementi di realtà simultanei.

EPR considerando questo problema e prendendo per valido il loro criterio di realtà conclusero che queste difficoltà potessero essere superate solamente ammettendo che la teoria quantistica è incompleta e la funzione d'onda descrive solo parzialmente il reale stato del sistema. Al termine dell'articolo EPR si mostrano convinti che una descrizione completa della realtà fisica sia possibile: "*We believe, however, that such a theory is possible.*" [19], lasciando però aperta la domanda su quale sia questa teoria capace di colmare le lacune della meccanica quantistica. Viene abbastanza naturale a questo punto ipotizzare che questi elementi di realtà interni alle due particelle e non previsti dalla meccanica quantistica possano però essere descritti da un insieme di variabili i cui valori non sono accessibili alle misurazioni alla maniera consueta ma che possono comunque determinare il valore di un osservabile. Queste variabili sono dette quindi *variabili nascoste*.

Non è un compito triviale costruire una teoria delle variabili nascoste perché questa deve riprodurre tutti i risultati della meccanica quantistica, compresi quelli più lontani dal realismo classico, come l'incompatibilità di certi osservabili. Nonostante sia arduo architettarle, questo genere di teorie esistono ma hanno un grosso problema, mostrano comportamenti di non-località. Si potrebbe pensare che questa sia una mancanza dei fisici che hanno lavorato a queste teorie e che un giorno sarà possibile sopperire anche a questo problema, ma a togliere ogni speranza in tal senso interviene il teorema di Bell.

1.3 Teorema di Bell

1.3.1 Disuguaglianza di Bell

Il teorema di Bell e l'omonima disuguaglianza vennero per la prima volta formulati in un articolo del 1964 di J. S. Bell dal titolo "*On the Einstein Podolsky Rosen Paradox*" [3]. Come già si evince dal titolo questo teorema ha strettamente a che fare con il paradosso EPR, in particolare stabilisce l'impossibilità fisica di realizzare una teoria delle variabili nascoste che sia locale e al contempo compatibile con le predizioni della meccanica quantistica tradizionale. Per provare ciò il teorema utilizza una disuguaglianza che nella sua forma originale prende il nome di disuguaglianza di Bell, ma di cui nel tempo sono state sviluppate diverse versioni e

dimostrazioni. In generale si può dire che la disuguaglianza di Bell è una relazione funzionale che può essere direttamente derivata dalle premesse di localismo e realismo proprie di certe interpretazioni della meccanica quantistica, come quella delle teorie delle variabili nascoste. In queste interpretazioni, oltre a non violare la relatività ristretta, si ritiene sensato attribuire un valore intrinseco a tutte le quantità fisiche, anche a quelle per cui la meccanica quantistica tradizionale non è in grado di predire con certezza l'esito di una misura. Vedremo in questa sezione come le predizioni della meccanica quantistica violino la disuguaglianza di Bell.

Facendo riferimento alla versione di Bohm del paradosso EPR [6] e seguendo la trattazione di Bell [3] consideriamo una coppia di particelle di spin $1/2$ libere di muoversi in direzioni opposte e legate in uno stato di singoletto di spin descritto dal ket

$$|\psi\rangle = (|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (1.3.1)$$

Su ciascuna delle due particelle è possibile eseguire delle misure sulle componenti dello spin utilizzando ad esempio dei magneti di Stern-Gerlach. Siano \hat{S}_i , con $i = 1, 2$, gli operatori di spin delle due particelle. La teoria del momento angolare di spin quantistico ci dice che per particelle di spin $1/2$ l'operatore di spin è legato all'operatore di Pauli $\hat{\sigma}_i$ dalla semplice relazione $\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_i$. Sia poi \mathbf{a} un vettore unitario, allora una misura della componente $\mathbf{a} \cdot \hat{\sigma}_i$ può avere due soli esiti possibili, ovvero ± 1 . Dato che lo stato di massima anticorrelazione $|\psi\rangle$ che lega lo spin delle due particelle, se una misura dell'osservabile $\mathbf{a} \cdot \hat{\sigma}_1$ porta al risultato di $+1$ allora si potrà con certezza concludere che la misura di $\mathbf{a} \cdot \hat{\sigma}_2$ condurrà ad un valore di -1 , e viceversa.

Introduciamo ora la prima ipotesi del teorema di Bell, ovvero quella di (1) località: se le due misure di spin sono eseguite a grande distanza spaziale l'una dall'altra, l'orientazione di uno dei due apparati di misura non influenza il risultato ottenuto dall'altro. In altri termini, non c'è modo che l'informazione di aver scelto la direzione \mathbf{a} per il primo magnete possa influenzare l'esito della misura del secondo magnete sulla seconda particella.

Dato che dopo aver misurato una qualsiasi componente di $\hat{\sigma}_1$ possiamo predire in anticipo il risultato di una misura della stessa componente di $\hat{\sigma}_2$, senza che tra le due particelle vi sia stato alcuno scambio di informazioni per la (1), allora può sembrare ragionevole supporre che il risultato delle misure sia già predeterminato. Questa è la seconda ipotesi di Bell, quella di (2) realismo: tutte le componenti di spin delle due particelle possiedono valori definiti.

La funzione d'onda iniziale della meccanica quantistica però non determina in anticipo i valori dello spin lungo una qualsiasi componente così, basandoci sulla (2), abbiamo la possibilità di introdurre una specificazione dello stato più completa tramite alcune variabili nascoste locali che indichiamo con λ . Non ha particolare importanza se λ indichi una sola variabile o un insieme, se sia continua o discreta. In questo modo il risultato della misura di $\mathbf{a} \cdot \hat{\sigma}_1$, che indicheremo con $A(\mathbf{a})$ è univocamente determinato dalla scelta di \mathbf{a} e λ ; in maniera analoga il risultato della misura di $\mathbf{b} \cdot \hat{\sigma}_2$, che indicheremo con $B(\mathbf{b})$, con \mathbf{b} un altro vettore unitario, è univocamente determinato dalla scelta di \mathbf{b} e λ .

Data l'ipotesi di realismo, il comportamento probabilistico della meccanica quantistica tradizionale può essere considerato come una diretta conseguenza della mancata conoscenza del valore di λ . Si può almeno in principio pensare che sia possibile riprodurre tutti i risultati probabilistici della meccanica quantistica tenendo conto della distribuzione di probabilità $\rho(\lambda)$ della variabile nascosta λ . Vedremo in seguito come ciò in realtà non sia possibile.

Consideriamo ora come osservabile la funzione di correlazione $c(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ tra gli esiti delle misure di $\mathbf{a} \cdot \hat{\sigma}_1$ e quelle di $\mathbf{b} \cdot \hat{\sigma}_2$, definendola come il prodotto tra $A(\mathbf{a})$ e $B(\mathbf{b})$.

Se due risultati sono correlati avremo che il prodotto $A(\mathbf{a})B(\mathbf{b})$ è pari a $+1$ e quindi $c(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = +1$, mentre se sono anticorrelati $c(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -1$.

Nel nostro caso le due particelle si trovano nello stato di singoletto di spin $|\psi\rangle$, quindi se $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ allora gli esiti delle misure $A(\mathbf{a})$ e $B(\mathbf{a})$ avranno sempre segni opposti e dunque $c(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = -1$, mentre avremo che $c(\mathbf{a}, -\mathbf{a}) = +1$.

In generale, data la natura probabilistica della meccanica quantistica, o, se si preferisce, data la mancata conoscenza del parametro λ che specifichi univocamente gli esiti delle due misure, anche la correlazione $c(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, a meno di casi particolari come quelli appena visti, non risulta essere univocamente determinata dalla scelta dei vettori unitari \mathbf{a} e \mathbf{b} . Andiamo quindi a considerarne il valore medio $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, questo secondo la teoria delle variabili nascoste appena introdotta sarà dato da

$$C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) B(\mathbf{b}, \lambda). \quad (1.3.2)$$

Ci aspettiamo che questo valore sia in accordo con quello di aspettazione previsto della meccanica quantistica per la correlazione tra misure dello spin lungo l'asse \mathbf{a} e l'asse \mathbf{b} per una coppia di particelle entangled nello stato $|\psi\rangle$. Questo è dato da

$$C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left(\frac{2}{\hbar}\right)^2 \langle \psi | \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{S}}_1 \otimes \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{S}}_2 | \psi \rangle \quad (1.3.3)$$

dove l'operatore $\left(\frac{2}{\hbar}\right)^2 \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{S}}_1 \otimes \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{S}}_2$ rappresenta l'osservabile $A(\mathbf{a})B(\mathbf{b})$, quindi a meno di una costante il prodotto tra la componente di spin lungo \mathbf{a} della prima particella e la componente di spin lungo \mathbf{b} della seconda particella.

Si può dimostrare che

$$C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (1.3.4)$$

Dimostrazione. Dato che lo spin totale di $|\psi\rangle$ è nullo, questo stato è invariante sotto l'azione di operatori unitari che generano rotazioni del sistema di riferimento. Questo significa che $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ è una funzione del solo prodotto scalare tra i due vettori unitari $\cos \theta_{ab} := \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ e inoltre si può arbitrariamente scegliere un sistema di riferimento il cui asse z punti nella stessa direzione di \mathbf{a} mentre \mathbf{b} giace sul piano $x - z$. Quindi la (1.3.3) diventa

$$C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \langle \psi | \hat{\sigma}_{1z} \otimes (\hat{\sigma}_{2z} \cos \theta_{ab} + \hat{\sigma}_{2x} \sin \theta_{ab}) | \psi \rangle, \quad (1.3.5)$$

dove $\hat{\sigma}_{1z}$ è l'operatore di Pauli nella direzione z per la prima particella, $\hat{\sigma}_{2z}$ è l'operatore di Pauli nella direzione z per la seconda particella e $\hat{\sigma}_{2x}$ è l'operatore di Pauli nella direzione x per la seconda particella.

La forma degli operatori di Pauli $\hat{\sigma}_{iz}$ e $\hat{\sigma}_{ix}$ con $i = 1, 2$, nella base di autoket $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ dell'operatore $\hat{\sigma}_{iz}$ è la seguente

$$\hat{\sigma}_{ix} = |\uparrow\rangle \langle\downarrow| + |\downarrow\rangle \langle\uparrow|, \quad (1.3.6)$$

$$\hat{\sigma}_{iz} = |\uparrow\rangle \langle\uparrow| - |\downarrow\rangle \langle\downarrow|. \quad (1.3.7)$$

Ricordando poi l'espressione di $|\psi\rangle$ possiamo calcolarci

$$\begin{aligned} & \hat{\sigma}_{1z} \otimes (\hat{\sigma}_{2z} \cos \theta_{ab} + \hat{\sigma}_{2x} \sin \theta_{ab}) |\psi\rangle \\ &= \hat{\sigma}_{1z} \otimes (\hat{\sigma}_{2z} \cos \theta_{ab} + \hat{\sigma}_{2x} \sin \theta_{ab}) [|\uparrow\rangle |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle] \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= [|\uparrow\rangle (-|\downarrow\rangle \cos \theta_{ab} + |\uparrow\rangle \sin \theta_{ab}) + |\downarrow\rangle (|\uparrow\rangle \cos \theta_{ab} + |\downarrow\rangle \sin \theta_{ab})] \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned} C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \langle\psi| \hat{\sigma}_{1z} \otimes (\hat{\sigma}_{2z} \cos \theta_{ab} + \hat{\sigma}_{2x} \sin \theta_{ab}) |\psi\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\langle\uparrow| \langle\downarrow| - \langle\downarrow| \langle\uparrow|] [|\uparrow\rangle (-|\downarrow\rangle \cos \theta_{ab} + |\uparrow\rangle \sin \theta_{ab}) \\ &\quad + |\downarrow\rangle (|\uparrow\rangle \cos \theta_{ab} + |\downarrow\rangle \sin \theta_{ab})] \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= -\cos \theta_{ab}, \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

da cui l'espressione (1.3.4).

Prima di procedere con la derivazione della disuguaglianza di Bell, grazie alla quale si può dimostrare come il risultato basato sulle ipotesi di località e realismo (1.3.2) sia incompatibile con quello quantistico (1.3.4), illustriamo invece come le misure di spin su una singola particella potrebbero essere spiegate con una teoria delle variabili nascoste.

Supponiamo di avere una singola particella di spin $1/2$ in uno stato puro di spin con polarizzazione denotata dal vettore unitario \mathbf{p} e poniamo di essere interessati alla misura di $\mathbf{a} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$. Allora per la meccanica quantistica il valore di aspettazione per l'osservabile $\mathbf{a} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ è semplicemente dato da

$$\bar{A}(\mathbf{a}) = \cos \theta, \quad (1.3.10)$$

dove θ rappresenta l'angolo tra \mathbf{a} e \mathbf{p} .

Dimostrazione. Lo stato iniziale in cui si trova la particella è l'autostato $|\uparrow\rangle$ dell'operatore $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, il quale potrà anche essere scritto tramite l'esponenziale di Pauli come

$$|\uparrow\rangle = |\nearrow\rangle \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + |\swarrow\rangle \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \exp(i\phi), \quad (1.3.11)$$

dove θ è l'angolo tra \mathbf{a} e \mathbf{p} , $\exp(i\phi)$ è un numero complesso di modulo unitario che dipende da \mathbf{p} , mentre $|\nearrow\rangle$ e $|\swarrow\rangle$ sono gli autoket dell'operatore $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$. L'osservabile $A(\mathbf{a})$ è associato all'operatore $\mathbf{a} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ che può essere scritto come

$$\mathbf{a} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} = |\nearrow\rangle \langle \nearrow| - |\swarrow\rangle \langle \swarrow|. \quad (1.3.12)$$

Possiamo così calcolare il valore di aspettazione come

$$\bar{A}(\mathbf{a}) = \langle \uparrow | \mathbf{a} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} | \uparrow \rangle = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos(\theta). \quad (1.3.13)$$

Utilizziamo ora come variabile nascosta il vettore unitario $\boldsymbol{\lambda}$ con una distribuzione di probabilità uniforme sulla semisfera $\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{p} > 0$. Allora il risultato della misura della componente $\mathbf{a} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ è specificato da

$$\text{sgn}(\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{a}'), \quad (1.3.14)$$

dove \mathbf{a}' è un vettore unitario che dipende da \mathbf{a} e \mathbf{p} in un modo che specificheremo dopo e $\text{sgn}()$ è la funzione segno che assume i soli valori ± 1 a seconda del segno del suo argomento.

Mediando su tutti i possibili $\boldsymbol{\lambda}$ otteniamo come valore di aspettazione dell'operatore $\mathbf{a} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$

$$\bar{A}(\mathbf{a}) = 1 - \frac{2\theta'}{\pi} \quad (1.3.15)$$

dove θ' è l'angolo tra \mathbf{a}' e \mathbf{p} .

Dimostrazione. Scegliamo un sistema di riferimento per cui il vettore \mathbf{p} sia diretto parallelamente all'asse z . Orientiamo invece gli assi x e y in modo tale che il vettore \mathbf{a}' giaccia sul piano $y - z$. Consideriamo la semisfera positiva di raggio unitario centrata nell'origine, indicandola con Γ , ogni suo punto rappresenta un possibile valore per la variabile nascosta $\boldsymbol{\lambda}$. Tracciamo il piano perpendicolare a \mathbf{a}' nell'origine, questo intersecherà la semisfera tagliandola in due porzioni. Ogni qualvolta $\boldsymbol{\lambda}$ sarà contenuta nella porzione di semisfera che contiene anche \mathbf{a}' , chiamiamola Γ_1 , il prodotto scalare tra i due vettori sarà positivo, visto che l'angolo tra i due è minore di $\frac{\pi}{2}$ e quindi $\text{sgn}(\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{a}') = +1$. Al contrario quando $\boldsymbol{\lambda}$ cade nella porzione di sfera che non contiene \mathbf{a}' , chiamiamola Γ_2 , allora $\text{sgn}(\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{a}') = -1$. Dato che la distribuzione della variabile nascosta è uniforme, quindi pari a $\rho(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2\pi}$, possiamo calcolarci il valore medio

dell'osservabile $\mathbf{a} \cdot \hat{\sigma}$ come

$$\begin{aligned}\bar{A}(\mathbf{a}) &= \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) \operatorname{sgn}(\lambda \cdot \mathbf{a}') = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\Gamma} d\lambda - 2 \int_{\Gamma_2} d\lambda \right] \\ &= 1 - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_2} d\lambda.\end{aligned}\tag{1.3.16}$$

L'ultimo integrale non è altro che l'area dello spicchio sferico Γ_2 con apertura angolare θ' , ovvero $\frac{\theta'}{2\pi}$ volte la superficie totale della sfera. Si ricava così immediatamente la (1.3.15).

Se poniamo che \mathbf{a}' sia stato ottenuto dalla rotazione di \mathbf{a} verso \mathbf{p} fintantoché

$$1 - \frac{2\theta'}{\pi} = \cos \theta\tag{1.3.17}$$

con θ che è l'angolo tra \mathbf{a} e \mathbf{p} , allora otteniamo lo stesso risultato predetto dalla meccanica quantistica, ovvero la (1.3.10).

È quindi possibile, per una singola particella, formulare una teoria delle variabili nascoste che preveda gli stessi risultati della meccanica quantistica. Volendo si può utilizzare un approccio simile per costruire una teoria delle variabili nascoste che riproduca la previsione quantistica per la correlazione C della (1.3.4) (per i dettagli si veda l'articolo di Bell [3]), ma il prezzo da pagare in questo caso è la rinuncia alla località. Per formalizzare meglio la questione introduciamo la disuguaglianza di Bell.

Siano \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{b}' tre vettori unitari, allora per una teoria delle variabili nascoste locale i valori medi delle correlazioni C tra le misure di spin lungo questi tre vettori devono rispettare la **disuguaglianza di Bell** seguente

$$1 + C(\mathbf{b}', \mathbf{b}) \geq |C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - C(\mathbf{a}, \mathbf{b}')|.\tag{1.3.18}$$

Dimostrazione. Dato che la distribuzione di probabilità ρ di λ è normalizzata, cioè

$$\int d\lambda \rho(\lambda) = 1,\tag{1.3.19}$$

e visto che sia per $\mathbf{a} \cdot \hat{\sigma}_1$ che per $\mathbf{b} \cdot \hat{\sigma}_2$ gli unici due valori possibili sono ± 1 , cioè

$$A(\mathbf{a}, \lambda) = \pm 1, \quad B(\mathbf{b}, \lambda) = \pm 1,\tag{1.3.20}$$

allora il $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ della (1.3.2) non può essere minore di -1 . Dato lo stato $|\psi\rangle$ in cui si trova la coppia di particelle se $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ allora $A(\mathbf{a}, \lambda) = -B(\mathbf{a}, \lambda)$. Possiamo così riscrivere la (1.3.2) come

$$C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = - \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda).\tag{1.3.21}$$

Considerando un altro vettore unitario \mathbf{b}' possiamo calcolarci la seguente differenza

$$\begin{aligned} C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - C(\mathbf{a}, \mathbf{b}') &= - \int d\lambda \rho(\lambda) [A(\mathbf{a}, \lambda)A(\mathbf{b}, \lambda) - A(\mathbf{a}, \lambda)A(\mathbf{b}', \lambda)] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) [A(\mathbf{b}, \lambda)A(\mathbf{b}', \lambda) - 1], \end{aligned} \quad (1.3.22)$$

dato che $A(\mathbf{b}, \lambda)^2 = +1$. Applicando il modulo e utilizzando la (1.3.20) si ricava la disequazione

$$|C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - C(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| \leq \int d\lambda \rho(\lambda) [1 - A(\mathbf{b}, \lambda)A(\mathbf{b}', \lambda)]. \quad (1.3.23)$$

Utilizzando la (1.3.19) e notando che l'integrale rimanente al membro di destra della disequazione (1.3.23) è $C(\mathbf{b}', \mathbf{b})$ nella forma della (1.3.21), otteniamo infine la disuguaglianza desiderata (1.3.18).

Per concludere la dimostrazione del teorema di Bell si può vedere come l'espressione del valore di aspettazione quantistico di C dato dalla (1.3.4) non soddisfi la disuguaglianza di Bell (1.3.18). Infatti se si sostituisce $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ nella (1.3.18) e si considerano piccoli angoli tra \mathbf{b} e \mathbf{b}' il lato sinistro della disuguaglianza (1.3.18) è al secondo ordine, mentre il lato destro è al primo ordine. Per avere una verifica numerica diretta basta considerare \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{b}' complanari, con ad esempio $\theta_{bb'} = 5^\circ$, $\theta_{ab'} = 170^\circ$ e $\theta_{ab} = 185^\circ$. Per questi valori la disuguaglianza diventa circa $0.0038 \geq 0.011$, che è chiaramente falsa.

Abbiamo così dimostrato il teorema di Bell, ovvero: se il formalismo e le previsioni della meccanica quantistica sono corretti allora il principio di realismo locale non è applicabile al sistema di due elettroni entangled.

1.3.2 Disuguaglianza CHSH

EPR concludevano il loro articolo del 1935 [19] suggerendo che la descrizione della realtà della meccanica quantistica andasse completata postulando l'esistenza di variabili nascoste capaci di predeterminare i valori delle misure di ogni osservabile. Nel 1964 Bell aveva mostrato [3] tramite il suo teorema come una qualsiasi teoria delle variabili nascoste locale non fosse in grado di riprodurre tutte le previsioni della meccanica quantistica. Nel 1969 venne proposta la disuguaglianza CHSH, il cui nome deriva dalle iniziali dei quattro fisici che per primi la dimostrarono: J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, R. A. Holt [14]. Questa disuguaglianza può essere usata all'interno della dimostrazione del teorema di Bell al posto della disuguaglianza di Bell, con il vantaggio di essere più generale e soprattutto più facilmente testabile con esperimenti fisici.

Per la dimostrazione della disuguaglianza seguiremo l'impostazione generale dell'articolo originale [14] ma poi ci affideremo alla dimostrazione data da Bell nel 1971, così come è esposta nel capitolo 4 di "*Speakable and Unspeakable*" [5].

Consideriamo quindi un ensemble di coppie di particelle entangled tali per cui all'interno di ogni coppia una particella si muove verso un apparato di misura I_a e l'altra verso un secondo apparato di misura I_b , dove a e b sono parametri dell'apparato che possono essere modificati a piacere dagli sperimentatori. In ciascuno dei due apparati la particella può selezionare uno solo di due canali disponibili che etichettiamo con ± 1 . Definiamo $A(a)$ e $B(b)$ come i risultati della selezione, quindi ciascuno di essi può avere solo due valori, o $+1$ o -1 , a seconda che sia selezionato il primo o il secondo canale.

Facciamo ora intervenire l'ipotesi di realismo ipotizzando che lo stato iniziale delle particelle è descritto completamente da un insieme di variabili nascoste, che collettivamente indicheremo con λ , e localizzate all'interno di ciascuna particella. I risultati delle due selezioni sono quindi univocamente determinati dalle funzioni $A(a, \lambda)$ e $B(b, \lambda)$.

L'ipotesi di localismo impone che $A(a, \lambda)$ sia indipendente dal parametro b e viceversa $B(b, \lambda)$ sia indipendente dal parametro a . Inoltre, dato che le particelle sono emesse da una sorgente fisicamente indipendente dai due apparati di misura, assumiamo che la distribuzione di probabilità normalizzata $\rho(\lambda)$ che caratterizza l'ensemble sia indipendente da a e b .

Possiamo allora definire la funzione di correlazione $c(a, b)$ come il prodotto tra $A(a)$ e $B(b)$ e possiamo considerarne il valor medio, cioè

$$C(a, b) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(a, \lambda) B(b, \lambda). \quad (1.3.24)$$

Ci chiediamo se questo valor medio possa coincidere con la predizione quantistica.

A differenza di Clauser *et al.* a questo punto Bell introduce l'ulteriore ipotesi che l'apparato di misura stesso possa contenere al suo interno delle variabili nascoste che possono influenzare il risultato. Per tenere conto anche di ciò possiamo mediare A e B su tutte le possibili variabili nascoste degli strumenti di misura. Le medie \bar{A} e \bar{B} così ottenute saranno anch'esse indipendenti rispettivamente da b e a . Inoltre mentre prima avevamo

$$A = \pm 1, \quad B = \pm 1, \quad (1.3.25)$$

ora abbiamo

$$|\bar{A}| \leq 1, \quad |\bar{B}| \leq 1, \quad (1.3.26)$$

e ciò è comunque sufficiente a imporre condizioni interessanti sul valor medio della correlazione C , che con i valori mediati assume la forma

$$C(a, b) = \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(a, \lambda) \bar{B}(b, \lambda). \quad (1.3.27)$$

Nel caso pratico in cui uno o entrambi i due apparati falliscano nel registrare la particella è possibile contare A e/o B come zero nelle definizioni di C , \bar{A} e/o \bar{B} . Questo non pone problemi alla validità della (1.3.26). Questa possibilità, utile all'atto pratico, non era presa in

considerazione nella dimostrazione originale di Clauser *et al.*, visto che loro consideravano come possibili solo i valori ± 1 e non lo 0.

Siano a' e b' due parametri alternativi per l'apparato sperimentale, allora si può ricavare la seguente disuguaglianza

$$|C(a, b) + C(a', b) - C(a, b') + C(a', b')| \leq 2, \quad (1.3.28)$$

che prende il nome di **disuguaglianza CHSH**.

