

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

**CLASSIFICAZIONE DELLE GALASSIE:
Caratteristiche morfologiche, fotometriche e
cinematiche**

Tesi di Laurea

Presentata da:
Matteo Tordi

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Daniele Dallacasa

*Heaven is under our feet
as well as over our heads.
Henry David Thoreau - Walden*

*Ai miei compagni di studio,
di avventure e di vita.
Buona strada ad ognuno di voi*

Indice

Introduzione	v
1 Proprietà morfologiche e classificazione	1
1.1 Classificazione di Hubble	1
1.2 Early type galaxies	2
1.2.1 Galassie ellittiche	3
1.2.2 Galassie lenticolari	3
1.3 Late type galaxies	4
1.3.1 Galassie a spirale	4
1.3.2 Galassie irregolari	6
1.4 Correzione di de Vaucouleurs	6
2 Proprietà fotometriche	8
2.1 Galassie ellittiche	9
2.1.1 Legge di de Vaucouleurs	10
2.1.2 Leggi di scala e piano fondamentale	10
2.2 Galassie a spirale	12
2.2.1 Legge di Tully-Fisher	12
3 Proprietà cinematiche	13
3.1 Galassie ellittiche	13
3.2 Galassie a spirale	15

Sommario

Nel corso dell'elaborato viene presentata una descrizione delle proprietà morfologiche, fotometriche e cinematiche delle galassie che aspira ad essere sintetica e a raggiungere allo stesso tempo un buon grado di completezza. Per quanto tali caratteristiche siano strettamente interdipendenti, è stato ritenuto opportuno articolare il tutto in tre capitoli distinti. Nel primo è esposta la classificazione introdotta da Hubble, ponendo in luce anche le relative correzioni apportate in seguito, e sono esaminati gli aspetti morfologici dei sistemi, connessi alla classe a cui essi appartengono. Si prosegue con lo studio dei caratteri fotometrici delle galassie, impostando in primo luogo la trattazione sulle definizioni delle osservabili fondamentali e successivamente soffermandosi sulle molteplici leggi di scala concernenti le differenti tipologie di galassie. Infine l'attenzione è volta alle caratteristiche cinematiche, con le quali si apre la strada ad un livello più profondo di comprensione fisica di tali sistemi.

Introduzione

Osservando su grande scala l'universo visibile attraverso i nostri strumenti, questo ci appare essenzialmente composto di infinite unità elementari: le galassie, le cui proprietà da ormai un secolo sono al centro dell'attenzione della comunità astrofisica. Dobbiamo l'etimologia di questa parola agli antichi Greci, i quali associarono al mito il chiarore diafano osservato nelle notti meno offuscate. Galassia deriva infatti da *gala*, *galaktos*, che significa latte, lo stesso stillato del seno di Era nell'allattare il vigoroso Eracle.

Più recentemente, Galileo fu il primo nel 1610 a guardare alla chiara striscia celeste con gli occhi della scienza, scoprendola formata da una miriade di stelle indistinguibili ad occhio nudo a causa delle ridottissime distanze tra loro. Alla fine del XVIII secolo il filosofo Immanuel Kant arricchì di fascino e domande il concetto di galassia, ipotizzando (correttamente) che la Via Lattea potesse trattarsi di un insieme rotante di stelle la cui coesione è data dall'attrazione gravitazionale, in maniera analoga al Sistema Solare ma su scala enormemente più grande. Kant, inoltre, congetturò che alcune delle nebulose visibili nel cielo notturno fossero in realtà galassie separate dalla nostra.

L'idea di Kant trovò presto contatto con la realtà: tra gli anni '40 e '50 dell'Ottocento Lord Rosse identificò diverse nebulose come strutture distintamente spiraliformi, ponendo le basi del *grande dibattito* che incendiò l'inizio del '900. Fino al 1920 infatti si pensava che queste cosiddette nebulose spirali fossero oggetti appartenenti alla nostra galassia, della quale ancora non erano state stimate precisamente le dimensioni. Tutto ad un tratto la comunità astronomica si spaccò in due: da un lato Harlow Shapley e chi come lui sosteneva che le nebulose spirali fossero parte della Via Lattea, coincidente con l'intero Universo, dall'altro Heber Curtis insieme agli altri astronomi che appoggiavano la visione per cui le suddette nebulose fossero altre galassie del tutto simili alla nostra.

La questione fu risolta solo nel 1925 ad opera di Edwin Hubble, il quale dalle osservazioni compiute col telescopio Hooker da 100" di Mt. Wilson ricavò le evidenze della presenza di *Cefeidi* in diverse nebulose spirali. Pochi anni prima, nel 1908, Henrietta Swan-Leavitt aveva scoperto la *relazione periodo-magnitudine* esistente per questa peculiare famiglia di stelle e ciò consentì ad Hubble di ricavare le distanze delle nebulose osservate, stabilendo inesorabilmente la natura extragalattica delle stesse. Con questo passo da gigante nelle dimensioni cosmiche, ebbe inizio la cosmologia moderna.

Capitolo 1

Proprietà morfologiche e classificazione

Il primo approccio allo studio delle galassie viene offerto dall'analisi della loro morfologia, in quanto questa è inscindibilmente legata a svariate proprietà più profonde di questi oggetti, quali contenuto di gas, momento angolare, popolazioni stellari, SFR¹, ambiente etc. Al fine di comprendere più profondamente la loro formazione ed evoluzione, è opportuno sviluppare un sistema di catalogazione delle galassie in grado di riprodurre con precisione la varietà delle configurazioni osservate.

Una qualsiasi classificazione morfologica delle galassie è, per sua natura, una *schema-tizzazione* e porta con sé, perciò, alcune limitazioni da tenere in conto prima di procedere con incondizionata – ed imprudente – fiducia: in primo luogo, le galassie sono enti privi di confini netti e la loro osservazione dipende dalle lunghezze d'onda scelte, dall'orientazione e dal redshift; secondariamente, nonostante si tenti di basare il processo unicamente sui parametri fisicamente rilevanti, viene comunque lasciato spazio alla scelta soggettiva dell'osservatore; infine, è possibile indagare solo una frazione di tutte le galassie, discriminate in base alla potenza degli strumenti usati, i quali selezionano solo le galassie abbastanza grandi e luminose da poter esser rilevate.

Un contributo fondamentale a tale proposito fu apportato da E. P. Hubble, quando nel 1936 presentò al mondo² la classificazione delle galassie da lui coniata, tuttora identificata col suo nome.

1.1 Classificazione di Hubble

La classificazione di Hubble è il primo strumento che venne fornito agli astronomi per catalogare la multiformità degli oggetti osservati. Mostrato nella figura 1.1, questo diagramma raffigura le varie morfologie galattiche identificate da Hubble: ellittiche (**E**), spirali (**S**), lenticolari (**SO**) ed irregolari (**Irr**, non presenti nel diagramma). La caratteristica forma a diapason viene dalla divisione tra spirali normali (**S**) e barrate (**SB**), a seconda della forma assunta dal bulge. Al momento della pubblicazione del suo saggio, Hubble sosteneva erroneamente di aver descritto una sequenza di sviluppo temporale da

¹i.e. star formation rate

²Hubble è stato uno dei più grandi astronomi osservativi del XX secolo. Nel 1935 descrisse le conclusioni tratte dalle osservazioni col telescopio Hooker di Mt. Wilson (l'imponente 100"/2.5m) nel corso delle *Silliman lectures* tenutesi all'università di Yale. Queste conferenze furono raccolte e pubblicate l'anno seguente col titolo *The Realm of the Nebulae* [1]

sinistra a destra: le galassie da lui immaginate nascevano come sferoidali (perciò definite *early-type*) ed evolvevano sempre più verso la forma a disco (*late-type*), attraversando la fase di raccordo rappresentata dalle lenticolari (anch'esse ETGs). Le galassie irregolari sono considerate LTGs.

Oggi sappiamo che questa si tratta di una visione errata per diversi motivi: innanzitutto, è impossibile che sistemi ricchi di gas come le galassie a spirale si originino a partire da galassie che ne sono povere, come le ellittiche. Secondariamente, i dati osservativi non combaciano con le conseguenze logiche a cui si giungerebbe nel caso in cui Hubble non si fosse sbagliato, vale a dire che, pur essendo passati 13.8 Gyr dalla nascita dell'universo, non si osserva una maggioranza di LTGs rispetto alle ETGs. Un altro argomento a sfavore della formazione di ellittiche per *merging* di spirali è quello cinematico, legato alla diversa densità dello spazio delle fasi dei due sistemi, che è molto meno denso nel caso delle galassie a spirale. L'unico modo per aumentare di diversi ordini di grandezza tale densità è quella di "aggiungere" nuove stelle, andando perciò a ringiovanire l'età del sistema e allontanandosi ulteriormente dall'età misurata per le galassie E.

