

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea Triennale in Fisica

**Implementazione di un sistema di  
navigazione inerziale basato su sensori  
MEMS**

**Relatore:**  
**Prof. Marco Prevedelli**

**Presentata da:**  
**Lorenzo Bechelli**

Anno Accademico 2020/2021



# Introduzione

Conoscere la propria posizione rispetto ad un riferimento, solitamente considerato fisso, è sempre stata una sfida per l'uomo e continua ad esserlo ancora oggi. Inizialmente, per spostarsi senza perdersi era necessario conoscere a fondo il territorio circostante e aver ben in mente alcuni punti di riferimento, ma una prima tecnologia rivoluzionaria fu la stesura di mappe e cartine. Infatti, non era più necessario avere una vasta conoscenza della zona, era sufficiente riconoscere alcuni particolari per essere in grado di identificare approssimativamente la propria posizione sulla mappa. Successivamente, la necessità di percorrere distanze sempre più grandi in mare aperto, in cui i riferimenti erano quasi del tutto assenti, ha portato delle grandi menti a riflettere su come risolvere questo difficile problema. Nascono, quindi, sistemi di navigazione sempre più sofisticati e lo studio delle strumentazioni per localizzare la propria posizione diventa una vera e propria scienza [1].

Nel secolo scorso, la possibilità di mandare in orbita satelliti ha portato alla realizzazione di un sistema di localizzazione chiamato “Sistema Globale di Navigazione Satellitare” (GNSS) che ha un approccio radicalmente diverso dai precedenti ed offre una stima della posizione con un errore di qualche metro. Sono stati sviluppati GNSS diversi, come, ad esempio, il sistema di posizionamento gestito dagli Stati Uniti (GPS), il GLONASS in Russia, Galileo in Europa e BDS in Cina. Tuttavia, tutti i GNSS si basano sulla disponibilità del segnale trasmesso dai satelliti e in alcuni luoghi è assente o comunque troppo debole. Metodi di localizzazione alternativi sono quindi necessari per operazioni che richiedono una precisione maggiore di qualche metro e per i luoghi non coperti dai satelliti, come gli edifici o nelle operazioni subacquee e sotterranee. Inoltre, un altro problema della navigazione satellitare è che il segnale potrebbe subire interferenze a causa di una sorgente di rumore vicina molto più intensa nella stessa banda di frequenze.

Il metodo di localizzazione proposto in questa tesi si basa sul sistema di navi-

gazione inerziale, che è uno dei sistemi di navigazione più diffusi e studiati. Il suo principio di funzionamento si basa sulle leggi di Newton, le quali affermano che il movimento di un corpo continua uniformemente in linea retta a meno che non sia perturbato da una forza esterna e che questa produce sul corpo un'accelerazione proporzionale alla sua massa. In teoria, tale accelerazione può essere misurata utilizzando un dispositivo noto come accelerometro. Per sapere lo spostamento rispetto ad un sistema di riferimento inerziale è necessario tenere traccia anche dell'orientazione dell'accelerometro, la quale può essere ricavata dalla velocità angolare del corpo che può essere misurata utilizzando degli strumenti chiamati giroscopi. Infatti, integrando la velocità angolare si può ricavare lo spostamento angolare rispetto alla condizione iniziale e, di conseguenza, l'orientazione dell'accelerometro nel sistema di riferimento inerziale. È quindi possibile ricavare lo spostamento del corpo rispetto alla sua posizione iniziale integrando due volte l'accelerazione misurata.

In pratica, tuttavia, gli errori di misura del giroscopio e accelerometro si propagano tramite il calcolo dell'orientazione e nel processo di integrazione accumulandosi rapidamente nella posizione. Tale errore è chiamato solitamente “deriva” ed è ciò che è necessario minimizzare. Il vantaggio della navigazione inerziale è che i sistemi inerziali sono interamente autonomi, a differenza di molti altri sistemi, come quello satellitare. Non dipendendo dalla trasmissione di segnali o dalla ricezione da una sorgente esterna, possono potenzialmente essere utilizzati in sostituzione (o a complemento) del sistema satellitare.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Principi e limiti della navigazione inerziale</b>	<b>1</b>
1.1 Hardware utilizzato	1
1.1.1 Modello di funzionamento accelerometri MEMS	2
1.1.2 Modello di funzionamento giroscopi MEMS	3
1.1.3 Specifiche Hardware	5
1.2 Sistema di navigazione inerziale	6
1.3 Limiti della navigazione inerziale	8
<b>2 Introduzione teorica</b>	<b>9</b>
2.1 Accenni alla teoria dei segnali	9
2.2 Varianza di Allan	11
2.3 Filtri bayesiani	14
2.4 Filtro di Kalman	17
2.5 Filtro di Kalman esteso	20
2.6 Rappresentazione delle rotazioni	21
2.6.1 Rinormalizzazione	22
<b>3 Caratterizzazione dei sensori utilizzati</b>	<b>23</b>
3.1 Sorgenti di errore nei sensori MEMS	23
3.1.1 Bias costante	23
3.1.2 Rumore casuale	24
3.1.3 Errori di calibrazione	25
3.1.4 Effetto della temperatura	26
3.1.5 Instabilità del bias	26
3.2 Dipendenza dalla temperatura	28

---

3.3	Rimozione del bias costante . . . . .	30
3.4	Discussione dei risultati sperimentali . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Implementazione e risultati</b>	<b>37</b>
4.1	Algoritmo del primo INS . . . . .	37
4.2	Implementazione del filtro di Kalman . . . . .	40
4.2.1	Fase di predizione . . . . .	41
4.2.2	Fase di osservazione . . . . .	42
4.2.3	Fase di correzione . . . . .	43
4.3	Algoritmo del secondo INS . . . . .	44
4.3.1	Caso 1: test negativo per entrambi i sensori . . . . .	46
4.3.2	Caso 2: test negativo per giroscopio e positivo per accelerometro	46
4.3.3	Caso 3: test positivo per giroscopio e negativo per accelerometro	46
4.3.4	Caso 4: test negativo per entrambi i sensori . . . . .	47
4.4	Risultati con sensori fermi . . . . .	48
4.4.1	Condizioni operative . . . . .	48
4.4.2	Risultati . . . . .	50
4.5	Risultati con sensori in movimento . . . . .	53
4.6	Conclusioni . . . . .	54

# Elenco delle figure

1.1	rappresentazione del modello per accelerometri MEMS capacitivi. (Adattata da: [3]). . . . .	3
1.2	rappresentazione del modello per giroscopi MEMS vibrazionali. (Adattata da: [4]). . . . .	3
1.3	fotografia degli strumenti utilizzati. A sinistra è raffigurato il Raspberry Pi collegato al MPU-6050. A destra è mostrato un ingrandimento del MPU-6050. . . . .	5
1.4	rappresentazione schematica di un sistema di navigazione inerziale. . . . .	6
1.5	A sinistra la rappresentazione dei componenti di un <i>gimballed</i> INS (adattata da: [7]), a destra lo schema di un <i>gimballed</i> INS (adattata da: [8]). . . . .	7
1.6	rappresentazione schematica di un sistema di navigazione inerziale della tipologia <i>strapdown</i> . "s.d.r" sta per "sistema di riferimento". (Adattata da: [8]). . . . .	7
1.7	stima della deriva ( <i>drift</i> ) dovuta al rumore dei sensori. I giroscopi e gli accelerometri sono classificati in grado commerciale, tattico, navigazione e strategico a seconda della grandezza dell'errore sulla misura. Questa classificazione sarà approfondita nei capitoli successivi. Il limite geofisico corrisponde al comportamento di sensori "perfetti". (Adattato da: [7]). . . . .	8
2.1	differenza procedurale tra varianza di Allan sovrapposta e non sovrapposta. (Adattata da: [10]). . . . .	12

2.2	tipico andamento della deviazione di Allan $\sigma$ in funzione del tempo di media $\tau$ in un grafico doppio logaritmico. Ogni sorgente di errore ha una pendenza ( <i>slope</i> ) distinta quindi $\sigma(\tau)$ permette di vedere facilmente qual è la sorgente di rumore dominante. (fonte: [12]). . . . .	13
2.3	rappresentazione di un processo di Markov. . . . .	14
2.4	schema riassuntivo del processo iterativo del filtro di Kalman. . . . .	19
2.5	rappresentazione degli angoli di Eulero utilizzati. Il s.d.r. nero ( $x, y, z$ ) corrisponde a quello locale, mentre il s.d.r. rosso ( $x', y', z'$ ) corrisponde a quello del corpo. . . . .	21
3.1	errori di calibrazione comuni. La retta tratteggiata indica il comportamento atteso, la linea piena il segnale affetto da errore. (a) fattore di scala; (b) non linearità; (c) asimmetria $\pm$ ; (d) deadzone; (e) quantizzazione (dovuta alla risoluzione degli ADC). (Adattata da: [16]). . . . .	25
3.2	(a): misure di accelerazione ottenute dai tre assi dell'accelerometro e relativo fit. Il fit è polinomiale di grado 2. (b): misure di accelerazione ottenute dai tre assi del giroscopio e relativo fit. Il fit è polinomiale di grado 2. . . . .	28
3.3	velocità angolare misurata a riposo dai tre assi del giroscopio. La figura (a) rappresenta i dati a cui non è stato sottratto l'offset, la figura (b) gli stessi dati ma corretti. . . . .	30
3.4	accelerazione misurata a riposo dai tre assi dell'accelerometro. Il modulo del vettore che ha componenti pari ai valori medi misurati sui tre assi è: $a_{offset} = (9.8052 \pm 0.0001) m/s^2$ . Si noti che l'errore associato a $a_{offset}$ è molto probabilmente sottostimato in quanto non si è tenuto conto degli errori (sistematici) di calibrazione. . . . .	31
3.5	(a): deviazione di Allan (OADEV) dei tre assi dell'accelerometro. (b): deviazione di Allan (OADEV) dei tre assi del giroscopio. . . . .	33
4.1	confronto tra la deriva della posizione calcolata utilizzando solo il primo INS (a) e quella ottenuta usando anche il secondo INS (b). Si nota che la deriva finale con le correzioni del secondo INS è circa due ordini di grandezza minore della deriva calcolata utilizzando solo il primo INS. . . . .	50



- 
- 4.2 confronto tra la deriva degli angoli calcolata utilizzando solo il primo INS (a) e quella ottenuta usando anche il secondo INS (b). Si nota che la deriva massima applicando le correzioni del secondo INS è circa la metà di quella calcolata utilizzando solo il primo integratore. . . . . 51
- 4.3 i grafici mostrano il confronto tra i risultati ottenuti con il secondo INS attivo (indicati con "INS2") e quella calcolata utilizzando solo il primo INS. La differenza tra i risultati non è apprezzabile in quanto è estremamente piccola. . . . . 53



# Elenco delle tabelle

3.1	classificazione di accelerometri (acc.) e giroscopi (giro.) in base al parametro di stabilità del bias $B$ . Il valore associato agli accelerometri è fornito in riferimento all'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre ( $g$ ). L'errore sulla posizione è stimato dopo 1 ora di integrazione a dispositivo fermo (fonte: [8]). . . . .	32
3.2	valori di BS valutati al tempo $\tau_{min}$ e densità spettrale ( $n$ ) dell'accelerometro. . . . .	34
3.3	valori di BS valutati al tempo $\tau_{min}$ e densità spettrale ( $n$ ) del giroscopio. . . . .	34
3.4	conversione dei parametri $BS$ e $n$ nella deviazione standard dei rumori associati. Per la conversione delle unità di misura è stata considerata $g = 9.81 m/s^2$ . . . . .	34



# Capitolo 1

## Principi e limiti della navigazione inerziale

Il sistema di navigazione inerziale descritto in questa tesi si basa su un'unità di misura inerziale (in inglese “inertial measurement unit”, abbreviato con IMU) che è composta da tre accelerometri e tre giroscopi disposti in modo che gli assi siano perpendicolari tra loro. Ogni accelerometro e giroscopio misura rispettivamente accelerazione e velocità angolare sul proprio asse di riferimento, quindi in totale si hanno tre misure di accelerazione e tre misure di velocità angolare. Dispositivi di questo tipo sono solitamente indicati nella letteratura con il nome di *IMU con sei gradi di libertà*.

### 1.1 Hardware utilizzato

Sono stati utilizzati un giroscopio MEMS triassiale e un accelerometro MEMS triassiale. La tecnologia MEMS ("Micro Electro-Mechanical Systems") presenta numerosi vantaggi rispetto all'utilizzo di dispositivi tradizionali. In primo luogo, grazie alle loro dimensioni molto ridotte si prestano perfettamente ad essere montati su IMU che possano essere facilmente trasportabili. In secondo luogo, questi dispositivi sono affidabili e hanno un prezzo notevolmente contenuto, di conseguenza possono essere usati in svariate applicazioni.

### 1.1.1 Modello di funzionamento accelerometri MEMS

Sono stati impiegati degli accelerometri che utilizzano la tecnologia MEMS capacitiva. Un accelerometro di questo tipo può essere modellizzato come un oscillatore smorzato unidimensionale a cui è applicata una forza esterna  $F_{est}$  che induce lo spostamento  $x$  di una "massa di prova"  $m$ . La forza esterna può essere scritta come:

$$F_{est} = ma_{est} \quad (1.1)$$

mentre la forza elastica e di smorzamento possono essere definite come:

$$\begin{aligned} F_{el} &= -kx \\ F_{sm} &= -b\dot{x} \end{aligned} \quad (1.2)$$

dove  $k$  è la costante elastica della molla e  $b$  il coefficiente di smorzamento. Applicando la seconda legge di Newton e utilizzando come forze da sommare quelle definite dalle equazioni (1.1) e (1.2), si ottiene l'equazione caratteristica di un oscillatore smorzato:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = ma_{est} \quad (1.3)$$

Solitamente gli accelerometri MEMS lavorano a basse frequenze ( $\omega \ll \omega_0$ , dove  $\omega_0^2 = k/m$ ) quindi lo spostamento è in fase con l'accelerazione e la soluzione dell'equazione (1.3) diventa molto semplice (per maggiori dettagli si veda [2]):

$$x \approx \frac{a}{\omega_0^2} \quad (1.4)$$

Per trasformare la misura dello spostamento in un segnale elettrico, alla massa di prova è attaccato un elettrodo che si muove rispetto ad un altro elettrodo fissato. La capacità del condensatore formato dai due elettrodi cambia in funzione dello spostamento della massa di prova e quindi in funzione dell'accelerazione esterna. Tale cambiamento è misurabile tramite dei sensori capacitivi che operano in modo differenziale ed è così possibile ricavare una misura dell'accelerazione esterna.

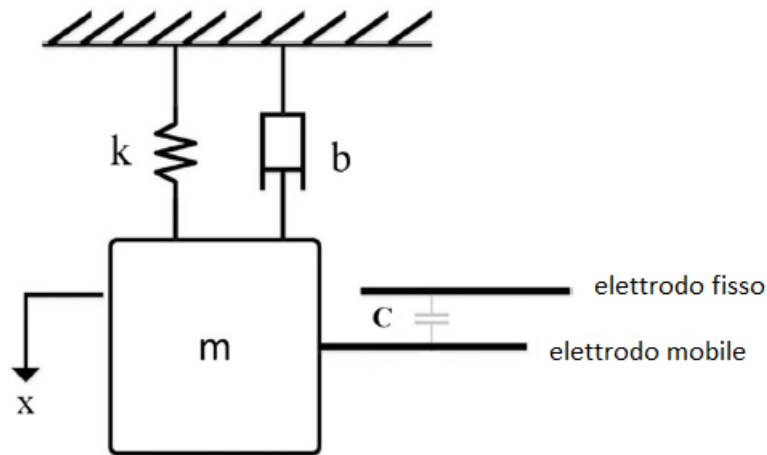


Figura 1.1: rappresentazione del modello per accelerometri MEMS capacitivi. (Adattata da: [3]).

### 1.1.2 Modello di funzionamento giroscopi MEMS

Sono stati impiegati dei giroscopi vibrazionali che utilizzano la tecnologia MEMS capacitiva. Un giroscopio di questo tipo utilizza una massa di prova posta in moto oscillatorio con frequenza nota. Se il dispositivo è posto in rotazione, sulla massa di prova agisce una forza di Coriolis che produce una perturbazione al moto vibrazionale. Tale perturbazione viene misurata da sensori capacitivi ed è convertita in segnale elettrico.

