

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

UN'INTRODUZIONE ALLA
TERMODINAMICA DEI BUCHI NERI

Relatore:
Prof. Alexandr Kamenchtchik

Presentata da:
Jacopo Tosca

Anno Accademico 2020/2021

Abstract

Questa tesi si propone di introdurre ai concetti principali della termodinamica dei buchi neri. Per fare ciò, la prima parte sarà esclusivamente dedicata allo studio della geometria differenziale necessaria in relatività generale.

Nella seconda parte ci proponiamo invece di trattare alcuni concetti fisici come lo spazio-tempo di Rindler, la cattura gravitazionale e il redshift spazio-temporale che saranno necessari nel successivo ed ultimo capitolo. In questa terza parte, sfruttando le relazioni ottenute nel paragrafo precedente, introdurremo i principali temi della termodinamica dei buchi neri arrivando infine ad enunciarne i principi primi. In particolare, eviteremo la trattazione canonica che sfrutta la Quantum Field Theory e cercheremo di dare dimostrazioni di alcuni casi particolari enunciando poi le leggi nei casi generali. Tra le varie cose tratteremo l'effetto Unruh, la temperatura di Hawking e l'effetto Penrose di un buco nero rotante.

Indice

1	Strumenti geometrici	3
1.1	Nozioni introduttive	3
1.1.1	Algebre	3
1.1.2	Tensori	4
1.2	Geometria differenziale	5
1.2.1	Elementi di geometria differenziale	5
1.2.2	Varietà Riemanniane	10
1.2.3	Derivata covariante, trasporto parallelo ed autoparallelo	11
1.2.4	Connessione e tensore di Riemann	14
1.2.5	Derivata di Lie e vettori di Killing	16
1.2.6	Integrare su una varietà	21
2	Strumenti relativistici	24
2.1	Spazio tempo di Minkowski in coordinate curve e notazioni	24
2.2	Il tensore energia impulso	25
2.3	Equazioni di Einstein e metrica di Schwarzschild	27
2.4	Metrica di Rindler	31
2.5	Propagazione della luce nello spazio-tempo	32
2.5.1	Cattura gravitazionale	34
2.6	Redshift nel campo gravitazionale	36
3	Introduzione alla termodinamica di un buco nero	40
3.1	Buchi neri : un'introduzione	40
3.2	Buchi neri rotanti	41
3.2.1	Buchi neri rotanti carichi	48
3.3	Temperatura di Tolman	50
3.4	Buco nero in bagno fotonico	51
3.5	Effetto Unruh	53
3.6	Principi di Termodinamica	56
3.6.1	Seconda legge generalizzata	58
3.7	Teoria dell'informazione e buchi neri	59

Capitolo 1

Strumenti geometrici

Ai fini di addentrarci nello studio dello spazio-tempo curvo è necessario avere ben presente quale sia la matematica che ci permette di "controllare" e descrivere tale spazio. Nel caso della meccanica classica infatti la nostra intuizione e l'abitudine quotidiana alle tre dimensioni potevano aiutarci svincolandoci dal requisito di una rigorosa conoscenza della struttura matematica sottostante. Al contrario, nel caso della relatività generale, la nostra intuizione, poiché basata sulla nostra limitata esperienza terrestre, non potrà fare altro che alimentare dubbi. L'ovvio concetto di moto rettilineo uniforme della meccanica classica, che sul piano euclideo viene rappresentato tramite una retta, passa infatti dall'essere estremamente intuitivo al non esserlo affatto negli spazi curvi.

In questa sezione tratteremo quindi, partendo dai concetti base, la geometria differenziale e gli strumenti matematici che verranno utilizzati nello specifico in alcune dimostrazioni di leggi fisiche. Per scrivere il seguente capitolo si sono utilizzate primariamente tre fonti per le definizioni e alcune delle più importanti proposizioni ad esse correlate : L.Tu^[8] , J.Lee^[4] e Schuller[6]. In particolare facciamo riferimento a Schuller per la parte iniziale mentre agli altri due autori per la parte su derivate di Lie, connessioni e integrali.

1.1 Nozioni introduttive

1.1.1 Algebre

Tratteremo di seguito, in maniera abbastanza rapida, alcune definizioni che serviranno in seguito. Si è deciso di introdurre tali concetti in un breve capitolo a parte ai fini di non interrompere con esse la trattazione seguente di geometria differenziale. Iniziamo ricordando la definizione di algebra.

Definizione. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo K dove le operazioni di somma e prodotto sono denotate dai simboli "+" e ".". Un'algebra sul campo K è un quadrupletto*

$(V, +, \cdot, \bullet)$ dove \bullet denota una mappa bilineare tale che $\bullet : V \times V \rightarrow V$, ovvero :

$$\forall a, b \in K, X, Y, Z \in V \quad (aX + bY) \bullet Z = (aX) \bullet Z + (bY) \bullet Z = a \cdot X \bullet Z + b \cdot Y \bullet Z \\ = X \bullet (aZ) + Y \bullet (bZ)$$

Data la definizione di algebra diamo quella di un'algebra più particolare : l'algebra di Lie.

Definizione. Un'algebra di Lie è un'algebra dotata di una mappa bilineare $\bullet := [\ , \]$ tale che :

(i) $\forall X \in V \quad [X, X] = 0$

(ii) $\forall X, Y, Z \in V$ sussiste l'identità di Jacobi : $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

1.1.2 Tensori

Di seguito vogliamo dare la definizione di che cosa sia un tensore.

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale sul campo K e V^* il duale di V . Diremo che T è un tensore di tipo (p, q) se T è una applicazione multilineare tale che :

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{p \text{ volte}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{q \text{ volte}} \rightarrow K$$

Un tensore del tipo (p, q) può anche essere detto appartenente al prodotto tensoriale degli spazi vettoriali :

$$T \in T_q^p(V) := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{p \text{ volte}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{q \text{ volte}}$$

Si usa inoltre parlare di tensore di tipo covariante nel caso di un tensore di tipo $(p, 0)$ e di tensore controvariante di tipo q nel caso di tensori del tipo $(0, q)$.

Definiamo infine quali e cosa siano le componenti di un tensore.

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale v -dimensionale sul campo K con base e^1, \dots, e^v e V^* il duale di V dotato della base indotta dalla base precedente e_1, \dots, e_v . Definiamo le componenti di T i seguenti scalari appartenenti al campo K :

$$T_{b_1, \dots, b_q}^{a_1, \dots, a_p} := T(e^{a_1}, \dots, e^{a_p}, e_{b_1}, \dots, e_{b_q})$$

dove $1 \leq a_i, b_j \leq v$

Possiamo infine definire che cosa sia una n-forma.

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale v -dimensionale e ω un tensore del tipo $(0, n)$. Sia π una permutazione tale che $\text{segn}(\pi) = \pm 1$ nel caso in cui rispettivamente permuti un numero pari o dispari di indici. Diremo che tale tensore è una n -forma se è totalmente antisimmetrico ovvero se:

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \text{segn}(\pi)\omega(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(n)})$$

Premesse queste definizioni possiamo iniziare la nostra trattazione di geometria differenziale.

1.2 Geometria differenziale

1.2.1 Elementi di geometria differenziale

Definizione. Uno spazio topologico, paracompatto e di Hausdorff M è detto varietà topologica m -dimensionale se per ogni punto $p \in M$ esiste un intorno aperto $U(p)$ per il quale esiste un omeomorfismo $x : U(p) \rightarrow x(U(p)) \subseteq \mathbb{R}^m$.

Gli intorni U dei punti saranno chiaramente determinati dalla topologia che denoteremo con la lettera τ . Una varietà M è dunque, generalmente parlando, una struttura "geometrica" analoga localmente ed in ogni suo punto ad \mathbb{R}^m . Chiameremo quindi *carte* della varietà M le coppie $(U(p), x)$. Queste ci permetteranno di parametrizzare la varietà M , almeno localmente, con opportune coordinate visualizzabili su \mathbb{R}^m .

Definizione. Data una varietà topologica (M, τ) , due carte (U, x) e (V, y) sono dette C^k -compatibili, $k \in \{\mathbb{N} \cup \{+\infty\}\}$, se $U \cap V = \emptyset$ o se $U \cap V \neq \emptyset$ e le mappe

$$y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V) \text{ ed } x \circ y^{-1} : y(U \cap V) \rightarrow x(U \cap V)$$

sono $C^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ dove $m = \dim(M)$.

Chiameremo quindi *atlante* di classe C^k una collezione di carte $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha) \mid \bigcup_{\alpha} U_\alpha = M\}$ tale che le carte siano tra di loro tutte C^k -compatibili. Parleremo poi di atlante \mathcal{A} massimale di una varietà topologica se non esistono altri atlanti contemporaneamente contenenti \mathcal{A} e diversi da quest'ultimo. Possiamo quindi dare una definizione di C^k -varietà topologica.

Definizione. Una varietà topologica M con topologia τ e atlante \mathcal{A} , o più brevemente (M, τ, \mathcal{A}) , è detta C^k -varietà, o varietà di classe C^k , se \mathcal{A} è un atlante massimale di classe C^k .

La relatività generale si occupa, generalmente parlando, dello studio della fisica su una varietà differenziabile di classe C^∞ (o *smooth*). D'ora in avanti, per brevità, quando parleremo di varietà differenziabili senza meglio precisare, intenderemo sempre C^∞ -varietà. Avremo infatti bisogno di restringere il nostro studio a tali varietà di classe C^∞ per evitare di imbatterci in strutture geometriche troppo "esotiche".

Il concetto di varietà differenziabile ci porta, se non altro per assonanza, a cercare di capire come possano essere intesi sulle varietà concetti fondamentali quanto le derivate. Per definirle dovremo tuttavia aspettare ancora un po' in modo tale da poter adeguatamente introdurre concetti, da noi spesso dati per scontati nello spazio euclideo, quali spazio tangente, vettori, campi vettoriali, ecc...

Definizione. Siano date due varietà differenziabili $(M, \tau_M, \mathcal{A}_M)$ e $(N, \tau_N, \mathcal{A}_N)$ di dimensione rispettivamente m ed n e una mappa $\phi : M \rightarrow N$. Diremo che ϕ è C^∞ -differenziabile nel punto $p \in M$ se, per qualche carta $(U(p), x) \in \mathcal{A}_M$ e $(V(\phi(p)), y) \in \mathcal{A}_N$, la mappa $y \circ \phi \circ x^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ dove $m = \dim(M)$ e $n = \dim(N)$. Infine, se tale mappa ϕ è biettiva e sia ϕ che ϕ^{-1} sono C^∞ -differenziabili, diremo che ϕ è un diffeomorfismo.