Dimostrazione. Consideriamo la differenza $C(a, b) - C(a, b')$ e usando la (1.3.27) si ha

$$\begin{aligned} C(a, b) - C(a, b') &= \int d\lambda \rho(\lambda) [\bar{A}(a, \lambda) \bar{B}(b, \lambda) - \bar{A}(a, \lambda) \bar{B}(b', \lambda)] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(a, \lambda) \bar{B}(b, \lambda) (1 \pm \bar{A}(a', \lambda) \bar{B}(b', \lambda)) \\ &\quad - \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(a, \lambda) \bar{B}(b', \lambda) (1 \pm \bar{A}(a', \lambda) \bar{B}(b, \lambda)). \end{aligned} \quad (1.3.29)$$

Poi usando la disuguaglianza triangolare e la (1.3.26) si ottiene

$$\begin{aligned} |C(a, b) - C(a, b')| &\leq \int d\lambda \rho(\lambda) (1 \pm \bar{A}(a', \lambda) \bar{B}(b', \lambda)) \\ &\quad + \int d\lambda \rho(\lambda) (1 \pm \bar{A}(a', \lambda) \bar{B}(b, \lambda)), \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

e ricordando la (1.3.27) e che $\rho(\lambda)$ è normalizzata a 1 si può anche scrivere

$$|C(a, b) - C(a, b')| \leq 2 \pm (C(a', b') + C(a', b)). \quad (1.3.31)$$

Questo significa che la disequazione deve valere per entrambi i due possibili segni \pm , esplicitamente

$$\begin{cases} |C(a, b) - C(a, b')| \leq 2 + (C(a', b') + C(a', b)), \\ |C(a, b) - C(a, b')| \leq 2 - (C(a', b') + C(a', b)), \end{cases} \quad (1.3.32)$$

la cui soluzione diventa

$$|C(a, b) - C(a, b')| + |C(a', b') + C(a', b)| \leq 2, \quad (1.3.33)$$

ed applicando nuovamente la disuguaglianza triangolare si può ottenere la (1.3.28).

Questo è lo stesso risultato già ottenuto da Clauser *et al.* qualche anno prima di Bell [14], ma nella rappresentazione ristretta di (1.3.24), con due soli valori possibili per A e B . Inoltre se si pone $a' = b'$ e si assume che $C(b', b') = -1$ (perfetta anticorrelazione) allora si riottiene la disuguaglianza di Bell originale (1.3.18).

Dobbiamo ora verificare che questa disuguaglianza non è compatibile con le previsioni della meccanica quantistica e per fare ciò mettiamoci in un caso particolare. Consideriamo una collezione di sistemi costituiti da coppie di particelle di spin 1/2 descritte da uno stato di singoletto di spin dato dal ket

$$|\psi\rangle = (|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (1.3.34)$$

Considero invece come apparati di misura I_a e I_b due magneti di Stern-Gerlach predisposti in maniera tale da misurare la componente di spin delle prima particella lungo la direzione \mathbf{a} e la componente di spin della seconda particella lungo la direzione \mathbf{b} . Utilizzo quindi i vettori unitari \mathbf{a} e \mathbf{b} come parametri dell'apparato. L'operatore di spin \hat{S}_i della particella i -esima, con $i = 1, 2$, è dato da $\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_i$, dove $\hat{\sigma}_i$ è l'operatore di Pauli per la particella i -esima. Dato che le componenti di spin di una particella di spin 1/2 possono assumere i due soli valori $\pm\frac{1}{2}\hbar$, possiamo utilizzare come osservabili $A(\mathbf{a})$ e $B(\mathbf{b})$ rispettivamente $\mathbf{a} \cdot \hat{\sigma}_1$ e $\mathbf{b} \cdot \hat{\sigma}_2$, i cui unici due valori possibili sono come da richiesta ± 1 .

Le ipotesi di realismo e localismo in questo caso si traducono nel dire che

1. Per ciascuna particella si può dire che esista un valore definito per le proiezioni del suo spin lungo una qualsiasi direzione. Questo valore è specificato dalla variabile nascosta λ .
2. Il valore dello spin della prima particella lungo una direzione non dipende in alcun modo dalla direzione in cui il secondo sperimentatore, spazialmente separato dal primo, decide di misurare lo spin della seconda particella.

Date queste ipotesi abbiamo appena dimostrato che il valore medio della correlazione C per misure delle componenti di spin deve rispettare la disuguaglianza CHSH (1.3.28)

$$|C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + C(\mathbf{a}, \mathbf{b}') - C(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + C(\mathbf{a}', \mathbf{b}')| \leq 2. \quad (1.3.35)$$

Bisogna ora chiedersi se questa disuguaglianza è rispettata anche dalla meccanica quantistica. Ci siamo già calcolati nella sezione precedente quale sia il valore medio della correlazione C tra misure dello spin lungo l'asse \mathbf{a} e l'asse \mathbf{b} per una coppia di particelle entangled nello stato $|\psi\rangle$ per la meccanica quantistica, esso sarà dato da

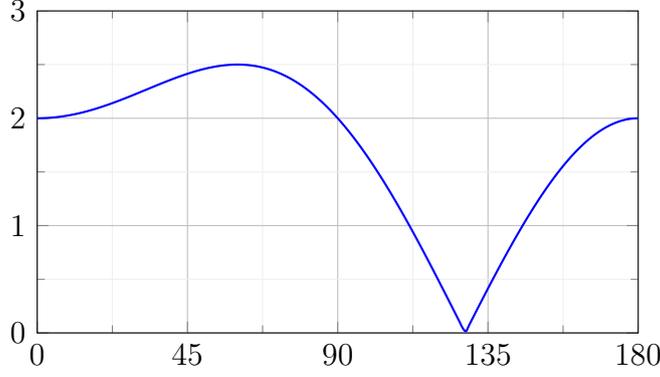
$$C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\cos\theta_{ab}. \quad (1.3.36)$$

Concentriamoci ora su un caso particolare della (1.3.35), dove i quattro vettori unitari \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{a}' e \mathbf{b}' sono complanari, \mathbf{a} e \mathbf{b}' sono paralleli e $\theta_{ab} = \theta_{a'b'} = \phi$. La disuguaglianza CHSH sarà soddisfatta se vale

$$|1 + 2\cos\phi - \cos 2\phi| \leq 2. \quad (1.3.37)$$

Graficamente (vedi figura 1.1) si nota come questa relazione sia violata per tutti i valori di ϕ compresi tra 0 e $\pi/2$.

Figura 1.1: Grafico della funzione $|1 + 2 \cos \phi - \cos 2\phi|$. La variabile ϕ è rappresentata in gradi.



Il limite massimo previsto dalla meccanica quantistica per il membro sinistro della disequazione CHSH (1.3.28) è detto **limite di Tsirelson** ed è pari a $2\sqrt{2}$ [12].

Dimostrazione. Consideriamo come quattro osservabili $A(a)$, $A(a')$, $B(b)$ e $B(b')$. Per semplificare la notazione scriviamo $A(a) = A_0$, $A(a') = A_1$, $B(b) = B_1$ e $B(b') = B_0$. Per ciascuno di questi osservabili gli unici due possibili risultati sono ± 1 e inoltre $[\hat{A}_i, \hat{B}_j] = 0$ per $i, j = 0, 1$. Possiamo allora definire l'osservabile S come

$$S = A_0 B_0 + A_0 B_1 + A_1 B_0 - A_1 B_1. \quad (1.3.38)$$

Notando come $\hat{A}_i^2 = \mathbb{1}$ e $\hat{B}_j^2 = \mathbb{1}$ per $i, j = 0, 1$, possiamo scrivere l'operatore associato a S^2 utilizzando l'identità Khalfin–Tsirelson–Landau come

$$\hat{S}^2 = 4\mathbb{1} - [\hat{A}_0, \hat{A}_1][\hat{B}_0, \hat{B}_1]. \quad (1.3.39)$$

La correttezza dell'espressione precedente può essere verificata direttamente, infatti

$$\begin{aligned} \hat{S}^2 &= \hat{A}_0^2 \hat{B}_0^2 + \hat{A}_0^2 \hat{B}_1^2 + \hat{A}_1^2 \hat{B}_0^2 + \hat{A}_1^2 \hat{B}_1^2 \\ &\quad + \hat{A}_0 \hat{B}_0 \hat{A}_0 \hat{B}_1 + \hat{A}_0 \hat{B}_1 \hat{A}_0 \hat{B}_0 + \hat{A}_0 \hat{B}_0 \hat{A}_1 \hat{B}_0 + \hat{A}_1 \hat{B}_0 \hat{A}_0 \hat{B}_0 \\ &\quad - \hat{A}_0 \hat{B}_0 \hat{A}_1 \hat{B}_1 - \hat{A}_1 \hat{B}_1 \hat{A}_0 \hat{B}_0 + \hat{A}_0 \hat{B}_1 \hat{A}_1 \hat{B}_0 + \hat{A}_1 \hat{B}_0 \hat{A}_0 \hat{B}_1 \\ &\quad - \hat{A}_0 \hat{B}_1 \hat{A}_1 \hat{B}_1 - \hat{A}_1 \hat{B}_1 \hat{A}_0 \hat{B}_1 - \hat{A}_1 \hat{B}_0 \hat{A}_1 \hat{B}_1 - \hat{A}_1 \hat{B}_1 \hat{A}_1 \hat{B}_0 \\ &= 4\mathbb{1} + \hat{B}_0 \hat{B}_1 + \hat{B}_1 \hat{B}_0 + \hat{A}_0 \hat{A}_1 + \hat{A}_1 \hat{A}_0 \\ &\quad - \hat{A}_0 \hat{B}_0 \hat{A}_1 \hat{B}_1 - \hat{A}_1 \hat{B}_1 \hat{A}_0 \hat{B}_0 + \hat{A}_0 \hat{B}_1 \hat{A}_1 \hat{B}_0 + \hat{A}_1 \hat{B}_0 \hat{A}_0 \hat{B}_1 \\ &\quad - \hat{A}_0 \hat{A}_1 - \hat{A}_1 \hat{A}_0 - \hat{B}_0 \hat{B}_1 - \hat{B}_1 \hat{B}_0 \\ &= 4\mathbb{1} - \hat{A}_0 \hat{A}_1 \hat{B}_0 \hat{B}_1 - \hat{A}_1 \hat{A}_0 \hat{B}_1 \hat{B}_0 + \hat{A}_0 \hat{A}_1 \hat{B}_1 \hat{B}_0 + \hat{A}_1 \hat{A}_0 \hat{B}_0 \hat{B}_1 \\ &= 4\mathbb{1} - (\hat{A}_0 \hat{A}_1 - \hat{A}_1 \hat{A}_0)(\hat{B}_0 \hat{B}_1 - \hat{B}_1 \hat{B}_0) \\ &= 4\mathbb{1} - [\hat{A}_0, \hat{A}_1][\hat{B}_0, \hat{B}_1]. \end{aligned} \quad (1.3.40)$$

Abbiamo poi che la norma degli operatori \hat{A}_i e \hat{B}_j è 1 per tutti gli i e j , cioè $\|\hat{A}_i\| = \|\hat{B}_j\| = 1$ per $i, j = 0, 1$. Inoltre

$$\|[\hat{A}_0, \hat{A}_1]\| = \|\hat{A}_0\hat{A}_1 - \hat{A}_1\hat{A}_0\| \leq 2\|\hat{A}_0\|\|\hat{A}_1\| = 2, \quad (1.3.41)$$

lo stesso procedimento conduce anche a $\|[\hat{B}_0, \hat{B}_1]\| \leq 2$. Si può quindi vedere che

$$\begin{aligned} \|\hat{S}\|^2 &\leq 4\|\mathbb{1}\| + \|[\hat{A}_0, \hat{A}_1][\hat{B}_0, \hat{B}_1]\| \\ &\leq 4 + \|[\hat{A}_0, \hat{A}_1]\|\|[\hat{B}_0, \hat{B}_1]\| \\ &\leq 4 + 4 = 8. \end{aligned} \quad (1.3.42)$$

Perciò si ha infine

$$|\langle S \rangle| \leq \|\hat{S}\| \leq 2\sqrt{2}. \quad (1.3.43)$$

È immediato notare come $|\langle S \rangle|$ non sia altro che il termine a sinistra della disuguaglianza CHSH (1.3.35).

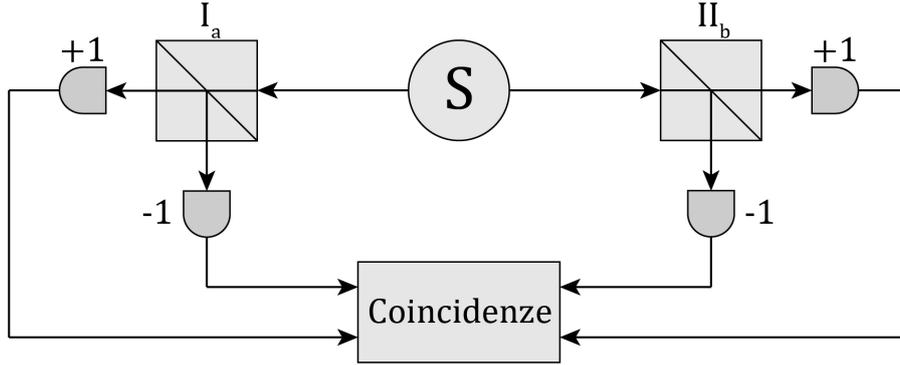
Le predizioni della meccanica quantistica sono quindi in contraddizione con la disuguaglianza CHSH e perciò anche con almeno una delle due assunzioni su cui questa si basava: località e realismo. Se empiricamente si dimostra che le predizioni della meccanica quantistica sono valide, allora ogni teoria nella quale si assume che i sistemi possiedano valori individuali degli osservabili contiene necessariamente al suo interno elementi di non località. Questo è il risultato del teorema di Bell.

1.4 Prove sperimentali del teorema di Bell

1.4.1 Generalità

Con il teorema di Bell abbiamo dimostrato che in ogni teoria realista locale la correlazione tra due misurazioni distanti deve soddisfare una disuguaglianza e che in accordo con la teoria quantistica questa disuguaglianza può essere violata. In questo modo abbiamo la possibilità di testare sperimentalmente alcuni dei principi fondamentali della natura e non deve quindi sorprendere che siano stati realizzati un gran numero di esperimenti per mettere alla prova questa disuguaglianza. In questa sezione se ne vuole fornire una rapida introduzione utilizzando come fonti principali un articolo di Reid *et al.* [37] e l'Enciclopedia Filosofica di Stanford [32].

Figura 1.2: Apparato sperimentale di un tipico esperimento CHSH ottico. S è la sorgente mentre I_a e II_b sono due polarizzatori a due canali orientati rispettivamente nelle direzioni a e b . I fotoni con polarizzazione parallela all'asse ottico sono incanalati nel canale $+1$, mentre quelli polarizzati perpendicolarmente nel canale -1 .



Spesso all'interno degli esperimenti si tende ad utilizzare la disuguaglianza CHSH, piuttosto che quella di Bell perché più facilmente realizzabile. Quindi l'obiettivo è verificare che $|S| \leq 2$ con

$$S = C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + C(\mathbf{a}', \mathbf{b}) - C(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + C(\mathbf{a}', \mathbf{b}'), \quad (1.4.1)$$

è immediato notare come questa sia proprio la disuguaglianza (1.3.28).

Per motivi pratici all'interno degli esperimenti per testare la disuguaglianza CHSH si tende ad utilizzare luce, da pensare nella sua forma particellare di fotone, piuttosto che elettroni o altre particelle di spin $1/2$, che invece abbiamo utilizzato nella trattazione teorica ma risultano più difficili da accoppiare e analizzare. La proprietà di maggiore interesse dei fotoni è la direzione di polarizzazione. Si considera quindi di solito una coppia di fotoni entangled in uno stato non fattorizzabile $|\phi\rangle$ e che vengono sottoposti a misurazioni. Ad esempio se consideriamo due fotoni che si muovono nella direzione z , con $|x\rangle$ e $|y\rangle$ che rappresentano gli autostati in cui il fotone è linearmente polarizzato rispettivamente nella direzione x e y , allora uno stato $|\phi\rangle$ in cui i due fotoni sono correlati e in cui si tiene conto della loro natura bosonica è

$$|\phi\rangle = (|x\rangle|x\rangle + |y\rangle|y\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (1.4.2)$$

Una misura lungo la direzione a produce il risultato $+1$ se la polarizzazione è parallela ad a , mentre produce il risultato -1 se la polarizzazione risulta essere perpendicolare ad a . Si tratta di una situazione analoga a quella già più volte descritta per la misura delle componenti di spin di una particella di spin $1/2$ lungo una direzione a .

Il valore di aspettazione della correlazione $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ tra le misure di polarizzazione dei due

fotoni lungo le direzioni \mathbf{a} e \mathbf{b} per lo stato $|\phi\rangle$ è

$$C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \cos(2\theta_{ab}), \quad (1.4.3)$$

con θ_{ab} che è l'angolo tra \mathbf{a} e \mathbf{b} .

Un tipico esperimento CHSH ottico è quello realizzato da A. Aspect, P. Grangier e G. Roger nel 1982 [1]. L'apparato sperimentale (si veda la figura 1.2) è composto da una sorgente S che genera la coppia di fotoni entangled e li emette in direzioni opposte. Ciascuno dei due fotoni incontra un polarizzatore a due canali, rispettivamente I_a e I_b , le cui orientazioni, \mathbf{a} o \mathbf{b} , possono essere aggiustate dallo sperimentatore. Il fotone una volta entrato nel polarizzatore viene indirizzato in uno dei due canali disponibili, $+1$ o -1 , a seconda che la sua polarizzazione risulti essere perpendicolare o parallela all'orientazione dell'apparato sperimentale. I segnali che escono da ciascun canale sono rilevati e registrati. Siamo interessati alla correlazione tra le polarizzazioni dei due fotoni e così categorizziamo ciascuna coppia sulla base delle coincidenze (rivelazioni simultanee) in quattro categorie $++$, $+-$, $-+$ e $--$. Ad esempio finiranno nel conteggio della categoria $++$ tutte quelle coppie di fotoni nelle quali entrambe le particelle hanno risultato avere una polarizzazione parallela all'asse del filtro polarizzatore in cui sono entrate. Attraverso questo tipo di conteggi si possono raccogliere dati relativi ai quattro possibili rate di coincidenza $R_{\pm\pm}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ e tramite questi si può stimare il valor medio di correlazione per le misure lungo \mathbf{a} e \mathbf{b} come

$$C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{R_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - R_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - R_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + R_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{R_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + R_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + R_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + R_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}. \quad (1.4.4)$$

È sufficiente ripetere le stesse misure per altre tre orientazioni, poi si potrà valutare sperimentalmente il valore di S della (1.4.1) e questo potrà essere usato come test per il confronto tra meccanica quantistica e teorie realiste locali. Tipicamente le quattro direzioni lungo le quali sono orientati i filtri polarizzatori a due canali sono scelte in maniera tale da massimizzare la violazione attesa della disuguaglianza CHSH, ovvero $\theta_{ab} = \theta_{a'b} = \theta_{ab'} = \frac{\pi}{8} = 22.5^\circ$ e $\theta_{ab'} = \frac{2\pi}{8} = 67.5^\circ$.

Il primo esperimento per verificare la violazione della disuguaglianza di Bell venne realizzato nel 1972 da S. J. Freedman e J. F. Clauser [20]. L'esperimento si basava su quello proposto da Clauser *et al.* tre anni prima nello stesso articolo nel quale apparve per la prima volta la disuguaglianza CHSH [14] e usava, a differenza dell'apparato appena descritto, un singolo canale, i valori ± 1 erano assegnati a ciascun fotone a seconda che riuscisse ad attraversare o venisse assorbito dai filtri polarizzatori orientati secondo certe direzioni. I risultati ottenuti da Freedman e Clauser erano in buon accordo con le previsioni della meccanica quantistica ed erano 6.5 deviazioni standard sopra il limite permesso dalla disuguaglianza CHSH.

Tra i molti esperimenti che seguirono citiamo quello condotto da Aspect, Grangier e Roger nel 1982 [1], fu questo il primo ad utilizzare filtri polarizzatori con due canali di uscita. I risultati

di questo esperimento evidenziarono la maggior violazione della disuguaglianza CHSH mai rivelata sino ad allora, ottenendo un valore di $S = 2.697 \pm 0.015$, 40 deviazioni standard sopra il limite superiore imposto dalla disuguaglianza di Bell e pari circa all'83% del valore massimo previsto per S dalla meccanica quantistica.

I risultati di tutti gli esperimenti successivi hanno confermato questa tendenza, registrando continue violazioni della disuguaglianza di Bell e ottimi accordi con le previsioni della meccanica quantistica. Ciò potrebbe portare alla conclusione che si possano rigettare in toto le teorie delle variabili nascoste locali, ma a lasciare ancora aperta qualche possibilità vi sono alcune falle (*loopholes*, in inglese) a cui nessuno degli esperimenti eseguiti fino al 2015 era estraneo.

1.4.2 Esperimento senza falle

Seguendo la trattazione di [32] passiamo in rassegna le possibili scappatoie che un sostenitore delle teorie realiste locali potrebbe chiamare in causa per invalidare le conclusioni degli esperimenti sino ad ora citati.

Falla della Comunicazione. La disuguaglianza di Bell (così come anche quella CHSH) si basa sull'ipotesi che i due eventi di misura delle due particelle entangled siano tra di loro indipendenti, un'ipotesi ispirata al principio di causalità relativistico. Nei primi esperimenti sulla disuguaglianza di Bell i due apparati di misura erano, nel sistema di riferimento del laboratorio, spazialmente distanziati, ciò bastava a suffragare l'ipotesi che non vi potesse essere alcuna influenza tra di loro. A ben vedere però, benché plausibile, l'indipendenza tra le due misure non è garantita da alcuna legge fisica e non si può quindi escludere a priori che una qualche forma di interferenza abbia luogo. Questa è la scappatoia della comunicazione e può essere esclusa solo riuscendo a separare i due eventi di misura con un intervallo di tipo spazio, a quel punto il principio di causalità della relatività ristretta garantirebbe l'indipendenza dei due eventi.

In un esperimento del 1982 di Aspect, Dalibard e Roger [2], che come gli altri confermava la violazione della disuguaglianza di Bell, la scelta dell'orientazione dell'apparato sperimentale era così rapida, nell'ordine di una decina di nanosecondi, da essere minore del tempo richiesto alla luce per percorrere la distanza tra i due apparati. In questo modo, almeno a prima vista, sembrava poter essere garantita l'indipendenza delle misure, eppure c'erano ancora alcune imperfezioni. Prima tra tutte la scelta dell'orientazione non era casuale, con un po' di fantasia si potrebbe immaginare che le variabili nascoste in ciascun apparato potessero riuscire a predire induttivamente quale sarebbe stata l'orientazione dell'altro apparato e in questo modo decidere in anticipo se bloccare il fotone o lasciarlo passare. Un esperimento successivo del 1998 di Weihs *et al.* [43], che utilizzava sempre i fotoni, è riuscito a porre rimedio a queste imperfezioni, lasciando ad esempio che la scelta dell'esperimento da realizzare fosse casuale, giungendo a stimare la grandezza S come 2.73 ± 0.02 , in buon accordo con la previsione quantistica e soprattutto 30 deviazioni standard di distanza del limite superiore della disuguaglianza CHSH.

A fugare ogni dubbio in tal senso si cita anche la violazione della disuguaglianza di Bell in un esperimento dove i due apparati sperimentali si trovavano a 144 km di distanza [39].

Falla del rilevamento. Un problema che si incontra sempre negli esperimenti sulla disuguaglianza di Bell, specie quelli che coinvolgono i fotoni, è l'efficienza del rivelatore. Per la stima del rapporto tra coppie prodotte con un certo risultato e il numero totale di coppie prodotte bisogna tenere presente della probabilità che avvenga una coincidenza, ovvero che avvenga una rivelazione in entrambe le ali dell'esperimento. Si può vedere [21] come il limite superiore della disuguaglianza CHSH venga ridotto quando si considera un rivelatore non ideale con efficienza η

$$|S| \leq \frac{4}{\eta} - 2. \quad (1.4.5)$$

Dato che il valore massimo previsto dalla meccanica quantistica per il lato sinistro della (1.4.5) per una coppia di fotoni nello stato $|\phi\rangle$ è $2\sqrt{2}$, se si vuole verificare la violazione della disuguaglianza CHSH occorrerà avere un'efficienza del rivelatore che soddisfi almeno $\eta \geq 2(\sqrt{2} - 1) \approx 0.83$. Questa efficienza minima può essere ridotta se si considerano stati non massimamente entangled, da 0.83 fino a 0.67 [18]. È possibile, data l'efficienza dei rivelatori di fotoni a disposizione, scegliere lo stato che massimizzi la violazione la disuguaglianza per quella data efficienza.

Nei primi esperimenti però le efficienze sul conteggio dei fotoni erano ben lungi dal poter dirsi soddisfacenti e questo costringeva l'adozione di ulteriori ipotesi non necessarie per la dimostrazione della disuguaglianza CHSH. Ad esempio Clauser *et al.* [14] proposero l'assunzione di campionamento equo (*fair sampling*, in inglese), ovvero se un fotone passa attraverso il rivelatore la sua probabilità di essere rivelato è indipendente dall'orientazione dell'apparato. Si tratta di un'ipotesi fisicamente plausibile ma se introdotta non è possibile escludere completamente la possibilità di avere variabili nascoste locali. Infatti è possibile costruire modelli [34] che, per quanto fisicamente poco plausibili e costruiti ad hoc, mostrano come variabili locali capaci di influire, oltre che sul passaggio attraverso i filtri polarizzatori, anche sul rilevamento o meno, quindi violando l'ipotesi di campionamento equo, possono condurre a risultati in accordo con la meccanica quantistica.