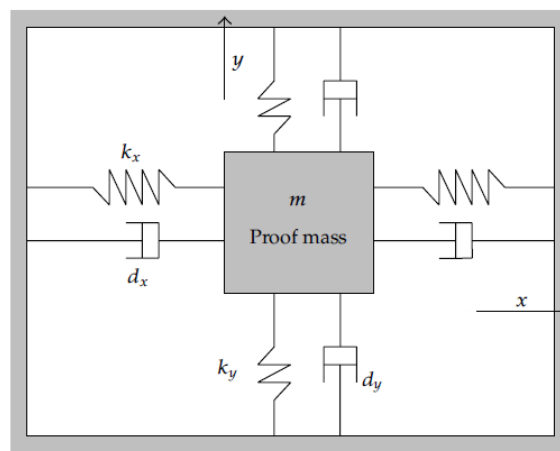


Figura 1.2: rappresentazione del modello per giroscopi MEMS vibrazionali. (Adattata da: [4]).

Si consideri una massa di prova  $m$  la cui posizione è descritta dal vettore  $\vec{r}$  e vincolata a muoversi sul piano x-y mostrato in figura 1.2. Considerando una velocità angolare  $\vec{\Omega}$  a cui è soggetto il sistema e utilizzando la seconda legge di Newton è possibile scrivere:

$$m\ddot{\vec{r}} = F_{fisiche} + F_{centr} + F_{Coriolis} + F_{Eulero} \quad (1.5)$$

dove  $F_{fisiche}$  sono le forze fisiche agenti sul sistema corrispondenti all'azione delle molle e dell'attrito. Le altre forze sono dovute all'accelerazione del sistema di riferimento e sono definite come:

$$\begin{aligned} F_{centr} &= -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ F_{coriolis} &= -2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} \\ F_{eulero} &= -m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Assumendo che la velocità angolare sia costante in un intervallo di tempo sufficientemente lungo ( $\dot{\vec{\Omega}} \approx 0$ ) e assumendo che gli oscillatori smorzati nelle direzioni x e y siano indipendenti allora, sostituendo in (1.5) l'espressione delle forze definite in (1.6), si ottiene:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + d_x\dot{x} + [k_x - m(\Omega_y^2 + \Omega_z^2)]x + m\Omega_x\Omega_y y = +2m\Omega_z\dot{y} \\ m\ddot{y} + d_y\dot{y} + [k_y - m(\Omega_x^2 + \Omega_z^2)]y + m\Omega_x\Omega_y x = -2m\Omega_z\dot{x} \end{cases} \quad (1.7)$$

dove  $k_x$ ,  $k_y$  e  $d_x$ ,  $d_y$  sono rispettivamente le costanti elastiche delle molle e i coefficienti di smorzamento mostrati in figura 1.2. Prendendo un moto armonico lungo l'asse y tale che  $y(t) = A_y \sin(\omega_y t)$ , è possibile ridursi a considerare solo la prima equazione di (1.7). Inoltre, visto che si vuole misurare  $\Omega_z$ , solitamente viene supposto  $\Omega_x, \Omega_y \approx 0$  e, dato che i giroscopi MEMS lavorano a basse frequenze ( $\Omega \ll \omega_0$ , dove  $\omega_0^2 = k/m$ ), allora vale l'approssimazione  $[k_x - m(\Omega_y^2 + \Omega_z^2)] \approx k_x$  e lo spostamento lungo x non ha uno sfasamento rispetto alla forza di Coriolis. In queste condizioni la prima equazione di (1.7) diventa:

$$x = 2 \frac{\Omega_z \omega_y}{\omega_0^2} A_y \cos(\omega_y t) \quad (1.8)$$

Misurando lo spostamento  $x$  tramite dei sensori capacitivi similmente a come è già stato descritto per gli accelerometri, è possibile ricavare la componente z della velocità angolare.



### 1.1.3 Specifiche Hardware

È stato utilizzato il MPU-6050 di InvenSense [5], che è un dispositivo Motion-Tracking a sei gradi di libertà che combina un giroscopio triassiale e un accelerometro triassiale in un volume di  $4 \times 4 \times 0.9 \text{ mm}^3$ . Il MPU-6050 dispone di tre convertitori analogico-digitale (ADC) a 16 bit per la digitalizzazione delle uscite del giroscopio e tre ADC a 16 bit per la digitalizzazione delle uscite dell'accelerometro. Per tracciare con precisione movimenti sia veloci che lenti, il giroscopio ha un range programmabile dall'utente con possibili valori di  $(\pm 250, \pm 500, \pm 1000 \text{ e } \pm 2000) \text{ }^\circ/\text{s}$  e un fondo scala dell'accelerometro programmabile dall'utente con intervalli di  $\pm 2\text{g}, \pm 4\text{g}, \pm 8\text{g}$  e  $\pm 16\text{g}$ . La comunicazione con tutti i registri del dispositivo viene eseguita utilizzando l'interfaccia I<sup>2</sup>C [6] a 400 kHz. Inoltre, è presente un sensore di temperatura incorporato che può misurare temperature da  $-40^\circ\text{C}$  a  $+85^\circ\text{C}$ . Il MPU-6050 è stato collegato ad un Raspberry Pi 3 modello B+, un computer a scheda singola che è stato usato per per acquisire i dati dei sensori a intervalli di tempo di 0.1 secondi.

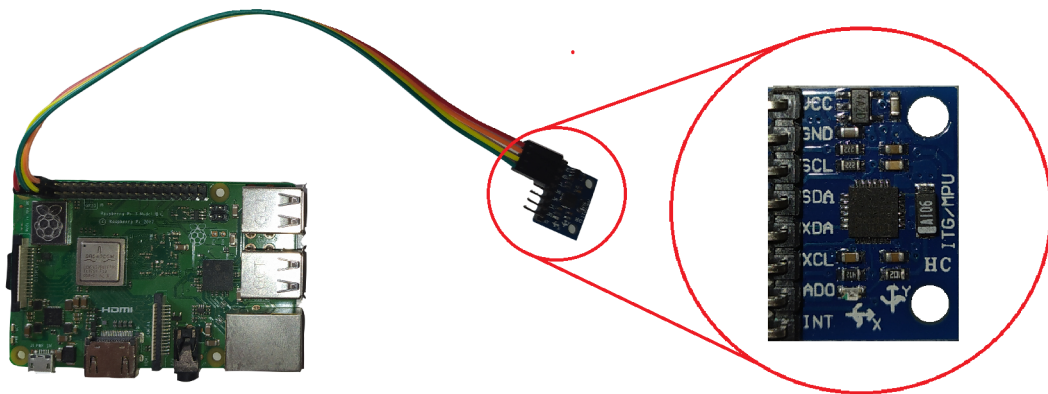


Figura 1.3: fotografia degli strumenti utilizzati. A sinistra è raffigurato il Raspberry Pi collegato al MPU-6050. A destra è mostrato un ingrandimento del MPU-6050.

## 1.2 Sistema di navigazione inerziale

Un sistema di navigazione inerziale (INS) ha lo scopo di calcolare posizione e orientamento del corpo su cui è montata l'IMU. Nella letteratura spesso viene fatta distinzione tra AHRS (dall'inglese "Attitude and Heading Reference System") e INS. Con l'acronimo AHRS ci si riferisce all'insieme di IMU e dispositivi necessari al calcolo dell'orientamento del corpo nello spazio rispetto ad un sistema di riferimento fissato, mentre l'INS calcola anche la posizione.

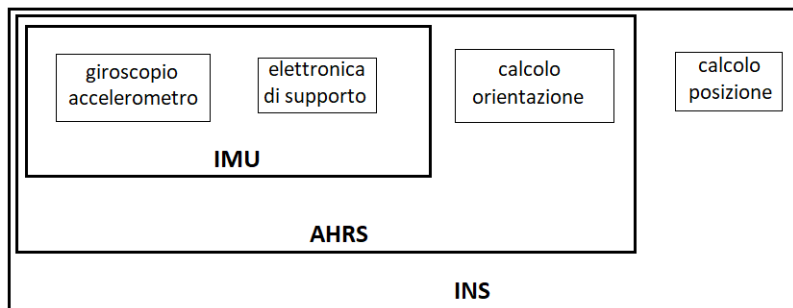


Figura 1.4: rappresentazione schematica di un sistema di navigazione inerziale.

In generale, esistono due diverse tipologie di INS: *gimballed* (cardanico) e *strap-down* (solidale). In un *gimballed* INS, gli accelerometri e i giroscopi sono posizionati su una piattaforma che è mantenuta in allineamento con il riferimento fisso. Ciò si ottiene montando la piattaforma utilizzando giunti cardanici, i quali le consentono libertà di movimento su tutti e tre gli assi. I giroscopi sono utilizzati per rilevare le rotazioni effettuate rispetto al sistema di riferimento fisso e vengono azionati dai motori che ruotano i giunti cardanici per contrastare la rotazione, mantenendo la piattaforma correttamente allineata. Successivamente, l'accelerazione dovuta alla gravità può essere sottratta direttamente all'uscita degli accelerometri per ottenere l'accelerazione nel sistema di riferimento fisso. Infine, integrando due volte l'accelerazione è possibile ottenere la posizione.

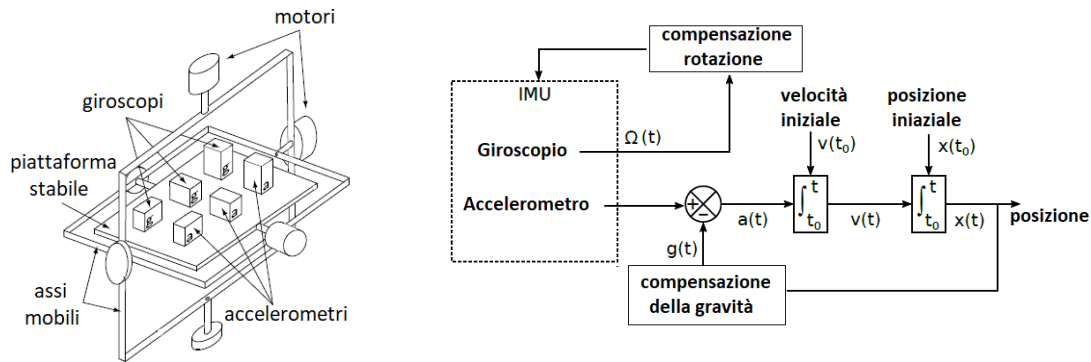


Figura 1.5: A sinistra la rappresentazione dei componenti di un *gimballed* INS (adattata da: [7]), a destra lo schema di un *gimballed* INS (adattata da: [8]).

I sistemi *strapdown*, invece, utilizzano giroscopi e accelerometri solidali con il corpo pertanto hanno una complessità meccanica ridotta, di conseguenza tendono ad essere fisicamente più piccoli e più leggeri dei sistemi *gimballed*. In questa tipologia di INS, viene calcolata l'orientazione del corpo a partire dalle misure di velocità angolare ottenute dai giroscopi che è poi utilizzata per proiettare l'accelerazione misurata dagli accelerometri nel sistema di riferimento fisso. Come prima, può essere compensata l'accelerazione gravitazionale e, infine, l'accelerazione risultante viene integrata una volta per monitorare la velocità e una seconda volta per la posizione.

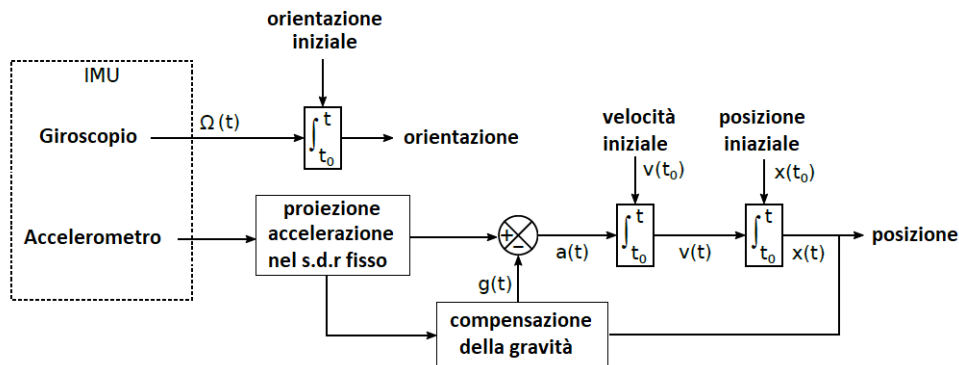


Figura 1.6: rappresentazione schematica di un sistema di navigazione inerziale della tipologia *strapdown*. "s.d.r" sta per "sistema di riferimento". (Adattata da: [8]).

I sistemi *strapdown* hanno una maggiore complessità computazionale rispetto ai *gimballed* che quindi in passato erano i più diffusi, ma i requisiti computazionali sono ora banali rispetto alla potenza di calcolo dei processori moderni. Per questa ragione, i sistemi *strapdown* sono diventati la tipologia dominante di INS.

### 1.3 Limiti della navigazione inerziale

La navigazione inerziale usando una IMU a sei gradi di libertà si basa sulle misure ottenute da un giroscopio e un accelerometro, che come tutti i sensori sono soggetti ad errori di misura. Tali errori sono amplificati durante il processo di integrazione, di conseguenza l'incertezza sulla posizione finale aumenta all'aumentare del tempo di misura.

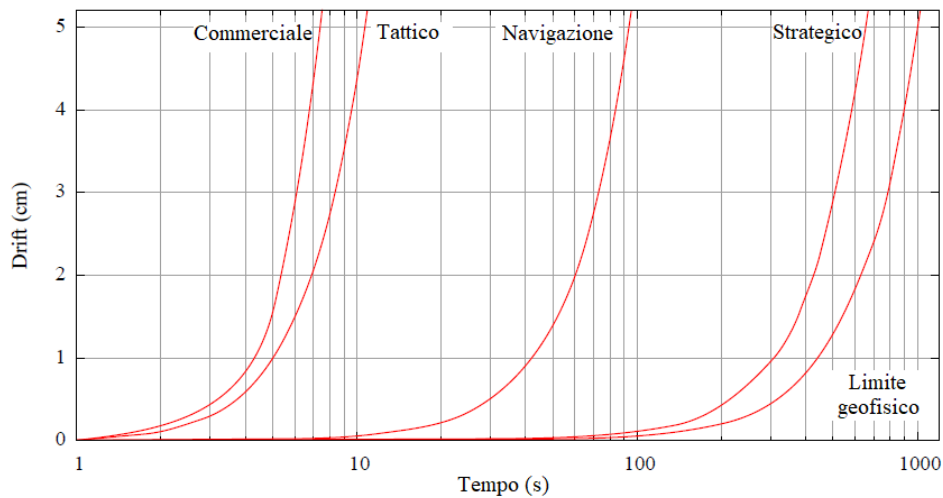


Figura 1.7: stima della deriva (*drift*) dovuta al rumore dei sensori. I giroscopi e gli accelerometri sono classificati in grado commerciale, tattico, navigazione e strategico a seconda della grandezza dell'errore sulla misura. Questa classificazione sarà approfondita nei capitoli successivi. Il limite geofisico corrisponde al comportamento di sensori "perfetti". (Adattato da: [7]).

Come si nota dalla figura 1.7, l'errore sulla posizione cresce molto velocemente al passare del tempo. Esistono dei modi per rallentare la deriva, e solitamente si utilizzano correzioni ottenute da misure esterne all'apparato dell'IMU. Spesso sono usati altri sensori, come ad esempio il GPS o altri strumenti di localizzazione, oppure in altri casi gli algoritmi vengono ottimizzati per particolari applicazioni.

# Capitolo 2

## Introduzione teorica

### 2.1 Accenni alla teoria dei segnali

Un segnale è, in generale, rappresentato da una certa funzione  $x$  nel dominio temporale  $t$ . La sua energia è per definizione:

$$E = K \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad (2.1)$$

dove  $K$  è una costante (dimensionale) che, per semplicità, viene posta in seguito uguale a 1. Se il dominio su cui è definita  $x$  non è limitato, tale integrale non è sempre convergente, di conseguenza viene solitamente considerata la potenza media  $P$ , che è data da:

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad (2.2)$$

È possibile riscrivere l'equazione (2.2) utilizzando il teorema di Parseval, il quale afferma che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{x}(f)|^2 df \quad (2.3)$$

dove  $\hat{x}(f)$  è la trasformata di Fourier di  $x(t)$  nel dominio delle frequenze, definita come:

$$\begin{aligned} \hat{x}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \\ x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f) e^{i2\pi ft} df \end{aligned} \quad (2.4)$$

Utilizzando (2.3) in (2.2), si ottiene che:

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{x}(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} |\hat{x}(f)|^2 df \quad (2.5)$$

La densità spettrale  $S$  è perciò definita come:

$$S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |\hat{x}(f)|^2 \quad (2.6)$$

Sono elencate alcune proprietà della densità spettrale che saranno utili in seguito.

