

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

PETRONIO MARIA CALDANI
**Della proporzione bernoulliana fra il
diametro, e la circonferenza del circolo e dei
logaritmi**

Tesi di Laurea in Storia della Matematica

Relatrice:
Chiar.ma Prof.ssa
MARIA GIULIA LUGARESÌ

Presentata da:
MARIA TINARI

II Sessione
Anno Accademico 2020-2021

Introduzione

Questo elaborato ha l'obiettivo di analizzare il pensiero di Petronio Maria Caldani, matematico bolognese nato nel 1735.

Nel primo capitolo è ricostruita la biografia di Caldani, facendo particolare attenzione alla sua formazione, che lo ha portato a ricoprire la cattedra di Geometria analitica presso l'Università di Bologna. E' poi descritta la polemica in cui rimase coinvolto con Gianbattista Nicolai, professore di Analisi dell'Università di Padova, documentata attraverso vari articoli sull'Antologia Romana. Nella parte finale del capitolo sono riportate le sue opere, tra le quali spicca *Della proporzione bernoulliana fra il diametro, e la circonferenza del circolo e dei logaritmi* del 1782. Questa memoria si inserisce nella questione riguardante i logaritmi dei numeri negativi. Si tratta di una tra le principali discussioni matematiche che hanno caratterizzato a livello europeo il Settecento e che si è protratta in Italia per buona parte dell'Ottocento.

Il secondo capitolo è dedicato a tale disputa, la cui origine risale ad una lettera di Gottfried Wilhelm Leibniz a Johann Bernoulli del 16 marzo 1712. I matematici dell'epoca si divisero in due schieramenti: da una parte i sostenitori dell'identità $\log x = \log(-x)$, con x numero reale positivo, guidati dal matematico svizzero; dall'altra coloro che, come Leibniz, ritenevano che i logaritmi di quantità negative fossero immaginari. Caldani, insieme a diversi matematici italiani, come ad esempio i fratelli Vincenzo e Giordano Riccati, fu uno dei sostenitori dell'ipotesi bernoulliana. Nel capitolo è esaminata la corrispondenza tra Leibniz e Bernoulli, che si concluse nel 1713, dopo che entrambi i matematici, rimasti fermamente convinti della propria opinione, decisero di porvi termine. La questione fu riaperta da Eulero nel 1727 che, nel breve carteggio con Bernoulli, introdusse l'idea di associare ad un numero negativo infiniti logaritmi immaginari. Questa idea fu dimostrata nel 1747, risolvendo la questione. Tuttavia, la teoria del matematico svizzero, poichè poggiata sui concetti di infinito e infinitesimi, all'epoca ancora oscuri, non fu accettata da tutti. Le tesi di Eulero furono oggetto di discussione soprattutto in Italia, dove la questione dei logaritmi si legò con quella della veridicità della *proporzione bernoulliana* (la circonferenza sta al diametro come $\log(-1)$ sta a $\sqrt{-1}$) e dell'uguaglianza tra lo zero reale e quello immaginario.

Il terzo capitolo è dedicato all'analisi di *Della proporzione bernoulliana*, opera in cui Caldani esprime le motivazioni che lo hanno indotto a rifiutare la proporzione bernoull-

liana e ad accettare l'uguaglianza $\log x = \log(-x)$, con x numero reale positivo. Inoltre, in essa dimostra che lo zero reale non può essere identificato con quello immaginario. Nella seconda parte del capitolo, è approfondita la questione sulla natura dello zero: in particolare, sono analizzate le opinioni di Giordano Riccati e Gregorio Fontana. Il capitolo si conclude con la sezione dedicata ad una memoria minore di Caldani, dove sono contenute le idee alla base di *Della proporzione*, intitolata *Al signor N.N. dubbj di P.M.C. sopra le riflessioni analitiche del signor abate Gioacchino Pessuti*.

Indice

Introduzione	i
1 Biografia di Petronio Maria Caldani	1
1.1 Famiglia e formazione	1
1.2 Lettura di <i>geometriam analyticam</i>	3
1.3 Impegni politici e amministrativi	5
1.4 Disputa con Gianbattista Nicolai	6
1.4.1 Tomo X, Num. V, 1783, Agosto. Lettera del Sig. Petronio Maria Caldani al Reverendissimo Padre Jacquier	6
1.4.2 Tomo X, Num. VIII, 1783, Agosto. Lettera del Sig. Petronio Maria Caldani al Sig. N. N.	9
1.4.3 Tomo X, Num XXXII, 1784, Febbraio. Lettera d'un dilettante d'analisi ad un suo amico sulla risposta inserita nel giornale num.37 da' confini d'Italia alla lettera del Sig. Petronio Maria Caldani al P. Jacquier intorno a' calcoli del Sig. Ab. Nicolai	10
1.4.4 Tomo X, Num XL, 1784, Aprile. Risposta al Sig. Professore di Camerino autore delle riflessioni (stampate nel giornale letterario dai confini d'Italia num 43) sulla lettera del Sig. Petronio Maria Caldani diretta al Padre Jacquier	11
1.4.5 Altri articoli	11
1.4.6 Tomo XIV, Num. XV, 1787, Ottobre. Esame di un nuovo metodo, proposto per risolvere il caso irreducibile del terzo grado, del Sig. Petronio M. Caldani, pp. 113-117	12
1.4.7 Lettere relative alla disputa	15
1.5 Gli ultimi anni	18
1.6 Opere	26
2 Disputa sui logaritmi dei numeri negativi	28
2.1 Introduzione	28
2.2 Corrispondenza tra Leibniz e Bernoulli	29
2.3 Corrispondenza tra Bernoulli e Eulero	45

2.4	La soluzione di Eulero	51
2.5	La disputa in Italia	57
3	Della proporzione bernoulliana fra il diametro, e la circonferenza del circolo e dei logaritmi	61
3.1	Introduzione all'opera	61
3.2	Dedica dell'opera	62
3.3	Analisi dell'opera	63
3.4	Discussione sulla natura dello zero	73
	3.4.1 Giordano Riccati e la natura dello zero	75
	3.4.2 Gregorio Fontana e la natura dello zero	83
3.5	Al signor N. N. dubbj di P.M.C. sopra le riflessioni analitiche del signor abate Gioacchino Pessuti	85
	Conclusioni	92
	Bibliografia	94

Elenco delle figure

1.1	Stemma della famiglia Caldani. (Biblioteca digitale dell'Archiginnasio).	1
2.1	I due rami della curva logaritmica citati da Bernoulli nella lettera del 25 maggio 1722.	31
2.2	Curva LL.	31
2.3	Curva CC.	32
2.4	Concoide di Nicomede.	32
2.5	Grafico di $x^2 = \frac{a^4}{az+z^2}$	33
2.6	Curva logaritmica $LL\lambda\lambda$	34
2.7	Dimostrazione geometrica di $\log(x) = \log(-x)$	37
2.8	I due rami della curva logaritmica di Bernoulli.	39
2.9	Curva simmetrica riportata da Bernoulli nella lettera del 28 febbraio 1713.	39
2.10	Arco di circonferenza s di una circonferenza di raggio a	47
3.1	Arco di circonferenza s di una circonferenza di raggio a	63
3.2	Concoide con $b > a$. Riccati 1788, p. 121.	77
3.3	Concoide con $a > b$. Riccati 1788, p. 121.	79
3.4	Grafico di $\pm x = \frac{(b-y)}{y} \sqrt{a^2 - y^2}$, con $b > a$. Riccati 1788, p. 121.	80
3.5	Grafico di $\pm x = \frac{(b-y)}{y} \sqrt{a^2 - y^2}$, con $a > b$. Riccati 1788, p. 121.	81
3.6	Curva logaritmica. Riccati 1788, p. 121.	82
3.7	Curva campaniforme. Fontana 1799, p. 182.	85

Capitolo 1

Biografia di Petronio Maria Caldani

1.1 Famiglia e formazione

Petronio Maria Caldani nacque a Bologna intorno al 1735: non abbiamo informazioni certe riguardo la sua data di nascita, ma sappiamo che morì a Padova nel 1808, a circa settantatré anni.¹

La famiglia Caldani, di nobili origini modenesi, si trasferì a Bologna in seguito alle guerre tra Guelfi e Ghibellini. Il 12 marzo 1577 la famiglia ottenne la cittadinanza dal Senato Bolognese, che fu conferita a Cristoforo Caldani.² Non si hanno più notizie della fami-



Figura 1.1: Stemma della famiglia Caldani. (Biblioteca digitale dell'Archiginnasio).

glia fino al 1725, anno di nascita del celebre medico e professore universitario Leopoldo Marco Antonio Caldani, fratello maggiore di Petronio. Leopoldo fu nominato professore dell'Università di Bologna nel 1753 e qui insegnò anatomia sino al 1761, anno in cui si trasferì presso l'Università di Padova per ricoprire la cattedra di medicina teorica e, successivamente, di anatomia.³

Petronio studiò a Bologna, sotto la guida del matematico e fisico Vincenzo Riccati (1707-1775) e del filosofo Francesco Maria Zanotti (1692-1777). Fu annoverato dall'abate Giambattista Roberti (1719-1786) tra gli studenti più distinti di Riccati.

¹De Tiplado 1837, p. 333.

²Caldani F. 1822, p. 3.

³De Tiplado 1837, p. 333.

*Porro mihi est addictissimus frater ejus (Petronio) in negotiis gerendis magnae dexteritatis, ita ut Vincentii Riccati mathematici illius praestantissimi inter probatissimos discipulos adhuc adolescens recenseretur (Roberti, Opere, Bassano, 1797, tomo X).*⁴

In una lettera inviata all'abate bolognese Lodovico Preti (1727-1810), Caldani stesso parla della propria formazione filosofica e di quella del fratello Leopoldo.

*Onor grandissimo sarebbe stato per me l'aver avuto a Maestro il celebre Sig. Canonico Pezzi; ma un tale onore ha avuta la fortuna di goderlo mio fratello e non io, che ho udito in Filosofia un uomo per esso celebre il Sig. Dott. Francesco M. Zanotti...*⁵

Caldani si laureò in Filosofia il 27 Ottobre 1758 e cinque anni dopo discusse una serie di tesi di argomento fisico-matematico davanti ad una commissione costituita da Eustachio Zanotti (1709-1782), Pio Fantoni (1721-1804), Vincenzo Marescalchi (1701-1793), Sebastiano Canterzani (1734-1818), Giuseppe Vogli (1733-1811):

Propositiones nonnullae physico-mathematicae quas propugnandas assumit et illustrissimis atque excelsis dd. Com Vincentio Marescalco justitiae vexillifero antianis consulibus caeterisque patriae patribus D.D.D. Petronius Maria Caldanus philosophiae doctor et civis bononiensis

I. Hypothesis velocitatis spatio proportionalis in corpore descendente repugnat, non ex eo quod motus proveniret instantaneus, sed quia ad conficiendum quodlibet spatium finitum, necessarium esset tempus infinitum.

II. Hypothesis velocitatis tempori proportionalis convenit corpori gravi discendenti per medium non resistens, ubicumque gravitas est constans.

III. In hac hypothesis spatia successive aequalibus temporibus peracta sequuntur rationem numerorum imparium ab unitate.

IV. Hoc verum est in temporibus finitis, tametsi permittatur hypothesis, quod diviso tempore in infinitesima tempuscula, gravitas indat initio singulorum tempusculorum unum impulsus corpori, & unum gradum velocitatis impertiat.

V. Vis centrifuga ejusdem corporis diversos circulos eodem tempore percurretis est in ratione directa radiorum.

VI. Ex observationibus pendulorum colligitur idem corporis pondus majus esse ad Polos, minus ad Aequatorem.

Disputabuntur publico in Archigymnasio die 30 Decembris 1763, hora 18. Annuente Illustrissimo Domino Antonio Barattini Mutinensi, Doctore Excellentissimo, & Scholarium Artistarum Priore degnissimo.

Bononiae, ex typographia Sancti Thomae Aquinatis. Superiorum auctoritate.

Die 22 Xbris 1763

Ab Ill.mo exc. Iuppitis 20 exifer extractis sunt ad argumentando contra inferitas theses Physico-mathematicas a Doctore Petronio Caldano pub.co in Archigymnasaio propu-

⁴De Tiplado 1837, p. 333.

⁵Roma, 7 aprile 1781. La lettera è conservata presso la Biblioteca Comunale dell'Archiginnasio di Bologna, fondo Tognetti.

gnandas. *Lectores Eustachius Zanottus, Fantonus, Marescalchis, Caterzanis, et Voglius.*
Die 28 Xbris 1763

Predicti Lectores una ad Doctore Petronio Caldano confundet professerent cum manichy et exc.mo vexiliferi justitia iuramentum praeter Marescotius qui se a visitazione aquae impeditus aferuit, qua die tese propugnabuntur, iuxta commissione exc, dd. Aquis factorem? Presentibus Carlo a Juva, et Bapt. Favaregio Testibus.
*Ita est Flaminius consellius sce.*⁶

1.2 Lettura di geometriam analyticam

Tali tesi valsero a Caldani un grande successo ed indussero il Senato Bolognese nel 1764 a conferirgli la cattedra di Geometria analitica presso l'Università di Bologna. Il lettore di questa cattedra fu Gabriele Manfredi sino al 23 gennaio 1761, data della sua giubilazione. Nei tre anni successivi nessuno si presentò a richiedere tale lettura, fatto che potrebbe essere indicativo di una scarsa diffusione degli studi matematici. Molto probabilmente, in questo triennio la lettura fu tenuta dal monaco celestino Girolamo Saladini (1735-1813), che all'epoca non era cittadino bolognese e compare nei Rotoli come professore onorario. Il 13 gennaio 1764, presso una seduta del Senato, fu letta la seguente autocandidatura di Caldani per tale incarico.

*Petronio Caldani attuale umilissimo Servitore delle SS.VV.Ill.me, ed Ecc.se, col più profondo ossequio le supplica di voler degnarsi di conferirgli la lettura di analisi presentemente vacante. Che di tanta grazia etc.*⁷

La successiva relazione dell'Assunteria di Studio fu letta nella seduta del Senato del 10 marzo 1764.

Ill.mi, ed Ecc.si SS.ri

Dopo la morte del Dott.e Gabriello Manfredi seguita in ottobre del 1761, il quale con tanta sua gloria, e con tanto onore di questa Università per le sue dotte, ed ingegnose scoperte nelle materie analitiche investiva la cattedra di analisi, o sia di algebra in questo pubblico Studio, non è mai comparso alcun soggetto a richiederla, salvo che in questi ultimi tempi il Dott.e Petronio Caldani, e non essendovi per l'una parte apparenza veruna che altri sia per domandarla, e trattandosi per l'altra parte di lettura unica, stimano gli Assunti di Studio, che non convenga differirne più oltre lo riempimento per provvedere al comodo, e soddisfare al desiderio della studiosa gioventù, la quale volesse per ventura erudirsi, ed esercitarsi in questa vastissima, e sempre aperta a nuovi ritrovati, e presso le straniere Accademie accreditatissima facoltà. Persuasi pertanto di tale necessità si sono rivolti, e ristretti a prendere le opportune informazioni intorno alla diligenza ed al sapere dell'unico concorrente, e possono ingenuamente far fede alle SS.VV.Ill.me ed Ecc.se

⁶Copia di esse è conservata presso l'Archivio di Stato di Bologna, Riformatori dello studio, Tesi dei lettori, n. 63.

⁷Giuntini 2009, p. 250.

dell'una, e dell'altro non solo per le vantaggiose ed onorevoli testimonianze che di lui hanno fatte in iscritto i suoi diversi maestri, ma ancora, e molto più pel recente, e palese saggio, ch'egli ha dato della sua prontezza di spirito, e della sua dottrina nella valorosa difesa delle Conclusioni Matematiche, miste appunto di calcoli e di formole analitiche, tenuta sul fine dell'anno scorso con universale applauso sulle pubbliche Scuole. Per le quali cose lo giudicano ben meritevole de' generosi riguardi delle SS.VV.Ill.me ed Ecc.se, alle quali senza più lo propongo per la lettura vacante di algebra con annuo onorario di L.200 denari di Gabella da cominciarci a godere, se così piace alle SS.VV.Ill.me ed Ecc.se da quella distribuzione o terziaria, nella quale cadrà la sua prima lezione sullo Studio, come si son compiaciute di ordinarlo, e di concederlo molte, e molte volte a favore di altri novelli lettori, e riverentemente si rassegnano.⁸

Le testimonianze scritte a cui si fa riferimento nel testo sopra riportato sono due lettere che attestano gli studi di Caldani, scritte dai suoi due maestri. La prima è di Vincenzo Riccati, all'epoca professore di matematica presso il Collegio dei Gesuiti.

S.a Lucia li 20 Febraro 1764

Essendo io infrascritto stato interrogato, se il Sig.r Petronio Caldani sarebbe secondo il mio giudizio abile a riempire l'importante cattedra dell'algebra in questa illustre università, io rispondo con ogni sincerità che per ogni riguardo lo credo valevole a sostener con riputazione sì fatto impiego. Egli da qualche tempo ha compito interamente tutto il corso dell'algebra, ed appresso s'è resa familiare la molteplicità de' metodi adoperati da valenti scrittori, onde è pienamente informato degli altrui ritrovati. E questo è l'unico capitale per adempier le parti di buon maestro. Aggiungo in oltre, esser lui dotato di sommo ingegno, e di non mediocre industria e perciò dà fondata speranza, che non sarà pago d'insegnare le cose altrui, ma che applicandosi di proposito a questi studi arricchirà la scienza con novelle scoperte, e rinoverà la gloriosa memoria del Sig.r Gabriello Manfredi, che nelle cose analitiche avea pochi pari in Europa.

Vincenzo Riccati della Comp. di Gesù⁹

La seconda lettera di presentazione fu scritta da Eustachio Zanotti, professore dell'Università di Bologna.

Adì 28 Febbraio 1764

Io infrascritto Lettor pubblico di matematica attesto, che il Sig.r Dott. Petronio Caldani frequentando per molti anni la mia scuola ha studiato con molta attenzione, e diligenza diverse parti della matematica, cioè la geometria teorica e pratica, il calcolo cartesiano, la trigonometria, la meccanica, la prospettiva, l'idrostatica; nelle quali, per l'ottimo e singolare suo talento, ha fatto tale profitto, che ne è divenuto maestro; del che essendo io persuaso, in occasione d'essermi fatta istanza per suggerire persona, che sapesse dirigere ed istruire uno scolaro nei detti studii, modo, che ha fatto onore a se stesso, e a chi lo ha proposto.

⁸Giuntini 2009, pp. 250-251.

⁹Giuntini 2009, p. 251.

In fede di che mi sottoscrivo
Eustachio Zanotti¹⁰

1.3 Impegni politici e amministrativi

Petronio Caldani ricoprì la lettura di Geometria analitica per circa trentacinque anni, tuttavia non si dedicò interamente all'attività universitaria, ma assunse anche incarichi tecnico-amministrativi e politici. Fu nominato dal Senato bolognese accompagnatore del cardinale Pietro Paolo Conti nella visita alle acque del Reno iniziata a maggio 1761. *Le molte cognizioni acquistate ne' varii rami di quell'ardua scienza, lo fecero nominare qual matematico per conto della provincia di Bologna in compagnia al cardinale Conti, delegato alla visita delle acque della Romagna e del Bolognese.*¹¹

Il 28 Aprile 1762 fu eletto aiutante di cancelleria del Senato. Nella relazione presentata dagli Assunti di Cancelleria il 16 marzo 1762 è presente un riferimento specifico al suo incarico nella visita del cardinale.

*Il Dottore Petronio Caldani Cittadino Bolognese, il quale nell'ultimo Concorso del 1757 diede nell'esperimento delle due lettere sufficiente saggio della sua abilità, e questa è poi venuta crescendo colle sue indefesse applicazioni, e si è maggiormente manifestata nella occasione, che ha avuta, ed ha tuttavia di essere attualmente impiegato in servizio pubblico. Egli è in età d'anni 27, è giovine di buon aspetto, e di civili maniere, e dopo di avere, come Alunno del Collegio Boeti, date lodevoli prove di costumatezza, e di attenzione agli Studj, fu dottorato in Filosofia, e si è poi sempre con particolar genio, e profitto esercitato nelle facoltà Matematiche, e specialmente nella Geografia, nell'Algebra, nella Meccanica, e nell'Idrostatica, le quali dottrine non di semplice, e vano ornamento per chi le possiede, ma di gran comodo, e giovamento hanno a riputarsi ne Ministri della Segreteria per le varie occasioni, che nascono alla giornata di prevalersene per affari ora di Sanità, ora di Confini, ed ora di Acque. Ed appunto per gl'interessi correnti dell'Acque, e per la Visita che pende tutt'ora, stimarono i Signori Assunti d'Acque proficuo il destinarlo per Ajutante del Matematico di essa Visita, e consapevoli, com'erano della sua idoneità nello scrivere, lo assegnarono in oltre per Segretario a Signori Senatori Deputati alla Visita, i quali hanno fatta agli Assunti riferenti un ampia e sicura testimonianza della fede, e diligenza di esso, e della sua costante, ed assidua attenzione allo Studio delle materie indicate in tutti que' ritagli di tempo, che gli rimangono dall'adempimento delle sue ordinarie occupazioni, ed incombenze.*¹²

Come riconoscimento degli incarichi eseguiti, il Senato di Bologna lo nominò segretario dell'ambasciata a Roma Ulisse Gozzadini.¹³

¹⁰Giuntini 2009, p. 251.

¹¹De Tipaldo 1837, p. 333.

¹²Archivio di Stato di Bologna, Senato, Filze, n. 88, cc. 199-200.

¹³Ulisse Gozzadini (1730-1795) di famiglia senatoria bolognese, fu gonfaloniere di giustizia e riforma-

*Per l'esatto adempimento de' suoi doveri sì nella cattedra, che nella pubblica amministrazione ottenne in seguito il posto onorifico di segretario pubblico dell'ambasciata, che il senato di Bologna manteneva presso la santa Sede in Roma. Ivi sostenne le molte sue incombenze sino al 1795, ed anzi, infermatosi colà l'ambasciatore Gozzadini, e perciò restitutosi in patria, rimase al Caldani l'intero carico dell'ambascieria per quattro anni consecutivi.*¹⁴

Una delle lettere più importanti che Caldani, in qualità di ambasciatore, inviò al Senato di Bologna è il resoconto dell'uccisione del diplomatico francese Ugo Basville (Roma, 13 gennaio 1793) e la descrizione dei tumulti che ad essa seguirono.¹⁵

1.4 Disputa con Gianbattista Nicolai

Durante il lungo periodo romano, Caldani collaborò alla redazione dell'Antologia Romana: i suoi articoli sono contenuti nei tomi X, XI e XIV. In particolare, con il primo articolo ha inizio una polemica "a distanza" con Gianbattista Nicolai¹⁶ (1726-1793), professore di Analisi all'Università di Padova. Tale disputa è documentata sull'Antologia Romana, attraverso undici articoli: solo il primo e l'ultimo furono scritti da Caldani, gli altri da Effemeridisti, difensori del matematico bolognese, e da un professore di Camerino, difensore di Nicolai. Nel seguito sono state analizzate tali lettere, con l'obiettivo di ricostruire la polemica.

1.4.1 Tomo X, Num. V, 1783, Agosto. Lettera del Sig. Petronio Maria Caldani al Reverendissimo Padre Jacquier

L'articolo inizia con queste parole:

Prevalgomi, Padre Reverendissimo, delle gentili esibizioni da lei fattemi. Ho bisogno del suo aiuto. M'è venuto poc'anzi alle mani un dotto libro stampato in Padova del chiarissimo Sig. Arciprete Nicolai pubblico professore di analisi in quella università sulla possibilità della reale soluzione analitica del caso irriducibile, nel qual libro si preten-

tore dello studio pubblico. Fu ambasciatore della delegazione di Bologna presso la Santa Sede dal 1767 al 1791. Borgato Fiocca 1994, p. 162.

¹⁴De Tiplido 1837, p. 334.

¹⁵Tale lettera è riportata integralmente in *Catalogo Illustrativo dei libri, documenti ed oggetti esposti dalle province dell'Emilia e delle Romagne nel tempo del Risorgimento italiano*, R. Belluzzi, V. Fiorini, Bologna, 1890, Stabilimento tipografico Zamorani e Albertazzi.

¹⁶Nel 1783 pubblicò nuove formule risolutive per le equazioni algebriche di terzo grado nell'opuscolo: *Della possibilità della reale soluzione analitica del caso irriducibile*, Padova, Stamperia del Seminario. Tentò invece una riforma dei fondamenti dell'analisi nell'opera: *Nova analyseos elementa*, Padova, Stamperia del Seminario, 1786-1793, 2 voll. Le teorie di Nicolai sollevarono vivaci reazioni negli ambienti matematici italiani. In particolare, tra i suoi oppositori ricordiamo, oltre a Caldani, Pietro Cossali e Sebastiano Canterzani. Borgato Fiocca 1994, p. 182.

de di dimostrare che la quantità positiva sia uguale alla negativa, e la quantità reale all'immaginaria. Io ho riandati i suoi calcoli fondamentali, e la maniera, colla quale li tesse, parmi, che sia differente da quella, che dee tenersi, seguendo la quale si giunge a conseguenze contrarie alle sue. Or mi permetta Vostra Paternità Reverendissima, ch'io l'esponga la maniera di lui, e la mia supplicandola, se mai avessi preso qualche equivoco d'illuminarmi colla profonda sua dottrina, che celebre cotanto ha renduto il nome di Vostra Paternità Reverendissima, e co tutto l'ossequio mi protesto.

Di Vostra Paternità Reverendissima

Umilissimo Divotissimo Obbligatissimo servitore.

L'opera del matematico Gianbattista Nicolai (1726-1793) alla quale si fa riferimento è *Della possibilità della reale soluzione analitica del caso irriducibile, Padova, Tipografia del Seminario Padova, 1783*. Secondo Caldani, in tale opera sono presenti tre errori. Il primo riguarda il procedimento con il quale Nicolai dimostra che la quantità $\frac{1+\sqrt{1-q}}{1-\sqrt{1-q}}$ è uguale a $\frac{1-\sqrt{1-q}}{1+\sqrt{1-q}}$. Il matematico bolognese riporta la parte iniziale, ritenuta corretta, del calcolo di Nicolai.

- Si considera la quantità $\frac{1+\sqrt{1-q}}{1-\sqrt{1-q}}$ e si moltiplicano numeratore e denominatore per $\sqrt{-1}$:

$$\frac{1 + \sqrt{1-q}}{1 - \sqrt{1-q}} = \frac{\sqrt{-1} + \sqrt{-1+q}}{\sqrt{-1} - \sqrt{-1+q}}.$$

- Si dividono numeratore e denominatore di $\frac{\sqrt{-1} + \sqrt{-1+q}}{\sqrt{-1} - \sqrt{-1+q}}$ per $\sqrt{-1}$:

$$\frac{\sqrt{-1} + \sqrt{-1+q}}{\sqrt{-1} - \sqrt{-1+q}} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{-1}}\sqrt{-1+q}}{1 - \frac{1}{\sqrt{-1}}\sqrt{-1+q}} = \frac{1 - \sqrt{-1}\sqrt{-1+q}}{1 + \sqrt{-1}\sqrt{-1+q}}.$$

Il passaggio successivo compiuto da Nicolai e non condiviso da Caldani é:

$$\frac{1 - \sqrt{-1}\sqrt{-1+q}}{1 + \sqrt{-1}\sqrt{-1+q}} = \frac{1 - \sqrt{1-q}}{1 + \sqrt{1-q}}. \quad (1.1)$$

Secondo Caldani, $\sqrt{-a}\sqrt{-a}\sqrt{b} = -\sqrt{aab}$, perchè $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$. Dunque,

$$-\sqrt{-a}\sqrt{-a}\sqrt{b} = \sqrt{aab}. \quad (1.2)$$

Si considerino i numeratori delle frazioni nell'equazione (1.1): si ha che $\sqrt{-1+q} = \sqrt{-1}\sqrt{1-q}$, quindi $\sqrt{-1}\sqrt{-1+q} = \sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{1-q}$. Applicando la relazione (1.2) ponendo $a = 1$ e $b = 1 - q$, si ha $1 - \sqrt{-1}\sqrt{-1+q} = 1 + \sqrt{1-q}$.

Ragionando in maniera analoga con i denominatori di (1.1), si ottiene che $1 + \sqrt{-1}\sqrt{-1+q} = 1 - \sqrt{1-q}$.

La seconda obiezione di Caldani riguarda il seguente calcolo elaborato da Nicolai. Secondo l'accademico padovano, posto

$$\sqrt{aa - bb} = \sqrt{-1}\sqrt{bb - aa},$$

si ha per la stessa ragione

$$\sqrt{bb - aa} = \sqrt{-1}\sqrt{aa - bb},$$

e quindi

$$\sqrt{aa - bb} = \sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{aa - bb} = -\sqrt{aa - bb}. \quad (1.3)$$

Secondo il matematico bolognese, invece, posto $\sqrt{aa - bb} = \sqrt{-1}\sqrt{bb - aa}$, si ha $\sqrt{bb - aa} = -\sqrt{-1}\sqrt{aa - bb}$. Poichè $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$, allora $\sqrt{-1}(-\sqrt{-1}) = 1$. Pertanto,

$$\sqrt{aa - bb} = \sqrt{-1}(-\sqrt{-1})\sqrt{aa - bb};$$

$$\sqrt{-1}(\sqrt{bb - aa}) = \sqrt{-1}(-\sqrt{-1})\sqrt{aa - bb};$$

$$\sqrt{bb - aa} = -\sqrt{-1}\sqrt{aa - bb}.$$

Infine, la terza obiezione di Caldani riguarda la seguente relazione. Si consideri l'equazione $-\sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$ da cui si ottiene $-\sqrt{-1}\sqrt{m} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{-1}}$. Secondo Nicolai, da quest'ultima uguaglianza si ha

$$-\sqrt{-1}\sqrt{-m} = \sqrt{\frac{m}{-1}} \Rightarrow -\sqrt{-m} = \sqrt{-m}.$$

Secondo Caldani si ha

$$-\sqrt{-1}\sqrt{m} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{-1}} \Rightarrow -\sqrt{-1}\sqrt{m} = \frac{\sqrt{m}\sqrt{-1}(-\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}} \Rightarrow -\sqrt{-1}\sqrt{m} = -\sqrt{-1}\sqrt{m}.$$

Caldani conclude la lettera con queste parole:

Non mi estendo di più, giacchè parmi, che il restante de' calcoli, che contiene il non picciolo libro del chiarissimo autore dipenda da quelli, che ho quì riandati; e però o la mia maniera di calcolare, ch'io credo comune a tutti gli Analisti, è fallace, e vero sarà tutto ciò, ch'egli ricava da essi, o non è fallace, e quelle stesse ragioni, per le quali tale non è ne' calcoli riandati, valeranno ancora rapporto agli altri.

Ad una lettera inviata all'abate bolognese Lodovico Preti il 13 Agosto 1783, Caldani allega una copia dell'articolo, preceduta dal seguente commento:

Vi trasmetto una mia lettera indirizzata al P. Jacquier,¹⁷ pregandola di farne avere un esemplare al Marchese Mariscotti.¹⁸

¹⁷François Jacquier (1711-1788), dell'ordine dei minimi, fu eletto professore di matematica nel Collegio romano nel 1773 quando, sciolta la Compagnia di Gesù, il Collegio passò sotto la direzione di sacerdoti secolari. Il successore di Jacquier fu Giuseppe Calandrelli. Borgato Fiocca 1994, p. 147.

¹⁸La lettera è conservata presso la Biblioteca Comunale dell'Archiginnasio di Bologna, fondo Tognetti.

Il matematico bolognese accenna alla polemica con Nicolai anche in un'altra lettera inviata a Lodovico Preti il 10 settembre 1783:

Rendo le più distinte grazie a V.S. Ill.ma del favor compartitomi di aver data al Sig. Marchese Mariscotti Berselli la mia lettera diretta al P. Jacquier; e la supplico di fargli aver la seconda, di cui mando due esemplari perchè uno serva per lei. Questa seconda lettera è nata per esser stato detto, che io non ho esaminati tutti gli argomenti prodotti dal P. Nicolai a provar la sua opinione, e che avea lasciato il più forte. In fatti l'autore lo produce per ultimo, come suo rifugio, e come l'ancora sua, da cui nessuno lo possa distogliere. Perchè io non avvio toccato questo argomento apparisce in questa mia lettera, e quanto siasi ingannato il P. Nicolai a fidarsi a quest'ancora è dimostrato evidentemente, e mi lusingo, che la dimostrazione possa gradire per la sua semplicità anche al P. Marescotti. Qui è stata compatita, trovo compatimento presso di tutti, ma il compatimento comincia a divenir compassione della mia sorte troppo nemica, per cui non avuto nè meno convegno piccolissimo di gradimento del Senato, a cui feci la dedica della nota mia memoria.¹⁹ Che genere di gratitudine è questo? Che maniera è questa di animar la gente a faticar negli studj? Assicuro V.S. Ill.ma che sono amareggiatissimo, e l'amarrezza, che ne sento m'ha prodotto uno sfogo con lei, di che le domando scusa, e perdono [...].²⁰

Nella lettera si fa riferimento a Jacopo Marescotti (?-1790), lettore di filosofia e di nautica presso l'Università di Bologna, e sostenitore di Caldani nella disputa con Nicolai. Di seguito è riportato un estratto della lettera datata 10 marzo 1790 ed inviata da Caldani a Lodovico Preti, in seguito alla notizia della morte di Marescotti:

Povero Marchese Marescotti! Mi ha penetrato l'anima l'annuncio della sua morte. Ho perduto uno de' migliori amici, e difensori. Dall'altro mondo nel luogo di salute ove spero che sia non credo che lascerà che sue preghiere di darmi maggiori pegni della sua benevolenza ed amicizia.²¹

1.4.2 Tomo X, Num. VIII, 1783, Agosto. Lettera del Sig. Petronio Maria Caldani al Sig. N. N.

L'articolo è un chiarimento richiesto dal Sig. N.N. riguardante l'ultima obiezione all'opera di Nicolai nella lettera precedente. Caldani ribadisce la propria opinione e come esempio riporta la disuguaglianza: $\sqrt{-1} \neq -\sqrt{-1}$.

¹⁹La memoria di Caldani dedicata al Senato di Bologna è *Della proporzione bernoulliana fra il diametro e la circonferenza del circolo e dei logaritmi*.

²⁰La lettera è conservata presso la Biblioteca Comunale dell'Archiginnasio di Bologna, fondo Tognetti.

²¹La lettera è conservata presso la Biblioteca Comunale dell'Archiginnasio di Bologna, fondo Tognetti.

1.4.3 Tomo X, Num XXXII, 1784, Febraro. Lettera d'un dilet- tante d'analisi ad un suo amico sulla risposta inserita nel giornale num.37 da' confini d'Italia alla lettera del Sig. Petronio Maria Caldani al P. Jacquier intorno a' calcoli del Sig. Ab. Nicolai

La lettera che Caldani indirizzò a Jacquier diede origine ad una disputa matematica: sul *Giornale letterario dai confini d'Italia per l'anno 1784*, un autore anonimo pubblicò un articolo in difesa dei calcoli di Nicolai. A sua volta, sull'Antologia Romana, un altro lettore, che si firmò come "un diletante di analisi", rispose in difesa di Petronio Caldani. In particolare, sul *Giornale letterario*, l'autore anonimo invitò il matematico bolognese a commentare un calcolo eseguito dal suo maestro Vincenzo Riccati, all'epoca deceduto da circa nove anni. Caldani non rispose direttamente, ma lo fece il suo difensore sull'Antologia Romana:

L'industre difensore per sostenere il suo cliente [Nicolai] chiama a giudizio il Sig. Caldani citandolo a rispondere sopra un calcolo del Co. Vincenzo Riccati, che gli fu maestro. Noi c'immaginiamo che il Sig. Caldani, se mai ha letta quella risposta fattasi alla lettera, ch'egli dicesse al chiarissimo P. Jacquier non avrà potuto non sentirsi sommamente commosso, e penetrato a una tal citazione. Debb'essergli sembrato troppo strano, che un calcolo (vedi al cap.5 lib.I delle istituzioni analitiche del d. Co. Riccati par 23.pag 42.) così chiaro e così piano, e così giusto del suo maestro abbia voluto torcersi a farlo contenere un error troppo grande qual è quello, che gli si vuol imputare di $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = 1$.