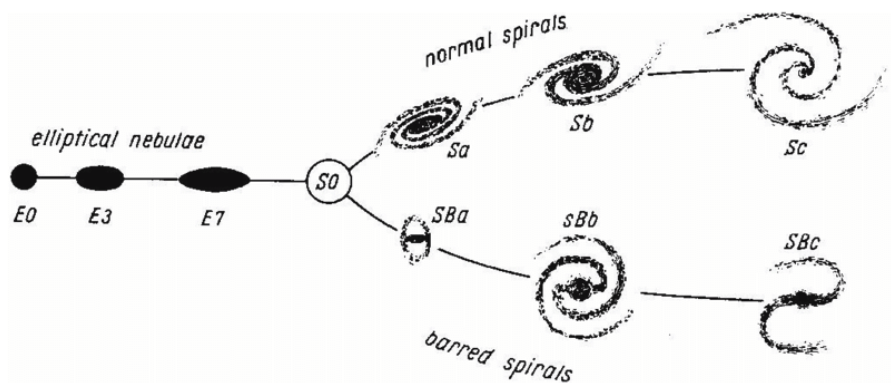


Figura 1.1: Sequenza di Hubble nella versione originale, con la celebre forma a diapason [1]

1.2 Early type galaxies

Hubble raggruppa come *early type* le galassie ellittiche e lenticolari, accomunate dalla regolarità del profilo, privo di sotto-strutture rilevanti, e dalla popolazione stellare prevalente al loro interno³. Sono sistemi caratterizzati dalla prevalenza di stelle rosse e nane brune – dato che evidenzia lo scarsissimo tasso di formazione stellare – che quindi hanno formato il grosso delle stelle in passato, con SFR molto maggiore. Galassie di questo tipo posseggono, difatti, ridottissime quantità di gas freddo (relativamente alla massa di stelle), essendo questo invece presente principalmente nella fase calda (HIM) e perciò praticamente inutilizzabile per la formazione di nuove stelle.

³Bisogna tenere presente che il concetto di popolazione stellare sfuma di significato nel momento in cui ci si allontana dallo scopo per cui è stato sviluppato, ovvero lo studio delle stelle nei dintorni solari. Per l'appunto, le stelle nelle galassie *early type* sono sia estremamente vecchie che ricche di metalli, dati apparentemente in contrasto se rigidamente catalogate nella Pop II. Tra i fenomeni che possono rendere tali stelle così metalliche vi è la teoria del *collasso monolitico*, che permetterebbe alle ETGs più massive di conservare il gas caldo ricco di metalli, residuo delle supernove, all'interno del sistema, cosicché le stelle delle successive generazioni abbiano una metallicità maggiore delle precedenti. Per le galassie che non sono situate in aloni di materia oscura abbastanza massicci, si ha invece un impoverimento progressivo di metalli [2].

1.2.1 Galassie ellittiche

Le galassie ellittiche sono sistemi stellari che presentano un aspetto sferoidale omogeneo, così chiamati in quanto presentano **contorni isofotali** di forma ellittica, con stessa orientazione e centrati nel nucleo (vedi par.2.1). Sono classificate morfologicamente in base al valore assunto dal parametro di **ellitticità**, definito come:

$$\epsilon = 1 - \frac{b}{a} \quad (1.1)$$

in cui a e b sono rispettivamente il semiasse maggiore e minore dell'ellissoide proiettato sul piano del cielo. ϵ esprime quindi il grado di elongazione dell'oggetto e solitamente le galassie ellittiche si identificano con l'espressione En dove $n = 10\epsilon$. Alla sigla E0 corrispondono perciò oggetti dall'immagine circolare, mentre il limite superiore è per $n = 7$, in quanto per $n > 7$ è possibile dimostrare che non possono esistere sistemi dinamicamente stabili (limite probabilmente derivante dalla *firehose instability*, che impedisce di avere un rapporto tra semiassi maggiore di 1:3).

Chiaramente nella classificazione delle galassie ellittiche si prendono in considerazione caratteristiche "apparenti", mentre determinare la struttura intrinseca che dà luogo ad una certa immagine è una questione più complessa. Per esempio si potrebbe pensare che tali sistemi siano tutti tridimensionalmente uguali e che l'unica differenza tra essi sia l'angolo di osservazione; se così fosse, però, si osserverebbero anche galassie ellittiche E8, E9 ed E10, dato smentito dalle indagini statistiche. Sono quindi distinti tre tipi di ellipsoidi di rotazione, corrispondenti alle diverse morfologie di galassie ellittiche: oblati, prolato e triassiale, osservabili nella figura 1.2. Sempre dalla statistica, anche tramite l'osservazione dell' *isophotal twisting* (vedi par.2.1), emerge la prevalenza di sistemi triassiali tra le configurazioni assunte dalle galassie ellittiche.

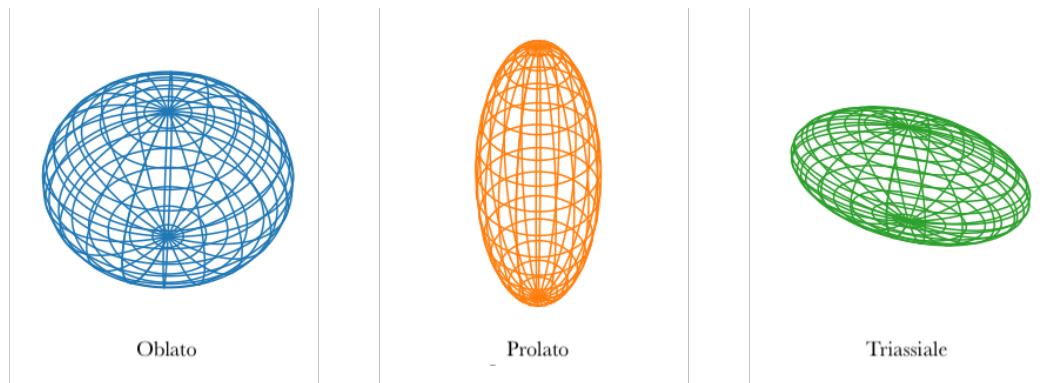


Figura 1.2: Ellipsoidi associati alla struttura 3D delle galassie ellittiche. L'oblati possiede due semiassi uguali maggiori di un terzo ($a = b > c$), il prolato ne ha due uguali minori del terzo ($a = b < c$) ed il triassiale ha tutti i semiassi diversi ($a \neq b \neq c$) [3].

1.2.2 Galassie lenticolari

Le galassie lenticolari rientrano nelle *early type* pur essendo considerabili sotto alcuni aspetti un ibrido tra le ellittiche e quelle a disco. Sono infatti composte da stelle della stessa popolazione delle prime, ma allo stesso tempo presentano un disco dal chiaro profilo esponenziale, che le rende quindi simili alle galassie a spirale, in particolare alle Sa, per le dimensioni del bulge sul totale. A differenza di queste ultime però, nell'osservare le S0

non si notano strutture a bracci, peculiari invece nelle spirali, così come anche gas freddo e materia interstellare sono praticamente assenti; tutto ciò rivela come la presenza di gas costituisca un requisito di grande importanza per il processo che porta un disco stellare a sviluppare e mantenere dei bracci. La distribuzione delle lenticolari è più concentrata in corrispondenza delle zone di alta densità degli ammassi di galassie. Questo fatto, insieme alle somiglianze con le galassie a spirale, ha portato ad ipotizzare che le S0 siano in realtà galassie a spirale a cui è stato “portato via” il gas interstellare nel corso delle interazioni con il gas caldo ($\simeq 10^{7-8}\text{K}$) dell’ammasso di galassie.