**Proprietà 1:**

Se il segnale è stazionario in senso debole (tutti i segnali presi in considerazione in questa tesi lo saranno, si consulti [9] per maggiori dettagli) vale che:

$$\mathbb{E}[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) df \quad (2.7)$$

dove  $\mathbb{E}[\dots]$  è l'operatore di aspettazione.

**Proprietà 2:**

Se il segnale è stazionario in senso debole e la media  $\mu$  è nulla, allora per definizione di varianza e usando la proprietà 1 (equazione (2.7)), è possibile scrivere:

$$\text{VAR}(x) = \mathbb{E}[x^2] - \mu^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) df \quad (2.8)$$

**Proprietà 3:**

Definendo  $y(t)$  come la derivata n-esima di  $x(t)$ :

$$y(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n} \quad (2.9)$$

con  $n$  intero non nullo positivo, segue che:

$$\hat{y}(f) = (i2\pi f)^n \hat{x}(f) \quad (2.10)$$

Di conseguenza, dalla definizione di densità spettrale si ha che:

$$S_y(f) = (2\pi f)^{2n} S_x(f) \quad (2.11)$$

## 2.2 Varianza di Allan

Esistono molti tipi di errore che possono perturbare le misurazioni effettuate dai giroscopi e dagli accelerometri all'interno dell'IMU. Inoltre, a causa dell'integrazione per il calcolo dell'orientazione e della posizione, gli errori vengono amplificati. La posizione finale calcolata dall'INS sarà quindi soggetta ad un errore significativo anche se gli strumenti utilizzati sono molto precisi. Per caratterizzare i giroscopi e accelerometri utilizzati è necessario ricavare dei parametri che quantifichino le varie sorgenti di errore che poi saranno propagate sulla posizione e orientazione dell'IMU.

La varianza di Allan è una tecnica di analisi di un segnale nel dominio temporale, originariamente progettata per caratterizzare il rumore e la stabilità di sistemi periodici (come gli orologi). Tale metodo può essere applicato a una qualsiasi serie temporale (una sequenza di punti di dati misurati separati da intervalli temporali, spesso uguali) per determinare le caratteristiche dei suoi processi di rumore sottostanti. Esistono diverse varianti della varianza di Allan e ognuna ha dei vantaggi e svantaggi rispetto alle altre. In generale, per calcolare la varianza di Allan bisogna acquisire una serie di dati a distanza  $\tau_0$  e dividerla in blocchi di lunghezza temporale  $\tau > \tau_0$ . Successivamente, è necessario calcolare il valor medio di ogni blocco ottenendo una serie del tipo  $(a_1, a_2, \dots, a_M)$ . A questo punto, la procedura continua diversamente a seconda della tipologia di varianza di Allan scelta.

Storicamente, la prima ad essere utilizzata è stata chiamata varianza di Allan non sovrapposta, o varianza a due campioni. Utilizzando una serie di dati analoga alla frequenza dei sistemi periodici (si veda [10] per maggiori dettagli), la varianza di Allan non sovrapposta AVAR è definita come:

$$\text{AVAR} = \frac{1}{2(M-1)} \sum_{i=1}^{M-1} (a_{i+1} - a_i)^2 \quad (2.12)$$

Esiste una versione di varianza di Allan leggermente migliore chiamata varianza di Allan sovrapposta che utilizza al massimo la serie di dati formando tutte le possibili sovrapposizioni dei campioni per ogni  $\tau$ . Inoltre, l'intervallo di confidenza della deviazione di Allan sovrapposta è migliore di quello ottenibile con quella non sovrapposta perché, nonostante le sovrapposizioni aggiuntive non siano tutte statisticamente indipendenti, aumentano il numero di gradi di libertà e la confidenza

nella stima. La varianza di Allan sovrapposta OAVAR è definita dall'espressione:

$$\text{OAVAR} = \frac{1}{2m^2(M - 2m + 1)} \sum_{j=1}^{M-2m+1} \left( \sum_{i=j}^{j+m-1} [a_{i+m} - a_i] \right)^2 \quad (2.13)$$

dove  $\tau = m\tau_0$  con  $m$  il fattore di media, mostrato in figura 2.1.

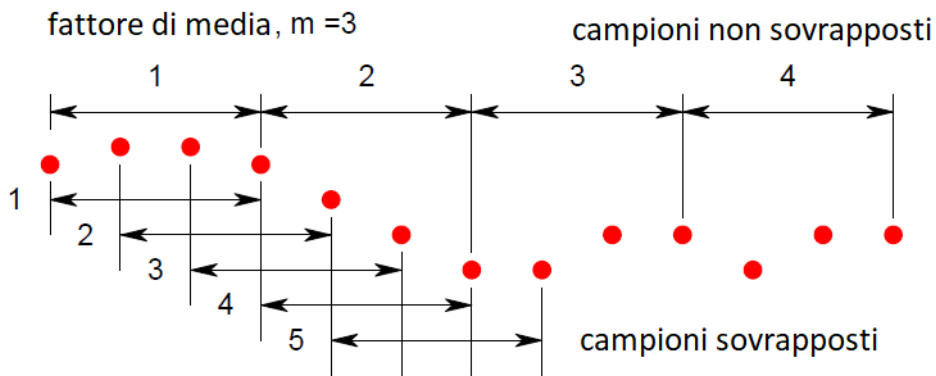


Figura 2.1: differenza procedurale tra varianza di Allan sovrapposta e non sovrapposta. (Adattata da: [10]).

Esiste una relazione simile all'equazione (2.8) che lega la rappresentazione in deviazione di Allan  $\sigma$  di un rumore e la sua densità spettrale [11]:

$$\sigma^2(\tau) = 4 \int_0^{\infty} S(f) \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} df \quad (2.14)$$

In questo lavoro di tesi è stata utilizzata la deviazione di Allan sovrapposta (definita come la radice della varianza) quindi nei paragrafi successivi viene usato il termine "deviazione di Allan" per indicare quella sovrapposta. Solitamente, essa è usata per distinguere le sorgenti di rumore analizzandone l'andamento in funzione del tempo di media  $\tau$ . Facendo il grafico della deviazione di Allan in funzione di  $\tau$  in scala bilogarithmica, è possibile analizzare diverse sorgenti di errore solamente studiando la pendenza della funzione ottenuta.



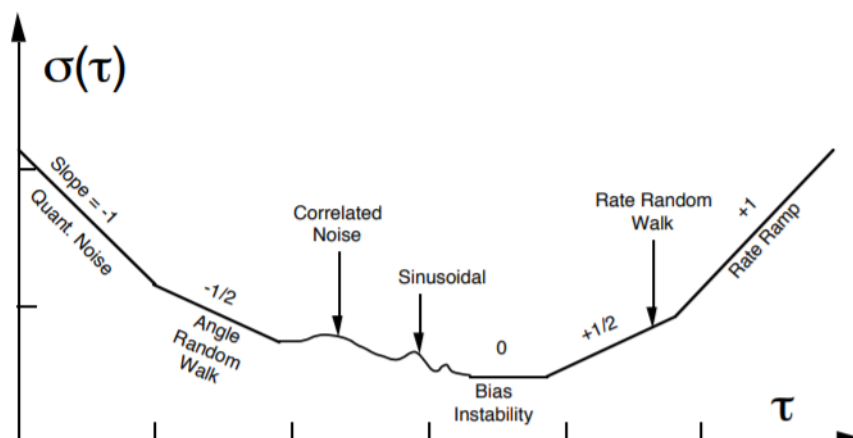


Figura 2.2: tipico andamento della deviazione di Allan  $\sigma$  in funzione del tempo di media  $\tau$  in un grafico doppio logaritmico. Ogni sorgente di errore ha una pendenza (*slope*) distinta quindi  $\sigma(\tau)$  permette di vedere facilmente qual è la sorgente di rumore dominante. (fonte: [12]).

## 2.3 Filtri bayesiani

Sia  $\tilde{\mathbf{x}}_t \in \mathbb{R}^n$  lo stato reale del sistema al tempo  $t$ . A causa degli errori di misurazione lo stato reale non è accessibile ma si ha solamente a disposizione una serie di misure di qualche variabile del sistema. Definendo  $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \dots, \mathbf{z}_k\}$  con  $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^m$  la serie di misure acquisite al tempo  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_k$ , si vuole trovare un modo per ricavare l'approssimazione migliore possibile dello stato reale.

I filtri bayesiani utilizzano concetti probabilistici per fornire una stima dello stato di sistemi dinamici a partire da misurazioni affette da rumore. Inoltre, per ridurre il peso computazionale, il processo studiato è considerato Markoviano, cioè l'evoluzione dello stato è solo funzione dello stato precedente, mentre l'osservazione è solo funzione dello stato attuale.

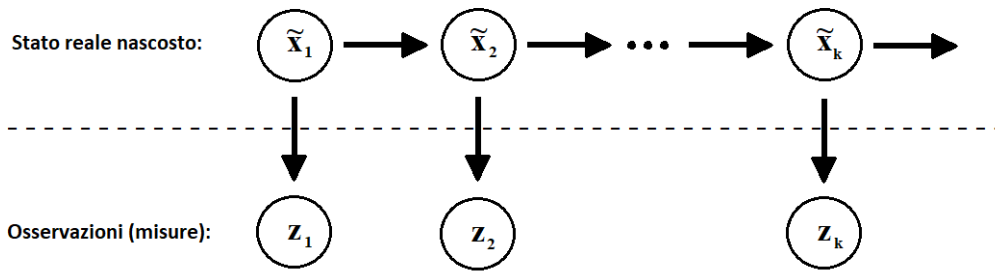


Figura 2.3: rappresentazione di un processo di Markov.

Un processo fisico può essere visto, nella sua rappresentazione di spazio di stato, attraverso una funzione che descrive come lo stato  $\mathbf{x}_t$  si evolve nel tempo:

$$\dot{\mathbf{x}}_t = \mathcal{F}(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \mathbf{w}_t) \quad (2.15)$$

dove  $\mathbf{u}_t$  sono eventuali fattori conosciuti che intervengono modificando il modello del sistema, e  $\mathbf{w}_t$  è un parametro che rappresenta il rumore di processo, ovvero l'aleatorietà che ne regola l'evoluzione. Si noti che  $\mathbf{x}_t$  è un qualunque vettore nello spazio degli stati, mentre  $\tilde{\mathbf{x}}_t$  è il vettore che rappresenta lo stato reale del sistema che si sta studiando.

Allo stesso modo anche l'osservazione dello stato (misura) è un processo su cui agisce un rumore, in questo caso definito di osservazione. È possibile definire una funzione che modella la misura  $\mathbf{z}_t$  come:

$$\mathbf{z}_t = \mathcal{H}(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{v}_t) \quad (2.16)$$

con  $\mathbf{v}_t$  rumore di osservazione e funzione solo dello stato attuale.

Questo formalismo è descritto nel dominio continuo del tempo ma nelle applicazioni pratiche i segnali vengono campionati a tempo discreto  $t_k$ , pertanto è normalmente utilizzata una versione a tempo discreto nella forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathcal{F}_k(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_{k-1}) \\ \mathbf{z}_k &= \mathcal{H}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k)\end{aligned}\tag{2.17}$$

Molti approcci per stimare lo stato sconosciuto di un sistema da un insieme di misurazioni non tengono conto della natura rumorosa di tali osservazioni. È possibile infatti costruire un algoritmo che esegua una regressione non lineare sulle osservazioni per ottenere la stima di tutti gli stati del problema, risolvendo un problema di ottimizzazione con un elevato numero di incognite.

I filtri, a differenza delle regressioni, si pongono come obiettivo quello di fornire la miglior stima delle variabili (stato) man mano che i dati delle osservazioni arrivano. Dal punto di vista teorico le regressioni sono il caso ottimo, mentre i filtri convergono al risultato corretto solo dopo un numero di campioni sufficientemente elevato.

I filtri bayesiani si pongono come obiettivo quello di stimare all'istante di tempo  $t_k$  lo stato della variabile aleatoria  $\mathbf{x}_k$  data una misura  $\mathbf{z}_k$  (affetta da rumore) di qualche variabile del sistema.

Le tecniche di filtraggio permettono sia di ottenere la stima migliore dello stato sconosciuto  $\mathbf{x}_k$  ma anche la distribuzione di probabilità  $p(\mathbf{x}_k)$  rappresentante la conoscenza che si ha dello stato stesso.

Data l'osservazione del sistema è possibile definire una densità di probabilità di  $\mathbf{x}_k$  a posteriori della misura  $\mathbf{z}_k$ :

$$p^+(\mathbf{x}_k) = p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_k)\tag{2.18}$$

dove la probabilità condizionata  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_k)$  indica la probabilità che lo stato nascosto sia  $\mathbf{x}_k$  data l'osservazione  $\mathbf{z}_k$ . In letteratura la distribuzione a posteriori  $p^+(\mathbf{x}_k)$  viene anche indicata come *belief*. Applicando il teorema di Bayes all'equazione (2.18), si ottiene:

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_k) = c_k p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k)\tag{2.19}$$

con  $c_k$  fattore di normalizzazione tale che  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_k)$  sia normalizzata a 1. La conoscenza di  $p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)$  risulta indispensabile e rappresenta la probabilità che la misura

sia  $\mathbf{z}_k$  dato il possibile stato  $\mathbf{x}_k$ . L'utilizzo del teorema di Bayes è il motivo per il quale questa classe di filtri è detta bayesiana.

Lo stato non si evolve in maniera totalmente imprevedibile ma si evolve secondo le funzioni (2.17) quindi è possibile sfruttare un'ulteriore informazione per migliorare la stima: la conoscenza a priori rispetto all'osservazione. L'evoluzione del sistema è funzione solamente dello stato corrente, infatti l'ipotesi di processo Markoviano implica che l'unico stato passato che influisce sull'evoluzione del sistema è quello al tempo  $k - 1$ , ovvero  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{1:k-1}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ .

È pertanto possibile eseguire la predizione a priori utilizzando l'equazione di Chapman-Kolmogorov:

$$p^-(\mathbf{x}_k) = \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k) p(\mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \quad (2.20)$$

dove  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k)$  contiene la dinamica del sistema.

Utilizzando le equazione (2.20) e (2.18), si ottiene:

$$p^+(\mathbf{x}_k) = c_k p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) p^-(\mathbf{x}_k) \quad (2.21)$$

Lo stato reale viene stimato alternando una fase di predizione (stima a priori) a una fase di misura (stima a posteriori). Questo processo, iterativo, prende il nome di stima bayesiana ricorsiva.

## 2.4 Filtro di Kalman

Il filtro di Kalman è una tipologia di filtro bayesiana originariamente progettato per offrire la stima migliore dello stato di un sistema che ha una evoluzione lineare nel tempo ed errori di osservazione ( $\mathbf{v}$ ) e di processo ( $\mathbf{w}$ ) distribuiti in modo gaussiano. La dinamica dello stato  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  di un sistema lineare nel tempo (continuo) è rappresentata da una equazione differenziale del tipo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (2.22)$$

dove  $\mathbf{A}(t)$  è una matrice  $n \times n$  di evoluzione e  $\mathbf{B}$  è una matrice  $n \times l$  che collega i fattori esterni noti  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^l$  con lo stato  $\mathbf{x}$ . Analogamente, l'osservazione del sistema  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$  è governata da una equazione lineare:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (2.23)$$

con  $\mathbf{H}$  matrice  $m \times n$  che collega lo stato con la misura  $\mathbf{z}_k$ . Nelle applicazioni reali il tempo è sempre una variabile discreta poiché le misure sono necessariamente effettuate a distanza temporale finita, benché piccola. La dinamica di un sistema lineare a tempo discreto diventa:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (2.24)$$

Le variabili  $\mathbf{w}_k$  e  $\mathbf{v}_k$  rappresentano rispettivamente il rumore di processo e di osservazione considerato distribuito in modo gaussiano, quindi con media nulla e matrici di covarianza rispettivamente  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ . Per la realizzazione di un filtro di Kalman tutte queste matrici citate devono essere supposte note.

Il filtro di Kalman è un filtro di stima ricorsivo e richiede ad ogni iterazione la conoscenza dello stato stimato dal passo precedente  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  e l'osservazione corrente  $\mathbf{z}_k$ . Essendo, inoltre, un filtro bayesiano, il procedimento si basa sul concetto di probabilità a priori o posteriori di una misura.