Il ragionamento fatto dal difensore di Nicolai è il seguente. Si consideri la quantità $x = \sqrt{M + N\sqrt{-1}} - \sqrt{M - N\sqrt{-1}}$, con M, N numeri reali. Svolgendo i calcoli, si ha che:

$$x^2 = 2M - 2\sqrt{M^2 + N^2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2M - 2\sqrt{M^2 + N^2}}$$

- Moltiplicando x per $\sqrt{-1}$, si ha:

$$x\sqrt{-1} = \pm\sqrt{2M - 2\sqrt{M^2 + N^2}}\sqrt{-1};$$

- dividendo x per $\sqrt{-1}$, si ha:

$$\frac{x}{\sqrt{-1}} = \pm\sqrt{2M - 2\sqrt{M^2 + N^2}}\sqrt{-1}.$$

Quindi, secondo l'autore anonimo, Riccati avrebbe così dimostrato che $x\sqrt{-1} = \frac{x}{\sqrt{-1}}$ e quindi $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = 1$.

Il difensore di Caldani rispose a questa accusa così:

Le incognite sono indifferenti a significare qualunque valore, ma essendo positivo dee

sempre intendersi positiva l'incognita, ed essendo negativo dee l'incognita intendersi negativa. Così avvertì il Co. Vincenzo Riccati medesimo nel medesimo capo quinto del lib. I. pag. 35. parag. 3; e però mal si paragonano insieme le due incognite delle due accennate equazioni prendendole affette dallo stesso segno.

Cioè, $\frac{x}{\sqrt{-1}} = \mp \sqrt{2M - 2\sqrt{M^2 - N^2}\sqrt{-1}}$ e quindi $x\sqrt{-1} = -\frac{x}{\sqrt{-1}}$.

1.4.4 Tomo X, Num XL, 1784, Aprile. Risposta al Sig. Professore di Camerino autore delle riflessioni (stampate nel giornale letterario dai confini d'Italia num 43) sulla lettera del Sig. Petronio Maria Caldani diretta al Padre Jacquier

L'articolo fu scritto da un difensore della tesi di Caldani in risposta alle critiche pubblicate da un professore di Camerino. Vengono ripetuti e sostenuti tutti e tre gli argomenti presentati dall'accademico bolognese nel primo articolo. I toni utilizzati non sono molto pacati, come si può notare dall'incipit e dalla conclusione dell'articolo:

Giacchè uscite in campo, riveritissimo Sig. Professore, ad impugnare i calcoli del Sig. Caldani con esordio col quale, senza tante parole, volete dire in sostanza che talora anche le buone cause si perdono per una cattiva difesa, e pretenderete che tal sia quella, che ha fatta il Sig. Caldani dei principi combattuti dal Sig. Arciprete Nicolai, permettetemi che io soggiunga, che anche le buone cause ben difese talvolta si perdono, perchè talvolta i giudici o non intendon ben la difesa, o prendono qualche equivoco. Così appunto nella sua causa pare a me che sia avvenuto al Sig. Caldani, il quale nel vostro tribunale l'ha ingiustamente perduta. Io verrò passo passo dimostrarvelo, affinchè ravveduto della ingiustizia, che come giudice gli avete fatta col condannar d'errore e di falsità i suoi calcoli mutiate sentimento, e diate luogo alla ragione e verità.[...] Riandate Signor Professor mio riveritissimo, riandate meglio i vostri calcoli e prima di stenderli pensate meglio al fondamento di essi.

1.4.5 Altri articoli

La polemica seguì con le seguenti lettere pubblicate dal professore di Camerino e da difensori di Caldani:

- Tomo X, Num LI, 1784, Giugno. *Riflessioni del professore di matematica nell'università di Camerino alla risposta data al suo articolo inserito nel numero 13. 1784 del giornale letterario dei confini d'Italia. Art. I, pp. 401-405.*
- Tomo X, Num LII, 1784, Giugno. *Riflessioni del professore di matematica nell'università di Camerino alla risposta data al suo articolo inserito nel numero 13. 1784 del giornale letterario dei confini d'Italia. Art. II ed ult., pp. 409-414.*

- Tomo XI, *Postille alle riflessioni del professore di Camerino sopra la risposta data ad un suo articolo inserito al Num XIII del Giornale letterario dai confini d'Italia per l'anno 1784*. Furono pubblicate in quattro volumi della rivista:
 - Num V. 1784. Luglio, pp.33-40.
 - Num. VI. 1784. Agosto, pp.41-46.
 - Num. VII. 1784. Agosto, pp.49-54.
 - Num. VIII. 1784. Agosto, pp. 57-62.

Durante la pubblicazione di questi articoli, Caldani si ammalò gravemente. Il matematico stesso parla della propria malattia in una lettera indirizzata a Lodovico Preti del settembre 1784.²²

Pur troppo è vero che una gagliardissima febbre m'avea posto in pericolo di vita, e sarebbe riuscito se una terza copiosa emissione di sangue e il pronto uso continuo ad ogni ora di notte e di giorno [di medicinali] come ordinato da Monsignor Saliceti,[...], non ne auspicarono il ritrovamento della forza.

1.4.6 Tomo XIV, Num. XV, 1787, Ottobre. Esame di un nuovo metodo, proposto per risolvere il caso irriducibile del terzo grado, del Sig. Petronio M. Caldani, pp. 113-117

L'articolo ha inizio con la presentazione del metodo Cardanico per la risoluzione dell'equazione cubica $n^3 + pn + q = 0$, priva del termine di secondo grado. Se p è negativo e $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$, l'equazione ha tre radici reali, anche se i radicali cubici x e y che compaiono nelle formule Cardaniche sono immaginari.

A rimediare a quest'analitico sconcerto, e a risolvere questo che chiamasi il caso irriducibile del terzo grado, fu pubblicato tempo fa un anonimo scritto, il di cui autore a niente meno si accinge che a presentare sotto di una forma reale le due radici di un'equazione nel caso appunto ch'esse sieno immaginarie. Noi siamo obbligati in qualche modo ai paralogismi di quest'anonimo perchè dessi han dato occasione a tre dotte e profonde memorie del celebre Segretario dell'accademia dell'Istituto di Bologna, Sig. Sebastiano Canterzani[...]. Avanti che uscisse alla luce l'opera del Sig. Canterzani, cioè circa cinque o sei mesi sono, anche un dotto di lui concittadino, il Sig. Petronio M. Caldani, aveva ad istigazione del Reverendissimo P. Jacquier distese le seguenti, brevi ma sufficienti riflessioni in confutazione dei suddetti paralogismi dell'anonimo, le quali si è egli degnato di volerci permettere d'inserire in questi nostri fogli.

L'articolo prosegue con le riflessioni di Caldani. Egli considera l'equazione $x^2 \pm 3fx + 3g = 0$, che ha per soluzione $x = \mp \frac{3f}{2} \pm \sqrt{\frac{9f^2}{4} - 3g}$. Dunque, x assume

²²La lettera è conservata presso la Biblioteca Comunale dell'Archiginnasio di Bologna, fondo Tognetti.

un valore immaginario quando $\frac{9f^2}{4} < 3g$. Il matematico bolognese analizza il metodo proposto dal collega anonimo, che consiste nel moltiplicare l'equazione $x^2 + 3fx = -3g$ per x (si considera solo il termine positivo $3fx$, perchè il procedimento è analogo per $-3fx$), ottenendo

$$x^3 + 3fx^2 = -3gx.$$

Si riduce il primo membro dell'equazione ad un cubo di binomio:

$$(x + f)^3 = (3f^2 - 3g)x + f^3.$$

Si pone $x + f = z + y$, ottenendo

$$(z + y)^3 = (3f^2 - 3g)(z + y - f) + f^3.$$

Si risolve quest'ultima equazione con il metodo Cardanico, ottenendo:

$$z^3 + y^3 = 3fg - 2f^3;$$

$$y = \frac{f^2 - g}{z}.$$

Sostituendo il valore di y nella prima equazione, si ha:

$$z^3 + \frac{(f^2 - g)^3}{z^3} = 3fg - 2f^3;$$

$$z^6 + (f^2 - g)^3 = (3fg - 2f^3)z^3;$$

$$z^6 + (2f^3 - 3fg)z^3 + (f^2 - g)^3 = 0;$$

$$z = \sqrt[3]{-f^3 + \frac{3}{2}fg \pm \sqrt{\left(f^3 - \frac{3}{2}fg\right)^2 - (f^2 - g)^3}};$$

$$z = \sqrt[3]{-f^3 + \frac{3}{2}fg \pm \sqrt{f^6 + \frac{9}{4}f^2g^2 - 3f^4g - f^6 + 3f^4g - 3f^2g^2 + g^3}};$$

$$z = \sqrt[3]{\frac{3gf}{2} - f^3 \pm g\sqrt{g - \frac{3f^2}{4}}}.$$

Anche in questo caso, si considera solo il radicale positivo, essendo analogo il caso negativo.

Si pone $\frac{3fg}{2} - f^3 = A$ e $\sqrt{g - \frac{3f^2}{4}} = \sqrt{B}$; dunque, si ha:

$$z = \sqrt[3]{A + g\sqrt{B}},$$

e

$$y = \frac{f^2 - g}{\sqrt[3]{A + g\sqrt{B}}}.$$

Poichè $x + f = z + y$, risulta:

$$x + f = \sqrt[3]{A + g\sqrt{B}} + \frac{f^2 - g}{\sqrt[3]{A + g\sqrt{B}}};$$

moltiplicando $\frac{f^2 - g}{\sqrt[3]{A + g\sqrt{B}}}$ per $\frac{\sqrt[3]{A - g\sqrt{B}}}{\sqrt[3]{A - g\sqrt{B}}}$, si ottiene:

$$x + f = \sqrt[3]{A + g\sqrt{B}} + \frac{(f^2 - g) \sqrt[3]{A - g\sqrt{B}}}{\sqrt[3]{A^2 - g^2B}}.$$

Sostituendo i valori di A e B in $\sqrt[3]{A^2 - g^2B}$, si ha:

$$\sqrt[3]{A^2 - g^2B} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}f^2g^2 + f^6 - 3f^4g - g^2\left(g - \frac{3f^2}{4}\right)};$$

$$\sqrt[3]{A^2 - g^2B} = \sqrt[3]{3f^2g^2 + f^6 - 3f^4g - g^3} = \sqrt[3]{(f^2 - g)^3};$$

e, quindi,

$$x + f = \sqrt[3]{A + g\sqrt{B}} + \sqrt[3]{A - g\sqrt{B}}.$$

Ma $\sqrt{B} = \sqrt{g - \frac{3f^2}{4}}$, per cui il valore dell'incognita x è reale quando $\frac{9f^2}{4} < 3g$.

Tale è il sentimento dell'anonimo: il mio però è, di che gliene chieggo scusa, ch'abbia sbagliato.

Caldani spiega l'errore nel ragionamento del matematico anonimo. I valori di $x + f$ sono tre:

1. $x + f = \sqrt[3]{A + g\sqrt{B}} + \sqrt[3]{A - g\sqrt{B}};$
2. $x + f = \sqrt[3]{A + g\sqrt{B}} \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} + \sqrt[3]{A - g\sqrt{B}} \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2};$
3. $x + f = \sqrt[3]{A + g\sqrt{B}} \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} + \sqrt[3]{A - g\sqrt{B}} \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}.$

Il matematico bolognese prosegue affermando:

Ora si sa per la dottrina di risolvere l'equazioni di terzo grado all'uso Cardanico, che il primo di questi valori è sempre reale, sia o non sia negativa la quantità $= B$, e che gli

altri due valori sono sempre immaginarj quando \sqrt{B} comparisca sotto forma reale; ma \sqrt{B} nel nostro caso comparisce sotto forma reale: dunque a riserva del primo gli altri due valori sono immaginarj.

Ciò basterebbe a far vedere, che l'anonimo non ha ottenuto l'intento, che si è prefisso: ma vediamo in fatti.

Caldani calcola lo sviluppo in serie dei due radicali secondo il metodo di Newton:

$$\sqrt[3]{A + g\sqrt{B}} = A^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}A^{-\frac{2}{3}}g\sqrt{B} - \frac{1}{9}A^{-\frac{5}{3}}g^2B + \frac{1}{81}A^{-\frac{8}{3}}g^3B\sqrt{B} \dots,$$

$$\sqrt[3]{A - g\sqrt{B}} = A^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}A^{-\frac{2}{3}}g\sqrt{B} - \frac{1}{9}A^{-\frac{5}{3}}g^2B - \frac{1}{81}A^{-\frac{8}{3}}g^3B\sqrt{B} \dots$$

Il primo valore di $x + f$ si ottiene sommando le due serie: gli addendi in cui compare il termine \sqrt{B} si elidono, pertanto è inutile ridurre \sqrt{B} in forma reale.

Il matematico bolognese prosegue con l'analisi del secondo valore di $x + f$, che può essere riscritto:

$$x + f = \frac{-\sqrt[3]{A + g\sqrt{B}} - \sqrt[3]{A - g\sqrt{B}}}{2} + \frac{\sqrt[3]{A + g\sqrt{B}} - \sqrt[3]{A - g\sqrt{B}}}{2} \cdot \sqrt{-3}.$$

Svolgasi questi radicali collo stesso metodo, e si troverà, che il valore dei due primi è reale, non essendo che il poc'anzi trovato colla sola differenza, che qui diventa negativo. Il valore degli altri due è il seguente $\frac{1}{3}A^{-\frac{2}{3}}\sqrt{-3B} + \frac{10}{81}A^{-\frac{8}{3}}g^3B\sqrt{-3B}$ &c. quantità immaginaria per essersi supposta reale la quantità B da principio. Lo stesso discorso si può ripetere per il terzo valore attribuito a $x + f$.

Dunque, gli altri due valori dell'incognita sono immaginarj benchè compariscano sotto forma reale, e non sussiste che il lavoro dell'anonimo ci conduca al fine propostosi.

Con queste parole di Caldani si conclude l'articolo.

1.4.7 Lettere relative alla disputa

Sono diverse le lettere che fanno riferimento alla disputa tra Caldani e Nicolai. Ad esempio, quella inviata da Leopoldo Caldani a Sebastiano Canterzani il 30 marzo 1787:²³ *Ella ha voluto praticar meco una generosità che assolutamente non mi conviene, nel dono di un'opera sua.*²⁴ *La materia è per me totalmente ostica; ed appena mi ricordo come si leggono le formule algebriche nulla dunque io posso dirne. Sono però certo esser cosa buona, e poichè vien da Lei, e per quello che ne dicono alcuni giornali da me letti. Alcuno ha voluto però farmi credere ch'Ella non convenga nelle opinioni o scoperte di*

²³Le lettere riportate in questo paragrafo, tranne l'ultima, sono conservate presso la Biblioteca Universitaria di Bologna, ms. 2096.

²⁴S. Canterzani, *Osservazioni sul valor cardanico*, Bologna, Stamperia dell'Instituto delle Scienze, 1787.

questo Ab. Nicolai, avvegnacchè il fr. Toaldo²⁵ scriva di costì, che Ella non solo, ma sì bene anche il Saladini, convengano pienamente. Risultane dalle opere del Sr. Nicolai, che l'Algebra ha bisogno di riforme.[...] Mio fratello, com'Ella avrà veduto, pensa assai diversamente, ond'io vorrei pure che pensasse come Lei, e come il fr. Saladini. Me ne dica qualche cosa.

Canterzani rispose a questa lettera il 16 febbraio 1788:

[...] passo subito a dirle schiettamente che nè io, nè il Sig. Canonico Saladini adottiamo le teorie nuove del Sig. Nicolai, benchè riconosciamo che ad esse han data cagione varie mal intese espressioni di certi algebristi poco accurati, i quali per conseguenza non dovevano far autorità, nè muovere un professor di talento, come il Sig. Nicolai, a stabilire per i loro errori un sistema, che va a distruggere alquanti dei più evidenti ed incompleti principi non dirò dell'algebra solamente, ma della ragione. Per quanto strani per altro siano le nuove nozioni del Sig. Nicolai, confessiamo però che nelle sue opere si scorge l'ingegno [...].

Di questa opinione troverà essere anche il Sig. Petronio di lei fratello, il quale all'occasione dei miei opuscoli mi favorì molto cortesemente, e nell'Antologia Romana operò perchè fosse difeso un articolo, che incautamente era stato inserito nelle Effemeridi mandato da Bologna, e scritto artificialmente in quegli opuscoli [...].

Riportiamo parte dello scambio epistolare tra Petronio Caldani e Canterzani:

[...] Ho ricevuto coll'ultima posta un libro di materie analitiche di V.S. Illustrissima per dono gentile da lei fattomi, di che le ne rendo le maggiori grazie. Dubito però ch'ell'abbia preso sbaglio nel farmi degno di questo prezioso dono supponendo così ch'io sia capace di queste scienze, nelle quali benchè mi sieno piaciute un tempo non ho mai avuto valore alcuno, e alle quali e per la mia inabilità e per ragione del mio impiego ho già dato l'estremo addio.

Tuttavia la produzione per esser sua m'impegherò a leggerla colla maggior attenzione giacchè non potrà contenere che cose ingegnose quali convengosi ai rari di lei talenti. Resta ch'io voglia ad intenderle e resta ch'ella sia persuasa della mia riconoscenza più intima e della mia infinita stima verso di lei; ed offerendomi

Di V.S. Illustrissima

Roma 3 ottobre 1787

Umilissimo ed Obbligatissimo Servitore

Petronio M. Caldani²⁶

Ringrazio vivamente V.S. Illustrissima dell'accoglimento fatto al mio libretto, e delle obligantissime espressioni che meco usa nell'umanissima lettera, con cui m'ha onorato. Non ostante la sua modestia io non lascerò d'implorare il suo compatimento, sapendo io benissimo quanta sia la sua penetrazione anche in queste materie, che l'impiego suo, e il

²⁵Giuseppe Toaldo (1719-1797).

²⁶Lugaresi 2013, p. 211.

genio per l'amena letteratura, parrebbe che non dovessero permetterle di coltivare. Ella vedrà, che io accordo all'autor anonimo (che che ne dican codeste Effemeridi) quel che niuno forse gli avrà, almeno di primo tratto, accordato. Vedrà, che l'oggetto principale del secondo opuscolo a mostrare quali sieno i valori, verso cui convergono le due serie, in cui suole svilupparsi la formula simile alla cardanica, e come possa aversi lo sviluppo in serie reali, cominciandolo dalla parte irrazionale del binomio anche nel caso di n pari. Vedrà finalmente nel terzo ed ultimo opuscolo, che secondo l'autore del detto articolo è una mera ragazzata, mostro che le equazioni comprese sotto le formole generali, che varj autori han credute altrettanti casi sottratti all'irreducibilità, non meritano ne' pur il nome d'equazioni cubiche, essendo abbassabili, e ottenendosi la loro risoluzione con gli ordinarj artificj dell'analisi. Ma io abuso della pazienza sua. Chiudo dunque senz'altro, raccomandandomi alla grazia sua, che valuto assaissimo, e offerendole la mia debole bensì, certamente volenterosa, servitù. Pieno di vera stima e di sincera riconoscenza ho l'onore di professarmi rispettosamente.

Di V.S. Illustrissima

Bologna li 20 ottobre 1787

Umilissimo, Obbligatissimo Servitore

All'Illustrissimo Sig. Il Sig. Petronio Caldani Professore di Matematiche, e Segretario dell'Ambasceria di Bologna a Roma ²⁷

Infine, particolarmente significativa è la lettera inviata da Petronio Caldani a Giambattista Guglielmini²⁸ l'8 giugno 1793. Da essa si può dedurre che il matematico bolognese, anche se un po' provato dagli anni, avesse intenzione di affrontare di nuovo il problema del caso irriducibile. Tuttavia, questo argomento non compare in nessuna delle sue opere.

Ill. mo Sig:re Sig:re P.ne Col.mo

Sono già ormai tre anni, che dissi Vale all'Algebra, ed agli altri miei studi. Solamente m'è riuscito di far qualche verso nel camminare sull'antico e troppo noto argomento. Il distacco dagli studi miei che m'erano più famigliari m'è stato oltre modo amaro, ma è stato necessario per servire in questo impiego, in cui mi tocca inoltre da fare da Mastro di Casa, e da Computista, mestieri i quali V. S. Ill.ma conosce bene quanto sieno alieni dalle scienze. Ho avuto un principio di carteggio con un ex gesuita lombardo sopra la risoluzione dell'equazione di terzo grado, quando il terzo termine è negativo, e volea persuadermi, che la risoluzione reale è impossibile. Io non mi sono abbandonato alle sue ragioni, ma ho sempre replicato, e replico, che la impossibilità non è reale e assoluta, ma

²⁷Lugaresi 2013, p. 212.

²⁸Giambattista Guglielmini (1760-1817) fu un matematico bolognese, celebre per i suoi esperimenti per la dimostrazione del moto diurno della Terra. Il 22 dicembre 1794 fu eletto alla cattedra *de rebus mathematicis* e dal 1795 al 1798 fu lettore onorario della cattedra di Geometria analitica, di cui era titolare Caldani. Soggiornò a Roma da novembre 1788 a giugno 1790, avendo, dunque, occasione di frequentare Caldani, con il quale manterrà un rapporto epistolare dopo il rientro a Bologna. Ricoprì la carica di Rettore dell'Università di Bologna nel 1814-15. Borgato Fiocca 1994, pp. 17-18.

relativa ai metodi, che sin qui si sono adoperati, e si adoperano per venirne a capo. Se Iddio mi darà anche un poco di vita, ed agio di poter più liberamente respirare, voglio tornare su questo argomento; ma la testa è ormai indebolita, e poco ormai, poco agisce la fantasia. Avrò sommo piacere di leggere le sue nuove produzioni, le quali per essere sue non potranno che meritare tutta la lode. Per quanto bizzarri, com'ella dice, sieno i pensieri da lei concepiti nella metafisica materia su cui sta scrivendo, non saranno mai del genere di quelli del Nicolai, e conterranno cose nuove, e strepitose fors'anche, ma non mai simili a quelle del d.o Professor Padovano. Mi continui la sua grazia, e mi creda sempre con tutta la stima

Di V. S. Ill.ma

Roma 8 Giugno 1793

*U.mo ed Obb.mo Servitore
Petronio M.a Caldani*

P.S. Vi prego de miei più intimi ossequj a S.E. la Sig.ra Co.a Pepoli ²⁹

L'opera di Guglielmini a cui fa riferimento Caldani nella lettera è *Equazioni di terzo grado*, Bologna, Lucchesini, 1809. Infatti, anche Guglielmini si occupò della soluzione generale delle equazioni di terzo grado sin dal carteggio con Caldani, ma pubblicò i suoi risultati solo nel 1809. Il suo scopo era quello di fornire metodi risolutivi per le equazioni di terzo grado in relazione alla natura delle radici.³⁰

1.5 Gli ultimi anni

La lettera sopra riportata è una di dieci epistole autografe di Caldani a Guglielmini, conservate presso la Biblioteca dell'Archiginnasio di Bologna. Esse risalgono agli ultimi anni del soggiorno romano del matematico bolognese e rappresentano un utile strumento per ricostruire alcuni particolari della vita dell'autore. Infatti, oltre ai riferimenti ai problemi matematici che Caldani stava studiando in quel periodo, sono affrontate questioni personali. In particolare, più volte Caldani cita la figlia Maddalena, rimasta a Bologna.³¹ Nella lettera riportata di seguito, Caldani afferma di essere stato calunniato e di vedersi

²⁹Borgato Fiocca 1994, p. 181.

³⁰Borgato Fiocca 1994, p. 169.

³¹Altri riferimenti alla figlia Maddalena sono presenti nelle epistole inviate a Lodovico Preti. In particolare, ricordiamo quella datata 3 maggio 1788 e conservata presso la biblioteca dell'Archiginnasio, in cui l'autore chiede all'abate bolognese di far visita alla ragazza, ammalatasi gravemente:

La prego di raccomandare la mia povera figlia maggiore al Signore, la quale siasi aggravata d'inflamazione di petto.

Si fa riferimento alla ragazza anche nella lettera indirizzata all'abate del 8 agosto 1789 (conservata presso la biblioteca dell'Archiginnasio):

Io le rendo distintissime grazie dell'onore che ha voluto fare a mia figlia di una gentilissima sua visita, e godo moltissimo di aver da Ill.mo inteso che stia bene.

costretto a dare le dimissioni dal suo incarico presso l'ambasciata bolognese. In realtà, l'autore resterà all'ambasciata ancora alcuni anni, di cui si ritrovò a capo dal 1791, anno in cui l'ambasciatore Ulisse Gozzadini lasciò l'incarico, fino al 19 aprile 1793, quando fu nominato il nuovo ambasciatore Giuseppe Angelelli (1744-1799), letterato e storico dell'Istituto delle Scienze di Bologna.³²

Ill.mo Sig:re Sig:re P.ne Col.mo

Godo infinitamente di aver ricevute nuove di V.S., e che abbia felicemente ripatriato. La ringrazio con tutto l'animo dell'incomodo, che ha voluto soffrire coll'essersi portata a veder mia figlia, e desidero certamente che ella giunga a collocarsi presto, e che trovi un partito che le convenga.

La prego de' miei più distinti ossequi alla Sig.ra Co.a Pepoli,³³ e le dica che se mai un giorno arriverò ad inchinarmele, non mi tacci di sconoscente, e d'incivile o di scimunito se non mi sentirà articular parola, perchè la confusione in cui mi troverò allora pensando alle infinite grazie compartite a mia figlia non mi permetterà di parlare. Tant'è: la bontà di cotesta Dama è del tutto sorprendente. Spiacemi, che disapprovi le mie risoluzioni, ma quando da V.S. saprà il tutto spero che mi compatirà. Certo che spiace anche a me, che il Senato, che m'ha sempre prediletto, in oggi per opera di tre o quattro, che suppongono in me delitti o mancanze non mai commesse, io debba essere ad altri posposto, e costretto per non aver uno sfregio a licenziarmi. Ma qual altro partito potea io prendere? Chi ha da servire? Non più. Mia moglie la riverisce e ringrazia. Io sono con tutta la stima e il rispetto

Di V. S. Ill.ma

Roma 10 Luglio 1790

*Um.o ed Obb.mo Serv.re
Petronio M.a Caldani³⁴*

Nelle due lettere successive, Caldani informa Guglielmini della morte di Giordano Riccati, avvenuta il 20 luglio 1790, con il quale aveva avuto un'importante corrispondenza epistolare (riportata nelle sezioni 2.5 e 3.4), e di quella del cardinale Ignazio Boncompagni Ludovisi,³⁵ avvenuta il 9 agosto 1790.

Ill. mo Sig:re Sig:re P.ne Col.mo

³²Borgato Fiocca 1994, pp. 171-172.

³³Marina figlia di Leonardo Grimani, nobile veneziano, sposò nel 1755 Cornelio Francesco Pepoli, senatore bolognese.

³⁴Borgato Fiocca 1994, p. 171.

³⁵Ignazio Boncompagni Ludovisi (1743-1790), appartenente alla famiglia Boncompagni, di origini bolognesi, che aveva dato il papa Gregorio XIII, fu allievo di Sebastiano Canterzani. Fu nominato vicelegato di Bologna nel 1766 e delegato apostolico nella commissione per le acque delle legazioni di Bologna, Ferrara e Romagna nel 1767. Il cardinale accolse Guglielmini a Roma, assumendolo come istitutore del pronipote Marcantonio Cattaneo, e gli procurò i libri necessari ai suoi studi e alle sue ricerche. Borgato 2007, pp. 35-37.

Sono stato perplesso a scriverle. Temeva io da una parte di mancare al mio dovere, temeva dall'altra di non sapere significare i miei sentimenti sbalordito come sono e fuori di me per un doppio colpo di fulmine onde quasi ad un tempo sono stato percosso, cioè e dalla morte del Co: Giordano Riccati unico mio rifugio e sostegno ne miei pochi e lenti studi, e da quella del V.v. Card.e Boncompagni. Quest'ultima anche più amara mi è riuscita in vista dei vantaggi di Lei, che non le poteano certamente mancare. Ma finis sit. Il P. D. Antelmo, e il P.D. Bernardo la ringraziano e riveriscono. Io mi professo sommam.e tenuto dell'informaz.e favoritami, e si assicuri pure, ch'ella non sarà mai nominata. Desidero di sentir l'esito dell'ottimam.e concepito suo esperimento. Mi continui la sua amicizia, e mi creda sempre con tutta la stima

Di V.S. Ill.ma

Roma 11 ag.o 1790

*Div.mo Obb.mo Serv.re
Petronio M.a Caldani³⁶*

Ill. mo Sig:re Sig:re P.ne Col.mo

Forse pari al suo è il mio dolore per la morte dell'E.mo Boncompagni ma a me s'aggiunge di più la perdita irreparabile del Co: Giordano Riccati col quale per tanti anni ho avuto un dolce e confidente scientifico carteggio. Oime! Le giuro che vorrei esser già trapassato prima di giugnere a scena sì luttuosa.

Io la ringrazio del suo buon cuore per me, e si accerti pure, che ne sarà corrisposta per quanto le mie deboli forze permetteranno. Io per altro non so se vorrò aspettar tanto quanto vorranno cotesti S.ri. Badino però bene a quel che fanno, e ch'io non venga strapazzato.

Me le protesto obb.mo dell'onore che fa colle graziose di lei visite a mia figlia. Mi giugne nuovo che la Sig.ra Co.a Pepoli non faccia campagna, giacche l'avea impegnata per la villeggiatura di Rigosa. La raccomando al suo buon cuore.

Desidero di sentir presto l'esito dell'esperimento.

Rispetto ai suoi libri farò parlare al V.v. Abb.e Fioretti, perchè li tenga preparati da spedire a Bologna. Cercherò una qualche propizia occasione, ma la prego di avvertire, che non è così facile, massimam.e perchè la maggior parte de' viaggiatori rivolgesi per la via di Toscana. Mi conservi la sua grazia; porga i miei ossequj, e ringraziamenti alla Sig.a Co.a Pepoli. Si prevalga di me ove posso, e mi creda sempre con tutta la stima

Di V.S. Ill.ma

Roma 25 ag.o 1790

*U.mo Dev.mo Serv.re
Petronio M.a Caldani³⁷*

³⁶Borgato Fiocca 1994, p.172.

³⁷Borgato Fiocca 1994, p.173.

L'esperimento di Guglielmini a cui Caldani fa riferimento in queste lettere aveva l'obiettivo di provare la rotazione della Terra. Esso consisteva nel lasciar cadere dalla cima della Torre degli Asinelli delle sfere di piombo dal diametro di un pollice e nel misurare le deviazioni orientale e meridionale delle fosse prodotte nel suolo. Una delle difficoltà che Guglielmini incontrò derivava dal fatto che nella torre erano presenti numerosi fori, lasciati dalle impalcature di costruzione, dai quali penetrava il vento che rendeva imprecise le misurazioni. Infatti, condizioni necessarie alla corretta esecuzione dell'esperimento erano la perfetta immobilità delle sfere prima del lancio e quella del filo a piombo, che doveva indicare il piede della verticale. Un primo ciclo di esperimenti fu condotto nell'agosto del 1790, ma si rivelò fallimentare. Per questo, Guglielmini decise di trasferirsi alla torre della Specola, che sebbene più bassa, era molto più agevole alle osservazioni e priva di aperture verso l'esterno. Un secondo ciclo di esperimenti fu compiuto dal 12 al 14 settembre 1790, ma anch'essi non diedero i risultati sperati.³⁸ Di questi esperimenti parla Caldani nella seguente lettera.

Ill.mo Sig:re Sig:re P.ne Col.mo

Non a V.S. Ill.ma solam.e né solam.e alla Sig.ra Contessa ed a me è giunta improvvisa la partenza di Maddalena per Finale di Modena, ma a Maddalena stessa è giunta pure improvvisa in modo che so di esserle rincresciuto. E' vero che il zio avea detto che sarebbe venuto a prenderla, ma che non sapea il tempo, onde la ragazza sperava qualche avviso preventivo. Ci vuol pazienza, e bisogna navigare secondo il vento, e i piloti. Mi rincrescerebbe, che cotesta egregia Dama la Sig.ra Co.a prendesse male la partenza di Maddalena; ma spero tanto nella bontà veramente del tutto singolare di cui è fornita, e di cui ha date tante e poi tante generose testimonianze a mia figlia, che non vorrà mai attribuir a colpa, e a mancanza della med.a la improvvisa di lei partenza.

Duolmi dell'esito non corrispond.e dell'esperimento pel modo di farlo. Credo anch'io difficilissima la esecuzione, ma non impossibile. Tutta la difficoltà sembra a me, che consista nel determinare a perfezione il punto nel piano della torre a cui corrisponda il perpendicolo, che parmi necessario di condurre prima di far l'esperimento. Se questo si fissi e sia certo allora mi par tolta ogni difficoltà. Ma l'ottener ciò con esattezza è di estrema difficoltà, tanto più che si tratta di dover tener conto di piccoli deviamenti. Ma il suo ottimo ingegno saprà cavarsi dal labirinto. Sono sempre con piena stima e attaccamento

Roma 18 Sett.e 1790

*Suo Div.mo e Obb.mo Ser.e
Petronio M.a Caldani³⁹*

³⁸Borgato 2007, pp. 61-63.

³⁹Borgato Fiocca 1994, p. 174.

Nella lettera del 2 ottobre 1790 inviata a Guglielmini, Caldani critica l'opera di Francesco Maria Franceschinis,⁴⁰ *Opuscoli matematici*, Bassano, 1787. Franceschinis, difensore delle idee leibniziane sui logaritmi dei numeri negativi, è definito in modo ironico da Caldani "ignorantissimo frate". Inoltre, Caldani si meraviglia del fatto che Franceschinis fosse stato nominato professore dell'Università di Bologna. Infatti, fu lettore onorario dapprima di geometria elementare sintetica (1782-83/1793-94) e poi di geometria analitica (1794-95/1799-1800). Nel 1791 Caldani pubblicò, in anonimo, *Riflessioni sopra un opuscolo del P. Franceschinis Barnabita, dei logaritmi dei numeri negativi stampato in Bassano*, Modena, Società tipografica. In questa lettera, Caldani chiede a Guglielmini di cercare un tipografo bolognese per la pubblicazione di quest'ultima memoria, affermando di non voler ricorrere alla stamperia di Lelio Dalla Volpe, nella quale aveva stampato *Della proprzione bernoulliana*, perchè troppo cara.

Ill.mo Sig:re Sif:re P.ne Col.mo

Beata V.S. Ill.ma che può e sa godere i favori dei grandi! Ma più beata di saper godere le grazie d'una sì virtuosa Dama voglio dir di quella presso di cui si ritrova in villeggiatura. Io qui me la passo colle mosche che non mi lasciano vivere, e con certi altri fetidissimi insetti, de' quali ella sa che abbondano le case più magnifiche, e i Palazzi dei S.ri.

Ho stese alcune osservazioni (sia questo in segreto) sull'opuscolo esacrando dell'ignorantissimo frate. Protesto in vita mia di non aver mai provata tanta noja anzi tanta nausea a scrivere, come ho provato questa volta. O che farragine di spropositi, e di contraddizioni! Non distingue il nero dal bianco. Ed è costui fra i Matematici di Bologna? Povera la Patria mia.

Se non fo negozio fuori, bisognerà, ch'io le faccia pubblicare costì.

Io pertanto vorrei, ch'ella s'informasse quanto fosse per pretendere uno de' nostri stampatori ad imprimerla. I fogli saranno dieci o dodici con qualche carattere algebrico. Il V.v. Dalla Volpe è un poco caro. Mi fece pagar bene la stampa della mia memoria, e mi vien detto che ne abbia spacciate ben molte copie. Non faccia però verun contatto ma solamente s'informi, e si compiaccia di darmene avviso.

Auguro buon esito al suo esperimento, e intanto mi congratulo della buona disposiz.e. Di mia figlia nulla so. Forse sarà sulle mosse per tornare a Bologna. I miei umili ringraziamenti alla Sig.ra Co.a non tanto per la grazia che mi fa pe' suoi saluti quanto per le obbligazioni che le professo per Maddalena, delle quali avrò eterna memoria.

Sono con piena stima

Roma 2 Ott.e 1790

⁴⁰Francesco Maria Franceschinis (1756-1840), barnabita di nobile famiglia udinese, fu nominato professore onorario di Geometria analitica all'Università di Bologna. Si trasferì a Roma alla fine del 1788 ed entrò a far parte della congregazione dei sacri riti. Nel 1787 pubblicò tre *Opuscoli Matematici* sulla questione dei logaritmi dei numeri negativi, sulla spinta degli archi e delle volte, sulla teoria delle parallele. Borgato 2007, p. 39.