Un'altra strategia è quella di elaborare una disuguaglianza che si possa dimostrare essere violata senza conoscere i valori assoluti delle probabilità in gioco, questa elimina la necessità di ulteriori assunzioni non necessarie. Un esempio è la disuguaglianza CH, per la prima volta derivata da Clauser e Horne nel 1974 [13].

Un'altra possibile strategia è utilizzare ioni entangled, per i quali l'efficienza di rilevamento è molto alta. Ad esempio l'esperimento di Rowe *et al.* del 2001 [38] ha utilizzato ioni di berillio e osservato una violazione della disuguaglianza CHSH pari a $S = 2.25 \pm 0.03$ con un'efficienza totale intorno al 98%. Purtroppo però i due apparati di misura dei due ioni non erano distanziati da un intervallo di tipo spazio e quindi l'esperimento non fuggiva alla falla della comunicazione.

Falla della libera scelta. Questa falla ha a che fare con la scelta dell'orientazione lungo cui eseguire gli esperimenti (l'abbiamo in parte già citata), se questa scelta non è libera si apre una nuova scappatoia che permetterebbe anche a teorie delle variabili nascoste locali di spiegare i risultati sperimentali. Postuliamo uno scenario superdeterministico in cui non c'è spazio per il caso e la scelta dell'orientazione degli apparati di misura è già predeterminata e legata a variabili nascoste condivise da entrambi gli apparati e le particelle. In questo ipotetico scenario gli sperimentatori non sarebbero in grado di eliminare la correlazione tra le due misure perché questa sarebbe già stata stabilita sin dall'inizio dell'universo. C'è da chiedersi se una teoria del genere sia falsificabile e dunque possa essere o meno considerata una teoria scientifica.

Nel 2015 vennero pubblicati tre articoli che sostenevano di essere giunti a conclusioni definitive sulla disuguaglianza di Bell, riuscendo a sfuggire alle scappatoie appena descritte. Il primo di questi tre esperimenti, realizzato da B. Hensen *et al.* [27] si basava sulla misura degli spin di due elettroni in due laboratori distanti 1.3 km e il cui stato di entangled era realizzato attraverso dei fotoni. L'alta efficienza delle misure di spin ha reso inutile l'ipotesi di campionamento equo (falla del rilevamento) mentre una scelta veloce dell'orientazione combinata con la separazione spaziale di 1.3 km ha garantito l'ipotesi di località (falla della comunicazione), inoltre veniva utilizzato un generatore di numeri casuali fisico per trasformare eventi fisici imprevedibili, come la fotoemissione spontanea, in scelte sull'esperimento da compiere (falla della libera scelta). L'esito finale dell'esperimento ha fornito come risultato una violazione della disuguaglianza CHSH con $S = 2.42 \pm 0.20$. Benché questo esperimento sia riuscito evitare allo stesso tempo la falla della comunicazione, quella del rilevamento e quella della libera scelta, la valenza statistica del risultato è limitata dal fatto che sono state eseguite soltanto 245 misure, quindi lasciando comunque una probabilità del 3.9% (2 deviazioni standard) che teorie realiste locali producano dati con una violazione della disuguaglianza di Bell grande almeno quanto quella osservata.

Gli altri due esperimenti, di Giustina *et al.* [23] e Shalm *et al.* [40], hanno ottenuto una violazione della disuguaglianza CH statisticamente molto significativa attraverso l'uso di fotoni in uno stato non di massima correlazione ma ottimizzato sulla base dell'efficienza dei loro rivelatori. In particolare, nel caso di Giustina *et al.* la probabilità che i loro risultati si verifichino sotto realismo locale sono nell'ordine di 3.74×10^{-31} , corrispondenti a 11.5 deviazioni standard.

Un altro progetto molto interessante che riguarda direttamente la verifica della violazione della disuguaglianza di Bell, in particolare cercando di escludere la falla della libera scelta, è il Big Bell Test del 2016 [44]. Il 30 novembre di quell'anno moltissime persone da tutto il mondo attraverso una sorta di gioco online hanno contribuito a fornire bit casuali che sono stati poi distribuiti in tempo reale a 12 diversi gruppi sperimentali sparsi per il globo che li hanno utilizzati per la scelta degli esperimenti da eseguire in un test di Bell. La casualità del libero arbitrio umana (escluse le interpretazioni più estreme, come quella superdeterministica) era a garanzia che le scelte degli esperimenti fosse davvero imprevedibili e indipendenti.

Possiamo così alla fine dire che questi esperimenti hanno soddisfatto tutte le condizioni richieste per poter dire, senza più scappatoie, che la disuguaglianza di Bell è violata.

Capitolo 2

TEOREMA di KOCHEN-SPECKER

In questo capitolo si discuterà del teorema Kochen-Specker che dimostra l'impossibilità di costruire una teoria delle variabili nascoste non contestuale. Nelle prime sezioni verranno ricordati alcuni concetti fondamentali del formalismo della meccanica quantistica riguardanti operatori e proiettori. Si passeranno in rassegna le assunzioni su cui si base il teorema, cercando di metterne in risalto l'interdipendenza e le implicazioni reciproche. Si passerà poi a enunciare e dimostrare il teorema utilizzando due approcci differenti, il primo di A. Cabello (1994) e l'altro di A. Peres (1991). In entrambe le versioni il teorema conduce ad una contraddizione sanabile soltanto rinunciando ad una delle ipotesi di partenza, verranno discusse tutte le possibili opzioni. Infine si discuterà delle difficoltà che si incontrano cercando di verificare sperimentalmente il teorema e su come sia stato possibile superarle.

2.1 Premesse

2.1.1 Prolegomeni

Le interpretazioni della meccanica quantistica che usano teorie delle variabili nascoste si basano essenzialmente su due concetti:

1. È possibile assegnare un valore definito ad ogni osservabile in un qualsiasi stato, grazie all'introduzione di nuove variabili λ .
2. La statistica di questi valori assegnati deve coincidere con i risultati statistici previsti dalla teoria quantistica.

La violazione, anche sperimentale, della disuguaglianza di Bell vista nel capitolo precedente mostra come sia impossibile soddisfare la (2) sotto le ipotesi di località, fino ad ora però sulla (1) non sono stati posti particolari vincoli. Il teorema di Kochen-Specker (KS) riguarda le contraddizioni algebriche che emergono anche dal punto (1).

L'approccio generale che segue il teorema KS è lo stesso del teorema di Bell: si parte da alcune assunzioni di base, a partire da queste si ricavano vincoli e disuguaglianze algebriche, poi si dimostra che la meccanica quantistica viola queste relazioni, costringendoci quindi ad abbandonare almeno una delle ipotesi di partenza.

Al cuore della questione del teorema KS c'è il problema dell'esistenza o meno di una funzione dei valori $V_{|\psi\rangle}(A)$, da interpretare come una funzione che assegna univocamente un valore all'osservabile fisico A che si trova nello stato quantistico $|\psi\rangle$. Classicamente la questione non presenta alcuna difficoltà, in questo contesto è sempre possibile definire una funzione di fase $f_A : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ che assegna ad ogni stato s dello spazio degli stati classico \mathcal{S} il valore dell'osservabile A . Quindi avremo semplicemente $V_s(A) = f_A(s)$.

In meccanica quantistica dato l'operatore \hat{A} , che rappresenta l'osservabile A , se ci poniamo nel caso particolare in cui lo stato $|\psi_a\rangle$ è un autovettore di \hat{A} e a è il corrispondente autovalore, allora si può concludere che $V_{|\psi_a\rangle}(A) = a$. Aldilà di questo caso particolare non c'è però un modo semplice ed intuitivo di estendere la funzione dei valori $V_{|\psi\rangle}(A)$ ad una qualsiasi coppia $(A, |\psi\rangle)$. Con il teorema di KS vedremo come è impossibile assegnare valori a tutti gli osservabili preservando allo stesso tempo le relazioni funzionali tra di essi.

Una prima discussione sulla possibilità o meno di ricondurre la meccanica quantistica ad una teoria delle variabili nascoste è da attribuire a J. von Neumann nel suo libro "*Die mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik*" [33] (1932), qui egli propone un argomento che risulta però abbastanza insoddisfacente non tenendo conto degli osservabili non compatibili.

Una seconda e importante linea indipendente che ha condotto al teorema KS è quella aperta da A. M. Gleason nel 1957 con l'omonimo teorema [24]; in sintesi questo afferma che in uno spazio di Hilbert tridimensionale le probabilità assegnate a tutte le possibili proprietà devono essere continue, in altre parole, tutti i vettori dello spazio di Hilbert devono essere mappati con continuità nell'intervallo reale $[0, 1]$. D'altra parte però una teoria delle variabili nascoste implicherebbe che per ogni proprietà noi potremmo dire senza ambiguità se il sistema la possiede o meno, questo conduce a una funzione di probabilità che mappa tutte le proprietà o in 1 o in 0, e questa funzione è chiaramente discontinua.

Una prima prova del teorema KS venne fornita nel 1966 dal solito Bell [4] (per questo viene a volte anche citato come il teorema Bell-Kochen-Specker) e poi indipendentemente da S. B. Kochen e E. Specker (KS) nell'articolo "*The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics*" [30] (1967). Nella loro prova KS partirono caratterizzando matematicamente la minima struttura algebrica che le teorie delle variabili nascoste devono preservare, per poi provare tramite un controesempio che questa struttura, unita all'ipotesi di definitezza dei valori degli osservabili, porta a contraddizioni con la meccanica quantistica. Il controesempio utilizzato da KS e sviluppato nelle 29 pagine dell'articolo utilizzava uno spazio di Hilbert tridimensionale e considerava 117 vettori. Si tratta di una prova abbastanza complessa che però negli anni successivi è stata notevolmente semplificata, a questo proposito si vedano le prove fornite da Peres [35], Kernaghan [29], Cabello [8] e altri ancora.

2.1.2 Osservabili e operatori

In questa sezione ricordiamo brevemente alcune proprietà fondamentali di osservabili e operatori quantistici che torneranno utili nella successiva trattazione del teorema KS.

Possiamo definire gli osservabili Q di un sistema come le proprietà di quel sistema che sono fisicamente distinte e numericamente quantificabili. In maniera più operativa possiamo anche definire un certo osservabile Q come la grandezza alla quale, attraverso un particolare apparato di misura e una specifica procedura di misurazione, possiamo associare un numero q .

Uno degli assunti cardine della meccanica quantistica è il seguente

Principio di Corrispondenza. Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme degli operatori autoaggiunti e l'insieme degli osservabili.

Avremo perciò che ogni osservabile Q è matematicamente rappresentato da un unico operatore autoaggiunto \hat{Q} , e viceversa. Un altro principio fondamentale della meccanica quantistica è

Regola dello Spettro. I valori possibili per un osservabile Q sono confinati all'insieme degli autovalori dell'operatore autoaggiunto associato \hat{Q} .

Scelto uno stato s del sistema matematicamente rappresentato dal ket $|\psi\rangle$, se si eseguono misure ripetute dell'osservabile Q non è detto che si ottenga sempre lo stesso valore. Gli stati s per cui ottengo sempre lo stesso valore q sono detti autostati di Q . Questo si traduce nel dire che i ket $|\psi\rangle$ che rappresentano autostati s dell'osservabile Q sono autoket dell'operatore \hat{Q} con autovalore q . Secondo la meccanica quantistica tradizionale solo per gli autostati ha senso attribuire un valore definito all'osservabile.

In generale si può osservare come può esserci interferenza tra misure simultanee di diversi osservabili, quindi se si insiste a cercare di trovare valori definiti per uno di questi non si hanno più valori definiti per l'altro. Se ciò non avviene gli osservabili sono detti compatibili. La proprietà della compatibilità tra osservabili si traduce matematicamente nella commutatività degli operatori autoaggiunti che li rappresentano. In particolare siano A e B due osservabili compatibili, allora i loro corrispettivi operatori \hat{A} e \hat{B} hanno commutatore nullo:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0. \quad (2.1.1)$$

Consideriamo ora un insieme di osservabili a due a due compatibili $\{A, B, C, \dots\}$, questo significa che presa una qualsiasi coppia di elementi di questo insieme essi sono compatibili. La meccanica quantistica tradizionale ci dice che se gli operatori che li rappresentano soddisfano una certa relazione funzionale f tale che

$$f(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \dots) = 0, \quad (2.1.2)$$

allora lo spettro congiunto di questi osservabili, cioè l'insieme di tutti i possibili risultati di misure simultanee, sarà costituito da insiemi del tipo $\{a, b, c, \dots\}$ che soddisfano la stessa

relazione funzionale, ovvero

$$f(a, b, c, \dots) = 0. \quad (2.1.3)$$

2.1.3 Proiettori ortogonali e FUNC STAT

Nella successiva trattazione seguiremo il capitolo 1.2 di *"Incompleteness, Nonlocality, and Realism"* [36] di M. Redhead. Consideriamo un osservabile Q con associato un operatore autoaggiunto \hat{Q} con autovalori q_i e corrispondenti autoket $|q_i\rangle$. Vale la relazione agli autovalori

$$\hat{Q} |q_i\rangle = |q_i\rangle q_i. \quad (2.1.4)$$

Possiamo considerare come operatore autoaggiunto il proiettore ortogonale $\hat{P}_{|q_i\rangle}$, così definito

$$\hat{P}_{|q_i\rangle} = |q_i\rangle \langle q_i|. \quad (2.1.5)$$

L'azione di questo operatore su uno stato arbitrario $|\psi\rangle$ è quello di estrarre la componente $|q_i\rangle c_i$ nell'espansione di $|\psi\rangle$ nella base di autoket dell'operatore \hat{Q} , ovvero

$$\hat{P}_{|q_i\rangle} |\psi\rangle = |q_i\rangle \langle q_i | \psi \rangle = |q_i\rangle c_i. \quad (2.1.6)$$

Utilizzando i proiettori ortogonali possiamo scrivere rispettivamente la relazione di completezza e il teorema spettrale come

$$\sum_i \hat{P}_{|q_i\rangle} = \mathbb{1}, \quad (2.1.7)$$

$$\hat{Q} = \sum_i q_i \hat{P}_{|q_i\rangle}. \quad (2.1.8)$$

Indichiamo con $\text{Prob}(q_i)_{|Q}^{|\psi\rangle}$ la probabilità di ottenere come risultato di una misura dell'osservabile Q il valore q_i quando si è nello stato puro descritto da $|\psi\rangle$. La procedura che ci consente di determinare il valore di questa probabilità viene detta algoritmo statistico. Si può provare che se q_i è non degenere allora l'algoritmo statistico è dato da

$$\text{Prob}(q_i)_{|Q}^{|\psi\rangle} = \text{Tr} \left(\hat{P}_{|q_i\rangle} \hat{P}_{|\psi\rangle} \right), \quad (2.1.9)$$

dove $\text{Tr}()$ indica la traccia della matrice, cioè la somma su tutti i suoi elementi diagonali, mentre $\hat{P}_{|\psi\rangle}$ è il proiettore ortogonale sul sottospazio generato dal ket $|\psi\rangle$.

Dimostrazione. Per il calcolo della probabilità $\text{Prob}(q_i)_{|Q}^{|\psi\rangle}$ partiamo dalla nota espressione per

l'algorithmo statistico nella formulazione di Dirac.

$$\begin{aligned}
\text{Prob}(q_i)^{|\psi\rangle} &= |\langle q_i|\psi\rangle|^2 = \langle q_i|\psi\rangle \langle \psi|q_i\rangle \\
&= \sum_j \langle q_i|\psi\rangle \langle \psi|\hat{P}_{|q_j\rangle}|q_i\rangle \\
&= \sum_j \langle q_i|\psi\rangle \langle \psi|q_j\rangle \langle q_j|q_i\rangle \\
&= \sum_j \langle q_j|q_i\rangle \langle q_i|\psi\rangle \langle \psi|q_j\rangle \\
&= \text{Tr}(|q_i\rangle \langle q_i|)(|\psi\rangle \langle \psi|) \\
&= \text{Tr}\left(\hat{P}_{|q_i\rangle}\hat{P}_{|\psi\rangle}\right),
\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

ottenendo così proprio il risultato cercato.

Se q_i è degenera allora basta sostituire nella (2.1.9) il proiettore $\hat{P}_{|q_i\rangle}$ sul singolo sottospazio unidimensionale dell'autoket $|q_i\rangle$, con il proiettore $\hat{P}_Q(q_i)$ sul sottospazio generato da tutti gli autoket $|q_j\rangle$ con $q_j = q_i$, ovvero

$$\hat{P}_Q(q_i) = \sum_{j|q_j=q_i} \hat{P}_{|q_j\rangle}. \tag{2.1.11}$$

Allo stesso modo, la probabilità che una misura di Q cada nell'intervallo $\Delta = \{q_\alpha, q_\beta, \dots\}$ è data da

$$\text{Prob}(\Delta)^{|\psi\rangle} = \text{Tr}\left(\hat{P}_Q(\Delta)\hat{P}_{|\psi\rangle}\right), \tag{2.1.12}$$

dove l'espressione del proiettore $\hat{P}_Q(\Delta)$ è la seguente

$$\hat{P}_Q(\Delta) = \sum_{j|q_j=q_\alpha, q_\beta, \dots} \hat{P}_{|q_j\rangle}. \tag{2.1.13}$$

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione arbitraria e \hat{Q} un operatore autoaggiunto associato ad un osservabile Q . Possiamo allora definire l'operatore $f(\hat{Q})$ associato all'osservabile $f(Q)$ come

$$f(\hat{Q}) := \sum_i f(q_i)\hat{P}_{|q_i\rangle}. \tag{2.1.14}$$

Possiamo perciò riscrivere gli operatori $\hat{P}_Q(q_i)$ e $\hat{P}_Q(\Delta)$ utilizzando le due funzioni caratteristiche $\chi_{q_i} : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ e $\chi_\Delta : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$. In particolare avremo che $\hat{P}_Q(q_i)$ sarà dato da

$$\hat{P}_Q(q_i) = \chi_{q_i}(\hat{Q}), \tag{2.1.15}$$

con

$$\chi_{q_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = q_i, \\ 0 & \text{se } x \neq q_i, \end{cases} \quad (2.1.16)$$

mentre $\hat{P}_Q(\Delta)$ sarà anche esprimibile come

$$\hat{P}_Q(\Delta) = \chi_\Delta(\hat{Q}), \quad (2.1.17)$$

con

$$\chi_\Delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Delta, \\ 0 & \text{se } x \notin \Delta. \end{cases} \quad (2.1.18)$$

Possiamo allora scrivere l'algoritmo statistico (2.1.12) come

$$\text{Prob}(\Delta)_Q^{|\psi\rangle} = \text{Tr}\left(\chi_\Delta(\hat{Q})\hat{P}_{|\psi\rangle}\right). \quad (2.1.19)$$

A questo punto è possibile dimostrare il **Principio di Composizione Funzionale Statistico** o **FUNC STAT**, il quale afferma che eseguendo una misura dell'osservabile $f(Q)$ di un sistema nello stato puro $|\psi\rangle$, la probabilità che il risultato sia compreso nell'intervallo Δ è la stessa di trovare l'osservabile Q del medesimo sistema nello stesso stato $|\psi\rangle$, nell'intervallo $f^{-1}(\Delta)$; cioè

$$\text{Prob}(\Delta)_{f(Q)}^{|\psi\rangle} = \text{Prob}(f^{-1}(\Delta))_Q^{|\psi\rangle}. \quad (2.1.20)$$

Dimostrazione. Partendo dalla (2.1.19) si ha

$$\begin{aligned} \text{Prob}(\Delta)_{f(Q)}^{|\psi\rangle} &= \text{Tr}\left(\chi_\Delta(f(\hat{Q}))\hat{P}_{|\psi\rangle}\right) \\ &= \text{Tr}\left(\chi_{f^{-1}(\Delta)}(\hat{Q})\hat{P}_{|\psi\rangle}\right) \\ &= \text{Prob}(f^{-1}(\Delta))_Q^{|\psi\rangle}, \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

dove si è usato il risultato

$$\chi_\Delta(f(x)) = \chi_{f^{-1}(\Delta)}(x). \quad (2.1.22)$$

È possibile verificare la correttezza della (2.1.22) notando come:

- Se $f(x) \in \Delta$ allora $\chi_\Delta(f(x)) = 1$, mentre dato che $x \in f^{-1}(\Delta)$ allora $\chi_{f^{-1}(\Delta)}(x) = 1$.
- Se $f(x) \notin \Delta$ allora $\chi_\Delta(f(x)) = 0$, mentre dato che $x \notin f^{-1}(\Delta)$ allora $\chi_{f^{-1}(\Delta)}(x) = 0$.

Quindi le due funzioni sono effettivamente uguali.

Un osservabile Q è definito massimale se l'operatore autoaggiunto associato \hat{Q} è non degenere, cioè tutti i suoi autovalori sono diversi tra loro. Allora se abbiamo un operatore massimale Q e una funzione iniettiva (1:1) f , anche l'osservabile $f(Q)$ sarà massimale, ma se f non è iniettiva allora $f(\hat{Q})$ sarà degenere e quindi $f(Q)$ non massimale.

2.1.4 Ipotesi e assunzioni

Introduciamo e analizziamo le assunzioni su cui si basa il teorema KS seguendo la trattazione di Redhead [36] e l'Enciclopedia Filosofica di Stanford [26].

Una delle proprietà che contraddistingue tutte le teorie delle variabili nascoste è la seguente

Valori Definiti o **VD**. Tutti gli osservabili definiti per un sistema quantistico possiedono valori definiti in ogni momento.

Questa proprietà si estende non solo agli osservabili compatibili, per i quali già la meccanica quantistica prevede la possibilità di possedere valori simultaneamente definiti, ma anche agli osservabili non compatibili, quelli cioè i cui operatori non commutano. Prendendo per buona l'assunzione VD, anche quest'ultimi possono avere valori definiti simultaneamente prima di una misurazione, rimane però il fatto che poi non potranno essere misurati simultaneamente senza interferenza (per la definizione stessa di non compatibilità). Questa è una delle proprietà che contraddistingue tutte le teorie delle variabili nascoste, in queste vengono infatti introdotti nuovi parametri per definire univocamente il valore di osservabili che altrimenti resterebbero indefiniti in quello stato. Sia $\{A, B, C, \dots\}$ un insieme di osservabili qualsiasi nel generico stato $|\psi\rangle$, grazie ad una teoria delle variabili nascoste posso definirne simultaneamente tutti i valori $V_{|\psi\rangle}$. Denotiamo l'insieme di questi valori definiti con:

$$\{V_{|\psi\rangle}(A_{B,C,\dots}), V_{|\psi\rangle}(B_{A,C,\dots}), V_{|\psi\rangle}(C_{A,B,\dots}), \dots\}, \quad (2.1.23)$$

dove ad esempio $V_{|\psi\rangle}(A_{B,C,\dots})$ indica il valore dell'osservabile A nello stato $|\psi\rangle$ e nel preciso contesto in cui sono definiti anche gli operatori $\{B, C, \dots\}$. Infatti, per quanto poco intuitivo, non c'è niente che garantisca che il valore di A non dipenda dal contesto in cui avviene la misura.

Un'altra assunzione necessaria per la dimostrazione del teorema KS è la seguente

Non contestualità o **NC**. Se un sistema quantistico possiede una proprietà, cioè il valore di un osservabile è definito, questo prescinde dal contesto in cui avviene la misura, cioè è indipendente da come il valore è eventualmente misurato.

Questo significa che il valore $V_{|\psi\rangle}(A)$ di un osservabile A in un certo stato fisico $|\psi\rangle$ (la cui esistenza è assunta dall'ipotesi precedente di definitezza dei valori) non dipende da quali altri osservabili (con cui è compatibile) hanno valori definiti simultaneamente. Perciò possiamo dire che per due osservabili B e β mutuamente non compatibili, ma compatibili con A vale

$$V_{|\psi\rangle}(A) := V_{|\psi\rangle}(A_{B,\dots}) = V_{|\psi\rangle}(A_{\beta,\dots}). \quad (2.1.24)$$

L'indipendenza di un osservabile dal contesto implica che vi sia una corrispondenza 1:1 tra osservabili e operatori, cioè implica il Principio di Corrispondenza.

Per vedere meglio questo concetto poniamo vi siano più osservabili corrispondenti allo stesso operatore \hat{A} . Consideriamo due altri operatori, \hat{B} e $\hat{\beta}$ che singolarmente commutano con \hat{A} ma non commutano tra di loro $[\hat{B}, \hat{\beta}] \neq 0$. Supponiamo valgano le relazioni $\hat{A} = f(\hat{B})$ e $\hat{A} = g(\hat{\beta})$, con f e g due opportune funzioni reali a valori reali. All'operatore \hat{A} possiamo così associare due osservabili: A_B e A_β , e questi osservabili sono identificati dalle loro relazioni funzionali rispettivamente con B e β :

$$V_{|\psi\rangle}(A_B) = f(V_{|\psi\rangle}(B)), \quad V_{|\psi\rangle}(A_\beta) = g(V_{|\psi\rangle}(\beta)). \quad (2.1.25)$$

Conoscere l'operatore autoaggiunto \hat{A} non è sufficiente a identificare senza ambiguità l'osservabile, dobbiamo pure conoscere a quale altro osservabile è collegato, B o β , dobbiamo cioè conoscere il contesto.