Sia  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  la stima a priori dello stato del sistema, ottenuta dalla dinamica del sistema (equazione (2.24)) a partire dalla stima precedente  $k-1$ , e sia  $\hat{\mathbf{x}}_k$  la stima dello stato a posteriori dell'osservazione  $\mathbf{z}_k$ . Da queste definizioni è possibile definire l'errore della stima a priori e a posteriori come:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_k^- &= \tilde{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^- \\ \mathbf{e}_k &= \tilde{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_k \end{aligned} \quad (2.25)$$

A questi errori è possibile associare le matrici di covarianza a priori e a posteriori:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_k^- &= \mathbb{E}[\mathbf{e}_k^- \mathbf{e}_k^{-\top}] \\ \mathbf{P}_k &= \mathbb{E}[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^\top]\end{aligned}\tag{2.26}$$

L'obiettivo del filtro di Kalman è minimizzare la covarianza dell'errore a posteriori  $\mathbf{P}_k$  e fornire un metodo per ottenere la stima di  $\hat{\mathbf{x}}_k$  data la stima a priori  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  e l'osservazione  $\mathbf{z}_k$ . Il filtro fornisce una stima dello stato a posteriori attraverso una combinazione lineare della stima dello stato precedente e dell'errore di osservazione:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-)\tag{2.27}$$

spostando il problema della stima a quello di ricavare il fattore di guadagno  $\mathbf{K}_k$ . La differenza  $\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-$  è chiamata residuo, e rappresenta la discrepanza tra l'osservazione predetta e quella realmente avvenuta.

Il filtro di Kalman viene normalmente presentato in due fasi: aggiornamento dello stato a partire dalla dinamica (fase di predizione) e aggiornamento della misura (fase di osservazione).

Nella prima fase si ottiene la stima a priori sia di  $\hat{\mathbf{x}}_k$  che della covarianza  $\mathbf{P}_k$ . La stima a priori  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  viene dalla conoscenza della dinamica del sistema:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B} \mathbf{u}_k\tag{2.28}$$

e allo stesso modo viene aggiornata la stima a priori della covarianza dell'errore:

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}^\top + \mathbf{Q}_k\tag{2.29}$$

Queste sono le miglior stime dello stato e della covarianza dell'istante  $t_k$  ottenibili a priori dell'osservazione del sistema.

Nella seconda fase è calcolato il guadagno, definito come:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^\top (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^\top + \mathbf{R}_k)^{-1}\tag{2.30}$$

che minimizza la covarianza a posteriori e, con questo fattore, viene aggiornato lo stato a posteriori attraverso l'equazione (2.28). Usando questo valore per il guadagno  $\mathbf{K}$ , la stima a posteriori della matrice di covarianza diventa:

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-\tag{2.31}$$

Per poter utilizzare il filtro di Kalman è, tuttavia, necessario partire da un valore iniziale della variabile di stato e della matrice di covarianza.

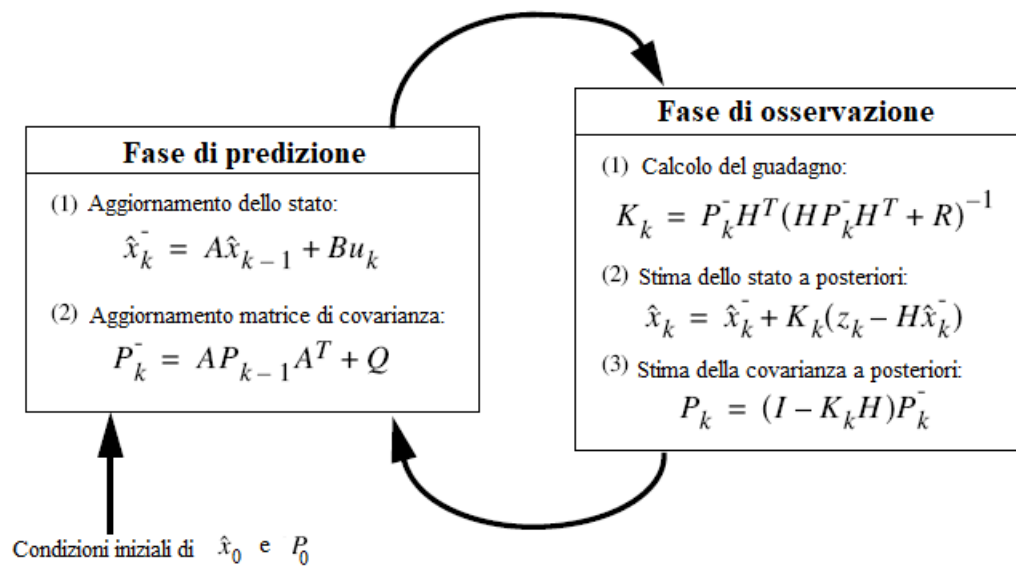


Figura 2.4: schema riassuntivo del processo iterativo del filtro di Kalman.

## 2.5 Filtro di Kalman esteso

Il filtro di Kalman esteso è una versione del filtro di Kalman usata quando l'evoluzione o l'osservazione dello stato del sistema sono non lineari.

Un sistema non lineare a tempo discreto, formato dall'evoluzione dello stato e dalla sua osservazione, può essere scritto in forma generalizzata come mostrato nelle due equazioni (2.17). Per poter essere applicato, il filtro richiede il calcolo degli Jacobiani sia di  $\mathcal{F}$  che di  $\mathcal{H}$ . Applicando la teoria della propagazione dell'incertezza in funzioni non lineari, attraverso le matrici delle derivate è possibile sfruttare le stesse formulazioni matematiche fatte per il caso del filtro di Kalman lineare usando come matrici ([13], [14]):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k &= \left. \frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_k, \bar{\mathbf{w}})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k^-} & \mathbf{W}_k &= \left. \frac{\partial \mathcal{F}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{u}_k, \bar{\mathbf{w}})}{\partial \bar{\mathbf{w}}} \right|_{\bar{\mathbf{w}}} \\ \mathbf{H}_k &= \left. \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{v}})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k^-} & \mathbf{V}_k &= \left. \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{v}})}{\partial \bar{\mathbf{v}}} \right|_{\bar{\mathbf{v}}} \end{aligned} \quad (2.32)$$

dove le variabili barrate indicano il loro valore medio. Inoltre, come equazione di aggiornamento, è usata:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathcal{H}(\hat{\mathbf{x}}_k^-)) \quad (2.33)$$

È comunque da notare che anche il calcolo del residuo  $\mathbf{y}_k = \mathbf{z}_k - \mathcal{H}(\hat{\mathbf{x}}_k^-)$  può essere una funzione non lineare. Rispetto al filtro di Kalman lineare, la versione estesa risulta una scelta sub-ottima come stimatore ma comunque ampiamente accettata e usata in applicazioni pratiche. Il filtro di Kalman esteso, per sua costruzione, raggiunge solo una precisione di primo ordine ma permette comunque risultati vicini all'ottimo nel caso di funzionamento in punti in cui le derivate seconde sono nulle.



## 2.6 Rappresentazione delle rotazioni

La navigazione inerziale si riferisce al calcolo della posizione e orientazione di un corpo rispetto ad un sistema di riferimento fisso. Denominando con "locale" il sistema di riferimento fisso e con "corpo" il sistema di riferimento solidale con il corpo, le trasformazioni tra i due sistemi di riferimento sono rototraslazioni nello spazio tridimensionale.

Esistono diversi modi per rappresentare le rotazioni e in questa tesi saranno utilizzati gli angoli di Eulero e le matrici di rotazione. La notazione usata degli angoli di Eulero  $(\phi, \theta, \psi)$  fa riferimento rotazioni antiorarie rispettivamente rispetto gli assi  $x, y, z$  del laboratorio.

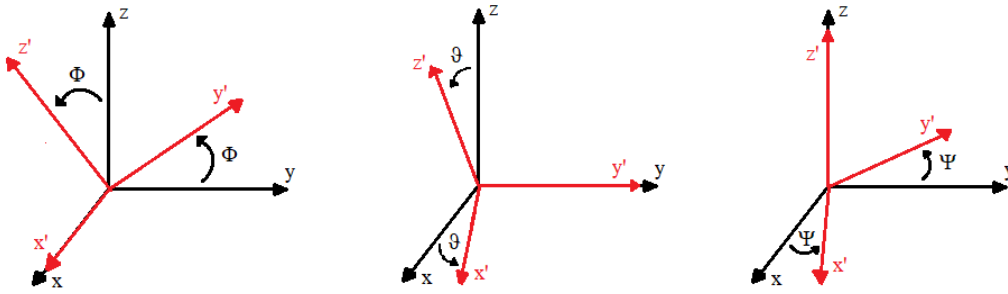


Figura 2.5: rappresentazione degli angoli di Eulero utilizzati. Il s.d.r. nero  $(x, y, z)$  corrisponde a quello locale, mentre il s.d.r. rosso  $(x', y', z')$  corrisponde a quello del corpo.

Le matrici di rotazione associate agli angoli mostrati in figura 2.5 sono:

$$\mathbf{C}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}_y = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}_z = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice che trasforma i vettori  $\vec{v}^c$  espressi nel s.d.r del corpo, nei rispettivi vettori  $\vec{v}^l$  nel s.d.r locale è, a meno di traslazioni, una composizione delle rotazioni lungo i singoli assi:

$$\vec{v}^l = \mathbf{C} \cdot \vec{v}^c = (\mathbf{C}_z \mathbf{C}_y \mathbf{C}_x) \cdot \vec{v}^c \quad (2.34)$$

Svolgendo il calcolo esplicito del prodotto  $\mathbf{C}_z \mathbf{C}_y \mathbf{C}_x$ , si nota facilmente che è possibile ricavare gli angoli  $(\phi, \theta, \psi)$  direttamente dalla matrice di rotazione generale  $\mathbf{C}$ :

$$\phi = \arctan\left(\frac{C_{3,2}}{C_{3,3}}\right) \quad \theta = \arcsin(-C_{3,1}) \quad \psi = \arctan\left(\frac{C_{2,1}}{C_{1,1}}\right) \quad (2.35)$$

Inoltre, in approssimazione di angoli piccoli, il prodotto tra matrici diventa commutativo e la matrice di rotazione  $\mathbf{C}$  assume una forma particolarmente semplice:

$$\mathbf{C} \approx \begin{pmatrix} 1 & -\psi & \theta \\ \psi & 1 & -\phi \\ -\theta & \phi & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} + \delta\Psi \quad (2.36)$$

Nel caso in cui la rotazione cambi nel tempo, è possibile dimostrare (si veda [7] per maggiori dettagli) che, in approssimazione di angoli piccoli:

$$\mathbf{C}(t) = \exp\left(\int_0^t \boldsymbol{\Omega}(\tau) d\tau\right) \mathbf{C}(0) \quad (2.37)$$

dove  $\mathbf{C}(0)$  è la matrice che rappresenta la rotazione iniziale (al tempo  $t = 0$ ), mentre  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  è definita come:

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\Psi}{\delta t} \quad (2.38)$$

### 2.6.1 Rinormalizzazione

Le matrici di rotazioni appartengono al gruppo  $\mathcal{SO}(3)$ , cioè le matrici  $3 \times 3$  ortogonali. Scrivendo una matrice di rotazione come:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{t}_1 \\ \vec{t}_2 \\ \vec{t}_3 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

allora si verifica che  $\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2 = 0$  e  $\vec{t}_1 \times \vec{t}_2 = \vec{t}_3$  (si veda [15] per maggiori dettagli).

Se la matrice di rotazione è manipolata tramite algoritmi numerici, è possibile che dopo un certo numero di iterazioni non sia più ortogonale, di conseguenza è necessario forzarne l'ortogonalità.

Definendo  $\epsilon = \vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2$ , si correggono i vettori nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{t}_1 - \frac{\epsilon}{2} \vec{t}_2 \\ \vec{r}_2 &= \vec{t}_2 - \frac{\epsilon}{2} \vec{t}_1 \\ \vec{r}_3 &= \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

I nuovi vettori soddisfano le condizioni di ortogonalità, perciò la matrice di rotazione rinormalizzata è:

$$\mathbf{C}^r = \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

# Capitolo 3

## Caratterizzazione dei sensori utilizzati

Le prestazioni di una IMU dipendono fortemente dalla qualità dei sensori utilizzati. In particolare, esiste un procedimento standard per ricavare i parametri che caratterizzano i giroscopi e gli accelerometri. Tale processo prende il nome di caratterizzazione e offre una stima dell'errore sulla posizione che si avrebbe integrando le misure dei sensori senza correzioni a dispositivo fermo.

### 3.1 Sorgenti di errore nei sensori MEMS

Di seguito vengono analizzate alcune fonti di errore tipiche dei giroscopi e accelerometri della tipologia MEMS e il relativo contributo di errore che portano su orientazione e posizione. Per semplicità si considerano rotazione e posizione come indipendenti, cioè si suppone che l'errore sul giroscopio non influenzi l'errore sulla posizione e che l'errore sull'accelerometro non influenzi quello sull'orientazione. Si tratta di un limite inferiore dell'errore effettivo, poiché nelle applicazioni reali orientazione e posizione non sono indipendenti. Inoltre, nei paragrafi seguenti si fa riferimento ad un solo asse di misurazione in quanto la trattazione è identica per tutti gli assi.

#### 3.1.1 Bias costante

Per bias costante si intende la media delle misurazioni nella condizione di riposo, cioè quando il valore misurato dovrebbe essere nullo. Nel caso di un bias costante

ε sulla misura del giroscopio e accelerometro, a causa dell'integrazione si otterrà un errore sull'angolo di rotazione  $\theta$  e sullo spostamento  $r$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{std,\theta}(t) &\propto \epsilon \cdot t \\ \sigma_{std,r}(t) &\propto \epsilon \cdot t^2\end{aligned}\tag{3.1}$$

### 3.1.2 Rumore casuale

Gli accelerometri e giroscopi MEMS sono soggetti a molteplici fonti di errore tra cui termico e di interferenza elettromagnetica, e lo spettro può essere considerato approssimativamente bianco. Un segnale visto nel dominio temporale è definito bianco quando la sua trasformata di Fourier ha densità spettrale costante, cioè il modulo quadro del coefficiente di Fourier di ogni frequenza è lo stesso:

$$S(f) = n^2\tag{3.2}$$

Inserendo (3.2) in (2.14) si ottiene:

$$\sigma^2(\tau) = 4 \int_0^\infty n^2 \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} df = \frac{4n^2}{\tau\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^4(x)}{x^2} dx = \frac{4n^2}{\tau\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{n^2}{\tau}\tag{3.3}$$

Si ha quindi che la deviazione di Allan associata al rumore bianco ha pendenza  $-1/2$  nel grafico 2.2.

Un rumore bianco appartiene alla famiglia dei segnali stazionari in senso debole con media nulla quindi è possibile ricavare la varianza utilizzando l'equazione 2.8. Dato che  $S(f)$  è funzione pari si possono considerare solo frequenze positive. Inoltre, se si utilizza una frequenza di campionamento  $f_c$  si può filtrare il segnale per frequenze più elevate, quindi si ottiene:

$$\text{VAR}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) df \simeq 2 \int_0^{f_c} S(f) df\tag{3.4}$$

dove  $x$  corrisponde alla variabile misurata dal sensore, cioè velocità angolare per il giroscopio, e accelerazione per l'accelerometro. Utilizzando  $S(f) = n^2$  e definendo  $\tau_c = 1/f_c$ , si ottiene facilmente che:

$$\text{VAR}(x) \sim \frac{n^2}{\tau_c}\tag{3.5}$$

Ricordando che la velocità angolare è la derivata prima nel tempo dell'angolo di rotazione e che l'accelerazione è la derivata seconda dello spostamento, è possibile

ottenere la densità spettrale dell'angolo  $\theta$  e spostamento  $r$  utilizzando la proprietà 3 (equazione (2.11)):

$$\begin{aligned} S_\theta &\propto \frac{S}{f^2} = \frac{n^2}{f^2} \\ S_r &\propto \frac{S}{f^4} = \frac{n^2}{f^4} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Inserendo queste densità spettrali nell'equazione (3.4) si avrebbe una divergenza in zero ma dato che il tempo di misura  $\tau_m$  è finito, è possibile considerare frequenze fino ad un valore minimo  $f_l = 1/\tau_m$ . Pertanto si ottiene:

$$\begin{aligned} \text{VAR}(\theta) &\propto n^2 \int_{f_l}^{f_c} \frac{1}{f^2} df = n^2 \left( \frac{1}{f_l} - \frac{1}{f_c} \right) = n^2(\tau_m - \tau_c) \\ \text{VAR}(r) &\propto n^2 \int_{f_l}^{f_c} \frac{1}{f^4} df = \frac{n^2}{3} \left( \frac{1}{f_l^3} - \frac{1}{f_c^3} \right) = \frac{n^2}{3}(\tau_m^3 - \tau_c^3) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Considerando tempi di misura  $\tau_m \gg \tau_c$ , la deviazione standard dell'angolo e dello spostamento risulta:

$$\begin{aligned} \sigma_{std,\theta} &\propto n \cdot t^{1/2} \\ \sigma_{std,r} &\propto n \cdot t^{3/2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

### 3.1.3 Errori di calibrazione

Si tratta di errori vari che sono sistematici quindi in teoria è possibile correggerli. I più comuni di questa tipologia sono rappresentati nella figura 3.1.