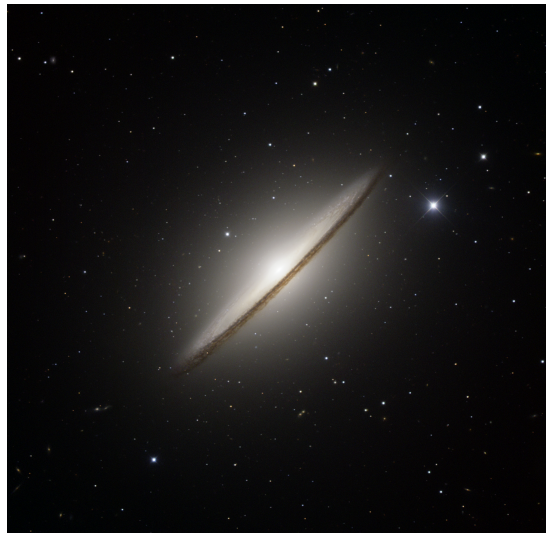


Figura 1.3: Immagine della Galassia Sombrero (M104) costruita coi dati ottenuti dal Danish 1.54-metre telescope all’ESO La Silla Observatory in Chile [4]. Chiaramente, si tratta di una galassia lenticolare.

1.3 Late type galaxies

Rientrano tra le LTGs le galassie a spirale e quelle irregolari, entrambe contraddistinte dalla ricchezza di **ISM** in varie fasi, al contrario delle ETGs. Tali galassie mostrano distribuzioni spettrali più ricche nel blu, motivate dall’intensa formazione stellare che interessa le regioni più ricche di gas freddo. Sempre a causa dell’abbondanza di gas e polvere, le morfologie di questi sistemi sono più variegata e irregolare rispetto ai precedenti.

1.3.1 Galassie a spirale

La sequenza di Hubble dopo le S0 si divide, formando la figura a diapason data dalle due serie parallele relative alle galassie a spirale. Sicuramente le più appariscenti e spettacolari tra i sistemi di questo tipo, queste galassie si differenziano dalle ETGs per vari motivi: prima di tutto presentano una struttura del disco differenziata, con i caratteristici bracci a spirale a cui devono per l’appunto il nome; in secondo luogo contengono l’ISM in tutte le sue fasi (HIM nel bulge, WNM nel disco, WIM e CNM nei bracci) e a ciò si lega l’alto tasso di formazione stellare osservato. Nell’Universo le galassie a disco si trovano principalmente in regioni a bassa densità mentre sono quasi del tutto assenti nelle regioni centrali degli ammassi, popolate invece da galassie ellittiche.

Dal punto di vista morfologico, nelle galassie a spirale si individuano vari elementi costitutivi: bulge, disco sottile, disco spesso e alone.

- **Bulge:** trattasi del nucleo galattico, rigonfio rispetto allo spessore tipico del disco, più brillante e rosso, con una densità stellare maggiore. Il bulge è del tutto analogo ad una galassia ellittica⁴; la presenza di un SMBH (i.e. supermassive black hole, con $M \sim 10^{6-9} M_{\odot}$) al suo interno è ormai comunemente accettata, come per le ellittiche. È presente inoltre un gradiente di metallicità, che va diminuendo spostandosi verso l'esterno. La divisione tra i due rami della sequenza di Hubble è data dalla forma del bulge, che per circa la metà delle galassie a disco è allungato in un ellissoide lievemente triassiale, tendente all'oblato (spirali barrate) [5].
- **Disco sottile:** spesso poche centinaia di pc , al suo interno si concentrano le nubi di CNM in cui avviene la formazione stellare (nubi molecolari, polvere, gas), dando origine ai **bracci**. Queste sono zone di alta densità stellare in cui compaiono le *GMC* (giant molecular clouds), grazie alle quali nei bracci si ha gran parte della formazione di nuovi astri (Pop I). È di fondamentale importanza evidenziare che i bracci non sono vere e proprie strutture materiali, bensì *onde di densità* il cui interno è soggetto ad un continuo ricambio di materia. Infatti, avendo l'onda una velocità di propagazione minore della velocità di rotazione del disco, il materiale galattico attraversa continuamente il fronte d'onda, creando il contrasto di densità che costituisce i bracci. Dopo le interazioni dovute alla maggior densità di queste regioni (nascita di nuove stelle, riscaldamento del CNM circumstellare a regioni HII, rimescolamento di vecchio materiale etc.), le stelle ancora in vita, muovendosi più velocemente rispetto al braccio, escono e proseguono seguendo la loro orbita. Per questo motivo nei bracci è massima la concentrazione degli astri blu, dato che i loro tempi di vita medi non sono abbastanza lunghi da consentirne l'uscita.
- **Disco spesso:** il suo spessore si aggira intorno al kpc , è meno denso rispetto al disco sottile ed è popolato da stelle più vecchie e lente (Pop II intermedia).
- **Alone:** di forma sferica e bassissima densità stellare, arriva fino a centinaia di kpc ed è formato da ammassi globulari (densi e metallici), gas caldo e stelle vecchie poco metalliche, con orbite veloci che attraversano il disco (Pop II). Intorno all'alone stellare si estende anche un alone di materia oscura, rilevato grazie allo studio delle curve di rotazione (vedi par.3.2).

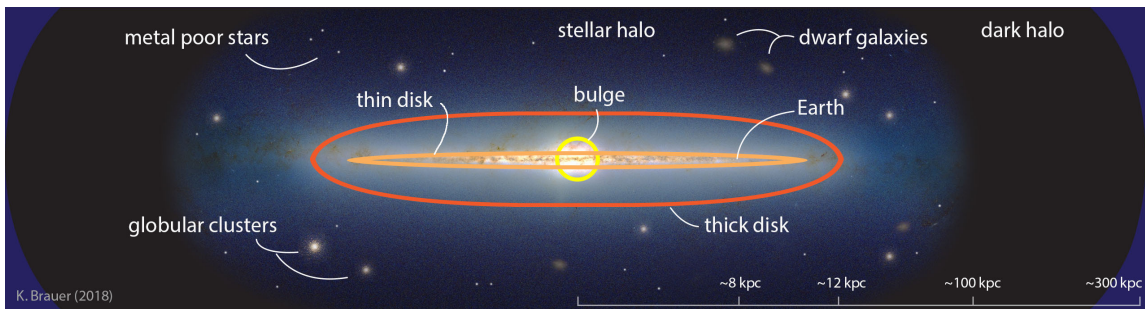


Figura 1.4: Visione schematica della Via Lattea [6]

⁴In particolare, è notevole l'assonanza tra i rapporti molto precisi rilevati tra la massa del SMBH e la massa stellare dell'intera galassia ellittica ($M_{SMBH} \simeq 2 \cdot 10^{-3} M_*$) e, parallelamente, tra la massa del SMBH e la massa del bulge delle spirali ($M_{SMBH} \simeq 10^{-3} M_{bulge}$).

Le galassie a disco sono divise in S ed SB, a seconda che siano barrate o meno. Ciascuna di queste due categorie è suddivisa in tre ulteriori sottoclassi, in base alla dimensione relativa del bulge, all'avvolgimento dei bracci⁵ e all'abbondanza di gas. Galassie del tipo Sa (SBa) presentano un bulge più grande e luminoso, bracci più avvolti (perciò meno risolti nelle immagini) e meno gas rispetto a quelle di tipo Sb (SBb), e queste a loro volta rispetto alle Sc (SBc).

1.3.2 Galassie irregolari

All'interno di questa tipologia di galassie trovano casa tutti quei sistemi dalla morfologia non ben definita. Sono molto diffuse nell'universo e generalmente di massa molto ridotta, molto ricche di gas e con un tasso di formazione stellare alto, il che le rende particolarmente luminose nella banda blu. Le Irr sono divise in due sottocategorie: Irr I ed Irr II. Nelle prime, pur essendo irregolari, sono distinguibili un abbozzo di bracci a spirale e alcuni aggregati di stelle O/B; le seconde, invece, sono totalmente caotiche e prive di strutture riconoscibili.



Figura 1.5: La galassia irregolare NGC55, in un immagine ottenuta dal Wide Field Imager del 2.2-metre MPG/ESO telescope all'osservatorio ESO a La Silla [7].

1.4 Correzione di de Vaucouleurs

In seguito alla pubblicazione della classificazione di Hubble, furono compiuti diversi tentativi di rivisitazione ed ampliamento⁶, tra cui spicca per completezza ed organicità il lavoro compiuto dall'astronomo francese Gérard de Vaucouleurs [9]. Egli concentrò i suoi sforzi sul fornire alle galassie *late type* una catalogazione più adeguata, modificando diversi aspetti della precedente. Innanzitutto de Vaucouleurs aggiunse le classi **Sd**, **Sm**

⁵Riguardo ai bracci in passato si era discusso il problema del loro *superavvolgimento*. Era stato ipotizzato che i bracci assumessero la caratteristica forma a spirale a causa della rotazione differenziale del disco, ipotesi che però renderebbe i bracci totalmente mescolati ed indistinguibili in tempi di gran lunga inferiori alle età tipiche delle galassie, motivo per cui si è arrivati in seguito alla teoria delle onde di densità.