Suo U.mo Obb.mo Serv.re
Caldani ⁴¹

Caldani fa un riferimento ironico a Franceschinis anche nella lettera seguente inviata a Guglielmini. Inoltre, in questa lettera afferma di aver recensito l'opera *Antonii Eximienii Presbyteri Valentini De Studiis Philosophicis et Mathematicis instituendis ad virum clarissimum suique amicissimum Ioannem Andresium liber unus*, uscita anonima sulla rivista *Continuazione del nuovo Giornale de' Letterati d'Italia*, tomo XLIII, Modena, 1790, pp. 1-41.

Ill.mo Sig:re Sig:re P.ne Col.mo

Credo benissimo, che V.S. Ill.ma non avrà trovato alcuno costì che abbia il libretto, ch'io le feci avere. La scarsezza delle copie stampatene n'è la cagione. Vedrò però se mi avverrà di poter spedirlene nel venturo Ordinario un altro esemplare. Il libretto non l'ho steso io, che non voglio attribuirmi quel che non mi conviene, l'ha steso un mio amico, a cui non ho fatto che avere il libro criticato, e alcune mie osservazioni analitiche, che ha esposte nella sua critica. L'altre sopra l'altro libro dell'incomparabile, ma veramente incomparabile P. Franceschinis usciranno anch'esse a Modena, o da Pisa, e come spero d'averne alcuni esemplari non mi dimenticherò certamente di lei, di cui stimo i talenti, e il giudizio in modo particolare sperando ch'ella un giorno farà rivivere la memoria del celebre suo parente ⁴² se non in materia d'acque in altre di Matematica.

Son sempre nuove obbligazioni che mi si accrescono ad ogni visita, che per sua gentilezza fa a Maddalena mia figlia. Voglia Iddio provvederle presto. Ma che crudele Sig:ra Contessa! Non pensar mai di venire a veder Roma? Oime! Ella se ne va a Venezia! Chi sa più quando torna! Ella mi raccomandi nella sua grazia, e in mio nome le auguri un felicissimo viaggio, e le dica che vedendo l'Ecc.ma Zaguri⁴³ di lei sorella la prego di farle memoria di me, di cui chi sa più se si ricorda. V.S. Ill.ma mi continui la pregiat.ma sua grazia ed amicizia, ch'io sono e sarò sempre pieno di tutta la stima

Di V.S. Ill.ma

Roma 17 Nov.e 1790

*U.mo ed Obb.mo Serv.re
Petronio M.a Caldani⁴⁴*

⁴¹Borgato Fiocca 1997, p. 175.

⁴²Si tratta di Domenico Guglielmini (1665-1710), celebre matematico, idraulico e professore dell'Università di Bologna. In più lettere indirizzate a Giambattista, Domenico Guglielmini è definito "illustre parente", ma si può escludere una discendenza diretta. Borgato 2007, p. 20.

⁴³Lodovica Grimani moglie di Pietro I Antonio Zaguri, avogadore della Repubblica veneta. Borgato Fiocca 1994, p. 177.

⁴⁴Borgato Fiocca 1994, pp. 176-177.

Nella lettera dell' 1 dicembre 1790, Caldani, dopo aver fatto di nuovo riferimento all'opera da lui recensita *Antonii Eximeni Valentini*, cita la memoria di Pessuti⁴⁵ *Riflessioni analitiche dell'abate Gioacchino Pessuti già professore di Matematiche nel Corpo de' Cadetti Nobili di Pietroburgo sopra una lettera scrittagli dal Sig. Abate Conte Vincenzo Riccati ed inserita ultimamente nell' Nuova Raccolta di Opuscoli Scientifici e Filologici stampata in Venezia nell' Anno scorso*, Livorno, Stamperia dell'Enciclopedia, 1777. Caldani fa, inoltre, riferimento alla memoria di Giuseppe Calandrelli (1749-1827) *Saggio analitico sopra la riduzione degli archi circolari ai logaritmi immaginarj*, Roma, Giunchi, 1778.⁴⁶

Ill.mo Sig:re Sig:re P.ne Col.mo

Se per far arrestare dal meditato suo viaggio la Dama vogliono le nebbie le piogge, e le nevi, mi metterò a far orazione perché durino simili galanterie, onde si fermi costì, giacché temerei che tornando a Venezia l'amor delle sorelle facesse dimenticarle Bologna, ove spero di tornare, ed ove vorrei personalmente inchinarla, e ringraziarla come posso di tante gentili attenzioni, e di tante cure per mia figlia Maddalena, attenzioni e cure, che la dichiarano una Eroina. Io la prego in que' termini, ch'io non so né posso, di contestarle la mia infinita riconoscenza, e di renderle i più umili ed ossequiosi ringraziamenti, e mi resterà fino all'ultimo respiro impressa la memoria di tratti sì generosi e magnanimi. Questa sera spedisco al V.v. Seg.rio Nicoli⁴⁷ due altri impressi delle osservazioni critiche sopra il noto libro, che sono i soli, che ho presso di me, né l'amico ne ha fatti imprimer altri, onde sperare d'averne da lui.

Cotesta mia figlia colle sue lettere fa ch'io tema, ch'ella sia in una gran malinconia. Me ne dispiace perché un tal male alle volte guida a risoluzioni, delle quali poi si pente senza frutto. Dio la illumini, e la raccomando sempre alle sue premure.

Ella s'abbia riguardo, e non isforzi mai la natura. Experto crede Ruperto.

Dal V.v. abb.e Fioretti, a cui feci saper già le intenzioni di V.S. rispetto ai libri manoscritti qui lasciati non ho mai avuta alcuna risposta. Ella riacquistandoli vegga se ci fosse tra essi il libretto del V.v. Pessuti, e quello del V.v. Calandrelli sopra i logaritmi. La sua grazia ed amicizia, e sono

Di V.S. Ill.ma

Roma primo X.bre 1790

U.mo Obb.mo Serv.e

⁴⁵Gioacchino Pessuti (1743-1814) fu allievo diretto di Eulero in Russia e conobbe a Parigi d'Alembert e Condorcet. Tornato a Roma, con Giovanni Ludovico Bianconi diede vita a due periodici scientifici-letterari: le *Efemeridi letterarie* (1773) e l'*Antologia romana* (1774). Pessuti redigeva in particolare le recensioni di opere matematiche e fisiche e continuò a dirigere la pubblicazione delle *Efemeridi* fino al 1798, anno della loro sospensione. Borgato 2007, p. 39.

⁴⁶Borgato Fiocca 1994, p. 178.

⁴⁷Si tratta di Domenico Nicoli, terzo cancelliere del senato bolognese e segretario dell'ambasceria bolognese a Roma dopo Caldani. Borgato Fiocca 1994, p. 178.

Nella lettera successiva inviata a Guglielmini, Caldani lascia intendere di star lavorando ad una piccola memoria incentrata su alcune critiche all'opuscolo di Pessuti. Si tratta dell'opera che Caldani pubblicherà anonima *Al Sig.N.N.*, *dubbj sopra le riflessioni analitiche del Sig. Ab. Gioacchino Pessuti*.

Ill.mo Sig:re Sig:re P.ne Col.mo

La destinaz.e da lei fatta dei due libretti inviati è ottima fatta da lei non potea essere altrimenti. Quella fatta al V.v. Sen.e già noto non potea esser migliore. L'altra è buona, ma non so a che fine, perché da ciò che altre volte ho sentito anche da V.S. Ill.ma niente piace al soggetto, se la nota non è sua, avendo sempre egli in pronto la proposizione - io avrei fatto in altro modo - Stà poi a vedere quale dei modi sarebbe il migliore. Ma come mai è diventato il giudice competente? O poveri noi! Ha merito distinto, ma non di essere giudice.

Quali sono gli opuscoli del V.v. Pessuti de' quali ella parla? Io non me ne ricordo. A proposito però del V.v. Pessuti la prego a ricordarsi, ch'io le prestai il suo libretto sopra i logaritmi, e mi dispiace di non poter lasciarglielo perchè non ho altro, e in caso ch'io fossi mai una volta o l'altra attaccato mi sarebbe necessario.

Starò aspettando il risultato delle sue esperienze, che auguro felicissimo e così felicissime le sante feste, e tutti gli altri giorni della vita che le prego moltissimi.

Qui le giornate son fredde, ma belle da qualche settimana, e si accosta il tempo, in cui andavamo talora fuori di porta pia: ma non v'andremo più

-Né coglierem più insieme

le mammole viole

Né dal cadente sole

annunzieremo il dì - come facevamo.

Le ricordo sempre de miei ossequj alla chiarissima Dama S.a Co.a Pepoli, alla quale tanti obblighi mi stringono. Certamente ne avrò eterna e grata memoria anche al di là, se di là sarà lecito.

Meco mia moglie la riverisce, e sono sempre con tutta la stima

P.S. La prego a non credere assolutamente che il trasmesso libretto sia opera mia. Solam.e ho somministrata qualche cosa.⁴⁹

Nella lettera dell'11 maggio 1791, Caldani critica nuovamente l'opuscolo di Franceschinis sui logaritmi dei numeri negativi.

Ill.mo Sig:re Sig:re P.ne Col.mo

Il soggetto medesimo, da cui ebbi le osservazioni sopra il libro del V.v.D. Antonio Eximeno, ha fatto avermi alcuni libercoli, che contengono certe riflessioni sopra l'Opuscolo del P. Franceschinis Barnabita dei logaritmi dei numeri negativi. Supponendo che V.S. Ill.ma sia già tornata a Bologna le ne trasmetto alcuni esemplari, pronto a spedirne

⁴⁸Borgato Fiocca 1994, pp. 177-178.

⁴⁹Borgato Fiocca 1994, p. 179.

qualche altro a sua richiesta. Si lascia a lei la libertà della distribuzione, ma sarebbe ben fatto, che qualcheduno ne avessero cotesti Padri Barnabiti a disinganno di quella credulità, che avesse loro ispirata la impostura del P. Franceschinis, la quale apparisce assai chiara dal d.o libercolo. Io gli desidero per altro che così non sia; ed offerendomi sempre ai suoi comandi sono con pien.ma stima

Di V.S. Ill.ma

Roma 11 Maggio 1791

U.mo ed Obb.mo Serv.re
Petronio M.a Caldani⁵⁰

La presenza di Caldani a Roma è documentata fino al 1795. Due anni dopo, il 10 gennaio 1797,⁵¹ venne giubilato:

*Aggravato dagli anni e dagli studii, concessuta gli venne un'onorata giubilazione, che godè tranquillamente fino al termine de' suoi giorni.*⁵²

In realtà, come si legge in una lettera inviata a Lodovico Preti il 20 settembre 1794, il matematico bolognese sperava di essere giubilato alcuni anni prima:

*Io sarò finalmente giubilato insieme con Zanotti coll'annuo assegno di scudi seicento per ciascuno [...]*⁵³

Petronio Maria Caldani morì a Padova nel 1808, lasciando incompiuta la sua ultima opera *Elementi di algebra*,⁵⁴ che fu resa nota dal figlio Floriano (1772-1836). Quest'ultimo fu il successore dello zio Leopoldo Marco Antonio nella cattedra di medicina teorica e di anatomia di Padova. Quindi, molto probabilmente, Petronio fu colto dalla morte mentre era in visita al figlio e al fratello.

1.6 Opere

L'opera matematica principale di Caldani è *Della proporzione bernoulliana fra il diametro, e la circonferenza del circolo e dei logaritmi all'illustrissimo, ed eccelso Senato di Bologna, Stamperia di Lelio dalla Volpe, 1782, Bologna*. Dopo aver letto questa memoria, il celebre matematico parigino d'Alembert (1717-1783) definì Caldani "primo geometra ed algebrista d'Italia".

Altre opere del matematico bolognese sono:⁵⁵

⁵⁰Borgato Fiocca 1994, p. 180.

⁵¹Mazzetti 1847, p. 76.

⁵²De Tipaldo 1837, p. 334.

⁵³La lettera è conservata presso la Biblioteca Comunale dell'Archiginnasio di Bologna, fondo Tognetti.

⁵⁴Probabilmente, Caldani aveva intenzione di inserire i suoi risultati sul caso irriducibile in quest'opera.

⁵⁵De Tipaldo 1837, p. 334.

- *Al Sig. N.N. Dubbi di P. C. sopra le riflessioni analitiche del signor abate Gioacchino Pessuti, Roma;*⁵⁶
- *Riflessioni sopra un opuscolo del padre Franceschinis barnabita, dei logaritmi dei numeri negativi, Modena, 1791;*
- *Parere sopra un articolo dei signori Effemeridisti di Roma che tratta della forza viva.*

A queste opere si aggiungono gli articoli pubblicati sull'Antologia Romana e un'opera di carattere non matematico: *In morte della eccellente donzella Ruffina Battoni romana fra gli Arcadi Corintea, Bologna, 1786.*⁵⁷

*L'autore per queste rime eleganti e dolcissime giustificò pienamente il giudizio, che il suo precettore, il celebre Tozzi, aveva di lui pronunziato, affermando che gli pareva più discepolo del Petrarca che suo.*⁵⁸

Inoltre, in alcune lettere di Caldani a Lodovico Preti, conservate presso la biblioteca comunale dell'Archiginnasio di Bologna, sono presenti diverse poesie rimaste inedite.

⁵⁶Dataibile attorno al 1776.

⁵⁷Sono presenti aggiunte nella seconda edizione del 1794.

⁵⁸De Tiplado 1837, p. 334.

Capitolo 2

Disputa sui logaritmi dei numeri negativi

2.1 Introduzione

L'opera principale di Petronio Caldani, *Della proporzione bernoulliana fra il diametro, e la circonferenza del circolo e dei logaritmi*, si inserisce all'interno di uno dei problemi matematici più lungamente e vivacemente discussi nel Settecento: la definizione dei logaritmi dei numeri negativi. Tale controversia si intreccia con il problema di definire la natura dei numeri complessi e delle loro relazioni con i reali. Bisogna sottolineare che nel Settecento, sia i numeri negativi che i numeri complessi, avevano un'importanza marginale, in quanto considerati quantità estranee al campo dei numeri: ai primi si dava anche il nome di *numeri falsi*, ai secondi di *numeri impossibili*.¹

Il problema dei logaritmi dei numeri negativi è stato sollevato con una lettera di Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) a Johann Bernoulli (1667-1748) e ha visto coinvolti alcuni dei più celebri matematici del XVIII secolo. Gli studiosi erano divisi in due schieramenti contrapposti. Da un lato si erano posizionati i sostenitori dell'idea di Leibniz (poi ripresa da Eulero, ed in Italia, tra gli altri, da Gregorio Fontana (1735-1803) e Francesco Maria Franceschinis), secondo la quale i logaritmi dei numeri negativi devono essere interpretati come quantità immaginarie.

Contraria a questa opinione è quella di Bernoulli, per il quale vale l'uguaglianza

$$\log(x) = \log(-x), \text{ con } x \in \mathbb{R}$$

e, pertanto, i logaritmi dei numeri negativi si possono considerare reali. Tra i molti sostenitori dell'ipotesi bernoulliana troviamo Petronio Caldani, accanto ad esempio a d'Alembert, Vincenzo e Giordano Riccati, Giuseppe Calandrelli, Giuseppe Contarelli, Paolo Frisi e Pietro Ferroni.

¹Agostini 1922, p. 440.

Sarà Eulero nel 1747 a chiarire la questione applicando la celebre formula:

$$e^{i\omega} = \cos \omega + i \sin \omega.$$

Infatti, ponendo $\omega = \pi$, si ottiene:

$$e^{i\pi} = -1 \Rightarrow \ln(-1) = i\pi.^2$$

2.2 Corrispondenza tra Leibniz e Bernoulli

La disputa sull'esistenza dei logaritmi dei numeri negativi si origina con la lettera che Leibniz invia a Johann Bernoulli il 16 marzo 1712, nella quale è considerata la seguente proporzione:

$$1 : -1 = -1 : 1.$$

Secondo Leibniz:

[...] benchè si possa affermare che -1 ed espressioni simili significhino meno di nulla, tuttavia non è possibile che esistano rapporti, fuorchè immaginari, nei quali l'antecedente o il conseguente è una quantità minore di nulla, ovvero il rapporto -1 sta a 1 come 1 sta a -1 è immaginario. Lo dimostro, tra l'altro, dal fatto che ad un rapporto come questo o ad un altro simile non corrisponde alcun logaritmo. Ma dello stesso -1 non si dà logaritmo. Infatti non è un numero positivo, perchè sono tali i logaritmi di un numero positivo maggiore dell'unità. Tuttavia non può neppure essere un numero negativo perchè sono tali i logaritmi di numeri positivi minori dell'unità. Dunque non resta che concludere che il logaritmo di -1 , non potendo essere né positivo né negativo, deve essere immaginario.³ Cioè, per il matematico tedesco se si considerano i numeri negativi minori dello zero (e quindi 1 si suppone maggiore di -1), allora la proporzione è sbagliata, anche se il prodotto dei medi proporzionali è uguale a quello degli estremi. Infatti, a sinistra dell'uguale, vi è il rapporto tra la quantità maggiore e la minore; a destra dell'uguale vi è il rapporto tra la quantità minore e la maggiore. Pertanto, non possono essere considerati uguali. Per Leibniz, rapporti di questo tipo non devono essere ritenuti come dei rapporti veri, ma possono essere utilizzati nel calcolo. Inoltre, egli definisce *immaginario* un rapporto che non ammette logaritmo, come $\frac{-1}{1}$. Infatti,

$$\log\left(\frac{-1}{1}\right) = \log(-1) - \log(1) = \log(-1).$$

Ma $\log(-1)$ non può essere positivo, perchè tali sono i logaritmi di numeri maggiori di 1 ; nè può essere considerato negativo perchè tali sono i logaritmi di numeri positivi minori di 1 . Quindi, $\log(-1)$ è necessariamente immaginario. Si noti come dietro il ragionamento

²Bagni 1994, pp. 96-97.

³Rosso 2010, p. 257.

fatto da Leibniz, sia implicita l'ipotesi dell'iniettività della funzione logaritmica. Inoltre, il termine *immaginario* ha per il matematico tedesco sia il senso che gli attribuiamo oggi, sia il significato di *non esistente*.

Bernoulli risponde con la lettera del 25 maggio 1712.

Non sono del tutto d'accordo con te nel sostenere che il rapporto -1 sta ad 1 come 1 sta a -1 è immaginario perchè non gli corrisponde alcun logaritmo; tu infatti supponi che un numero negativo non abbia un logaritmo, ma ora ti dimostrerò il contrario: sia x un numero variabile che cresce per incrementi infinitamente piccoli, il cui logaritmo sia $l x$; ti dico che $l x$ corrisponde sia a $-x$ che allo stesso x . Infatti, tu sai che $dl x$ è $= \frac{dx}{x}$, cioè che il differenziale di un qualche logaritmo si ottiene dividendo il differenziale del numero per il numero stesso; poichè poi $\frac{dx}{x}$ è uguale a $\frac{-dx}{-x}$, segue l'asserto. Ecco i passaggi: $dl x = \frac{dx}{x} = \frac{-dx}{-x} = dl -x$ per cui è anche $l x = l -x$.⁴

Per il matematico svizzero, x e $-x$ hanno lo stesso logaritmo perchè:

$$d \log(x) = \frac{dx}{x} = \frac{-dx}{-x} = d \log(-x),$$

da cui si ha $\log(x) = \log(-x)$. Si noti come quest'ultima implicazione sia errata, perchè, ad esempio, due funzioni che differiscono per una costante hanno lo stesso differenziale. Il primo ad accorgersi dell'errore è stato, alcuni anni dopo, Eulero.

Nella stessa lettera, Bernoulli introduce anche un'argomentazione geometrica a sostegno della propria tesi.

Da ciò puoi vedere che la curva logaritmica ABC ha una compagna $\alpha\beta\gamma$ come, ad esempio, un'iperbole ha la sua opposta. In questo modo, preso BE come unità, EF non è soltanto il logaritmo dello stesso CF ma anche di γF che indica l'opposto del numero precedente.⁵

Il matematico svizzero sostiene, dunque, che la curva logaritmica sia costituita da due rami (figura 2.1), come quella iperbolica: alla curva ABC bisogna affiancare la curva $\alpha\beta\gamma$. Dunque, preso BE come unità, EF è il logaritmo sia di CF che di γF .

Queste spiegazioni non hanno convinto Leibniz, che con la lettera del 30 giugno 1712 afferma, innanzitutto, che non è possibile definire il logaritmo di -2 .

Mi stupisco di come con il tuo acume non ti sia accorto che non esiste il logaritmo di -2 dal momento che non esiste il logaritmo di $\sqrt{-2}$ che sarebbe la metà del precedente.⁶

Leibniz prosegue contestando la dimostrazione geometrica di Bernoulli.

Ma tu dici che il differenziale del numero $-x$, cioè $-dx$ diviso per il numero $-x$ dà il differenziale del logaritmo $\frac{-dx}{-x}$ o $\frac{dx}{x}$. Ma questa regola che il differenziale diviso per il numero dà il differenziale del logaritmo e qualsivoglia proprietà che compete alla natura o per costruzione dei logaritmi non ha luogo, come tu trovi, con i numeri negativi dove

⁴Rosso 2010, pp. 257-258.

⁵Rosso 2010, p. 258.

⁶Rosso 2010, p. 259.

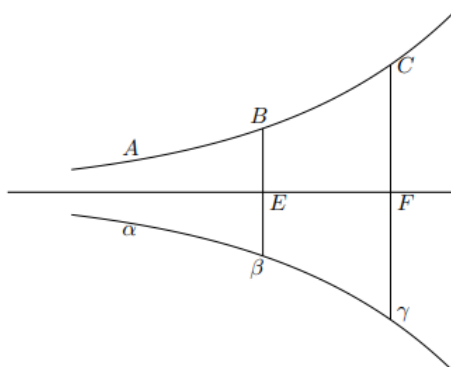


Figura 2.1: I due rami della curva logaritmica citati da Bernoulli nella lettera del 25 maggio 1722.

vuoi dimostrarle. La stessa figura mostra che non si può giungere a $\log. -1$ o a una quantità simile perchè l'ordinata x della curva logaritmica LL non può decrescere per annullarsi fino a -1 , come succede nella curva CC . Per ottenere questo, infatti, la curva logaritmica dovrebbe intersecare l'asse che però è il suo asintoto.⁷
 (Figura 2.2, figura 2.3).

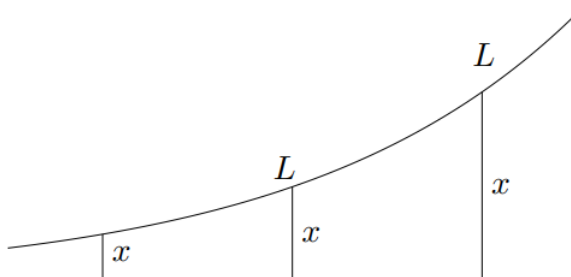


Figura 2.2: Curva LL.

Come si evince dalla lettera, per Leibniz non si può definire il logaritmo di un numero negativo, perchè altrimenti la curva logaritmica, che è continua, intersecherebbe il proprio asintoto.

Bernoulli risponde con la lettera del 13 agosto 1712, affermando che esistono numerosi esempi di curve con due rami distinti separati da un asintoto. Come esempio, riporta la concoide di Nicomede (figura 2.4) e il grafico di $x^2 = \frac{a^4}{az+z^2}$ (figura 2.5).

Prosegue dimostrando l'esistenza di $\log(\sqrt{-2})$. Per il matematico svizzero, $\log(\sqrt{-2}) \neq \frac{1}{2} \log(-2)$. Infatti, $\log(\sqrt{2})$ è la metà di $\log(2)$ perchè $\sqrt{2}$ è medio proporzionale tra 1 e 2, ma $\sqrt{-2}$ non è medio proporzionale tra -2 e -1 , quindi $\log(\sqrt{-2})$ non è la metà

⁷Rosso 2010, p. 259.

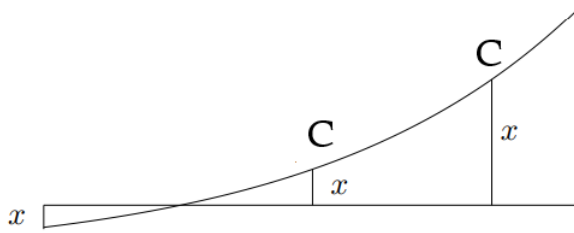


Figura 2.3: Curva CC.

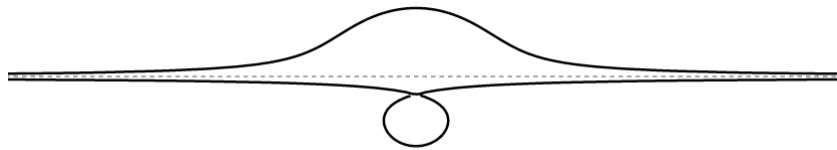


Figura 2.4: Concoide di Nicomede.

di $\log(-2)$. Inoltre, se $\log(\sqrt{1 \times 2}) = \frac{1}{2} \log(2)$, allora $\log \sqrt{(-1) \times (-2)} = \frac{1}{2} \log(\sqrt{-2})$. Pertanto, $\log(\sqrt{2})$ è la metà sia di $\log(2)$, che di $\log(-2)$. In conclusione, $\log(2) = \log(-2)$.

[Tu dici:] Non vedo ancora come sia possibile dare un senso al logaritmo di -2: infatti io nego quello che tu affermi, che il logaritmo di $\sqrt{-2}$ sia la metà del logaritmo di -2, anche se è vero che il logaritmo di $\sqrt{2}$ è la metà del logaritmo di 2: è bene senza dubbio indagare il motivo di questa verità e poi vedrai la differenza. Senza dubbio \log di $\sqrt{2}$ è la metà di \log di 2, perchè $\sqrt{2}$ è il medio proporzionale tra 1 e 2: ma $\sqrt{-2}$ non è medio proporzionale tra -1 e -2 per cui non è lecito concludere che $\log \sqrt{-2}$ è la metà del logaritmo di -2 allo stesso modo in cui $\log \sqrt{1 \times 2}$ è la metà del logaritmo di 2 così anche $\log \sqrt{-1 \times -2}$ è la metà del $\log -2$, cioè $\log \sqrt{2}$ è la metà di $\log -2$ ed anche la metà del logaritmo di +2. Ciò che conferma in sommo grado l'argomento proposto nella mia ultima che evidentemente $\log x = \log -x$ dal momento che $\frac{dx}{x} = \frac{-dx}{-x}$, e dunque un numero preso con segno positivo o negativo ha sempre lo stesso logaritmo. In realtà mi stupisce che tu voglia mostrare il contrario da una figura, come se l'ordinata della curva logaritmica LL non possa decrescere fino ad annullarsi o giunga a 0 per poi passare dalla parte contraria, o a $-x$, come succede per la curva CC come mostrano molti esempi ovvi e comuni che riescono a far vacillare completamente entrambe le parti del tuo argomento. In primo luogo una certa curva può passare da una parte all'altra da $+x$ a $-x$ senza che ci sia bisogno di tendere o raggiungere lo 0, come si può vedere nell'iperbole ordinaria dove la parte comune è portata via alle ordinate positive e negative senza mai annullarsi; in secondo luogo nego che la curva logaritmica LL possa giungere all'altro ramo $\lambda\lambda$, tramite l'annullarsi delle ordinate x , ciò succede dopo che LL diverge

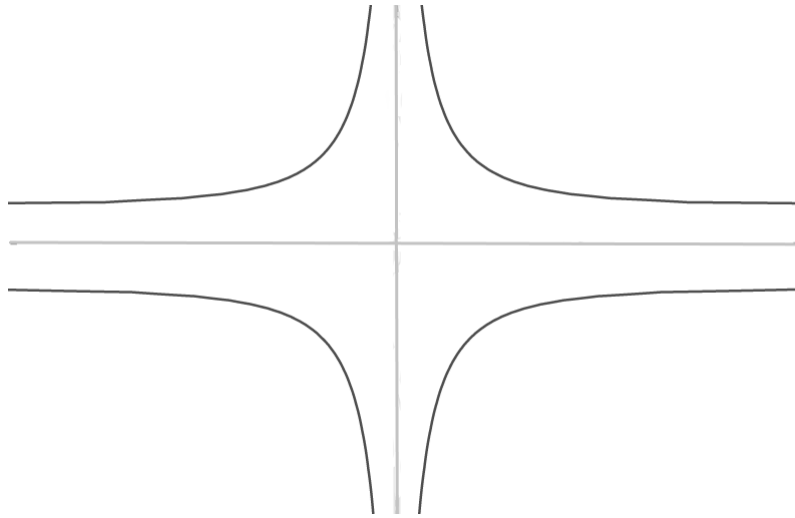


Figura 2.5: Grafico di $x^2 = \frac{a^4}{az+z^2}$.

*all'infinito, laddove x svanisce o si annulla; anche in questo caso abbiamo molti esempi, come nella Concoide di Nicomede. [...] Hai anche un altro esempio in quest'altra curva, la cui equazione (dette x e z le ordinate) $xx = \frac{a^4}{az+zz}$ o $x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{az+zz}}$ mostra che la curva ha due parti che convergono all'infinito, mentre una ordinata x qualsiasi ha un'opposta x negativa, allo stesso modo che io dico accade per la curva logaritmica. Forse, soppesate con attenzione tutte le cose cambierai parere e ritratterai quanto asserito su questo argomento nell'ultimo numero di aprile degli Acta, che ho appena visto.*⁸(Figura 2.6).

La risposta di Leibniz del 18 settembre 1712 tralascia del tutto l'aspetto geometrico: il punto di partenza è la definizione di logaritmo come progressione aritmetica associata

⁸Rosso 2010, pp. 260-261.

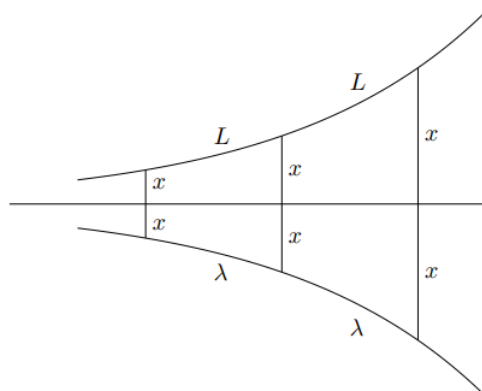


Figura 2.6: Curva logaritmica $LL\lambda\lambda$.

ad una geometrica.⁹

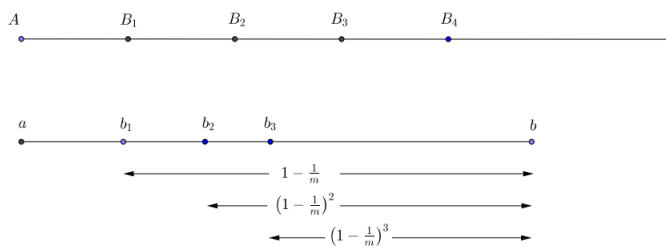
Egli considera i logaritmi in base due, osservando che sia $+2$ che -2 elevati al quadrato danno $+4$, ma solo $+2$ appartiene ad una serie geometrica che parte da $+1$ ed ha ragione positiva. Prosegue affermando che $2^e = x$ è equivalente a $e = \log_2 x$ e non può essere risolta per e quando $x = -2$. Inoltre, Leibniz ritiene che i logaritmi dei numeri negativi

⁹Questa definizione si deve a Nepero (1550-1617). Egli immagina due punti in movimento su due semirette distinte, di origine A e a . Il primo si muove con velocità costante, mentre il secondo ha una velocità iniziale uguale al primo, ma che diminuisce progressivamente; b è, quindi, la posizione verso cui tende il secondo punto quando cresce indefinitamente il tempo trascorso. Si assume come unità di misura la lunghezza del segmento di estremi a , b . La descrizione dei due moti viene “discretizzata” fissando un numero intero m ; il punto b_1 è scelto sul segmento $[a, b]$ in modo che $[a, b_1]$ sia $\frac{1}{m}$ di $[a, b]$. Nel tempo in cui il punto partito da a raggiunge b_1 , quello partito da A raggiunge B_1 . Nel successivo intervallo di tempo di uguale durata, lungo la semiretta di origine A si raggiunge un punto B_2 con $\overline{AB_1} = \overline{B_1B_2}$; lungo l'altra si raggiunge b_2 tale che

$$\overline{b_2b} = \left(1 - \frac{1}{m}\right) \overline{b_1b} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^2 \overline{ab} = \left(1 - \frac{1}{m}\right).$$

E così via: i punti B_3, \dots, B_n, \dots si succedono equidistanti tra loro; i punti b_3, \dots, b_n, \dots sono, invece, tali che le misure $\overline{b_nb}$ formano una progressione geometrica di ragione $1 - \frac{1}{m}$.

Nepero definisce logaritmo di $\overline{b_nb}$ la lunghezza $\overline{AB_n}$; dunque sono messe in relazione una progressione geometrica e una aritmetica. (Negrini 2020, pp. 2-3).



non possono essere definiti per ulteriori due motivi. Il primo è che, poichè il quadrato di $\sqrt{-2}$ è -2 , allora, $\log(-2)$, se esiste, deve essere il doppio di $\log(\sqrt{-2})$; $\sqrt{-2}$ è immaginario, quindi, lo è anche il suo logaritmo. Di conseguenza, $\log(-2)$ è il doppio di un numero immaginario, quindi è a sua volta immaginario. Come secondo argomento contro l'esistenza di $\log(-2)$, Leibniz osserva che nella corrispondenza tra operazioni dei logaritmi e operazioni degli argomenti dei logaritmi, non esiste alcuna corrispondenza con l'operazione che manda un numero nel suo opposto. Infine, Leibniz conclude la lettera affermando che $\log(\sqrt{-2})$, sia esso reale o immaginario, è la metà di $\log(-2)$ perchè $\sqrt{-2}$ è medio proporzionale tra $+1$ e -2 .

La serie dei logaritmi è una serie di numeri che formano una progressione aritmetica corrispondente ad una serie di numeri in progressione geometrica, uno dei quali si può prendere l'unità ed un altro un qualunque numero positivo, ad esempio il 2. Come logaritmo dell'unità si può prendere lo 0 ed un numero qualsiasi come logaritmo di 2, ad esempio possiamo prendere l'unità come logaritmo proprio di 2.

E' inoltre evidente che, preso qualsiasi terzo proporzionale in questa progressione geometrica mai si può giungere ad un altro numero negativo. Sembra però vero che, presi i medi proporzionali, si possa arrivare ad un numero negativo come in questa serie, dati 1, 2, 4, il medio tra 1 e 4 sembra essere tanto $+2$ quanto -2 dal momento che sia $+2$ e -2 moltiplicati per sè stessi danno $+4$. Questo problema sorge dal fatto che -2 non può appartenere ad una progressione geometrica come la nostra, dove, per ipotesi, c'è $+2$: infatti -2 non è una potenza di 2 secondo un esponente qualsiasi ovvero non è della forma 2^e che si può dire contenga il logaritmo di qualsiasi numero che di conseguenza cade nella serie 1, 2, 4, ecc. almeno se è prolungata all'infinito o interpolata equivalentemente. Infatti, se $x = 2^e$ si avrà $e = \log_2 x$, posto che $\log 1$ è 0 e $\log 2$ è 1. Poichè dunque non esiste soluzione e all'equazione $-2 = 2^e$, il logaritmo di -2 non esisterà. E anche per questo non è possibile assegnare a -2 come ordinata sull'asintoto della curva logaritmica nella stessa serie che contiene 1 e 2 ovvero non è possibile determinare x nell'equazione della curva logaritmica che soddisfi $x = 2^e$.

Ma la medesima cosa si dimostra ancor più facilmente grazie alle proprietà delle quantità immaginarie. Se -2 ha logaritmo, esisterà anche la metà di questo logaritmo. D'altra parte questo è il logaritmo di un numero che, moltiplicato per se stesso dà -2 ovvero è il logaritmo di $\sqrt{-2}$. Ma $\sqrt{-2}$ è un numero impossibile ed il logaritmo di un numero impossibile è impossibile: dunque è anche impossibile la metà del logaritmo di -2 ; ma un numero la cui metà è impossibile deve essere anch'esso impossibile. Pertanto il logaritmo di -2 è impossibile.

Tra l'altro la stessa armonia di numeri e logaritmi illustra ciò. La moltiplicazione per se stesso di un numero corrisponde alla moltiplicazione nei logaritmi; la moltiplicazione tra i numeri è rappresentata dall'addizione tra i logaritmi; alla condizione di numero corrisponde quella di logaritmo.