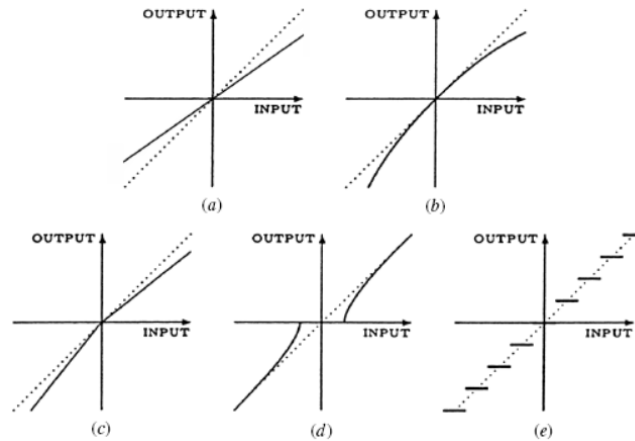


Figura 3.1: errori di calibrazione comuni. La retta tratteggiata indica il comportamento atteso, la linea piena il segnale affetto da errore. (a) fattore di scala; (b) non linearità; (c) asimmetria  $\pm$ ; (d) deadzone; (e) quantizzazione (dovuta alla risoluzione degli ADC). (Adattata da: [16]).

### 3.1.4 Effetto della temperatura

I dispositivi MEMS sono strumenti elettronici in cui scorre corrente pertanto si riscaldano durante l'utilizzo. Tale aumento di temperatura può avere effetti sulla misurazione e solitamente in questi dispositivi il comportamento è fortemente non lineare quindi difficile da correggere.

### 3.1.5 Instabilità del bias

Sia negli accelerometri che nei giroscopi il bias descritto nella sezione 3.1.1 non è costante ma tende a cambiare nel tempo. Per tempi non troppo lunghi, il bias è modellizzato con una distribuzione gaussiana e il suo valore segue un random walk di primo ordine. Tale assunzione non vale per tempi lunghi, in quanto si troverebbe un bias molto distante da quello iniziale e ciò è in contraddizione con i risultati sperimentali. Spesso l'instabilità del bias viene descritta in termini della densità spettrale come un rumore rosa [17], cioè:

$$S(f) = \begin{cases} \frac{B^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{f} & f \leq f_0 \\ 0 & f > f_0 \end{cases} \quad (3.9)$$

dove  $f_0$  è la frequenza di cut-off. Inserendo (3.9) in (2.14) e svolgendo il calcolo in approssimazione  $\tau \gg 1/f_0$ , si ottiene [18]:

$$\sigma(\tau) \simeq \sqrt{\frac{2 \ln 2}{\pi}} B \approx 0.664 B =: BS \quad (3.10)$$

Di conseguenza, la deviazione di Allan ha pendenza nulla nel grafico 2.2 e il parametro BS può essere ricavato come valore minimo della funzione.

Anche il rumore rosa appartiene alla famiglia dei segnali stazionari in senso debole con media nulla, pertanto è possibile ricavare la varianza utilizzando l'equazione (2.8). Gli estremi di integrazione possono essere fissati assumendo che  $f_c \approx f_0$  e che, come per il rumore bianco, il tempo massimo di misura  $\tau_m$  sia finito, quindi è possibile prendere come estremo inferiore  $f_l = 1/\tau_m$ . Si ottiene:

$$\text{VAR}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) df \simeq \int_{f_l}^{f_c} S(f) df \quad (3.11)$$

dove  $x$  corrisponde alla variabile misurata dal sensore, cioè velocità angolare per il giroscopio, e accelerazione per l'accelerometro. Sostituendo  $S(f)$  come definito in

(3.9):

$$\text{VAR}(x) \simeq \int_{f_l}^{f_c} S(f) df = \frac{B^2}{2\pi} \log \left( \frac{f_c}{f_l} \right) \quad (3.12)$$

Dato che la divergenza logaritmica è debole e si vuole studiare solamente l'ordine di grandezza della varianza, è possibile fare l'approssimazione:

$$\text{VAR}(x) \sim B^2 \quad (3.13)$$

Ricordando che la velocità angolare è la derivata prima nel tempo dell'angolo di rotazione, e che l'accelerazione è la derivata seconda dello spostamento, è possibile ottenere la densità spettrale dell'angolo  $\theta$  e spostamento  $r$  utilizzando la proprietà 3 (equazione (2.11)):

$$\begin{aligned} S_\theta &\propto \frac{S}{f^2} = \frac{B^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{f^3} \\ S_r &\propto \frac{S}{f^4} = \frac{B^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{f^5} \end{aligned} \quad (3.14)$$

La varianza associata è quindi:

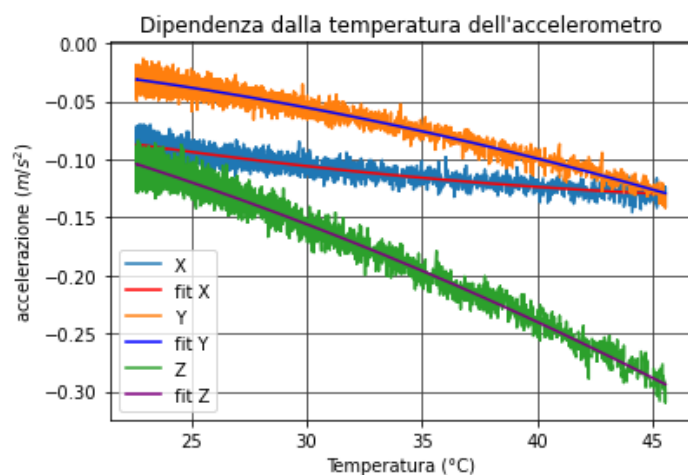
$$\begin{aligned} \text{VAR}(\theta) &\propto B^2 \int_{f_l}^{f_c} \frac{1}{f^3} df = \frac{B^2}{2} \left( \frac{1}{f_l^2} - \frac{1}{f_c^2} \right) = \frac{B^2}{2} (\tau_m^2 - \tau_c^2) \\ \text{VAR}(r) &\propto B^2 \int_{f_l}^{f_c} \frac{1}{f^5} df = \frac{B^2}{4} \left( \frac{1}{f_l^4} - \frac{1}{f_c^4} \right) = \frac{B^2}{4} (\tau_m^4 - \tau_c^4) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Considerando tempi di misura  $\tau_m \gg \tau_c$ , la deviazione standard dell'angolo e dello spostamento risulta:

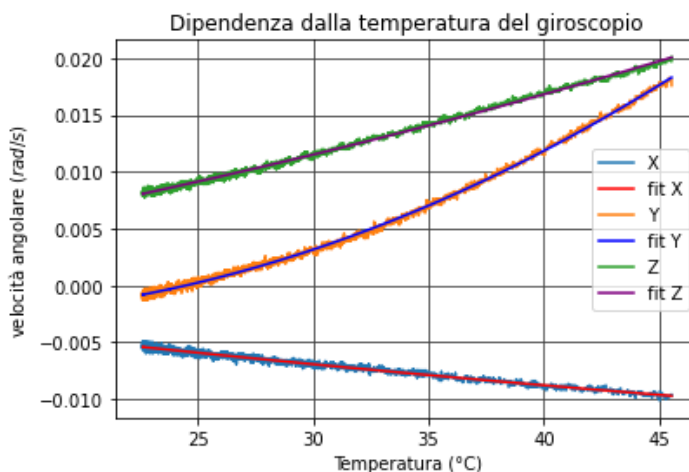
$$\begin{aligned} \sigma_{std,\theta} &\propto B \cdot t \\ \sigma_{std,r} &\propto B \cdot t^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

## 3.2 Dipendenza dalla temperatura

Per tentare di ridurre gli effetti della temperatura nei dispositivi utilizzati si è portata la IMU sulla quale sono montati ad una temperatura di circa 45°C. Si è poi lasciato raffreddare a riposo l'apparato fino alla temperatura ambiente (circa 20°C) e si sono acquisite misure di velocità angolare, accelerazione e temperatura. Se non ci fossero effetti di dipendenza dalla temperatura si avrebbe una funzione costante per tutti gli assi dell'accelerometro e del giroscopio.



(a) accelerometro



(b) giroscopio

Figura 3.2: (a): misure di accelerazione ottenute dai tre assi dell'accelerometro e relativo fit. Il fit è polinomiale di grado 2. (b): misure di accelerazione ottenute dai tre assi del giroscopio e relativo fit. Il fit è polinomiale di grado 2.

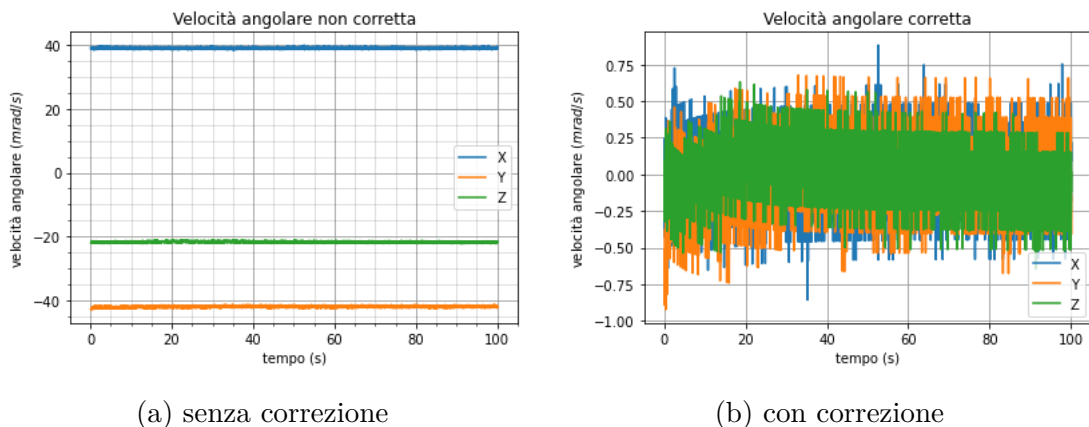


Dai grafici mostrati in figura 3.2 si nota che la dipendenza dalla temperatura delle misure di tutti gli assi di entrambi i sensori è presente e ben visibile. Nonostante ciò, il fit polinomiale di grado 2 si adatta molto bene alla curva quindi è possibile correggere le misure efficacemente anche se è necessario l'utilizzo del sensore di temperatura montato su MPU-6050. Per fare tale correzione è sufficiente sottrarre ad ogni misura dei sensori la funzione di fit valutata alla temperatura in cui si sta operando. Nei paragrafi successivi sarà implicito che tale correzione è stata fatta.

### 3.3 Rimozione del bias costante

Come mostrato nella sezione 3.1.1, la presenza di un bias costante su accelerazione e velocità angolare porta a grandi errori sulla stima della posizione e orientazione del corpo. La procedura di rimozione è molto semplice per la velocità angolare, infatti, dato che a sensore fermo le misure su ogni asse dovrebbero essere nulle, è sufficiente prendere una serie di dati e calcolarne la media per ogni asse. Tale media è un offset (in generale diverso per ogni asse) che andrà sottratto alle misure di velocità angolare usate per l'algoritmo del sistema di navigazione inerziale.

Per quanto riguarda l'accelerazione non è possibile utilizzare un procedimento analogo poiché l'accelerometro del MPU-6050, se lasciato a riposo, misura l'accelerazione di gravità invece che un valore nullo. Di conseguenza, non conoscendo precisamente l'orientazione del corpo, non è possibile distinguere tra bias dell'accelerometro e accelerazione gravitazionale. È comunque utile calcolare la media delle misurazioni sugli assi in quanto costituiscono le coordinate del bias sommate a quelle dell'accelerazione di gravità nel sistema di riferimento del corpo.



(a) senza correzione

(b) con correzione

Figura 3.3: velocità angolare misurata a riposo dai tre assi del giroscopio. La figura (a) rappresenta i dati a cui non è stato sottratto l'offset, la figura (b) gli stessi dati ma corretti.

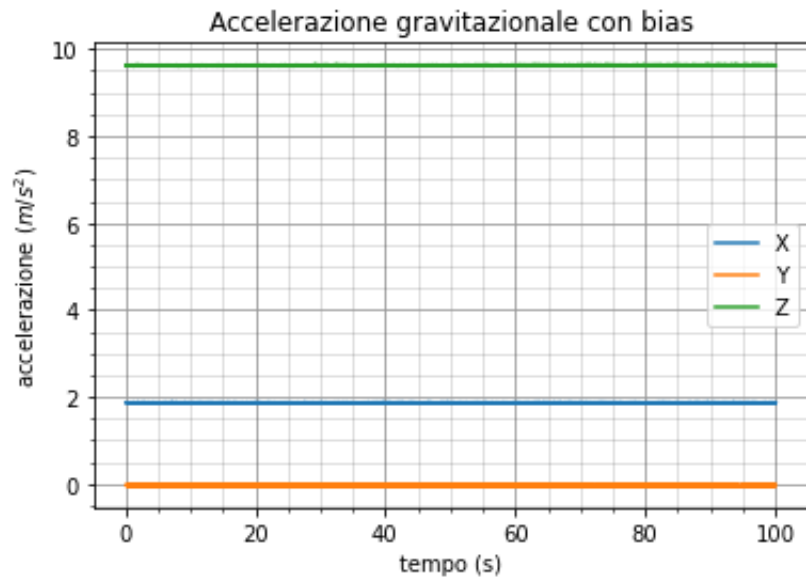


Figura 3.4: accelerazione misurata a riposo dai tre assi dell'accelerometro. Il modulo del vettore che ha componenti pari ai valori medi misurati sui tre assi è:  $a_{offset} = (9.8052 \pm 0.0001) m/s^2$ . Si noti che l'errore associato a  $a_{offset}$  è molto probabilmente sottostimato in quanto non si è tenuto conto degli errori (sistematici) di calibrazione.

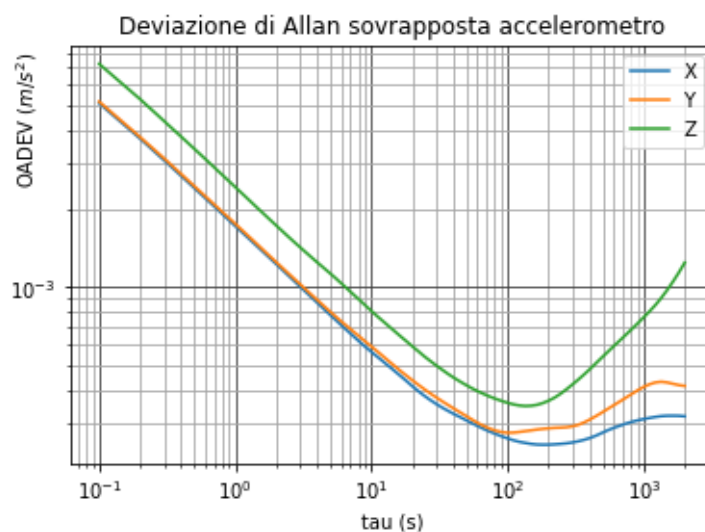
### 3.4 Discussione dei risultati sperimentali

La caratterizzazione dei giroscopi e accelerometri viene fatta valutando i parametri dell'instabilità del bias e del rumore bianco. Spesso, però, viene considerato principalmente il parametro dell'instabilità del bias (chiamato anche parametro di stabilità del bias) poiché è quello che influisce maggiormente per tempi lunghi. La tabella 3.1 classifica gli accelerometri e giroscopi in categorie di prestazione in base all'instabilità del bias.