Se tra due spazi topologici esiste un differomorfismo diremo quindi che questi sono tra loro diffeomorfi. È possibile provare che su di una varietà topologica di dimensione al più 3 vi è un'unica struttura differenziale a meno di un diffeomorfismo. In dimensioni più alte ciò non risulta più vero. Ad esempio, come provato da J. Milnor (On Manifolds homeomorphic to the 7-sphere) esistono sfere, chiamate per l'appunto esotiche, la cui struttura differenziale non è riconducibile tramite un diffeomorfismo alla struttura cosiddetta standard. Nel formulare teorie relativistiche in dimensione maggiore di 3 (e quindi sia quella Einsteiniana che, ad esempio, quella delle stringhe in dimensione 10) dovremo dunque verificare, per esempio attraverso esperimenti, di aver fornito alla nostra varietà topologica la corretta struttura differenziale. Cerchiamo ora di definire il concetto di spazio tangente ad una varietà. Per comodità definiamo prima lo spazio delle funzioni *smooth* dalla varietà M in $\mathbb{R} : C^\infty(M) := \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid (f \circ x^{-1}) \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})\}$.

Definizione. Sia M una varietà, $p \in M$ e $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva passante per il punto p di classe C^∞ definita in modo tale che $\gamma(\lambda) = p$. Chiameremo operatore di derivazione direzionale nel punto p lungo la curva γ la mappa lineare :

$$X_{\gamma,p} : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} \text{ definita in modo tale che } f \mapsto (f \circ \gamma)'(\lambda)$$

Se vediamo gli $X_{\gamma,p}$ come vettori tangenti alla nostra varietà allora la definizione di spazio tangente segue immediatamente.

Definizione. Lo spazio tangente alla varietà M nel punto $p \in M$ è lo spazio vettoriale sul campo $K = \mathbb{R}$ definito nel seguente modo :

$$T_p M := \{X_{\gamma,p} \mid \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, M) \text{ e } \gamma(\lambda) = p, \text{ per un qualche } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Gli elementi appartenenti allo spazio tangente $T_p M$ sono spesso chiamati vettori. Non è difficile dimostrare che $\dim T_p M = \dim M$, fatto per noi banalmente dato per scontato negli spazi euclidei. Vediamo ora come può essere definita una base dello spazio tangente. Siano quindi date una varietà differenziabile M , $p \in M$ centrato in un aperto con una carta ad esso associata $(U(p), x)$ e tale che $\dim M = m$. Denotiamo un set di m vettori dello spazio tangente $(\frac{\partial}{\partial x^i})_p$ con $i \in \{1, \dots, m\}$ definendoli nel seguente modo :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p(f) := \partial_i(f \circ x^{-1}) \quad , \quad f \in C^\infty(U(p))$$

dove ∂_i denota la derivata rispetto alla componente i -esima nel modo standard definito su funzioni da \mathbb{R}^m in \mathbb{R} . Non è difficile dimostrare che tale set di vettori forma una base dello spazio tangente. Intuitivamente possiamo cercare di vederlo applicando la definizione di operatore di derivazione direzionale. Posta infatti γ una curva di classe C^∞ passante per il punto p tale che $\gamma(\lambda) = p$ e presa una funzione $f \in C^\infty(U)$ applichiamo a questa l'operatore di derivata direzionale, lungo tale curva nel punto p . Avremo che :

$$\begin{aligned} X_{\gamma,p}(f) &:= X(f) = (f \circ \gamma)'(\lambda) = (f \circ x^{-1} \circ x \circ \gamma)'(\lambda) = \\ &= (x^i \circ \gamma)'(\lambda) \partial_i(f \circ x^{-1})(x(p)) := X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p(f) \end{aligned}$$

Utilizzando la convenzione di Einstein per le sommatorie, che da adesso in poi sarà sempre presente, potremo quindi scrivere che un generico elemento X dello spazio $T_p M$ può essere scritto come $X_{\gamma,p} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$. Abbandoneremo quindi per brevità il pedice γ che anche se omesso rimarrà sempre sottinteso quando parleremo di derivate direzionali. Possiamo ora indagare come un vettore X cambi con un cambio di coordinate, ovvero un cambio della carta precedentemente chiamata x . Supponiamo quindi di avere un'altra carta $(V(p), y)$ sempre centrata nel punto $p \in M$ che determina un'altra base $\frac{\partial}{\partial y^i}$. È facile mostrare che l'elemento i -esimo della nuova base precedente è esprimibile come :

$$\frac{\partial}{\partial y^j} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Essendo entrambe basi esisterà infatti una matrice $a_j^i(p)$ tale che $\frac{\partial}{\partial y^j} = a_j^k \frac{\partial}{\partial x^k}$. Applicando entrambi i lati di tale espressione ad x^i avremo che :

$$\frac{\partial}{\partial y^j} x^i \Big|_p := \partial_j(x \circ y^{-1})(y(p)) := \frac{\partial x^i}{\partial y^j} = a_j^k \frac{\partial x^i}{\partial x^k} = a_j^i$$

Possiamo quindi identificare $\partial x^i / \partial y^j$ con il Jacobiano di una mappa $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ che ci permette il cambio delle coordinate di un vettore esprimendolo mediante la carta y piuttosto che con la carta x . Segue quindi che affinché il cambio di base sia corretto il determinante dello Jacobiano debba essere nullo. È possibile dimostrare che i vettori X appartenenti a $T_p M$ soddisfano la regola di Leibniz per le derivazioni. Siano $f, g \in C^\infty(M)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Semplicemente svolgendo i calcoli avremo infatti che $X(\lambda f + g) = \lambda X(f) + X(g)$.

In algebra lineare si è abituati fin da subito a moltiplicare i cosiddetti "vettori riga" con i "vettori colonna". Si insegna quindi questa moltiplicazione che prende un vettore riga e un vettore colonna e gli associa uno scalare appartenente al campo sul quale è definito lo spazio vettoriale. È chiaro però che tale notazione è solo un formalismo e spesso i formalismi tendono a far dimenticare le proprietà sottostanti. Dalle proprietà del prodotto riga colonna si capisce infatti che quello a cui ci si sta riferendo non è nient'altro che un elemento del duale allo spazio dei vettori, il cosiddetto "vettore riga", che associato ad un vettore (vettore colonna) fornisce uno scalare. Se vogliamo introdurre un analogo a ciò in geometria differenziale dovremo quindi introdurre il duale allo spazio tangente ovvero lo spazio "cotangente".

Definizione. *Sia M una varietà differenziabile e sia $p \in M$. Lo spazio cotangente ad M nel punto p è definito come il duale dello spazio tangente ad M in p e lo denoteremo come:*

$$T_p^*M := (T_pM)^*$$

Gli elementi appartenenti allo spazio cotangente sono spesso chiamati covettori. Definite tutte queste nozioni possiamo iniziare a trattare in maniera adeguata che cosa sia la derivata di una funzione tra due varietà. Chiameremo dunque 1-forme gli elementi appartenenti a T_p^*M . Data una base $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ dello spazio tangente ad una varietà m -dimensionale si può dimostrare che i covettori dx^1, \dots, dx^m così definiti formano una base dello spazio cotangente :

$$dx^i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) := \frac{\partial}{\partial x^j} |_p dx^i = \delta_j^i$$

Ogni elemento $\omega \in T_p^*M$ potrà quindi essere espresso nella forma $\omega = \omega_i dx^i$. Provvisi di questi elementi possiamo definire cosa sia il differenziale di una funzione in maniera esatta. È infatti abbastanza degno di nota che il differenziale non sia un vettore ma piuttosto un covettore:

Definizione. *Sia $f \in C^\infty(M)$ con M varietà differenziabile. Sia dato un punto $p \in M$ con un opportuno intorno $(U(p), x)$. Se $X \in T_pM$ il differenziale di df è così definito :*

$$df_p(X_p) = X_p f := \sum_i X^i \partial_i(f) \quad (1.1)$$

Ora, dato che df non fa altro che mappare elementi dello spazio tangente in \mathbb{R} è naturale che possa essere visto come un elemento del duale dello spazio tangente. Potremo quindi scrivere : $df|_p = f_i dx^i$. Consideriamo ora il differenziale di una funzione $f \in C^\infty(M)$ su una varietà differenziabile M in punti $p, q \in M$ diversi. In base alle nostre definizioni, è immediato che il differenziale nei due punti non sarà un unico oggetto appartenente allo stesso spazio ma saranno due covettori appartenenti a due spazi diversi : T_p^*M e T_q^*M . Per quanto detto, è abbastanza chiaro che ci serviranno quindi degli strumenti, o meglio delle mappe, che ci permettano di spostarci tra spazi tangenti e spazi cotangenti diversi. Definiamoli.

Definizione. Sia $\phi : M \rightarrow N$ una mappa C^∞ tra due varietà differenziabili M ed N . Sia quindi $f \in C^\infty(N)$. Il push-forward di ϕ nel punto $p \in M$ è definito come l'applicazione lineare :

$$(\phi_*)_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N \text{ tale che } (\phi_*)_p(X)f := X(f \circ \phi)$$

Definizione. Sia $\phi : M \rightarrow N$ una mappa C^∞ tra due varietà differenziabili M ed N . Il pull-back di ϕ nel punto $p \in M$ è definito come l'applicazione lineare:

$$(\phi^*)_p : T_{\phi(p)}^* N \rightarrow T_p^* M \text{ tale che } w \mapsto (\phi^*)_p(w) \text{ e } (\phi^*)_p(w)(X) := w((\phi_*)_p(X))$$

Dunque il push-forward è un particolare tipo di mappa che associa a quelli che noi abbiamo definito vettori sulla varietà M , dei vettori sulla varietà N . Al contrario il pull-back associerà a quelli che abbiamo chiamato covettori della varietà N , dei covettori nella varietà M . Notiamo quindi che se vogliamo definire pull-back di una funzione f lungo ϕ , considerando quindi $f \in C^\infty(N)$ (quindi una 0-forma su M), avremo banalmente $(\phi^*)_p f = (f \circ \phi)(p)$, $p \in M$.

Volendo ora definire il concetto di campo vettoriale ad una varietà, cosa che ci servirà in seguito per definire in maniera corretta il primo principio della dinamica nello spazio-tempo, dobbiamo ora introdurre il concetto di fascio e di fascio tangente.

Definizione. Un fascio di varietà topologiche (E, τ_E) ed (M, τ_M) è un tripletto (E, π, M) dove π è una mappa continua (nel senso topologico del termine), suriettiva e spesso chiamata proiezione di E su M tale che :

$$\pi : E \xrightarrow{su} M$$

Diremo inoltre che $\sigma : M \rightarrow E$ è la sezione trasversale del fascio se $\pi \circ \sigma = id_M$

Definizione. Sia M una varietà differenziabile. Denotiamo innanzitutto lo spazio vettoriale TM come l'unione disgiunta $\left(\dot{\bigcup}\right)$ di tutti gli spazi tangenti ad M ovvero : $TM := \dot{\bigcup}_{p \in M} T_p M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M = \{(p, X) | p \in M, X \in T_p M\}$.