A n^e corrisponde $e \cdot \log n$

*A $n \cdot n$ corrisponde $\log n + \log n$
A n corrisponde $\log n$.*

Al contrario, l'estrazione di radice tra i numeri corrisponde alla divisione tra i logaritmi; la divisione tra i numeri viene rappresentata dalla sottrazione tra i logaritmi. Ma che cosa rappresenta la negazione tra i numeri? Rispondo che non si può trovare un corrispondente perchè scendendo dall'estrazione per mezzo di divisione e sottrazione non si può trovare nulla al di sotto della sottrazione.

*A $\sqrt[n]{n}$ corrisponde $\log n : n$ e
A $\frac{n}{n}$ corrisponde $\log n - \log n$
A $-n$ corrisponde che cosa?*

Da questo si capisce anche che benchè sia possibile dire che il prodotto di -2 per se stesso è 4 , non è giusto però dire che -2 è il medio proporzionale tra 1 e 4 ed in generale i numeri negativi non entrano nei rapporti benchè in qualche modo entrino nei calcoli, come ho da poco mostrato altrove, negli Acta Eruditorum. Da ciò viene confermata la non esistenza dei logaritmi di numeri negativi come, viceversa, l'esclusione dei logaritmi di numeri negativi conferma che rapporti o proporzioni con numeri negativi non possono essere considerati.

A chi volesse sostenere che il logaritmo di $\sqrt{-2}$ non è la metà del logaritmo di -2 pur essendo il logaritmo di $\sqrt{2}$ la metà del logaritmo di 2 adducendo come ragione che $\sqrt{2}$ è medio proporzionale tra -1 e -2 si dà una facile risposta comune ad entrambe: come la radice di un numero è medio tra 1 e il numero di cui è radice, come appunto $\sqrt{2}$ è medio proporzionale tra 1 e 2 , e come $\sqrt{-2}$ è medio proporzionale (o fingiamo che lo sia) tra 1 e -2 . Ma da ambo le parti segue che il logaritmo della media sarà metà del termine posteriore, infatti il logaritmo del medio proporzionale tra 1 e 2 (cioè proprio $\sqrt{2}$) è $\log 2 : 2$. Similmente il logaritmo del medio proporzionale tra 1 e -2 (cioè proprio $\sqrt{-2}$) è $\log 1 + \log -2 : 2$, cioè (siccome $\log 1 = 0$) $\log -2 : 2$. La cosa si vede così: poichè -2 è $= \sqrt{-2}$ per $\sqrt{-2}$ sarà $\log -2 = \log \sqrt{-2} + \log \sqrt{-2}$. Dunque $\log \sqrt{-2}$ è la metà di $\log -2$.¹⁰

La risposta di Bernoulli risale all'11 novembre 1712. Il matematico svizzero concorda con Leibniz nell'affermare che non è possibile ottenere numeri negativi in una progressione geometrica che parte da 1 ed ha ragione positiva. Tuttavia, ritiene che è sempre possibile creare una progressione geometrica che parte da -1 e sia formata da termini negativi e dimostrare che $\log(+n) = \log(-n)$. Dunque, accetta che non esistono contemporaneamente logaritmi di numeri positivi e negativi, ma continua a rimanere dell'idea che i logaritmi dei numeri negativi esistono. Bernoulli fornisce un'altra spiegazione geometrica a sostegno della propria tesi, utilizzando il legame tra la curva logaritmica e

¹⁰Rosso 2010, pp. 263-265.

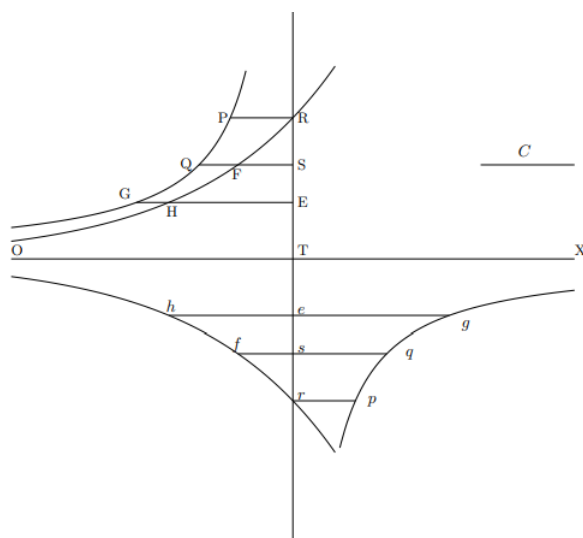


Figura 2.7: Dimostrazione geometrica di $\log(x) = \log(-x)$.

quella iperbolica.¹¹ Bernoulli considera un'iperbole equilatera, i cui rami sono PQG e pqq , e costruisce la curva logaritmica punto per punto utilizzando la relazione tra le due curve (figura 2.7). Fissato il punto P dell'iperbole, l'area del settore $EGPR$ aumenta all'avvicinarsi della retta EG all'asintoto OT , poichè il logaritmo tende all'infinito. Nulla impedisce alla retta EG di superare l'asintoto: l'area di $egXT \cup OTPR$ è composta da una parte infinita e positiva ed una infinita e negativa. Preso e tale che $TE = Te$, le parti infinite si annullano a vicenda e resta l'area $EGPR$. Preso r sul ramo pqq dell'iperbole tale che $rT = RT$, per Bernoulli si può concludere che le aree sottese a $EGPR$ e $egpr$ sono uguali, quindi che $\log(x) = \log(-x)$.

Nel ragionamento del matematico svizzero, vi è l'errore, che non è stato notato nemmeno da Leibniz, di assumere che $+\infty - \infty = 0$.

Ho letto con attenzione il tuo foglio sui logaritmi dei numeri negativi ma direi, con tua buona pace, di non averci trovato nulla che ne dimostri l'impossibilità. Da tutte le tue argomentazioni segue solo questo, che non è possibile passare da una serie di numeri positivi ad una serie di numeri negativi, cioè che presa l'unità (+1, appunto) come inizio della serie numerica non si può trovare in essa alcun numero negativo e che dunque in questo caso non sono ammessi logaritmi di numeri negativi: non lo nego. Ciò però non impedisce che dei numeri negativi possano formare una loro serie particolare che inizi dall'unità negativa (-1, appunto) e così tutto ciò che avrai dimostrato per i logaritmi dei

¹¹Il legame tra i logaritmi naturali e l'area sottesa dall'iperbole è condensato nel noto risultato di calcolo integrale $\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{x} dx = \ln(x_1) - \ln(x_0)$, con x_0, x_1 positivi. Tale legame fu indagato nelle opere di tre matematici del XVII secolo: Gregorio di S. Vincenzo (1584-1667), Alfonso Antonio De Sarasa (1618-1667) e Christiaan Huygens(1629-1695).

numeri positivi varrà allo stesso modo per i logaritmi di numeri negativi. Per dirla in una parola, ogni numero positivo ed il suo negativo hanno lo stesso logaritmo, ovvero $\log. di +n = \log.-n$: ciò che ti dimostrerò di nuovo e spero che questa volta non avrai più niente in contrario, bastandomi per questo di fare vedere che la curva logaritmica ABC ne ha un'altra opposta $\alpha\beta\gamma$ ad essa coniugata rispetto all'asintoto comune LMN , e questi due rami sono da ritenersi appartenenti alla stessa curva come due rami di iperbole non danno luogo se non ad una sola curva: seguirà da ciò (preso AL come $+1$ ed αL come -1) che LM, LN ecc. sono i logaritmi sia dei numeri positivi MB, NC ecc. che dei numeri negativi $M\beta, N\gamma$ ecc.

Ciò dimostra facilmente se riflettiamo su un certo modo di generare la curva logaritmica che rende evidente la presenza di due rami con un asintoto comune. Consideriamo per questo l'iperbole PQG ed il ramo opposto pqg , gli asintoti ortogonali Rr ed OX che si intersecano in T : preso un segmento arbitrario fissato PR come primo estremo e condotti dai punti S, E, s, e ecc. situati sopra e sotto l'asintoto OX i segmenti SQ, EG, sq, eg ecc. e prese su questi dei segmenti SF, EH , proporzionali alle aree iperboliche $RSPQ, REGP$, vale a dire che $SF \times C = \text{area } SP$ e $EH \times C = \text{area } EP$, è evidente che la curva RFH così ottenuta sarà quella logaritmica.

Rivolgiamoci a tale generazione e proseguiamo fin dove è possibile. E' chiaro in primo luogo che al crescere di RS crescerà SF finchè, quanto S tende a T , l'area iperbolica TP diventa infinita e così anche il segmento TO cui tende SF diventa infinito e pertanto è un asintoto della curva logaritmica. Ma (chi lo può impedire?) il punto S prosegue fino a giungere in e ; si vede ora che l'area che compete ad Re è in parte infinita e positiva (TP); in parte infinita negativa (Tg) e precisamente $= TP - Tg = (\text{preso } TE = te) EP$; ed i segmenti EH ed eh sono uguali; similmente, se il punto mobile giungerà nel suo moto ad s cosicchè $TS = Ts$ si avrà $sf = SF$; perciò nasce una nuova curva logaritmica hfr che, con la precedente HFR forma un'unica curva, $RFXOhfr$ appunto, come le due iperboli opposte PQG e pqg formano una sola curva, appunto $PQGOxgpq$. Infatti entrambi i rami RFH ed hfr sono ottenuti con la medesima legge cosicchè i segmenti SF, EH dapprima crescono fino a diventare di lunghezza infinita TO e poi, allo stesso modo diminuiscono a partire dal valore infinito TO verso eh, sf ecc. Presi pertanto TR come unità positiva e Tr come unità negativa, $EH SF$ esprimono i logaritmi di numeri positivi, ed i segmenti $eh sf$ uguali ai precedenti esprimono i logaritmi dei numeri Te, Ts che, a dispetto degli altri TE, TS , sono negativi. E' dunque vero che un unico logaritmo corrisponde a due numeri uguali, uno positivo, l'altro negativo, cioè $\log.+n = \log.-n$. Q.E.D.¹²(Figura 2.7, figura 2.8).

La risposta di Leibniz risale a gennaio 1713: il matematico afferma di essere soddisfatto perchè Bernoulli ha accettato almeno una delle tesi da lui sostenute.

Non voglio null'altro rispetto a quanto mi concedi, cioè che non sia possibile per i logaritmi un passaggio da una serie di numeri positivi ad una di numeri negativi. E così

¹²Rosso 2010, pp. 265-267.

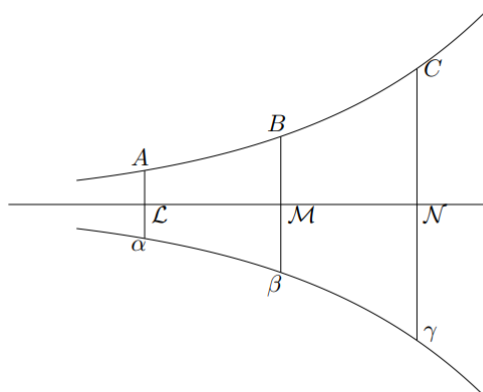


Figura 2.8: I due rami della curva logaritmica di Bernoulli.

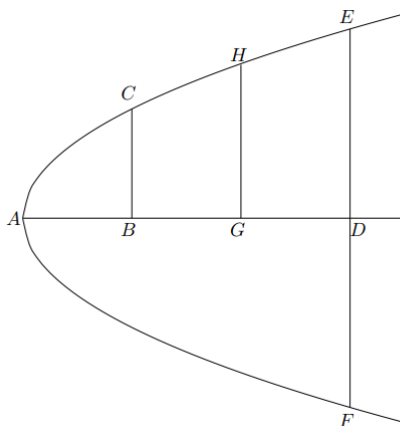


Figura 2.9: Curva simmetrica riportata da Bernoulli nella lettera del 28 febbraio 1713.

se nell'equazione generale $2^e = x$ è $e = 0$ quando $x = 1$ ed $e = 1$ quando $x = 2$ non è possibile assegnare e quando $x = -1$. Non penso ad altro logaritmo rispetto a quello compreso da quell'equazione.¹³

Nella lettera del 28 febbraio 1713, Bernoulli riporta una curva simmetrica rispetto all'asse delle ascisse (figura 2.9). GH è medio proporzionale tra i numeri positivi BC e DE , ma non lo è tra BC e $DF (= -DE)$. Nonostante ciò, la curva passa per F . Lo stesso accade nella curva logaritmica. Dunque, non c'è nulla di straordinario nell'impossibilità di definire il logaritmo del medio proporzionale tra un numero positivo e uno negativo. Nel prosieguo della lettera, Bernoulli ripete il ragionamento fatto negli scritti precedenti riguardo l'equazione $2^e = -1$.

Se tu non sostieni nient'altro che l'impossibilità di un passaggio per i logaritmi da una

¹³Rosso 2010, p. 268.

serie di numeri positivi ad una di numeri negativi, cioè che, ad esempio, non si può ricavare il logaritmo del medio proporzionale tra un numero positivo e uno negativo, non è davvero cosa straordinaria che non valga per le ordinate di una curva che abbia due parti opposte. Sia EAF una curva siffatta, di asse AD e siano BC e DE due ordinate positive e DF un'altra ordinata negativa. Presa dunque l'ascissa AG che corrisponde al medio proporzionale tra BC e DF , non si potrà negare che alla medesima ascissa BD corrispondono due segmenti DE , positivo, e DF , negativo. Non diversamente succede per i logaritmi: se si prendono i logaritmi come ascisse ed i numeri corrispondenti come ordinate sulla curva logaritmica. Infatti, nelle mie ultime lettere mostrai che davvero la curva logaritmica ha due rami situati da parti opposte rispetto all'asse cosicchè allo stesso logaritmo corrispondono due ordinate ovvero due numeri, uno positivo e l'altro negativo. E ciò è quanto sembravi voler negare, ovvero che i numeri negativi hanno logaritmo. Ciò riguarda in verità quanto dici, che se nell'equazione generale $2^e = x$ si chiede che sia $e = 0$ quando $x = 1$ ed $e = 1$ quando $x = 2$, non si può assegnare e quando $x = -1$, cioè che è vero sotto l'ipotesi arbitraria; supponendo però (come è lecito fare) che $e = 0$ quando $x = -1$, si può far corrispondere un valore di e quando x è un numero negativo, proprio come volevo.¹⁴

Leibniz risponde con la lettera del 26 aprile 1713, presentando cinque argomenti sull'impossibilità di estendere le proprietà algebriche dei logaritmi di numeri positivi a quelli di numeri negativi.

1. Se si pone $2^0 = -1$, cioè $\log_2(-1) = 0$, allora si ha $0 = 2 \log_2(-1) = \log_2(-1)^2 = \log_2(1)$ e $0 = \frac{1}{2} \log_2(-1) = \log_2(\sqrt{-1})$. Da ciò segue che il logaritmo di numeri positivi, negativi ed immaginari è nullo, il che è assurdo. Dunque non può essere $2^0 = -1$.
2. Dal ragionamento fatto nel punto 1, segue un'altra contraddizione. Si ha che $\log_2(1) = 0$, cioè $2^0 = 1$. Quindi, si attribuiscono contemporaneamente a 2^0 i valori ± 1 . Il discorso si può ripetere all'infinito: $2^0 = \sqrt[n]{-1}$, con n naturale. Dunque, si ha che 2^0 non è una quantità ben definita.
3. Se si suppone che i numeri negativi hanno logaritmo, allora è possibile passare da questi a quelli di numeri positivi e viceversa (fatto ritenuto assurdo anche da Bernoulli). Per esempio, se $x^e = -2$ allora $x^{2e} = +4$.
4. Se si considerano reali i logaritmi dei numeri negativi, allora sono tali anche le loro metà, cioè i logaritmi dei numeri immaginari. Il che è assurdo, perchè i logaritmi di numeri immaginari sono immaginari.
5. Il quinto argomento si rifà ai primi due. Leibniz ripete che se si definiscono i logaritmi dei numeri negativi come propone Bernoulli, allora si ha contemporaneamente $2^0 = -1$ e $2^0 = +1$.

¹⁴Rosso 2010, p. 268.

Vedo che sei d'accordo con me nel dire che se si suppone che $e = 0$ risolva l'equazione generale $2^e = x$ quando $x = 1$ e che $e = 1$ la risolva quando $x = 2$ [ad esempio], allora segue che non si può far corrispondere un valore di e quando $x = -1$. Però aggiungi che questa ipotesi a favore dei logaritmi di numeri positivi è arbitraria perchè, ferma restando l'equazione generale $2^e = x$, si potrebbe supporre che $e = 0$ la risolva quando $x = -1$. Lasciando stare il fatto che la prima ipotesi è più naturale, occorre considerare senza dubbio per vero che 1° nel secondo caso succede che il logaritmo di una quantità positiva, negativa ed impossibile è sempre lo stesso. Infatti, siccome il doppio e la metà di 0 è 0, 0 sarà il logaritmo tanto di -1 che del suo quadrato +1 e della sua radice quadrata $\sqrt{-1}$. 2°. Da ciò seguirebbe a maggior ragione che 2^0 non sarebbe una quantità assegnata, ma che avrebbe infiniti significati visto che non sarebbe solo $2^0 = -1$, come si è supposto, ma anche $2^0 = +1$ ed $= \sqrt[2]{-1}$ ed $= \sqrt[4]{-1}$ e $= \sqrt[8]{-1}$ e così via all'infinito. E dunque, a meno di non concludere che 2^0 è una quantità ambigua, tutti questi numeri dovrebbero coincidere. Se però poniamo fin dall'inizio $2^0 = 1$, non succederà nulla di tutto ciò perchè ogni potenza o radice di 1 è 1 mentre non è vero che ogni potenza o radice di -1 è -1.

3°. Grazie all'ipotesi che i numeri negativi abbiano un logaritmo succede anche il passaggio da numeri positivi a numeri negativi e viceversa. Infatti, raddoppiando il logaritmo di un numero negativo otterrai il logaritmo del quadrato da un numero positivo: ad esempio, se $x^e = -2$ sarà $x^{2e} = +4$; ma tu stesso rifiuti questo passaggio, dalla natura della curva.

Inoltre 4°. Accettati i logaritmi dei numeri negativi avrai anche logaritmi possibili di numeri impossibili, che sono poi la metà dei logaritmi di numeri negativi; se però ammetti logaritmi solo per numeri positivi non succederà mai di avere logaritmi possibili (reali) di numeri impossibili (immaginari).

Infine 5°. Accettata l'esistenza dei logaritmi per numeri negativi si avrà una conseguenza che avevi ammesso essere falsa. Infatti, hai ammesso fin dall'inizio che $2^e = 1$ e $2^e = -1$ sono incompatibili, per quanto riguarda l'assegnazione di e . Se però ammetti per ipotesi che $2^0 = -1$ si avrà anche $2^0 = 1$. Dunque $2^e = 1$ e $2^e = -1$ sono compatibili prendendo $e = 0$ contro l'ipotesi.

Vedi da tutto questo che l'esistenza dei logaritmi di numeri negativi non solo è poco naturale ed inutile ma anche inammissibile. Ciò segue anche, come dissi altrove, dal fatto che non sono ammissibili proporzioni tra quantità negative e che non si può affermare che -1 sta ad +1 come +1 sta a -1, anche se il prodotto degli estremi sta nella similitudine, che qui non c'è. Infatti non so come possa +1 stare a -1 come -1 sta a +1 quando nel primo rapporto il maggiore sta al minore mentre nel secondo il minore sta al maggiore. Dunque, anche se è vero che le due frazioni $\frac{+1}{-1}$ e $\frac{-1}{+1}$ sono uguali, queste frazioni non sono veri rapporti, anche se possiamo indicarli per il loro tramite. Da questo si capisce che sono stati dimenticati alcuni dei fondamenti dell'analisi.¹⁵

¹⁵Rosso 2010, pp. 270-271.

Bernoulli risponde con la lettera del 7 giugno 1713, contestando punto per punto le cinque obiezioni poste da Leibniz. Per il matematico svizzero, l'errore commesso da Leibniz è quello di pretendere di estendere le proprietà dei logaritmi dei numeri positivi ai logaritmi dei numeri negativi. Analizziamo le cinque risposte di Bernoulli.

1. Non è sempre vero che il doppio del logaritmo di un numero a è il logaritmo di a^2 . Infatti, $2 \log a$ è il logaritmo del numero b che è terzo proporzionale tra l'unità (positiva se $a > 0$, o negativa altrimenti) e a , cioè tale che $\pm 1 : a = a : b$. Nel caso in cui a è positivo, b coincide con a^2 ; se a è negativo, $b = -a^2$. Analogamente, la metà del logaritmo di a non è sempre il logaritmo di \sqrt{a} , ma è il logaritmo del numero c che è medio proporzionale tra l'unità (positiva se $a > 0$, negativa altrimenti) e a . Cioè c è tale che $\pm 1 : c = c : a$. Dunque $c = \pm\sqrt{a}$ se $a > 0$ oppure $c = \pm\sqrt{-a}$ se $a < 0$. Sia $a = -1$. Allora le proporzioni da impostare per trovare b e c sono: $-1 : -1 = -1 : b$ e $-1 : c = c : -1$. Pertanto, $b = \frac{(-1) \times (-1)}{-1} = -1$ e $c = \pm\sqrt{1}$. Dunque, $2 \log(-1) = \log(-1)$ e $\frac{1}{2} \log(-1) = \log(\pm\sqrt{1})$ e da ciò non segue nessun assurdo.
2. Come conseguenza del punto 1, la quantità 2^0 non è mal definita: essa è uguale a ± 1 .
3. Facendo di nuovo riferimento al punto 1, si ha che se $x^e = -2$ allora $x^{2e} = -4$ e non $x^{2e} = +4$. Infatti, $x^{2e} = \frac{(-2) \times (-2)}{-1} = -4$.
4. Per il punto 1, la metà di un logaritmo di un numero negativo a è il logaritmo del medio proporzionale tra 1 e $-a$. Quest'ultimo non è immaginario e quindi non si ha una contraddizione.
5. Infine, dal punto 1, si ha che da $2^0 = -1$ non segue $2^0 = 1$, ma solo che $\frac{(-1) \times (-1)}{-1} = -1$.

La falsità dello stesso principio (che tu tacitamente presupponi) risiede nel fatto che tu vorresti applicare ai logaritmi dei numeri negativi proprietà che sono vere soltanto per i logaritmi di numeri positivi senza considerare il fondamento da cui sono dedotte per renderti conto subito del motivo per cui l'applicazione ai logaritmi dei numeri negativi non valga. Ma risponderò punto per punto alle tue cinque obiezioni.

Tu dici (1) che l'esistenza di logaritmi di numeri negativi ha per conseguenza che il logaritmo di una quantità positiva, negativa od impossibile è il medesimo, cioè che certamente vale per i logaritmi di numeri positivi e negativi; ammetto infatti che questi abbiano logaritmi in comune ma consideriamo il ragionamento grazie al quale tu concludi che anche una quantità impossibile ha lo stesso logaritmo; tu dici infatti che, dal momento che il doppio e la metà di 0 è 0, il logaritmo tanto di -1 che del suo quadrato +1 che della sua radice quadrata $\sqrt{-1}$ sono uguali. Qui non ti accorgi che non è per nulla essenziale per i logaritmi che il doppio di qualche logaritmo sia il logaritmo del quadrato del numero

e che metà del logaritmo sia metà del logaritmo del numero; è importante comprendere che il doppio di un logaritmo deve dare il logaritmo di quel numero che è terzo proporzionale geometrico con il primo numero (cioè l'unità, positiva o negativa) e col numero proposto, questo terzo proporzionale coincide con il quadrato del numero proposto solo tra i numeri positivi ma non così tra i negativi. Devi poi considerare che la metà di un certo logaritmo non è assolutamente il logaritmo della radice quadrata, ma piuttosto il logaritmo del medio proporzionale tra il primo numero (cioè l'unità, positiva o negativa) ed il numero proposto che coincide con la radice quadrata tra i numeri positivi, non tra i negativi. Il tuo ragionamento va corretto dicendo che, siccome il doppio e la metà di zero è 0, sarà 0 sia il logaritmo di -1 che quello del terzo proporzionale rispetto a -1 e -1 cioè $\frac{-1 \times -1}{-1} = -1$ e del medio proporzionale tra -1 e -1, cioè $\sqrt{-1 \times -1} = +\sqrt{+1}$ o $-\sqrt{+1}$; certamente non vi è alcuna conseguenza assurda in questo.

Tu sostieni 2°. che seguirebbe a maggior ragione che 2^0 non sarebbe una quantità fissa ma avrebbe infiniti significati, infatti non sarebbe solo $2^0 = -1$ come ipotizzato, ma anche $2^0 = +1$ e $= \sqrt[2]{-1}$ e $= \sqrt[4]{-1}$ e $\sqrt[8]{-1}$, così via all'infinito per cui se 2^0 non fosse una quantità ambigua, tutte queste quantità avrebbero lo stesso valore. Questa seconda obiezione è solo un Corollario della precedente, rimossa la quale cesserà anch'essa. Io nego che si abbia $2^0 = \sqrt[2]{-1}$, e $= \sqrt[4]{-1}$ e $= \sqrt[8]{-1}$ ecc. infatti, si ha solo che 2^0 è $= \sqrt[2]{-1 \times -1}$ e $\sqrt[4]{-1 \times -1 \times -1 \times -1}$, e $\sqrt[8]{-1}$ ecc. tutte quantità che valgono $\pm\sqrt{+1}$, cioè +1, o ciò che qui è ammesso, -1, che non è affatto insolito.

Veniamo ora al 3° punto. Dall'esistenza di logaritmi per numeri negativi seguirebbe il passaggio da numeri positivi a negativi e viceversa: infatti tu affermi che otterrei dal raddoppio del logaritmo di un numero negativo il logaritmo del quadrato da un numero positivo: ad esempio, da $x^e = -2$ si avrebbe $x^{2e} = +4$; io stesso avrei negato questo passaggio, data la natura della curva logaritmica. In realtà vale sempre la stessa risposta: nego evidentemente che raddoppiando un logaritmo si ottenga il logaritmo del quadrato. Infatti hai visto che da quella moltiplicazione scaturisce il logaritmo del terzo proporzionale rispetto all'unità (positiva o negativa) ed al numero proposto. Dunque, se $x^e = -2$, si dovrà concludere che $x^{2e} = \frac{-2 \times -2}{-1} = -4$, senza alcun transito tra numeri negativi e positivi.

La medesima risposta vale per la quarta obiezione, quando dici che, ammessi i logaritmi negativi si avrebbero logaritmi possibili di quantità impossibili, che sono la metà dei logaritmi dei numeri negativi; senza dubbio hai visto nella risposta alla prima obiezione che la divisione per due di un logaritmo non produce (se non per caso) il logaritmo della radice ma quella del medio proporzionale tra l'unità (positiva o negativa) ed il numero proposto, e questo medio proporzionale non è mai impossibile.

Giungiamo finalmente alla 5° obiezione. Ammessa l'esistenza di logaritmi per i numeri negativi, risulterebbe falso ciò che avevo ammesso essere vero: che $2^e = 1$ e $2^e = -1$ erano incompatibili, mentre lo sarebbero per $e = 0$. Ripeti sempre la stessa cantilena che ti ho mostrato essere falsa. Infatti, dall'ammettere che $2^0 = -1$ non segue anche

che $2^0 = 1$, ma solo che $\frac{-1 \times -1}{-1} = -1$. Dunque ecco superate tutte le tue difficoltà. Sono certo che, se vorrai considerare con un po' di attenzione la cosa, sarai d'accordo con me. Ho voluto risponderti punto per punto perchè evitiamo un giorno di litigare su qualcosa di futile.¹⁶

Nella lettera del 28 giugno 1713, Leibniz decide di porre termine alla disputa: afferma il proprio disinteresse verso un sistema di logaritmi che non condivida le stesse proprietà dei logaritmi dei numeri positivi. Si ritiene, inoltre, soddisfatto di aver convinto Bernoulli che, posto $2^0 = +1$ non sia possibile trovare un valore reale di e tale che $2^e = -1$.

*Mi astengo dal discutere le tue nuove obiezioni alla mia teoria circa l'impossibilità dei logaritmi di numeri negativi; mi sembra che la controversia dipenda dal modo in cui si esprime. Una cosa è abbastanza chiara, che i logaritmi di quantità impossibili sono impossibili; il doppio di una quantità impossibile è impossibile; infine il logaritmo di un numero è il doppio di quello della sua radice. Non ritengo di dover aggiungere altro. Se tu consideri un altro logaritmo dove queste proprietà non valgono, a me non interessa. Hai ammesso che se da $2^e = x$ posto $e = 0$ segue che $x = 1$ non si può assegnare un valore ad e che renda $x = -1$. Questo mi basta, nè intendo dire altro quando affermo che non sono ammissibili i logaritmi di numeri negativi e nella mia definizione di logaritmo è compreso il fatto che il logaritmo di un numero è il doppio di quello della sua radice quadrata. Esaminerò le altre tue note. Ritengo non doversi chiamare più naturale qualcosa cui siamo più abituati ma ciò che superiore e più semplice di natura.*¹⁷

Con la lettera del 29 luglio 1713, Bernoulli acconsente a concludere la discussione, soddisfatto di aver convinto il matematico tedesco della possibilità di associare progressioni geometriche che partono da -1 ai logaritmi dei numeri negativi.

*Mi sta bene definire i logaritmi come ti pare purchè tu non neghi ciò che fin dall'inizio hai concesso, cioè che l'ipotesi di partire dall'unità positiva è del tutto arbitraria e soprattutto che è lecito partire dall'unità positiva, ovvero supporre che $\log -1 = 0$ da cui segue che tutto ciò che ho scritto sui logaritmi dei numeri negativi nelle mie lettere precedenti procede bene senza che succeda quanto temi, che i logaritmi di quantità impossibili sono possibili. Hai anche visto in qual senso si può affermare che il logaritmo di un numero è doppio di quello della sua radice e come sia poco sconvolgente l'esistenza di due rami di curva logaritmica sullo stesso asse, da te negata all'inizio e da me dimostrata essere vera a partire dalla stessa natura dell'iperbole. Questo solo è quel che volevo dire. Se tu me lo concedi, acconsento volentieri che tutto il resto è questione di pura definizione.*¹⁸

Con questa lettera si conclude la controversia tra i due matematici. Nessuna delle prove di tipo geometrico, algebrico o analitico ha risolto il problema ed entrambi i matematici sono rimasti fermi sulla propria posizione. Leibniz non si è più interessato dei logaritmi dei numeri negativi ed è morto tre anni dopo. Nel 1727 la questione è stata

¹⁶Rosso 2010, pp. 272-273.

¹⁷Rosso 2010, p. 273.

¹⁸Rosso 2010, p. 274.

riaperta da Eulero (1707-1783), all'epoca ventenne.

2.3 Corrispondenza tra Bernoulli e Eulero

Il carteggio tra Bernoulli e Eulero si è svolto tra il 1727 e il 1729, ma è stato pubblicato più di un secolo dopo dallo storico della matematica Gustav Enestrom.¹⁹ Eulero, entrato all'Università di Basilea nel 1720 (all'età di 14 anni), ha avuto la fortuna di conoscere Bernoulli che lo ha aiutato nei suoi studi, come scrive il matematico stesso.

*Trovai l'occasione per essere presentato a Johann Bernoulli, il quale, per la verità era molto impegnato e rifiutò di darmi lezioni private, ma mi diede molti consigli sui libri di matematica che dovevo leggere e studiare. Quando incontravo qualche difficoltà ero autorizzato a fargli visita ogni domenica pomeriggio ed egli gentilmente mi spiegava tutto quello che non avevo capito.*²⁰

Il 5 novembre 1727 Eulero invia una lettera a Bernoulli per chiedergli delucidazioni sullo studio della funzione $y = (-1)^x$ e così si riapre la discussione sull'esistenza dei logaritmi dei numeri negativi. Più precisamente Eulero, non riuscendo a disegnare il grafico di $y = (-1)^x$ perchè la funzione assume valori positivi, negativi e immaginari, ipotizza che $y = (-1)^x$ non sia rappresentabile da una curva continua.

*Mi sono per caso imbattuto in questa equazione $y = (-1)^x$ e mi è sembrato difficile tracciarne la figura in quanto y è ora positivo, ora negativo, ora immaginario; mi sembra che non sia possibile tradurla in una linea continua ma con una serie infinita di punti posta a distanza = 1 da ambo le parti dell'asse che tuttavia, messi insieme, coincidono con l'asse.*²¹

Bernoulli risponde con la lettera del 9 gennaio 1728: dimostra, basandosi sul calcolo differenziale (esattamente come aveva fatto nella lettera del 25 maggio 1712 inviata a Leibniz), che $\log(n) = \log(-n)$. Dunque, se $y = (-1)^x$, allora $\log(y) = x \log(-1) = x \log(1) = 0$. In definitiva, poichè $\log y = 0$, si ha che $y = 1$.

Tu chiedi che cosa è $y = (-1)^x$. Ecco la mia risposta: sia

$$y = (-n)^x,$$

sarà

$$ly = xl(-n),$$

e dunque

$$\frac{dy}{y} = dxl(-n).$$

¹⁹G. Enestrom, *Sur les lettres de Leonard Euler à Jean I Bernoulli*, Bibliotheca Mathematica, Serie II, vol XI, 1897.

²⁰Peiretti.

²¹Rosso 2010, p. 275.

Tuttavia è

$$l(-n) = l(+n),$$

infatti, in generale

$$dl(-z) = \frac{-dz}{-z} = \frac{+dz}{+z} = dl(z), \text{ e da qui } l(-z) = l(z);$$

pertanto

$$\frac{dy}{y} = dxl(+n),$$

ed integrando

$$ly = xln,$$

da cui

$$y = n^x = (\text{quando } n = \pm 1) 1^x = 1$$

Dunque $y = 1$.²²

La risposta di Eulero del 10 dicembre 1728 è particolarmente interessante. Innanzitutto, osserva che la dimostrazione data da Bernoulli è sbagliata: due funzioni che differiscono per una costante hanno lo stesso differenziale, ma sono diverse. Questo errore non era stato notato quindici anni prima da Leibniz. Inoltre, il matematico di Basilea afferma di avere sia prove a favore che contrarie alla tesi di Bernoulli. Supponendo $\log(x^2) = z$, si ha che $\frac{1}{2}z = \log(\sqrt{x^2})$; poichè $\sqrt{x^2} = \pm x$, segue che $\frac{1}{2}z$ è uguale sia $\log(+x)$ che a $\log(-x)$. Inoltre, Eulero afferma, senza darne spiegazioni, che se si accetta l'uguaglianza tra $\log(+x)$ e $\log(-x)$, bisogna riconoscere che un numero ha infiniti logaritmi.

Contro la tesi bernoulliana, Eulero riporta due argomenti: il primo è che se fosse $\log(x) = \log(-x)$ allora si avrebbe $x = -x$ e $\sqrt{-1} = 1$, il che è assurdo. Per Eulero, quindi, l'uguaglianza di due logaritmi equivale all'uguaglianza tra gli argomenti dei logaritmi. Per il secondo argomento, si serve di un risultato che lo stesso Bernoulli aveva pubblicato nella memoria *Solution d'un probleme concernant le calcul intégral, avec quelques abregès par report à ce calcul* del 1702. In tale memoria, Bernoulli aveva affrontato lo studio dell'integrazione di funzioni razionali fratte $\frac{P(z)}{Q(z)}$, nei casi in cui non sia possibile proporre una decomposizione algebrica del denominatore con fattori reali di primo grado, cioè del tipo $Q(z) = (z - a)(z - b) \dots$. Rientra in quest'ambito l'integrazione del differenziale $\frac{cdz}{z^2+a^2}$, con c costante.

Per l'integrazione, Bernoulli aveva proposto di eseguire il seguente cambio di variabile:

$$z = \frac{(t+1)a\sqrt{-1}}{(t-1)}.$$

²²Rosso 2010, pp. 275-276.

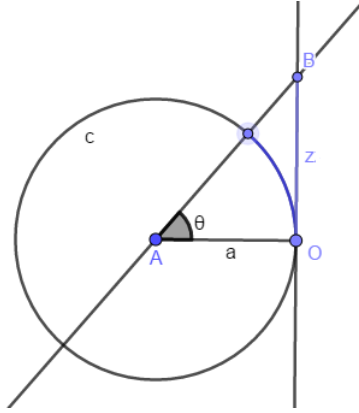


Figura 2.10: Arco di circonferenza s di una circonferenza di raggio a .