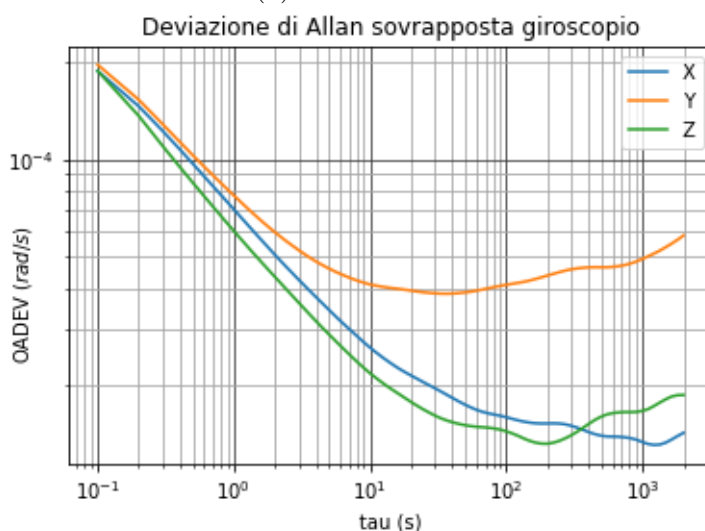
Grado di prestazione	Stabilità bias acc. $B$ ( $g$ )	Posizione ( $km$ )	Stabilità bias giro. $B$ ( $rad/s$ )	Posizione ( $km$ )
<b>Commerciale</b>	$> 5 \cdot 10^{-2}$	$> 320$	$> 5 \cdot 10^{-4}$	$> 10^4$
<b>Industriale</b>	$10^{-2}$	64	$(5 - 50) \cdot 10^{-5}$	1000 - 10000
<b>Tattico</b>	$10^{-3}$	6.4	$(5 - 50) \cdot 10^{-6}$	100 - 1000
<b>Intermedio</b>	$10^{-4}$	0.64	$(5 - 500) \cdot 10^{-8}$	1 - 100
<b>Navigazione</b>	$5 \cdot 10^{-5}$	0.32	$> 5 \cdot 10^{-8}$	$< 1$
<b>Strategico</b>	$5 \cdot 10^{-6}$	0.032	$> 5 \cdot 10^{-9}$	$< 0.1$

Tabella 3.1: classificazione di accelerometri (acc.) e giroscopi (giro.) in base al parametro di stabilità del bias  $B$ . Il valore associato agli accelerometri è fornito in riferimento all'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre ( $g$ ). L'errore sulla posizione è stimato dopo 1 ora di integrazione a dispositivo fermo (fonte: [8]).

Per caratterizzare l'accelerometro e il giroscopio utilizzati si è calcolata la deviazione di Allan in funzione del tempo di media per ognuno dei tre assi. La presa dati è stata fatta a riposo su un piano con una frequenza di campionamento di 10 Hz (che corrisponde ad un  $\tau_c = 0.1$  s) sia per l'accelerometro che per il giroscopio. I risultati sono mostrati in figura 3.5.



(a) accelerometro



(b) giroscopio

Figura 3.5: (a): deviazione di Allan (OADEV) dei tre assi dell'accelerometro. (b): deviazione di Allan (OADEV) dei tre assi del giroscopio.

Dalla figura 3.5a si può notare che l'asse z dell'accelerometro ha prestazioni sensibilmente peggiori degli altri assi, e dalla figura 3.5b si può dire lo stesso dell'asse y del giroscopio. Sia per l'accelerometro che per il giroscopio, le pendenze del primo tratto sono vicine a quella attesa di  $-1/2$  (prevalenza di rumore bianco) ed è presente un minimo (prevalenza di rumore rosa). Il parametro corrispondente al rumore bianco ( $n$ ) è ricavato valutando la OADEV a  $\tau = 1$  s dato che la funzione in quel tratto ha una pendenza vicina  $-1/2$  e il contributo del rumore rosa è trascurabile. Il

parametro  $BS$  di instabilità (o stabilità) del bias è ricavato dal minimo di OADEV in quanto la pendenza della funzione è nulla e il contributo del rumore bianco è trascurabile. I risultati ottenuti sono mostrati nelle seguenti tabelle.

	<b>BS</b> ( $m/s^2$ )	$\tau_{min}$ (s)	<b>n</b> ( $m/s^2/\sqrt{Hz}$ )
<b>X accelerometro</b>	$(2.460 \pm 0.002) \cdot 10^{-4}$	190	$(1.7127 \pm 0.0014) \cdot 10^{-3}$
<b>Y accelerometro</b>	$(2.735 \pm 0.002) \cdot 10^{-4}$	100	$(1.7468 \pm 0.0014) \cdot 10^{-3}$
<b>Z accelerometro</b>	$(3.468 \pm 0.003) \cdot 10^{-4}$	140	$(2.4202 \pm 0.0014) \cdot 10^{-3}$

Tabella 3.2: valori di BS valutati al tempo  $\tau_{min}$  e densità spettrale ( $n$ ) dell'accelerometro.

	<b>BS</b> ( $rad/s$ )	$\tau_{min}$ (s)	<b>n</b> ( $rad/s/\sqrt{Hz}$ )
<b>X giroscopio</b>	$(1.3090 \pm 0.0011) \cdot 10^{-5}$	1300	$(7.009 \pm 0.006) \cdot 10^{-5}$
<b>Y giroscopio</b>	$(3.845 \pm 0.003) \cdot 10^{-5}$	35	$(7.739 \pm 0.006) \cdot 10^{-5}$
<b>Z giroscopio</b>	$(1.3195 \pm 0.0011) \cdot 10^{-5}$	190	$(6.008 \pm 0.004) \cdot 10^{-5}$

Tabella 3.3: valori di BS valutati al tempo  $\tau_{min}$  e densità spettrale ( $n$ ) del giroscopio.

Dato che il rumore dei sensori è stato modellizzato come somma di rumore bianco e rumore rosa, la deviazione standard di velocità angolare e accelerazione è data da:

$$\sigma_{std, tot}^2 = \sigma_{std, bianco}^2 + \sigma_{std, rosa}^2 \quad (3.17)$$

Utilizzando le equazioni (3.13) e (3.5), è possibile convertire i parametri mostrati nelle tabelle 3.2 e 3.3 nelle rispettive deviazioni standard.

	$\sigma_{std}$ <b>bianco</b>	$\sigma_{std}$ <b>rosa</b>	$\sigma_{std}$ <b>totale</b>
<b>X acc. (g)</b>	$5.52 \cdot 10^{-3}$	$3.78 \cdot 10^{-5}$	$5.52 \cdot 10^{-3}$
<b>Y acc. (g)</b>	$5.63 \cdot 10^{-3}$	$4.20 \cdot 10^{-5}$	$5.63 \cdot 10^{-3}$
<b>Z acc. (g)</b>	$7.80 \cdot 10^{-3}$	$5.32 \cdot 10^{-5}$	$7.80 \cdot 10^{-3}$
<b>X giro. (rad/s)</b>	$2.21 \cdot 10^{-4}$	$1.97 \cdot 10^{-5}$	$2.22 \cdot 10^{-4}$
<b>Y giro. (rad/s)</b>	$2.45 \cdot 10^{-4}$	$5.79 \cdot 10^{-5}$	$2.52 \cdot 10^{-4}$
<b>Z giro. (rad/s)</b>	$1.90 \cdot 10^{-4}$	$1.99 \cdot 10^{-5}$	$1.91 \cdot 10^{-4}$

Tabella 3.4: conversione dei parametri  $BS$  e  $n$  nella deviazione standard dei rumori associati. Per la conversione delle unità di misura è stata considerata  $g = 9.81 m/s^2$ .

Confrontando i risultati di  $B = \sigma_{std, rosa}$  mostrati in tabella 3.4 con la classificazione mostrata in tabella 3.1, si deduce che l'accelerometro ha prestazioni ottime dato che raggiunge il grado "navigazione". Al contrario, il giroscopio ha un grado di prestazione al limite tra "tattico" e "intermedio" e non è chiaro il motivo per cui le prestazioni dell'asse Y siano significativamente peggiori di degli altri assi. Tali risultati sono comunque tipici di sensori che utilizzano la tecnologia MEMS.

Un sistema di navigazione inerziale basato su tali strumenti ha perciò limitazioni evidenti, in particolare a causa del giroscopio, e ci si aspettano derive superiori a (100 – 1000) km dopo solo un'ora di integrazione.





# Capitolo 4

## Implementazione e risultati

Come già accennato nei capitoli precedenti, un sistema di navigazione inerziale, per essere utilizzabile in applicazioni reali, ha bisogno di frequenti correzioni da parte di un sensore esterno, o, in alternativa, l'algoritmo dell'INS deve essere altamente specializzato verso una particolare applicazione.

Tuttavia, è possibile ottenere risultati soddisfacenti facendo ipotesi meno stringenti che mantengono un grado maggiore di generalità e quindi di applicabilità.

Per fare ciò si sono implementati due INS che operano su scale temporali diverse. In particolare, se la frequenza di campionamento del giroscopio e accelerometro è  $\delta t$ , allora il primo INS opera su tale scala temporale eseguendo il suo algoritmo ogni  $\delta t$ . Il secondo INS, invece, si attiva ogni  $N$  esecuzioni del primo INS e ha lo scopo di agire in maniera analoga ad un sensore esterno che misura lo stato del corpo.

### 4.1 Algoritmo del primo INS

Utilizzando una IMU a sei gradi di libertà in modalità *strapdown* si hanno a disposizione le misure della velocità angolare derivanti dal giroscopio e le misure di accelerazione derivanti dall'accelerometro, entrambe definite nel sistema di riferimento del corpo:

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_k^c &= (\omega_k^{cx}, \omega_k^{cy}, \omega_k^{cz})^\top \\ \vec{a}_k^c &= (a_k^{cx}, a_k^{cy}, a_k^{cz})^\top\end{aligned}\tag{4.1}$$

Le misure di velocità angolare sono utilizzate per ricavare la matrice di rotazione per poi proiettare nel sistema di riferimento locale l'accelerazione misurata nel s.d.r.

del corpo. Utilizzando una frequenza di campionamento tale da ottenere due misure successive di  $\vec{\omega}^c$  e  $\vec{a}^c$  distanti un tempo  $t_k - t_{k-1} = \delta t$ , l'equazione (2.37) diventa:

$$\mathbf{C}_k = \exp\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{\Omega}(t) dt\right) \mathbf{C}_{k-1} \quad (4.2)$$

dove dalla definizione (2.38) si deduce che  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  è la matrice antisimmetrica della velocità angolare:

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{c_z}(t) & \omega^{c_y}(t) \\ \omega^{c_z}(t) & 0 & -\omega^{c_x}(t) \\ -\omega^{c_y}(t) & \omega^{c_x}(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Considerando  $\vec{\omega}^c(t)$  costante nell'intervallo tra due misurazioni successive, l'integrale si riduce ad una moltiplicazione fra la matrice  $\boldsymbol{\Omega}(t) = \boldsymbol{\Omega}_k$  e l'intervallo  $\delta t$ . Si definisce  $\mathbf{B}_k$  il risultato di tale operazione:

$$\mathbf{B}_k = \boldsymbol{\Omega}_k \cdot \delta t = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_k^{c_z} \delta t & \omega_k^{c_y} \delta t \\ \omega_k^{c_z} \delta t & 0 & -\omega_k^{c_x} \delta t \\ -\omega_k^{c_y} \delta t & \omega_k^{c_x} \delta t & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Definendo  $\sigma = |\vec{\omega}^c \delta t|$  e sviluppando l'esponenziale presente in (4.2) in serie di Taylor, si ottiene [7]:

$$\mathbf{C}_k = \left( \mathbf{I} + \frac{\sin \sigma}{\sigma} \mathbf{B}_k + \frac{1 - \cos \sigma}{\sigma^2} \mathbf{B}_k^2 \right) \mathbf{C}_{k-1} \quad (4.5)$$

Nota la matrice di rotazione e quindi l'orientazione del corpo, è possibile proiettare nel sistema di riferimento locale il vettore accelerazione misurato dall'accelerometro. Successivamente, è possibile sottrarre o aggiungere l'accelerazione di gravità a seconda delle caratteristiche dei sensori utilizzati o dell'impiego del sistema di navigazione inerziale. In particolare, l'accelerometro utilizzato in questa tesi, se lasciato a riposo, non misura una accelerazione nulla ma quella gravitazionale. Inoltre questo specifico sistema di navigazione inerziale non è pensato per applicazioni aerospaziali, quindi è necessario sottrarre l'accelerazione gravitazionale  $\vec{g}$  al vettore proiettato:

$$\vec{a}_k^L = \mathbf{C}_k \cdot \vec{a}_k^c - \vec{g} \quad (4.6)$$

Come accelerazione di gravità è utilizzato il vettore  $\vec{a}_{offset}$  (definito nella sezione 3.3) proiettato nel sistema di riferimento locale.

Una volta nota l'accelerazione, si ricavano velocità e posizione con degli algoritmi di integrazione. Per il grado di precisione dei sensori utilizzati, è sufficiente utilizzare

la versione implicita dell'algoritmo di Eulero:

$$\begin{aligned}\vec{v}_k^L &= \vec{v}_{k-1}^L + \vec{a}_k^L \delta t \\ \vec{s}_k^L &= \vec{s}_{k-1}^L + \vec{v}_k^L \delta t\end{aligned}\tag{4.7}$$

Si noti che bisogna fornire le condizioni iniziali dello stato del sistema:  $(\mathbf{C}_0, \vec{v}_0^L, \vec{s}_0^L)$ .

## 4.2 Implementazione del filtro di Kalman

Utilizzando solo l'algoritmo del sistema di navigazione descritto nella sezione 4.1, l'errore sulla posizione si accumula rapidamente, perciò per rallentare la deriva è stato implementato un filtro di Kalman. Lo stato reale dell'IMU al tempo  $t_k$  può essere definito dalla sua orientazione, velocità e posizione:

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = (\tilde{\mathbf{C}}_k, \tilde{\mathbf{v}}_k, \tilde{\mathbf{s}}_k)^\top \quad (4.8)$$

Lo stato reale dell'IMU non è accessibile a causa degli errori di misura, di conseguenza lo stato calcolato dal sistema navigazione inerziale è indicato con:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = (\hat{\mathbf{C}}_k, \hat{\mathbf{v}}_k, \hat{\mathbf{s}}_k)^\top \quad (4.9)$$

Dato che lo stato reale e lo stato calcolato in generale non coincidono, si definisce stato di errore  $\delta\mathbf{x}$  la differenza tra lo stato reale e lo stato calcolato. È possibile scrivere lo stato del sistema utilizzando gli angoli di Eulero  $\vec{\alpha} = (\phi, \theta, \psi)^\top$  associati alla matrice di rotazione  $\mathbf{C}$ , quindi lo stato di errore (scritto come vettore colonna) risulta:

$$\delta\mathbf{x}_k = (\delta\vec{\alpha}_k, \delta\vec{v}_k, \delta\vec{s}_k)^\top \quad (4.10)$$

Formalmente, i tre stati sono collegati esplicitamente da:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}_k &= \mathbf{\Phi}_k \hat{\mathbf{C}}_k \\ \tilde{\mathbf{v}}_k &= \hat{\mathbf{v}}_k + \delta\vec{v}_k \\ \tilde{\mathbf{s}}_k &= \hat{\mathbf{s}}_k + \delta\vec{s}_k \end{aligned} \quad (4.11)$$

dove  $\mathbf{\Phi}_k$  è la matrice associata agli angoli  $\delta\vec{\alpha} = (\delta\theta, \delta\phi, \delta\psi)^\top$ . Se la rotazione è piccola, cioè l'INS viene corretto frequentemente da una misura esterna, vale l'approssimazione di angoli piccoli:

$$\mathbf{\Phi}_k \approx \begin{pmatrix} 1 & -\delta\psi_k & \delta\theta_k \\ \delta\psi_k & 1 & -\delta\phi_k \\ -\delta\theta_k & \delta\phi_k & 1 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Supponendo di avere a disposizione delle misure di accelerazione e velocità angolare ogni  $\delta t$  e delle misure  $\mathbf{z}$  di alcune variabili del sistema con matrice di covarianza associata  $\mathbf{R}$  ogni  $\Delta t$ , è possibile implementare un filtro di Kalman come descritto nella sezione 2.4. In particolare, dato che l'evoluzione del sistema non è lineare, è

utilizzata la versione estesa.

La trattazione del filtro di Kalman resta valida anche se invece di usare lo stato del sistema è usato lo stato di errore. Perciò è sufficiente sostituire  $\delta\hat{\mathbf{x}}$  a  $\hat{\mathbf{x}}$  nelle equazioni mostrate in figura 2.4 e al termine della fase di osservazione correggere lo stato calcolato dall'INS:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \delta\hat{\mathbf{x}}_k \quad (4.13)$$

Questa fase ulteriore è chiamata fase di correzione.