Le due ipotesi citate sino ad ora, ovvero VD e NC, da sole non sono sufficienti a introdurre vincoli stringenti al punto da condurre alla contraddizione su cui si fonda il teorema KS, ne occorre almeno un'altra, la quale però è intimamente connessa sia con VD e NC che con un teorema della meccanica quantistica dimostrato nella sezione precedente, ovvero FUNC STAT, anzi la si può considerare una loro diretta conseguenza. L'ipotesi di cui stiamo parlando è la seguente

Principio di Composizione Funzionale o FUNC. Se \hat{A} e \hat{B} sono due operatori autoaggiunti associati con gli osservabili A e B , e se esiste una funzione f tale che $\hat{B} = f(\hat{A})$, allora per ogni stato $|\psi\rangle$ si avrà

$$V_{|\psi\rangle}(B) = f(V_{|\psi\rangle}(A)). \quad (2.1.26)$$

Chiaramente il principio si applica soltanto a osservabili A e B compatibili (nella prova di von Neumann [33] invece si estendeva questo principio anche a quelli non compatibili). Un'altra forma equivalente di questo principio è

$$V_{|\psi\rangle}(f(A)) = f(V_{|\psi\rangle}(A)). \quad (2.1.27)$$

Essenzialmente quello che questo principio ci dice è che la struttura algebrica degli operatori deve essere riflessa nella struttura algebrica dei valori posseduti.

A partire da FUNC possiamo derivare due importanti risultati che torneranno utili nella dimostrazione del teorema, ovvero la regola della somma e la regola del prodotto.

Regola della Somma. Se \hat{A} e \hat{B} sono due operatori autoaggiunti commutanti allora per un arbitrario stato $|\psi\rangle$ si ha

$$V_{|\psi\rangle}(A + B) = V_{|\psi\rangle}(A) + V_{|\psi\rangle}(B), \quad (2.1.28)$$

dove $A + B$ indica l'osservabile corrispondente all'operatore autoaggiunto $\hat{A} + \hat{B}$.

Dimostrazione. Partiamo con il dimostrare che dati due osservabili compatibili A e B esiste sempre un osservabile massimale O tale che per due appropriate funzioni f ed g si ha $\hat{A} = f(\hat{O})$ e $\hat{B} = g(\hat{O})$.

Dato che \hat{A} e \hat{B} commutano esisterà una base $\{|q_i\rangle\}$ di autoket simultanei con spettro congiunto costituito dalle coppie (a_i, b_i) . Cioè

$$\hat{A}|q_i\rangle = |q_i\rangle a_i, \quad \hat{B}|q_i\rangle = |q_i\rangle b_i. \quad (2.1.29)$$

Usando questa base di autoket simultanei possiamo scrivere \hat{A} e \hat{B} nella seguente forma diagonale

$$\hat{A} = \sum_i a_i \hat{P}_{|q_i\rangle}, \quad \hat{B} = \sum_i b_i \hat{P}_{|q_i\rangle}. \quad (2.1.30)$$

Scriviamo ora l'operatore \hat{O} come $\hat{O} = \sum_i o_i \hat{P}_{|q_i\rangle}$, dove tutti gli o_i sono diversi, in maniera tale che per costruzione O risulti massimale. Indichiamo poi con S_O , S_A e S_B rispettivamente gli spettri degli osservabili O , A e B , e definiamo le funzioni $f : S_O \rightarrow S_A$ e $g : S_O \rightarrow S_B$ come

$$f(o_i) = a_i, \quad g(o_i) = b_i, \quad (2.1.31)$$

allora abbiamo

$$\hat{A} = f(\hat{O}), \quad \hat{B} = g(\hat{O}). \quad (2.1.32)$$

Definito $h = f + g$ possiamo scrivere $\hat{A} + \hat{B} = h(\hat{O})$. In questo modo, applicando due volte FUNC, ricaviamo

$$\begin{aligned} V_{|\psi\rangle}(A + B) &= h(V_{|\psi\rangle}(O)) = f(V_{|\psi\rangle}(O)) + g(V_{|\psi\rangle}(O)) \\ &= V_{|\psi\rangle}(f(O)) + V_{|\psi\rangle}(g(O)) = V_{|\psi\rangle}(A) + V_{|\psi\rangle}(B). \end{aligned} \quad (2.1.33)$$

Regola del Prodotto. Se \hat{A} e \hat{B} sono due operatori autoaggiunti commutanti allora per un arbitrario stato $|\psi\rangle$ si ha

$$V_{|\psi\rangle}(AB) = V_{|\psi\rangle}(A)V_{|\psi\rangle}(B), \quad (2.1.34)$$

dove AB è l'osservabile corrispondente all'operatore autoaggiunto $\hat{A}\hat{B}$.

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato che esiste un osservabile massimale O tale che per appropriate funzioni f ed g si ha $\hat{A} = f(\hat{O})$ e $\hat{B} = g(\hat{O})$. Definito $h = fg$ possiamo scrivere $\hat{A}\hat{B} = h(\hat{O})$. In questo modo, applicando due volte FUNC, ricaviamo

$$\begin{aligned} V_{|\psi\rangle}(AB) &= h(V_{|\psi\rangle}(O)) = f(V_{|\psi\rangle}(O))g(V_{|\psi\rangle}(O)) \\ &= V_{|\psi\rangle}(f(O))V_{|\psi\rangle}(g(O)) = V_{|\psi\rangle}(A)V_{|\psi\rangle}(B). \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

Vediamo ora come sia possibile ricavare FUNC (e quindi a cascata anche le regole di somma

e prodotto) da principi ancora più fondamentali.

Nella sezione precedente abbiamo ricavato un teorema, che al netto di qualche differenza aveva una struttura simile a quella di FUNC, ovvero il Principio di Composizione Funzionale Statistico o FUNC STAT (2.1.20). Alla luce del principio di VD e prendendo per buona l'ulteriore assunzione che gli esiti delle misure riproducono fedelmente i valori degli osservabili, possiamo reinterpretare le probabilità del FUNC STAT non più come le frequenze per gli esiti delle misure ma come le frequenze per i valori posseduti dagli osservabili. Possiamo così riscrivere la (2.1.20) come

$$\text{Val}(\Delta)_{f(Q)}^{|\psi\rangle} = \text{Val}(f^{-1}(\Delta))_Q^{|\psi\rangle}, \quad (2.1.36)$$

dove $\text{Val} : \mathbb{P} \rightarrow \{0, 1\}$ è la funzione che associa ad ogni proposizione dello spazio delle proposizioni \mathbb{P} , ad esempio $(\Delta)_{f(Q)}^{|\psi\rangle}$ (cioè il valore di $f(Q)$ nello stato $|\psi\rangle$ ricade in Δ), un valore 0 o 1, a seconda che questa sia falsa o vera.

Se la (2.1.36) vale allora si può ricavare FUNC STAT (2.1.20). Infatti la (2.1.36) ci dice che Q ha valore in $f^{-1}(\Delta)$ se e soltanto se $f(Q)$ ha valore in Δ . Quindi le frequenze dopo molte misurazioni, in altre parole le due probabilità che compaiono nella (2.1.20), devono corrispondere, dato che per ogni singola occorrenza c'è la corrispondenza. Non è in generale vero il contrario, cioè non possiamo dedurre la (2.1.36) da FUNC STAT, infatti la corrispondenza tra le frequenze, e quindi le probabilità, in (2.1.20) non garantisce una corrispondenza per ogni singola occorrenza come è invece richiesto nella (2.1.36).

È possibile mostrare come la (2.1.36) e FUNC siano equivalenti.

Dimostrazione. Partiamo con il mostrare che FUNC implica la (2.1.36).

$$V_{|\psi\rangle}(f(Q)) \in \Delta \Leftrightarrow f(V_{|\psi\rangle}(Q)) \in \Delta \Leftrightarrow V_{|\psi\rangle}(Q) \in f^{-1}(\Delta), \quad (2.1.37)$$

che è un altro modo di esprimere la (2.1.36).

Vediamo ora l'implicazione opposta, ovvero che la (2.1.36) implica FUNC

$$V_{|\psi\rangle}(Q) \in \Delta \Rightarrow V_{|\psi\rangle}(Q) \in f^{-1}(f(\Delta)) \Rightarrow V_{|\psi\rangle}(f(Q)) \in f(\Delta), \quad (2.1.38)$$

se si prende $\Delta = \{\delta\}$, cioè con un solo elemento, allora

$$V_{|\psi\rangle}(Q) = \delta \Rightarrow V_{|\psi\rangle}(f(Q)) = f(\delta) = f(V_{|\psi\rangle}(Q)), \quad (2.1.39)$$

cioè FUNC.

Quindi riassumendo quanto visto fino ad adesso abbiamo che FUNC non può essere ricavato da FUNC STAT, mentre FUNC STAT può essere ricavato da FUNC; allo stesso tempo FUNC STAT è anche un teorema della meccanica quantistica, ciò rende per lo meno plausibile che FUNC valga.

È però possibile derivare FUNC da FUNC STAT se si aggiungono tre ulteriori assunzioni:

Valori definiti o **VD**. Tutti gli osservabili definiti per un sistema quantistico possiedono valori definiti in ogni momento.

Non contestualità o **NC**. Se un sistema quantistico possiede una proprietà, cioè il valore di un osservabile è definito, questo prescinde dal contesto in cui avviene la misura, cioè è indipendente da come il valore è eventualmente misurato.

Principio di realismo o **PR**. Se c'è un numero operativamente definito q associato ad un operatore autoaggiunto \hat{Q} (distribuito probabilisticamente secondo l'algoritmo statistico della meccanica quantistica per \hat{Q}) allora esiste un elemento di realtà (un osservabile) associato con quel numero.

Le prime due assunzioni le abbiamo già esaminate all'inizio di questa sezione, quindi non ci soffermeremo ulteriormente su di esse. Per quanto riguarda invece PR si noti che non ha niente a che vedere con il Criterio di Realtà di EPR introdotto nel capitolo 1. Quello che PR ci sta dicendo è che se ho una proprietà fisica reale a cui riesco ad associare un numero q e a trovare un operatore \hat{Q} tale che q ne sia un autovalore (cioè abbiamo soddisfatto le condizioni per applicare l'algoritmo statistico) allora \hat{Q} rappresenta un osservabile Q e il suo valore q è una proprietà reale.

Come accennato poco sopra, abbiamo che vale la seguente implicazione

$$VD + NC + PR + FUNC\ STAT \Rightarrow FUNC. \quad (2.1.40)$$

Dimostrazione. Consideriamo uno stato arbitrario $|\psi\rangle$ e un osservabile Q . Per l'assunzione VD Q possiede un valore definito, poniamo q , e questo valore sotto l'ipotesi di misurazione fedele sarà quello rivelato.

$$V_{|\psi\rangle}(Q) = q. \quad (2.1.41)$$

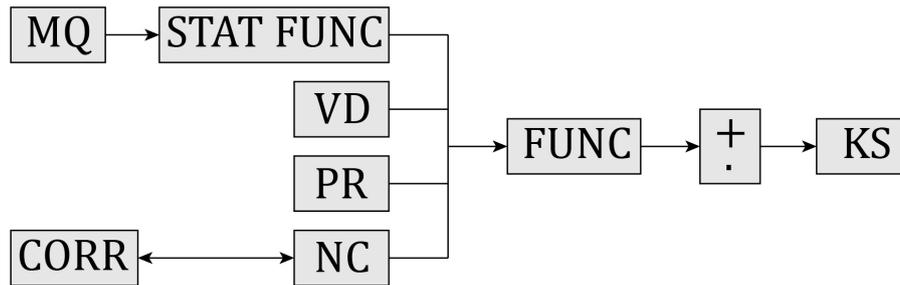
Scelta un'arbitraria funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possiamo formare il numero $f(V_{|\psi\rangle}(Q)) = b$ il quale è distribuito probabilisticamente secondo l'algoritmo statistico per $f(\hat{Q})$. Infatti applicando FUNC STAT a questo numero abbiamo che

$$\begin{aligned} \text{Prob}(f(V_{|\psi\rangle}(Q)) \in \Delta) &= \text{Prob}(V_{|\psi\rangle}(Q) \in f^{-1}(\Delta)) \\ &= \text{Prob}(V_{|\psi\rangle}(f(Q)) \in \Delta). \end{aligned} \quad (2.1.42)$$

Grazie a PR possiamo dire che esiste un osservabile associato con l'operatore autoaggiunto $f(\hat{Q})$ e con il valore $f(V_{|\psi\rangle}(Q))$. Chiamando in causa NC (o il principio di Corrispondenza, il collegamento dei due l'abbiamo già affrontato all'inizio di questa sezione) possiamo dire che l'osservabile associato a $f(\hat{Q})$ è unico (quindi non c'è dipendenza dal contesto) e possiamo denotarlo con $f(Q)$. Quindi infine otteniamo

$$V_{|\psi\rangle}(f(Q)) = f(V_{|\psi\rangle}(Q)), \quad (2.1.43)$$

Figura 2.1: Le assunzioni del teorema KS. MQ sta per Meccanica Quantistica, STAT FUNC per Principio di Composizione Funzionale Statistico, VD per Valori Definiti, PR per Principio di Realismo, CORR per Principio di Corrispondenza, NC per Non Contestualità, FUNC per Principio di Composizione Funzionale, +· per Regola della Somma e del Prodotto e KS per teorema Kochen-Specker.



e questo è proprio FUNC.

In figura 2.1 è possibile visualizzare graficamente le assunzioni citate e i loro relativi rapporti d'implicazione.

2.2 Teorema di Kochen-Specker

2.2.1 Versione di Cabello

Si propone in questa sezione l'enunciato e la dimostrazione del teorema di Kochen-Specker così come proposti da Cabello in [8].

Teorema di Kochen-Specker (versione di Cabello). Per un sistema fisico descritto in meccanica quantistica da uno spazio di Hilbert di dimensione maggiore o pari a tre, è in generale impossibile formulare una teoria delle variabili nascoste che soddisfi le tre proprietà seguenti:

- a **Definitezza dei valori.** Tutti gli osservabili definiti per il sistema quantistico possiedono valori definiti in ogni momento. In particolare, anche due osservabili non compatibili, poniamo B e β , possono avere valori definiti simultaneamente prima di una misurazione, anche se poi però non potranno essere misurati simultaneamente senza interferenza (per la definizione stessa di non compatibilità).

b Non contestualità. Se un sistema quantistico possiede una proprietà, cioè il valore di un osservabile è definito, questo prescinde dal contesto in cui avviene la misura, cioè è indipendente da come il valore è eventualmente misurato.

Possiamo riformulare questo concetto asserendo che in una teoria delle variabili nascoste il valore di un osservabile in un certo stato fisico non dipende da quali altri osservabili, con cui è compatibile, hanno valori definiti simultaneamente. Perciò se B e β sono osservabili tra di essi non compatibili, ma ciascuno dei due è compatibile con A

$$V_{|\psi\rangle}(A) := V_{|\psi\rangle}(A_{B,\dots}) = V_{|\psi\rangle}(A_{\beta,\dots}). \quad (2.2.1)$$

c Coincidenza con la Meccanica Quantistica. I valori degli osservabili compatibili definiti dalle variabili nascoste soddisfano le stesse relazioni di ogni altro insieme di risultati di misure secondo la meccanica quantistica. Ovvero se abbiamo l'insieme di osservabili compatibili $\{A, B, C\}$ e vale la relazione $f(a, b, c, \dots) = 0$ tra i valori misurati di questi osservabili, allora è verificata anche

$$f(V_{|\psi\rangle}(A), V_{|\psi\rangle}(B), V_{|\psi\rangle}(C), \dots) = 0. \quad (2.2.2)$$

Le proprietà (a), (b) e (c) sono state enunciate così come proposte da Cabello, ma è abbastanza facile ricondurle alle ipotesi esaminate più nel dettaglio nella sezione precedente. Le proprietà (a) e (b) corrispondono rispettivamente alle assunzioni di valori definiti VD e non contestualità NC. La proprietà (c) è invece un analogo di FUNC, anche se Cabello non ha esplicitato la sua dipendenza dalle altre due assunzioni. Manca il principio di realismo, dato per scontato, ma vedremo nelle considerazioni aggiuntive come l'eventuale rinuncia a questa ipotesi sia abbastanza simile a rinunciare a NC.

Per la dimostrazione del teorema partiremo con il considerare il caso particolare di un sistema di spin uno, mostreremo come per questo specifico sistema il risultato valga e poi generalizzeremo la prova estendendola a tutti i sistemi quantistici descritti da uno spazio di Hilbert di dimensione maggiore o uguale a tre.

Consideriamo un sistema di spin 1 ($s = 1$) e gli operatori autoaggiunti corrispondenti alle componenti di spin in tre direzioni mutuamente ortogonali che chiameremo \hat{S}_x , \hat{S}_y e \hat{S}_z .

Scegliamo come base gli autoket $|0\rangle$ e $|\pm 1\rangle$ dell'operatore \hat{S}_z , i cui corrispettivi autovalori sono 0 e ± 1 . Lo spazio di Hilbert in questo caso è tridimensionale, così possiamo pensare di rappresentare i tre autoket con tre vettori

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.3)$$

Fissata questa base possiamo scrivere i tre operatori come

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.4)$$

Se ne si prende i quadrati si ha

$$\hat{S}_x^2 = \frac{\hbar^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y^2 = \frac{\hbar^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.5)$$

Definiamo poi due insiemi di osservabili

$$\{A, B, C\} = \{S_z^2, S_x^2, S_y^2\}, \quad (2.2.6)$$

$$\{A, \beta, \Gamma\} = \{S_z^2, S_\phi^2, S_{\phi+(\pi/2)}^2\}, \quad (2.2.7)$$

dove $S_\phi = S_x \cos(\phi) + S_y \sin(\phi)$, con $\phi \neq n\frac{\pi}{2}$ e n intero. Con qualche passaggio algebrico si può verificare che la forma matriciale di \hat{S}_ϕ^2 è

$$\hat{S}_\phi^2 = \frac{\hbar^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^{-i2\phi} \\ 0 & 2 & 0 \\ e^{i2\phi} & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.8)$$

Sempre tramite una verifica algebrica diretta si può vedere come ciascuno dei due insiemi appena definiti contiene osservabili compatibili tra di loro.

Dimostrazione. Per dimostrare la compatibilità mostriamo la commutatività degli operatori. Attraverso un calcolo algebrico diretto ed utilizzando le espressioni (2.2.5) si vede che

$$\hat{S}_x^2 \hat{S}_y^2 = \hat{S}_y^2 \hat{S}_x^2 = \frac{\hbar^4}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.9)$$

$$\hat{S}_x^2 \hat{S}_z^2 = \hat{S}_z^2 \hat{S}_x^2 = \frac{\hbar^4}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.2.10)$$

$$\hat{S}_y^2 \hat{S}_z^2 = \hat{S}_z^2 \hat{S}_y^2 = \frac{\hbar^4}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.11)$$

Questo è sufficiente a dimostrare che

$$[\hat{S}_x^2, \hat{S}_y^2] = [\hat{S}_x^2, \hat{S}_z^2] = [\hat{S}_y^2, \hat{S}_z^2] = 0. \quad (2.2.12)$$

Ricaviamo poi l'espressione di \hat{S}_ϕ partendo dalla sua definizione e utilizzando l'identità di Eulero

$$\begin{aligned}\hat{S}_\phi &= \hat{S}_x \cos(\phi) + \hat{S}_y \sin(\phi) = \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \cos(\phi) - i \sin(\phi) & 0 \\ \cos(\phi) + i \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) - i \sin(\phi) \\ 0 & \cos(\phi) + i \sin(\phi) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} & 0 \\ e^{i\phi} & 0 & e^{-i\phi} \\ 0 & e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (2.2.13)$$

Da cui si trova facilmente l'espressione (2.2.8). Valutiamo poi

$$\hat{S}_\phi^2 \hat{S}_{\phi+(\pi/2)}^2 = \hat{S}_{\phi+(\pi/2)}^2 \hat{S}_\phi^2 = \frac{\hbar^4}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.14)$$

$$\hat{S}_z^2 \hat{S}_\phi^2 = \hat{S}_\phi^2 \hat{S}_z^2 = \frac{\hbar^4}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^{-i2\phi} \\ 0 & 0 & 0 \\ e^{i2\phi} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.2.15)$$

$$\hat{S}_z^2 \hat{S}_{\phi+(\pi/2)}^2 = \hat{S}_{\phi+(\pi/2)}^2 \hat{S}_z^2 = \frac{\hbar^4}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -e^{-i2\phi} \\ 0 & 0 & 0 \\ -e^{i2\phi} & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.16)$$

Questo è sufficiente a dimostrare che

$$[\hat{S}_z^2, \hat{S}_\phi^2] = [\hat{S}_z^2, \hat{S}_{\phi+(\pi/2)}^2] = [\hat{S}_\phi^2, \hat{S}_{\phi+(\pi/2)}^2] = 0. \quad (2.2.17)$$

Si può facilmente verificare inoltre che

$$\hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = \hat{S}^2 = s(s+1)\hbar^2 \mathbb{1} = 2\hbar \mathbb{1}, \quad (2.2.18)$$

$$\hat{S}_z^2 + \hat{S}_\phi^2 + \hat{S}_{\phi+(\pi/2)}^2 = \hat{S}^2 = 2\hbar \mathbb{1}, \quad (2.2.19)$$

dove $\mathbb{1}$ è l'identità in uno spazio tridimensionale.

Risolviendo il problema agli autovalori per le tre matrici (2.2.6) si trova che i possibili valori del quadrato delle componenti di spin lungo tre direzioni mutuamente ortogonali sono 0 e \hbar^2 (con molteplicità due). Visto che la meccanica quantistica per osservabili compatibili che soddisfano una certa relazione funzionale prevede che i loro autovalori soddisfino la stessa relazione funzionale, allora si può concludere che gli autovalori devono soddisfare l'identità (2.2.18) (assunzione c). Un discorso del tutto analogo può essere fatto anche per i valori del quadrato delle componenti di spin delle matrici (2.2.7), anche in questo caso gli autovalori possono

essere solo 0 e \hbar^2 (con molteplicità 2) e devono soddisfare la relazione (2.2.19). Dato che si tratta di due insiemi di osservabili compatibili posso immaginare di misurare simultaneamente tutti e tre gli osservabili di ciascun insieme e dovrò ottenere come risultati uno 0 e due \hbar^2 , per soddisfare le relazioni (2.2.18) e (2.2.19), ma non sarà in generale possibile, almeno per la meccanica quantistica tradizionale, predire con certezza quale esatto valore otterrà ciascun osservabile.

Una teoria delle variabili nascoste che soddisfi le ipotesi (a), (b) e (c) deve quindi verificare

$$\begin{aligned} V_{|\psi\rangle}(S_z^2) &= 2\hbar^2 - V_{|\psi\rangle}(S_x^2) - V_{|\psi\rangle}(S_y^2) \\ &= 2\hbar^2 - V_{|\psi\rangle}(S_\phi^2) - V_{|\psi\rangle}(S_{\phi+(\pi/2)}^2), \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

ma gli osservabili S_x^2 e S_y^2 non possono essere misurati simultaneamente con gli osservabili S_ϕ^2 e $S_{\phi+(\pi/2)}^2$ (con $\phi \neq n(\pi/2)$ e con n intero). Nel corso della successiva dimostrazione proveremo che non è possibile assegnare i valori 0 e \hbar^2 in maniera consistente a un numero finito di osservabili del tipo $S_{\mathbf{n}}^2 = (n_x S_x + n_y S_y + n_z S_z)^2$ in modo tale che i valori degli osservabili lungo tre direzioni mutuamente ortogonali soddisfino la (2.2.20).

Nel proseguo indicheremo con $V(\mathbf{n})$ il valore di $V_{|\psi\rangle}(S_{\mathbf{n}}^2)$ e con \perp la condizione (2.2.20).

Lemma 1. I valori $V(\mathbf{n})$ e $V(\mathbf{n}')$ non possono essere entrambi zero se le direzioni \mathbf{n} e \mathbf{n}' formano un angolo compreso tra $\arctan(2^{3/2}) \approx 70^\circ 31' 44''$ e $\arctan(-2^{3/2}) \approx 109^\circ 28' 16''$.