⁶Allan Sandage nel 1961 pubblicò *The Hubble Atlas of Galaxies*, in cui compariva una prima espansione della sequenza di Hubble [8].

ed **Im**, per differenziare meglio la transizione da Sc ad Irr I⁷; poi, introdusse i due nuovi parametri r ed s , ad indicare le galassie barrate che possiedono (r) o meno (s) una struttura ad anello, come si vede nella figura 1.6; l'astronomo sostituì la classe S con **SA** (galassie non barrate, simmetricamente alle SB) e completò la classificazione inserendo svariate sottoclassi intermedie, come già fatto da Sandage.

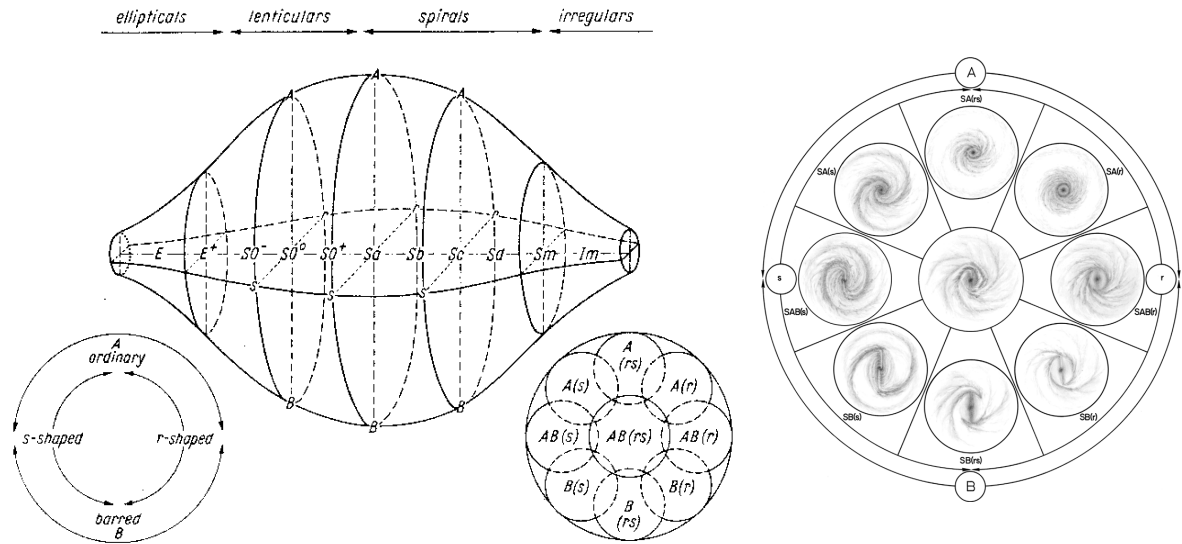


Figura 1.6: Il fuso di de Vaucouleurs, figura che permette di comprendere facilmente la classificazione introdotta dall'astronomo. A destra, una sezione trasversale del fuso in corrispondenza delle galassie Sb [9].



(a) M87



(b) NGC6744

Figura 1.7: In 1.7a la galassia ellittica M87 vista in un immagine realizzata da Chris Mihos (Case Western Reserve University) con i dati raccolti da ESO [10].

In 1.7b la galassia a spirale NGC6744 rilevata dal Wide Field Imager dell'MPG/ESO 2.2-metre telescope all'osservatorio ESO a La Silla [11].

⁷ m deriva da *magellanic*, in quanto l'astronomo associò per somiglianza queste due sottoclassi alle Nubi di Magellano, galassie nane satelliti della MW.

Capitolo 2

Proprietà fotometriche

Una volta trattati sinteticamente gli aspetti morfologici delle galassie, è necessario – al fine di giungere ad una comprensione fisica maggiore – passare agli aspetti fotometrici, complementari ed inscindibili dalle proprietà cinematiche. Difatti, la luminosità di una galassia è data quasi esclusivamente dalle stelle che la compongono, quindi studiando la distribuzione di luce si ricavano informazioni preziose della distribuzione di massa e la sua evoluzione nel tempo.

La fotometria si occupa della misurazione del flusso della radiazione elettromagnetica proveniente da una sorgente astronomica, giungendo a ricostruirne il **profilo di brillantezza**. Prima di addentrarsi nell'analisi, è opportuno definire le grandezze che verranno usate nel corso del capitolo.

- **FLUSSO (f_ν)**: grandezza misurata dai telescopi, corrisponde all'energia che raggiunge il rilevatore nell'unità di tempo, di area e di frequenza; si esprime ordinariamente in $erg/s/cm^2/Hz$ (cgs), $W/m^2/Hz$ (SI) o in Jansky, $1 Jy = 10^{-26} W/m^2/Hz$. Si parla di *flusso bolometrico* (f) nel caso sia integrato su tutto lo spettro luminoso; chiaramente la dipendenza dagli Hz scompare. D'ora in avanti si farà uso solo delle grandezze bolometriche.

- **LUMINOSITÀ (L)**: $f = \frac{L}{4\pi d^2} \rightarrow L = 4\pi d^2 \cdot f \quad \left[\frac{erg}{s} \right]$

dove f è il flusso di una sorgente e d la distanza che la separa dall'osservatore. Si tratta di una grandezza intrinseca della sorgente, quindi indipendente dalla d , e anche questa può essere bolometrica.

- **BRILLANZA (I)**: $I(R) = \frac{f}{\Omega} = \frac{L/4\pi d^2}{R^2/d^2} = \frac{L}{4\pi R^2} \quad \left[\frac{erg}{s cm^2} \right]$

in cui Ω rappresenta l'angolo solido sotteso dalla sorgente ed R il suo raggio. È evidente come anche la brillantezza sia una grandezza indipendente dalla distanza dell'oggetto osservato. Generalmente è espressa in L_\odot/pc^2 .

Ora si può quindi facilmente comprendere come il profilo di brillantezza di una galassia non sia altro che la distribuzione radiale dell'intensità della sua radiazione elettromagnetica. Il punto di partenza per l'analisi della fotometria è considerare il fatto che gli oggetti che osserviamo sono proiettati sul piano del cielo. È necessario, perciò, avere degli strumenti che consentano di ricostruire l'oggetto in tre dimensioni. Un risultato nodale è rappresentato dal fatto che le galassie, relativamente alla proiezione, sono oggetti trasparenti: la probabilità che un suo elemento si sovrapponga ad un altro nel processo di proiezione si può considerare nulla.

2.1 Galassie ellittiche

In un'immagine bidimensionale di una galassia, i luoghi dei punti con brillantezza costante sono definiti **isofote** e la loro forma ellittica praticamente perfetta nel caso di una tipologia di galassie fa sì che queste prendano il loro nome proprio dalla geometria osservata. Si può dimostrare che le ellissi concentriche 2-D sono sempre ottenute dalla proiezione di ellissoidi 3-D. Ciò è di fondamentale importanza in quanto consente di ricavare l'originale morfologia di una galassia ellittica a partire dall'osservazione delle isofote. Più precisamente, se le ellissi prodotte sono coassiali, l'ellissoide tridimensionale apparterrà a quelli detti "di rotazione" (prolati e oblati); altrimenti, se non si ha coassialità delle isofote, si sta osservando il fenomeno dell'**isophotal twisting**, che va necessariamente associato ad ellissoidi triassiali (vedi figura 1.2).