Chiameremo dunque fascio tangente il tripletto (TM, π, M) dove π è definito in modo tale che :

$$\pi : TM \rightarrow M \quad , \quad \pi(p, X) = p$$

In modo analogo a quanto fatto per TM è immediato definire T^*M come l'unione disgiunta di tutti gli spazi cotangenti ad M . Il fascio cotangente sarà dunque il tripletto (T^*M, π, M) tale che $\pi(p, \omega) = p$, $\omega \in T_p^* M$. Possiamo finalmente definire che cosa sia un campo vettoriale su una varietà, e quindi, se vogliamo, anche su \mathbb{R}^n dato esso è la più semplice delle varietà differenziali. Il nostro concetto intuitivo di campo vettoriale è quello di mappa che associa ad ogni punto di un certo spazio un vettore. Ma secondo le nostre definizioni un vettore non è altro che un elemento dello spazio tangente . Segue quindi immediatamente la definizione dello spazio vettoriale :

Definizione. Sia M un varietà differenziale ed (TM, π, M) il suo fascio tangente. Un campo vettoriale su M è definito come una sezione trasversale σ di classe C^∞ al fascio tangente tale che $\sigma : M \rightarrow TM$ e $\pi \circ \sigma = id_M$. Chiameremo quindi $\Gamma(TM) := \{\sigma : M \rightarrow TM \mid \sigma \text{ è una sezione di classe } C^\infty\}$

In accordo quindi con la nostra notazione per i vettori base dello spazio tangente potremo scrivere un generico campo vettoriale X , in un intorno di un certo punto p ($U(p), x$), in funzione dei vettori base di tale spazio: $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Il campo vettoriale può anche essere visto come una mappa che prende funzioni $C^\infty(M)$ e le manda sempre in $C^\infty(M)$. Infatti σ può agire su una funzione $f \in C^\infty(M)$ mandandola in $\sigma(f)$. Se ora valutiamo $\sigma(f)$ in un generico punto $p \in M$ questa non sarà altro che $X_p(f)(p)$ dove chiaramente X è il campo vettoriale definito in un certo intorno ($U(p), x$). Ad ogni punto la $\sigma(f)$ associa quindi uno scalare provando quando detto. Per cercare di controllare la metrica associata ad una varietà riemanniana dovremo introdurre invece come prima cosa, per capire cosa sia appunto una metrica, il concetto di campo tensoriale. Come prima cosa introduciamo il campo covettoriale.

Definizione. Sia M una varietà differenziale e (T^*M, π, M) il suo fascio cotangente. Il campo covettoriale su M è definito come una sezione trasversale $\sigma : M \rightarrow T^*M$ di classe C^∞ tale che $\pi \circ \sigma = id_M$. Definiamo quindi $\Gamma(T^*M) := \{\sigma : M \rightarrow T^*M \mid \sigma \text{ è una sezione di classe } C^\infty\}$.

Chiaramente il concetto di campo tensoriale, vista la definizione dei tensori, segue immediatamente dalla combinazione delle definizioni di campo tangente e campo cotangente.

Definizione. Un campo tensoriale T di tipo (p, q) è una mappa multilineare tale che :

$$T : \underbrace{\Gamma(T^*M) \times \dots \times \Gamma(T^*M)}_{p \text{ volte}} \times \underbrace{\Gamma(TM) \times \dots \times \Gamma(TM)}_{q \text{ volte}} \rightarrow C^\infty(M)$$

1.2.2 Varietà Riemanniane

Una volta arrivati alla nozione di campo tensoriale possiamo finalmente dare una definizione a quelle che sono le varietà differenziali in Relatività Generale ovvero varietà dotate di una metrica. Una metrica su una varietà non è nient'altro che un campo tensoriale simmetrico di tipo $(0, 2)$ che è definito positivo in ogni punto della varietà differenziale M . In relatività generale la metrica viene quasi sempre indicata con la lettera g . Potremo quindi definire le componenti g_{ij} del nostro tensore in relazione ad una qualsiasi scelta di coordinate C^∞ :

$$g_{ij}|_p := g_{ij} dx^i \otimes dx^j = g_{ij} dx^i dx^j$$

È possibile infatti dimostrare che l'ultima uguaglianza segue dalla simmetria del tensore g (e dalla simmetria di dx^i, dx^j). Chiaramente l'esempio più banale di metrica è il tensore metrico δ_{ij} definito sulla varietà differenziabile \mathbb{R}^m . Esso è infatti definito in modo tale da fornire il prodotto scalare a cui siamo abituati: $\delta_{ij}(v, w) = \delta_{ij}v^i w^j = \sum_i v^i w^i$. L'esistenza di tale strutture (varietà Riemanniane) non è immediatamente garantita, tuttavia è possibile dimostrare che qualsiasi varietà differenziabile, e quindi C^∞ , ammette una metrica Riemanniana. Dal tensore metrico seguono immediatamente, in maniera del tutto analoga ad \mathbb{R}^n , i concetti di norma e di angolo tra due vettori. Fissato un punto $p \in M$ e posti $v, w \in T_p M$ avremo infatti $\|v\|_p = g|_p(v, v)$ e $\cos \theta = g|_p(v, w) / (\|v\|_p \|w\|_p)$. Definito il coseno di θ sono poi immediate le definizioni di vettori tangenti ed ortogonali (sempre ricordandoci che tali definizioni si riferiscono al solo spazio $T_p M$).

Se volgiamo comparare una metrica di \mathbb{R}^n con quella su una varietà differenziale considereremo quindi il pullback del tensore metrico. Sia $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow M$ una mappa C^∞ . Se il pullback del tensore metrico g di M coincide con la metrica δ su \mathbb{R}^m allora avremo che $\phi^*g = \delta$. In questo caso diremo che la metrica g su M è una metrica piatta, la metrica caratteristica dello spazio-tempo della relatività ristretta. Notiamo infine che nel caso del tensore metrico, posti $v, w \in T_p M$, avremo: $\phi^*(g)(v, w) = g(\phi_*v, \phi_*w)$.

1.2.3 Derivata covariante, trasporto parallelo ed autoparallelo

Definizione. Sia M una varietà differenziabile. Diremo che la derivata covariante ∇ rispetto al campo vettoriale X è una applicazione che gode delle seguenti proprietà:

- (i) Se $f \in C^\infty(M)$ allora $\nabla_X := X(f)$
- (ii) se T, S sono campi tensoriali di tipo (p, q) $\nabla_X(T + S) = \nabla_X T + \nabla_X S$
- (iii) Se ω è un campo tensoriale del tipo $(0, k)$ allora $\nabla_X(\omega(X_1, \dots, X_k)) = (\nabla_X(\omega))(X_1, \dots, X_k) + \omega(\nabla_X X_1, \dots, X_k) + \dots + \omega(X_1, \dots, \nabla_X X_k)$
- (iv) $\nabla_{fX+Y}T = f\nabla_X T + \nabla_Y T$

Proviamo quindi ad indagare come la derivata cosiddetta covariante si comporti agendo su campi vettoriali e campi covettoriali. Nel caso dei primi, posti $X, Y \in TM$ in un intorno $(U(p), x)$ avremo che:

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}} (Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} (Y^j) \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} := X^i \frac{\partial}{\partial x^i} Y^l \frac{\partial}{\partial x^l} + Y^j \Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x^l}$$

Dove abbiamo quindi introdotto i cosiddetti simboli di Christoffel Γ . Spesso, anche in modo tale da rendere immediata all'occhio la notazione di Einstein, utilizzeremo i simboli ∂_i al posto di $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Utilizzando questa notazione e ponendo per semplicità il campo $X = \sum_i \partial_i$, potremo riscrivere la m-esima componente dell'equazione precedente nel seguente modo:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} Y^m = \partial_i Y^m + \Gamma_{im}^p Y^p$$

Se vogliamo ora determinare quale sia l'azione della derivata covariante su di un covettore dobbiamo semplicemente utilizzare la proprietà (iii). Siano infatti, sempre in un intorno opportuno $(U(p), x)$, X e Z un campi vettoriali e W un campo covettoriale. Per semplicità supponiamo sempre che $X = \sum_i \partial_i$. Utilizzando la (iii) della definizione di derivata covariante avremo che $\nabla_X(W(Z)) = \nabla_X(W_\mu Z^\mu) = \nabla_X(W)Z + W\nabla_X(Z)$. Riarrangiando i termini avremo quindi che $\nabla_X(W)Z = \nabla_X(W(Z)) - W\nabla_X(Z)$. Se consideriamo la i -esima componente di X della derivata covariante $(\frac{\partial}{\partial x^i})$ avremo che :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(W)Z - W(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}Z) = \partial_i(W(Z)) - W(\partial_i Z^m + \Gamma_{ij}^m Z^j) = \partial_i(W_m)Z^m - \Gamma_{ij}^m W_m Z^j$$

Vista l'arbitrarietà del vettore Z potremo quindi scrivere :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} W_m = \partial_i W_m - \Gamma_{im}^p Z_p$$

Una volta introdotto il concetto di derivata covariante possiamo cominciare a chiederci cosa voglia dire introdurre concetti come il parallelismo e autoparallelismo in geometria differenziale o in relatività generale nello spazio-tempo "curvo". Alla parola "curvo" usata, in base alle nostre conoscenze, può essere data definizione precisa : una varietà è detta curva se i suoi simboli di Christoffel Γ_{im}^p non si annullano identicamente nel caso $i \neq m$ su tutta la varietà. Per quanto detto quindi, essendo lo spazio "curvo", lo spazio tangente ad una varietà in un punto sarà uno spazio completamente diverso allo spazio tangente alla stessa varietà in un punto diverso. Ciò causa perciò la perdita del concetto intuitivo di parallelismo. I concetti di parallelismo e autoparallelismo sono però fondamentali in fisica. Tramite essi potremo infatti definire in modo esatto che cosa sia il primo principio di Newton in uno spazio "curvo". Procediamo però per gradi.

Definizione. *Sia M una varietà differenziale ed X un campo vettoriale C^∞ definito sul luogo dei punti in M determinato da una curva $\gamma : I \rightarrow M$, $I \subset \mathbb{R}$ Diremo che un vettore Y inizialmente definito nel punto $\gamma(0) = p$ è trasportato parallelamente se :*

$$\nabla_{X_\gamma} Y = 0$$

In questo modo abbiamo definito una regola per trasportare un vettore lungo una curva gamma in modo tale che tale trasporto conservi oltre la sua "parallelità" anche la sua "lunghezza". Ciò è infatti richiesto dall'annularsi della derivata che impone la costanza di $g|_p(v, v)$. Potremo chiaramente parlare di distanza solo nel caso un cui sia definita una metrica nella varietà differenziabile M ; tuttavia per quanto detto è sempre possibile assegnare una metrica ad una varietà differenziabile. Se avessimo invece posto la derivata non uguale a zero ma ad un numero avremmo definito allora il meno restrittivo concetto di parallelismo (che conserva la "parallelità" ma non la "lunghezza" del vettore). Definiamo quindi il concetto che ci porterà a definire cosa sia un moto non soggetto a forze.

Definizione. ^[5] Sia data una varietà differenziabile M e un campo vettoriale X ad esso associato. Una curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ è detta autoparallelammente trasportata se :

$$\nabla_{X_\gamma} X_\gamma = 0 \quad (1.2)$$

ovvero se la derivata lungo la curva del campo vettoriale sulla curva si annulla.