Dimostrazione. Procediamo per assurdo. Consideriamo due direzioni che formano un angolo ϕ , $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ e $\mathbf{n}' = (\cos(\phi), \sin(\phi), 0)$, con $0 < \phi < \pi$ e assumiamo che $V(\mathbf{n})$ e $V(\mathbf{n}')$ siano uguali a 0 simultaneamente. Se $V(1, 0, 0) = 0$ la condizione (2.2.20) impone che il valore V lungo due direzioni perpendicolari a \mathbf{n} deve essere \hbar^2 :

$$V(1, 0, 0) = 0 \quad \stackrel{\perp}{\implies} \quad \begin{cases} V(0, \cos(\alpha), \sin(\alpha)) = \hbar^2 \\ V(0, \cos(\beta), \sin(\beta)) = \hbar^2 \end{cases} \quad (2.2.21)$$

dove α e β sono due angoli differenti. Analogamente si potrà dire che se $V(\cos(\phi), \sin(\phi), 0) = 0$, allora

$$\begin{aligned} V(\cos(\phi), \sin(\phi), 0) = 0 &\stackrel{\perp}{\implies} \\ \begin{cases} V(\sin(\phi) \sin(\alpha), -\cos(\phi) \sin(\alpha), \cos(\phi) \cos(\alpha)) = \hbar^2 \\ V(\sin(\phi) \sin(\beta), -\cos(\phi) \sin(\beta), \cos(\phi) \cos(\beta)) = \hbar^2 \end{cases} & \quad (2.2.22) \end{aligned}$$

Le direzioni che appaiono sul lato destro, in alto, delle equazioni (2.2.21) e (2.2.22) sono tra di loro perpendicolari ed entrambe hanno valore \hbar^2 , perciò il valore V per la direzione

perpendicolare ad entrambe deve essere 0:

$$\begin{cases} V(0, \cos(\alpha), \sin(\alpha)) = \hbar^2 \\ V(\sin(\phi) \sin(\alpha), -\cos(\phi) \sin(\alpha), \cos(\phi) \cos(\alpha)) = \hbar^2 \end{cases} \quad (2.2.23)$$

$$\stackrel{\perp}{\Rightarrow} V(\cos(\phi), \sin(\phi) \sin^2(\alpha), -\sin(\phi) \sin(\alpha) \cos(\alpha)) = 0.$$

La stessa cosa avviene con le direzioni che appaiono sul lato destro, in basso, delle equazioni (2.2.21) e (2.2.22), sono tra di loro perpendicolari ed entrambe hanno valore \hbar^2 , perciò

$$\begin{cases} V(0, \cos(\beta), \sin(\beta)) = \hbar^2 \\ V(\sin(\phi) \sin(\beta), -\cos(\phi) \sin(\beta), \cos(\phi) \cos(\beta)) = \hbar^2 \end{cases} \quad (2.2.24)$$

$$\stackrel{\perp}{\Rightarrow} V(\cos(\phi), \sin(\phi) \sin^2(\beta), -\sin(\phi) \sin(\beta) \cos(\beta)) = 0.$$

Le direzioni al lato destro delle (2.2.23) e (2.2.24) sono ortogonali se

$$\sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\alpha - \beta) = -\cot^2(\phi). \quad (2.2.25)$$

Il lato sinistro della (2.2.25) è compreso tra $-\frac{1}{8}$ e 1, quindi per avere la perpendicolarità deve essere soddisfatta

$$\arctan(2^{3/2}) \leq \phi \leq \arctan(-2^{3/2}). \quad (2.2.26)$$

Quindi se scegliamo un ϕ che soddisfa la (2.2.26), e α, β soddisfano la (2.2.25) i risultati della (2.2.23) e della (2.2.24) contraddicono la condizione (2.2.20), ovvero abbiamo che il valore V è uguale a 0 per due direzioni ortogonali. L'unico modo per evitare la contraddizione è considerare falsa l'ipotesi iniziale che $V(\mathbf{n}) = V(\mathbf{n}') = 0$.

Lemma 2. Se $V(\mathbf{n}) = 0$ allora $V(\mathbf{n}')$ deve essere anch'esso nullo per ogni direzione \mathbf{n}' che forma con \mathbf{n} un angolo compreso tra 0 e $\text{arccot}(2^{3/2}) \approx 19^\circ 28' 16''$.

Dimostrazione. La condizione (2.2.20) e il lemma 1 con $\arctan(2^{3/2}) \leq \phi \leq \arctan(-2^{3/2})$ impongono

$$V(1, 0, 0) = 0 \quad \begin{cases} \stackrel{\perp}{\Rightarrow} V(0, 0, 1) = \hbar^2 \\ \xrightarrow{\text{lemma 1}} V(\cos(\phi), \sin(\phi), 0) = \hbar^2 \end{cases} \quad (2.2.27)$$

$$\stackrel{\perp}{\Rightarrow} V(\cos(\phi - \frac{\pi}{2}), \sin(\phi - \frac{\pi}{2}), 0) = 0.$$

Evidentemente la direzione iniziale e finale formano un angolo χ tale che $0 \leq \chi \leq \text{arccot}(2^{3/2})$.

Teorema. Non è possibile associare in maniera consistente i valori 0 e \hbar^2 a un numero finito

di osservabili del tipo S_n^2 in modo che i valori che corrispondono a osservabili in tre direzioni ortogonali soddisfino la (2.2.20).

Dimostrazione. È sufficiente verificare che i lemmi 1 e 2 sono contraddittori.

In accordo con il lemma 2, se $V(\mathbf{n}) = 0$ allora in un'altra direzione \mathbf{n}' che forma con \mathbf{n} un angolo di 18° deve avere $V(\mathbf{n}') = 0$. Dato che $72^\circ/18^\circ = 4$ è sufficiente applicare quattro rotazioni successive di 18° sullo stesso piano delle prime due direzioni per concludere, utilizzando il lemma 2 per quattro volte, che se il valore dell'osservabile in una direzione è 0, in un'altra direzione che forma con questa un angolo di 72° il valore deve essere comunque 0. Questo però contraddice il lemma 1.

$$V(1, 0, 0) = 0 \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{lemma 1}} V(\cos(72^\circ), \sin(72^\circ), 0) = \hbar^2 \\ \xrightarrow{\text{lemma 2}} V(\cos(18^\circ), \sin(18^\circ), 0) = 0 \\ \xrightarrow{\text{lemma 2}} \dots \\ \xrightarrow{\text{lemma 2}} \dots \\ \xrightarrow{\text{lemma 2}} V(\cos(72^\circ), \sin(72^\circ), 0) = 0 \end{array} \right. \quad (2.2.28)$$

Abbiamo per ora dimostrato che è impossibile costruire una teoria delle variabili nascoste che soddisfi le proprietà (a), (b) e (c) per il caso particolare di un sistema di spin uno. Possiamo ora generalizzare questo risultato estendendolo a un qualsiasi sistema quantistico descritto con uno spazio di Hilbert di dimensione maggiore o uguale a tre.

Consideriamo uno spazio di Hilbert di dimensione n e un insieme di proiettori ortogonali \hat{P}_i . Un insieme di proiettori ortogonali è un insieme di operatori con autovalori 1 e 0, quest'ultimo $n - 1$ volte degenere, per i quali vale

$$\sum_{i=1}^n \hat{P}_i = \mathbb{1}. \quad (2.2.29)$$

Nel caso particolare trattato in precedenza un insieme di proiettori ortogonali può essere definito a partire dall'operatore di spin \hat{S} come $\hat{P}_i = \mathbb{1} - (1/\hbar^2)\hat{S}_i^2$, dove \hat{S}_i sono le tre componenti ortogonali di \hat{S} .

Se c'è una corrispondenza tra gli operatori autoaggiunti \hat{P}_i e alcuni osservabili P_i (principio di corrispondenza) allora possiamo concludere che ogni teoria delle variabili nascoste che soddisfi le proprietà (a), (b) e (c) deve rispettare

$$\begin{aligned} V(P_z) &= 1 - V(P_x) - V(P_y) \\ &= 1 - V(P_\phi) - V(P_{\phi+(\pi/2)}), \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

dove si considera sempre uno spazio di Hilbert tridimensionale. Abbiamo cioè che se $V(P_i) = 1$, allora gli altri due valori sono uguali a 0. La dimostrazione appena vista per gli osservabili

S_i può essere ripetuta anche per gli osservabili P_i in maniera del tutto analoga, conducendo al risultato che non è possibile associare i valori 1 e 0 a un numero finito di osservabili del tipo P_i in maniera consistente con la (2.2.30).

L'estensione di questo argomento a spazi di dimensione maggiore alla tre è immediata perché possiamo sempre considerare al loro interno degli sottospazi di dimensione tre.

2.2.2 Versione di Peres

In questa sezione proponiamo l'enunciato e la dimostrazione del teorema KS forniti da A. Peres nel 1991 [35]. Si tratta probabilmente di una prova più complicata di quella esposta nella sezione precedente ma più simile a quella dell'articolo originale di KS [30], inoltre tornerà utile per il prossimo capitolo.

Teorema di Kochen-Specker (versione di Peres). In uno spazio di Hilbert di dimensione $n \geq 3$, è impossibile associare in maniera non contestuale i valori numerici definiti, 1 o 0, ad ogni proiettore ortogonale P_i , in modo tale che, se un insieme di proiettori commutanti \hat{P}_i soddisfa la relazione $\sum_i \hat{P}_i = \mathbb{1}$, i corrispondenti valori $V(P_i)$ soddisfino la stessa relazione $\sum_i V(P_i) = 1$.

La conseguenza di questo teorema, come già visto anche per la versione di Cabello, è che ogni teoria delle variabili nascoste che attribuisce un valore definito al risultato di una qualsiasi misura quantistica, e riproduce tutte le proprietà statistiche della teoria quantistica, deve necessariamente essere contestuale. Se si hanno tre operatori, \hat{A} , \hat{B} e $\hat{\beta}$, che soddisfano $[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{\beta}] = 0$ e $[\hat{B}, \hat{\beta}] \neq 0$, allora il risultato della misura dell'osservabile A dipende dal fatto che misuri A da solo, o insieme a B , oppure assieme a β .

Dimostrazione. Per uno spazio di Hilbert di dimensione n consideriamo una base ortonormale di ket $|u_1\rangle, |u_2\rangle, \dots, |u_n\rangle$. Le n matrici $\hat{P}_i = |u_i\rangle \langle u_i|$ sono proiettori ortogonali sui ket di base $|u_i\rangle$. Questi operatori hanno come soli autovalori 0 e 1, inoltre commutano e soddisfano la relazione di completezza

$$\sum_{i=1}^n \hat{P}_i = \mathbb{1}. \quad (2.2.31)$$

Ci sono n modi diversi di assegnare il valore 1 a uno di questi osservabili e il valore 0 a tutti i restanti $n - 1$. Consideriamo ora altre basi ortogonali di questo spazio di Hilbert, che potrebbero condividere tra loro alcuni ket. Assumiamo poi la non contestualità (oppure se si preferisce, il principio di corrispondenza), ovvero se un ket è membro di più di una di queste basi, il valore (0 o 1) associato al corrispondente proiettore ortogonale è lo stesso, indipendentemente dalla scelta degli altri ket di base. Questa assunzione porta ad una contraddizione che KS misero in mostra usando 117 vettori in \mathbb{R}^3 [30], ma in questa prova useremo 33 vettori appartenenti a 16

basi distinte in \mathbb{R}^3 [35].

Nel corso della dimostrazione faremo uso del termine vettori, anche se noi saremo interessati soltanto alla loro direzione, mentre il loro modulo non giocherà mai un ruolo d'importanza, perciò potremo per convenienza fissarlo a 1. Questo non modifica le relazioni di ortogonalità ma rende meno complicati i conti. Per semplificare ancora maggiormente la questione chiameremo verdi quei vettori ai cui corrispondenti proiettori ortogonali assoceremo il valore 1 (spesso diremo semplicemente che il valore 1 è associato al vettore stesso), mentre chiameremo rossi i vettori di valore 0.

I 33 vettori che considereremo saranno quelli la cui somma dei quadrati dei coseni direttori conduce, a meno delle permutazioni, alle seguenti combinazioni:

$$0 + 0 + 1 = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}. \quad (2.2.32)$$

Ricordiamo che i coseni direttori di un vettore rappresentano i coseni degli angoli che quel vettore forma con i tre assi coordinati positivi, e sono pari alle componenti del vettore normalizzate con la norma del vettore stesso. I 33 vettori che consideriamo possono essere ottenuti (almeno per quanto riguarda la direzione) connettendo l'origine con vari punti che indichiamo con xyz , dove x , y e z possono valere: 0, 1, $\bar{1}$ (questo simbolo sta per -1), 2 (che sta per $\sqrt{2}$) e $\bar{2}$ (che sta per $-\sqrt{2}$). Ad esempio il vettore $\bar{1}02$ connette l'origine con $(-1, 0, \sqrt{2})$ e i coseni direttori sono $(-\sqrt{\frac{1}{3}}, 0, \sqrt{\frac{2}{3}})$. Esplicitamente i 33 vettori sono elencati nella tabella 2.1.

Una proprietà importante di questo insieme di vettori è l'invarianza per lo scambio degli assi x , y e z , e per l'inversione della direzione degli assi. Questo ci permette di assegnare arbitrariamente, senza perdita di generalità, i valori 1 o 0 ad alcuni vettori, ogni altro assegnamento è equivalente a rinominare gli assi o invertirne uno.

L'intera dimostrazione del teorema KS è racchiusa nella tabella 2.2. In ogni riga della tabella il primo vettore è verde, il secondo e il terzo sono rossi e assieme al primo formano una terna ortogonale. Ulteriori vettori ortogonali al primo sono inseriti nella seconda colonna e sono anch'essi rossi (sono elencati solo quelli necessari per le considerazioni successive). Sono scritti in corsivo quei vettori che erano già stati citati come rossi in una qualche riga precedente.

La prima, la quarta e l'ultima riga contengono rispettivamente i vettori 100 , 021 e $0\bar{1}2$. Questi vettori sono tutti e tre rossi ma sono anche tra di loro ortogonali e questa è una contraddizione perché avevamo visto prima che tra tre vettori mutuamente ortogonali ve ne deve essere uno verde. Graficamente è possibile visualizzare questa dimostrazione con la figura 2.2.

Si può mostrare come tutti i 33 vettori sono necessari per questa dimostrazione, toglierne soltanto uno comporta l'eliminazione della contraddizione, anche se il vettore che viene rimosso non compare nella tabella. Questo perché togliere un vettore comporta la rottura della simmetria dell'insieme e quindi la necessità di esaminare più scelte alternative nell'assegnazione dei valori 0 e 1, il che complica la dimostrazione.

Tabella 2.1: Elenco di tutti i 33 vettori presi in esame per la dimostrazione del teorema KS di Peres. Nella prima colonna è presentata la somma del quadrato dei coseni direttori. Nella seconda colonna sono riportati i coseni direttori che identificano i vettori, cioè i coseni degli angoli che il vettore forma con i tre assi coordinati. Nella terza colonna sono riportati alcuni punti per i quali passano questi vettori, in questo caso la lunghezza dei vettori non è più unitaria.

componenti	coseni direttori	punti	componenti	coseni direttori	punti	
$0 + 0 + 1$	$(1, 0, 0)$	$(1, 0, 0)$	$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 0$	$(-\sqrt{\frac{1}{3}}, 0, \sqrt{\frac{2}{3}})$	$(\bar{1}, 0, 2)$	
	$(0, 1, 0)$	$(0, 1, 0)$		$(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$	$(\bar{1}, 2, 0)$	
	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, 1)$		$(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, \sqrt{\frac{1}{3}})$	$(\bar{2}, 0, 1)$	
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0$	$(0, \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}})$	$(0, 1, 1)$		$(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, 0)$	$(\bar{2}, 1, 0)$	
	$(\sqrt{\frac{1}{2}}, 0, \sqrt{\frac{1}{2}})$	$(1, 0, 1)$		$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$	$(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(2, 1, 1)$
	$(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, 0)$	$(1, 1, 0)$			$(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2})$	$(1, 2, 1)$
	$(0, -\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}})$	$(0, \bar{1}, 1)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{2}})$		$(1, 1, 2)$	
	$(-\sqrt{\frac{1}{2}}, 0, \sqrt{\frac{1}{2}})$	$(\bar{1}, 0, 1)$	$(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$		$(\bar{2}, 1, 1)$	
	$(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, 0)$	$(\bar{1}, 1, 0)$	$(-\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2})$		$(\bar{1}, 2, 1)$	
$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 0$	$(0, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$	$(0, 1, 2)$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{2}})$		$(\bar{1}, 1, 2)$	
	$(0, \sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}})$	$(0, 2, 1)$	$(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(2, \bar{1}, 1)$		
	$(\sqrt{\frac{1}{3}}, 0, \sqrt{\frac{2}{3}})$	$(1, 0, 2)$	$(\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2})$	$(1, \bar{2}, 1)$		
	$(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$	$(1, 2, 0)$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{2}})$	$(1, \bar{1}, 2)$		
	$(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, \sqrt{\frac{1}{3}})$	$(2, 0, 1)$	$(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(\bar{2}, \bar{1}, 1)$		
	$(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, 0)$	$(2, 1, 0)$	$(-\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2})$	$(\bar{1}, \bar{2}, 1)$		
	$(0, -\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$	$(0, \bar{1}, 2)$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{2}})$	$(\bar{1}, \bar{1}, 2)$		
	$(0, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}})$	$(0, \bar{2}, 1)$				

Figura 2.2: Dimostrazione grafica del teorema KS nella versione di Peres. I 33 punti in figura rappresentano le 33 direzioni della tabella 2.1, con le notazioni $\underline{1}$ e $\underline{2}$ si intende rispettivamente $\bar{1}$ e $\bar{2}$. Le linee che collegano i punti indicano che le due corrispondenti direzioni sono tra di esse ortogonali (non sono disegnate tutte le linee, ma solo quelle necessarie), coerentemente con ciò i 16 triangoli al centro della figura rappresentano le 16 terne ortogonali. I punti sono colorati in rosso e verde secondo quanto riportato nella tabella 2.2. All'interno di ogni triangolo vi devono essere esattamente 2 punti rossi ed uno verde, inoltre due punti verdi non possono essere collegati da una linea. Si nota come colorare l'intero grafico seguendo queste due semplici regole è impossibile, nel caso della figura la contraddizione emerge nel triangolo composto dai vertici 100, $0\underline{12}$ e $0\underline{21}$, tutti colorati di rosso.

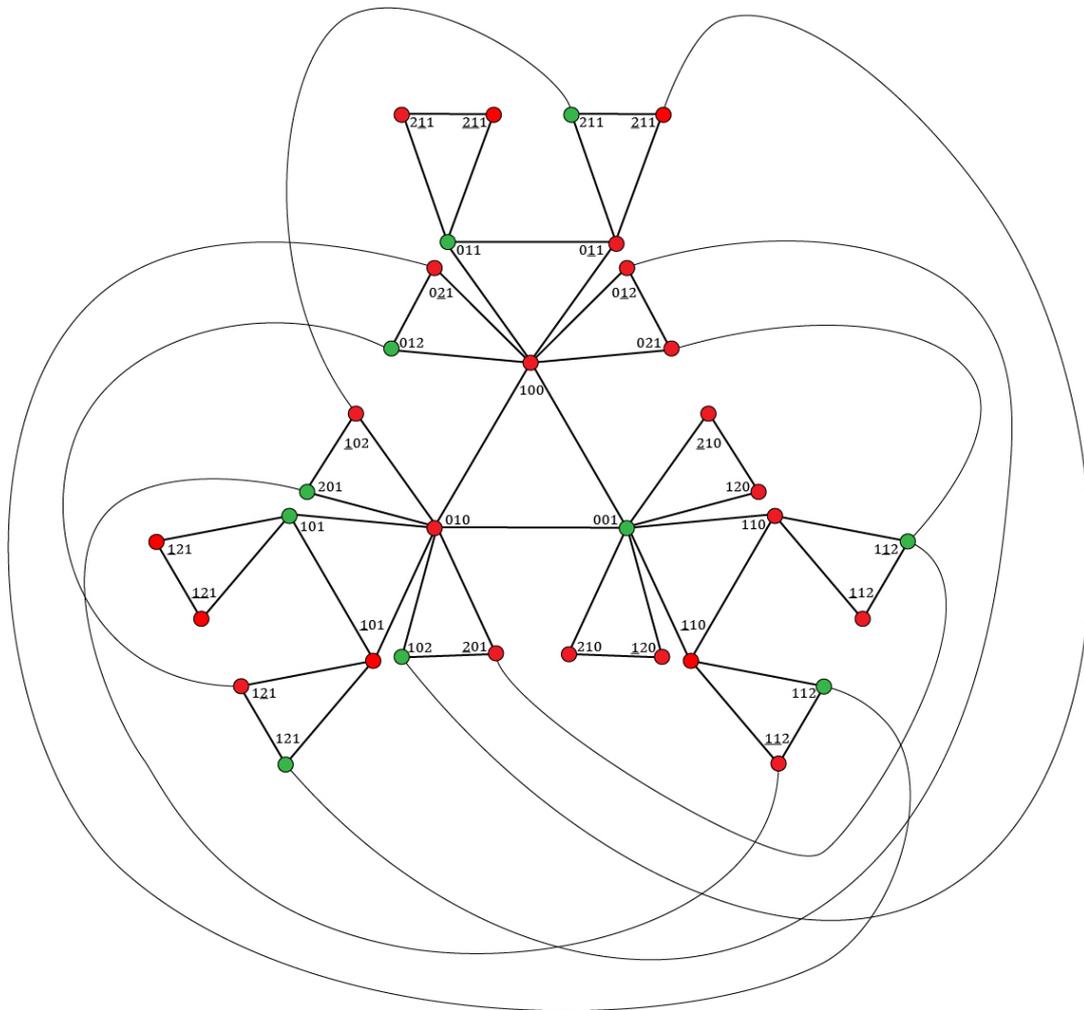


Tabella 2.2: Prova del teorema KS in tre dimensioni.

Terne ortogonali			Altri vettori	
001	100	010	110	1 $\bar{1}$ 0
101	$\bar{1}$ 01	010		
011	0 $\bar{1}$ 1	100		
1 $\bar{1}$ 2	$\bar{1}$ 12	110	$\bar{2}$ 01	021
102	$\bar{2}$ 01	010	$\bar{2}$ 11	
211	0 $\bar{1}$ 1	$\bar{2}$ 11	$\bar{1}$ 02	
201	010	$\bar{1}$ 02	$\bar{1}$ $\bar{1}$ 2	
112	1 $\bar{1}$ 0	$\bar{1}$ $\bar{1}$ 2	0 $\bar{2}$ 1	
012	100	0 $\bar{2}$ 1	1 $\bar{2}$ 1	
121	$\bar{1}$ 01	1 $\bar{2}$ 1	0 $\bar{1}$ 2	

2.2.3 Considerazioni aggiuntive

Ricapitoliamo quanto visto sino ad ora e traiamo alcune possibili conclusioni.

Partendo dal formalismo della meccanica quantistica siamo riusciti a formulare il Principio di Composizione Funzionale Statistico, o FUNC STAT, il quale impone delle costrizioni alle frequenze (quindi alle probabilità) con cui si ottengono certi risultati dalle misure di un osservabile Q e una sua funzione generica $f(Q)$. Se all'ipotesi di coerenza con questo teorema della meccanica quantistica aggiungiamo altre tre assunzioni, in particolare la definitezza dei valori (VD), il principio di realismo (PR) e il principio di corrispondenza (o equivalentemente la non contestualità, NC), siamo in grado di ricavare il principio di composizione funzionale, o FUNC, che questa volta introduce delle restrizioni ai valori posseduti da un osservabile Q e una sua funzione $f(Q)$. Di fatto quello che FUNC impone è e che la struttura algebrica degli operatori commutanti deve essere riflessa nella struttura algebrica dei valori posseduti. A partire da FUNC si possono ricavare due regole, quella della somma e quella del prodotto. Queste due regole sono alla fonte del paradosso di Kochen-Specker, infatti abbiamo dimostrato come in uno spazio di Hilbert di dimensione $n \geq 3$, è impossibile associare valori numerici definiti, 1 o 0, ad ogni proiettore ortogonale P_i , in modo tale che, se un insieme di proiettori commutanti \hat{P}_i soddisfa la relazione $\sum_i \hat{P}_i = \mathbb{1}$, i corrispondenti valori $V(P_i)$ soddisfino la stessa relazione $\sum_i V(P_i) = 1$ (regola della somma e regola del prodotto, quest'ultima entra in gioco per ricavare che l'autovalore di $\mathbb{1}$ è 1).

Questa conclusione contraddittoria può essere sanata soltanto rinunciando ad una delle quattro ipotesi di partenza: la meccanica quantistica è valida (da essa infatti deriva FUNC STAT), definitezza dei valori (VD), realismo (PR) e non contestualità (NC, oppure corrispondenza tra osservabili e operatori). Prendiamo in esame ciascuna alternativa seguendo la trattazione dell'Enciclopedia Filosofica di Stanford [26] e M. Redhead [36].

Rifiuto della generale definitezza dei valori. VD è uno dei capisaldi di ogni interpretazione

a variabili nascoste della teoria quantistica, il rifiuto di questa importante premessa farebbe perdere a questo genere di interpretazioni buona parte del loro senso, ma non per questo escluderebbe del tutto. Resta infatti possibile la definitezza parziale dei valori, in questo approccio viene scelto un insieme ristretto di osservabili ai quali è possibile assegnare un valore definito senza poi incorrere nelle contraddizioni del teorema KS. Un esempio di questo tipo è la teoria dell'onda pilota, detta anche meccanica bohmniana [25], nella quale la posizione e ogni funzione di essa hanno sempre valori definiti. Questa teoria, oltre a sfuggire alle contraddizioni del teorema KS è manifestamente non locale e quindi in accordo anche con il teorema di Bell.