Per lo studio dei profili di brillantezza delle galassie ellittiche è opportuno definire due osservabili di fondamentale importanza per la comprensione delle leggi empiriche relative a questi sistemi:

- *Luminosità proiettata* (L_p): assumendo una distribuzione di luminosità a simmetria sferica si ha:

$$L_p = 2\pi \int_0^R I(R)R dR$$

- *Raggio effettivo* (R_e): raggio del disco da cui proviene metà della luminosità totale della galassia, ovvero tale che:

$$L_p(R_e) = \frac{L_{TOT}}{2}$$

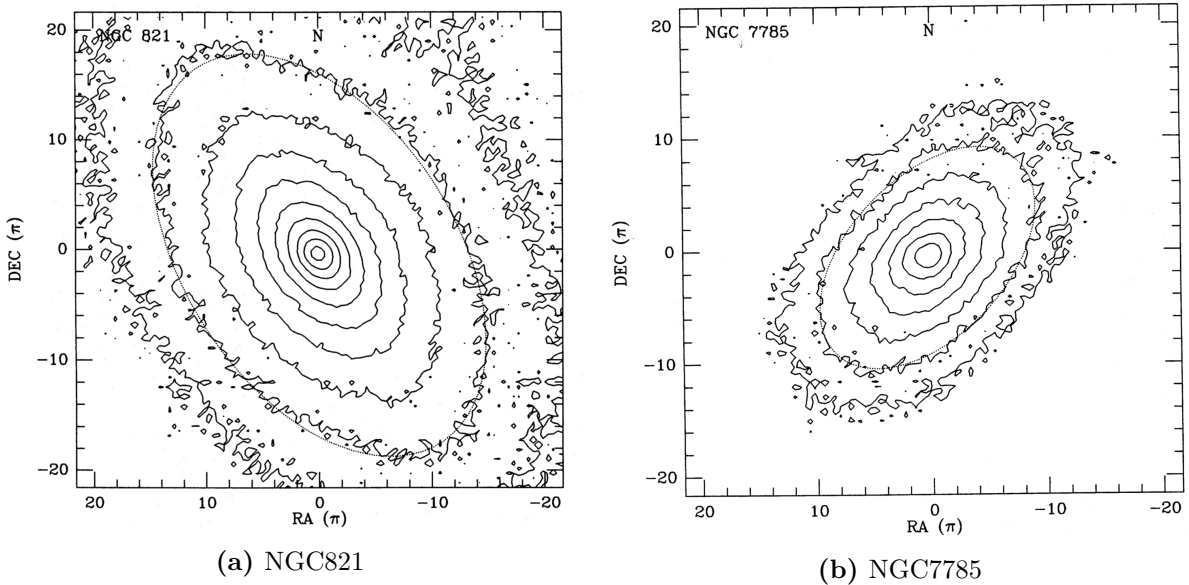


Figura 2.1: Mappe dei contorni isofotali delle galassie NGC821 (2.1a) e NGC7785 (2.1b) ottenute dai CCDs del Lick Observatory Nickel 1-m reflector dell'università della California [12]. Da queste immagini è possibile ricavare le deviazioni delle isofote rispetto alle ellissi geometriche, classificabili come *boxy* (più rettangolari) o *disky* (più elongate ai vertici).

2.1.1 Legge di de Vaucouleurs

Nel 1948, in seguito agli studi compiuti sui profili di brillantezza delle galassie ellittiche, Gérard de Vaucouleurs e la moglie Antoinette arrivarono alla scoperta di una *legge empirica* basilare, che mette in relazione $I(R)$ ed R_e ed è in grado di descrivere tutte le galassie E (ed i bulge delle S) all'interno dello stesso modello [13].

$$I(R) = I(0)e^{-7.67\left(\frac{R}{R_e}\right)^{\frac{1}{4}}} \quad (2.1)$$

dove $I(0)$ è la brillantezza al centro della galassia, mentre il simbolo \sim davanti all' $1/4$ è dato dal fatto che, trattandosi di una legge empirica, questo numero non gode di esattezza matematica, bensì può differire a seconda della sorgente osservata (generalmente le galassie molto grandi mostrano un esponente minore di 0.25, viceversa per quelle molto piccole, come si può vedere nella figura 2.2). Per il caratteristico andamento di R ci si riferisce spesso a questa legge chiamandola **legge $r^{1/4}$** .

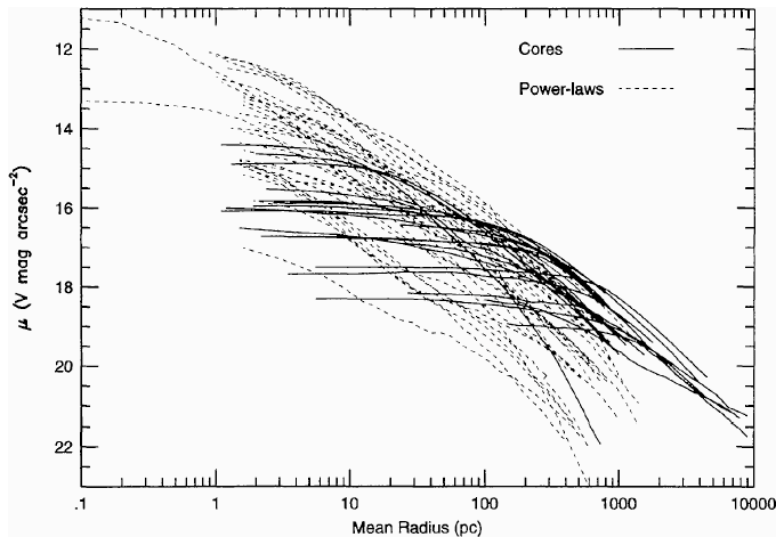


Figura 2.2: Grafico ricavato dai dati di HST riguardanti i profili di brillantezza di numerose galassie. Si può osservare l'andamento della legge di de Vaucouleurs al variare delle dimensioni dei sistemi: i più luminosi presentano dei "cores", regioni dove la curva è quasi piatta, mentre i meno luminosi tendono a delle leggi di potenza più ripide [14].

Dalla legge empirica di de Vaucouleurs si giunse successivamente ad una sua generalizzazione, detta **legge di Sérsic** [15].

$$I(R) = I(0)e^{-b(m)\left(\frac{R}{R_e}\right)^{\frac{1}{m}}} \quad (2.2)$$

dove m è detto *indice di Sérsic* e quantifica la curvatura del profilo, $b(m)$ asintoticamente assume la forma $2m - 1/3 + o(1/m)$. È ovvia la corrispondenza con la legge di de Vaucouleurs nel caso $m = 4$.

2.1.2 Leggi di scala e piano fondamentale

La legge di de Vaucouleurs non è l'unica legge di scala empirica trovata per le galassie ellittiche, bensì in questo elaborato ne sono presentate altre tre: la **legge di Faber-Jackson**, la **legge di Kormendy** e la **legge $D_n - \sigma$** [16][17][18].

- *Faber-Jackson*:
$$L = A \cdot \sigma_{obs}^{\sim 4}$$
 dove A è una costante e σ_{obs} la *dispersione di velocità* osservata della galassia¹. Secondo questa legge le galassie si distribuiscono come una fascia nel grafico $\log L - \log \sigma_{obs}$, con uno spessore intrinseco $\Delta L/L \simeq 40\%$.
- *Kormendy*:
$$L = B \cdot R_e^{\sim 1}$$
 dove B è un'altra costante ed R_e il raggio effettivo. Anche questa legge concentra i dati in una fascia di spessore $\Delta L/L \simeq 40\%$. Dalla F-J e dalla Kormendy è possibile ricavare la distanza della galassia, dato che σ_{obs} è indipendente dalla distanza.
- $D_n - \sigma$:
Mette in relazione R_e (attraverso il diametro fotometrico D_e) e σ_{obs} . Come le due precedenti, presenta una fascia di spessore 40%.

Fu grazie al lavoro di Stanislav G. Djorgovski e Marc Davis che si arrivò all'unificazione di queste tre leggi sotto ad un unico disegno in grado di farle dialogare tra loro: il **piano fondamentale** delle galassie ellittiche[19]. Con la *principal component analysis*² si arrivò a trovare che L , R_e e σ_{obs} sono le uniche grandezze che correlano per le galassie ellittiche. Djorgovsky e Davis trovarono l'espressione di un piano logaritmico nello spazio dei parametri galattici (2.3), dal quale si ricavano le tre relazioni analizzate poco sopra semplicemente proiettando il FP sui tre piani $L - \sigma_{obs}$, $L - R_e$ ed $R_e - \sigma_{obs}$. Con questa scoperta si è avuto un notevole passo in avanti nella precisione delle stime di tali grandezze, grazie allo spessore molto ridotto del FP (meno del 5%). Si comprende ora meglio il perché degli spessori delle tre leggi di scala, legato proprio al fatto che anche il piano fondamentale stesso possieda uno spessore intrinseco ineliminabile.

$$\alpha \log L + \beta \log R_e + \gamma \log \sigma_{obs} = \delta \quad (2.3)$$

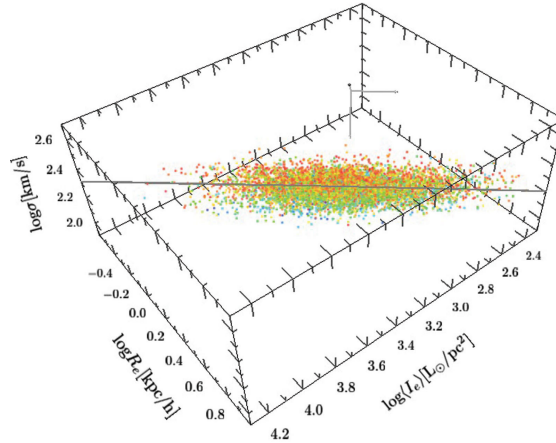


Figura 2.3: Grafico del piano fondamentale ricavato dalle misure nel vicino infrarosso (banda J) raccolte nel 6dF Galaxy Survey (1.2m UK Schmidt Telescope, 2001-2009). Le diverse galassie sono colorate in base al logaritmo dell'età [20].