Consideriamo dunque^[5] una curva γ autoparallelammente trasportata che giace su di un intorno del punto p ($U(p), x$) in una varietà differenziabile M di dimensione m . Denotando con $\gamma^p := x^p \circ \gamma$ avremo che:

$$\nabla_{X_\gamma} X_\gamma = \left(\nabla_{\dot{\gamma}^p \left(\frac{\partial}{\partial x^p} \right)} \dot{\gamma}^n \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right) \right) = 0 \quad (1.3)$$

Svolgendo i calcoli avremo che :

$$\nabla_{X_\gamma} X_\gamma = \dot{\gamma}^p \frac{\partial \dot{\gamma}^n}{\partial x^p} \frac{\partial}{\partial x^n} + \dot{\gamma}^p \dot{\gamma}^n \Gamma_{np}^q \frac{\partial}{\partial x^q} \quad (1.4)$$

dove abbiamo cambiato i *dummy indices* n in maniera del tutto arbitraria con un indice q nel primo addendo. Notiamo poi che $\dot{\gamma}^m \frac{\partial \dot{\gamma}^n}{\partial x^m}$ non è nient'altro che la proiezione sulla direzione della curva delle derivate lungo tutte le direzione dunque $\ddot{\gamma}^m$. Otteniamo quindi :

$$\ddot{\gamma}^p + \Gamma_{ij}^p \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0 \quad (1.5)$$

Osserviamo quindi che nella formula qui sopra, essendo valida punto per punto, ai fini di una correttezza formale si sarebbe dovuta anche inserire la dipendenza di ogni componente dal parametro in ingresso della curva λ che definisce il punto sulla varietà M ($\gamma(\lambda) \in M$). Si è tuttavia deciso di non appesantire la notazione per perseguire una maggiore eleganza.

L'equazione 1.5 è un'equazione chiave. Essa è nient'altro che la definizione di moto rettilineo uniforme in uno spazio non piatto. Possiamo infatti vedere il vettore X come la velocità di un ipotetico corpo in moto ed essa non cambia rispetto al moto definito dal vettore X stesso. In questo modo possiamo quindi recuperare il primo principio di Newton che afferma che un corpo procede con moto rettilineo uniforme se non soggetto a forze. Il problema qui è anche solo a livello della meccanica classica. In essa infatti ogni corpo che esiste gravita (dato che non esistono corpi a massa nulla) ed affermare dunque che un corpo non sia soggetto a forze equivale a dire che tutto l'universo sia vuoto e ciò è quindi assurdo. Per questo interpretare l'azione della gravità come curvatura dello spazio-tempo è fondamentale.

Siamo quindi riusciti ad introdurre un concetto, indipendente dalla metrica, puramente geometrico che dica quando un moto è deviato dal moto rettilineo descritto dal primo principio di Newton. Proviamo quindi a fornire un esempio. Siano, compatibilmente con le notazioni utilizzate, $U = \mathbb{R}^2$, $x = id_{\mathbb{R}}$. Poiché nel piano Euclideo $\Gamma_{\mu\nu}^q = 0$ avremo

che $\ddot{\gamma}_{(x)}^m = 0$; ovvero avremo che $\gamma_{(x)}^m(\lambda) = a^m \lambda + b^m$, $a, b \in \mathbb{R}$ che coincide esattamente con la nozione di retta che come noto è la geodesica delle particelle nel piano euclideo. Vogliamo ora ribadire l'importanza di queste nostre asserzioni. Se ci poniamo da un punto di vista puramente classico è impossibile definire un moto di un corpo massivo su cui non agiscono forze. Infatti a meno che l'universo non sia composto solo dal corpo in questione vi sarà sempre una qualche forza gravitazionale agente su di esso. Siamo quindi riusciti a definire quali sono le geodesiche in uno spazio curvo in un modo solo geometrico e indipendente dalla metrica, cosa tutt'altro che intuitiva.

1.2.4 Connessione e tensore di Riemann

Nel caso particolare delle varietà Riemanniane possiamo introdurre condizioni più restrittive sulla derivata covariante in modo tale da ottenere relazioni molto importanti in relatività generale. La derivata covariante con restrizioni maggiori è detta connessione di Levi-Civita. Definiamola.

Definizione. Sia (M, g) una varietà riemanniana. Diremo che ∇ è la connessione di Levi-Civita se valgono le seguenti proprietà :

- (i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X := [X, Y] = 0$
- (ii) $\nabla_X g = 0$

Conseguenza ovvia è che quando avremo a che fare con la connessione di Levi-Civita al posto che la derivata covariante avremo : $\Gamma_{ij}^m = \Gamma_{ji}^m$. Dimostriamo dunque quella che è la relazione fondamentale in relatività generale che lega i simboli di Christoffel alla metrica.

Proposizione. Sia (M, g) una varietà riemanniana dotata di una connessione di Levi-Civita ∇ . Allora vale la seguente proprietà :

$$\Gamma_{jk}^m = \frac{1}{2} g^{im} (g_{ij,k} + g_{ki,j} - g_{jk,i}) \quad (1.6)$$

Dimostrazione. Per la connessione di Levi-Civita avremo che :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} g_{ij} = g_{ij,k} - \Gamma_{ki}^m g_{mj} - \Gamma_{kj}^m g_{im}$$

Se ora permutiamo gli indici i, j, k in modo ciclico otteniamo oltre a questa altre due uguaglianze. Se sottraiamo quindi l'ultima di queste alle prime due, sfruttando la simmetria del tensore metrico, otterremo che :

$$g_{ij,k} + g_{ki,j} - g_{jk,i} = g_{mj}(\Gamma_{ki}^m - \Gamma_{ik}^m) + g_{im}(\Gamma_{kj}^m + \Gamma_{jk}^m) + g_{km}(\Gamma_{ji}^m - \Gamma_{ij}^m)$$

In quest'ultima, per via della simmetria dei simboli di Christoffel rispetto allo scambio degli indici in basso, nel membro di destra avremo che il primo e il terzo termine si

annulleranno identicamente. Moltiplicando per l'inversa del tensore metrico potremo quindi esplicitare il simbolo di Christoffel ottenendo :

$$\frac{1}{2}g^{im}(g_{ij,k} + g_{ki,j} - g_{jk,i}) = \Gamma_{jk}^m$$

Definiamo ora un tensore fondamentale in relatività generale : il tensore di Riemann.

Definizione. Siano X e Y campi vettoriali sulla varietà metrica differenziabile (M,g) con connessione ∇ . Definiamo il tensore di Riemann il campo tensoriale \mathcal{R} di tipo $(1,3)$ tale che :

$$\mathcal{R}(\omega, X, Y, Z) = \omega([\nabla_X, \nabla_Y] Z - \nabla_{[X,Y]} Z) \quad (1.7)$$

Nel caso in cui poi siano presi dei campi vettoriali tali che $[X, Y] = 0$ allora la definizione si semplifica notevolmente. Possiamo quindi provare a svolgere a svolgere qualche calcolo per ottenere un'espressione più esplicita.

Consideriamo un intorno abbastanza piccolo della varietà M con la carta x tale che le derivate prime del tensore metrico siano approssimabili come nulle. Supponiamo quindi che $X = \partial_\alpha$ e $Y = \partial_\beta$. Allora avremo che :

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta Z^\mu = Z^\mu_{,\beta\alpha} + \Gamma_{\sigma\alpha,\beta}^\mu Z^\sigma \quad (1.8)$$

poiché la 1.6 ci assicura che i simboli di Christoffel si annullino. Semplicemente permutando gli indici α e β ed applicando la definizione avremo che :

$$\mathcal{R}_{\sigma\alpha\beta}^\mu Z^\mu = [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] Z^\mu = (\Gamma_{\sigma\beta,\alpha}^\mu - \Gamma_{\sigma\alpha,\beta}^\mu) Z^\mu \quad (1.9)$$

Contraendo il tensore di Riemann sul primo e il terzo indice otteniamo il tensore di Ricci R :

$$R_{\alpha\beta} := \mathcal{R}_{\alpha\mu\beta}^\mu = R \quad (1.10)$$

Se invece contraiamo il tensore di Ricci con il tensore metrico otteniamo lo scalare di Ricci :

$$R := g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \quad (1.11)$$

Torniamo ora a considerare l'espressione 1.9 e sostituiamo in essa la relazione tra i simboli di Christoffel e la metrica 1.6. Quello che otteniamo è la seguente :

$$\mathcal{R}_{\sigma\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\nu} (g_{\nu\sigma,\beta\alpha} + g_{\nu\beta,\sigma\alpha} - g_{\sigma\beta,\nu\alpha} - g_{\nu\sigma,\alpha\beta} - g_{\nu\alpha,\sigma\beta} + g_{\sigma\alpha,\nu\beta})$$

Sfruttando quindi il fatto che le derivate seconde della metrica commutano alcuni termini si semplificano. Se ora abbassiamo l'indice in alto del tensore di Riemann mediante il tensore metrico, avremo che :

$$\mathcal{R}_{\mu\sigma\alpha\beta} = \frac{1}{2} (g_{\mu\beta,\sigma\alpha} - g_{\mu\alpha,\sigma\beta} + g_{\sigma\alpha,\mu\beta} - g_{\sigma\beta,\mu\alpha}) \quad (1.12)$$

Se ora proviamo a derivare il tensore di Riemann otteniamo la seguente :

$$\mathcal{R}_{\mu\sigma\alpha\beta,\lambda} = \frac{1}{2}(g_{\mu\beta,\sigma\alpha\lambda} - g_{\mu\alpha,\sigma\beta\lambda} + g_{\sigma\alpha,\mu\beta\lambda} - g_{\sigma\beta,\mu\alpha\lambda}) \quad (1.13)$$

Da questa ci possiamo accorgere che, se permutiamo alcuni indici otteniamo un'identità :

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} + \mathcal{R}_{\alpha\beta\lambda\mu,\nu} + \mathcal{R}_{\alpha\beta\nu\lambda,\mu} = 0 \quad (1.14)$$

E se ora sostituiamo a tutti i simboli "," i simboli ";" (ponendoci quindi in un punto dello spazio tempo curvo e non piatto) avremo l'identità di Bianchi :

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + \mathcal{R}_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + \mathcal{R}_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0 \quad (1.15)$$

che se contratta due volte, facendo uso del tensore metrico, ci porta alla seguente identità:

$$g^{\beta\nu}g^{\alpha\mu}(\mathcal{R}_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + \mathcal{R}_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + \mathcal{R}_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}) = \dots = (2R_{\lambda}^{\mu} - \delta_{\lambda}^{\mu}R)_{;\mu} = 0 \quad (1.16)$$

la quale può essere riscritta nella forma :

$$(G^{\alpha\beta})_{;\beta} := (R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R)_{;\beta} = 0 \quad (1.17)$$

Tale tensore $G^{\alpha\beta}$ è noto in letteratura come tensore di Einstein.