Rifiuto del realismo dei valori. La derivazione di FUNC consiste nel costruire un osservabile $f(Q)$ attraverso l'operatore $f(\hat{Q})$ a partire dalla distribuzione di probabilità della variabile $f(V_{|\psi\rangle}(Q))$, costruita a partire da un'altra variabile $V_{|\psi\rangle}(Q)$. In questo caso non neghiamo l'esistenza di $V_{|\psi\rangle}(Q)$ in tutti i casi, come al punto precedente, ma rifiutiamo che l'esistenza di un numero operativamente definito q associato ad un operatore autoaggiunto $f(\hat{Q})$ sia sufficiente a dire che esiste un elemento di realtà (un osservabile) associato con quel numero. Neghiamo cioè la validità di PR. In un certo senso questo equivale a rigettare il principio di corrispondenza secondo il quale per ogni operatore autoaggiunto c'è un osservabile ben definito. Questa assunzione è molto poco plausibile, infatti richiede di credere che alcuni operatori, somma o prodotto di operatori associati a osservabili ben definiti, non sono essi stessi associati a osservabili ben definiti, anche se ereditano valori esatti dai loro addendi o fattori. È come se dicessimo che chiedersi quale sia l'energia di un sistema è una domanda sensata e legittima perché esiste l'osservabile energia, mentre chiedersi quale sia il quadrato dell'energia non lo è anche se dalla prima domanda possiamo trovare valori definiti alla seconda. Perché il rifiuto del PR abbia un minimo di plausibilità dobbiamo immaginare che sia possibile costruire lo stesso operatore \hat{A} a partire da due differenti operatori massimali, \hat{B} e $\hat{\beta}$, che sono tra di loro incompatibili, ovvero: $g(\hat{\beta}) = \hat{A} = f(\hat{B})$ e $[\hat{B}, \hat{\beta}] = 0$. Ora possiamo immaginare che la costruzione di \hat{A} solo attraverso \hat{B} , ma non attraverso $\hat{\beta}$, conduca a un osservabile ben definito in un certo contesto. Ciò rende automaticamente l'osservabile dipendente dal contesto, quindi il rifiuto di PR conduce anche a un certo grado di rifiuto di NC.

Rifiuto della non contestualità. Se accettiamo DV e PR dobbiamo negare che la costruzione dell'osservabile A sia non ambigua, cioè benché $f(\hat{B})$ e $g(\hat{\beta})$ siano matematicamente identici, possiamo assumere che corrispondano a osservabili differenti. Questo può essere giustificato e reso per lo meno plausibile dicendo che per determinare il valore $V_{|\psi\rangle}(f(B))$ dobbiamo prima misurare B , mentre per determinare il valore $V_{|\psi\rangle}(g(\beta))$ dobbiamo prima misurare β , che è incompatibile con B . Visto che $V_{|\psi\rangle}(f(B))$ e $V_{|\psi\rangle}(g(\beta))$ sono gli esiti di misure differenti, una su B l'altra su β , non c'è motivo di assumere che $V_{|\psi\rangle}(f(B)) = V_{|\psi\rangle}(g(\beta))$. In questo modo stiamo rifiutando di credere che $f(B)$ e $g(\beta)$ siano lo stesso osservabile pur essendo rappresentati matematicamente dallo stesso operatore \hat{A} (rifiuto del principio di corrispondenza), e la

differenza tra questi due diversi osservabili è data dal contesto in cui avviene la misura, in particolare la scelta di quale operatore, B o β , misurare con essi (rifiuto della non contestualità). Esistono due tipologie di contestualità, quella causale e quella ontologica. Nella contestualità causale una proprietà, come il valore di un osservabile, può dipendere in maniera causale dal contesto, nel senso che i valori osservati sono l'effetto dell'iterazione tra l'apparato di misura e il sistema studiato. Si noti però che viene così meno l'innocua assunzione di misurazioni fedeli, ovvero che le misure di un osservabile restituiscono semplicemente il valore che quell'osservabile aveva immediatamente prima dell'iterazione con l'apparato di misura. Nella contestualità ontologica una proprietà fisica è dipendente dal contesto nel senso che per essere ben definita è necessaria la specificazione dell'osservabile da cui viene fuori. Per maggiori informazioni sulla contestualità quantistica si rimanda a [7].

Al termine di questa sezione accenniamo soltanto ai legami tra il teorema di Bell e quello KS, in particolare il primo può essere visto come una conseguenza del secondo. Si può infatti dimostrare che ogni forma di contestualità quantistica può essere convertita in una violazione di una disuguaglianza di Bell, in altre parole la contestualità può essere convertita in non località. A questo proposito si veda il capitolo 6 del già citato *"Incompleteness, Nonlocality, and Realism"* di Redhead [36] e il recente lavoro di Cabello [9].

2.3 Questione della verifica sperimentale

2.3.1 Esperimento proposto da Kochen e Specker

Abbiamo visto nella sezione 1.4 come la violazione della disuguaglianza di Bell e la conferma della predizioni della meccanica quantistica siano state empiricamente confermate. Nel caso del teorema KS la questione della verifica sperimentale risulta essere più complicata.

Partiamo con il chiederci se è possibile realizzare l'esperimento proposto da KS nella quarta sezione dell'articolo in cui proposero il teorema [30].

Consideriamo come sistema fisico un atomo di ortelio nello stato 2^3S_1 , dove il numero quantico principale è $n = 2$, il numero quantico orbitale è $L = 0$ e il numero quantico di spin è $S = 1$. L'atomo di elio contiene due elettroni e quando sommiamo due spin $1/2$ gli stati di spin che possiamo ottenere sono

$$(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (2.3.1)$$

$$|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle, \quad (2.3.2)$$

$$(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (2.3.3)$$

$$|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle. \quad (2.3.4)$$

Lo stato (2.3.1) è uno stato di singoletto che ha $S = 0$ e $S_z = 0$. Gli altri tre stati sono stati di tripletto che hanno $S = 1$, in particolare (2.3.2) ha $S_z = 1$, (2.3.3) ha $S_z = 0$ e (2.3.4) ha $S_z = -1$. Nel nostro caso scegliamo lo stato di tripletto a minore energia, questo stato non è lo stato fondamentale ma è pur sempre metastabile, infatti lo stato fondamentale ($n = 1$) è uno stato di singoletto e le transizioni ottiche tra stati di singoletto e stati di tripletto sono proibite. Siccome i possibili valori di S_z (così come quelli di S_x e S_y) sono 0 e ± 1 (in unità \hbar^2), allora $S_z^2 = 0, 1$ (così come $S_x^2, S_y^2 = 0, 1$). Inoltre, dato che vale

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S^2 = S(S + 1)\hbar^2 = 2\hbar^2, \quad (2.3.5)$$

e gli operatori S_x^2, S_y^2 e S_z^2 commutano, in una misura simultanea di tutti e tre si può solo trovare $0, 1, 1$ in un qualche ordine.

Poniamo che il sistema imperturbato sia descritto dall'Hamiltoniana imperturbata \hat{H}_0 . Applichiamo ora al sistema un debole campo elettrico \mathbf{E} con simmetria rombica. Questo campo può essere ottenuto ponendo nell'origine del sistema di riferimento l'atomo di elio e nei punti $(\pm u, 0, 0)$, $(0, \pm v, 0)$ e $(0, 0, \pm w)$ delle cariche elettriche, con u, v e w distinti. Attraverso la teoria perturbativa indipendente dal tempo è possibile mostrare come l'hamiltoniana del sistema H è data da $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_s$, dove per la simmetria rombica del campo la perturbazione \hat{H}_s , chiamata hamiltoniana di spin, ha la forma

$$\hat{H}_s = a\hat{S}_x^2 + b\hat{S}_y^2 + c\hat{S}_z^2, \quad (2.3.6)$$

dove \hat{S}_x^2, \hat{S}_y^2 e \hat{S}_z^2 sono i quadrati delle componenti di spin lungo tre direzioni mutuamente ortogonali, mentre a, b e c sono tre numeri distinti. Per la dimostrazione si veda [42].

L'operatore \hat{H}_s corrisponde ad un osservabile fisico: la variazione di energia dello stato orbitale a minore energia dell'ortoelio in seguito all'applicazione di un debole campo elettrico. Questo cambiamento può essere misurato studiando lo spettro. Per quanto visto prima i possibili valori misurati per \hat{H}_s sono $a + b, a + c$ e $b + c$ (in unità \hbar^2). Dato che a, b e c sono distinti allora lo sono pure $a + b, a + c$ e $b + c$. Quindi, una misura di \hat{H}_s conduce immediatamente ad una misura simultanea di \hat{S}_x^2, \hat{S}_y^2 e \hat{S}_z^2 , infatti, ad esempio, se trovassimo come risultato di una misura di \hat{H}_s il valore $a + b$ potremmo inferire che \hat{S}_x^2 e \hat{S}_y^2 hanno valore 1 , mentre \hat{S}_z^2 ha valore 0 .

KS suggeriscono poi che potrebbe risultare sperimentalmente più semplice utilizzare non un atomo di elio ma bensì sali di Tutton al nichel. Questi sali consistono di uno ione di nichel circondato da un ottaedro di molecole d'acqua e appare nello stato $S^2 = 2\hbar^2$. Le molecole d'acqua formano un campo elettrico cristallino con simmetria rombica intorno allo ione di nichel. L'hamiltoniana di spin risultante è proprio la (2.3.6).

Una teoria delle variabili nascoste non contestuale prevede l'esistenza di valori degli osservabili ancora prima che avvenga una misura, ha quindi senso chiedersi se il quadrato della componente del momento angolare di spin nella direzione α (poniamo sia una delle 33 direzioni della configurazione di Peres vista nella sezione precedente) per lo stato 2^3S_1 dell'elio ha

il valore predefinito zero. Per ogni possibile risposta a questa domanda (sì o no) si può sempre trovare una terna ortogonale x, y, z (sempre tra quelle 33 direzioni) che contraddice la predizione della meccanica quantistica per cui esattamente una delle tre componenti ortogonali di spin S_x^2, S_y^2 e S_z^2 può essere zero. Attraverso una misura di H_s si può immaginare di riuscire a verificare queste previsioni, ma emergono subito alcune problematiche.

Uno dei problemi di questo esperimento è che non fornisce una verifica diretta dell'ipotesi di non contestualità. Una misurazione di H_s misura una sola terna ortogonale, mentre per mettere in evidenza la contraddizione con la meccanica quantistica serve conoscere i valori delle componenti di spin in tutte le direzioni. Questo è possibile farlo soltanto eseguendo diverse misure su sistemi nello stesso stato quantistico, dato che tutte queste ulteriori misurazioni non sono eseguibili sullo stesso sistema senza interferenza, visto che coinvolgono osservabili non compatibili. A questo punto però un sostenitore di una teoria delle variabili nascoste potrebbe sostenere che anche se prepariamo i sistemi nello stesso stato quantistico, lo stato nascosto potrebbe essere diverso e quindi possono cambiare gli esiti delle misure di H_s , pur mantenendo la non contestualità.

La differenza fondamentale tra disuguaglianza di Bell e teorema KS che rende il secondo molto più difficile da testare che la prima sta tutta nella dimostrazione dei due enunciati. Nella disuguaglianza di Bell si ha a che fare con grandezze statistiche (il valor medio della correlazione, C) che possono essere calcolate ripetendo le misure su coppie diverse di sottosistemi. Al contrario nella dimostrazione del teorema KS ci si riferisce ad un singolo sistema individuale e si considerano osservabili non compatibili che non possono essere misurati simultaneamente sullo stesso singolo sistema. Inoltre la disuguaglianza di Bell era ricavabile da una qualsiasi teoria delle variabili nascoste locale, indipendentemente da qualsiasi nozione di meccanica quantistica. Nel teorema KS si considerano invece teorie delle variabili nascoste non contestuali che condividono qualche proprietà con la meccanica quantistica, in questo senso la dimostrazione del teorema non è del tutto indipendente dalla struttura formale della meccanica quantistica. Per verificare sperimentalmente il teorema KS occorre trovare una situazione in cui le teorie delle variabili nascoste non contestuali, senza nessun utilizzo della struttura formale della meccanica quantistica, facciano predizioni in contrasto con quelle della meccanica quantistica per ogni sistema individuale e per ogni stato quantistico.

2.3.2 Esperimento proposto da Cabello e Garcia

Presentiamo in questa sezione l'esperimento proposto da A. Cabello e G. Garcia-Alcaine nel 1997 [10], che coinvolge due particelle di spin $1/2$, e che si propone come una situazione in cui le teorie delle variabili nascoste non contestuali, senza nessun utilizzo della struttura formale della meccanica quantistica, producono predizioni in contrasto con quelle della meccanica quantistica per ogni sistema individuale e per ogni stato quantistico. Ispirati dal lavoro di Cabello e Garcia, nel 2000 Simon *et al.* [41] hanno proposto un possibile esperimento che coinvolgesse una sola particella. Questo è stato eseguito per la prima volta nel 2003 da Huang *et al.* [28], con risultati fortemente in accordo con la meccanica quantistica.

Partiamo con l'esaminare l'esperimento proposto da Cabello-Garcia [10]. Si consideri una coppia di particelle di spin 1/2 preparate in uno stato non meglio specificato. Partiamo dall'ipotesi che il sistema sia descrivibile attraverso una teoria delle variabili nascoste non contestuale (VD e NC) e guardiamo a quali predizioni giungiamo. Innanzitutto vediamo meglio cosa implicano l'ipotesi NC e VD in questo contesto:

- i Ogni osservabile di ogni singola particella possiede un valore definito. In particolare consideriamo gli osservabili $Z_1 := \sigma_{1z}$, $Z_2 := \sigma_{2z}$, $X_1 := \sigma_{1x}$ e $X_2 := \sigma_{2x}$ (cioè le componenti di spin in unità di $\frac{\hbar}{2}$ nelle direzioni z e x per la prima e la seconda particella), questi hanno valori predefiniti e non contestuali che possono essere ± 1 . Indicheremo questi valori con $V(Z_1)$, $V(Z_2)$, $V(X_1)$ e $V(X_2)$. Considerando tutte le possibili combinazioni di questi valori si hanno $16 = 2^4$ stati possibili (per esempio uno di questi può essere $V(Z_1) = -V(Z_2) = -V(X_1) = V(X_2) = +1$).
- ii Il valore di un osservabile delle due particelle che è il prodotto di osservabili delle singole particelle, come Z_1Z_2 (o Z_1X_2 , X_1Z_2 e X_1X_2) è

$$V(Z_1Z_2) = V(Z_1)V(Z_2). \quad (2.3.7)$$

Si noti come Z_1 e Z_2 siano non solo osservabili compatibili ma si riferiscano anche a particelle diverse. Si noti anche come la (2.3.7) non sia altro che la regola del prodotto (2.1.34), e come avevamo già visto non è altro che una conseguenza della non contestualità: dato che il valore di Z_1Z_2 non dipende dal contesto della misura, posso pensare di ottenere questo valore misurando separatamente Z_1 e Z_2 , e moltiplicando i risultati.

Consideriamo poi le quattro seguenti proposizioni

$$P_1 := "Z_1Z_2 = +1 \wedge X_1X_2 = +1", \quad (2.3.8)$$

$$P_2 := "Z_1Z_2 = -1 \wedge X_1X_2 = -1", \quad (2.3.9)$$

$$P_3 := "Z_1X_2 = +1 \wedge X_1Z_2 = +1", \quad (2.3.10)$$

$$P_4 := "Z_1X_2 = -1 \wedge X_1Z_2 = -1". \quad (2.3.11)$$

La proposizione P_1 ha il valore 1 (cioè è vera) se gli osservabili Z_1Z_2 e X_1X_2 hanno valori +1 e il valore 0 (cioè è falsa) altrimenti. Discorso analogo per le altre tre proposizioni. Grazie alla (2.3.7) in una teoria delle variabili nascoste le proposizioni $\{P_i\}$, con $i = 1, 2, 3, 4$, hanno valori predefiniti e legati a quelli degli osservabili di singola particella $V(Z_1)$, $V(Z_2)$, $V(X_1)$ e $V(X_2)$. Per esempio $V(P_1) = 1$ se e soltanto se $V(Z_1) = V(Z_2)$ e $V(X_1) = V(X_2)$, altrimenti è 0. A partire da una teoria delle variabili nascoste non contestuale ed analizzando tutti i possibili stati (vedi tabella 2.3) è così possibile fare le seguenti previsioni, che sono indipendenti dalla struttura formale della meccanica quantistica:

Tabella 2.3: Tutti i possibili stati e i relativi valori di $\{P_i\}$ con $i = 1, 2, 3, 4$.

$V(Z_1)$	$V(Z_2)$	$V(X_1)$	$V(X_2)$	P_1	P_2	P_3	P_4
-1	-1	-1	-1	1	0	1	0
-1	-1	-1	+1	0	0	0	0
-1	-1	+1	-1	0	0	0	0
-1	-1	+1	+1	1	0	0	1
-1	+1	-1	-1	0	0	0	0
-1	+1	-1	+1	0	1	0	1
-1	+1	+1	-1	0	1	1	0
-1	+1	+1	+1	0	0	0	0
+1	-1	-1	-1	0	0	0	0
+1	-1	-1	+1	0	1	1	0
+1	-1	+1	-1	0	1	0	1
+1	-1	+1	+1	0	0	0	0
+1	+1	-1	-1	1	0	0	1
+1	+1	-1	+1	0	0	0	0
+1	+1	+1	-1	0	0	0	0
+1	+1	+1	+1	1	0	1	0

1. Le proposizioni P_1, P_2, P_3 e P_4 non sono mutuamente escludentesi, cioè due di esse possono essere simultaneamente vere. Per esempio si veda la prima riga della tabella 2.3.
2. Le proposizioni P_1, P_2, P_3 e P_4 non sono esaustive, cioè possono essere tutte simultaneamente false. Per esempio si veda la seconda riga della tabella 2.3.
3. I valori di P_1, P_2, P_3 e P_4 in una misurazione simultanea possono essere quattro 0, tutte le proposizioni sono false, o due 1 e due 0, due proposizioni sono vere e due sono false.

Consideriamo ora le predizioni della meccanica quantistica. Indichiamo con $\hat{Z}_1, \hat{Z}_2, \hat{X}_1$ e \hat{X}_2 gli operatori autoaggiunti che rappresentano gli osservabili Z_1, Z_2, X_1 e X_2 . Le proposizioni P_i sono rappresentate dagli operatori $\hat{P}_i := |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, con $i = 1, 2, 3, 4$, dove gli stati $\{|\psi_i\rangle\}$ sono definiti dalle seguenti equazioni agli autovalori

$$\begin{aligned}
 \hat{Z}_1 \otimes \hat{Z}_2 |\psi_1\rangle &= |\psi_1\rangle, & \hat{X}_1 \otimes \hat{X}_2 |\psi_1\rangle &= |\psi_1\rangle, \\
 \hat{Z}_1 \otimes \hat{Z}_2 |\psi_2\rangle &= -|\psi_2\rangle, & \hat{X}_1 \otimes \hat{X}_2 |\psi_2\rangle &= -|\psi_2\rangle, \\
 \hat{Z}_1 \otimes \hat{X}_2 |\psi_3\rangle &= |\psi_3\rangle, & \hat{X}_1 \otimes \hat{Z}_2 |\psi_3\rangle &= |\psi_3\rangle, \\
 \hat{Z}_1 \otimes \hat{X}_2 |\psi_4\rangle &= -|\psi_4\rangle, & \hat{X}_1 \otimes \hat{Z}_2 |\psi_4\rangle &= -|\psi_4\rangle.
 \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Si può facilmente vedere come i proiettori $\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3$ e \hat{P}_4 sono mutuamente ortogonali

$$\hat{P}_i \hat{P}_j = 0 \quad \text{se} \quad i \neq j. \tag{2.3.13}$$

Quindi in accordo con la meccanica quantistica possiamo fare le seguenti previsioni

1. Le proposizioni P_1, P_2, P_3 e P_4 sono mutuamente escludentesi, cioè due di esse non possono essere simultaneamente vere. Inoltre si può mostrare che vale la relazione di completezza seguente

$$\sum_{i=1}^4 \hat{P}_i = \mathbb{1}. \quad (2.3.14)$$

2. Le proposizioni P_1, P_2, P_3 e P_4 sono esaustive, cioè non possono essere tutte simultaneamente false.
3. I valori di P_1, P_2, P_3 e P_4 in una misurazione simultanea sullo stesso sistema possono contenere un solo 1 a prescindere dallo stato, cioè tre proposizioni saranno false ed una sola vera.

È evidente che la meccanica quantistica e una qualsiasi teoria delle variabili nascoste non contestuale conducono a previsioni fisicamente differenti. Non rimane che formulare un esperimento per controllare quale delle due sia quella corretta.

I proiettori ortogonali $\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3$ e \hat{P}_4 commutano tra di loro e in meccanica quantistica questo significa che corrispondono a osservabili compatibili che è possibile misurare simultaneamente. Abbiamo già visto nella prima parte della dimostrazione della Regola della Somma (2.1.28) come per un insieme di operatori autoaggiunti commutanti \hat{P}_i esiste un operatore massimale (non degenere) \hat{H} , che commuta con tutti i \hat{P}_i e tale che per opportune funzioni f_i si ha $\hat{P}_i = f_i(\hat{H})$. Esisterà poi un osservabile H corrispondente all'operatore \hat{H} . Nel nostro caso possiamo prendere come operatore

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^4 c_i \hat{P}_i, \quad (2.3.15)$$

dove i $\{c_i\}$ sono numeri reali distinti e arbitrari. Si può allora verificare che

$$\hat{P}_i = \prod_{j \neq i} \frac{\hat{H} - c_j \mathbb{1}}{c_i - c_j}. \quad (2.3.16)$$

Dimostrazione. Ricordando la (2.3.15) e la (2.3.14), possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \prod_{j \neq i} \frac{\hat{H} - c_j \mathbb{1}}{c_i - c_j} &= \prod_{j \neq i} \frac{\sum_{k=1}^4 c_k \hat{P}_k - c_j \sum_{k=1}^4 \hat{P}_k}{c_i - c_j} \\ &= \prod_{j \neq i} \frac{\sum_{k=1}^4 (c_k - c_j) \hat{P}_k}{c_i - c_j} \\ &= \prod_{j \neq i} \frac{\sum_{k \neq j} (c_k - c_j) \hat{P}_k}{c_i - c_j}. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Data la condizione di ortogonalità (2.3.13) e la proprietà dei proiettori ortogonali che $\hat{P}_i^2 = \hat{P}_i$, si può vedere sviluppando la produttoria come al numeratore sopravviva solo il termine che moltiplica l'unico proiettore presente in tutti i fattori, cioè \hat{P}_i . Perciò

$$\prod_{j \neq i} \frac{\sum_{k \neq j} (c_k - c_j) \hat{P}_k}{c_i - c_j} = \frac{\prod_{j \neq i} (c_i - c_j) \hat{P}_i}{\prod_{j \neq i} (c_i - c_j)} = \hat{P}_i. \quad (2.3.18)$$

Questo dimostra la (2.3.16).

Attraverso una misura dell'osservabile H è quindi possibile misurare simultaneamente le quattro proposizioni P_i e verificare così se siano corrette le predizioni delle teorie delle variabili nascoste non contestuali o quelle della meccanica quantistica.

Il ragionamento di Cabello-Garcia non accenna alla località, ma trattandosi di due particelle separate è possibile che considerazioni di questo tipo vadano introdotte e complicano ulteriormente la questione. Vediamo subito però che è possibile usare un argomento simile a quello di Cabello-Garcia con una sola particella.

2.3.3 Esperimento proposto da Simon

Vediamo ora l'esperimento proposto da C. Simon *et al.* [41], ispirato a quello di Cabello e Garcia-Alcaine, ma che mostra una contraddizione tutto-o-niente tra teorie delle variabili nascoste non contestuali e meccanica quantistica utilizzando una sola particella, servendosi sia dei suoi gradi di libertà di spin che di quelli di movimento.

Consideriamo una singola particella e suoi quattro osservabili binari Z_1, Z_2, X_1 e X_2 . In questo caso gli indici 1 e 2 non indicano la particella a cui ci si riferisce, dato che ce n'è una sola, ma specificano quale dei due qubits si sta considerando (due esempi di qubit potrebbero essere la modalità di propagazione o i gradi di libertà di una particella di spin 1/2). Indichiamo gli unici due possibili risultati di questi osservabili con ± 1 . In una teoria delle variabili nascoste non contestuale per ogni sistema questi osservabili hanno valori predefiniti e non contestuali, $+1$ o -1 , denotiamoli con $V(Z_1), V(Z_2), V(X_1)$ e $V(X_2)$.

Consideriamo un insieme di sistemi dove $Z_1, Z_2,$ e X_1, X_2 sono due coppie di osservabili compatibili e attraverso misure simultanee si trova che Z_1 e Z_2 hanno sempre lo stesso risultato, e X_1 e X_2 hanno pure loro sempre lo stesso risultato. Per una teoria delle variabili nascoste questo significa che

$$V(Z_1) = V(Z_2) \quad \wedge \quad V(X_1) = V(X_2), \quad (2.3.19)$$

per ogni singolo sistema dell'insieme. Si noti come la condizione (2.3.19) possa anche essere riscritta come

$$V(Z_1)V(Z_2) = V(X_1)V(X_2) = +1. \quad (2.3.20)$$

Se moltiplico ambo i membri della (2.3.20) per $V(X_2)V(Z_2)$ si ottiene

$$V(Z_1)V(X_2) = V(X_1)V(Z_2). \quad (2.3.21)$$

Introduciamo ora alcuni osservabili prodotto, come Z_1X_2 . In una teoria non contestuale il risultato di una misura di un osservabile non dipende da quali altri osservabili misuro simultaneamente, per cui vale la solita Regola del Prodotto (2.1.34), cioè

$$V(Z_1X_2) = V(Z_1)V(X_2). \quad (2.3.22)$$

La predizione delle teorie delle variabili nascoste non contestuali può così essere scritta come

$$V(Z_1)V(Z_2) = V(X_1)V(X_2) = +1 \Rightarrow V(Z_1X_2) = V(X_1Z_2), \quad (2.3.23)$$

cioè se vale la proprietà (2.3.20) allora gli osservabili prodotto Z_1X_2 e X_1Z_2 devono sempre essere uguali (si noti che questa predizione può essere testata empiricamente solo se gli osservabili Z_1X_2 e X_1Z_2 sono compatibili). Vedremo come questa predizione delle teorie delle variabili nascoste non contestuali sia in aperta contraddizione con la meccanica quantistica.