¹ σ è un'osservabile cinematica indipendente dalla distanza di vitale importanza nello studio delle galassie. Essenzialmente, si tratta di una grandezza tensoriale del tutto analoga alla temperatura che descrive le oscillazioni dei moti stellari rispetto alla velocità media in un dato punto della galassia. È stato dimostrato che le galassie ellittiche devono la loro forma proprio all'anisotropia del tensore σ e non alla termodinamica (sono infatti sistemi *non collisionali*). Vedi par.3.1.

²Tecnica diffusa nella statistica a più variabili volta alla semplificazione dell'analisi dei dati attraverso la riduzione delle variabili necessarie per descrivere il sistema, limitando la perdita di informazione.

2.2 Galassie a spirale

Lo studio della fotometria delle galassie a spirale è più sintetico rispetto a quello delle galassie ellittiche. Essendo sistemi dalle immagini più complicate per via delle diverse strutture che li compongono e della polvere che può offuscare notevolmente il disco (in base alla linea di vista), spesso si preferisce decomporre il profilo di brillantezza della galassia nei suoi elementi principali (bulge e disco) e studiare questi separatamente per poi sommarli. Mentre è già stato detto di come il bulge sia assimilabile allo sferoide di una galassia E, e quindi descritto da un profilo di Sérsic con $m = 4$, il profilo di brillantezza di un disco face-on viene descritto da una legge esponenziale diversa, paragonabile ad un profilo di Sérsic in cui $m = 1$ e $b(m)$ è diverso per ogni galassia.

$$I(R) = I(0)e^{-\left(\frac{R}{R_d}\right)} \quad (2.4)$$

dove R_d è il *raggio di scala* del disco ($2 - 10kpc$), analogo ad R_e per le galassie ellittiche. Nel caso la galassia sia vista edge-on, viene sfruttata una formula analoga a quella appena mostrata, che tiene però conto dello spessore verticale del disco (altezza rispetto al piano del disco).

Nel 1970 Ken Freeman notò che le galassie a disco presentavano tutte la stessa brillantezza superficiale centrale ed elaborò quella che oggi viene detta **legge di Freeman**[21]:

$$\mu_{0,B} = 21.65 \pm 0.30 \left[\frac{mag}{arcsec^2} \right] \quad (2.5)$$

Venne chiarito in seguito un bias di selezione che portò Freeman a considerare nelle sue analisi solo le galassie a disco più brillanti, inficiando così la statistica. Nonostante la questione sia ancora lontana dall'esser chiarita, il valore di brillantezza trovato da Freeman oggi viene usato per dividere le galassie in *LSB* (low surface brightness) ed *HSB* (high surface brightness), a seconda che la loro brillantezza centrale sia minore o maggiore di $\mu_{0,B}$.

2.2.1 Legge di Tully-Fisher

La ricerca di relazioni di scala empiriche da parte degli astronomi ha interessato anche le galassie a disco, non solo le ellittiche. Uno dei risultati più eclatanti consiste nella **legge di Tully-Fisher**, elaborata nel 1977 da R. B. Tully e J. R. Fisher [22]. Come si vede dalla 2.6, si tratta di una legge di scala che lega la luminosità del disco L_{disco} alla sua velocità di rotazione asintotica v_{HI} , misurata per le nubi HI a grande distanza dal centro galattico (sfruttando la celeberrima riga a 21 cm dell'H).

$$L_{disco} \simeq v_{HI}^4 \quad (2.6)$$

Come le altre leggi di scala, anche questa presenta uno spessore intrinseco e può essere utilizzata nella stima delle distanze.

Capitolo 3

Proprietà cinematiche

Si procede ora allo studio sintetico degli aspetti cinematici riguardanti i diversi tipi di galassie (i.e. lo studio dei moti indipendentemente dalle loro cause); saranno quindi trascurate le caratteristiche dinamiche, riguardanti invece le ragioni fisiche sottostanti tali movimenti. Innanzitutto, la velocità di un oggetto in moto nella sfera celeste è scomponibile in due contributi: moto proprio v_{\perp} e moto radiale v_{rad} . Di particolare importanza è il secondo, misurabile grazie alla spettroscopia dallo spostamento delle righe per effetto Doppler ¹:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \simeq \frac{v_{rad}}{c} \quad (3.1)$$

Nello studio dei moti galattici ci si concentra prevalentemente su due grandezze basilari: **velocity dispersion** (σ) e **streaming velocity** (v), entrambe ricavabili spettroscopicamente. Mentre la prima, come già visto, è legata ai *moti random*, associati ad allargamento delle righe spettrali, la streaming velocity è connessa ai *moti ordinati* di rotazione, che provocano uno spostamento del centroide della riga. Studiare la cinematica consiste anche nell'osservare il rapporto presente tra questi due tipi di moto nelle differenti tipologie di galassie; ad oggi pare che le galassie ellittiche siano sistemi dominati dai moti random², mentre le spirali dai moti di rotazione.

3.1 Galassie ellittiche

È già stato visto nel par.2.1.2 come la σ sia legata ad altre osservabili fondamentali per le galassie ellittiche, dalle quali sono derivabili importanti informazioni cinematiche. Per descrivere i moti stellari nelle galassie E si utilizza un metodo comune alla meccanica statistica analogo alla descrizione del comportamento delle molecole di un gas: sono introdotte delle grandezze medie, tra cui spicca la dispersione delle velocità, che rappresenta gli scarti quadratici medi delle velocità attorno al loro valore medio locale (corrispondente a quanto è allargata la riga spettrale rispetto al valore di riferimento).

La distribuzione delle velocità (*LOSVD*) è ben rappresentabile con una gaussiana e questo fatto consente di ricavare i momenti della distribuzione, tra cui valor medio \bar{v} e dispersione σ . Assumere che i moti delle stelle in questo tipo di galassie siano

¹Approssimazione non relativistica $\rightarrow v_{rad} \ll c$

²La ragione di questo fatto potrebbe risiedere nella distribuzione del momento angolare iniziale della nube protogalattica e nella rapidità del processo di formazione stellare nelle galassie E. Il loro tempo di SF è generalmente minore del tempo di collasso della nube, il che porta quindi le stelle nel sistema finale ad avere moti disordinati, conservando velocità e traiettoria originali [23].

solo random equivarrebbe a sostenere che all'interno del sistema non sia presente alcun asse di rotazione preferenziale e che quindi la galassia sia sferoidale. È perciò doveroso tener conto anche della rotazione del sistema, che giustifica l'appiattimento dell'ellisse lungo una certa direzione. Il grado di appiattimento viene solitamente parametrizzato dal rapporto $(v/\sigma)^*$; ciò che si ottiene, però, dai calcoli è che la velocità di rotazione richiesta per giustificare tale appiattimento è solitamente maggiore delle velocità osservate.

$$(v/\sigma)^* = \frac{\bar{v}_{max}\sigma_0}{(\bar{v}_{max}\sigma_0)_{model}} \quad (3.2)$$

dove \bar{v}_{max} è il massimo dei valori medi \bar{v} , σ_0 è la dispersione di velocità media calcolata nei pressi del centro galattico, mentre il pedice *model* in $(\bar{v}_{max}\sigma_0)_{model}$ sta ad indicare il valore atteso per spiegare un determinato appiattimento del sistema. Chiaramente, se una galassia fosse schiacciata dalla rotazione, si dovrebbe avere $(\bar{v}_{max}\sigma_0)^* \simeq 1$; ciò che si ottiene in realtà sono valori mediamente inferiori all'unità, a dimostrare come l'appiattimento delle galassie ellittiche non possa in generale esser dovuto ai moti di rotazione delle stelle al loro interno.