Quindi, si ha:

$$dz = \frac{a\sqrt{-1}(t-1) - (t+1)a\sqrt{-1}}{(t-1)^2} dt = \frac{-2a\sqrt{-1}}{(t-1)^2} dt;$$

$$\begin{aligned} \frac{cdz}{z^2 + a^2} &= \frac{c}{\left(\frac{(t+1)a\sqrt{-1}}{(t-1)}\right)^2 + a^2} \cdot \frac{-2a\sqrt{-1}}{(t-1)^2} dt = \frac{c(t-1)^2}{(t^2 + 2t + 1)(-a^2) + a^2(t^2 - 2t + 1)} \cdot \frac{-2a\sqrt{-1}}{(t-1)^2} dt = \\ &= \frac{-2ac\sqrt{-1}}{-a^2(t^2 + 2t + 1 - t^2 + 2t - 1)} = \frac{2ac\sqrt{-1}}{4ta^2} = \frac{c\sqrt{-1}}{2at} = \frac{-cdt}{2at\sqrt{-1}}. \end{aligned}$$

Pur osservando che il primo differenziale è legato alla rettificazione di un arco di cerchio ed il secondo ai logaritmi, Bernoulli non ha proceduto all'integrazione effettiva. Ha ricavato, invece, la seguente formula

$$\frac{a^2}{4\sqrt{-1}} \log \left(\frac{x + iy}{x - iy} \right) \quad (2.1)$$

per esprimere l'area del settore circolare compreso tra l'asse x e il punto $P = (x, y)$ di una circonferenza di raggio a e centro nell'origine.

Se si procede, invece, con l'integrazione si può trovare che la proporzione fra la lunghezza c di una qualsiasi circonferenza e la lunghezza d del proprio diametro è espressa da $c : d = \log(-1) : \sqrt{-1}$, ovvero $\pi = \log(-1) : \sqrt{-1}$.

Infatti, se s è la lunghezza dell'arco di circonferenza di raggio a della figura 3.4 e z è la misura del segmento OB , si ha: $\theta = \frac{s}{a}$, $\tan\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{z}{a}$, $s = a \arctan\left(\frac{z}{a}\right)$ e

$$ds = \frac{a}{1 + (z/a)^2} \cdot \frac{1}{a} dz = \frac{a^2}{z^2 + a^2} dz.$$

Quest'ultimo differenziale è del tipo analizzato sopra, con $c = a^2$, quindi, con il cambio di variabile, diventa

$$\frac{-a^2}{2at\sqrt{-1}}dt = \frac{a\sqrt{-1}}{2t}dt.$$

Inoltre, ponendo $y = \frac{z}{a}$, risulta

$$\int_0^{+\infty} \frac{a^2}{a^2 + z^2} dz = \int_0^{+\infty} \frac{dz}{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2} = a \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1 + y^2} = a \frac{\pi}{2}.$$

Pertanto, si ha:

$$a \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{a^2}{a^2 + z^2} dz = \frac{a\sqrt{-1}}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{t} dt = \frac{a\sqrt{-1}}{2} (\log(+1) - \log(-1)) = \frac{a \log(-1)}{2 \sqrt{-1}}.$$

In questo modo si è ricavata la cosiddetta *proporzione bernoulliana*:

$$\pi = \frac{\log(-1)}{\sqrt{-1}}$$

che, come vedremo nei paragrafi successivi, fu ampiamente studiata dai matematici italiani della seconda metà del Settecento.

Eulero si è servito della formula 2.1 per negare l'uguaglianza $\log(x) = \log(-x)$. Infatti per $x = 0$, si ricava che

$$\text{area}(\text{quadrante}) = \frac{a^2}{4\sqrt{-1}} \log(-1).$$

Se si assume $\log(x) = \log(-x)$, l'uguaglianza precedente diventa:

$$\text{area}(\text{quadrante}) = \frac{a^2}{4\sqrt{-1}} \log(1) = 0$$

il che è impossibile, poichè l'area del quadrante è finita e diversa da zero. Di seguito è riportata la lettera di Eulero del 10 dicembre 1728.

Quanto mi hai da poco scritto sulle potenze di quantità negative risolve certamente il dubbio proposto e mi sono nel frattempo imbattuto in qualche argomento con cui mi sembra di poter dimostrare che $lx = l - x$. Mi si sono presentati anche argomenti che mi portano a concludere l'opposto e non so assolutamente quale seguire. Oltre agli argomenti che tu hai proposto vi è forse anche questo.

Sia $lxx = z$, sarà

$$\frac{1}{2}z = l\sqrt{xx}$$

ma \sqrt{xx} è sia $-x$ che $+x$ per cui $\frac{1}{2}z$ è lx e $l - x$. Si potrebbe obiettare che xx ha due logaritmi, ma chi lo volesse sostenere dovrebbe concludere che ve ne sono infiniti. La

motivazione però che i differenziali lx ed $l - x$ sono uguali, mi sembra dimostri meno l'uguaglianza di lx e $l - x$ dal momento che dall'uguaglianza di due differenziali non è permesso concludere l'uguaglianza degli integrali, come $a + x$ non è uguale ad x , benché i loro differenziali lo siano. Questo caso è simile al nostro dove infatti $l - x = lx + l - 1$ che mostra come non sia lecito concludere che lx ed $l - x$ sono uguali se non dopo aver dimostrato che $l - 1$ è 0.

Vi sono poi questi argomenti contrari che portano all'assurdo. Se infatti fosse $lx = l - x$ si avrebbe $x = -x$ e $\sqrt{-1} = 1$. Si potrebbe obiettare, ma non so con quale esito, che dall'uguaglianza dei logaritmi non si può passare a quella dei numeri. Ed ancora valgono i miei dubbi sulla curva $y = (-1)^x$. Ammesso allora che non si ha $x = -x$ anche se $lx = l - x$, temo però che un simile principio applicato al calcolo tragga in errore. Sia infatti a il raggio di un cerchio, y un seno, x un coseno; grazie al tuo metodo che riduce la quadratura del cerchio a logaritmi, l'area del settore è

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1} \log \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}}$$

e posto $x = 0$ si otterrà che il quadrante di un cerchio è

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}l - 1}.$$

Se fosse $l - 1 = 0$, dovrebbe anche essere $\sqrt{-1} = 0$. Non ho alcuna idea di come liberarmi da queste contraddizioni per cui, illustre signore, vorrei sapere che cosa ne pensi tu.²³

Nella risposta del 18 aprile 1729, Bernoulli afferma che il giovane Eulero confonde le quantità $\log(-x)$ e $\log(-x)$, a suo avviso diverse, perchè, per esempio, $\log(-x^{\frac{1}{2}})$ è reale e $\log(-x^{\frac{1}{2}})$ è immaginario. Per Bernoulli, la giusta quantità da considerare è $\log(-x)$: con questo ragionamento spera di eliminare i dubbi di Eulero.

Per quanto riguarda l'obiezione relativa al legame tra area di un settore circolare e logaritmi, Bernoulli risponde che all'espressione $\frac{a^2}{4\sqrt{-1}} \log \left(\frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}} \right)$ bisogna aggiungere la quantità nQ , con $n \in \mathbb{Z}$ e Q area del quadrante.

[...] Ho già in parte risposto nelle lettere consegnate a mio figlio dove gli ho mostrato che i vostri dubbi (infatti anche lui ha simili dubbi sui logaritmi immaginari) sorgono soltanto per un concetto inadatto alla natura dei logaritmi di quantità negative e ho detto che, nel porre (e davvero correttamente)

$$lx = l - x,$$

bisogna intendere

$$l - (x)$$

²³Rosso 2010, pp. 277-278.

e non

$$l(-x),$$

mentre voi confondete entrambe le cose che sono molto diverse tra di loro perchè, ad esempio,

$$l - (x)^{\frac{1}{2}}$$

è reale ma

$$l(-x^{\frac{1}{2}})$$

è immaginario. Tenendo ben presente questo, tutte le vostre difficoltà e singolari deduzioni svaniscono. Per quanto riguarda la piccola obiezione mossa a partire dall'area di un settore circolare espressa tramite i logaritmi, laddove si ponga il seno = y ed il coseno = x si trova con il mio metodo di riduzione ai logaritmi della quadratura del cerchio che l'area del settore è

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}} \log \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}},$$

e come ho già similmente ricordato a mio figlio, nel caso in cui

$$x = 0$$

quest'area veramente è soltanto = 0 mentre dovrebbe essere uguale al quadrante; da ciò non si deve concludere altro se non che occorre aggiungere all'espressione

$$\frac{aa}{4\sqrt{-1}} l \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}}$$

la quantità costante nQ , cioè un multiplo del quadrante perchè è evidente che il seno ed il coseno si scambiano tra loro e non in un modo solo, ma in infiniti modi può succedere che

$$x = 0 \text{ ed } y = 0,$$

o viceversa

$$x = 1 \text{ ed } y = 0;$$

e succede che, preso questo settore pari a $1Q$ o $2Q$ o $3Q$ ecc. o anche = $0Q$, non vi sia pertanto alcun motivo per cui

$$\frac{aa}{4\sqrt{-1}} l \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}}$$

possa esprimere uno piuttosto che l'altro; preferisco dunque dire che l'area del settore in generale va presa come

$$\frac{aa}{4\sqrt{-1}} l \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}} + nQ,$$

cosicchè ogni volta in cui il primo termine parte da zero ciò che manca possa essere rimpiazzato da nQ , cioè da un multiplo ad un sottomultiplo del quadrante a seconda delle necessità; tu sempre troverai differenziando il differenziale del tuo settore che è

$$\frac{aadx}{2\sqrt{aa - xx}},$$

come deve. Nel caso del semiquadrante, dove

$$x = y = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

avrà ancora che il primo termine è = 0 ma, se preferisci,

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}}l\sqrt{-1},$$

per cui occorre aggiungere $\frac{1}{2}Q$; ma un uso migliore di queste espressioni immaginarie si ottiene da sviluppi in serie nei quali senza dubbio i termini immaginari si elidono. Basta così.²⁴

Lo scambio epistolare tra i due matematici svizzeri sui logaritmi di numeri negativi e immaginari si conclude con la lettera di Eulero del 16 maggio 1729. Eulero afferma di non aver compreso la distinzione tra $\log(-x)$ e $\log -(x)$ e di non condividere l'aggiunta di nQ alla formula bernoulliana. Tuttavia, per evitare di cadere in paralogismi, preferisce non continuare la discussione.

*Ciò che scrivi in principio sui logaritmi immaginari, non mi è del tutto chiaro, soprattutto non capisco la differenza che fai tra $l-(x)$ et $l(-x)$, nè quale calcolo occorra per giungere ad uno o all'altro di questi logaritmi. Inoltre credeva che la costante di integrazione fosse già inserita nell'espressione del settore circolare $\frac{aa}{4\sqrt{-1}}l\frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$ dal momento che per $x = 0$ si ha un'area nulla. Quindi, se bastasse solo aggiungere nQ , cosa che non capisco ancora, mi sembra però che n non possa indicare alcunchè, se non è multiplo di quattro. Se infatti n potesse essere $\frac{1}{2}$, potrebbe essere anche $\frac{1}{4}$ e rappresentare ogni numero per cui sarebbe superfluo impiegare anche $\frac{aa}{4\sqrt{-1}}l\frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$ per esprimere il settore dal momento che il solo nQ sarebbe sufficiente a rappresentare qualunque settore. Sia come sia, mi sembra bene fermarci per non cadere, tu con le tue idee, noi con le nostre, in qualche paralogismo.*²⁵

2.4 La soluzione di Eulero

Il carteggio tra Bernoulli e Eulero non ha portato a nulla di concreto, tuttavia quest'ultimo, per la prima volta, ha introdotto la possibilità dell'esistenza di infiniti logaritmi

²⁴Rosso 2010, pp. 279-280.

²⁵Rosso 2010, p. 280.

e ha messo in chiaro che la questione dei logaritmi di quantità negative sarebbe stata risolta una volta noto il logaritmo di -1.

L'argomento è stato riaperto da Eulero alcuni anni dopo. In seguito alla pubblicazione del carteggio tra Leibniz e Bernoulli,²⁶ Eulero dà alla stampa una memoria nel 1749²⁷ in cui risolve le contraddizioni algebriche nelle quali erano incorsi, anni prima, i due matematici. Tuttavia, la dimostrazione del risultato principale contenuto in essa è stata riportata da Eulero in un'altra memoria intitolata *Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires* e pubblicata soltanto postuma nel 1862. E' possibile che la mancata pubblicazione di quest'ultima sia legata a dei ripensamenti che Eulero ha avuto dopo una corrispondenza con D'Alembert, che si trovava in una posizione vicina a quella di Bernoulli.²⁸

Un estratto importante dell'opera postuma di Eulero è il seguente.

Affermo dunque che, benchè sia determinato il numero in cui il logaritmo è =1, ogni numero ha un'infinità di logaritmi tutti immaginari fuorchè uno, se il numero è positivo; se però il numero è negativo od immaginario, tutti i logaritmi saranno parimenti immaginari. Come conseguenza, il logaritmo dell'unità non sarà solo 0 ma ci saranno ancora una infinità di quantità immaginarie, ciascuna delle quali rappresenta il logaritmo dell'unità bene quanto 0. Siano dunque

$$0, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \varsigma, \eta, \vartheta, \text{ ecc.}$$

tutti i logaritmi dell'unità e, dal momento che il logaritmo della radice quadrata è la metà del logaritmo della potenza, poichè $\sqrt{1}$ vale tanto quanto +1 quanto -1, i logaritmi del primo valore +1 saranno

$$0, \frac{1}{2}\beta, \frac{1}{2}\delta, \frac{1}{2}\varsigma, \frac{1}{2}\vartheta, \text{ ecc.}$$

ed i logaritmi dell'altro valore -1 saranno:

$$\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\gamma, \frac{1}{2}\epsilon, \frac{1}{2}\eta, \text{ etc.}$$

[...] e questa considerazione ha già eliminato la maggior parte delle difficoltà che ci hanno ostacolato in precedenza.[...] Per dimostrare questa pluralità infinita di logaritmi corrispondenti ad ogni numero non occorre altro che considerare lo stretto rapporto esistente tra i logaritmi e gli archi di circonferenza: è noto infatti che gli archi di circonferenza si

²⁶Virorum Celeberr. Got. Gul. Leibnitii et Iohan. Bernoulli commercium philosophicum et mathematicum, Lausannae et Genevae, M.M. Bousquet, 1745.

²⁷L. Euler, De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires, Mém. Acad. des Sciences de Berlin, 5, pp. 139-179; L. Euleri, Opera Omnia, series I, vol. XVII, pp. 195-232.

²⁸Rosso 2010, p. 303.

possano esprimere tramite logaritmi immaginari e, viceversa, i logaritmi sono esprimibili tramite archi immaginari di circonferenza. Dunque, siccome il seno od il coseno corrispondono ai numeri e gli archi ai logaritmi, così come ad uno stesso seno corrisponde un'infinità di archi distinti, allo stesso modo ad uno stesso numero deve corrispondere un'infinità di logaritmi distinti. Noi abbiamo una miglior conoscenza della circonferenza che non della curva logaritmica e pertanto sarà l'esame della circonferenza piuttosto che della curva logaritmica a condurci verso una più completa conoscenza dei logaritmi; inoltre, possiamo determinare tutti gli archi che corrispondono ad un valore del seno e del coseno e anche se questi archi diventano immaginari nel passaggio ai logaritmi, non ci abbandoneranno e ci convinceranno circa l'infinità dei logaritmi; ci consentiranno di conoscere le espressioni ed il tipo di non-realtà entro cui sono compresi; ciò è tutto quanto uno possa desiderare per la comprensione di una quantità immaginaria.²⁹

L'analogia che guida Eulero è, dunque, il legame tra archi di circonferenze e logaritmi, la stessa utilizzata da Bernoulli nel 1702. In sostanza per Eulero, poichè il seno e il coseno dell'angolo sotteso ad un arco di circonferenza individuano un'infinità di archi, lo stesso deve accadere per i logaritmi. Questi concetti rappresentano il cuore della memoria di Eulero del 1749.

Bisogna anzitutto riconoscere che se il concetto che i Sigg. Leibnitz e Bernoulli, come tutti i matematici sinora, hanno legato al termine logaritmo fosse del tutto corretto, sarebbe assolutamente impossibile liberare la teoria dei logaritmi dalle contraddizioni che mi accingo ad esporre. Come è possibile che il concetto di logaritmo, tratto dalla sua origine di cui abbiamo una perfetta conoscenza, sia imperfetto? Non sembra che manchi nulla alla correttezza di tale concetto, quando si dice che il logaritmo di un numero assegnato è l'esponente della potenza di un certo numero preso a piacere che è uguale al numero assegnato. Questo è senz'altro vero, ma lo si abbina ad una circostanza che non gli compete affatto: cioè a dire che, quasi senza accorgersene si fa solitamente l'ipotesi che a ciascun numero non possa corrispondere che un solo logaritmo; non appena si rifletta un poco, si vedrà che tutte le difficoltà e le contraddizioni in cui la teoria dei logaritmi pareva bloccata sussistono solo finchè si suppone ad ogni numero non corrisponda che un logaritmo soltanto. Affermo dunque, per far sparire tutte queste difficoltà e contraddizioni, che in forza della stessa definizione, a ciascun numero corrisponde un'infinità di logaritmi, come dimostrerò nel teorema seguente.

Teorema. Esiste una infinità di logaritmi che corrispondono ad ogni numero assegnato: in altre parole, se y indica il logaritmo del numero x , dico che y racchiude un'infinità di valori diversi.

Dimostrazione. Mi limiterò qui ai logaritmi iperbolici, dal momento che è noto come i logaritmi di tutte le altre specie stanno ai primi in un rapporto costante; così, quando si indica con y il logaritmo iperbolico del numero x , il logaritmo tabulare dello stesso numero sarà $= 0.4342944819y$. Ora, il fondamento dei logaritmi iperbolici è che se ω

²⁹Eulero 1862, pp. 277-278 (originale). Rosso 2010, pp. 303-306 (traduzione).

ha il significato di numero infinitamente piccolo, il logaritmo del numero $1 + \omega$ sarà $= \omega$ ovvero $l(1 + \omega) = \omega$. Da questo segue che $l(1 + \omega)^2 = 2\omega$; $l(1 + \omega)^3 = 3\omega$ e, in generale $l(1 + \omega)^n = n\omega$. Poichè però ω è un numero infinitamente piccolo, è evidente che il numero $(1 + \omega)$ non potrà uguagliare un certo numero x assegnato, a meno che l'esponente n non sia un numero infinito. Sia dunque n un numero infinitamente grande e, posto $x = (1 + \omega)^n$, il logaritmo di x che è stato chiamato $= y$, sarà $y = n\omega$. Dunque, esprimendo con x , la prima formula fornisce $1 + \omega = x^{\frac{1}{n}}$ ed $\omega = x^{\frac{1}{n}} - 1$ valore che, sostituito al posto di ω nell'altra formula, darà $y = nx^{\frac{1}{n}} - n = lx$. E' allora chiaro che il valore della formula $y = nx^{\frac{1}{n}} - n$ approssimerà tanto meglio il logaritmo di x quanto più il numero n sarà preso grande; e se si prende per n un numero infinito, questa formula darà il vero valore del logaritmo di x . Ora siccome è vero che $x^{\frac{1}{2}}$ ha due valori diversi, $x^{\frac{1}{3}}$ ne ha tre, $x^{\frac{1}{4}}$ quattro e così via, sarà altrettanto certo che $x^{\frac{1}{n}}$ deve avere un'infinità di valori diversi per lx , visto che n è un numero infinito. Di conseguenza, questa infinità di valori distinti di $x^{\frac{1}{n}}$ darà luogo ad un'infinità di valori distinti per lx per cui il numero x deve possedere un'infinità di logaritmi. C.D.D.³⁰

In altre parole, il ragionamento di Eulero è che se ω è un numero "infinitamente piccolo", allora $\log(1 + \omega)$ può essere approssimato con ω . Da qui segue che, $\log(1 + \omega)^n$ è identificato con $n\omega$. Sia $x := (1 + \omega)^n$ con $n \gg 1$ e $y := \log(x) = n\omega$. Si può ricavare che $\omega = x^{1/n} - 1$ per cui $y = n(x^{1/n} - 1) = nx^{1/n} - n$ che approssimerà tanto di più il logaritmo di x quanto più n è grande. Inoltre, poichè $x^{1/n}$ ha infiniti valori diversi per n infinitamente grande, $\log(x)$ dovrà avere infiniti valori.

Eulero prosegue il discorso esponendo una strategia per trovare tutti i logaritmi di un assegnato numero reale positivo, reale negativo o immaginario.

- Se a è reale positivo, bisogna consultare le tavole logaritmiche per trovare il suo logaritmo reale A . Inoltre, poichè $a = 1 \cdot a$, si ha che $\log(a) = \log(1) + A$. Quindi, il problema si riduce a trovare i logaritmi di $+1$. Posto $x = 1$ nel teorema dimostrato in precedenza, si ha

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - 1 = 0 \text{ con } n \gg 1.$$

Poichè i fattori del binomio $p^n - q^n$ si trovano risolvendo in p l'equazione

$$p^2 - 2pq \cos\left(\frac{2\lambda\pi}{n}\right) + q^2 = 0$$

dove λ assume valori interi, si ha

$$p = q \left[\cos\left(\frac{2\lambda\pi}{n}\right) + \sqrt{-1} \sin\left(\frac{2\lambda\pi}{n}\right) \right].$$

³⁰Eulero 1751, pp. 156-157 (originale). Rosso 2010, pp. 307-309 (traduzione).

Posto $p = 1 + \frac{y}{n}$ e $q = 1$ si ottiene, per un generico n :

$$1 + \frac{y}{n} = \cos\left(\frac{2\lambda\pi}{n}\right) + \sqrt{-1} \sin\left(\frac{2\lambda\pi}{n}\right).$$

Essendo n grande a piacere, $\cos\left(\frac{2\lambda\pi}{n}\right)$ e $\sin\left(\frac{2\lambda\pi}{n}\right)$ possono essere approssimati rispettivamente con 1 e $\frac{2\lambda\pi}{n}$, pertanto l'equazione precedente diventa

$$1 + \frac{y}{n} = 1 + \sqrt{-1} \frac{2\lambda\pi}{n},$$

da cui si ottiene

$$y = \log(1) = 2\lambda\pi\sqrt{-1}.$$

In definitiva $\log(a) = A + 2\lambda\pi\sqrt{-1}$, cioè a ha un logaritmo reale (che si ottiene per $\lambda = 0$) e infiniti logaritmi immaginari.

- Sia $-a$ un numero negativo. Esso può essere scritto come $-1 \cdot a$, quindi il problema si riduce a trovare i logaritmi di -1 , che Eulero indica con y . Con lo stesso procedimento di prima, risolve l'equazione

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n + 1 = 0.$$

Poichè i fattori di $p^n + q^n$ sono le radici dell'equazione

$$p^2 - 2pq \cos\left(\frac{(2\lambda - 1)\pi}{n}\right) + q^2 = 0,$$

con $\lambda \in \mathbb{Z}$. In modo analogo al caso precedente si ottiene

$$y = (2\lambda - 1) \sqrt{-1}\pi.$$

In definitiva, $\log(-a) = A + (2\lambda - 1) \sqrt{-1}\pi$ (A indica l'unico logaritmo reale di a), che non è mai reale. In questo modo Eulero dà ragione a Leibiniz nella controversia contro Bernoulli, risolvendo i paradossi algebrici che erano sorti in quel carteggio.

- Sia $a + b\sqrt{-1}$ un numero complesso e $c := \sqrt{a^2 + b^2}$. Eulero introduce un angolo φ tale che $\cos \varphi = \frac{a}{c}$ e $\sin \varphi = \frac{b}{c}$. Di conseguenza, $a + b\sqrt{-1}$ può essere riscritto come $c(\cos(\varphi) + \sqrt{-1} \sin(\varphi))$. Usando gli sviluppi in serie di Mac Laurin di $\sin \varphi$ e $\cos \varphi$, Eulero dimostra che

$$x := \cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi = \left(1 + \frac{\sqrt{-1}\varphi}{n}\right)^n.$$

Posto $p = 1 + \frac{y}{n}$ e $q = \frac{1+\sqrt{-1}\varphi}{n}$, il problema si riduce a risolvere rispetto a y l'equazione:

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - x = 0,$$

che è del tipo $p^n - q^n = 0$. La soluzione è

$$1 + \frac{y}{n} = \left(1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right) \left(\cos \frac{2\lambda\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2\lambda\pi}{n}\right)$$

da cui segue, al primo ordine in n ,

$$1 + \frac{y}{n} = 1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n} + \frac{2\lambda\pi}{n},$$

cioè $y = \sqrt{-1}(\varphi + 2\lambda\pi)$. In definitiva, posto C il logaritmo reale di c , si ha

$$\log(a + b\sqrt{-1}) = C + \sqrt{-1}(\varphi + 2\lambda\pi).$$

Riportiamo di seguito la traduzione del testo originale relativa al problema di determinare i logaritmi di un numero negativo.

Problema II.

Determinare tutti i logaritmi corrispondenti ad un numero negativo qualsiasi $-a$.

SOLUZIONE.

Siccome $-a = -1 \cdot a$, si avrà $l - a = la + l - 1$ e, preso il logaritmo reale di a come la , tutti i logaritmi del numero negativo $-a$ si troveranno cercando tutti i logaritmi di -1 . Poichè però si è visto in generale che, chiamato y come logaritmo di un x , si ha $y = nx^{\frac{1}{n}} - n$, ne segue che $1 + \frac{y}{n} = x^{\frac{1}{n}}$ e dunque $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - x = 0$. Pertanto y esprimerà tutti i logaritmi di -1 se si pone $x = -1$ cosicchè tutti i logaritmi di -1 saranno le radici dell'equazione $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n + 1 = 0$, prendendo il numero n infinitamente grande.

E' noto che tutte le radici dell'equazione generale $p^n + q^n = 0$ si ottengono dalla risoluzione della formula $p^2 - 2pq \cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{n} + q^2 = 0$, in cui λ assume successivamente tutti i valori interi, positivi e negativi cosicchè si avrà $p = q \left(\cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{(2\lambda-1)\pi}{n}\right)$. Pertanto, le radici dell'equazione proposta:

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n + 1 = 0,$$

sono abbracciate tutte dalla formula generale

$$1 + \frac{y}{n} = \cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{(2\lambda-1)\pi}{n},$$

che diventa, siccome $n = \infty$,

$$y = \pm (2\lambda - 1) \pi \sqrt{-1}.$$

Di conseguenza, inserendo al posto di λ successivamente tutti i valori che gli competono, si otterranno tutti i logaritmi di -1 :

$$\pm\pi\sqrt{-1}; \pm 3\pi\sqrt{-1}; \pm 5\pi\sqrt{-1}; \pm 7\pi\sqrt{-1}; \pm 9\pi\sqrt{-1}; \text{ecc.}$$

il cui numero è infinito. C.D.T.

E' allora chiaro che tutti i logaritmi di un numero negativo qualsiasi sono immaginari e che non esiste alcun numero negativo con logaritmo reale. Aveva dunque ragione il sig. Leibniz a sostenere che i logaritmi dei numeri immaginari fossero immaginari. Tuttavia, poichè anche i numeri positivi posseggono una infinità di logaritmi immaginari, tutte le obiezioni del sig. Bernoulli contro questa opinione perdono vigore. Infatti, siccome è $l-1 = \pm (2\lambda - 1) \pi \sqrt{-1}$, il logaritmo del suo quadrato sarà $l(-1)^2 = \pm 2(2\lambda - 1) \pi \sqrt{-1}$, espressione compresa tra i logaritmi di $+1$, cosicchè resta vero che $2l - 1 = l + 1$ benchè non si trovi alcuno dei logaritmi di -1 tra quelli di $+1$. Sia A il logaritmo reale del numero positivo $+a$, indichiamo con p un generico numero pari e con q un generico numero dispari: poichè in generale:

$$l + 1 = \pm p\pi\sqrt{-1} \text{ e } l - 1 = \pm q\pi\sqrt{-1},$$

$$\text{e } l + a = A \pm p\pi\sqrt{-1} \text{ e } l - a = A \pm q\pi\sqrt{-1},$$

si vede che $l(-a)^2 = 2l - a = 2A + 2q\pi\sqrt{-1}$. Siccome $2q$ è $= p$ e $2A$ è il logaritmo reale di a^2 , si vede che $2A \pm p\pi\sqrt{-1}$ è la formula generale per i logaritmi di a^2 ; così è $l(-a)^2 = la^2$ o anche $2l - a = 2l + a$, benchè non si abbia $l - a = l + a$: conclusione che sarebbe senza dubbio contraddittoria se i numeri $+a$ e $-a$ non avessero avuto che un solo logaritmo; in quel caso sarebbe corretto concludere che $l - a = l + a$ quando $2l - a = 2l + a$. Se però siamo d'accordo che sia $-a$ che $+a$ hanno un'infinità di logaritmi questa conseguenza necessaria in precedenza, non è più corretta; infatti, perchè sia $2l - a = 2l + a$ basta che il doppio dei logaritmi di $-a$ si ritrovino tra i logaritmi di $+aa$, ciò che si può ottenere, come abbiamo visto, senza che ci sia l'uguaglianza di un qualche logaritmo di $-a$ con qualche logaritmo di $+a$.³¹

2.5 La disputa in Italia

La teoria di Eulero, nonostante abbia risolto le questioni algebriche, non è riuscita a confutare esplicitamente la costruzione geometrica della curva logaritmica legata alle aree

³¹Rosso 2010, pp. 313-314.

iperboliche di Bernoulli,³² che è continuata ad essere considerata da diversi matematici una prova inequivocabile della realtà dei logaritmi dei numeri negativi. D'altra parte, la dimostrazione del teorema di Eulero è legata ai concetti di infinito e infinitesimi, che all'epoca erano piuttosto oscuri. Infatti, si tratta di una dimostrazione poco rigorosa, poggiata sull'intuizione e con più punti facilmente attaccabili dalla critica. Riportiamo il giudizio di Gregorio Fontana (1735-1803), che ha accettato i risultati euleriani, ma ha proposto dimostrazioni diverse.

*Siccome però un tal teorema, veramente originale, e degno della penetrazione di quel geometra, viene da lui dimostrato...con un metodo assai lungo e prolisso, il quale inoltre, procedendo per esponenti infiniti e infinitesimi lascia perciò nello spirito del lettore non so qual nebbia e dubbietà che dà luogo a mille scrupoli ed equivoci non così facili a dileguarsi [...].*³³

Non bisogna stupirsi, dunque, che la discussione sulla natura dei logaritmi non si sia chiusa con la memoria di Eulero. Inoltre, occorre sempre ricordare che nel XVIII secolo i numeri complessi non erano ancora stati assimilati: questo ha rappresentato un ulteriore ostacolo per la diffusione del pensiero euleriano.

Mentre in Inghilterra e in Francia non è stato elaborato, in quel periodo, nessuno scritto particolare sulla questione dei logaritmi, in Germania, in un primo tempo i risultati di Eulero sono stati completamente accettati, mentre verso la fine del Settecento sono stati messi in dubbio da W.J.G. Karsten.³⁴

In Italia, invece, la tesi e la dimostrazione di Eulero sono state particolarmente discusse.

*E non dovrà destare meraviglia che matematici nostri anche illustri potessero sostenere tesi errate: tesi esatte venivano presentate da EULERO stesso con ragionamenti non persuasivi e con lo stesso tipo di errore logico che si ritrova nei suoi contraddittori, i quali non potevano per questo sempre dirsi soddisfatti delle tesi e delle ragioni adottate dal grande matematico.*³⁵

In Italia, la discussione ha avuto origine nel 1765 con la pubblicazione delle *Institutiones Analyticae*³⁶ di Vincenzo Riccati e Girolamo Saladini, che sono state recensite, tra gli altri, da Gioacchino Pessuti.³⁷

Pessuti, presentando le formule di Riccati, ha ricordato la proporzione bernoulliana.

E' ben nota l'analogia che primo scoperse Giovanni Bernoulli tra gli archi del circolo e i logaritmi immaginari, dimostrando tra le altre cose che il diametro sta alla circonferenza

³²La dimostrazione è contenuta nella lettera di Bernoulli a Leibniz dell'11 novembre 1712.

³³Fontana 1782, p. 183.

³⁴Agostini 1923, p. 182.

³⁵Agostini 1923, p. 184.

³⁶*Institutiones Analyticae* a Vincentio Riccato Societatis Jesu et Jeronymo Saladino monacho Caelestino collectae, Bononiae, ex typographia Sancti Thomae Aquinatis, 1765-1767, t.2, voll.3.

³⁷Nuovo Giornale de' Letterati d'Italia (Modena), Tomo I (1773), pp. 30-72; Tomo II (1773), pp. 219-278; Tomo III (1773), pp.78-123.

:: $\sqrt{-1} \log(-1)$. Da questa analogia ne viene che molte formule che esigono la quadratura del circolo dipendono in molti casi da quella dell'iperbola ossia da' logaritmi. Tale si è appunto la formula generale di sopra riferita e questa perciò ha dato occasione al nostro autore di entrare più minutamente nell'esame di quest'analogia e di portarla co' suoi ritrovamenti molto più innanzi.³⁸

Riccati ha risposto al commento di Pessuti tramite una lettera (che è stata pubblicata nel 1776, dopo la morte di Vincenzo Riccati, dal fratello Giordano) nella quale emerge che per Riccati i numeri immaginari e i numeri reali costituiscono due grandezze del tutto eterogenee tra loro e completamente separate: in particolare, lo zero reale non può essere considerato uguale a quello immaginario.³⁹ In questo modo, la discussione sulla natura dello zero immaginario si lega a quella sulla proporzione bernoulliana e di conseguenza a quella sui logaritmi dei numeri negativi. Infatti, il ritenere vera la proporzione bernoulliana permette di accettare che tra i logaritmi dei numeri negativi ce ne siano alcuni immaginari, poichè il rapporto tra la circonferenza e il diametro è un numero reale.

Tra i sostenitori dell'uguaglianza tra zero reale e immaginario troviamo Giordano Riccati che, a riguardo, ha avuto fitte corrispondenze con Petronio Caldani, Gianfrancesco Malfatti, Giuseppe Calandrelli e Giuseppe Contarelli. La corrispondenza con Caldani ha avuto inizio nella primavera del 1778, esaminando il rapporto $\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}$ con a e z numeri reali.

Caldani scrive: *Io primieramente osservo che posta $z = 0$, la quantità... diventa $\frac{a+0\sqrt{-1}}{a-0\sqrt{-1}}$ onde affinché riuscisse eguale ad uno sarebbe necessario che fosse $a \pm 0\sqrt{-1} = a$, ovvero $0 = 0\sqrt{-1}$; $0 : 0\sqrt{-1} :: a : a\sqrt{-1}$ dunque se fosse $0 = 0\sqrt{-1}$ dovrebbe essere $a = a\sqrt{-1}$; ma questo è impossibile, dunque è impossibile ancora $0 = 0\sqrt{-1}$. Questa conseguenza si conferma con altri esempi. Siane uno semplicissimo quello che somministra l'equazione $y = x\sqrt{-1}$ ove pongasi $x = 0$, potrò io mai inferire $y = 0$? No certamente, perchè ammetterei un punto reale nel luogo geometrico espresso da tal equazione: il qual punto giusta la natura di essa resta affatto escluso.*⁴⁰

Giordano Riccati ha cercato di convincere il matematico bolognese sull'uguaglianza tra 0 e $0\sqrt{-1}$ così:

*Sopra due punti principali si aggira la nostra controversia, cioè a dire sopra le formule $0 + a\sqrt{-1} = a\sqrt{-1}$, $0\sqrt{-1} = 0$. Intorno alla prima sembrami che non si debba disputare imperciocchè $0 + a\sqrt{-1}$ significa ch'io nulla aggiungo alla quantità immaginaria $a\sqrt{-1}$: ma se nulla ci aggiungo, non ho che la suddetta quantità: dunque $0 + a\sqrt{-1} = a\sqrt{-1}$. In riguardo alla seconda ella mi accorderà essere $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$ e perciò $\sqrt{-1} - \sqrt{-1} = 0$, ma $\sqrt{-1} - \sqrt{-1} = (1 - 1)\sqrt{-1}$; dunque $0\sqrt{-1} = 0$.*⁴¹

³⁸Nuovo Giornale de' Letterati d'Italia, p. 43.

³⁹Riccati V. 1776.

⁴⁰Giuntini 1984, p. 42.

⁴¹Minuta di Riccati a Caldani dell'11 luglio 1778. Giuntini 1984, p. 42.