Consideriamo un sistema di due qubits e gli osservabili $Z_1 := \sigma_{1z}$, $Z_2 := \sigma_{2z}$, $X_1 := \sigma_{1x}$ e $X_2 := \sigma_{2x}$, dove σ_{1z} indica l'osservabile connesso alla componente z dell'operatore di Pauli per lo spazio bidimensionale del primo qubit. Facile dimostrare che questi osservabili soddisfino tutte le proprietà richieste, in particolare, mentre Z_1 e X_1 , e Z_2 e X_2 , non sono compatibili, gli osservabili prodotto Z_1X_2 e X_1Z_2 lo sono. Inoltre scegliamo un insieme di sistemi il cui stato quantistico dei due qubits è descritto dal ket $|\psi_1\rangle$ dato da

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= (|+z\rangle|+z\rangle + |-z\rangle|-z\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= (|+x\rangle|+x\rangle + |-x\rangle|-x\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

dove i ket $|\pm z\rangle$ sono gli autoket degli operatori \hat{Z}_1 e \hat{Z}_2 con autovalore rispettivamente ± 1 , mentre $|\pm x\rangle$ sono gli autoket degli operatori \hat{X}_1 e X_2 con autovalore rispettivamente ± 1 . Immediato verificare che $|\psi_1\rangle$ è un autostato degli osservabili prodotto commutanti Z_1Z_2 e X_1X_2 , con autovalore uguale a $+1$ per entrambi. Il sistema descritto da $|\psi_1\rangle$ rispetta quindi la condizione (2.3.20). D'altra parte però la meccanica quantistica prevede per lo stato $|\psi_1\rangle$ che i valori misurati di Z_1X_2 e X_1Z_2 siano sempre opposti.

Dimostrazione. Per verificare l'ultima affermazione, ovvero che la meccanica quantistica prevede per lo stato $|\psi_1\rangle$ che i valori misurati di Z_1X_2 e X_1Z_2 siano sempre opposti, scomponiamo $|\psi_1\rangle$ nella base di autostati simultanei dei due osservabili prodotto Z_1X_2 e X_1Z_2 (che tra di essi commutano).

$$|\psi_1\rangle = (|\chi_{1,-1}\rangle + |\chi_{-1,1}\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (2.3.25)$$

con

$$\begin{aligned}
|\chi_{1,-1}\rangle &= (|+z\rangle|+z\rangle + |-z\rangle|-z\rangle + |+z\rangle|-z\rangle - |-z\rangle|+z\rangle) \frac{1}{2} \\
&= (|+z\rangle|+x\rangle - |-z\rangle|-x\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= (|-x\rangle|+z\rangle + |+x\rangle|-z\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}},
\end{aligned} \tag{2.3.26}$$

$$\begin{aligned}
|\chi_{-1,1}\rangle &= (|+z\rangle|+z\rangle + |-z\rangle|-z\rangle - |+z\rangle|-z\rangle + |-z\rangle|+z\rangle) \frac{1}{2} \\
&= (|+z\rangle|-x\rangle + |-z\rangle|+x\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= (|+x\rangle|+z\rangle - |-x\rangle|-z\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}},
\end{aligned} \tag{2.3.27}$$

dove si sono usate le due seguenti relazioni, ottenibili grazie all'esponenziale di Pauli,

$$|+x\rangle = (|+z\rangle + |-z\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{2.3.28}$$

$$|-x\rangle = (|+z\rangle - |-z\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{2.3.29}$$

Valgono le relazioni agli autovalori seguenti

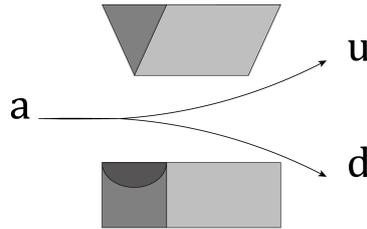
$$\begin{aligned}
\hat{Z}_1 \otimes \hat{X}_2 |\chi_{1,-1}\rangle &= + |\chi_{1,-1}\rangle, \\
\hat{X}_1 \otimes \hat{Z}_2 |\chi_{1,-1}\rangle &= - |\chi_{1,-1}\rangle, \\
\hat{Z}_1 \otimes \hat{X}_2 |\chi_{-1,1}\rangle &= - |\chi_{-1,1}\rangle, \\
\hat{X}_1 \otimes \hat{Z}_2 |\chi_{-1,1}\rangle &= + |\chi_{-1,1}\rangle.
\end{aligned} \tag{2.3.30}$$

Dalla (2.3.25) e (2.3.30) si vede che $|\psi_1\rangle$ è esattamente una combinazione lineare di quegli autostati di Z_1X_2 e X_1Z_2 per i quali i corrispettivi autovalori sono opposti. Questo significa che una misura simultanea dei due osservabili condurrà sempre a valori differenti.

La previsione della meccanica quantistica sui valori degli osservabili Z_1X_2 e X_1Z_2 è esattamente l'opposto di quella di teorie delle variabili nascoste non contestuali (2.3.23). Abbiamo quindi una contraddizione tra le due previsioni su un livello non statistico che è possibile testare sperimentalmente. Una tale verifica sperimentale si basa su due semplici passaggi

- i Mostrare che un sistema preparato in un certo stato (ad esempio $|\psi_1\rangle$) ha $Z_1Z_2 = 1$ e $X_1X_2 = 1$. Questo è possibile farlo sia tramite una misura simultanea sia grazie due misure separate.

Figura 2.3: Un modo per ottenere la realizzazione a singola particella dello stato $|\psi_1\rangle$ utilizzando un classico apparato di Stern-Gerlach. Da sinistra proviene una singola particella con stato di spin $|+x\rangle = (|+z\rangle + |-z\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}$ e stato spaziale $|a\rangle$. L'apparato di Stern-Gerlach separa gli stati in ingresso sulla base della componente z del loro spin. Si ha quindi la trasformazione $|a\rangle|+x\rangle \rightarrow (|u\rangle|z\rangle + |d\rangle|-z\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}$.



- ii Determinare se i valori di Z_1X_2 e X_1Z_2 sono uguali (come previsto dalle teorie delle variabili nascoste non contestuali) o opposti (come previsto dalla teoria quantistica). In questo caso le misure devono essere per forza simultanee.

Nell'esperimento proposto da Simon *et al.* i due qubits erano portati dalla stessa particella. Il primo qubit rappresenta la modalità di propagazione di una particella di spin 1/2 (o un fotone), mentre il secondo qubit rappresenta i gradi di libertà del suo spin (o della sua polarizzazione). Per i nostri scopi particelle di spin 1/2 e fotoni sono completamente equivalenti, nella pratica risulta più facile servirsi dei fotoni, ma nella seguente trattazione parleremo di particelle di spin 1/2.

Consideriamo una situazione in cui le particelle si possono propagare in due direzioni spaziali u o d , mentre lo stato di spin è indicato come prima dai ket $|+z\rangle$, $|-z\rangle$, allora lo stato $|\psi_1\rangle$ può essere scritto come

$$|\psi_1\rangle = (|u\rangle|+z\rangle + |d\rangle|-z\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (2.3.31)$$

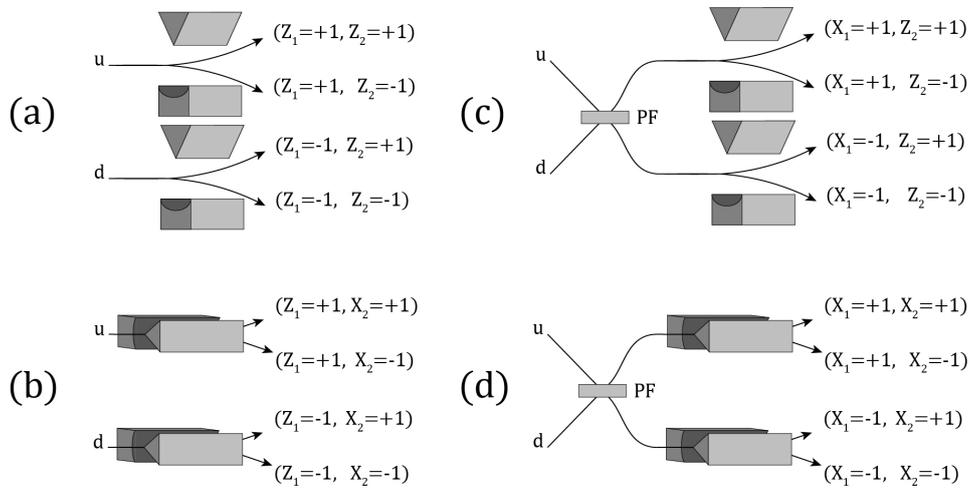
Un modo per preparare un simile stato attraverso una sorgente di particelle e un apparato di Stern-Gerlach è mostrato in figura 2.3.

Gli osservabili Z_1 , Z_2 , X_1 e X_2 sono rappresentati dagli operatori

$$\begin{aligned} Z_1 &= |u\rangle\langle u| - |d\rangle\langle d|, \\ X_1 &= |u'\rangle\langle u'| - |d'\rangle\langle d'|, \\ Z_2 &= |+z\rangle\langle +z| - |-z\rangle\langle -z|, \\ X_2 &= |+x\rangle\langle +x| - |-x\rangle\langle -x|, \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

dove u' e d' indicano le due modalità di uscita da un partitore di fascio 50/50 (*beam splitter*, in inglese) con in ingresso u e d . $|+x\rangle$ e $|-x\rangle$ rappresentano invece gli autostati di spin nella

Figura 2.4: Dispositivi per misurare coppie degli osservabili di singole particelle (2.3.32). La particella proviene da sinistra e in generale possiede componenti in entrambi i modi u e d , e diversi spin. Gli apparati mostrano la misura di (a) Z_1 e Z_2 ; (b) Z_1 e X_2 ; (c) X_1 e Z_2 ; (d) X_1 e X_2 . In (c) e (d) PF sta per partitore di fascio (beam splitter), che mischia gli stati in ingresso cambiando la base da $|u\rangle, |d\rangle$, corrispondente ad una misura di Z_1 , a $|u'\rangle, |d'\rangle$, corrispondente ad una misura di X_1 . In (a) e (c) l'apparato di Stern-Gerlach è orientato lungo l'asse z (quindi misura Z_2), in (b) e (d) lungo l'asse x , quindi misura X_2 .



direzione x . Valgono le relazioni

$$|u'\rangle = (|u\rangle + |d\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (2.3.33)$$

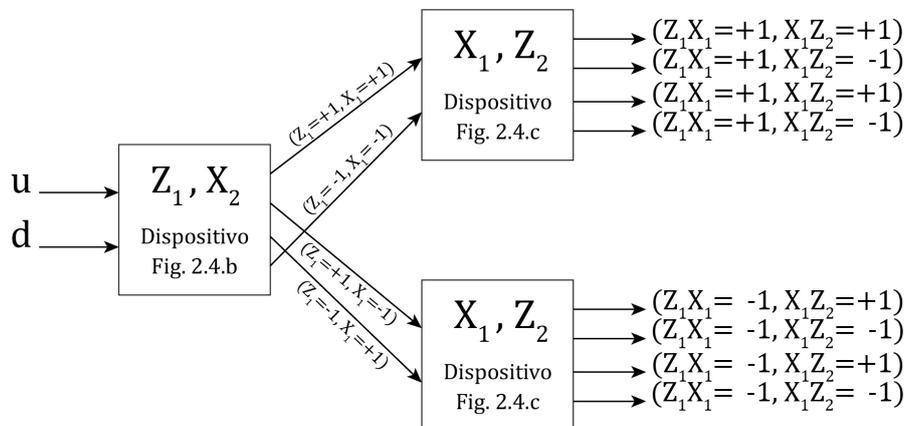
$$|d'\rangle = (|u\rangle - |d\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (2.3.34)$$

Chiaramente Z_1 e X_1 agiscono sulla direzione della particella, mentre Z_2 e X_2 agiscono sui suoi gradi di libertà di spin.

In figura 2.4 sono mostrati gli apparati per misurare coppie di osservabili come Z_1 e Z_2 (a). In figura 2.5 invece è mostrato l'apparato per una misura congiunta degli osservabili $Z_1 X_2$ e $X_1 Z_2$. Questo apparato sperimentale consente una semplice verifica sperimentale non statistica e tutto-o-niente delle teorie delle variabili nascoste non contestuali.

Nel 2003 l'esperimento appena descritto è stato realizzato da Huang *et al.* [28]. Nel loro esperimento il gruppo di ricerca ha utilizzato un sistema a due qubits costituiti dalla polarizzazione e da un grado di libertà di movimento di un singolo fotone. I risultati dell'esperimento

Figura 2.5: Dispositivo per eseguire una misura congiunta di $Z_1 X_2$ e $X_1 Z_2$. In maniera analoga è possibile costruire un dispositivo che misuri simultaneamente $Z_1 Z_2$ e $X_1 X_2$. Il primo dispositivo separa i due autospazi dell'osservabile prodotto $Z_1 X_2$, che è doppiamente degenere. Gli autostati di $Z_1 X_2$ con autovalore $+1$ sono mandati in alto, quelli con autovalore -1 sono mandati in basso. La misura di una particella all'interno di uno dei due seguenti apparati è una misurazione di $X_1 Z_2$. Per un insieme di particelle che soddisfa la proprietà $Z_1 Z_2 = X_1 X_2 = +1$ (e lo si può fare attraverso gli apparati (a) e (d) della figura 2.4) la meccanica quantistica predice che le particelle usciranno solo attraverso una delle quattro uscite per le quali $Z_1 X_2$ e $X_1 Z_2$ sono opposti, dall'alto la seconda, la quarta, la quinta e la settima. La previsione delle teorie delle variabili nascoste non contestuali è esattamente l'opposto.



sono risultati essere in forte accordo con le previsioni della meccanica quantistica e in disaccordo con quelle delle teorie delle variabili nascoste non contestuali.

In conclusione questo e altri esperimenti che sono seguiti, ispirati sia all'argomento di Cabello-Garcia che ad altri ancora (ad esempio si veda quello di Clifton [15], che è di natura statistica al contrario del precedente), hanno confermato le previsioni della meccanica quantistica e, attraverso il teorema KS, falsificato le teorie delle variabili nascoste non contestuali. Non rimane quindi che rinunciare ad uno dei tre assunti su cui queste si poggiano, VD o VR o NC. Si può rinunciare ad avere valori definiti (VD) per tutti gli osservabili (come nelle interpretazioni a variabili nascoste più ortodosse) o solo per un sottoinsieme di osservabili (come nelle interpretazioni modali). Una seconda opzione è rinunciare a VR o NC, in entrambi i casi abbiamo visto che ciò comporta un certo grado di contestualismo. Allo stato presente dei fatti la scelta tra queste opzioni non è questione empiricamente verificabile o verificata, ed è quindi più filosofica che non fisica.

Capitolo 3

TEOREMA del LIBERO ARBITRIO

In questo capitolo analizzeremo il teorema del Libero Arbitrio di Conway e Kochen. Partiremo con il discutere uno ad uno i tre assiomi su cui il teorema si basa e perché è fisicamente ragionevole prenderli come punti di partenza. Passeremo poi ad enunciare e dimostrare il teorema ed infine discuteremo di quelle che sono le sue implicazioni e i suoi legami con il teorema KS e il teorema di Bell, specie con quest'ultimo.

3.1 Assiomi

3.1.1 Premesse

J. H. Conway e S. B. Kochen nel 2006 pubblicarono un articolo dal titolo "*The Free Will Theorem*" [16], nel quale veniva per la prima volta enunciato e dimostrato il Teorema del Libero Arbitrio (TLA). Il teorema si basa su tre semplici assunzioni, che vengono chiamate assiomi, la cui validità fisica è testabile sperimentalmente; a partire da queste ipotesi il teorema prova che se uno sperimentatore umano può liberamente scegliere le direzioni lungo cui eseguire un particolare esperimento su una particella di spin 1, allora il risultato fornito dalla particella non è determinato dall'intera storia dell'universo. Nel 2009, sempre Conway e Kochen, pubblicarono un altro articolo [17] nel quale alleggerivano una delle tre assunzioni di base, rendendo il teorema più solido (per questo è anche detto il Teorema del Libero Arbitrio Forte). Questo risultato come vedremo poi è fortemente legato sia al teorema Kochen-Specker (che è utilizzato all'interno della dimostrazione), che al teorema di Bell (le conclusioni dei due infatti sono molto simili) e fornisce ulteriori costrizioni alle teorie delle variabili nascoste. Abbiamo visto che per il teorema di Bell una teoria delle variabili nascoste locale non è compatibile con la meccanica quantistica, mentre con il teorema KS abbiamo verificato che a non essere compatibile con la meccanica quantistica è una teoria delle variabili nascoste non contestuale. Con il TLA vedremo come se si aggiungono alle ipotesi del teorema KS quella di località (anche se meno stringente di quella del teorema Bell) allora non è possibile alcuna teoria delle variabili

nascoste, contestuale o non che sia.

Prima di enunciare il teorema e fornirne la dimostrazione occorre precisare alcuni concetti, primo tra tutti quello di *libero arbitrio*, che per quanto presente sin dall'antichità nella discussione filosofica, non è certo comune in quella scientifica. In questo contesto il concetto di libero arbitrio ha un significato molto specifico, ovvero la scelta dello sperimentatore sulla direzione lungo cui orientare l'apparato di misura è *libera* se non è funzione dell'informazione ad esso accessibile, in altre parole non dipende dall'intera storia passata dell'universo. Il TLA afferma che se gli sperimentatori possiedono questa specifica proprietà allora anche le particelle elementari godono della stessa prerogativa. Si può discutere se questa proprietà sia o meno rilevante nella nostra idea filosofica di libero arbitrio, ma ai fini del teorema ciò è irrilevante, l'unica cosa che conta è che le direzioni scelte dallo sperimentatore per l'esperimento non siano in alcun modo predeterminate in anticipo.

3.1.2 Assioma SPIN

Come in sezione 2.3.1 consideriamo una particella di spin 1 sulla quale un osservatore può eseguire l'operazione di misura del quadrato delle componenti di spin in una data direzione w , i risultati possibili per questo genere di misure sono solo due: 0 e 1 (in unità \hbar^2), scriveremo $w \rightarrow i$, con $i = 0$ o 1 , per indicare il risultato di questa operazione. Definiremo *esperimento triplo per il riferimento* (x, y, z) la misurazione del quadrato delle componenti di spin per tre direzioni mutuamente ortogonali x, y e z .

Si ricorda come, benché gli operatori di spin \hat{S}_x, \hat{S}_y e \hat{S}_z lungo tre direzioni mutuamente ortogonali non commutino tra di loro e quindi non abbia senso parlare per i corrispettivi osservabili di valori definiti, gli operatori \hat{S}_x^2, \hat{S}_y^2 e \hat{S}_z^2 commutano. Inoltre vale il seguente risultato:

Assioma SPIN. Un esperimento triplo per il riferimento (x, y, z) conduce sempre ai risultati 1, 0, 1 in un qualche ordine.

Possiamo riscrivere ciò dicendo che $x \rightarrow j, y \rightarrow k$ e $z \rightarrow l$, dove j, k e l sono uguali a 0 o 1 e $j + k + l = 2$. È evidente il legame di quest'ultima espressione con la (2.2.18).

Questa semplice e apparentemente innocua proprietà, che Conway e Kochen spesso chiamano *proprietà 101*, risulta essere paradossale (almeno se ci si ostina a guardare il problema con un approccio a variabili nascoste) perché implica che la quantità che stiamo misurando non può esistere prima che avvenga la misura. Se così non fosse allora esisterebbe una funzione, chiamiamola *funzione 101*, definita sulla sfera di tutte le possibili direzioni e che assegna ad ogni terna ortogonale il tripletto di numeri 1, 0 e 1 in un qualche ordine. Abbiamo però già dimostrato il teorema Kochen-Specker che mostra come non possa esistere una funzione con queste caratteristiche, in particolare abbiamo dimostrato questo risultato per 33 coppie di direzioni nella versione di Peres. Per essere precisi nel caso di Peres assegnavamo i valori 0 e 1 a

dei proiettori ortogonali, non a delle componenti quadratiche di spin, e in quel caso all'interno di una terna ortogonale dovevamo avere il tripletto di numeri 1, 0 e 0, quindi con due 0 e non due 1. È facile convincersi che questo non crei alcun problema per la dimostrazione, tanto più che il caso dei proiettori ortogonali è un caso più generale di quello specifico delle componenti quadratiche di spin.

L'assioma SPIN è una diretta conseguenza del formalismo della meccanica quantistica e soprattutto è sperimentalmente verificato da una miriade di esperimenti.

3.1.3 Assioma TWIN

Nel primo capitolo con il paradosso EPR abbiamo visto che grazie all'entanglement quantistico, anche se non possiamo predire in anticipo i risultati di singole misurazioni eseguite a grande distanza l'una dall'altra, è possibile che questi risultati siano correlati. In particolare è possibile produrre una coppia di particelle entangled in uno stato di singoletto con spin totale nullo, queste daranno la stessa risposta a domande uguali, ovvero in uno stato di questo tipo a misurazioni del quadrato della componente di spin lungo direzioni parallele le due particelle restituiranno gli stessi risultati.

Costruiamo esplicitamente questo stato di singoletto per due particelle di spin 1 entangled. Siano $\mathbb{1} \otimes \hat{S}$ e $\hat{S} \otimes \mathbb{1}$ rispettivamente gli operatori di spin per la prima e la seconda particella. Allora $\hat{S}_w \otimes \mathbb{1}$ è l'operatore che rappresenta la componente di spin della prima particella lungo la direzione w , chiamiamo il corrispondente osservabile S_w^a ; mentre $\mathbb{1} \otimes \hat{S}_{w'}$ è l'operatore che rappresenta la componente di spin della seconda particella lungo la direzione w' , chiamiamo il corrispondente osservabile $S_{w'}^b$. Notiamo come gli osservabili S_w^a e $S_{w'}^b$ siano tra di loro compatibili per qualsiasi w e w' , si riferiscono infatti a due particelle distinte. La teoria quantistica del momento angolare ci dice che gli unici tre possibili valori per S_w^a e $S_{w'}^b$ sono 0 e ± 1 , per ognuno di questi autovalori si ha un corrispondente autoket, cioè $|S_w^a = 0\rangle$ e $|S_w^a = \pm 1\rangle$ per quanto riguarda la prima particella, $|S_{w'}^b = 0\rangle$ e $|S_{w'}^b = \pm 1\rangle$ per quanto riguarda la seconda particella. Possiamo così scrivere lo stato di singoletto come:

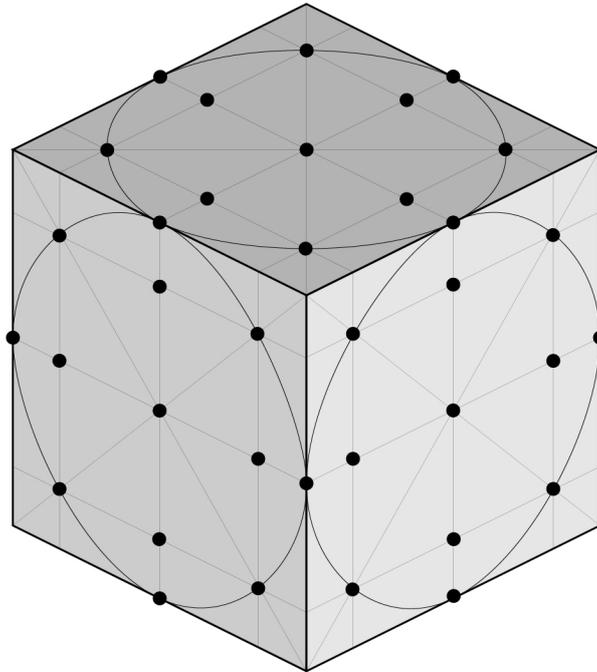
$$|\psi\rangle = (|S_w^a = 1\rangle |S_{w'}^b = -1\rangle + |S_w^a = -1\rangle |S_{w'}^b = 1\rangle - |S_w^a = 0\rangle |S_{w'}^b = 0\rangle) \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (3.1.1)$$

Possiamo così formulare il secondo assioma come segue

Assioma TWIN. Per particelle di spin 1 entangled nello stato $|\psi\rangle$, se il primo sperimentatore A esegue un triplo esperimento per il riferimento (x, y, z) sulla prima particella producendo il risultato $x \rightarrow j, y \rightarrow k, z \rightarrow l$, e il secondo sperimentatore B misura lo spin della seconda particella nella sola direzione w , allora se w è una direzione tra x, y o z il risultato di questa misura sarà rispettivamente uno tra $w \rightarrow j, k$ o l .

Nella pratica, nel corso della dimostrazione, considereremo w essere non una direzione qualsiasi ma una delle 33 direzioni della configurazione di Peres (vedi tabella 2.1 o figura 3.1),

Figura 3.1: Le 33 direzioni della configurazione di Peres. Sulla superficie del cubo sono disposti 66 puntini, collegandoli con il centro del cubo stesso si ottengono le ± 33 direzioni della configurazione di Peres.



mentre x, y e z saranno una di 40 particolari terne ortogonali, 16 di queste sono ottenute dalla configurazione di Peres, le altre 24 sono ottenute completando le restanti coppie ortogonali con un vettore che non appartiene alla configurazione.

Anche questo assioma è una diretta conseguenza del formalismo della meccanica quantistica introdotto nel primo capitolo, e l'esistenza di questo "gemellaggio" tra particelle è stata sperimentalmente verificata in moltissimi esperimenti.