Oltre a quanto già detto, è anche possibile definire una classificazione cinematica delle ETGs, distinguibili in base alla loro velocità di rotazione in *slow rotators* e *fast rotators*. Nel primo gruppo si collocano circa il 35% dei sistemi, generalmente più massicci e luminosi, triassiali con un'ellitticità bassa (E0-E4) e indici di Sérsic $m \geq 4$; sono concentrati nelle zone ad alta densità. Alla seconda famiglia appartiene il restante 65% dei sistemi, più ellittici e rotanti, con indici di Sérsic più bassi, frequenti nelle zone a bassa densità (le galassie a disco rientrano nei fast rotators, se si estende la classificazione anche alle LTGs) [24].

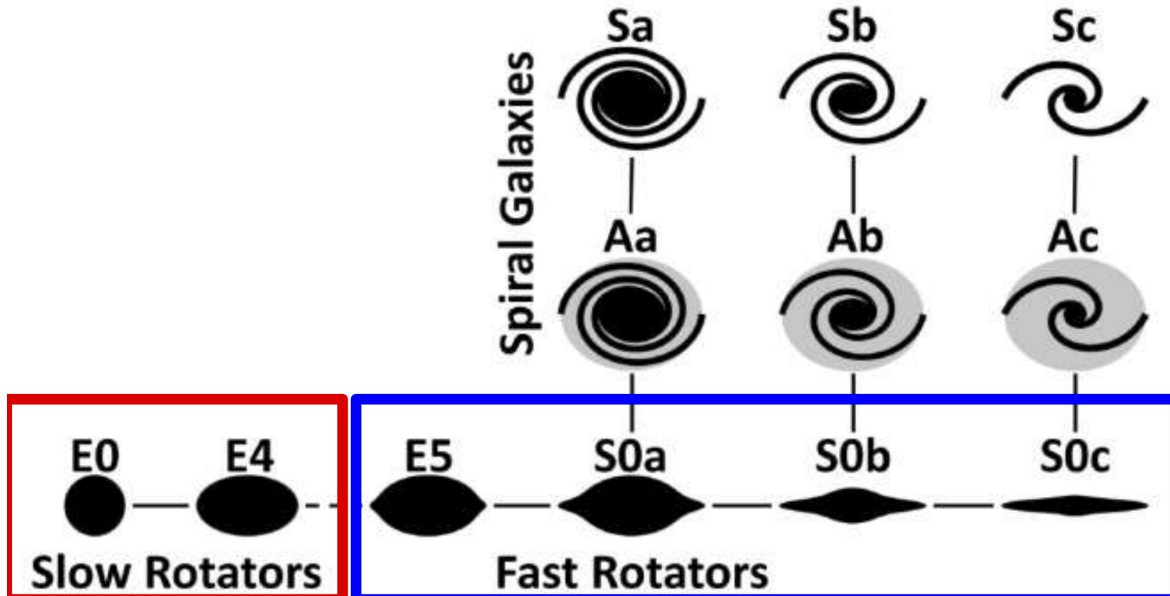


Figura 3.1: Classificazione delle galassie in base alla velocità di rotazione, secondo i dati di 260 galassie raccolti nell'ATLAS^{3D} project [25].

3.2 Galassie a spirale

Uno degli strumenti d'indagine principi per la cinematica galattica è lo studio della **curva di rotazione**, che descrive le velocità $v_c(r)$ con cui le stelle percorrono le orbite circolari a seconda della loro distanza dal centro galattico. Mentre per le galassie E la prevalenza dei moti random su quelli ordinati di rotazione costringe all'impiego di strumenti cinematici diversi³, per i dischi delle galassie a spirale, in cui sono i moti di streaming a farla da padrone, l'importanza della curva di rotazione diventa massima⁴.

Va chiarito che tale curva è una proprietà del campo gravitazionale del sistema, la si misura osservando le stelle ma se queste non fossero presenti ovviamente la curva esisterebbe comunque. Partendo dalla II legge di Newton per un oggetto in moto circolare soggetto alla sola forza di gravità si ha che:

$$a_c(r) = \frac{v_c^2(r)}{r} = \frac{GM(r)}{r} \quad (3.3)$$

l'andamento della $v_c(r)$ dipende quindi dalla massa contenuta entro un dato raggio e, perciò, dalla distribuzione di densità, assumendo di trovarsi in un sistema a simmetria sferica, difatti

$$M(r) = 4\pi \int_0^r x^2 \rho(x) dx \quad (3.4)$$

Fatte queste importanti premesse, si può procedere alla descrizione della curva di rotazione tipica di una galassia a spirale, che è divisibile in due sezioni:

- *Bulge*: vicino al centro la curva ha un andamento lineare con il raggio $v_c \propto r$ (curva di corpo rigido), che si ottiene da una distribuzione di massa omogenea.

$$M(r) = 4\pi\rho_0 \int_0^r x^2 dx = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3 \rightarrow v_c^2(r) = \frac{4\pi G}{3}\rho_0 \frac{r^3}{r} = A \cdot r^2 \rightarrow v_c(r) \propto r \quad (3.5)$$

- *Disco e alone*: Mentre nelle regioni intermedie è ragionevole osservare una curva di rotazione piatta (in un disco sottile anche la massa esterna ad r esercita una forza gravitazionale), allontanandoci progressivamente verso le regioni più esterne, dove aumentando r la $M(r)$ non varia, la massa delle regioni centrali dovrebbe dominare e la curva dovrebbe virare verso il basso in una **caduta kepleriana**⁵, diventando sempre più esatta l'approssimazione del potenziale gravitazionale col suo termine di monopolio ($\phi \sim -GM/r$)⁶.

$$M(r) = M_{tot} \rightarrow v_c^2(r) = \frac{GM_{tot}}{r} \rightarrow v_c(r) \propto \frac{1}{\sqrt{r}} \quad (3.6)$$

³Sempre legata alla scarsa applicabilità della curva di rotazione è la difficoltà nello stimare la presenza degli *aloni di materia oscura* intorno alle galassie ellittiche. Informazioni preziose sono ottenibili dall'analisi dei fenomeni di *lente gravitazionale*.

⁴Come già notato in precedenza, i bulge delle galassie a disco sono studiati con metodologie analoghe a quelle per le galassie E, con complicazioni dovute all'ingente presenza di polvere.

⁵Così chiamata perché da essa è ricavabile la III legge di Keplero.

⁶Per un sistema a simmetria sferica valgono infatti il I e II teorema del guscio sferico di Newton, coi quali la distribuzione di massa lontano dal nucleo galattico è assimilabile ad una massa puntiforme posta nel centro del sistema.

Ciò che, al contrario, si deduce osservando la rotazione delle nubi di HI lontano dal GC (i.e. galactic center) è che la curva di rotazione resta sostanzialmente costante anche a grandi distanze dal disco. Tale fatto può essere spiegato assumendo la presenza di un grande alone galattico di **materia oscura**, con una distribuzione della densità a *sfera isoterma singolare* ($\rho = A/x^2$):

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \frac{Ax^2}{x^2} dx = 4\pi Ar \rightarrow v_c^2(r) = \frac{4\pi GA r}{r} = 4\pi GA \rightarrow v_c(r) = \text{cost} \quad (3.7)$$