1.2.5 Derivata di Lie e vettori di Killing

Volendoci ricondurre al concetto di derivata di una funzione che viene fornito nei corsi di Analisi I ci accorgiamo che però tale definizione non può valere, almeno senza ulteriori definizioni, nel caso delle varietà differenziali. Infatti nel caso Euclideo quello che facevamo era andare a calcolare il limite del rapporto differenziale valutato spostandoci da un punto. Sulle varietà non possiamo più fare ciò. Infatti se ci spostiamo da un punto in una qualche direzione lo spazio tangente al nuovo punto sarà diverso dallo spazio tangente al punto precedente e l'operazione di derivata richiederebbe quindi di comparare vettori appartenenti a spazi diversi. Vediamo quindi di fare chiarezza introducendo come prima cosa il concetto di flusso che definisce il concetto di spostarsi da un punto.

Definizione. Sia (M, τ) una varietà differenziale e Y un campo vettoriale su M . Sia poi $\gamma : I \rightarrow M$ una curva di classe C^{∞} . Diremo che γ è una curva integrale di Y se:

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \right|_{\gamma(\lambda)} = Y_{\gamma(\lambda)}$$

ovvero se il vettore tangente alla curva coincide con il campo vettoriale in ogni punto $\gamma(\lambda) \in M$. Diremo poi che X è completo se $I = \mathbb{R}$

Definizione. Il flusso di un campo vettoriale completo X è una funzione $\phi_X : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ tale che $(\lambda, p) \mapsto \gamma_p(\lambda)$ dove $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ è una curva integrale di X tale che $\gamma(0) = p$.

Cosa è dunque un flusso intuitivamente ? Un flusso è proprio quello che è necessario per definire il concetto di derivata. Infatti possiamo pensare al flusso come un modo per muoverci lungo la curva integrale γ raggiungendo il punto $\gamma_p(\lambda) = \phi_X(\lambda, p) := \phi_X^\lambda(p)$ seguendo quella che è la direzione del campo vettoriale su M .

Possiamo ora introdurre il concetto di derivata di Lie.

Definizione. Sia (M, τ) una varietà differenziabile, $X, Y \in \Gamma(TM)$ e $\phi_X :]-\epsilon, +\epsilon[\times M \rightarrow M$, $\epsilon \in]0, +\infty[$ un flusso locale rispetto al campo X in un intorno $(U(p), x)$ del punto $\gamma(0) = p \in M$. Definiamo derivata di Lie di Y rispetto ad X nel punto p il vettore :

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(\phi_X^{-\lambda})_* Y_{\phi_X^\lambda(p)} - Y_p}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{((\phi_X^{-\lambda})_* Y)_p - Y_p}{\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} ((\phi_X^{-\lambda})_* Y)_p$$

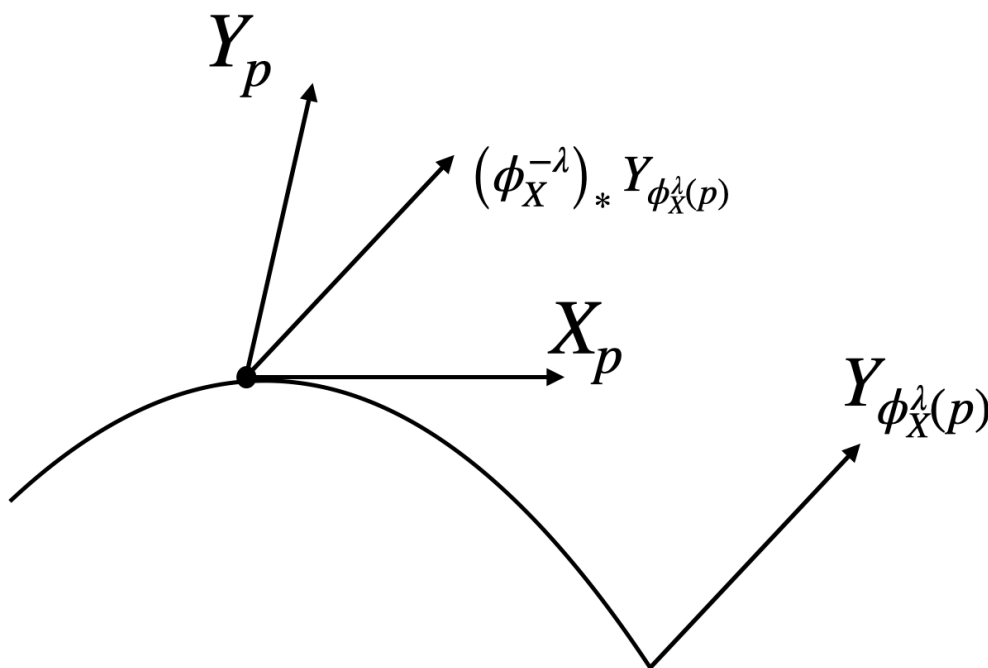


Figura 1.1: È mostrato graficamente il campo Y e come si modifica con i flussi. Vengono quindi raffigurati graficamente i membri soggetti al rapporto incrementale della derivata di Lie. L'immagine è ispirata alla Fig 20.1 del libro di geometria differenziale di L.Tu [8] a pagina 224

Come possibile notare l'esistenza della derivata è qui garantita dalla caratteristica C^∞ delle sezioni presenti in $\Gamma(TM)$. È chiaro che se volessimo applicare la definizione

di derivata di Lie di un campo vettoriale in un intorno di un punto $p \in M$ dotato di coordinate $(U(p), x)$ basterebbe notare che $(\phi_X^t)(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p) = \frac{\partial \phi^j}{\partial x^i}|_p(X, t) \frac{\partial}{\partial x^j}|_{\phi_X^t(p)}$ dove $\frac{\partial \phi^j}{\partial x^i}|_p(X, t)$ denota il Jacobiano di ϕ .

Remark. Lo spazio vettoriale dei campi vettoriali smooth su M , ovvero $\Gamma(TM)$, dotato del commutatore $[X, Y] = XY - YX$ è un'algebra di Lie.

Notiamo ora che se prendiamo un punto $p \in M$ dotato di coordinate locali $(U(p), x)$ allora il commutatore, in coordinate locali, dei campi vettoriali in $\Gamma(TM)$ $X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ sarà $[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}$. Notato ciò è abbastanza semplice dimostrare quanto segue.

Proposizione. Siano $X, Y \in \Gamma(TM)$ ad una varietà M differenziabile. Allora avremo che $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$

Vogliamo ora provare a definire cosa sia la derivata di Lie^[8] di una p -forma differenziale (quindi un campo tensoriale antisimmetrico del tipo $(p, 0)$ sulla varietà. Notiamo che stavolta, al posto del push-forward, dovremo usare il pull-back. Il campo tensoriale della p -forma appartiene infatti allo spazio duale allo spazio tangente.

Definizione. Sia (M, τ) una varietà differenziabile e siano $X \in \Gamma(TM)$ ed ω una p -forma su M . Diremo che la derivata di Lie di ω nel punto p rispetto a X è :

$$(\mathcal{L}_X \omega)_p = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(\phi_X^\lambda)^* \omega_{\phi_X^\lambda(p)} - \omega_p}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{((\phi_X^\lambda)^* \omega)_p - \omega_p}{\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} ((\phi_X^\lambda)^* \omega)$$

Da queste due definizioni si può dimostrare quella che alternativamente poteva essere usata come definizione stessa della derivata di Lie.

Proposizione. ^[4] Sia (M, τ, \mathcal{A}) una varietà topologica differenziabile, $X \in \Gamma(TM)$, $f \in C^\infty(M)$ ed $\omega_A, \omega_B \in \Gamma(T^*M)$. Allora avremo che :

- (i) $\mathcal{L}_X f = X(f)$
- (ii) $\mathcal{L}_X (f\omega_A) = (\mathcal{L}_X f)\omega_A + f\mathcal{L}_X(\omega_A)$
- (iii) $\mathcal{L}_X (\omega_A \otimes \omega_B) = (\mathcal{L}_X \omega_A) \otimes \omega_B + \omega_A \otimes (\mathcal{L}_X \omega_B)$
- (iv) Siano $X_1, \dots, X_k \in \Gamma(TM)$ ed ω un campo tensoriale di una k -forma. Avremo che : $\mathcal{L}_X (\omega(X_1, \dots, X_k)) = (\mathcal{L}_X (\omega))(X_1, \dots, X_k) + \omega(\mathcal{L}_X X_1, \dots, X_k) + \dots + \omega(X_1, \dots, \mathcal{L}_X X_k)$

Notiamo quindi che sfruttando l'ultima proposizione si possono confrontare i concetti di derivata di Lie e di derivata covariante. La derivata covariante, rispetto alla derivata di Lie, richiede che vengano aggiunte informazioni supplementari ovvero i simboli di Christoffel. Questa richiede inoltre una C^∞ linearità sull'indice in basso dell'operatore di derivata, cosa che non è richiesta nella derivata di Lie dove $\mathcal{L}_{fX} Y = [fX, Y] \neq f[X, Y]$. La derivata di Lie al contrario fa quindi uso del concetto di flusso che ci

permette, data la conoscenza di due campi vettoriali in un intorno di un punto, di valutare la variazione di uno di questi rispetto all'altro. Quindi, mentre la derivata covariante richiede la conoscenza dei vettori in un punto quella di Lie richiede la conoscenza del campo vettoriale in un intorno senza però aggiungere strutture geometriche aggiuntive allo spazio. Entrambe le derivata hanno quindi i loro "vantaggi" e i loro "svantaggi". Dimostriamo ora una proposizione che sarà utile a breve.

Proposizione. ^[4] Se $f \in C^\infty(M)$ avremo che $\mathcal{L}_X(df) = d\mathcal{L}_X$

Dimostrazione. Sia $Y \in \Gamma(TM)$. Dal punto (iv) della proposizione precedente avremo che :

$$\mathcal{L}_X(df)(Y) = X((df)Y) - df([X, Y]) = XYf - [X, Y]f = YXf = d(Xf)(Y) = d(\mathcal{L}_X f)(Y)$$

Definizione. Sia $(M, \tau, \mathcal{A}, g)$ una varietà differenziale Riemaniana dotata del tensore metrico g . Un campo vettoriale $Y \in \Gamma(TM)$ è detto campo vettoriale di Killing della metrica g se $\mathcal{L}_Y g = 0$.