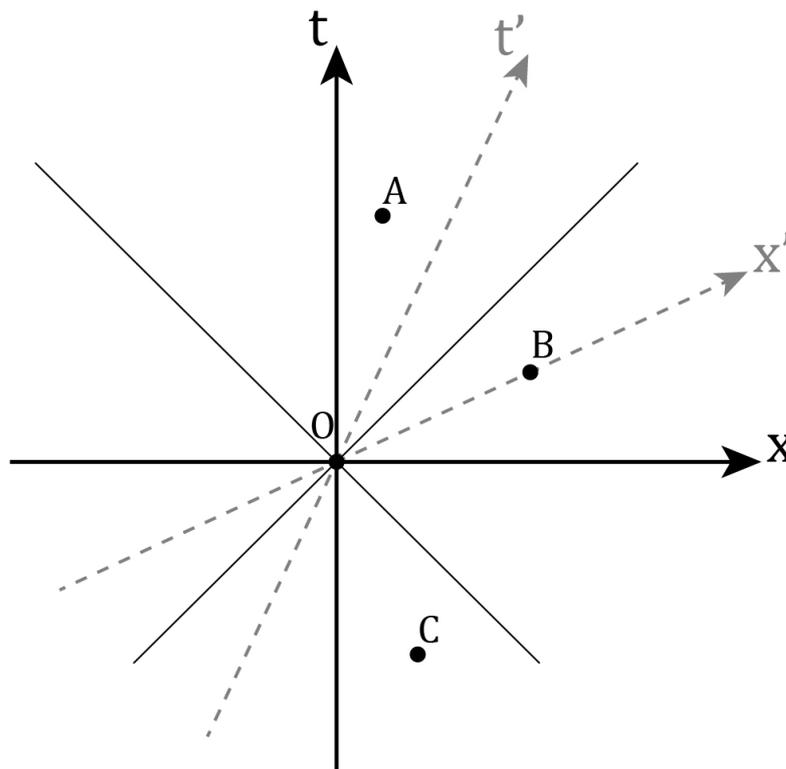
3.1.4 Assioma MIN

Nell'articolo originale [16] Conway e Kochen utilizzarono come terzo assioma il seguente

Assioma FIN. C'è un limite superiore finito alla velocità a cui l'informazione può essere trasmessa.

Si tratta ovviamente di una delle principali conseguenze della teoria della relatività ristretta di Einstein, e il limite superiore di cui si parla è imposto dalla velocità della luce nel vuoto. Questo assioma non è nemmeno in principio verificabile direttamente, ma vi sono molte buone ragioni per ritenerlo valido, infatti è una conseguenza della relatività, ampiamente testata, e

Figura 3.2: Diagramma di Minkowski bidimensionale (x, t) . Le bisettrici dei primi due quadranti rappresentano il percorso di due fotoni emessi in O , quindi a $t = 0$ e $x = 0$, in direzioni opposte. Se consideriamo anche i prolungamenti di queste due semirette otteniamo una partizione del piano in quattro regioni. La regione che contiene il punto A è il cono luce futuro di O , tutti i punti al suo interno possono essere effetti di O . La regione che contiene il punto C è il cono luce passato di O , tutti i punti al suo interno possono essere cause di O . Le due regioni rimanenti appartengono al "presente" di O , nel senso che per ogni punto B appartenente a queste regioni esisterà un sistema di riferimento inerziale (x', t') tale per cui O e B siano simultanei. Non può quindi esserci nessun rapporto causa-effetto effettivo tra O e B .



della cosiddetta *causalità effettiva*, cioè l'idea secondo cui le cause temporalmente precedano sempre i loro effetti. Conviene soffermarsi un attimo su questo concetto. Una delle conseguenze più paradossali dell'introduzione della relatività ristretta è che la simultaneità, e quindi anche l'ordine temporale con cui avvengono eventi separati da una distanza di tipo spazio, non sono più invarianti ma dipende dalla scelta del sistema di riferimento inerziale. I due eventi che considereremo noi saranno le misure sulle due particelle entangled. Questo sembra complicare la nozione classica di causalità, infatti uno potrebbe immaginare che l'ordine temporale di causa, scelto un opportuno sistema di riferimento, possa essere invertito. In realtà è possibile introdurre una nozione relativistica di causalità, la causalità effettiva, secondo cui l'universo deve apparire causale in ogni sistema di riferimento, cioè un evento può essere legato da un rapporto causa-effetto ad un altro evento solo se per un qualsiasi osservatore l'ordine temporale dei due eventi è il medesimo. Possiamo vedere questo concetto anche utilizzando un diagramma di Minkowski, come quello in figura 3.2. La causalità effettiva ha le seguenti proprietà

1. È un invariante di Lorentz.
2. È la nozione di causalità più forte possibile che sia anche un invariante di Lorentz.
3. È compatibile con SPIN, TWIN, FIN e l'assunzione di libero arbitrio.

Prima di procedere puntualizziamo un'altra questione, quella cioè di estendere la nozione di trasmissione di informazioni al caso relativistico. Non possiamo infatti dire in maniera invariante che l'informazione è trasmessa da A a B , se A e B sono eventi separati da un intervallo di tipo spazio, dato che per qualche sistema di riferimento B avviene prima di A . Se dell'informazione è realmente trasmessa da A a B allora dovrebbe apparire così da ogni sistema di riferimento, in questo caso diremo che l'informazione è *effettivamente trasmessa* da A a B . Ritornando all'assioma FIN, per quanto la sua validità rimanga garantita dalla relatività ristretta e dalla causalità effettiva, può essere oggetto di alcune critiche. Infatti l'assioma rimane vago su quello che si intenda esattamente per informazione e si potrebbe essere più precisi, dato che nel contesto di questo teorema l'unica informazione che ci interessa è la scelta dello sperimentatore e il responso della particella; la velocità di trasmissione di un qualsiasi altro tipo di informazione è per gli scopi di questo teorema irrilevante. Inoltre nell'assioma non si fa accenno al fatto che l'informazione riguardante la scelta degli sperimentatori sia libera, cioè non influenzata da niente che appartenga al loro cono luce del passato, dunque questa ipotesi andrebbe introdotta nell'enunciato del teorema. Per queste ragioni Conway e Kochen [17] hanno formulato una seconda versione più forte del teorema nel quale l'assioma FIN è sostituito dal più debole assioma MIN.

Assioma MIN. Assumiamo che gli esperimenti eseguiti da A e B siano separati da un intervallo di tipo spazio. Lo sperimentatore B può liberamente scegliere una qualsiasi delle 33 particolari direzioni w , e il responso della prima particella è indipendente da questa scelta.

Similmente e indipendentemente, A può liberamente scegliere una delle 40 terne ortogonali x , y e z , e il responso della seconda particella è indipendente da questa scelta.

All'interno di questo assioma sono condensate diverse assunzioni. La prima è quella di causalità effettiva e la seconda è quella sulla libertà degli sperimentatori di scegliere quale esperimento eseguire. All'interno dell'assioma MIN, come già in FIN, è in un qualche modo nascosto anche l'ipotesi di localismo così come usata da Bell per la sua disuguaglianza, torneremo successivamente a parlare meglio del rapporto tra i due.

3.2 Teorema Libero Arbitrio

3.2.1 Teorema

Enunciati i tre assiomi possiamo ora procedere ad enunciare il teorema.

Teorema del Libero Arbitrio. Gli assiomi SPIN, TWIN e MIN impongono che il risultato di un triplo esperimento su una particella di spin 1 sia libero, nel senso che non è funzione delle proprietà di quella parte di universo posta temporalmente prima di quel risultato in un qualsiasi sistema di riferimento.

Dimostrazione. Partiamo con il supporre che valga VD e NC, in questo contesto significa ipotizzare che il valore del quadrato dello spin $\theta(w)$ nella direzione w esiste già prima che venga effettuata la misura (utilizzando una notazione precedente avremmo anche potuto scrivere $\theta(w) = V(S_w^2)$). Se questo è vero allora la funzione θ è definita su tutta la sfera unitaria delle direzioni e grazie a SPIN possiamo dire che possiede le seguenti proprietà

1. I valori di θ in ogni terna ortogonale devono essere 1, 0 e 1 in un qualche ordine.
2. Non possiamo avere $\theta(x) = \theta(y) = 0$ se x e y sono due direzioni ortogonali.
3. Per ogni coppia di direzioni opposte w e $-w$ abbiamo $\theta(w) = \theta(-w)$.

In realtà la seconda e la terza proprietà sono una diretta conseguenza della prima, ma per comodità le abbiamo elencate come fossero indipendenti. Una funzione sull'insieme delle direzioni che possiede tutte queste tre proprietà viene definita una *funzione 101*.

Dal teorema KS sappiamo già che una simile funzione per la configurazione a 33 direzioni di Peres non esiste. Dobbiamo cioè supporre che θ non sia funzione della sola direzione scelta w , ma delle informazioni α che appartengono al suo contesto e sono ad essa accessibili, come ad esempio w stessa, ma anche le eventuali altre direzioni lungo cui avviene una misura.

Consideriamo una coppia di sperimentatori A e B che eseguono i due esperimenti descritti in TWIN su due particelle entangled a e b spazialmente separate. Facciamo l'ipotesi funzionale che il risultato dell'esperimento sulla particella a è una funzione $\theta_a(\alpha)$ delle informazioni α

accessibili ad essa. Supponiamo che questa informazione sia costituita dalla terna x, y e z , assieme all'informazione α' accessibile alla particella un attimo prima della misura e quindi indipendente da x, y e z . Esprimiamo ciò come

$$\theta_a(x, y, z; \alpha') = \{x \rightarrow j, y \rightarrow k, z \rightarrow l\} \quad (3.2.1)$$

Raffiniamo la notazione aggiungendo un ? per indicare a quale particolare esito ci stiamo riferendo, ovvero

$$\theta_a(x?, y, z; \alpha') = j, \quad (3.2.2)$$

$$\theta_a(x, y?, z; \alpha') = k, \quad (3.2.3)$$

$$\theta_a(x, y, z?; \alpha') = l. \quad (3.2.4)$$

Sotto ipotesi simili possiamo scrivere che il responso θ_b della particella b è una funzione della direzione w e dell'informazione β' accessibile a b un attimo prima che avvenga la misurazione. Cioè, usando le due notazioni appena introdotte:

$$\theta_b(w; \beta') = \{w \rightarrow m\}, \quad (3.2.5)$$

$$\theta_b(w?; \beta') = m. \quad (3.2.6)$$

L'assioma TWIN implica che

$$\theta_b(w?; \beta') = \begin{cases} \theta_a(x?, y, z; \alpha') & \text{se } w = x, \\ \theta_a(x, y?, z; \alpha') & \text{se } w = y, \\ \theta_a(x, y, z?; \alpha') & \text{se } w = z. \end{cases} \quad (3.2.7)$$

L'assunzione MIN implica che per ogni direzione w o terna ortogonale x, y e z che vengono scelte dall'insieme di ± 33 direzioni della configurazione di Peres, ci sono dei valori di α' e β' per i quali ogni equazione in (3.2.7) è definita. Questo perché i due sperimentatori possono scegliere in maniera indipendente e libera su quale direzione misurare lo spin delle particelle. Possiamo poi notare che per via di MIN α' oltre che essere indipendente da x, y e z per costruzione, è indipendente anche da w , perché ci sono sistemi di riferimento in cui l'esperimento di B avviene dopo quello di A . Similmente β' è indipendente da x, y e z , così come già lo era per costruzione da w .

Fissati α' e β' , cioè fissati i due contesti in cui avvengono le misure, definiamo

$$\theta_0(w) = \theta_b(w?; \beta'), \quad (3.2.8)$$

e dalla (3.2.7) troviamo che

$$\begin{cases} \theta_a(x?, y, z; \alpha') = \theta_0(x), \\ \theta_a(x, y?, z; \alpha') = \theta_0(y), \\ \theta_a(x, y, z?; \alpha') = \theta_0(z). \end{cases} \quad (3.2.9)$$

Cioè $\theta_0(w)$ è una funzione 101 sulle ± 33 direzioni, proprio una di quelle funzioni di cui il teorema KS proibiva l'esistenza.

Supponiamo ora che il responso di una delle due particelle, poniamo a , oltre che dipendere dalla terna x, y, z , e dall'informazione ad essa accessibile un attimo prima della misura α' , dipenda anche da ulteriori bit di informazioni che diventano disponibili dopo la scelta di x, y, z . Se questa ulteriore informazione è a sua volta funzione di α (cioè α' e x, y, z) allora ricadiamo nella trattazione precedente e non vi sono problemi. Rimane da considerare il caso in cui parte dell'informazione usata da a è spontanea, nel senso che è essa stessa non determinata da nessuna informazione precedente. Ci sarà quindi un tempo t_0 , dopo la scelta di x, y, z , tale che per ogni $t < t_0$ questa informazione non è disponibile, ma per $t > t_0$ questa diviene accessibile. In questo caso però si può affermare che al tempo t_0 l'universo abbia preso una decisione libera, perché quello che accade nei pressi della particella dopo t_0 non è funzione di informazioni disponibili prima di t_0 .

3.2.2 Implicazioni

Un'importante implicazione su cui Conway e Kochen hanno messo molta attenzione è quella delle limitazioni imposte dal TLA alle cosiddette teorie del collasso oggettivo. Si tratta di una famiglia di teorie, tra cui forse la più nota è quella GRW (Gherardi-Rimini-Weber) [22], che tentano di spiegare come e perché i risultati delle misure forniscano sempre valori definiti e non una loro sovrapposizione, cercando quindi di spiegare il meccanismo di collasso della funzione d'onda. Tradizionalmente si pensa che la funzione d'onda collassi ogni volta che un osservatore esegue una misura sul sistema, ma occorre a questo punto definire meglio cosa siano un osservatore e una misura, inoltre non è chiaro dove e come avvenga la transizione tra il mondo microscopico, in cui vale il principio di sovrapposizione, e il mondo macroscopico che sottosta alla logica e alla fisica classiche. L'idea alla base delle teorie del collasso è che le particelle attraversano un collasso della funzione d'onda spontaneamente in maniera casuale sia nel tempo sia nello spazio. Secondo i suoi autori il TLA mostrerebbe come non vi possano essere teorie non relativistiche che forniscano un meccanismo di riduzione come quello appena citato, ma la questione è ancora discussa.

Uno dei principali obiettivi delle teorie a variabili nascoste è quello di reintrodurre il determinismo in fisica, questo teorema però dimostra che se si concede che gli sperimentatori abbiano anche solo quel poco di libero arbitrio che basta per scegliere la direzione lungo cui misurare lo spin di una particella allora il risultato di questa misura non sarà in alcun modo determinato in anticipo, non essendo funzione delle informazioni accessibili a quella particella. Rimane aperta la scappatoia per un'interpretazione superdeterministica in cui sin dall'origine dell'universo tutto è già stato determinato e codificato in una qualche variabile nascosta, così le due particelle sottoposte a misurazioni, per quanto distanti, già sanno ancora prima che la

misura venga effettuata quale sarà la direzione scelta dall'altro sperimentatore.

Abbiamo già visto che il teorema KS impone alcune limitazioni alle teorie delle variabili nascoste. In particolare, se si vuole salvaguardare la completa definitezza di tutti gli osservabili (VD) bisogna rinunciare all'ipotesi di non contestualità (NC), lasciando quindi la possibilità che l'esito di una misura dipenda dal contesto in cui questa avviene. Nella dimostrazione di TLA abbiamo visto che si lascia aperta la possibilità di avere un'interpretazione contestuale, ad esempio lo spin di una particella lungo la direzione z potrebbe dipendere dalla scelta della terna x, y, z . Ciò nonostante dato che la storia passata della particella include naturalmente anche tutte le iterazioni con l'apparato di misura e gli eventuali altri osservabili definiti, il TLA chiude anche questa scappatoia. Presi per veri i tre assiomi non c'è modo di salvaguardare completamente VD, nemmeno chiamando in causa la contestualità. In questo senso il TLA può essere visto come un'evoluzione del teorema KS, inoltre il teorema KS è esplicitamente usato all'interno della dimostrazione del TLA.

Allo stesso tempo il TLA sembra portare alle stesse conclusioni del teorema di Bell, ovvero l'impossibilità di formulare una teoria a variabili nascoste compatibile con alcune predizioni (empiricamente verificate) della meccanica quantistica sotto un'ipotesi di località. E. Cator e K. Landsman in un articolo del 2018 [11] forniscono una riformulazione di entrambi i teoremi per confrontarli e mettere in luce le differenze e le similitudini. Dal loro confronto si nota come il TLA usi meno assunzioni che quello di Bell, poiché non si fa nessun accenno alla teoria probabilistica, questo però al prezzo di complicare la sua verifica sperimentale, non esistendo un esperimento simil-Aspect per particelle di spin 1.

CONCLUSIONI

L'idea lanciata da Einstein, Podolsky e Rosen di completare la meccanica quantistica introducendo nuove variabili per definire univocamente i valori di osservabili che altrimenti il formalismo quantistico lascerebbe indeterminati, per quanto suggestiva e per certi versi accattivante, incontra molte difficoltà all'atto pratico. È infatti necessario mettere d'accordo le previsioni della meccanica quantistica con i vincoli algebrici e geometrici che emergono dall'introduzione di assunzioni apparentemente innocue. I teoremi di no-go dimostrano che alcune di queste assunzioni non sono compatibili con i risultati della meccanica quantistica. In particolare in questo elaborato abbiamo visto come il teorema di Bell e il teorema del Libero Arbitrio impongono che una teoria delle variabili nascoste debba possedere caratteristiche di non località, mentre il teorema di Kochen-Specker imponga a questo genere di teorie la contestualità. L'importanza, il ruolo e la reciproca interdipendenza delle assunzioni di località e contestualità sono tuttora oggetto di studio.

Realizzare esperimenti che possano empiricamente confermare le conclusioni di questi teoremi non è facile, specie se ci cerca di escludere qualsiasi scappatoia, ma ciò nonostante numerosi test di questo tipo sono stati realizzati e hanno confermato le predizioni della meccanica quantistica.

I teoremi di no-go non forniscono una risposta ultima alle annose questioni concettuali che avvolgono i fondamenti della teoria quantistica, così come non permettono nemmeno di scartare completamente l'approccio a variabili nascoste; ciò nonostante rappresentano lo strumento sino ad ora più efficace per restringere il campo delle ipotesi. Questi teoremi mostrano infatti che un'interpretazione realista della teoria quantistica, magari sul modello della fisica classica, non è possibile se non rinunciando a principi cardine come quello di località, con tutte le indesiderate conseguenze che l'introduzione di azioni a distanza può comportare.

Lo studio di queste questioni oltre che incrementare il nostro bacino di conoscenze riguardanti i fondamenti della teoria quantistica, ci fornisce anche strumenti per applicazioni pratiche. Basti pensare all'importanza che ricoprono fenomeni come l'entanglement o teoremi come quello di Bell all'interno del promettente campo d'indagine della computazione e dell'informazione quantistici.

Bibliografia

- [1] A. Aspect, P. Grangier, G. Roger, "*Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities*", Phys. Rev. Lett. **49**, 91 (1982).
- [2] A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger, "*Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers*", Phys. Rev. Lett. **49**, 1804 (1982).
- [3] J. S. Bell, "*On the Einstein Podolsky Rosen paradox*", Phys. Phys. Fiz. **1**, 195 (1964).
- [4] J. S. Bell, "*On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics*", Rev. Mod. Phys. **38**, 447 (1966).
- [5] J. S. Bell, "*Speakable and Unspeakable*", Cambridge University Press, 1987.
- [6] D. Bohm, "*Quantum Theory*", Prentice Hall, 1951.
- [7] C. Budroni, A. Cabello, O. Gühne, M. Kleinmann, J. Å. Larsson, "*Quantum contextuality*", arXiv:2102.13036 [quant-ph] (2021)
- [8] A. Cabello, "*A simple proof of Kochen Specker theorem*", Eur. J. Phys. **15**, 179 (1994).
- [9] A. Cabello, "*Converting Contextuality into Nonlocality*", Phys. Rev. Lett. **127**, 070401 (2021).
- [10] A. Cabello, G. García-Alcaine, "*Proposed Experimental Test of the Bell-Kochen-Specker Theorem*", Phys. Rev. Lett. **80**, 1797 (1998).
- [11] E. Cator, K. Landsman "*Constraints on determinism: Bell versus Conway-Kochen*", Found. Phys. **44** (7), 781 (2014).
- [12] B. S. Cirel'son, "*Quantum generalizations of Bell's inequality*", Lett. Math. Phys. **4**, 93 (1980).

- [13] J. F. Clauser, M. A. Horne, “*Experimental consequences of objective local theories*”, Phys. Rev. D **10**, 526 (1974).
- [14] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, R. A. Holt, “*Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories*”, Phys. Rev. Lett. **23**, 880 (1969).
- [15] R. K. Clifton, “*Getting Contextual and Nonlocal Elements-of-Reality the Easy Way*”, Am. J. Phys. **61**, 443 (1993).
- [16] J. H. Conway, S. Kochen, “*The Free Will Theorem*”, Found. Phys. **36**, 1441 (2006).
- [17] J. H. Conway; S. Kochen, “*The strong free will theorem*”, Not. Am. Math. Soc. **56** (2), 226 (2009).
- [18] P. Eberhard, “*Bell’s theorem and the different concepts of locality*”, Il Nuovo Cimento B **46**, 392 (1978).
- [19] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, “*Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*”, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- [20] S. J. Freedman, J. F. Clauser, “*Experimental test of local hidden-variable theories*”, Phys. Rev. Lett. **28**, 938 (1972).
- [21] A. Garg, N. D. Mermin, “*Detector inefficiencies in the Einstein-Podolsky-Rosen experiment*”, Phys. Rev. D **35**, 3831 (1987).
- [22] G. C. Ghirardi, A. Rimini, T. Weber, “*Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems*”, Phys. Rev. D **34** (2), 470 (1986).
- [23] M. Giustina, *et al.*, “*Significant loophole-free test of Bell’s theorem with entangled photons*”, Phys. Rev. Lett. **115**, 250401 (2015).
- [24] A.M. Gleason, “*Measures on the Closed Subspaces of a Hilbert Space*”, Indiana Univ. Math. **6**, 885 (1957).
- [25] S. Goldstein, “*Bohmian Mechanics*”, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2021 Edition), Edward N. Zalta (ed.), forthcoming URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/fall2021/entries/qm-bohm/>>.
- [26] C. Held, “*The Kochen-Specker Theorem*”, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/spr2018/entries/kochen-specker/>>.
- [27] B. Hensen, H. Bernien, A. Dreau, et al., “*Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres*”, Nature **526**, 682 (2015).

- [28] Y. F. Huang, C. F. Li, Y. S. Zhang, J. W. Pan, G. C. Guo, “*Experimental Test of the Kochen-Specker Theorem with Single Photons*”, Phys. Rev. Lett. **90** (25), 250401 (2003).
- [29] M. Kernaghan, “*Bell-Kochen-Specker theorem for 20 vectors*”, J. Phys. A: Math. Gen. **27**, L829 (1994).
- [30] S. Kochen, E. Specker, “*The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics*”, Indiana Univ. Math. **17**, 59 (1967).
- [31] C. J. Isham, “*Lectures on Quantum Theory, Mathematical and Structural Foundations*”, Imperial College Press, 1995.
- [32] W. Myrvold, M. Genovese, A. Shimony, “*Bell’s Theorem*”, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2020 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/fall2020/entries/bell-theorem/>>.
- [33] J. von Neumann, “*Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*”, Springer, 1932.
- [34] P. Pearle, “*Hidden-variable example based upon data rejection*”, Phys. Rev. D **2**, 1418 (1970).
- [35] A. Peres, “*Two simple proofs of the Kochen-Specker theorem*”, J. Phys. A: Math. Gen. **24**, L175 (1991).
- [36] M. Redhead, “*Incompleteness, Nonlocality, and Realism*”, Oxford University Press, 1987.
- [37] M. D. Reid, P. D. Drummond, W. P. Bowen, E. G. Cavalcanti, P. K. Lam, H. A. Bachor, U. L. Andersen, G. Leuchs, “*The Einstein-Podolsky-Rosen paradox: from concepts to applications*”, Rev. Mod. Phys. **81**, 1727 (2009).
- [38] M. A. Rowe, *et al.*, “*Experimental violation of a Bell’s inequality with efficient detection*”, Nature **409**, 791 (2001).
- [39] T. Scheidl, R. Ursin, J. Kofler, *et. al.*, “*Violation of local realism with freedom of choice*”, PNAS **107** (46), 19708 (2010).
- [40] L. K. Shalm *et al.*, “*Strong loophole-free test of local realism*”, Phys. Rev. Lett. **115**, 250402 (2015).
- [41] C. Simon, M. Zukowski, H. Weinfurter, A. Zeilinger, “*A Feasible ‘Kochen-Specker’ Experiment with Single Particles*”, Phys. Rev. Lett. **85**, 1783 (2000).

- [42] K. W. H. Stevens, “*The Spin-Hamiltonian and Line Widths in Nickel Tutton Salts*”, Proc. Roy. Soc. of London, Ser. A **214**, 1117, (1952).
- [43] G. Weihs, T. Jennewein, C. Simon, H. Weinfurter, A. Zeilinger “*Violation of Bell’s inequality under strict Einstein locality conditions*”, Phys. Rev. Lett. **81**, 5039 (1998).
- [44] <https://thebigbelltest.org/science/>