### 4.2.1 Fase di predizione

Utilizzando lo stato di errore e supponendo nessun fattore esterno, la fase di predizione mostrata in figura 2.4 diventa:

$$\begin{aligned} \delta\hat{\mathbf{x}}_k^- &= \mathbf{A}_k \delta\hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\ \mathbf{P}_k^- &= \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}_k^\top + \mathbf{Q}_k \end{aligned} \quad (4.14)$$

Lo stato dell'INS è corretto nella fase di correzione, di conseguenza  $\delta\mathbf{x}_{k-1} = 0$  ogni volta che inizia la fase di predizione. Dall'equazione 4.14 segue che anche  $\delta\hat{\mathbf{x}}_k^- = 0$  indipendentemente da  $\mathbf{A}_k$ .

Dalla dinamica del sistema descritta nella sezione 4.1, si ricava che la matrice di evoluzione è [7]:

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \delta t \mathbf{S}(\vec{a}_k^L) & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \delta t \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

dove  $\mathbf{I}$  indica la matrice identità  $3 \times 3$  e, analogamente, la matrice  $\mathbf{0}$  indica la matrice nulla  $3 \times 3$  (tutti i termini sono nulli).  $\mathbf{S}(\vec{a}_k^L)$  è la matrice del prodotto vettoriale dell'accelerazione nel s.d.r. locale, cioè è definita come:

$$\mathbf{S}(\vec{a}_k^L) = \begin{pmatrix} 0 & -a_k^{Lz} & a_k^{Ly} \\ a_k^{Lz} & 0 & -a_k^{Lx} \\ -a_k^{Ly} & a_k^{Lx} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Il blocco  $\delta t \mathbf{S}(\vec{a}_k^L)$  propaga l'incertezza sull'orientazione in incertezza sulla velocità. Analogamente il blocco  $\delta t \mathbf{I}$  propaga l'incertezza sulla velocità in incertezza sulla posizione.

Infine, la matrice  $\mathbf{Q}_k$  di rumore del processo descrive gli errori a cui sono soggetti

i sensori. Dato che si sono utilizzati un accelerometro e un giroscopio, la forma generale della matrice è:

$$\mathbf{Q}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_k^g & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_k^a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Assumendo che gli errori sui sensori siano gaussiani e il rumore delle misure sia bianco, allora le matrici  $\mathbf{U}_k$  possono essere scritte come [7]:

$$\mathbf{U}_k = \delta t^2 (\hat{\mathbf{C}}_k^-)^\top \mathbf{W}_k (\hat{\mathbf{C}}_k^-) \quad (4.18)$$

dove  $\mathbf{W}_k$  è la matrice di covarianza della misura:

$$\mathbf{W}_k = \begin{pmatrix} \sigma_{std,x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{std,y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{std,z}^2 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Per ricavare  $\mathbf{U}_k^g$  si utilizza la deviazione standard del giroscopio, mentre per  $\mathbf{U}_k^a$  quella dell'accelerometro.

### 4.2.2 Fase di osservazione

In generale, nel filtro di Kalman esteso una misura esterna al tempo  $t_k$  è modellata come (si veda sezione 2.5):

$$\mathbf{z}_k = \mathcal{H}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \quad (4.20)$$

Da cui segue che il residuo è:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{z}_k - \mathcal{H}_k(\hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (4.21)$$

Assumendo che la matrice di covarianza associata alla misura è  $\mathbf{R}_k$ , e ricordando che  $\delta \hat{\mathbf{x}}_k^- = 0$ , allora lo stato di errore e la matrice di covarianza a posteriori sono dati da (si veda la sezione 2.4):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^\top (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^\top + \mathbf{R}_k)^{-1} \\ \delta \hat{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{K}_k \mathbf{y}_k \\ \mathbf{P}_k &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- \end{aligned} \quad (4.22)$$

dove  $\mathbf{H}_k$  è definita secondo 2.32:

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathcal{H}_k}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k^-} \quad (4.23)$$

### 4.2.3 Fase di correzione

Nella fase di correzione lo stato a priori dell'INS è corretto utilizzando le informazioni fornite dalla misura esterna:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{C}}_k &= \hat{\mathbf{\Phi}}_k \hat{\mathbf{C}}_k^- \\ \hat{v}_k &= \hat{v}_k^- + \delta \hat{v}_k \\ \hat{s}_k &= \hat{s}_k^- + \delta \hat{s}_k\end{aligned}\tag{4.24}$$

con  $\hat{\mathbf{\Phi}}_k$  definita come in 4.12.

La correzione alla matrice di rotazione può dare come risultato una matrice non ortogonale, e, per tempi lunghi, questo può causare grossi problemi durante il calcolo della proiezione di vettori. È, perciò, necessario rinormalizzare  $\hat{\mathbf{C}}_k$  tramite il procedimento descritto nella sezione 2.6.1.

Dopo la fase di correzione lo stato di errore dell'INS è azzerato, cioè  $\delta \hat{\mathbf{x}}_k = 0$ .

In generale il tempo  $\Delta t$  tra due misure esterne è diverso dal tempo  $\delta t$  tra due misure di accelerazione e velocità angolare. Nel caso in cui  $\Delta t > \delta t$ , nelle iterazioni in cui la misura non è disponibile, la fase di osservazione e correzione sono saltate e la matrice di covarianza a posteriori è semplicemente uguale a quella a priori. Al contrario, se  $\Delta t < \delta t$ , le fasi di osservazione e correzione possono essere ripetute più volte fino a quando le misure di accelerazione e velocità angolare non sono nuovamente disponibili.

### 4.3 Algoritmo del secondo INS

Il secondo INS è attivato dopo ogni  $N$  iterazioni del primo INS e ha lo scopo di verificare se il corpo si è mosso e/o ha cambiato la sua orientazione durante le  $N$  misurazioni, cioè simula una misura esterna che può essere utilizzata dal filtro di Kalman.

L'ipotesi di partenza è che se l'accelerazione o la velocità angolare del corpo è nulla, allora il grafico della deviazione di Allan delle rispettive misure ha le stesse caratteristiche di quello ottenuto per la caratterizzazione a sensore fermo. Si noti che in realtà anche nel caso di accelerazione o velocità angolari costanti e diverse da zero si otterrebbe lo stesso risultato, tuttavia è ragionevole assumere che tali situazioni non si verifichino. Analogamente, si assume che il corpo non possa muoversi con velocità costante nell'intervallo  $N\delta t$  in modo che se l'accelerazione è nulla, allora anche lo spostamento è nullo.

Se  $N$  non è troppo grande, il rumore dominante è quello bianco, di conseguenza l'andamento della funzione è quello descritto nella sezione 3.1.2:

$$\sigma = \frac{n}{\sqrt{\tau}} \quad (4.25)$$

Si può verificare che l'andamento atteso sia compatibile con quello calcolato tramite il test del chi-quadro.

Avendo a disposizione la deviazione di Allan  $\sigma_i$  calcolata in  $\tau_i$  con  $i = 1, \dots, N_a$  e il rispettivo errore  $\Delta\sigma_i$ , si definisce il chi-quadro come:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N_a} \left( \frac{n}{\sqrt{\tau_i}} - \sigma_i \right)^2 w_i \quad (4.26)$$

dove  $w_i = 1/\Delta\sigma_i^2$ . La miglior stima del parametro  $n$  si ricava minimizzando il chi-quadro, cioè calcolando la derivata parziale di  $\chi^2$  in  $n$  e ponendola uguale a zero. Svolgendo il facile calcolo si ottiene che:

$$\bar{n} = \frac{\sum_{i=1}^{N_a} \frac{w_i \sigma_i}{\sqrt{\tau_i}}}{\sum_{i=1}^{N_a} \frac{w_i}{\tau_i}} \quad (4.27)$$

Il minimo di  $\chi^2$  è quindi quello calcolato in  $\bar{n}$ :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N_a} \left( \frac{\bar{n}}{\sqrt{\tau_i}} - \sigma_i \right)^2 w_i \quad (4.28)$$



Infine, il chi-quadro ridotto è definito come  $\tilde{\chi}^2 = \chi^2/dof$ , dove  $dof$  è il numero dei gradi di libertà. In generale, nelle situazioni questo tipo,  $dof = N_a - k$ , dove  $k$  sono i parametri stimati della funzione di confronto. In questo caso, la funzione in (4.25) ha un solo parametro libero ( $n$ ), di conseguenza  $k = 1$  e:

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{N_a - 1} \quad (4.29)$$

Per valutare quanto il modello è compatibile con i risultati sperimentali si calcola la probabilità che il chi-quadro ridotto sia maggiore di quello ottenuto dai dati sperimentali ( $\tilde{\chi}_0^2$ ):

$$P = P[\tilde{\chi}^2 > \tilde{\chi}_0^2] \quad (4.30)$$

Solitamente si definisce discrepanza significativa se  $P < 0.05$  e discrepanza altamente significativa se  $P < 0.01$ . Si dice che il test del chi-quadro ha avuto esito negativo se la discrepanza risulta altamente significativa.

In base all'esito del test del chi-quadro, viene deciso se il corpo si è mosso, ha cambiato orientazione, o entrambi. Per fornire una misura, il secondo integratore ha delle sue variabili di posizione, velocità e orientazione del corpo che vengono aggiornate nel caso che il rispettivo test risulti negativo. In particolare, se il test sull'accelerometro ha esito negativo allora la posizione del secondo integratore viene aggiornata facendola coincidere con quella del primo integratore. Analogamente, se il test del giroscopio ha esito negativo, l'orientazione del secondo integratore viene aggiornata nello stesso modo.

L'errore associato alla misura fornita dal secondo integratore è la propagazione del rumore bianco su velocità, posizione e angoli. In particolare, da 3.8 si ottiene che:

$$\begin{aligned} \sigma_{std,ang}^2 &= \sigma_{std,vel}^2 = \bar{n}^2 \cdot \tau = \bar{n}^2 \cdot N\delta t \\ \sigma_{std,pos}^2 &= \bar{n}^2 \cdot \tau^3 = \bar{n}^2 \cdot (N\delta t)^3 \end{aligned} \quad (4.31)$$

In generale,  $\sigma_{std}$  è diversa per ogni asse dato che il parametro  $\bar{n}$  è stimato per i tre assi del giroscopio e i tre assi dell'accelerometro. Questo complica molto la propagazione degli errori poiché le eventuali rotazioni mischiano gli assi, perciò la matrice di covarianza di velocità, posizione e angoli di rotazione non è più diagonale. Tuttavia, se vale l'approssimazione  $\bar{n}_x \simeq \bar{n}_y \simeq \bar{n}_z$ , sia per il giroscopio che per l'accelerometro, allora la deviazione standard è la stessa sui tre assi e la matrice di covarianza di ogni variabile è proporzionale alla matrice identità:

$$\mathbf{R}_{ang} = \sigma_{std,ang}^2 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad \mathbf{R}_{vel} = \sigma_{std,vel}^2 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad \mathbf{R}_{pos} = \sigma_{std,pos}^2 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (4.32)$$

### 4.3.1 Caso 1: test negativo per entrambi i sensori

Se il test del chi-quadro è risultato negativo per entrambi i sensori, allora significa che il secondo integratore non aggiunge informazioni sullo stato del sistema, in quanto sono state registrate accelerazione e velocità angolare non costanti nel tempo. In questo caso il primo INS continua ad eseguire il suo algoritmo senza correzioni e il secondo integratore aggiorna le sue variabili interne in modo da farle coincidere con quelle del primo.

### 4.3.2 Caso 2: test negativo per giroscopio e positivo per accelerometro

In questo caso il secondo integratore ha rilevato un cambiamento nell'orientazione del corpo ma non una accelerazione. Di conseguenza, la variabile orientazione del secondo integratore viene aggiornata, mentre la "misura" corrisponde alla variabile posizione del secondo integratore (che non è stata aggiornata). Coerentemente con le ipotesi di partenza, la velocità "misurata" è posta al valore nullo, poiché se venisse trattata come la posizione ci sarebbe una contraddizione con l'ipotesi secondo cui la velocità non può essere costante nell'intervallo  $N\delta t$ .

In conclusione, il vettore misura è:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{s}_{ins2} \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

dove  $\vec{s}_{ins2}$  è la variabile posizione del secondo integratore. La matrice di covarianza associata è:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{vel} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{pos} \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Infine, la matrice  $\mathbf{H}$  del filtro di Kalman è:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

### 4.3.3 Caso 3: test positivo per giroscopio e negativo per accelerometro

Analogo al caso precedente ma è aggiornata la posizione del secondo integratore e viene fornita come "misura" il vettore composto dagli angoli di rotazione  $\vec{\alpha} =$

$(\phi, \theta, \psi)^\top$ . Il vettore misura è quindi:

$$\mathbf{z} = \vec{\alpha}_{ins2} \quad (4.36)$$

mentre la matrice di covarianza è:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{ang} \quad (4.37)$$

Infine, la matrice  $\mathbf{H}$  del filtro di Kalman è:

$$\mathbf{H} = (\mathbf{I} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}) \quad (4.38)$$

#### 4.3.4 Caso 4: test negativo per entrambi i sensori

In questo caso il sensore non si è mosso e non è stato ruotato, di conseguenza nessuna variabile del secondo INS viene aggiornata e il vettore misura è:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_{ins2} \\ \vec{0} \\ \vec{s}_{ins2} \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

con matrice di covarianza:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{ang} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{vel} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{pos} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

Infine, la matrice  $\mathbf{H}$  del filtro di Kalman è:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \mathbf{I}_{9 \times 9} \quad (4.41)$$

## 4.4 Risultati con sensori fermi

Per verificare l'efficacia dell'algoritmo del secondo INS è stata fatta una presa dati mantenendo i sensori fermi e confrontando i risultati ottenuti utilizzando solo il primo INS con quelli ottenuti usando entrambi i sistemi di navigazione inerziale.

### 4.4.1 Condizioni operative

Le misure di tutti i sensori sono state effettuate con una frequenza di campionamento di 10 Hz, cioè con un intervallo temporale tra due misure successive che è  $\delta t = 0.1$  s. Considerando l'asse z del sistema di riferimento locale allineata con l'accelerazione di gravità, è possibile ricavare l'orientazione iniziale dell'IMU utilizzando la formula di Rodrigues:

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + (\sin \theta)\mathbf{K} + (1 - \cos \theta)\mathbf{K}^2 \quad (4.42)$$

dove  $\mathbf{C}$  è la matrice di rotazione che ruota di un angolo  $\theta$  un generico versore tridimensionale  $\vec{v}$  intorno al versore  $\vec{k}$  in modo da farlo coincidere con un altro versore generico  $\vec{w}$ . La matrice  $\mathbf{K}$  è la matrice prodotto vettoriale del versore  $\vec{k}$ , cioè una matrice antisimmetrica tale che  $\mathbf{K}\vec{b} = \vec{k} \times \vec{b}$ , dove  $\vec{b}$  è un generico vettore tridimensionale.

È possibile riscrivere la formula di Rodrigues in funzione solo dei versori  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ :

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + \mathbf{R} + (1 - \vec{v} \cdot \vec{w})\mathbf{R}^2 \quad (4.43)$$

dove  $\mathbf{R}$  è la matrice del prodotto vettoriale di  $\vec{r} = \vec{v} \times \vec{w}$ .

L'orientazione iniziale  $\mathbf{C}_0$  si ricava quindi imponendo l'allineamento di  $\vec{a}_{offset}$  con l'asse z del s.d.r. locale, cioè utilizzando  $\vec{v} = \vec{a}_{offset}/|\vec{a}_{offset}|$  e  $\vec{w} = (0, 0, 1)$ . La velocità e la posizione iniziali possono essere considerate nulle indipendentemente dall'orientazione.