Per avere un'idea più chiara calcoliamo quindi la derivata di Lie lungo Y di un campo tensoriale di tipo (2,0) g . Poniamoci in un intorno $(U(p), x)$. Avremo quindi che :

$$\mathcal{L}_Y(g_{ij}dx^i \otimes dx^j) = \mathcal{L}_Y(g_{ij})dx^i \otimes dx^j + g_{ij}(\mathcal{L}_Y dx^i) \otimes dx^j + g_{ij}dx^i \otimes (\mathcal{L}_Y dx^j) = (Yg_{ij} + g_{kj} \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + g_{ik} \frac{\partial Y^k}{\partial x^j})dx^i dx^j$$

Proviamo quindi ad applicare la definizione di campo di Killing. In relatività generale è uso comune indicare il campo vettoriale di Killing Y come $\xi := \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} := \xi^\mu \partial_\mu$ ed indicare l'applicazione della i -esima componente del campo vettoriale $\frac{\partial}{\partial x^i}$ con il pedice ",i". Utilizzando tale notazione e rinominando gli indici i, j, k in α, β, σ (più frequentemente usati in relatività generale) avremo che :

$$g_{\alpha\beta, \mu} \xi^\mu + g_{\sigma\beta} \xi_{, \alpha}^\sigma + g_{\alpha\sigma} \xi_{, \beta}^\sigma = 0 \quad (1.18)$$

La presente 1.18 rappresenta quindi un sistema di equazioni differenziali le cui soluzioni individuano i vettori di Killing, ovvero le simmetrie del tensore metrico e quindi le simmetrie dello spazio-tempo che andremo a considerare.

In relatività generale è uso comune utilizzare il simbolo ";". Consideriamo la seguente equazione :

$$\frac{\partial}{\partial x^j} V = \frac{\partial}{\partial x^j} V^i \frac{\partial}{\partial x^i} + V^k \Gamma_{kj}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Considerando la precedente notazione della ", " precedentemente introdotta avremo che il ";" è definito nel seguente modo :

$$V_{;j}^i := V_{,j}^i + V^k \Gamma_{kj}^i$$

Notando quindi che $\xi_{\alpha;\beta} = (g_{\alpha\mu}\xi^\mu)_{;\beta} = g_{\alpha\mu}(\xi^\mu_{;\beta} + \Gamma^\mu_{\sigma\beta}\xi^\sigma)$ è facile verificare che :

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = g_{\alpha\beta,\mu}\xi^\mu + g_{\sigma\beta}\xi^\sigma_{;\alpha} + g_{\alpha\sigma}\xi^\sigma_{;\beta}$$

Sfruttando tale identità possiamo riscrivere l'equazione che definisce il campo di Killing del tensore metrico nel seguente modo :

$$\nabla_\beta\xi_\alpha + \nabla_\alpha\xi_\beta = \xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0 \quad (1.19)$$

Tale equazione scritta in questa forma è nota come equazione di Killing.

I vettori che soddisfano l'equazione di Killing, chiamati per l'appunto *vettori di Killing*, non sono altro che direzioni lungo le quali la derivata di Lie del tensore metrico si annulla. Ciò è come dire che, per un'opportuna scelta di coordinate, la metrica è indipendente dalla variabile determinata dalla direzione del vettore di Killing. Ciò si chiarisce immediatamente con un esempio.

Esempio. Consideriamo una varietà Riemanniana differenziabile di dimensione 4. Supponiamo che il tensore metrico g abbia simmetria sferica e quindi possa essere scritta nella forma $ds^2 = \Omega_{ij}dx^i dx^j + r^2 d\omega^2$, $i, j \in \{1, 2\}$ e $d\omega^2 = w_{kl}dy^k dy^l = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Sia poi $\Omega_{ij} = \Omega_{ij}(x)$ ed $r = r(x)$. Vogliamo quindi determinare i vettori di Killing di tale metrica. Vista la semplicità di ds^2 è facile ottenere il tensore metrico. Sfruttando quindi la relazioni tra i simboli di Christoffel e la metrica avremo che $\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\cos\theta \sin\theta$ e $\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta$. Dalla 1.19 avremo quindi un sistema di tre equazioni differenziali :

$$\partial_\theta\xi_\theta = 0 \implies \xi_\theta = f(\phi)$$

$$\partial_\theta\xi_\phi + \partial_\phi\xi_\theta = 2 \cot\theta \xi_\phi$$

$$\partial_\phi\xi_\phi = -\cos\theta \sin\theta \xi_\theta$$

Risolvendo il sistema di equazioni differenziali si arriva quindi alle seguenti equazioni con tre parametri indipendenti (A, B, C) :

$$\xi_\theta = A \sin\phi + B \cos\phi, \quad \xi_\phi = A \cot\theta - B \sin\phi \cot\theta + C$$

Da queste seguono immediatamente i tre vettori di Killing :

$$\xi_1 = \sin\phi \partial_\theta + \cot\theta \cos\phi \partial_\phi \quad (1.20)$$

$$\xi_2 = \cos\phi \partial_\theta - \cot\theta \sin\phi \partial_\phi \quad (1.21)$$

$$\xi_3 = \partial_\phi \quad (1.22)$$

1.2.6 Integrare su una varietà

Ci vogliamo ora domandare come introdurre il concetto di integrazione sopra di una varietà per introdurre, così facendo, il familiare concetto di volume. Per farlo ci rifacciamo alla trattazione di Lee ([4]) cercando però di ridurla e di fornire un esempio che ci sarà utile a posteriori. Ingenuamente, potremmo pensare di definire il volume semplicemente in questo modo. Se M è una varietà, per semplicità mappata da un'unica mappa x in \mathbb{R}^n , ed $f \in C^\infty(M)$ definita in modo tale che $f(z) = 1 \forall z \in \mathbb{R}^n$ allora il volume potrebbe essere ingenuamente definito come :

$$Vol(M) = \int f(x^{-1})dV$$

Per tale definizione abbiamo lecitamente usato il termine di "ingenua" per via del suo valore che sarebbe infatti non indipendente dalle coordinate scelte. Un volume che dipende infatti dalle coordinate usate non merita questo nome. Vediamo quindi come potremmo svincolarci dall'uso delle coordinate. Per quanto detto il campo covettoriale non è altro che un campo che assegna, in modo lineare, ad ogni vettore appartenente al fascio tangente un numero in \mathbb{R} in maniera del tutto indipendente dalle coordinate scelte. Possiamo quindi pensare al campo covettoriale come ad un campo che assegna ad ogni vettore della varietà una "lunghezza". Una n-forma assegnerà quindi ad una ennupla di vettori qualcosa che potremmo vedere come un elemento di volume. Ciò è d'altronde un fatto noto già in algebra lineare. Se ammettiamo infatti che il determinante non è altro che una n-forma (che assegna a n vettori uno scalare), allora possiamo richiamare il fatto noto che il determinante che assegnava ad una ennupla di vettori in \mathbb{R}^n il valore del volume, non è altro che un caso particolare del caso generale. Lo spazio \mathbb{R}^n non è infatti altro che la più semplice delle varietà differenziali e il determinante un caso particolare di un campo covettoriale.

Per comprendere meglio la definizione che enunceremo a breve dell'integrale di una m-forma enunciamo prima una proposizione che può essere dimostrata riguardo al pullback.

Proposizione. *Sia $\phi \in C^\infty(M, N)$ con M, N varietà m -dimensionali con due intorni (U, x) e (V, y) rispettivamente di M ed N . Sia infine $f \in C^\infty(V)$. Allora, nell'insieme $U \cap \phi^{-1}(V)$ vale la seguente :*

$$\phi^*(f dy^1 \otimes \dots \otimes dy^m) = (f \circ \phi) \left(\det \left| \frac{dy}{dx} \right| \right) dx^1 \otimes \dots \otimes dx^m$$

Possiamo quindi definire l'integrale di una m-forma su M .

Definizione. *Sia M una varietà orientata (\pm) m -dimensionale e sia ω una m -forma su M a sua volta mappato, per semplicità, da un'unica carta x . Definiamo l'integrale ω su M come :*

$$\int_M \omega := \pm \int_{x(U)} (x^{-1})^* \omega$$

Può essere infatti dimostrato che tale definizione è invariante rispetto ad un opportuno cambio di coordinate. Per quanto detto, definito in questo modo, l'integrale può essere considerato ben definito.

Riprendiamo ora il nostro discorso sul fatto della definizione ingenua di volume data all'inizio del paragrafo. Ciò è infatti vero ma solo nel caso in cui trattiamo varietà senza strutture geometriche aggiuntive quale può essere la metrica ad esempio nelle varietà Riemanniane. In tale caso infatti l'integrale può essere definito in un modo analogo in modo che sia invariante rispetto al cambio di coordinate.

Definizione. Sia M una varietà differenziale orientata e sia dato un intorno (U, x) di questa. Sia infine data una funzione $f \in C^\infty(M)$. Definiamo l'integrale di f su U nel seguente modo :

$$\int_U f dV := \int_{x(U)} \sqrt{|\det g|} f(x^{-1}, \dots, x^{-m}) dx^1 \otimes \dots \otimes dx^m \quad (1.23)$$

Per dimostrare che tale nozione è ben definita dobbiamo quindi mostrare che è indipendente dalla carta utilizzata. Siano quindi date due carte (U, x) e (V, y) . Se g_{ij} è il tensore metrico determinato dalla carta x allora chiameremo $g'_{kl} = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} g_{ij}$ il tensore metrico determinato dalla carta y . Siano poi $f \in C^\infty(M)$ e ϕ un differomorfismo tra gli intorni di \mathbb{R}^n determinati rispettivamente dalle carte x e y : $\phi : Im(y(U)) \rightarrow Im(x(V))$. Avremo dunque che $x^{-1} \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow M$. Per la precedente definizione avremo che :

$$\int_U f dV = \int_{\mathbb{R}^n} f(y^{-1}) \sqrt{|\det g(y)|} dy^1 \otimes \dots \otimes dy^m$$

Per mostrare che tale nozione è ben definita basta svolgere il seguente calcolo :

$$\begin{aligned} & \phi^*(f(x^{-1} \circ \phi)) |\det g((x^{-1} \circ \phi)e_i, (x^{-1} \circ \phi)e_j)| dy^1 \otimes \dots \otimes dy^m \\ &= f(x^{-1}) \sqrt{\det(\phi_i^k) \det(\phi_i^l) g_{kl}} \det \phi_k^i \\ &= f(x^{-1}) \sqrt{|\det g|} dx^1 \otimes \dots \otimes dx^m \end{aligned}$$

Dunque un cambio di coordinate, come ci aspetteremmo da un integrale normale, non modifica il risultato dell'integrazione. Vogliamo ora fare un esempio che ci tornerà utile in seguito.

Esempio. Consideriamo la sfera \mathcal{S}^2 di raggio R , ovvero una varietà Riemanniana (M, g) di dimensione 2. Da un intorno rettangolare di \mathbb{R}^n l'inversa della carta avrà quindi la seguente forma : $x^{-1} : A \rightarrow \mathcal{S}^2$, con $A = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$. Un punto p sarà dunque parametrizzato nel seguente modo $x^{-1}(\theta, \phi) = (R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta) := p$. Proviamo dunque a calcolare l'area di tale sfera.

Consideriamo quindi i due vettori :

$$u = \frac{\partial p}{\partial \theta} = (R \cos \theta \cos \phi, R \cos \theta \sin \phi, -R \sin \theta) , \quad (1.24)$$

$$v = \frac{\partial p}{\partial \phi} = (-R \sin \theta \sin \phi, R \sin \theta \cos \phi, 0) \quad (1.25)$$

Svolgendo i rispettivi prodotti scalari utilizzando la metrica euclidea è facile ottenere che la metrica indotta sulla sfera sarà : $g_{\theta\theta} = R^2$, $g_{\phi\phi} = R^2 \sin^2 \theta$ e $g_{\theta\phi} = 0$.