La risposta di Caldani è stata la seguente:

L'autorità di V. S. Ill.ma... dovrebbe farmi tacere sulla nota controversia. Ma vorrei che l'autorità si accordasse colle dimostrazioni, accordo che io non ho saputo per anche trovare. Tanto l'equazione $0 + a\sqrt{-1} = a\sqrt{-1}$, quanto quella di $0 = 0\sqrt{-1}$ non so vederle bene. Dalla prima si deduce la seconda, la seconda si dimostra impossibile per analogia di $0 : 0\sqrt{-1} :: a : a\sqrt{-1}$; dunque anche la prima dee essere impossibile. Il dire che $0 + a\sqrt{-1}$ significa, che nulla non dee aggiungersi alla quantità immaginaria, e che però sia lo stesso che $a\sqrt{-1}$ temo che non sia una obiezione sicura. Il zero poi dà sempre l'origine reale di una quantità reale, nè la dichiara impossibile laddove l'immaginario $a\sqrt{-1}$ non può avere per se nessuna origine reale, onde altro è $0 + a\sqrt{-1}$ altro è $a\sqrt{-1}$... Ridurrò l'equazione $0 + a\sqrt{-1} = a\sqrt{-1}$ ad un assurdo anche più manifesto di quello che sia $0 = 0\sqrt{-1}$. Infatti si avrà $0 = a\sqrt{-1} - a\sqrt{-1} = (a - a)\sqrt{-1}$; dunque $\frac{0}{a-a} = \sqrt{-1} = \frac{0}{0}$ inoltre per alcuni, e tra questi il Sig. Eulero, vuolsi $\frac{0}{0} = 1$ dunque $1 = \sqrt{-1}$. Da tutti questi assurdi ci libereremo se si farà $a\sqrt{-1} - a\sqrt{-1} = 0\sqrt{-1}$, come richiede la natura della nota frazione e quella delle quantità immaginarie, che per quante aggiunte o sottrazioni soffrano, mai diventar non possono reali...⁴²

Si noti come Caldani abbia introdotto un'ulteriore complicazione alla discussione: la definizione del rapporto $\frac{0}{0}$. Anche questo rapporto fu oggetto di studi per tutto il Settecento. Ad esempio, ad esso è stato dedicato un articolo⁴³ di de l'Hopital (1661-1704) che rappresenta la base di una memoria⁴⁴ di Bernoulli del 1704. Tra i matematici italiani che si sono occupati della quantità $\frac{0}{0}$, oltre a Caldani e Giordano Riccati, bisogna citare Calandrelli, Malfatti e Fontana.

Con il finire del Settecento la polemica sui logaritmi si è spenta sia per lo scomparire dei più ferventi polemisti, sia per la migliore visione del campo complesso che si era andato formando, sia anche per l'apparire di buoni libri di testo come il grande trattato di LACROIX⁴⁵ (1797-9) e gli Elementi di Algebra di PIETRO PAOLI⁴⁶ (1794) nei quali la teoria dei logaritmi è esposta nel senso di EULERO e dedotta dalla nota formula

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.^{47}$$

Infatti, da quest'ultima segue facilmente che

$$\ln(-1) = i\pi.$$

⁴²Lettera di Caldani a Riccati del 29 luglio 1778. Giuntini 1984, pp. 42-43.

⁴³G. de l'Hopital, *Analyse des infiniment petits (pour l'intelligence des lignes courbes)*, Paris, chez Etienne Papillon, 1696, art. 163.

⁴⁴J. Bernoulli, *Perfectio regula sua edita in Libro Gall. << Analyse des infiniment petits >>*, Art. 163, pro determinando valore fractionis, cuius numerator et denominator certo casu evanescunt, Acta Eruditorum, Lipsiae, 1704; J. Bernoulli, *Opera Omnia*, T. I, pp. 401-405.

⁴⁵S.F. Lacroix, *Traité du calcul integral*, Tomo I, Parigi, J.B.Duprat Libraire pour les Mathématiques quai des Augustins, 1797.

⁴⁶P. Paoli, *Elementi di Algebra*, Torino, Stamperia Reale, 1794.

⁴⁷Agostini 1923, pp. 188-189.

Capitolo 3

Della proporzione bernoulliana fra il diametro, e la circonferenza del circolo e dei logaritmi

3.1 Introduzione all'opera

L'opera principale di Petronio Maria Caldani è *Della proporzione bernoulliana fra il diametro, e la circonferenza del circolo e dei logaritmi*. Essa ha ricevuto l'imprimatur per la stampa il 9 gennaio 1782, ma non è stata pubblicata prima del mese di giugno dello stesso anno. Infatti, in una lettera del 29 giugno 1782 inviata all'abate bolognese Lodovico Preti, l'autore comunica l'imminente pubblicazione del suo lavoro.

*Uscirà tra pochi giorni una mia memoria, di cui ha la stampa cotesto Sig. Dalla Volpe, la qual memoria m'è sembrato giusto di dedicare al Senato. Trattasi in essa della maggior quistione che sia stata fra i più grandi analisti, ed essendo stata questa mia fatica, che mi costa da quattro anni, compatita dal Sig. D'Alembert ho qualche lusinga che possa essere al Senato accetta, e che sarà ancor gradita presso dei matematici.*¹

Come si può dedurre dal titolo, la memoria è incentrata sulla proporzione bernoulliana: data un circonferenza di raggio a ,

$$\text{circonferenza} : \text{diametro} = \log(-1) : \sqrt{-1}.$$

L'opera, quindi, si inserisce nella delicata questione dei logaritmi dei numeri negativi: l'autore considera errata la proporzione di Bernoulli, ma concorda con il matematico svizzero nel ritenere vera l'uguaglianza

$$\log(x) = \log(-x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

¹Lettera di P. Caldani a L. Preti, conservata presso Biblioteca Comunale Archiginnasio di Bologna, fondo Tognetti.

Inoltre, dimostra più volte la non veridicità dell'uguaglianza

$$2 \log(\sqrt{-1}) = \log(-1).$$

3.2 Dedicata dell'opera

La dedica della memoria è stata scritta a Roma il 15 dicembre 1781 e si apre con una citazione tratta dal *De Oratore* di Cicerone, che avverte il lettore della complessità degli argomenti che verranno trattati: *Magnum opus, et arduum... conamur*.²

Caldani afferma di voler offrire al Senato di Bologna una pubblica riconoscenza per gli importanti ruoli che gli ha conferito. Ricordiamo che in quegli anni il matematico bolognese era stato nominato segretario dell'ambasciatore di Bologna a Roma.

L'autore sottolinea che la memoria si inserisce all'interno di una importante disputa matematica ed il suo punto di partenza è costituito dalle *Institutiones Analyticae* del suo maestro Vincenzo Riccati, deceduto nel 1775. L'autore ricorda come il suo maestro era stato pubblicamente criticato per aver messo in dubbio la proporzione bernoulliana. *Il Sig. Abate Conte Vincenzo Riccati ornamento a' di nostri, e splendor dell'Italia nell'Analisi, e nella Meccanica, del quale non posso rinnovar l'onorata memoria senza rinnovare a me stesso l'acerbo dolore di averlo per immatura morte perduto, fu rimproverato, perchè disse, che non bisognava ricevere senza esame la proporzione Bernoulliana fra il diametro, e la circonferenza del circolo. Non tacqui allora, e in sua difesa pubblicai alcuni miei dubbj, su i quali piacque ad un insigne Matematico, a cui molti particolari obblighi mi stringono, di comunicarmi con privato carteggio varie dottissime di lui difficoltà, eccitandomi egli, ed animandomi inoltre per non so qual troppo favorevole di lui opinione verso di me a procurare di rintracciar qualche lume, che servisse di scorta nella oscurissima, e difficilissima teoria de' logaritmi, colla quale la disputa Matematica avea rapporto*.³

Infatti, in difesa di Vincenzo Riccati, l'autore aveva già pubblicato una memoria intitolata *Dubbj di Petronio Caldani sopra le riflessioni analitiche del sig. Ab. Gioacchino Pessuti*. Dopo quella pubblicazione, lo stesso Pessuti (l'insigne Matematico a cui si fa riferimento nel testo) ha indotto Caldani a realizzare *Della proporzione bernoulliana*, opera che, come afferma l'autore, non è completa perchè in essa sono stati omissi alcuni corollari per renderla più snella.

Ciò, che pubblicai da prima, ciò che ho risposto per difendermi dalle obbiezioni, che mi furono fatte, e ciò che ho raccolto intorno ai logaritmi contiensi in questa breve memoria, la quale non ha dubbio, che sarebbe cresciuta a molto maggior volume, se per esteso avessi voluto trattar la materia, e non omettere i non pochi corollarj, che dalla maniera, che l'ho trattata, si possono ricavare.⁴

²Ci accingiamo ad un compito gravoso e arduo.

³Caldani 1782, pp. IV-VI.

⁴Caldani 1782, pp. VI-VII.

Caldani prosegue affermando di aver ricevuto complimenti per quest'opera da d'Alembert, al quale aveva inviato un manoscritto prima della sua pubblicazione. Infatti, il matematico bolognese verrà definito da d'Alembert *primo geometra ed algebrista d'Italia*.

[...] *che mai non ne avrei avuto il coraggio [di dedicare l'opera al Senato] se il celebre Sig. d'Alembert, a cui già la trasmisi, non l'avesse onorata del suo compatimento.*⁵

La dedica dell'opera si conclude con una invocazione al Senato bolognese.

Voi frattanto non misurate l'accoglienza, di cui Vi prego di esserle cortesi dal merito di chi ve ne fa l'offerta, ma dal nobile, e signorile Vostro animo, da cui implorando per fine, che Vi degniate di continuarmi l'onore della grazia Vostra colla maggior sommessione mi protesto

*DI VOI ILLUSTRISSIMI, ed ECCELSI SIGNORI.*⁶

3.3 Analisi dell'opera

La memoria si apre con la presentazione della proporzione bernoulliana.

*Trovò il celebre Sig. Gio: Bernoulli, che la ragione del diametro alla circonferenza del circolo era uguale alla ragione di $\sqrt{-1} : 2l\sqrt{-1}$, la qual si vuole uguale all'altra di $\sqrt{-1} : l - 1$, talchè $2l\sqrt{-1} = l - 1$.*⁷

Nel capitolo precedente è stato illustrato il procedimento per ricavare tale proporzione: di seguito sono riportati i passaggi principali, facendo riferimento alla figura 3.1.

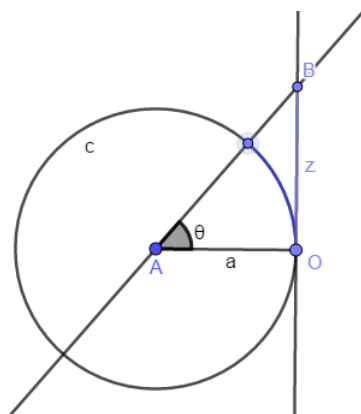


Figura 3.1: Arco di circonferenza s di una circonferenza di raggio a .

Preso una circonferenza di raggio a , chiamata z la lunghezza del segmento OB e s la

⁵Caldani 1782, p. VII.

⁶Caldani 1782, pp. VII-VIII.

⁷Caldani 1782, p. 1.

lunghezza dell'arco sotteso a ϑ , risulta $s = a \cdot \arctan\left(\frac{z}{a}\right)$ e quindi

$$ds = \frac{a}{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{a} dz = \frac{a^2}{a^2 + z^2} dz.$$

Imponendo $z = \frac{(t+1)a\sqrt{-1}}{t-1}$ ed integrando si ottiene la proporzione.

Dopo aver introdotto la proporzione, l'autore espone la strategia proposta da Vincenzo Riccati, consistente nella sostituzione

$$\frac{z + a\sqrt{-1}}{z - a\sqrt{-1}} = \frac{t}{a}$$

prima dell'integrazione della quantità $\frac{a^2}{a^2+z^2}dz$ e nella scelta di a come protonumero.⁸ Si ha, quindi,

$$t = a \cdot \frac{z + a\sqrt{-1}}{z - a\sqrt{-1}}, \quad (3.1)$$

$$dt = a \cdot \frac{z - a\sqrt{-1} - z - a\sqrt{-1}}{(z - a\sqrt{-1})^2} dz,$$

$$dt = \frac{-2a^2\sqrt{-1}}{(z - a\sqrt{-1})^2} dz.$$

Dunque,

$$\frac{a^2}{a^2 + z^2} dz = \frac{a\sqrt{-1}}{2} \frac{dt}{t}.$$

Infatti, $\frac{a\sqrt{-1}}{2} \frac{dt}{t} = \frac{a\sqrt{-1}}{2} \frac{z - a\sqrt{-1}}{a(z + a\sqrt{-1})} \frac{-2a^2\sqrt{-1}}{z - a\sqrt{-1}} dz = \frac{a^2}{z^2 + a^2} dz$.

Procedendo all'integrazione, si ha:

$$\int \frac{a^2}{z^2 + a^2} dz = \frac{a\sqrt{-1}}{2} \log\left(a \cdot \frac{z + a\sqrt{-1}}{z - a\sqrt{-1}}\right).$$

Utilizzando l'uguaglianza $a = 1$ e supponendo che $\log(a) = \log(-a)$, quest'ultima espressione può essere riscritta $\frac{\sqrt{-1}}{2} \log\left(-a \cdot \frac{z + a\sqrt{-1}}{z - a\sqrt{-1}}\right)$.

Se si pone $z = a$ (cioè se si suppone che $\vartheta = 45^\circ$) e si moltiplica per 8 la quantità $\frac{\sqrt{-1}}{2} \log\left(-a \cdot \frac{z + a\sqrt{-1}}{z - a\sqrt{-1}}\right)$, si ottiene la lunghezza della circonferenza:

$$4\sqrt{-1} \log\left(-a \cdot \frac{z + a\sqrt{-1}}{z - a\sqrt{-1}}\right) = 4\sqrt{-1} \log\left(-a \frac{1 + \sqrt{-1}}{1 - \sqrt{-1}}\right).$$

⁸Il protonumero è il numero il cui logaritmo è nullo, cioè $a = 1$.

Qui fermandosi il Sig. Conte, per qual maniera ha potuto dic'egli, il Sig. Bernoulli trovare la circonferenza al diametro: $l - 1 : \sqrt{-1}$? Penso, prosiegue a dire, ch'egli abbia così ragionato.⁹

Caldani, quindi, prosegue riportando le motivazioni che hanno indotto Vincenzo Riccati a ritenere falsa la proporzione bernoulliana. Secondo il ragionamento del matematico svizzero, posto $z = \infty$, si ha, dall'equazione 3.1, $t = a$. Pertanto, la lunghezza di un quarto di circonferenza è $a \frac{\sqrt{-1}}{2} \log(-a)$.

[...] da che segue, che la circonferenza sia al diametro, come $l - a : a\sqrt{-1}$, proporzione, la quale perfettamente combina con quella trovata dal Sig. Bernoulli.¹⁰

Infatti, ricordando che $a = 1$, si ottiene la proporzione bernoulliana.

Ma questo raziocino, ripiglia il Sig. Conte, è infetto di parallogismo[...]¹¹

Infatti, per Riccati non è corretto supporre $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}} = 1$ quando $z = \infty$, perchè i termini immaginari $+a\sqrt{-1}$ e $-a\sqrt{-1}$ non sono trascurabili.

[...] quantunque fatta $z = \infty$, il termine $a\sqrt{-1}$ sia rispetto ad essa infinitesimo, pur essendo immaginario, e tutta rendendo immaginario la quantità $z \pm a\sqrt{-1}$, non può trascurarsi.¹²

Caldani prosegue presentando i suoi dubbi sulla validità della proporzione: se si ritiene $\log(-1)$ reale, allora il rapporto tra la circonferenza e il diametro di un cerchio è immaginario, il che è assurdo. Il matematico bolognese afferma che diversi suoi colleghi, utilizzando la teoria sviluppata da Eulero, hanno tentato, invano, di convincerlo sul fatto che ogni numero negativo ha infiniti e immaginari logaritmi.

Avendo io preso a considerare l'adottata dimostrazione, mi è sembrato, che non sia tale da essere riputata immune da ogni sospetto: imperocchè, se $l - 1$ è reale, come può reggere la proporzione fra il diametro, ed il circolo proposta dal Sig. Bernoulli? Mi si risponde, che a ciascun numero convengono infiniti logaritmi, e che i logaritmi dei numeri negativi mai son reali, ma tutti immaginari. In prova di ciò si adducono i profondi, e celebri ritrovati dei più sublimi genj dell'Analisi, e particolarmente del chiarissimo Sig. Eulero, ed una dimostrazione, che vuol dedursi dalla formola poc'anzi accennata $= \frac{a}{2\sqrt{-1}} \log \frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}$.¹³

L'autore riporta una dimostrazione degli infiniti logaritmi di un numero negativo che gli è stata proposta. Essa ha inizio dalla formola $\frac{a}{2\sqrt{-1}} \log \left(\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}} \right)$; ponendo $a = 1$ e $z = 0$, si ottiene $\frac{1}{2\sqrt{-1}} \log 1$. Detto p il semiperimetro della circonferenza rappresentata nella figura 3.1, si ha che $z = 0$ se e solo se l'arco considerato ha lunghezza mp , con $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$. Quindi, si ha $\frac{1}{2\sqrt{-1}} \log(1) = mp$, da cui $\log(1) = 2mp\sqrt{-1}$, cioè

$$\log(1) = 0, \pm 2p\sqrt{-1}, \pm 4p\sqrt{-1}, \dots$$

⁹Caldani 1782, p. 2.

¹⁰Caldani 1782, p. 2.

¹¹Caldani 1782, pp. 2-3.

¹²Caldani 1782, p. 3.

¹³Caldani 1782, p. 4.

Di conseguenza, se a e A sono numeri reali tali che $\log a = A$, allora $\log(a) = \log(1 \cdot a) = A + 2mp\sqrt{-1}$.

Analogamente, ponendo $a = z = 1$, si considerano le lunghezze degli archi sottese ad angoli di ampiezza multipla di 45° , indicate da Caldani con la notazione $45^\circ + mp$. Si ha, dunque,

$$45^\circ + mp = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \left(\frac{1 + \sqrt{-1}}{1 - \sqrt{-1}} \right).$$

Razionalizzando l'argomento del logaritmo, si ottiene:

$$45^\circ + mp = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log(\sqrt{-1}).$$

Moltiplicando quest'ultima per $4\sqrt{-1}$, si ha:

$$(180^\circ + 4mp)\sqrt{-1} = 2 \log(\sqrt{-1}) = \log(-1).$$

Tuttavia, Caldani non condivide questa dimostrazione.

*Quantunque questo discorso sembri fornito di evidenza, io non posso però a meno di dubitare, che vi stia nascosto un qualche errore.*¹⁴

Il matematico bolognese basa la propria riflessione sull'ipotesi della diversità dello zero reale da quello immaginario.

Egli considera $\frac{a}{2\sqrt{-1}} \log \left(\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}} \right)$ e pone $z = 0$: l'argomento del logaritmo diventa $\frac{a+0\sqrt{-1}}{a-0\sqrt{-1}}$. Quest'ultimo è uguale ad 1 se e solo se $a \pm 0\sqrt{-1} = a$, cioè $0 = 0\sqrt{-1}$. Per Caldani ciò è assurdo perchè altrimenti, poichè

$$0 : 0\sqrt{-1} = a : a\sqrt{-1},$$

si avrebbe $a = a\sqrt{-1}$.

L'autore prosegue presentando tre punti che ritiene errati della dimostrazione che gli è stata proposta.

1. Considerata la funzione $y = x\sqrt{-1}$, se si pone $x = 0$, y non può essere uguale a 0, perchè altrimenti si ammetterebbe un punto reale in un luogo geometrico di punti immaginari. Per lo stesso motivo, quando si considera $\log(1) = 2mp\sqrt{-1}$ con $m = 0$, si ha $\log(1) = 0\sqrt{-1}$ e non $\log(1) = 0$.
2. La frazione $\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}$ è diversa da 1, per ogni valore reale attribuito ad a e z . L'autore, a differenza di alcuni matematici, ritiene che, anche quando si attribuisce a z il valore $\frac{a}{0}$, la frazione è diversa da 1. Infatti, secondo la teoria non condivisa da Caldani, si ha:

$$\frac{a + z\sqrt{-1}}{a - z\sqrt{-1}} = \frac{a + \frac{a}{0}\sqrt{-1}}{a - \frac{a}{0}\sqrt{-1}} = \frac{a + \frac{a}{0}\sqrt{-1}}{a + \frac{a}{-0}\sqrt{-1}}$$

¹⁴Caldani 1782, p. 6.

ma $-0 = +0$, dunque si ha che la frazione vale 1. Invece, l'autore non concorda nel ritenere che $+0$ sia uguale a -0 .

Ma se fosse vero, che arbitrariamente potesse prendersi il zero in senso positivo, o negativo, è indubitato, che sarebbe $\frac{a}{0} = \frac{a}{-0}$, cioè $\infty = -\infty$. Chi lo dirà? Confesso, che a me non dà l'animo di dirlo; e dirò piuttosto che, quindi traggo una conferma a sostenere, che non può reggere l'equazione $0 = 0\sqrt{-1}$, perchè sarebbe ancora $\frac{a}{0} = \frac{a}{0\sqrt{-1}}$, e però $\frac{a}{0} = \frac{-a\sqrt{-1}}{0}$.¹⁵

3. Il matematico bolognese dubita del fatto che tutti gli archi la cui tangente z è nulla si esprimano nella forma $\frac{1}{2\sqrt{-1}} \log 1 = mp$.

Parmi, che a stabilire questa equazione abbiano molta parte l'arbitrio, e la supposizione, onde se non per falsa, abbia a tenersi almeno per molto sospetta.¹⁶

L'autore ha un dubbio anche per gli archi con tangente z unitaria. In questo caso, Caldani inizia il discorso affermando che non vale la seguente catena di uguaglianze

$$2 \log(\sqrt{-1}) = \log\left(\left(\sqrt{-1}\right)^2\right) = \log(-1).$$

E' certo, che il numero del primo membro sotto il segno logaritmico è immaginario. Come si può cangiarlo arbitrariamente in reale col trasportare il coefficiente, che precede il detto segno ad esser esponente del numero, e formar poi l'accenata equazione?¹⁷

Caldani riprende la formula

$$45^\circ + mp = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log(\sqrt{-1}) \quad (3.2)$$

e suppone $m = 1$. Poichè $p = \frac{2}{\sqrt{-1}} \log(\sqrt{-1})$, si ha che $\frac{p}{4} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log(\sqrt{-1})$ è la lunghezza dell'arco di circonferenza sotteso dall'angolo di ampiezza 45° , cioè utilizzando la notazione dell'autore, si ha $45^\circ = \frac{p}{4}$. Sostituendo i valori di p e 45° nell'equazione 3.2, si ottiene:

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} \log(\sqrt{-1}) + \frac{2}{\sqrt{-1}} \log(\sqrt{-1}) = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log(\sqrt{-1}), \quad (3.3)$$

da cui si ricava $2 \log(\sqrt{-1}) = 0$. Se si ritiene vera $2 \log(\sqrt{-1}) = \log(-1)$, allora $\log(-1) = 0$.

[...] dunque non è vero secondo l'adotta formola, che tutti i logaritmi de' numeri negativi sieno immaginarj.¹⁸

¹⁵Caldani 1782, p. 9.

¹⁶Caldani 1782, p. 10.

¹⁷Caldani 1782, pp. 11-12.

¹⁸Caldani 1782, pp. 12-13.

Inoltre, l'autore osserva che dall'equazione 3.3 si può ricavare

$$2 \log(\sqrt{-1}) = \frac{1}{2} \log(\sqrt{-1}) - \frac{1}{2} \log(\sqrt{-1}) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}\right) = \log(1).$$

Quindi, se si ritiene vera $2 \log(\sqrt{-1}) = \log(1)$, allora si deve accettare l'uguaglianza $\log(-1) = \log(1)$ e non ritenere che $\log(-1)$ abbia infiniti logaritmi immaginari.

Arrivati a questo punto, Caldani sostiene esplicitamente la tesi di Bernoulli sui logaritmi dei numeri negativi.

*[...] dunque i logaritmi dei numeri positivi sono gli stessi dei logaritmi de' numeri negativi; e però o i logaritmi dei numeri negativi sono tutti immaginari, e tali saranno pur quelli dei numeri positivi, o i numeri positivi hanno i logaritmi reali, e tali anzi gli stessi gli avranno i numeri negativi. Che labirinto è mai questo, in cui le proposte formole ci mettono, e quante son mai le contraddizioni che ne seguono.*¹⁹

Il matematico bolognese prosegue analizzando la proporzione

$$1 : \sqrt{-1} = \sqrt{-1} : -1,$$

che rappresenta uno dei maggiori sostegni della proporzione bernoulliana e dell'uguaglianza $2 \log(\sqrt{-1}) = \log(-1)$. Infatti, secondo alcuni matematici di cui Caldani non riporta il nome, dalla proporzione $1 : \sqrt{-1} = \sqrt{-1} : -1$, si può dedurre che $\log(1) : \log(\sqrt{-1}) = \log(\sqrt{-1}) : \log(-1)$ e, da quest'ultima che $2 \log(\sqrt{-1}) = \log(-1)$.²⁰

*La forza di questa deduzione non può negarsi, che non sia grandissima, e tale certamente è stata per me. Mi ha però lasciato luogo a far alcune riflessioni, le quali m'hanno indotto finora a non cederle.*²¹

Caldani ritiene che, se da $1 : \sqrt{-1} = \sqrt{-1} : -1$ si può ricavare $\log(1) : \log(\sqrt{-1}) = \log(\sqrt{-1}) : \log(-1)$, allora si può dedurre che $a : a\sqrt{-1} = a\sqrt{-1} : -a$ per qualsiasi valore attribuito ad a .

In particolare, sia $a = e^y$ ed $a\sqrt{-1} = e^x$ con x e y numeri reali. Da $e^y : e^x = e^x : (-a)$, segue che $-a = e^{2x-y}$. Tuttavia, $-a = -e^y$, quindi si ha $e^{2x-y} = -e^y$. Caldani deduce, erroneamente, da quest'ultima uguaglianza che $2x - y = y$, cioè $x = y$. Si è arrivati ad una contraddizione, perchè si ha $e^x = e^y$, cioè $a = a\sqrt{-1}$.

L'autore dimostra che la proporzione $\log(1) : \log(\sqrt{-1}) = \log(\sqrt{-1}) : \log(-1)$ è sbagliata proponendo anche un altro ragionamento. Egli afferma che se si suppone vera questa proporzione, allora da essa si può ricavare $\log(-1)^2 = 2 \log(\sqrt{-1})$ da cui si ha $\log(-1) = \log(\sqrt{-1})$.²² Tuttavia, quest'ultima uguaglianza è errata: infatti, se fosse vera si arriverebbe al seguente risultato assurdo:

$$10^{\log(-1)} = 10^{\log(\sqrt{-1})} \Rightarrow -1 = \sqrt{-1}.$$

¹⁹Caldani 1782, pp. 13-14.

²⁰Si noti che questa deduzione è errata.

²¹Caldani 1782, p. 14.

²²L'autore non spiega queste deduzioni.

L'autore prosegue con l'analisi dell'identità $\frac{1}{m} = \log_a a^{\frac{1}{m}}$, con $a \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$. Caldani osserva che alla quantità $a^{\frac{1}{m}}$ corrispondono m numeri distinti.

Propone l'esempio di $m = 3$. Indica con $a^{\frac{1}{3}}$ la radice terza reale di a ; le altre due radici terze di a sono $a^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ e $a^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. Di conseguenza, si ha che $\frac{1}{3} = \log_a a^{\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{3} = \log_a \left(a^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \right)$ e $\frac{1}{3} = \log_a \left(a^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \right)$.

Quindi, $a^{\frac{1}{3}} = a^{\log_a \left(a^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} \right)} = a^{\frac{1}{3} \cdot \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}}$. Ciò è assurdo, perchè $a^{\frac{1}{3}}$ è reale e $a^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ è complesso.

[...] ma il valor del numero rappresentato da $a^{\frac{1}{3}}$ è impossibile che rappresenti quello che compete ad $a^{\frac{1}{3} \cdot \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}}$ per essere il primo reale, gli altri due immaginari; dunque la podestà $a^{\frac{1}{3}}$ non rappresenta per se, che un sol numero. E' per un artificio analitico, che si ricavano gli altri due $a^{\frac{1}{3} \cdot \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}}$, che sono equivalenti al primo $= a^{\frac{1}{3}}$, e sono tali perchè essi pure, come il primo, alzati alla terza podestà rendono lo stesso prodotto $= a$, ma non son tali perchè essi in se esprimano il valore di $a^{\frac{1}{3}}$. Sè dunque $a^{\frac{1}{3}}$ non rappresenta niuno degli altri due numeri $a^{\frac{1}{3} \cdot \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}}$, non potrà nè meno l'esponente $\frac{1}{3}$ competere loro per logaritmo, ma dovrà egli competere a quel solo numero, il valor del quale vien'espresso da una podestà della base, che abbia per esponente $\frac{1}{3}$, e cioè nel caso nostro al numero $a^{\frac{1}{3}}$. Altro è, che due, o più quantità alzate alla stessa potestà dieno un medesimo prodotto, altro è che il valore delle medesime sia lo stesso.²³

Caldani aggiunge un ulteriore esempio: 1 e $\sqrt{-1}$ elevati alla quarta danno il valore 1, ma sono due quantità diverse.

Così se tanto $1^{\frac{1}{4}}$, quanto $\sqrt{-1}$ si alzino alla quarta potestà avremo un prodotto $= 1$, pur chi dirà, che il valore di $1^{\frac{1}{4}} = 1$ sia lo stesso del valore $= \sqrt{-1}$?²⁴

L'autore prosegue affermando che, per evitare contraddizioni di questo tipo, bisogna scegliere con attenzione la base del logaritmo. Essa deve essere un numero tale che ogni sua potenza sia della sua stessa natura.

Questa qualunque riflessione mi fa dubitare, che non sia lecito di prendere per base logaritmica una quantità, le quantità della quale mutino natura, e mi sforza anzi credere, che la base non solamente debba essere costante, e capace di dare qualunque numero, ma che debba esser tale ancora, che le sue potestà mantengan sempre la natura medesima ove vogliasi far uso delle regole predette a rappresentarne i logaritmi.²⁵

L'autore riprende nuovamente l'equazione $2 \log(\sqrt{-1}) = \log(-1)$, che considera errata. Egli ritiene che valga $2 \log(\sqrt{-1}) = \log -(1^2)$ e che $\log -(1^2) \neq \log(-1)$. Se si accetta $2 \log(\sqrt{-1}) = \log(-1)$ e $\log -(1^2) = \log(-1)$, allora si ha $2 \log(\sqrt{-1}) = \log -(1^2)$, cioè $2 \log(\sqrt{-1}) = 2 \log(-1) \Rightarrow \log(\sqrt{-1}) = \log(-1)$. Si è arrivati pertanto ad un assurdo, perchè sia la quantità $\log(\sqrt{-1})$ che il suo doppio sono uguali ad una stessa quantità.

²³Caldani 1782, pp. 17-19.

²⁴Caldani 1782, p. 19.

²⁵Caldani 1782, p. 20.

Il matematico bolognese afferma di aver letto gli ultimi trattati di Analisi che affrontano la questione dei logaritmi, e in modo particolare l'opera di Eulero nella quale sono contenute le formule per ricavare l'equazione $mp = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log 1$. L'autore prosegue riassumendo il pensiero del matematico svizzero: per Eulero, chiamato p il semiperimetro di una circonferenza di raggio unitario, si ha che $\log(1) = 0$, $\pm 2p\sqrt{-1}$, $\pm 4p\sqrt{-1}$, $\pm 6p\sqrt{-1} \dots$, $\log(-1) = \pm p\sqrt{-1}$, $\pm 3p\sqrt{-1}$, $\pm 5p\sqrt{-1} \dots$ e $\log(\sqrt{-1}) = \frac{p}{2}\sqrt{-1}$, $\frac{5}{2}p\sqrt{-1}$, $\frac{9}{2}p\sqrt{-1}, \dots$

Caldani non è convinto di queste formule, perchè da esse si può dedurre $2 \log(\sqrt{-1}) = \log(-1)$. Infatti, essendo $\log(-1) = p\sqrt{-1}$, si ha $\log(-1) : \sqrt{-1} = p\sqrt{-1} : \sqrt{-1}$, da cui $\log(-1) : \sqrt{-1} = p : 1$. La proporzione si può riscrivere così: $\log(-1) : \sqrt{-1} = 2p : 2$, da cui $2 \log(-1) = 2p\sqrt{-1}$.²⁶ Ma $2p\sqrt{-1} = 4 \log(\sqrt{-1})$,²⁷ da cui si ricava $\log(-1) = 2 \log(\sqrt{-1})$.

*Deduzioni, le quali certamente non potean farmi riposare con tranquillità sopra quanto io ho esposto. Ma siccome io non potea tuttavia indurmi a tener per vera l'equazione $2l\sqrt{-1} = l - 1$, così mi venne sospetto, che non reggesse neppur l'altra di $l - 1 = p\sqrt{-1}$; e quindi avendo presa a considerare tra l'altre la formola del Signor Eulero, ed essendomi accinto a procurare di penetrar la sua mente, sonomi occorse alcune riflessioni, le quali ben lungi dal togliermi i miei dubbj me gli hanno anzi accresciuti.*²⁸

Caldani ripete di non aver letto la memoria nella quale Eulero ha riportato i suoi risultati sui logaritmi dei numeri negativi, cioè *De la controverse entre Mrs. Leibnitz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires*, ma di aver analizzato la memoria *Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires*. L'autore riporta il ragionamento del matematico svizzero: posto a come base della funzione logaritmica, poichè $a^0 = 1$, se si aumenta 0 di una quantità infinitamente piccola ω , anche l'unità si accresce di una quantità infinitamente piccola τ . Tuttavia, τ non è necessariamente uguale a ω , per questo si pone $\tau = k\omega$, con k numero reale. Dunque, si ha

$$a^\omega = 1 + k\omega. \quad (3.4)$$

Di conseguenza, $a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i$, da cui si ricava $i\omega = \log_a(1 + k\omega)$.

Posto $i = \infty$ e $x = (1 + k\omega)^i$, si ottiene che $\omega = \frac{1}{k} (x^{\frac{1}{i}} - 1)$ e, moltiplicando entrambi i membri per i , si ha $i\omega = \frac{i}{k} (x^{\frac{1}{i}} - 1)$.

Ponendo $i\omega = y$ e $\frac{1}{k} = c$, si ha

$$y = ci \left(x^{\frac{1}{i}} - 1 \right),$$

$$\frac{y}{i} + c = cx^{\frac{1}{i}},$$

²⁶Questo risultato si può ricavare più facilmente moltiplicando per 2 entrambi i membri dell'uguaglianza $\log(-1) = p\sqrt{-1}$.

²⁷Infatti, $4 \log(\sqrt{-1}) = 4 \frac{p}{2} \sqrt{-1} = 2p\sqrt{-1}$.

²⁸Caldani 1782, pp. 23-24.

da cui si ottiene l'equazione

$$\left(\frac{y}{i} + c\right)^i - c^i x = 0. \quad (3.5)$$

Quindi, risolvendo l'equazione 3.5 rispetto ad y , si trovano i logaritmi in base a di x . L'autore descrive quest'ultimo passaggio facendo riferimento alle *Instituzioni Analitiche* di Vincenzo Riccati.

[...], *formola* [equazione 3.5], *che si adopera a trovar tutti i logaritmi, che convengono al numero = x, la quale risolvendosi in infiniti fattori, di che una maniera può esser quella esposta nel cap. 5.º lib 3.º tom. primo delle istituzioni del Sig. Abb. Co: Vincenzo Riccati, perciò la incognita y acquista infiniti valori espressi dagli archi di un circolo di raggio = c, i quali valori sono i cercati logaritmi del numero da determinarsi = x.*²⁹

Caldani, tuttavia, non condivide pienamente la dimostrazione fornita da Eulero. In particolare, dubita del fatto che tutti i valori di y che si ricavano dall'equazione 3.5 possano essere considerati logaritmi in base a di x . L'autore, infatti, considera la catena di uguaglianze

$$a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i = x$$

ed osserva che se a $i\omega$ si attribuiscono più valori distinti, allora la quantità costante a elevata a $i\omega$ non può assumere sempre un medesimo valore.