Questo è quanto venne ipotizzato da Vera Rubin quando si domandò per prima⁷ come mai ci fosse questa differenza tra i dati osservativi e quelli previsti dai modelli [26]. In realtà, Rubin fece l'errore di considerare la curva misurata ai limiti della banda ottica, dove ancora il declino kepleriano non è sufficientemente pronunciato. Peraltro nel 1987 Kalnajs dimostrò che non era affatto necessario presupporre l'esistenza di un alone di materia oscura per giustificare la curva di rotazione piatta di un disco esponenziale [27]. Fu solo in seguito, con l'aumento delle osservazioni della riga a 21 cm dell'HI, che si arrivò a misurare una curva di rotazione piatta a svariati kpc dalle ultime stelle del disco, il che ha reso inevitabile il prendere in considerazione l'esistenza della materia oscura, oggi più che mai accettata. Il profilo di densità degli aloni di materia oscura è stato ampiamente studiato ed oggi è descritto dal **profilo NFW** (Navarro, Frenk e White [28]):

$$\rho(r) \propto \frac{A}{r(B+r)^2} \quad (3.8)$$

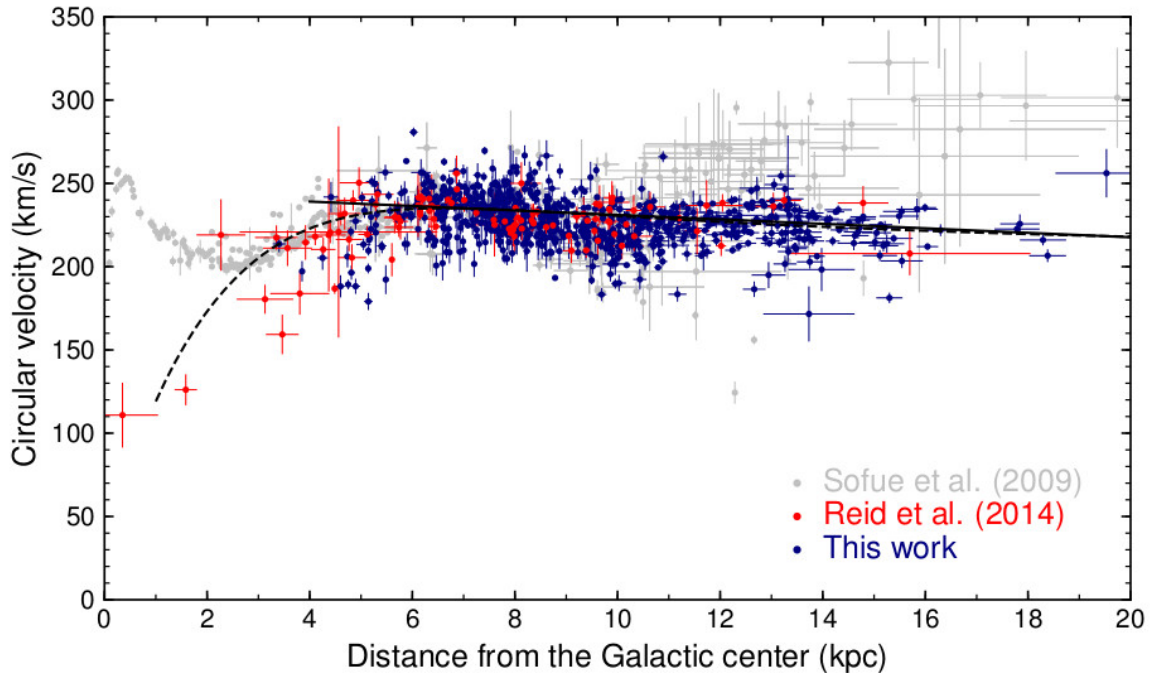


Figura 3.2: Curva di rotazione della MW ricavata dalle misure effettuate su variabili Cefeidi. I punti rossi rappresentano regioni di formazione stellare massiccia, mentre i punti grigi sono riadattati da uno studio precedente [29].

⁷La storia della ricerca della materia oscura ha inizio molto prima: nel 1906 Henri Poincaré conì il termine *matière obscure* in una lettera indirizzata a Lord Kelvin; successivamente, nel 1933, Fritz Zwicky ne suppose l'esistenza per giustificare il moto delle galassie nell'ammasso di Coma.

Bibliografia

- [1] Hubble, E.P., *The Realm of the Nebulae*. Yale University Press, 1936.
- [2] Pizzella, A., *Slides del corso di Astrofisica Generale (Mod.B)*. Università di Padova, 2006. http://www.astro.unipd.it/pizzella/corso/slides/Astrofisica_Gen_ModB_8_SRE.pdf.
- [3] Bovy, J., “Oblate, prolate and triaxial ellipsoids.” <http://astro.utoronto.ca/~bovy/AST1420/notes/notebooks/08.-Triaxial-Mass-Distributions.html#Mildly-flattened-and-triaxial-mass-distributions>, 2017.
- [4] ESO/IDA/Danish 1.5 m/R. Gendler and J.-E. Ovaldsen, “The Sombrero Galaxy.” <https://www.eso.org/public/italy/images/sombrero/>, 2009.
- [5] Méndez-Abreu, J., “The Intrinsic Shape of Galaxy Bulges,” *Galactic Bulges*, 2016.
- [6] Brauer, K., “Milky Way.” <https://www.mit.edu/~kbrauer/research.html>, 2018.
- [7] ESO, “Irregular galaxy NGC 55.” <https://www.eso.org/public/italy/images/eso0914a/>, 2009.
- [8] Sandage, A., *The Hubble Atlas of Galaxies*. Washington: Carnegie Institution, 1961.
- [9] de Vaucouleurs, G., *Classification and Morphology of External Galaxies*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1959.
- [10] Chris Mihos (Case Western Reserve University)/ESO, “L’alone della galassia Messier 87.” <https://www.eso.org/public/italy/images/eso1525a/>, 2015.
- [11] ESO, “Wide Field Imager view of a Milky Way look-alike, NGC 6744.” <https://www.eso.org/public/italy/images/eso1118a/>, 2011.
- [12] Lauer, T. R., “Boxy isophotes, discs and dust lanes in elliptical galaxies,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1985.
- [13] de Vaucouleurs, G., “Recherches sur les Nebuleuses Extragalactiques,” *Annales d’Astrophysique*, 1948.
- [14] Armitage, P., *Lecture notes for Astrophysics 2 course (ASTR 3830)*. University of Colorado, 2009. <https://jila.colorado.edu/~pja/astr3830/lecture15.pdf>.
- [15] Sérsic, J. L., “Influence of the atmospheric and instrumental dispersion on the brightness distribution in a galaxy,” *Boletín de la Asociación Argentina de Astronomía La Plata Argentina*, 1963.

- [16] Faber, S.M. & Jackson, R.E., “Velocity dispersions and mass-to-light ratios for elliptical galaxies,” *Astrophysical Journal*, 1976.
- [17] Kormendy, J., “Brightness distributions in compact and normal galaxies. II. Structure parameters of the spheroidal component,” *Astrophysical Journal*, 1977.
- [18] Dressler, A. and Lynden-Bell, D. and Burstein, D. and Davies, R. L. and Faber, S.M. and Terlevich, R. and Wegner, G., “Spectroscopy and Photometry of Elliptical Galaxies. I. New Distance Estimator,” *Astrophysical Journal*, 1987.
- [19] Djorgovski, S. & Davis, M., “Fundamental Properties of Elliptical Galaxies,” *Astrophysical Journal*, 1987.
- [20] Magoulas, C. et al., “The 6dF Galaxy Survey: the near-infrared Fundamental Plane of early-type galaxies,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2012.
- [21] Freeman, K.C., “On the Disks of Spiral and S0 Galaxies,” *Astrophysical Journal*, 1970.
- [22] Tully, R.B. & Fisher, J.R., “A New Method of Determining Distances to Galaxies,” *Astronomy and Astrophysics*, 1977.
- [23] Wang B. and Cappellari M. and Peng Y. and Graham M., “SDSS-IV MaNGA: The kinematic-morphology of galaxies on the mass versus star-formation relation in different environments,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2020.
- [24] Emsellem, E. et al., “The SAURON project - IX. A kinematic classification for early-type galaxies,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2007.
- [25] Cappellari, M. et al., “The ATLAS^{3D} project - I. A volume-limited sample of 260 nearby early-type galaxies: science goals and selection criteria,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2011.
- [26] Rubin, V. C., “The Rotation of Spiral Galaxies,” *Science*, 1983.
- [27] Kalnajs, A. J., “Halos and disk stability,” *Symposium - International Astronomical Union*, 1987.
- [28] Navarro, J. F. and Frenk, C. S. and White, S. D. M., “A Universal Density Profile from Hierarchical Clustering,” *Astrophysical Journal*, 1997.
- [29] Mróz, P. et al., “Rotation Curve of the Milky Way from Classical Cepheids,” *Astrophysical Journal*, 2019.
- [30] Ciotti, L., “Alcune questioni matematiche riguardanti la dinamica stellare,” *Bollettino dell’Unione Matematica Italiana*, 2002.
- [31] Ciotti, L., *Appunti del corso di Astrofisica Extragalattica*. Università di Bologna, 2021.