In aggiunta alle precedenti condizioni iniziali, è necessario specificare il numero  $N$  di iterazioni del primo INS che intercorrono tra due attivazioni successive del secondo sistema di navigazione. In questo caso è stato scelto  $N = 100$ , in modo che si attivi ogni 10 secondi. Infine, si devono settare le condizioni iniziali dell'algoritmo di Kalman. In particolare lo stato di errore iniziale è nullo per definizione, mentre

la matrice di covarianza iniziale è posta come:

$$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{ang} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

L'errore sulla posizione e velocità iniziale è nullo poiché sono state definite a priori, mentre l'errore sugli angoli è dovuto alla propagazione degli errori nel calcolo dell'orientazione iniziale. Come già discusso nella sezione sulla rimozione del bias costante (sezione 3.3), prima di procedere all'integrazione tramite gli algoritmi si deve rimuovere il bias costante della velocità angolare, quindi nel frattempo è possibile calcolare  $\vec{a}_{offset}$  e il rispettivo errore associato. Tale errore è propagato nel calcolo della configurazione iniziale tramite la formula di Rodrigues e la matrice  $\mathbf{V}_{ang}$  risulta:

$$\mathbf{V}_{ang} = \begin{pmatrix} \sigma_\phi^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\psi^2 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Infine le matrici  $\mathbf{W}_k$  sono costruite a partire dalla varianza ricavata dalla caratterizzazione dei sensori mostrate in tabella 3.4:

$$\mathbf{W}_k^g = \begin{pmatrix} \sigma_{g,x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{g,y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{g,z}^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 \cdot 10^{-8} & 0 & 0 \\ 0 & 6 \cdot 10^{-8} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \cdot 10^{-8} \end{pmatrix} (rad/s)^2 \quad (4.46)$$

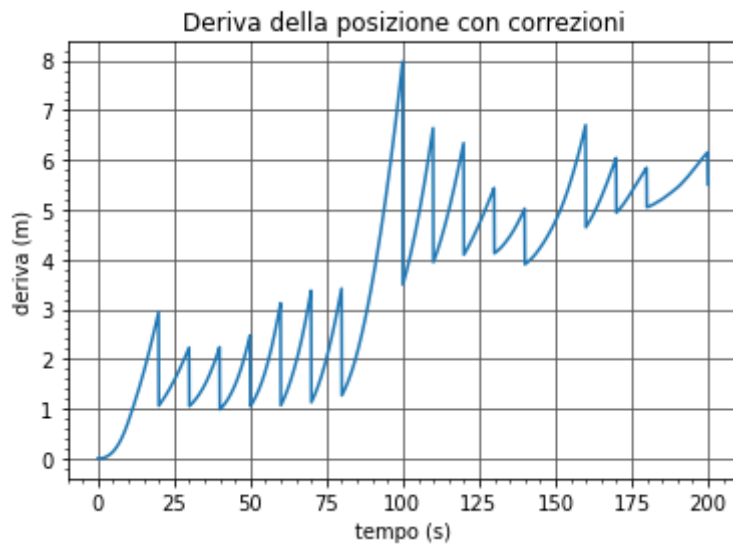
$$\mathbf{W}_k^a = \begin{pmatrix} \sigma_{a,x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{a,y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{a,z}^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 3 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} (m/s^2)^2 \quad (4.47)$$

### 4.4.2 Risultati

Di seguito sono mostrati i risultati ottenuti utilizzando le condizioni iniziali precedentemente discusse.

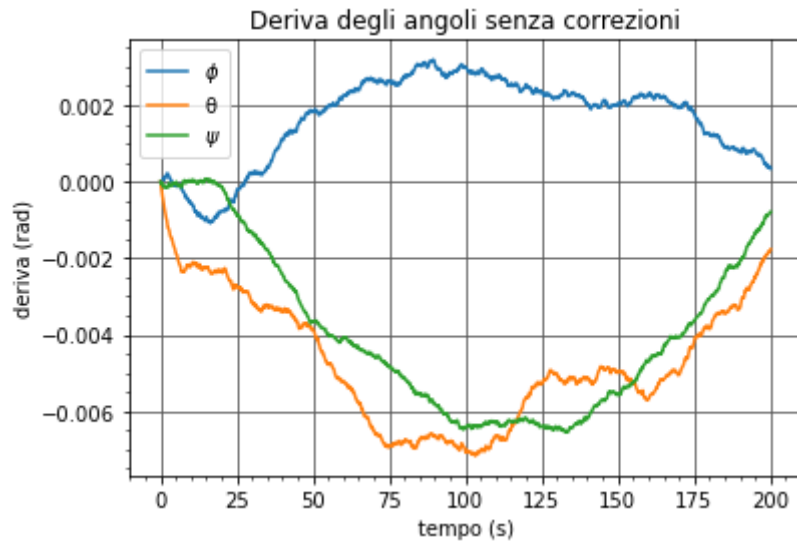


(a) solo primo INS

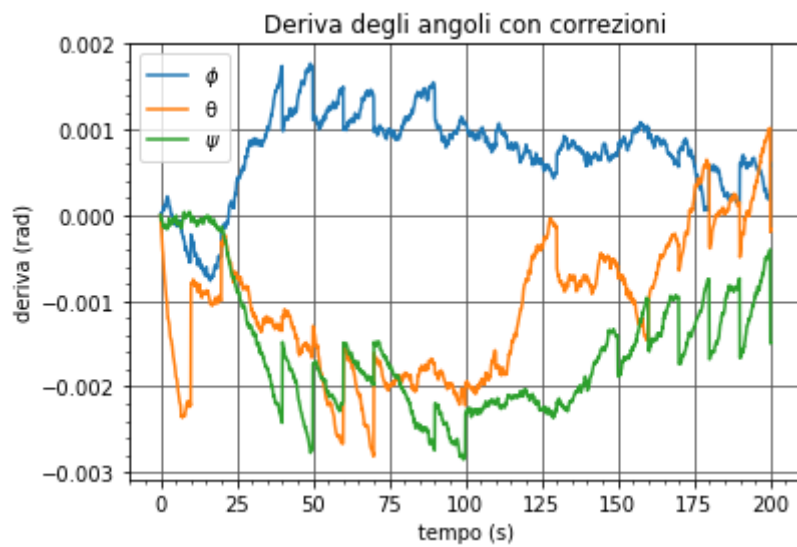


(b) entrambi gli INS

Figura 4.1: confronto tra la deriva della posizione calcolata utilizzando solo il primo INS (a) e quella ottenuta usando anche il secondo INS (b). Si nota che la deriva finale con le correzioni del secondo INS è circa due ordini di grandezza minore della deriva calcolata utilizzando solo il primo INS.



(a) solo primo INS



(b) entrambi gli INS

Figura 4.2: confronto tra la deriva degli angoli calcolata utilizzando solo il primo INS (a) e quella ottenuta usando anche il secondo INS (b). Si nota che la deriva massima applicando le correzioni del secondo INS è circa la metà di quella calcolata utilizzando solo il primo integratore.

L'andamento della deriva calcolata utilizzando solo il primo sistema di navigazione è quello aspettato, infatti è confrontabile con le curve mostrate in figura 1.7, tipiche per una IMU a sei gradi di libertà. Dalle figure 4.1 e 4.2 si nota come l'utilizzo del secondo sistema di navigazione inerziale migliora notevolmente il risultato finale, in particolare nel calcolo della posizione. Dai grafici mostrati si può osservare l'azione del filtro di Kalman, infatti i punti in cui la deriva diminuisce bruscamente corrispondono alle correzioni dello stato dell'IMU e tale processo di correzione rallenta notevolmente la crescita della deriva sia degli angoli che della posizione.



## 4.5 Risultati con sensori in movimento

Per verificare che il secondo INS restituisca lo stesso risultato del primo INS se il sensore è in movimento, si è fatta una presa dati in cui l'IMU è tenuta in mano da una persona che cammina. In questo caso il moto è rototraslatorio quindi ci si aspetta che il secondo INS non fornisca quasi mai correzioni, perciò i risultati ottenuti attivando o disattivando il secondo INS dovrebbero essere molto simili.

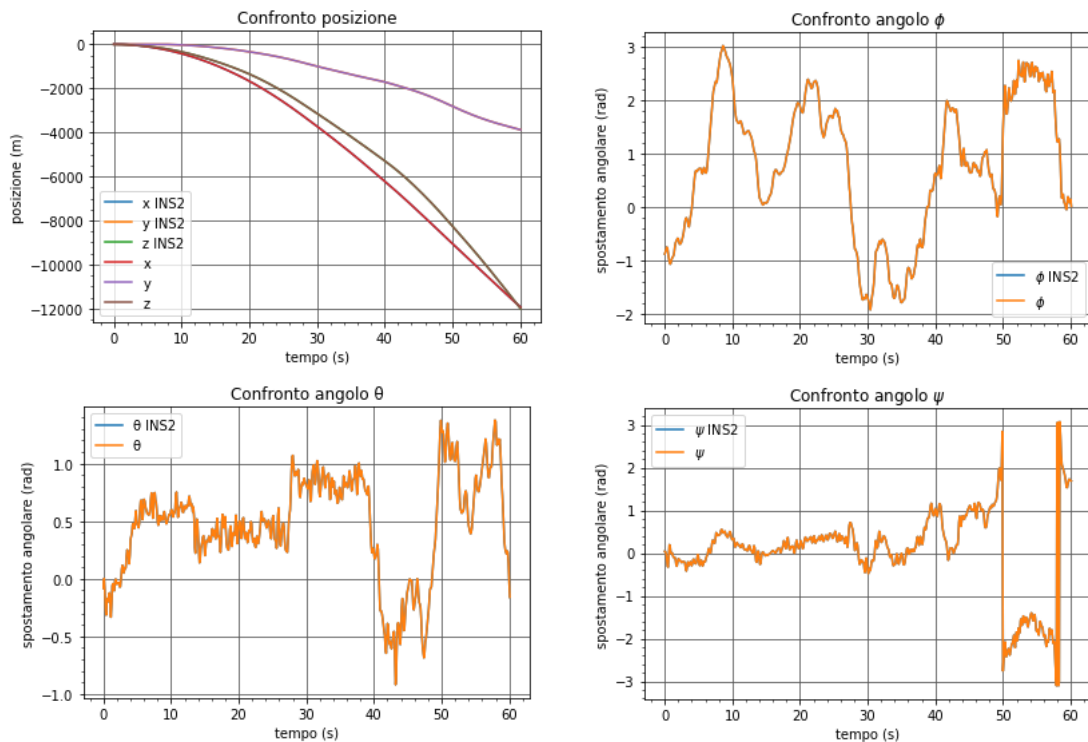


Figura 4.3: i grafici mostrano il confronto tra i risultati ottenuti con il secondo INS attivo (indicati con "INS2") e quella calcolata utilizzando solo il primo INS. La differenza tra i risultati non è apprezzabile in quanto è estremamente piccola.

## 4.6 Conclusioni

Dai risultati ottenuti e mostrati nelle figure 4.1 e 4.2, è evidente come l'introduzione di un secondo sistema di navigazione inerziale che lavora su una scala temporale diversa migliora notevolmente i risultati ottenuti. In particolare, in soli 200 secondi il risultato per la posizione è migliore di più di due ordini di grandezza, mentre la deriva degli angoli di rotazione è circa la metà. Tale perfezionamento è stato raggiunto utilizzando lo stesso hardware di una IMU a sei gradi di libertà, in quanto le correzioni del secondo INS derivano da restrizioni sulla dinamica che mantengono un buon grado di generalità, quindi sono comunque sufficienti per molte applicazioni. Inoltre, l'aggiunta del secondo INS richiede uno sforzo computazionale che è trascurabile rispetto alla potenza di calcolo dei moderni calcolatori, perciò è adatto anche ad un utilizzo in tempo reale. Dai risultati mostrati in figura 4.3 è evidente che il secondo sistema di navigazione è in grado di distinguere solamente se l'IMU è in moto traslatorio, rotazionale oppure è ferma. Di conseguenza, nelle fasi in cui l'IMU è effettivamente in moto rototraslatorio, non è in grado di fornire correzioni e il risultato è quello calcolato dal primo INS. Per questo motivo, le principali applicazioni di questo lavoro di tesi sono quelle in cui l'IMU è montata su dispositivi che hanno periodi di moto intervallati da tempi di stasi.

Lavori futuri potrebbero migliorare ulteriormente l'algoritmo introducendo restrizioni più mirate ad una particolare applicazione, oppure si potrebbe perfezionare il filtro di Kalman utilizzando un offset dinamico sulla accelerazione che renderebbe più efficaci le correzioni.

# Bibliografia

- [1] Dag Pike. *The History of Navigation*. Pen & Sword Maritime, 2018. ISBN: 9781526731692.
- [2] Zakriya Mohammed, Ibrahim (Abe) M. Elfadel e Mahmoud Rasras. «Monolithic Multi Degree of Freedom (MDoF) Capacitive MEMS Accelerometers». In: *Micromachines* 9.11 (2018). ISSN: 2072-666X. DOI: [10.3390/mi9110602](https://doi.org/10.3390/mi9110602). URL: <https://www.mdpi.com/2072-666X/9/11/602>.
- [3] Mansour Keshavarzi e Javad Yavand Hasani. «Design and Optimization of Fully Differential Capacitive MEMS Accelerometer Based on Surface Micromachining». In: *Microsyst. Technol.* 25.4 (2019), pp. 1369–1377. ISSN: 0946-7076. DOI: [10.1007/s00542-018-4187-5](https://doi.org/10.1007/s00542-018-4187-5). URL: <https://doi.org/10.1007/s00542-018-4187-5>.
- [4] Juntao Fei e Yuzheng Yang. «System Identification of MEMS Vibratory Gyroscope Sensor». In: *Mathematical Problems in Engineering* 12 (set. 2011). DOI: [10.1155/2011/829432](https://doi.org/10.1155/2011/829432).
- [5] *MPU-6000 and MPU-6050 Product Specification*. PS-MPU-6000A-00. Revision 3.4. InvenSense Inc. Ago. 2013. URL: <https://invensense.tdk.com/wp-content/uploads/2015/02/MPU-6000-Datasheet1.pdf>.
- [6] *I<sup>2</sup>C-bus specification and user manual*. UM10204. Revision 6. NXP Semiconductors. Apr. 2014. URL: <https://www.nxp.com/docs/en/user-guide/UM10204.pdf>.
- [7] Oliver Woodman. «Pedestrian localisation for indoor environments». Tesi di dott. University of Cambridge, 2010. DOI: [10.17863/CAM.16364](https://doi.org/10.17863/CAM.16364).
- [8] Simon Templier. «Three-axis Hybridized Quantum Accelerometer for Inertial Navigation». Tesi di dott. Université de Bordeaux, 2021.

- [9] Alan V. Oppenheim e George C. Verghese. *Signals, systems and inference*. Pearson, 2016. ISBN: 9780133944297.
- [10] William Riley e David Howe. *Handbook of Frequency Stability Analysis*. Lug. 2008. URL: [https://tsapps.nist.gov/publication/get\\_pdf.cfm?pub\\_id=50505](https://tsapps.nist.gov/publication/get_pdf.cfm?pub_id=50505).
- [11] «IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Laser Gyros». In: *IEEE Std 647-2006 (Revision of IEEE Std 647-1995)* (2006). DOI: [10.1109/IEEESTD.2006.246241](https://doi.org/10.1109/IEEESTD.2006.246241).
- [12] «IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros». In: *IEEE Std 952-1997* (1998). DOI: [10.1109/IEEESTD.1998.86153](https://doi.org/10.1109/IEEESTD.1998.86153).
- [13] S.J. Julier e J.K. Uhlmann. «Unscented filtering and nonlinear estimation». In: *Proc. of the IEEE* 92.3 (2004), pp. 401–422. DOI: [10.1109/JPROC.2003.823141](https://doi.org/10.1109/JPROC.2003.823141).
- [14] Piotr Kaniewski. «Extended Kalman Filter with Reduced Computational Demands for Systems with Non-Linear Measurement Models». In: *Sensors* 20.6 (2020). ISSN: 1424-8220. DOI: [10.3390/s20061584](https://doi.org/10.3390/s20061584). URL: <https://www.mdpi.com/1424-8220/20/6/1584>.
- [15] J.C.D. Zundert, van, F.B.J. Bruning e A.G. Jager, de. *Direction cosine matrix based IMU implementation in Matlab/Simulink*. English. CST. Report Individual Space. Eindhoven University of Technology, 2013.
- [16] Mohinder S. Grewal, Lawrence R. Weill e Angus P. Andrews. *Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration*. USA: Wiley-Interscience, 2007. ISBN: 0470041900.
- [17] Leslie Barreda Pupo. «Characterization of errors and noises in MEMS inertial sensors using Allan variance method». Universitat Politècnica de Catalunya, 2016. URL: <http://hdl.handle.net/2117/103849>.
- [18] L C Ng. *On the application of Allan variance method for Ring Laser Gyro performance characterization*. Rapp. tecn. Ott. 1993. DOI: [10.2172/10196087](https://doi.org/10.2172/10196087). URL: <https://www.osti.gov/biblio/10196087>.