*Ma impossibil cosa è, che la medesima quantità costante, ed invariabile con diversi esponenti produca lo stesso numero, dunque è impossibile, che infiniti logaritmi, se sieno disuguali fra loro, convengano allo stesso numero.*³⁰

Secondo Caldani, l'equazione $(1 + k\omega)^i = x$ mostra come il valore di x può essere ricavato attribuendo a ω diversi valori, ma non permette di concludere che a x corrispondono infiniti logaritmi in base a .

L'autore riporta a sostegno della propria tesi la seguente catena di uguaglianze, con z numero reale: $\left[(\sqrt{3})^3\right]^z = 27 = (1 + z)^3$. Tre valori distinti di z (cioè 2, $\frac{-5}{2} + \frac{3\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-5}{2} - \frac{3\sqrt{-3}}{2}$) soddisfano $(1 + z)^2 = 27$, ma solo 2 soddisfa l'equazione $\left[(\sqrt{3})^3\right]^z$. In definitiva, secondo Caldani:

*Ciascun valore adunque della quantità = ω , che si ricava dell'equazione $(1 + k\omega)^i = x$, verificherà sempre $(1 + k\omega)^i = x$, ma non ognuno dei detti valori posto nella espressione $a^{i\omega}$ verificherà necessariamente $a^{i\omega} = x$.*³¹

Nuovamente, l'autore sostiene in modo esplicito la tesi bernoulliana $\log(x) = \log(-x)$, con x numero reale, condivisa anche dal suo maestro Vincenzo Riccati. Innanzitutto, ricorda che quest'uguaglianza è stata dimostrata geometricamente da Riccati attraverso il metodo della quadratura dell'iperbole. Il suo obiettivo è quello di fornire una dimostrazione che faccia uso esclusivamente dell'Analisi.

²⁹Caldani 1782, p. 25.

³⁰Caldani 1782, p. 26.

³¹Caldani 1782, p. 28.

Questa ingegnosissima formola [$a^{i\omega} = x$] fu inventata dal Sig. Eulero, senza parlar d'altre, che da altri insigni Uomini sono state inventate, e che all'Euleriana corrispondono, per sostenere, che ai numeri negativi competono sempre logaritmi immaginari. Per la quadratura però dell'iperbole fra gli asintoti è stato geometricamente dimostrato, che i numeri negativi ugualmente, che i positivi hanno sempre lo stesso logaritmo, come può vedersi ancora al cap. 6°. Lib. I°. tom. 3°. paragrafo 26. delle istituzioni del predetto Sig. Abb. Co: Vincenzo Riccati. Ben non veggo, perchè ciò stesso non possa ugualmente dimostrarsi per mezzo dell'Analisi.³²

L'autore considera i logaritmi in base a e l'equazione $\pm(a^{\pm y}) = x$. In particolare, osserva che l'equazione $+(a^{\pm y}) = x$ definisce il ramo positivo della curva logaritmica, mentre $-(a^{\pm y}) = x$ determina quello negativo (il quale è uguale a quello positivo). [...] e in tal caso il medesimo logaritmo servirà tanto al numero positivo, quanto al numero negativo, come per la quadratura dell'iperbole fra gli asintoti si è già detto di essere stato dimostrato.³³

Dopo aver compiuto questa osservazione, il matematico bolognese riesamina l'equazione euleriana $a^\omega = 1 + k\omega$, da cui si ricava $\omega = \log_a(1 + k\omega)$; vale ugualmente $-a^\omega = -(1 + k\omega)$ da cui si ha $\omega = \log_a -(1 + k\omega)$.³⁴

Analogamente, essendo $a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i$, e dunque $i\omega = \log_a(1 + k\omega)^i$, si ha $-(a^{i\omega}) = -(1 + k\omega)^i$ e $i\omega = \log_a -(1 + k\omega)^i$.

Quindi, posto $x = \pm(1 + k\omega)^i$, ragionando similmente ad Eulero, ma sostituendo x con $\pm x$, si ha $(\frac{y}{i} + c)^i = \pm c^i x$.

Posto $x = 1$ e considerando il segno positivo, si ha $(\frac{y}{i} + c)^i = c^i$, cioè $y = 0$; posto $x = -1$ e considerando il segno negativo, si ha $y = 0$.

Questo ragionamento, secondo l'autore, mostra che la formula euleriana attribuisce ad un qualsiasi numero reale ed al suo opposto lo stesso logaritmo.

L'autore conclude l'opera augurandosi di aver fatto un po' chiarezza sulla complessa questione dei logaritmi dei numeri negativi.

*Da queste poche riflessioni sembra apparire, che il Sig. Abb. Co: Vincenzo Riccati avesse tutta la ragione di dubitare della proporzione Bernoulliana, e che la teoria difficilissima de' logaritmi possa ridursi a maggior chiarezza che non è stata finora. Io mi lusingo di averne almeno accenata alcuna traccia, onde un qualche sublime ingegno riesca a dar compimento a sì importante materia.*³⁵

³²Caldani 1782, pp. 28-29.

³³Caldani 1782, p. 30.

³⁴Quest'ultima deduzione non è motivata da Caldani.

³⁵Caldani 1782, pp. 31-32.

3.4 Discussione sulla natura dello zero

Nella sezione 2.5 è stata presentata la discussione relativa all'uguaglianza tra lo zero reale e quello immaginario; in particolare, è stata riportata una parte della corrispondenza epistolare tra Caldani e Giordano Riccati, con l'obiettivo di comprendere la posizione dei due matematici. Naturalmente, *Della proporzione bernoulliana* si inserisce all'interno di questa delicata questione: in essa l'autore ha confutato l'uguaglianza $0 = 0\sqrt{-1}$ per mezzo della proporzione $0 : 0\sqrt{-1} = a : a\sqrt{-1}$. Questa dimostrazione è stata contestata da Giordano Riccati, che in una lettera inviata all'autore il 17 agosto 1778,³⁶ si esprimeva così:

*Non può ammettersi che sia $0 : 0\sqrt{-1} :: a : a\sqrt{-1}$, ovvero $0 \cdot 1 : 0\sqrt{-1} :: a \cdot 1 : a\sqrt{-1}$. Il nulla moltiplicato per due quantità finite rende sempre i due prodotti uguali a nulla e perciò $0 \cdot 1 = 0\sqrt{-1}$. Non ne risulta l'uguaglianza dei prodotti moltiplicando due quantità per la grandezza a . Per la qual cosa essendo $0 \cdot 1 = 0 \cdot \sqrt{-1}$, ma non già $a \cdot 1 = a\sqrt{-1}$ non può sussistere la premessa analogia. Secondo lei si dovrebbe avverare la proporzione $0 \cdot 1 : 0 \cdot 2 :: a \cdot 1 : a \cdot 2$, la qual certamente è falsa; imperciocchè anch'ella accorderà essere $0 \cdot 1 = 0 \cdot 2$ ed $a \cdot 1$ la metà di $a \cdot 2$.*³⁷

Sebastiano Canterzani, invece, concordava con Caldani sulla diversa natura dei due zeri. Infatti, in occasione della pubblicazione di *Della proporzione bernoulliana* nel 1782, Canterzani aveva scritto a riguardo alcune note rimaste inedite ed oggi conservate presso la Biblioteca Universitaria di Bologna.

Comincia il nostro autore a dire che affinché la formola $\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}$ posta $z = 0$ divenisse veramente uguale ad 1 sarebbe necessario che fosse $a \pm 0\sqrt{-1} = a$, ovvero $0 = 0\sqrt{-1}$, dove vedo bensì la necessità che sia $a \pm 0\sqrt{-1} = a$, ma non già quella che sia anche $0 = 0\sqrt{-1}$. Perchè una quantità sia zero basta che sia nel suo limite, cioè in quello stato in cui nasce o finisce. Ma che necessità è che tutte le quantità considerate in quel limite sieno uguali fra loro? Io non vedo maggior necessità nell'uguaglianza di uno zero all'altro di quella che ne vegga nell'uguaglianza d'uno ad un altro infinito, nella quale certamente non ne veggo nessuna. Quando una quantità divien zero qualunque ella siasi, sempre sarà vero che aggiunta ad un'altra quantità, o ad essa sottratta non le dà, nè le toglie nulla, e che moltiplicata per una quantità finita produce zero; ma non per questo si può inferire, che uno zero sia sempre uguale ad un altro zero, o che abbia all'altro sempre la medesima proporzione. Se sarà $a : x :: b : y$, sarà anche $a - x : x :: b - y : y$. E supposto che x variando arrivi ad eguagliare a , nel qual caso attesa la posta analogia anche y arriverà ad eguagliare b , si avrà $0 : a :: 0 : b$, e alternando $0 : 0 :: a : b$. Dunque uno zero può avere all'altro qualunque proporzione, nè è necessario che sieno uguali fra loro, e ciò non pertanto non si può dire che l'uno sia più o meno zero dell'altro, essendo

³⁶Si noti che la lettera risale a quattro anni prima della pubblicazione dell'opera, ma lo stesso Caldani ha riferito di aver iniziato a lavorarci già nel 1778.

³⁷Giuntini 1984, pp. 48-49.

ognuno di loro ugualmente zero in quanto che aggiunto o levato ad una quantità non le accresce nulla, non le leva nulla e moltiplicato per una qualunque quantità produce 0. Accordo dunque che non sia $0 = 0\sqrt{-1}$. Ma non per questo accordo che $0\sqrt{-1}$ non sia uno zero.³⁸

Canterzani, nelle note scritte alla memoria di Caldani, ha fornito anche una prova di tipo algebrico della qualità di $0\sqrt{-1}$, fondata sulle radici di un'equazione.

La quantità $a\sqrt{a-x} + b\sqrt{x-a} + c\sqrt{a}$ non è ella immaginaria sempre eccettuato l'unico caso in cui $x = a$? Ma si dirà che questa quantità è immaginaria sempre anche quando sia $x = a$; perciocchè uno dei due radicali è l'altro moltiplicato per $\sqrt{-1}$; onde quando sia $x = a$, uno dei due termini $a\sqrt{a-x}$, $b\sqrt{x-a}$ diventa 0, che è reale, l'altro diventa $0\sqrt{-1}$, che vuolsi immaginario. Or io dimando com'è possibile che zero moltiplicato per una quantità non infinita non sia zero? e se è zero che ha più che far qui l'immaginario? Che poi zero moltiplicato per $\sqrt{-1}$ sia zero è facile vederlo subito anche dall'esempio proposto. Imperocchè pongasi $a\sqrt{a-x} + b\sqrt{x-a} + c\sqrt{a} = y\sqrt{a}$, ed espulsi i radicali che contengono la variabile x , l'uno dei quali è sempre quantità reale, che diventa zero posta $x = a$, moltiplicata per $\sqrt{-1}$, essendo reale l'altro si avrà prima (trasportando il termine $c\sqrt{a}$)

$$a^3 - a^2x + b^2x - ab^2 + 2ab\sqrt{-aa + 2ax - xx} = ay^2 - 2acy + ac^2$$

e quadrando di nuovo dopo aver lasciato solo il radicale da una parte dell'equazione si avrà:

$$a^6 - 2a^5x + a^4x^2 + 2a^3b^2x - 2ab^2xy - 2a^2b^2x^2 + b^4x^2 - 2a^4b^2 + 2a^3b^2x - 2ab^4x + a^2b^4 - 2a^4y^2 + 2a^3xb^2 + 2ab^2xy^2 + 2a^2b^2y^2 + a^2y^4 + 4a^4cy - 4a^3cxy + 4ab^2cxy - 4a^2b^2cy - 4a^2cy^3 + 4a^2c^2y^2 - 2a^4c^2 + 2a^3c^2x - 2ab^2c^2x + 2a^2b^2c^2 + 2a^2c^2y^2 - 4a^2c^3y + a^2c^4 + 4a^4b^2 - 8a^3b^2x + 4a^2b^2x^2 = 0.$$

Chi separasse x da questa equazione troverebbe

$$x = a - \frac{a(yy - 2cy + cc)(aa \pm 2ab\sqrt{-1} - bb)}{(aa + bb)}$$

il cui valore è sempre immaginario eccettuato il solo caso, che sia $y = c$, nel quale diventa $x = a$. Quell'equazione adunque è a una curva che consiste in un punto, cioè in quel punto, in cui sia $x = a$, ed $y = c$, la qual equazione, avrà quattro valori di y , tra quali moltiplicati ciascuno per a vi sarà sicuramente la quantità $a\sqrt{a-x} + b\sqrt{x-a} + c\sqrt{a}$. E però ponendo $x = a$ nell'equazione, uno dei quattro valori moltiplicato per a deve diventare ciò che diventa la quantità $a\sqrt{a-x} + b\sqrt{x-a} + c\sqrt{a}$, quando mettasi $x = a$. Ora posta $x = a$ l'equazione diventa

$$y^4 - 4cy^3 + bc^2y^2 - 4c^3y + c^4 = 0$$

³⁸Giuntini 1984, p. 49.

cioè $(y - c)^4 = 0$ che è soddisfatta da tutti e quattro i valori di $y = c$, dunque non si può dubitare che 0 non sia il valore che esprime la quantità $a\sqrt{a-x} + b\sqrt{x-a} + c\sqrt{a}$, il che non potrebbe essere se quel zero che riesce moltiplicato per $\sqrt{-1}$ non fosse realmente zero.³⁹

Nel seguito sono analizzate due brevi memorie esplicitamente dedicate alla natura dello zero: la prima è di Giordano Riccati e la seconda di Gregorio Fontana.

3.4.1 Giordano Riccati e la natura dello zero

La memoria di Giordano Riccati dedicata alla natura dello zero è *Teorema: il nulla immaginario non può confondersi col nulla reale* e risale al 1788. Come si può dedurre dal titolo, dopo cinque anni dalla pubblicazione di *Della proporzione bernoulliana*, il matematico trevigiano condivise il parere di Caldani sulla diversità dello zero reale da quello immaginario. In realtà, nella lettera del 20 febbraio 1778 spedita da G. Riccati a Gianfrancesco Malfatti, in seguito alla pubblicazione delle *Riflessioni Analitiche* di Pessuti, è possibile rilevare come l'autore rifiutasse inizialmente sia la proporzione bernoulliana sia l'uguaglianza $0 = 0\sqrt{-1}$.

*La maniera con cui l'Ab. Vincenzo nella sua lettera esamina il giro di calcolo che ha condotto il Bernoulli ad una falsa conclusione dovea illuminare il Sig. Pessuti. Abbiamo veduto ch'esser dee immaginario il valore di $-t$ e trovandolo egli reale e uguale a $-a$ dovea ciò metterlo in guardia di essere in corso in paralogismo. L'aggiunta del nulla moltiplicato in $\sqrt{-1}$ rende una quantità immaginaria.*⁴⁰

Malfatti, invece, era convinto dell'identità fra lo zero reale e quello immaginario. Secondo il matematico, $0\sqrt{-1}$ può essere introdotto nel calcolo sia con la somma di una quantità immaginaria e del suo opposto, sia come il valore di $z\sqrt{-1}$ quando la variabile reale z assume il valore 0. Dunque:

Nel primo caso, io non intendo, nè posso intendere altro se non che quella quantità immaginaria, la quale io avea posto, sia levata, non esista più; è certamente che io lascio allora un vero zero e non una quantità immaginaria. Lo stesso succederà se intendo posta e poi levata una quantità reale; e questi due zeri, sebbene si possano considerare di diverso genere, non saranno mai capaci di alterare la natura di altre quantità che loro fossero aggiunte talmente che valerà sempre e l'una o l'altra di queste due equazioni $x + b\sqrt{-1} - b\sqrt{-1} = y$, $x + b - b = y$ e ciascuna sarà identica con quest'altra $x = y$, nè si potrà dir mai che l' y della prima equazione sia immaginario, perchè diventa $y = x + 0\sqrt{-1}$... Consideriamo ora l'altro caso in cui il $0\sqrt{-1}$ nasce dall'ipotesi di $z = 0$ nel termine $z\sqrt{-1}$. Anche qui che intendo io mai... quando dico $0\sqrt{-1}$ se non che la quantità immaginaria $\sqrt{-1}$ esiste volte zero, cioè non esiste nessuna volta, cioè non v'è più? Ma quando non è più vien lasciato dal suo annichilamento un vero zero. Dunque

³⁹Giuntini 1984, pp. 50-51.

⁴⁰G. Riccati a Malfatti, 20 febbraio 1778. Lugaresi 2020, p. 42.

anche in questo caso è $0\sqrt{-1} = 0$.⁴¹

Le argomentazioni di Malfatti, almeno inizialmente, non convinsero G. Riccati: egli riteneva incontestabile che, dati z e a reali, la quantità del tipo $z\sqrt{-1} + a$, che è sempre immaginaria per $z \neq 0$, dovesse rimanere tale anche per $z = 0$. Un falso principio di continuità, infatti, impediva di vedere i reali come immaginari con parte immaginaria nulla, e questo principio era accettato anche da Malfatti.⁴² Quest'ultimo, infatti, nonostante sostenesse l'uguaglianza $0 = 0\sqrt{-1}$, attribuì una diversa natura a 0 e a $0\sqrt{-1}$:

[...] il zero reale ci avverte che la quantità, la quale si considera distrutta, era reale; e il zero immaginario o piuttosto $0\sqrt{-1}$ ci avverte, che la quantità la quale era distrutta era immaginaria.⁴³

In seguito ad ulteriori considerazioni di Malfatti, G. Riccati cambiò idea. Infatti, nell'aprile 1778 scrisse:

*Esaminata maturamente la sua scrittura convengo con Lei che $a + 0\sqrt{-1}$ sia uguale ad a e che l'aggiunta di $0\sqrt{-1}$ non possa rendere immaginaria la quantità $a + 0\sqrt{-1}$.*⁴⁴

Negli anni seguenti, Riccati continuò a trattare l'uguaglianza $0 = 0\sqrt{-1}$ con diversi matematici, sostenendo la tesi di Malfatti. A questo periodo, infatti, risale la corrispondenza con Petronio Caldani.

Solamente nel 1783, il matematico trevigiano ritornò all'iniziale opinione che non potesse essere $0 = 0\sqrt{-1}$. Infatti, in una lettera inviata a Giuseppe Contarelli espresse le idee che furono alla base della memoria *Teorema: il nulla immaginario non può confondersi col nulla reale*. Tale opera, suddivisa in quindici punti, ha inizio con un riferimento ad Eulero:

I. Il celebratissimo Signor Leonardo Eulero con un ingegnoso metodo determina (chiamata p la semicirconferenza circolare del raggio = 1.) $\log .1 = \pm 0 \cdot p\sqrt{-1}, \pm 2p\sqrt{-1}, \pm 4p\sqrt{-1}, \&c.$; $\log . - 1 = \pm p\sqrt{-1}, \pm 3p\sqrt{-1}, \pm 5p\sqrt{-1}, \&c.$ ⁴⁵

Riccati sostiene che il matematico svizzero, confondendo lo zero reale con quello immaginario, ha dimostrato erroneamente che $\log 1$ ha un solo valore reale (cioè 0) e infiniti valori immaginari, e che $\log(-1)$ non assume valori reali.

*II. Affermo frattanto essere immaginario $\log .1 = 0 \cdot p\sqrt{-1}$, e che col metodo del lodato Autore non si scoprono per $\log . \pm 1$ senonse valori immaginarj, a cagione che il nulla immaginario non può confondersi col reale.*⁴⁶

Riccati dimostra che $0 \neq 0\sqrt{-1}$, utilizzando un ragionamento di tipo geometrico. Considera la figura 3.2 e descrive la costruzione della curva BDI : essa rappresenta metà del ramo inferiore di una conoide. Dato un segmento AB , si traccino le rette perpendicolari AF e AC . Si disegni il segmento CF e su di esso si scelga il punto D tale che il

⁴¹Malfatti a G. Riccati, 10 marzo 1778. Lugaresi 2020, p. 52.

⁴²Giuntini 1984, p. 39.

⁴³Malfatti a G. Riccati, 9 aprile 1778. Lugaresi 2020, p. 63.

⁴⁴G. Riccati a Malfatti, 24 aprile 1778. Lugaresi 2020, p. 66.

⁴⁵Riccati 1788, p. 116.

⁴⁶Riccati 1788, p.116.

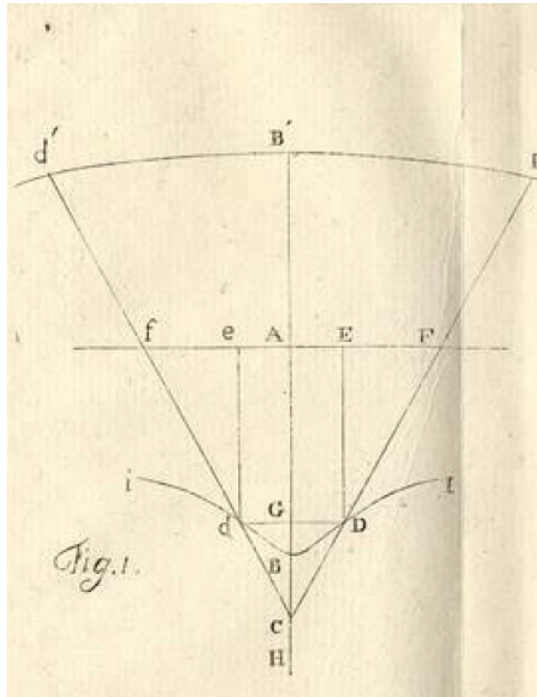


Figura 3.2: Concoide con $b > a$. Riccati 1788, p. 121.

segmento FD sia congruente ad AB . Il punto D è un punto della concoide. Iterando questo procedimento, si costruisce la curva.

Posto $AB = FD = a$, $AC = b$, $AE = GD = x$, $ED = AG = y$, applicando il teorema di Pitagora al triangolo EFD , si ricava che $EF = \sqrt{a^2 - y^2}$. Inoltre, $GC = b - y$ e, poichè i triangoli EFD e GCD sono simili, si può impostare la seguente proporzione:

$$GD : GC = EF : ED,$$

da cui

$$x : (b - y) = \sqrt{a^2 - y^2} : y.$$

Dalla proporzione si ricava il valore di x : $x = \frac{b-y}{y} \sqrt{a^2 - y^2}$.

Ripetendo lo stesso ragionamento per l'altra metà della curva, si ricava:

$$\pm x = \frac{b - y}{y} \sqrt{a^2 - y^2}.$$

- Sia $b = a$. Allora il punto C coincide con il punto B ,
 [...] ed uguagliandosi $\pm x$ al nulla reale, la curva si approprierebbe il punto C .⁴⁷

⁴⁷Riccati 1788, p. 117.

- Sia $b > a$, come nella figura 3.2.

– Se si pone $AG = AC$, cioè $y = b$, si ottiene $\pm x = 0 \cdot \sqrt{a^2 - b^2} = 0 \cdot \sqrt{b^2 - a^2} \sqrt{-1}$.

[...] cioè a dire $\pm x$ uguale al nulla immaginario. Resteremo convinti, che questo non possa far figura d'un nulla reale, riflettendo che il punto C non appartiene alla curva $IDBdi$; imperciocchè per esso non passa il punto D descrivente la curva.⁴⁸

– Se si pone $AG = AB$, cioè $y = a$, si ottiene $\pm x = (b - a) \cdot \frac{\sqrt{a^2 - a^2}}{a} = (b - a) \cdot 0$.
[...] cioè $\pm x$ uguale al nulla reale. Nel punto B adunque $\pm x$ si eguaglia al nulla reale, ed in fatti il punto B spetta alla curva $IDBdi$, passando per lo stesso il punto descrivente D .⁴⁹

– Se $AG > AC > AB$, cioè $y > b > a$. Si ponga $y = c$, allora

$$\pm x = \frac{b - c}{c} \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{b - c}{c} \sqrt{c^2 - a^2} \sqrt{-1},$$

cioè $\pm x$ è una quantità immaginaria.

E qui egli è d'uopo fare la riflessione, che trovandosi procedendo da B verso A i valori reali di x , e procedendo da B verso C i valori immaginari, abbiamo è vero in B un nulla di quantità immaginaria, ma abbiamo altresì un nulla di quantità reale, e perciò il punto B compete alla curva $IDBdi$.

Ma in riguardo al punto C s'incontra l'immaginario tanto da C verso B , quanto da C verso H e conseguentemente in C v'è un doppio nulla di quantità immaginaria, e per questa ragione il detto punto non appartiene alla curva.⁵⁰

- Sia $b < a$, come nella figura 3.3. Se si pone $y = b$, si ha che $\pm x = 0 \cdot \sqrt{a^2 - b^2}$
[...] cioè $\pm x$ uguale al nulla reale. Trovandosi i valori reali di $\pm x$ e da C verso A , e da C verso B , il punto C per doppio titolo ha luogo nella curva $IDCKBkCdi$.

Il punto B conviene alla curva, perchè in esso congiuntamente, come nella Figura

(I.) [cioè nella figura 3.2], $\pm x = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \sqrt{-1}$, riferendosi il primo nulla, quando si

arriva da A in B , ed il secondo, quando si giunge da H in B .⁵¹ Il punto B conviene alla curva, perchè in esso congiuntamente, come nella Figura (I.) [cioè nella figura

⁴⁸Riccati 1788, p. 117.

⁴⁹Riccati 1788, p. 117.

⁵⁰Riccati 1788, pp. 117-118.

⁵¹Riccati 1788, p. 118.

3.2], $\pm x = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \sqrt{-1}$, riferendosi il primo nulla, quando si arriva da A in B , ed il secondo, quando si giunge da H in B .⁵²

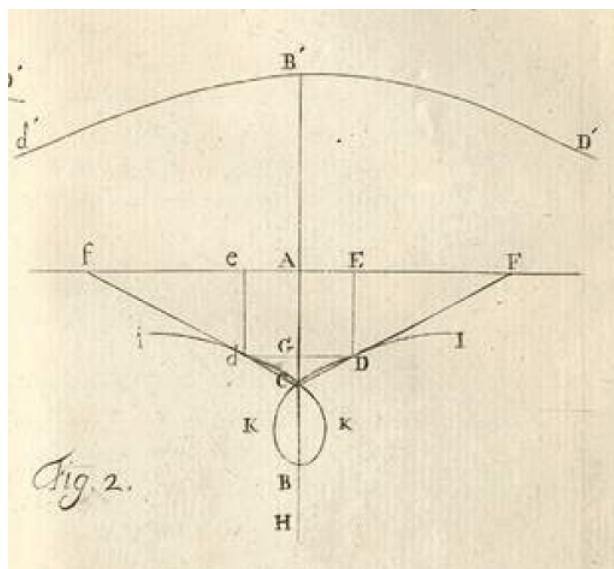


Figura 3.3: Concoide con $a > b$. Riccati 1788, p. 121.

Riccati ripete il ragionamento, considerando la curva di equazione $\pm x = \frac{(b-y)}{y} \sqrt{a^2 - y^2}$. Innanzitutto, descrive il procedimento per disegnarla (figura 3.4). Si traccino le rette perpendicolari CB' e Ii , che si intersecano nel punto A . Si scelgano B sulla retta CB' in modo che $AB = AB' = a$ e si ponga $AC = b > a$, $AG = y$ e $AG' = -y$. Si scelgano F e F' in modo che $GF = G'F = a$. Da G e G' si conducano le parallele alla retta AF , che intersecano la retta CF rispettivamente in D e D' . Il punto D appartiene al ramo superiore $IDBdi$ della curva e il punto D' a quello inferiore $ID'B'd'i$.

Se si considera il ramo inferiore della curva, ponendo $GD = x$ e osservando che i triangoli AFC , CGD e CGd' sono simili, si ha:

$$CA : AF = CG : CD,$$

da cui

$$b : \sqrt{a^2 - y^2} = (b - y) : x,$$

e

$$CA : AF = CG : Gd,$$

⁵²Riccati 1788, p. 118.

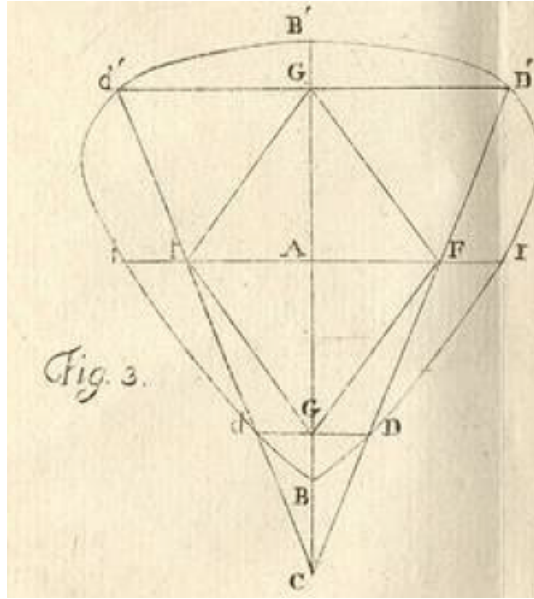


Figura 3.4: Grafico di $\pm x = \frac{(b-y)}{y} \sqrt{a^2 - y^2}$, con $b > a$. Riccati 1788, p. 121.

da cui

$$b : \sqrt{a^2 - y^2} = (b - y) : (-x).$$

Se si considera il ramo superiore della curva, ponendo $G'D' = x$ si ha:

$$CA : AF = CG' : G'D',$$

da cui

$$b : \sqrt{a^2 - y^2} = (b - y) : x,$$

e

$$CA : AF = CG' : G'd',$$

da cui

$$b : \sqrt{a^2 - y^2} = (b - y) : (-x).$$

Dalle proporzioni si ricava l'uguaglianza $\pm x = \frac{(b-y)}{b} \sqrt{a^2 - y^2}$.

- Sia $b > a$, come in figura 3.4.

- Se $AG = AC$, cioè $y = b$, allora si ha $\pm x = 0 \cdot \sqrt{a^2 - b^2} = 0 \cdot \sqrt{b^2 - a^2} \sqrt{-1}$. [...] uguale al nulla immaginario. Si renderà manifesto, ch'esso non possa considerarsi come un nulla reale, osservando che il punto C non conviene alla curva $IDBdi$, la quale, se BB' sia verticale, non discende più abbasso del punto B , a cui perviene, quando, essendo $AF = \sqrt{(a^2 - y^2)} = 0$, i due punti G, D si congiungono in B .⁵³

⁵³Riccati 1788, p. 119.

- Se $AG = AB$, cioè $y = a$, allora si ha $\pm x = (b - a) \cdot 0$,
ossia $\pm x$ uguale al nulla reale, e perciò il punto B spetta alla curva $IDBdi$.
Lo stesso accaderebbe, se fosse $AC = b = AB = a$; imperciocchè il punto C
coinciderebbe col punto B .⁵⁴
- Se $AG > AC > AB$, cioè $y > b > a$, posto $y = c$, si ha

$$\frac{(b - c)}{b} \cdot \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{(b - c)}{b} \sqrt{c^2 - a^2} \sqrt{-1},$$

che è una quantità immaginaria.

Dunque, possono essere ripetute le stesse riflessioni fatte in precedenza per la concoide.

- Sia $b < a$, come in figura 3.5. Posto $y = b$, si ricava $\pm x = 0 \cdot \sqrt{a^2 - b^2}$,
[...] cioè x ugual al nulla reale. Incontrandosi i valori reali di x e da C verso A , e da
 C verso B ; il punto C per doppia ragione appartiene alla curva $IDCKBkCd$.⁵⁵

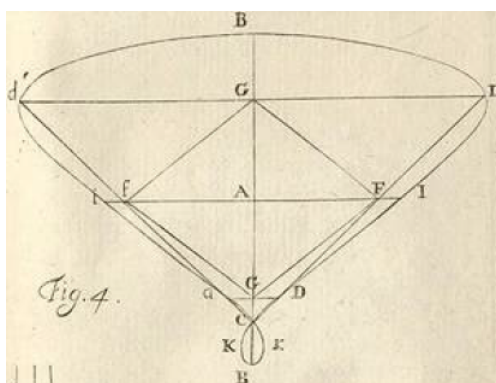


Figura 3.5: Grafico di $\pm x = \frac{(b-y)}{y} \sqrt{a^2 - y^2}$, con $a > b$. Riccati 1788, p. 121.

Da questo discorso, l'autore ricava i seguenti corollari.

1. Se ad y reale si riferisce x uguale al nulla reale, il punto estremo $d'y$ compete alla curva, quantunque allo stesso punto corrisponda x uguale al nulla immaginario.
2. Se ad y reale s'adatta soltanto x uguale al nulla immaginario, l'ultimo punto $d'y$ non conviene alla curva.
3. Quindi il nulla immaginario non può confondersi col reale, e conseguentemente i logaritmi dell'unità positiva, e negativa scoperti dall'Eulero col suo metodo sono tutti immaginarj.⁵⁶

Riccati prosegue analizzando la curva logaritmica (figura 3.6). Posto $AB = 1$, l'autore

⁵⁴Riccati 1788, p. 119.

⁵⁵Riccati 1788, p. 119.

⁵⁶Riccati 1788, p. 119.

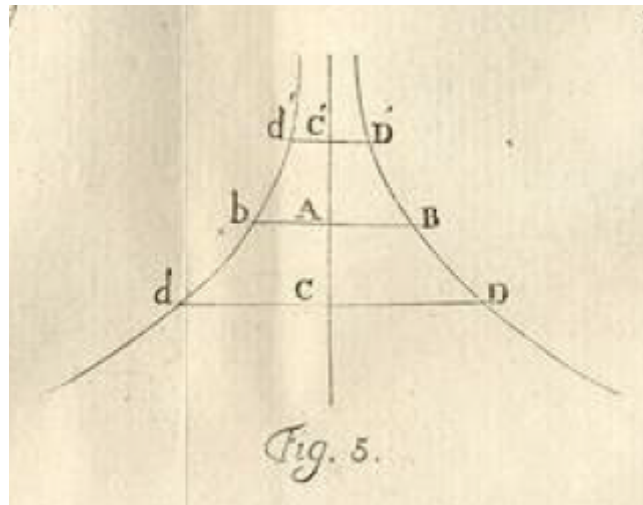


Figura 3.6: Curva logaritmica. Riccati 1788, p. 121.

osserva che:

Se al punto estremo *B* (Fig.5) [cioè figura 3.6] del protonumero $AB = 1$ corrispondesse unicamente il logaritmo uguale al nulla immaginario, il detto punto non competerebbe alla curva, ed intanto le compete, in quanto che ad esso punto si riferisce il logaritmo ugual al nulla reale. Dipende ciò dalla natura della logaritmica, in cui ad una serie geometrica di numeri reali dee riferirsi una serie aritmetica di logaritmi reali.⁵⁷

Riccati, quindi, riporta le due progressioni, nel caso in cui la base logaritmica sia 10:

$$\dots, \frac{1}{100}, \frac{1}{10}, 1, 10, 100, \dots$$

e

$$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Egli è patente, che dai logaritmi reali positivi si dee passare mediante il nulla reale agli eguali logaritmi negativi, essendo il nulla medio aritmetico fra 1 e -1 , fra 2 e -2 &c.

XII. Per una pari ragione, essendo pel metodo del dottissimo *Eulero* $\log .1 = \&c. -4p\sqrt{-1}, -2p\sqrt{-1}, 0 \cdot p\sqrt{-1}, +2p\sqrt{-1}, +4p\sqrt{-1}, \&c.$, il $0 \cdot p\sqrt{-1}$, ch'è medio aritmetico fra $-2p\sqrt{-1}$ e $+2p\sqrt{-1}$, fra $-4p\sqrt{-1}$ e $+4p\sqrt{-1}$, &c. tutte quantità immaginarie, ha da essere necessariamente immaginario. Il tanto celebre argomento adunque contro i logaritmi reali dei numeri negativi perde tutta la forza deducendosi evidentemente dai miei raziocinj, che il metodo del lodato Autore determina tutti immaginarj i logaritmi e dei numeri positivi, e dei numeri negativi. E siccome ciò non esclude, che ai numeri positivi competano dei logaritmi reali, altrettanto deve altresì affermarsi dei numeri negativi, ai quali non meno i logaritmi reali si adattano, che la quadratura dell'iperbola

⁵⁷Riccati 1788, p. 120.

fra gli assintoti, e la formola esponenziale della logistica $f\left(\frac{g}{f}\right)^{\frac{y}{b}} = x$ dimostrano uguali a quelli dei numeri positivi.⁵⁸

3.4.2 Gregorio Fontana e la natura dello zero

Dopo undici anni dalla pubblicazione dell'opera di G. Riccati, anche Gregorio Fontana pubblicò una memoria interamente dedicata alla questione dello zero: *Sopra la pretesa distinzione fra il nulla reale, e il nulla immaginario*.