Utilizzando al 1.23 avremo quindi che l'area della sfera S^2 (area se la vediamo come immersa in uno spazio di dimensione 3) sarà data da:

$$\begin{aligned} \int_{S^2} 1 &= \int_{x^{-1}(S^2)} 1 \sqrt{g} dx^1 dx^2 \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi |R^2 \sin \theta| d\theta = 4\pi R^2 \end{aligned} \quad (1.26)$$

Capitolo 2

Strumenti relativistici

In questo capitolo ci proponiamo di introdurre alcuni concetti fondamentali della relatività generale e di svolgere alcuni calcoli necessari per la trattazione successiva. In particolare ricaveremo la soluzione di Schwarzschild e introdurremo la metrica di Rindler che verrà usata nel prossimo capitolo per introdurre l'effetto Unruh. Tratteremo quindi, per un successivo utilizzo, il redshift nel campo gravitazionale, il tensore energia impulso focalizzato al caso particolare dei fluidi perfetti ed infine parleremo anche del moto della luce nello spazio tempo curvo.

2.1 Spazio tempo di Minkowski in coordinate curve e notazioni

Come noto la metrica nello spazio tempo di Minkowski in coordinate cartesiane X^μ è data dalla seguente espressione :

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu, \quad \eta_{\mu\nu} := \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (2.1)$$

Da qui in avanti adotteremo dunque la scelta della segnatura $(-, +, +, +)$ per la metrica nello spazio-tempo di Minkowski.

Siano x^α le coordinate definite su di in un intorno nel dominio dello spazio-tempo V correlate alle coordinate cartesiane : $x^\alpha = x^\alpha(X^\mu)$. Per quanto detto, effettuando un cambio di base avremo che :

$$dX^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \quad (2.2)$$

È dunque immediato riscrivere la 2.1 nella forma :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad g_{\mu\nu} := \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} := \eta_{\alpha\beta} X_{,\mu}^\alpha X_{,\nu}^\beta \quad (2.3)$$

dove $g_{\mu\nu}$ è la metrica nello spazio-tempo di Minkowski in coordinate cosiddette "curve". Nel particolare caso delle coordinate sferiche nello spazio tempo di Minkowski, è facile dimostrare che la metrica, utilizzando tali coordinate, prenderà la forma dalla seguente:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) := -dt^2 + dr^2 + r^2d\omega^2 \quad (2.4)$$

I calcoli per ottenere tale forma seguono quelli 1.24 e 1.25 di un esempio del capitolo precedente.

Durante la nostra trattazione della relatività generale ci riferiremo spesso al tensore metrico in coordinate sferiche utilizzando le coordinate t, r, θ, ϕ per denotare le stesse. Si utilizzeranno poi le unità di misura geometrizzate, molto comode per mettere in luce l'eleganza di alcune formule e per accorciare le altre. Queste sono definite in modo tale che :

$$\hbar = 1, k_B = 1, c = G = 1 \quad (2.5)$$

dove in particolare l'ultima uguaglianza implica che la massa possa essere misurata in metri. Utilizzando il fattore di conversione $c^2 = G = 1$ potremo, ad esempio, dire che la massa del sole $M_s \approx 1476$ m. In alcuni casi dove è ritenuto importante faremo poi ritorno alle unità di misura del SI e ciò sarà sempre o esplicitamente detto o banalmente verificato dalla comparsa delle costanti universali poste uguali a uno.

2.2 Il tensore energia impulso

Per definire il tensore energia impulso, ai fini di una trattazione più immediata e semplice di quella mediante il principio di Einstein Hilbert che fuorvierebbe dai nostri scopi, procederemo in maniera simile a quella di Schutz [7].

Definizione 1. *Dato un arbitrario sistema di riferimento definiamo $T^{\alpha\beta}$ come il flusso dell'alpha-esimo momento (p^α) lungo una superficie con la coordinata spaziale x^β costante.*

Analizzando ora i casi particolari notiamo che banalmente T^{00} sarà pari alla densità energetica, T^{0i} sarà il flusso energetico attraverso la superficie i -esima e T^{i0} la densità dell' i -esimo momento.

Per quanto detto seguirà quindi immediatamente che $T_{,\beta}^{0\beta} = 0$ non è altro che la legge di conservazione dell'energia scritta in forma tensoriale. Notato ciò è immediato generalizzare scrivendo la legge più generale di conservazione sia dell'energia che del momento :

$$T_{,\beta}^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.6)$$

Sia per brevità SRMC il sistema di riferimento nel quale l'osservatore è momentaneamente comuovente con una particella con velocità \vec{U} . Diremo quindi che un fluido è perfetto se un osservatore in un qualsiasi sistema di riferimento comuovente SRMC ad

una qualsiasi molecola fluido vede il fluido attorno a sé come isotropo. Poniamoci quindi nel SRMC di una particella di un tale fluido che assumeremo però non viscoso. Per via dell'assenza di viscosità nel tensore di sforzo sarà normale assumere che tutte le forze di taglio non perpendicolari alle superfici siano nulle. Per definizione di fluido perfetto avremo quindi che in un sistema di riferimento SRMC il tensore T^{ij} assumerà forma diagonale. In particolare avremo quindi che (sempre in un SRMC) :

$$T^{ij} = P\delta_{ij} \quad (2.7)$$

$$T^{00} = \rho \quad (2.8)$$

È quindi semplice identificare la P con la pressione e la ρ con la densità di energia di tale fluido in un SRMC.

Per un osservatore in un tale sistema di riferimento avremo dunque che :

$$T^{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} = \text{diag}(\rho, P, P, P) \quad (2.9)$$

Ponendoci nel caso di uno spazio tempo uniformemente piatto e volendo conoscere la forma della 2.9 in un sistema di riferimento "del laboratorio" possiamo semplicemente adoperare un cambio di sistema di riferimento. Chiamando x^α le coordinate in un SRMC e quelle del laboratorio \tilde{x}^α avremo quindi che $x^\alpha = \tilde{x}^\beta \Lambda_\beta^\alpha$. Il tensore trasformerà quindi nel seguente modo : $T^{\alpha\beta} = T^{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} \Lambda_{\tilde{\beta}}^\alpha \Lambda_{\tilde{\alpha}}^\beta$. Se ora poniamo il quadrivettore velocità u in modo tale che $\tilde{u}^i = d\tilde{x}^i/d\tau = \tilde{v}(1 - \tilde{v}^2)^{-1/2}$ (dove τ è il tempo proprio) e $u^0 = dt/d\tau = (1 - \tilde{v}^2)^{-1/2}$, in tal modo avremo che $u^\alpha u_\alpha = -1$, e potremo riscrivere il tensore di energia impulso in quella che è la forma canonicamente usata:

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + P)u^\alpha u^\beta + P\delta^{\alpha\beta} \quad (2.10)$$

Ricordiamo quindi il Principio di Equivalenza di Einstein [7]:

Ogni esperimento fisico locale che non coinvolge la gravità avrà lo stesso risultato se condotto in un sistema in caduta libera come se fosse eseguito su di uno spazio-tempo piatto in relatività ristretta. Se invece lo spazio-tempo è curvo dovremo sostituire le derivate parziali con derivate covarianti e il tensore $\eta_{\mu\nu}$ con il più generico tensore metrico $g_{\mu\nu}$. Assumendo come esatta tale affermazione, per via dell'annullarsi dei simboli di Christoffel, potremo riscrivere la 2.6 nel seguente modo :

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.11)$$

Il tensore di sforzo assumerà invece la seguente forma :

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu + Pg^{\mu\nu} \quad (2.12)$$

dove $g^{\mu\nu}$ è il tensore metrico le cui componenti nel sistema di riferimento in caduta libera coincidono con il tensore metrico di Minkowski.

Riportiamo quindi una condizione particolare del tensore energia-impulso ovvero il fatto che $\rho \geq 0$. Tale condizione implica quindi che la densità energetica misurata da un osservatore in un SRMC si maggiore o uguale di zero. Tale condizione, che garantisce quindi una conformità delle condizioni fisiche con quelle attese, prende il nome di *condizione di energia debole*.

Se ora applichiamo la legge di conservazione covariante alla 2.12 avremo che

$$T_{\mu\nu}^{;\nu} = (\rho + P)_{;\nu} u_{\mu} u^{\nu} + (\rho + P) u^{\nu} u_{\mu;\nu} + (\rho + P) u_{\mu} u^{\nu}_{;\nu} + P_{;\mu} \quad (2.13)$$

In un sistema di riferimento SMRM avremo che il primo termine si annullerà banalmente restituendo la seguente :

$$T_{\mu\nu}^{;\nu} = (\rho + P) u^{\nu} u_{\mu;\nu} + (\rho + P) u_{\mu} u^{\nu}_{;\nu} + P_{;\mu} \quad (2.14)$$

Introduciamo adesso un altro importante principio.

Definizione 2. *Principio di covarianza.*

Le leggi fisiche devono essere valide per una scelta arbitraria di coordinate.

Conseguenza diretta di questo principio è il fatto che questo è sempre soddisfatto nel caso in cui un'equazione sia scritta nella forma tensoriale $T = 0$. Infatti, se le componenti del tensore si annullano mediante l'utilizzo di una certa base allora ciò sarà vero per qualsiasi altra scelta di coordinate. Dunque se un osservatore misurerà un tensore di energia-impulso identicamente nullo, come ci aspettiamo, questo sarà tale in qualsiasi sistema di riferimento.

2.3 Equazioni di Einstein e metrica di Schwarzschild

Senza avere pretese di una trattazione completa ed esaustiva richiamiamo le equazioni di campo Einstein. Imponendo la minima variazione all'azione di Einstein-Hilbert possiamo ottenere le seguenti equazioni :

$$G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \quad (2.15)$$

dove ricordiamo che $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R$ è il tensore di Einstein, $R_{\alpha\beta}$ il tensore di Ricci ed R la traccia di quest'ultimo. La Λ rappresenta invece la costante cosmologica.