L'opera ha inizio con un riferimento a Paolo Frisi e a Giordano Riccati:

1. *Il Cel. Frisi nella sua Algebra Cap. I. pretende, che sia un assurdo l'asserire, che lo zero moltiplicato per una quantità immaginaria dà un prodotto uguale a zero, cioè $0\sqrt{-1} = 0$, e ciò per la ragione, che dovendo nella moltiplicazione essere tra loro proporzionali l'unità, il moltiplicatore, il moltiplicando, e il prodotto, e non potendo sussistere la proporzione $1 : \sqrt{-1} = 0 : 0$, non può in conseguenza neppur sussistere l'equazione $0\sqrt{-1} = 0$. Dal che egli conchiude, che il niente d'immaginario indica piuttosto una quantità reale, che il nulla di quantità.*

2. *Anche Giordano Riccati in una Memoria intitolata, Teorema; il nulla immaginario non può confondersi col reale: nel Tomo IV. della Società Italiana, impegnato a combattere l'opinione di Eulero, e di que' Geometri, che sostengono essere immaginari i logaritmi de' numeri negativi ricava dall'equazione del ramo inferiore della Concoide, che il prodotto del nulla moltiplicato per l'immaginario non può essere un vero nulla.*⁵⁹ Fontana riporta, quindi, la costruzione della concoide e la conseguente dimostrazione fatta da Riccati. Tuttavia, l'autore afferma di non concordare con esse.

*Ma io confesso, che ad onta di queste ragioni prodotte da Frisi e Riccati per dimostrare, che il nulla immaginario è una quantità affatto diversa dal nulla o dallo zero, a me sembra d'un'evidente falsità una siffatta proposizione, la quale tende a sconvolgere tutti i principj dell'Algebra, e ad oscurare le idee fondamentali della moltiplicazione.*⁶⁰

Per Fontana, infatti, moltiplicare una quantità a (reale o immaginaria) per zero, significa sommare ad a il suo opposto:

*[...] e questo porre, e sottrarre la stessa quantità produce manifestamente il vero nulla, ossia lo zero. Così $0 \cdot a = a - a = 0$; come pure $0 \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-1} - \sqrt{-1} = 0$.*⁶¹

L'autore prosegue con l'analisi del ragionamento del matematico Frisi:

5. *La ragione addotta da Frisi per convalidare la sua asserzione sembra affatto insussistente; [...]*⁶²

Infatti, Fontana ritiene che se esiste la proporzione $1 : a = 0 : 0$, dove il quarto pro-

⁵⁸Riccati 1788, p. 120.

⁵⁹Fontana 1799, p. 174.

⁶⁰Fontana 1799, p. 175.

⁶¹Fontana 1799, p. 175.

⁶²Fontana 1799, pp. 175-176.

porzionale si ricava da $\frac{a \cdot 0}{1}$, allora esiste anche la proporzione $1 : \sqrt{-1} = 0 : 0$ perchè $\frac{\sqrt{-1} \cdot 0}{1} = 0$. Inoltre, il rapporto $\frac{0}{0}$, essendo indeterminato, può assumere qualsiasi valore, anche immaginario. L'autore dimostra quest'ultima affermazione nel modo seguente. Considera $\frac{n-n}{1-1} = \frac{0}{0}$, con n numero reale o immaginario.

[...] se di questa frazione si divide attualmente il numeratore pel denominatore; si ottiene per quoto la quantità n , e però si ha $\frac{0}{0} = n$, valore indeterminatissimo, tanto reale quanto immaginario.⁶³

Fontana riprende la dimostrazione di Riccati, individuando quello che ritiene essere il suo passaggio errato.

Meglio fondato e a prima vista perentorio è l'argomento del Riccati, tratto dalla Concoide. Ma esaminato a dovere trovasi appoggiato ad un falso supposto, che il Polo della Concoide sia un punto affatto estraneo a questa Curva, il quale non venga compreso, nè rappresentato dall'equazione di lei. Si risponde per tanto, che il Polo di tal Curva è un punto appartenente al sistema della medesima, e che resta compreso ancor esso nell'equazione della Curva. Questo è uno di que' punti, che si chiamano conjugati, i quali sebbene isolati e separati dal Contorno della Curva, a cui appartengono, formano però una parte essenziale di quella, in quanto che vengono regolati dalla stessa equazione, che esprime e caratterizza l'intero sistema della Curva. Intorno a ciò è da vedersi la famosa Introduction à l'Analyse des Lignes Courbes algébriques⁶⁴ di Gabriele Cramer,⁶⁵ il quale al num. 174. Es. IV. dimostra indipendentemente dall'espressione $0 \cdot \sqrt{-1}$, che il Polo della Concoide altro non è che un punto conjugato.⁶⁶

Fontana presenta altre tre dimostrazioni dell'uguaglianza $0 = 0\sqrt{-1}$. La prima è basata sulla circonferenza di raggio a di equazione: $x^2 + y^2 = a^2$.

L'autore ritiene infatti che se $a = 0$, la circonferenza si riduce ad un punto e $y = \sqrt{-x^2} = x\sqrt{-1}$. Dunque, y assume un valore immaginario se x è reale.

Tuttavia, nel caso in cui si prende $x = 0$ e $a = 0$, allora y assume valore reale nullo. Per evitare, quindi, una contraddizione deve valere necessariamente l'uguaglianza $0 = 0\sqrt{-1}$.

La seconda dimostrazione fornita si basa sulla funzione $y = (-\log x)^{\frac{1}{2}}$:

[...], che rappresenta la Curva campaniforme (Fig. 5.) [cioè figura 3.7] *FBE* dotata di due rami asintotici *BF*, *BE*, nella quale *AB* è l'asse delle ascisse x , e l'asintoto *SO* normale ad *AB* è l'asse delle ordinate y , e l'intersezione *A* è l'origine delle coordinate.⁶⁷

Se si pone $AB = x = 1$, allora, per costruzione, $y = 0$. Tuttavia, $y = (-\log 1)^{\frac{1}{2}}$ che, secondo l'autore, è uguale a $\sqrt{-0} = 0\sqrt{-1}$. Quindi, $0 = 0\sqrt{-1}$.

La terza dimostrazione di $0 = 0\sqrt{-1}$ proposta da Fontana è la seguente. Si consideri

⁶³Fontana 1799, p. 176.

⁶⁴Cramer G., *Introduction a l'Analyse des Lignes Courbes algébriques*, Ginevra, Chez les Freres Cramer & Cl. Philibert, 1750.

⁶⁵Gabriel Cramer (1704-1752).

⁶⁶Fontana 1799, p. 176.

⁶⁷Fontana 1799, p. 177.

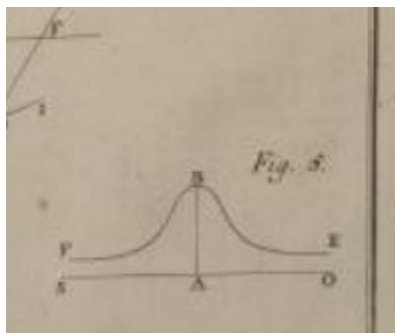


Figura 3.7: Curva campaniforme. Fontana 1799, p. 182.

la funzione $y = x\sqrt{x^2 - a^2}$. Se $x = 0$, allora $y = 0\sqrt{-a^2}$. L'autore dimostra che quest'ultima quantità è uguale allo zero reale. Infatti, $y^2 = x^4 - a^2x^2$, da cui si può ricavare x :

$$x = \pm \sqrt{\frac{a^2}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + y^2}}.$$

Se $x = 0$, allora $\pm \sqrt{\frac{a^2}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + y^2}} = 0$, da cui si ottiene $\frac{1}{2}a^2 = \mp \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + y^2}$. Elevando al quadrato entrambi i membri di quest'ultima equazione, si ha $y^2 = 0$, cioè $y = 0$.

*Dunque il valore di $y = 0\sqrt{-a^2}$ non è altro, nè altro può essere che lo zero assoluto; come ci siamo proposti di dimostrare.*⁶⁸

3.5 Al signor N. N. dubbj di P.M.C. sopra le riflessioni analitiche del signor abate Gioacchino Pessuti

Nella dedica di *Della proporzione bernoulliana*, Caldani fa riferimento ad una sua opera precedente, databile intorno al 1776, intitolata

AL SIGNOR N. N.
DUBBJ
di P. M. C. SOPRA LE RIFLESSIONI ANALITICHE
DEL SIGNOR ABATE
GIOCCHINO PESSUTI
GIA' PROFESSORE DI MATEMATICA NEL CORPO DE' CADETTI
NOBILI DI SANPIETROBURGO

⁶⁸Fontana 1799, p. 178.

*fatte intorno una Lettera del Sig. Abate
CONTE VINCENZO RICCATI,
Inserita nella nuova Raccolta stampata in Venezia l'anno 1776 di Opuscoli Scientifici, e
Filologici.*

In una lettera inviata all'abate Preti il 3 Ottobre 1778, Caldani parla dell'opera e vi allega una copia.⁶⁹

Riceva ella un esemplare di questa cosa, che ultimamente ho dato alle stampe, e che io Le avrei prima spedita, se fossi stato certo in occasione che ne inviassi vers'altri esemplari a Bologna, ch'ella si fosse perduta così. Compatisca la tenuità, e si ricordi, che Non sunt apta meae grandia vela rati.^{70 71}

Anche quest'opera è incentrata sulla proporzione bernoulliana e fa riferimento sia alle *Riflessioni Analitiche* di Gioacchino Pessuti, sia alle *Istituzioni Analitiche* di Vincenzo Riccati. Di seguito, è riportato l'incipit dell'opera.

AL SIGNOR N. N.

*Eccomi a palesarvi i miei dubbj sopra la Dimostrazione del Sig. Ab. Gioacchino Pessuti intorno al Teorema Bernoulliano, che la circonferenza del circolo abbia al diametro la proporzione di $L - 1 : \sqrt{-1}$. Ma guai a me, ch'egli arrivi a saperli! Se il Sig. Ab. Co. Vincenzo Riccati, che a nostri tempi ha avuto luogo fra i primi Matematici d'Italia, è stato trattato con espressioni piccanti, e poco convenienti alla stima, che dee professarsi a quel grand'Uomo per aver detto, che non bisogna ricevere l'accennata proporzione senza esame, e per avergli fatto rilevare con singolar modestia alcuni sbagli commessi nell'estratto, che fece delle Istituzioni Analitiche del medesimo Sig. Conte, cosa dovrei aspettarmi io per questi dubbj, che son per esporvi, io, che sapete quanto poco vaglia in tali materie? Custodite adunque con gelosa segretezza questo scritto, e ditemene poi il vostro sentimento, ch'io ho sempre stimato, e stimo moltissimo.*⁷²

L'autore considera un arco u di una circonferenza di raggio a , con tangente z . Riporta il procedimento di Pessuti, che consiste nell'integrare la quantità $du = \frac{a^2 dz}{a^2 + z^2}$ e ricavare:

$$u = \frac{a}{2\sqrt{-1}} \log \frac{a + z\sqrt{-1}}{a - z\sqrt{-1}}.$$

Ponendo la sottotangente all'arco di circonferenza uguale ad 1 e $z = a$, si ricava che la lunghezza di un ottavo di circonferenza è:

$$\frac{a}{2\sqrt{-1}} \log \frac{a + a\sqrt{-1}}{a - a\sqrt{-1}} = \frac{a}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1 + \sqrt{-1}}{1 - \sqrt{-1}}.$$

⁶⁹La lettera e l'opera, stampata su fogli non rilegati, sono conservati presso la Biblioteca Comunale dell'Archiginnasio di Bologna, fondo Tognetti.

⁷⁰Lettera conservata presso Biblioteca Comunale dell'Archiginnasio di Bologna, fondo Tognetti, con la copia dell'opera.

⁷¹La citazione latina, tratta da le *Elegie* di Propezio, può essere tradotta nel modo seguente:
Le grandi vele non sono adatte al mio naviglio.

⁷²Caldani 1776?, pp. 3-4.

Ma, $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$, dunque, la lunghezza di un ottavo di circonferenza vale $\frac{a}{2\sqrt{-1}} \log \sqrt{-1}$. In definitiva, Pessuti ha ricavato che la lunghezza della circonferenza di raggio a è

$$\frac{4a}{\sqrt{-1}} \log \sqrt{-1} = \frac{2a}{\sqrt{-1}} \cdot 2 \log \sqrt{-1} = \frac{2a}{\sqrt{-1}} \log(-1),$$

e che questa quantità sta al diametro $2a$, come $\log(-1)$ sta a $\sqrt{-1}$.

Caldani commenta questo ragionamento con le seguenti parole.

Così compie egli la sua dimostrazione, la qual certamente era facile a ritrovarsi, com'egli dice, e di fatti asserisce di averla trovata nell'età sua di 15, o 16 anni; e quindi rimprovera il Sig. Conte Vincenzo Riccati di non aver saputo indovinare questo semplicissimo giro di calcolo.

*Ebbene? Direte voi: Non è giusta questa dimostrazione? Io vi rispondo, che ne dubito, perchè non so comprendere, che tra la circonferenza, e il diametro passi quella proporzione, la quale passa fra una quantità reale, ed una immaginaria.*⁷³

L'autore contesta, come fa più volte in *Della proporzione bernoulliana*, l'uguaglianza $\log(-1) = 2 \log(\sqrt{-1})$.

*Io tengo L-1 per quantità reale, e non immaginaria, quale la reputa il Sig. Pessuti; ed essendo reale, considerate attentamente il calcolo, che egli fa, e vi accorgete, che istituisce una equazione, la quale non può reggere, cioè $L-1=2L \sqrt{-1}$. Le regole, che si applicano ai logaritmi delle quantità reali non sono applicabili in tutti i casi ai logaritmi delle quantità immaginarie. Le prime restano sempre in una stessa natura, le altre talvolta in virtù delle medesime regole la cangiano, e d'immaginarie diventano reali, e di reali immaginarie. A calcolare i logaritmi di tali quantità non è mai troppa una scrupolosa avvertenza, altrimenti si arriva a conseguenze, le quali hanno tutta l'apparenza di verità, ma ben considerate si ritrovano poi false. Chi sa, che tali non sieno queste mie medesime, ch'io vo deducendo? Pur questo sembra il motivo, per cui il Sig. Ab. Conte Vincenzo Riccati non abbia saputo indovinare il giro di calcolo del Sig. Pessuti.*⁷⁴

Caldani riporta il ragionamento che ha condotto Riccati a porre la lunghezza di una circonferenza di raggio a uguale a $4\sqrt{-1} \log \left(-a \cdot \frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} \right)$, esattamente come fa in *Della proporzione bernoulliana*.

Ma giunto a questa equazione egli [Riccati] non va più avanti; e ferdandosi richiede con qual giro di calcolo ritrova il Sig. Bernoulli essere la circonferenza al diametro, come $L-1:\sqrt{-1}$; e pare, che non vada più avanti non perchè non sapesse essere $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$, di che il Sig. Gioacchino lo accusa di non essersi accorto, ma perchè tuttavia sapendolo, nulla non gli avrebbe giovato, ove non fosse caduto nell'erronea equazione di $L-1=2L\sqrt{-1}$, nella quale ricade il medesimo Sig. Pessuti, mentre vuol dimostare, che il Riccati con poco niente avrebbe potuto dalla sua formola, istessa ricavare l'accennata proporzione fra la circonferenza, e il diametro. Anche il Sig. Eulero nel primo tomo stampato a Losanna

⁷³Caldani 1776?, pp. 4-5.

⁷⁴Caldani 1776?, p. 5.

della sua introduzione all'Analisi degl'infiniti, alla pag. 105., arrivato alla espressione dell'arco circolare $z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} L_{\frac{1+\sqrt{-1}\cdot \text{tang.}z}{1-\sqrt{-1}\cdot \text{tang.}z}}$ si contenta di esprimere la circonferenza per una serie, nella quale si risolve la quantità logaritmica, senza praticare il calcolo, di cui si serve il Sig. Gioacchino. Crederà egli che il Sig. Eulero non sapesse essere $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$?⁷⁵

Caldani prosegue dimostrando che le formule di Riccati e Pessuti per esprimere la lunghezza di una circonferenza di raggio $a = 1$ sono equivalenti.

- La formula trovata da Pessuti si può ricavare senza usare l'uguaglianza $2 \log(\sqrt{-1}) = -1$. Infatti, $\frac{4a}{\sqrt{-1}} \log\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}\right)$ è equivalente a $\frac{2a}{\sqrt{-1}} \cdot 2 \log\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}\right) = \frac{2a}{\sqrt{-1}} \log\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}\right)^2 = \frac{2a}{\sqrt{-1}} \log\left(\frac{2\sqrt{-1}}{-2\sqrt{-1}}\right)$, da cui si ricava che la lunghezza della circonferenza è $\frac{2a}{\sqrt{-1}} \log(-1)$.
- La formula trovata da Riccati è $4\sqrt{-1} \log\left(-a \frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}\right)$. Essa è equivalente a $-\frac{4a}{\sqrt{-1}} \log\left(-a \cdot \frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}\right) = \frac{4}{\sqrt{-1}} \log\left(\frac{a}{-a \frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}}\right) = \frac{4}{\sqrt{-1}} \log\left(\frac{-1+\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}\right) = \frac{2}{\sqrt{-1}} \log\left(\frac{-1+\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}\right)^2 = \frac{2}{\sqrt{-1}} \log(-1)$.

Che ve ne pare? Tutto bene: direte voi: ma finora si è supposto $L-1$ quantità reale, e il Sig. Gioacchino la vuole immaginaria (Leggi le pag. 25. 30 fino alla pag. 35. delle medesime Riflessioni): questo è il punto, che bisogna decidere. E' verissimo: ma io non farò altro, che proporvi le ragioni, le quali mi hanno indotto a tener per reale $L-1$, non ostanti le autorità d'Uomini grandissimi, che la reputano immaginaria, i quali per altro io riguardo con tutto l'ossequio, e con tutta quella venerazione, che i distinti loro meriti richieggiono. Esaminatele, ch'io son pronto ad abbandonarle, ove mi dimostrate; che contengono qualche errore. Mi restringerò dunque a parlarvi della sola quantità $L-1$, giacchè quanto all'altra $2L\sqrt{-1}$ non può cader dubbio a sentimento ancora del Sig. Pessuti, che non sia immaginaria, come pur si raccoglie dal risolverla in una serie.⁷⁶

Caldani considera l'equazione $e^y = x$: per qualsiasi valore reale attribuito a y si avrà $e^y \neq 1$. Dunque, si potrebbe dedurre che $\log(-1)$ è una quantità immaginaria, ma in realtà non è così. L'autore, per sostenere la propria tesi, fa riferimento alla dimostrazione geometrica di $\log(x) = \log(-x)$, con x reale, fatta da Riccati.⁷⁷

Io non so quanto legittima sia questa conseguenza: ben vi dico, che allora la terrei per vera, quando fosse dimostrato, che l'equazione $e^y = x$ comprendesse in tutta la sua estensione la natura della logaritmica. Se posta l'equazione $xy = aa$, dicessi essere immaginaria l'altra $xy = -aa$, perchè nella prima equazione qualunque valore positivo, o negativo, che si attribuisca alla x si ha sempre il prodotto $= aa$ positivo, vi pare, che

⁷⁵Caldani 1776?, pp. 6-7.

⁷⁶Caldani 1776?, pp. 9-10.

⁷⁷La dimostrazione è citata anche in *Della proporzione bernoulliana*.

discorri bene? Ove si contempli la semplice equazione $xy = aa$, sì certamente, ma non già quando si contempli la equazione più generale $xy = \pm aa$, dalla quale ricaviamo esser realissima l'equazione $xy = -aa$, ed esprimere l'iperbola fra gli assintoti situata in uno degli angoli adiacenti a quello, ov'è situata l'iperbola espressa per l'equazione $xy = aa$. Ma essendo stato dimostrato, e potete vederle nelle Istituzioni Analitiche del Signor Conte Vincenzo Riccati [nè il Sig. Pessuti, che ne ha fatto l'estratto, gli ha contraddetto] che la Logaritmica ha due rami, talchè ad ogni logaritmo corrispondono due numeri, uno positivo, l'altro negativo, vi accorgerete facilmente, che l'equazione $e^y = x$ non esprime, che il primo ramo, e però non in tutta la sua estensione rappresenta la natura della logaritmica; quindi è, che posta $y = 0$, ovvero a qualunque quantità reale positiva, o negativa, non riesce mai $e^y = -1$. Che se voi prenderete una equazione più generale, qual per esempio potrebb' essere $e^y = \pm x$, ovvero quella, che trovasi nel tomo secondo Lib.1. Cap.9. alla pag. 138. delle Istituzioni del detto Signor Conte, cioè $x^m = \frac{f^{m*n} e^{\frac{y}{f}}}{a^n}$, troverete mediante la prima potersi aver facilmente $e^y = -1$, e mediante la seconda, che fatta $f = a = n = 1$, e posta $m = 2$, sarà $e^y = x^2$, [...] e posto $y = 0$ avremo $x = \pm 1$: ma essendo la base logaritmica = e , l'esponente variabile diventa logaritmo del numero, dunque $0 = L \pm 1$; dunque non solamente $0=L1$, ma ancora, $0=L-1$.⁷⁸

Caldani prosegue con il dimostrare che $\log\left(\frac{-1+x}{1-x}\right) = \log(-1)$.

Infatti, $\log(-1+x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \dots$ e $\log(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \dots$. Inoltre, $\log\left(\frac{-1+x}{1-x}\right) = \log(-1+x) - \log(1-x)$,

[...] dunque sottraendo dalla prima serie la seconda, avremo il valore di $L-1$; ma dopo l'accenata sottrazione il valor della serie = 0, dunque, $L-1 = 0$. Questi son i fondamenti, su quali ho finora pensato, che sia $L-1$ quantità reale, e che per conseguenza non possa paragonarsi colla quantità immaginaria $2L\sqrt{-1}$. Per altro vi ripeto di esser pronto a rinunziare a queste ragioni, ove mi sieno mostrate infette di qualche falsità.⁷⁹

Caldani, riporta un estratto dell'opera di Pessuti, per dimostrare che egli stesso ha ricavato $\log(-1) = 0$.

Ma osservate di più, che dal calcolo istesso del Signor Pessuti si ricava $L-1=0$. Facendo egli nella sua formola $z = 0$, $a = 1$ deduce $\frac{1}{2\sqrt{-1}}L1$: "quindi chiamando p la mezza circonferenza la tangente $z = 0$ corrisponde agli archi $0 \pm p \pm 2p \pm 3p$, &c., ed in genere all'arco mp , intendendo per m qualunque numero intero positivo, o negativo; dunque si avrà $mp = \frac{1}{2\sqrt{-1}}L1$, e però $L1=2mp\sqrt{-1}$ " dal che ricava, secondo i valori di m ; " $L1=0, \pm 2p\sqrt{-1}, \pm 4p\sqrt{-1}$ &c." Prima di andar avanti a notare, come di passaggio, che alla tangente reale $z = 0$ il Signor Pessuti fa corrispondere $\frac{1}{2\sqrt{-1}}L1$, ch'è una quantità immaginaria. Può egli ciò mai avvenire? Proseguiamo. "Si cerchino, continua egli, i logaritmi di un qualunque numero negativo $-a$. Poichè non solo il semiquadrante ha la sua tangente $z = 1$, ma ancora una infinità di archi compresi nella formola generale $45^\circ + mp$ intendendo per m, p le medesime quantità di prima, in luogo di essere solamente

⁷⁸Caldani 1776?, pp. 9-11.

⁷⁹Caldani 1776?, pp. 11-12.

il semiquadrante = $\frac{1}{2\sqrt{-1}}L\sqrt{-1}$, come si è supposto nella dimostrazione del teorema, sarà più generalmente $45^\circ + mp = \frac{1}{2\sqrt{-1}}L\sqrt{-1}$.” Fin qui il Sig. Pessuti.⁸⁰

Caldani prosegue con un ragionamento simile a quello presente in *Della proporzione bernoulliana*: poichè $p = \frac{2}{\sqrt{-1}}\log(\sqrt{-1})$, allora $\frac{p}{4} = 45^\circ = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\sqrt{-1}$. Considerando $45^\circ + mp = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\sqrt{-1}$, con $m = 1$, e sostituendo a 45° e a p i rispettivi valori, si ottiene:

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\sqrt{-1} + \frac{2}{\sqrt{-1}}\log(\sqrt{-1}) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\sqrt{-1},$$

cioè calcolando alla maniera del Signor Pessuti, dovrà essere $2L\sqrt{-1}=0$; ma per lui $2L\sqrt{-1}=L-1$; dunque $L-1=0$.⁸¹

L'autore afferma di aver condiviso i propri dubbi relativi all'opera di Pessuti con un altro matematico, il cui nome è omissis.

Parlando col Signor N. N. nostro comune amico del libro del Signor Pessuti, dopo di avergli comunicati i motivi, pe' quali non mi sembrava, che reggesse la sua dimostrazione, mi disse, ch'egli pur ne dubitava per le stesse ragioni, onde ne dubito io, e inoltre, che non vedea ben chiaro, come il Signor Pessuti arrivasse a trovar quell'integrale, che ha prodotto, della sua formola. Volete sentirne il suo discorso? Eccolo in breve. Non so intendere, diceva egli, perchè il Signor Abate non faccia menzione alcuna della costante da aggiungersi all'integrale. Pare, ch'egli la voglia uguale al nulla; ma leggendosi poi la pag. 24. del suo libro delle riflessioni Analitiche, dà occasione di sospettare, che abbia sbagliato nel fissarla. Per trovare la detta costante dee egli aver supposta $z = 0$ nella sua formola $\frac{a}{2\sqrt{-1}}L\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}$; e in tal supposizione, come stà scritto nell'accenata pagina, egli ricava $\frac{a}{2\sqrt{-1}}L1$. Ora io dubito, soggiungeva egli, che questo non sia il valore, che nasca in tal supposizione, e ne dubito per due ragioni. La prima è questa. Veggasi qual valore debba ricevere la z , perchè sia la frazione $\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}} = 1$, troveremo $2z\sqrt{-1} = 0$, cioè z immaginaria;⁸² dunque, sostituendo per z un valore qualunque reale è impossibile, che la frazione di sua natura divenga = 1, e sarà sempre immaginario il valore di essa: ma il Signor Gioacchino mettendo $z = 0$ dà un valore reale alla z ; dunque il valor della frazione dee riuscire immaginario, e non reale = 1, come egli pretende. La seconda ragione è questa, che serve ancora a dichiarare la prima. Posta $z = 0$ nella frazione $\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}$, si ha $\frac{a+0\sqrt{-1}}{a-0\sqrt{-1}}$. Il Signor Pessuti pensa, che il valore di questa frazione sia = 1, ma perchè ciò valesse, sarebbe necessario, che fosse $a + 0\sqrt{-1} = a$, e così $a - 0\sqrt{-1} = a$, nel qual caso dovrebbe pur essere $0 = 0\sqrt{-1}$. Egli è però certo, che $0 : 0\sqrt{-1} :: a : a\sqrt{-1}$, da quale analogia par, che debba raccogliersi non potersi asserire $0 = 0\sqrt{-1}$ ⁸³ perchè dovrebbe pur essere $a = a\sqrt{-1}$, e così, che non sia $\frac{a+0\sqrt{-1}}{a-0\sqrt{-1}} = 1$.[...] Eccovi quanto mi significò il nostro comune amico, e ch'io ho voluto comunicarvi. Cosa io ne pensi, non

⁸⁰Caldani 1776?, pp. 12-13.

⁸¹Caldani 1776?, p. 13.

⁸²Implicitamente, si sta supponendo $0 \neq 0\sqrt{-1}$.

⁸³Questa dimostrazione di $0 \neq 0\sqrt{-1}$ è riportata in *Della proporzione bernoulliana*.

*voglia per ora diverlo. Pensateci voi, e di queste di lui ragioni, e delle mie fate, ch'io abbia il vostro giudizio, ch'io tengo in sommo pregio, e pregandovi &c.*⁸⁴

Con queste parole si conclude l'opera.

⁸⁴Caldani 1776?, pp. 14-16.

Conclusioni

Questo elaborato è stato incentrato sull'analisi della memoria del matematico bolognese Petronio Maria Caldani, intitolata *Della proporzione bernoulliana fra il diametro, e la circonferenza del circolo e dei logaritmi* del 1782.

E' stata ricostruita la biografia dell'autore, ponendo l'accento sulla sua formazione, della quale si sono occupati Eustachio Zanotti e Vincenzo Riccati. In particolare, è emerso come Caldani fu particolarmente legato a quest'ultimo, che difese pubblicamente dalle critiche che gli erano state mosse in seguito alla pubblicazione delle *Institutiones Analyticae*. Inoltre, è stato osservato come nell'arco della sua vita, l'autore abbia ricoperto diversi incarichi. Oltre ad essere stato docente di Geometria analitica dal 1764 al 1797 presso l'Università di Bologna, ebbe anche diversi impegni politici, che culminarono con la nomina di ambasciatore a Roma del Senato bolognese. Caldani ricoprì la cattedra di Geometria analitica, dopo che questa fu lasciata vacante per tre anni, in seguito alla morte del lettore Gabriele Manfredi. A causa degli impegni amministrativi, fu costretto a trasferirsi a Roma per alcuni anni. Durante i periodi di assenza, fu sostituito da Giambattista Guglielmini e Girolamo Saladini, nominati professori onorari.

Al periodo romano risale la collaborazione di Caldani con l'Antologia Romana, nella quale è riportata la disputa matematica che lo coinvolse, dall'agosto del 1783 all'ottobre del 1787, insieme a Gianbattista Nicolai, docente dell'Università di Padova. Tale controversia ebbe origine quando il matematico bolognese sostenne di aver trovato tre errori nell'opera di Nicolai *Della possibilità della reale soluzione analitica del caso irriducibile*, contenuti nella dimostrazione dell'uguaglianza tra $\frac{1+\sqrt{1-q}}{1-\sqrt{1-q}}$ e $\frac{1-\sqrt{1-q}}{1+\sqrt{1-q}}$.

Oltre che per questa controversia, Caldani è senza dubbio ricordato per essere stato uno degli attori principali nel panorama italiano nella discussione sulla natura dei logaritmi dei numeri negativi. Sono state descritte le origini e gli sviluppi a livello europeo di tale controversia, nella quale sono intervenuti in modo particolare Johann Bernoulli, Leibniz ed Eulero: è emerso che i metodi dimostrativi erano basati sia su costruzioni puramente geometriche, sia su implicazioni di tipo algebrico. Inoltre, è stato mostrato come in Italia questa disputa si è indirizzata sulle questioni della proporzione bernoulliana e dell'uguaglianza tra lo zero reale e quello immaginario.

Questa descrizione ha permesso di inquadrare il contesto nel quale si inserisce l'opera di Caldani. In *Della proporzione bernoulliana fra il diametro, e la circonferenza del circo-*

lo e dei logaritmi, l'autore ha sostenuto apertamente la tesi bernoulliana sull'uguaglianza tra il logaritmo di un numero positivo e quello del suo opposto, rifiutando, quindi, la soluzione di Eulero che attribuisce ad un numero negativo infiniti logaritmi immaginari. Inoltre, servendosi della proporzione $0 : 0\sqrt{-1} = a : a\sqrt{-1}$, con a numero reale, ha contestato l'uguaglianza tra lo zero reale e quello immaginario.

Oltre al pensiero di Caldani, sono stati analizzati, in modo più generale, quelli di altri matematici dell'epoca che sono intervenuti nella controversia ed hanno avuto corrispondenze epistolari con il matematico bolognese. Tra questi ricordiamo, in particolare, i fratelli Vincenzo e Giordano Riccati, Gregorio Fontana e Gianfrancesco Malfatti.

Dalle osservazioni fatte, si può dedurre, innanzitutto, che in Italia alla fine del Settecento i concetti di infinito ed infinitesimi, sui quali si basava la tesi di Eulero, non erano ancora del tutto chiari. Inoltre, non era stata ancora ben definita la natura dei numeri complessi e delle loro relazioni con i numeri reali.

In definitiva, questo ci permette di affermare che i matematici italiani del Settecento incentrarono le loro opere sui risultati di Bernoulli, Eulero e degli altri illustri matematici europei, ma non riuscirono a coglierne appieno le loro portate, basando spesso le proprie riflessioni su paradossi del calcolo che non portarono a nessuna soluzione definitiva.

Bibliografia

- [1] Agostini A., *La teoria dei logaritmi da Mengoli ad Eulero*, Periodico di Matematiche, serie IV, vol. II, 1922, pp. 430-451.
- [2] Agostini A., *La teoria dei logaritmi dal 1750 al 1800*, Periodico di Matematiche, serie IV, vol. III, 1923, pp. 177-190
- [3] Bagni G. T., *Una “controversia” della matematica del Settecento: i logaritmi dei numeri negativi*, Periodico di Matematiche, serie VII, vol. II, 1994, pp. 95-106.
- [4] Borgato M. T., *Giambattista Guglielmini una biografia scientifica*, Bologna, CLUEB, 2007.
- [5] Borgato M. T., Fiocca A., *Carteggio De diurno terrae motu, Canterzani, Isolani, Matteucci, Bonfioli Malvezzi, Caldani, Calandrelli, Bonati*, Firenze, Leo S. Olschki editore, 1994.
- [6] Caldani F., *Memorie intorno alla vita ed alle opere di Leopoldo Marco Antonio Caldani*, Modena, Tipografia Camerale, 1822.
- [7] Caldani P. M., *Al Sig. N.N. Dubbi di P. M. C. sopra le riflessioni analitiche del signor abate Gioacchino Pessuti*, Roma, 1776?.
- [8] Caldani P. M., *Della proporzione bernoulliana fra il diametro e la circonferenza del circolo e dei logaritmi*, Bologna, Stamperia di Lelio della Volpe, 1782.
- [9] De Tiplado E., *Biografia degli italiani illustri nelle scienze, lettere ed arti del secolo XVIII, e de' contemporanei*, Venezia, Tipografia di Alvisopoli, vol. V, 1837.
- [10] Eulero L., *Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires*. In L. Euleri Opera Posthuma, Petropoli, vol. I, 1862, pp. 268-278.
- [11] Eulero L., *De la controverse entre Mrs. Leibnitz & Bernoulli sur les logarithmes des nombres negatives et imaginaires*. Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, vol. 5, 1751, pp. 139-179.

- [12] Fontana G., *Sopra i logaritmi delle quantità negative e sopra gli immaginari*, Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana delle Scienze, Tomo I, 1782, pp. 183-202.
- [13] Fontana G., *Sopra la pretesa distinzione fra il nulla reale e il nulla immaginario*, Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana delle Scienze, Tomo VIII, parte I, 1799, pp. 174-183.
- [14] Giuntini S., *Una discussione sulla natura dello zero e sulla relazione fra i numeri immaginari e i numeri reali (1778-1779)*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, vol. IV, n. 1, 1984, pp. 25-63.
- [15] Giuntini S., *Gabriele Manfredi e l'insegnamento della matematica a Bologna nel XVIII secolo*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, vol. XXIX, n. 2, 2009, pp. 207-282.
- [16] Lugaresi M. G., *Idrodinamica e idraulica, le raccolte sul moto delle acque, la questione del Reno*, Università degli Studi di Ferrara, 2013, pp. 206-212.
- [17] Lugaresi M. G., *Il carteggio Gianfrancesco Malfatti-Giordano Riccati*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, 40 (2020), n. 1, pp. 1-296. ISSN 0392-4432
- [18] Mazzetti S., *Repertorio de' professori della celebre Università di Bologna*, volume unico, Bologna, Tipografia di S. Tommaso D'Aquino, 1847.
- [19] Negrini P., *Dispense del corso di Elementi di analisi e di ricerca operativa*, Università di Bologna, 2020.
- [20] *Nuovo Giornale de' Letterati d'Italia*, Modena, Tomo I, 1773, pp. 43-44.
- [21] Peiretti F., *Eulero, il ciclope matematico*, Politecnico di Torino,
<https://areweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/Interventi/Articoli/EuleroAnniversario/EuleroAnniversario.htm>
- [22] Riccati G., *Teorema: il nulla immaginario non può confondersi col nulla reale*, Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, Tomo IV, 1788, pp. 116-122.
- [23] Riccati V., *Lettera all'autore della relazione delle Istituzioni Analitiche dell'ab. Conte Vincenzo Riccati inserita nel Nuovo Giornale d'Italia Tomo primo, secondo e terzo*, Nuova raccolta d'opuscoli, III, 1776, pp. 8-25.
- [24] Rosso R., *Dispense del Corso sulla Storia dei Logaritmi*, Università di Pavia, 2010.
<http://www-dimat.unipv.it/~rosso/logaritmi.pdf>