Per cercare le soluzioni di tali equazioni conviene imporre delle restrizioni, ad esempio che la metrica sia statica e quindi abbia un vettore di Killing $\xi = \partial_t$ e quindi che il tensore metrico non dipenda dalla coordinata temporale. Ora, dato che quelle che ci interessano saranno soluzioni riguardanti i buchi neri o comunque corpi celesti molto

grandi dove l'azione della forza gravitazionale è di gran lunga la forza principale in gioco, non è insensato o controintuitivo fare la richiesta aggiuntiva che la metrica sia a simmetria sferica. Assumendo quindi che due delle quattro coordinate siano angolari e siano date dalla metrica di Minkowski scritta in coordinate sferiche moltiplicate per una certa funzione della coordinata radiale, ovvero :

$$ds_{ang}^2 = f^2(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.16)$$

la cui $f(r)$, mediante un'opportuna scelta di coordinata radiale, può essere riscritta come $f(r) = r$ (ad esempio ponendo la coordinata radiale uguale alla R determinata dall'area della sfera \mathcal{S}^2 nella 1.26). Avendo indotto quindi le coordinate della sfera abbiamo introdotto pure un altro vettore di Killing : ∂_ϕ . Ora, imponendo quelle che sono le usuali condizioni di ortogonalità che ci aspetteremmo tra le coordinate radiali e angolari, avremo che, come atteso, i termini non diagonali della metrica si annulleranno e quindi avremo una metrica del tipo :

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + r^2d\omega^2 \quad (2.17)$$

dove abbiamo posto $d\omega^2 = (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$. Notiamo infine che g_{tt} e g_{rr} non saranno semplici numeri ma certe funzioni delle coordinate. Dato che queste non potranno essere funzioni della coordinata temporale per via della richiesta di stazionarietà e nemmeno delle coordinate angolari per via della richiesta di simmetria sferica avremo che saranno certamente determinate da funzioni della coordinata radiale r . Come si vedrà in seguito è conveniente scrivere tali funzioni nel seguente modo :

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.18)$$

dove abbiamo posto la $\Phi = \Phi(r)$ e la $\Gamma = \Gamma(r)$ funzioni di r . Dato che ci aspettiamo che all'infinito l'effetto della gravità generato dal corpo in questione si annulli dovremo richiedere in aggiunta che :

$$\Phi(r \rightarrow \infty) = 0, \quad \Gamma(r \rightarrow \infty) = 0 \quad (2.19)$$

Possiamo adesso scrivere le componenti non nulle del tensore di Einstein esprimendolo mediante tale metrica :

$$\begin{aligned} i) G_{00} &= \frac{1}{r^2} e^{2\Phi} \frac{d}{dr} \left(r (1 - e^{-2\Gamma}) \right) = 0 \\ ii) G_{rr} &= -\frac{1}{r^2} e^{2\Gamma} \left((1 - e^{-2\Gamma}) \right) + \frac{2}{r} \Phi_{,r} = 0 \\ iii) G_{\theta\theta} &= r^2 e^{-2\Gamma} \left(\Phi_{,rr} + \Phi_{,r}^2 + \frac{\Phi_{,r}}{r} - \Phi_{,r} \Gamma_{,r} - \frac{\Gamma_{,r}}{r} \right) = 0 \\ iv) G_{\varphi\varphi} &= \sin^2 \theta G_{\theta\theta} = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Assumiamo ora, per semplicità, che la costante cosmologica $\Lambda = 0$. Tale assunzione è comunque giustificata dagli esperimenti che hanno stimato $\Lambda \approx 3 \times 10^{-122} l_P^{-2}$ dove l_P è la

lunghezza di Plank. Dato che siamo intessati in soluzioni per cui il fluido rappresentante la stella sia a riposo allora la velocità di un osservatore in un SRMC sarà, con opportuna normalizzazione, tale che : $u_\nu u^\nu = -1$ possibile solo se $u^t = e^{-\Phi}$ e $u_t = e^\Phi$. Con tali valori di velocità e con la metrica 2.18 il tensore energia-impulso sarà tale che :

$$T_{tt} = \rho e^{2\Phi} , T_{rr} = P e^{2\Gamma} , T_{\theta\theta} = P r^2 , T_{\phi\phi} = \sin^2 \theta T_{\theta\theta} \quad (2.21)$$

Imponiamo ora che sia rispettata la 2.11. L'equazione $T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$ ci fornirà quindi quattro equazioni delle quali solo una non si annullerà in modo triviale : $\alpha = r$. In questo caso avremo che :

$$T_{;\beta}^{r\beta} = g^{r\beta} P_{;\beta} + (\rho + P) u^\beta u_{;\beta}^r = e^{-2\Lambda} \frac{dP}{dr} + (\rho + P) u^0 u_{;0}^r \quad (2.22)$$

È immediato verificare che $u_{;0}^r = e^{-\Phi} \Gamma_{00}^r$ dove il simbolo di Christoffel può essere ricavato dalla metrica mediante la 1.6 : $\Gamma_{00}^r = e^{-2\Lambda} \frac{d\Phi}{dr} e^{2\Phi}$. Sostituendo e semplificando avremo quindi :

$$\frac{dP}{dr} + (\rho + P) \frac{d\Phi}{dr} = 0 \quad (2.23)$$

Cerchiamo ora delle soluzioni delle 2.20. La soluzione della (i) utilizzando la 2.21 sostituita nelle equazioni di Einstein in unità geometrizzate ci porta alla seguente :

$$\frac{d}{dr} (r(1 - e^{-2\Gamma})) = \rho 8\pi r^2 \quad (2.24)$$

Se ora sfruttiamo l'analogia con le equazioni di campo della gravità Newtoniana ($\nabla^2 \psi = 4\pi G \rho$, $\psi = -Gm/r$) potremo identificare la massa del corpo che genera il campo con $1/2r(1 - e^{-2\Gamma})$. Avremo quindi che la parte radiale del tensore metrico sarà esprimibile nel seguente modo :

$$g_{rr} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} \quad (2.25)$$

Al di fuori del corpo fluido avremo il vuoto e dunque $\rho = 0$ e $P = 0$. Avremo quindi dalle 2.20 che, nel vuoto, come ci potremmo aspettare, $dm/dr = 0$ che implica che al di fuori avremo $m(r)$ costante che porremo pari a M . Inoltre dalla parte radiale di G_{rr} abbiamo che :

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{M}{r(r - 2M)} \quad (2.26)$$

da cui

$$\Phi = \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \Phi_0 \implies e^{2\Phi} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) e^{2\Phi_0} \quad (2.27)$$

poiché $e^{2\Phi_0}$ non è altro che una costante moltiplicativa potremo riscrivere la coordinata temporale in modo da eliminarla ottenendo la seguente metrica :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\omega^2 \quad (2.28)$$

nota come metrica di Schwarzschild.

È chiaro che in tale metrica succeda qualche cosa nei casi in cui rispettivamente $r > r_s$, $r = r_s$ e $r < r_s$. Cerchiamo di analizzare cosa succeda prendendo in considerazione le ipersuperfici $\mathcal{S}_>$, $\mathcal{S}_=$ e $\mathcal{S}_<$. Come noto dall'analisi tali ipersuperfici possono essere determinate lasciando la coordinata radiale r fissata e permettendo alle altre di variare. Il covettore normale n a tale superficie potrà quindi essere individuato imponendo l'annullarsi della derivata di \mathcal{S} rispetto r ; dunque $n_\mu = (n_0, n_1, 0, 0)$. Potremo quindi distinguere i tre casi in funzione della norma vettori n^μ ortogonali alle varie \mathcal{S} :

$$\begin{aligned} \text{Per } \mathcal{S}_< \text{ avremo } n^2 < 0 \\ \text{Per } \mathcal{S}_= \text{ avremo } n^2 = 0 \\ \text{Per } \mathcal{S}_> \text{ avremo } n^2 > 0 \end{aligned} \tag{2.29}$$

dunque i vettori ortogonali alle superfici $\mathcal{S}_<$, $\mathcal{S}_=$ e $\mathcal{S}_>$ saranno rispettivamente time-like, nulle-like e space-like. Per capire che cosa possa fare una eventuale particella situata

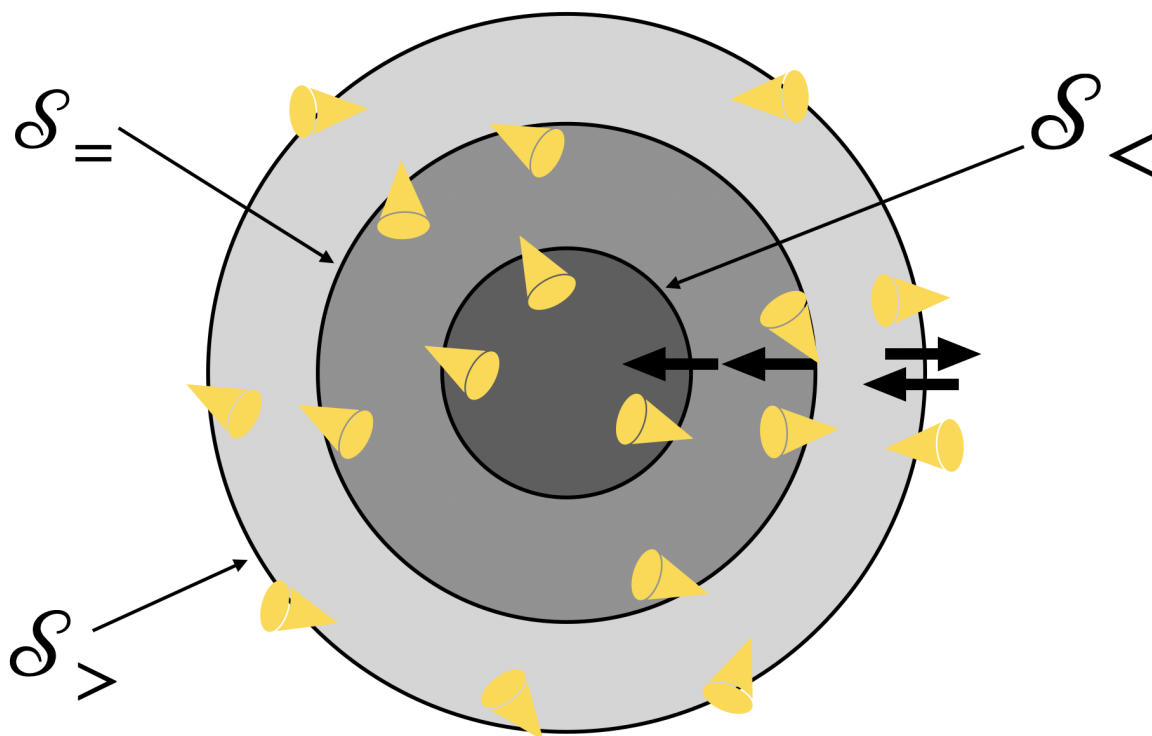


Figura 2.1: Sono mostrate le tre superfici $\mathcal{S}_<$, $\mathcal{S}_=$ e $\mathcal{S}_>$ della metrica di Schwarzschild con i rispettivi versi di attraversabilità da parte dei coni luce

su tali ipersuperfici dobbiamo considerare i vettori t tangenti ad esse. Chiaramente per tali vettori varrà che $t_\mu n^\mu = 0$. Se ora studiamo il segno della norma dei vettori tangenti potremo avere un parallelo con i coni luce tangenti alle ipersuperfici. Innanzitutto è

chiaro che il vettore tangente alla ipersuperficie con r costante sarà determinato da una certa combinazione di $t^t = \partial_t$, $t^\theta = \partial_\theta$ e $t^\phi = \partial_\phi$ delle coordinate non ortogonali ad \mathcal{S} . Se ora studiamo il segno di t^2 in base a quello di g^{rr} noteremo immediatamente che per $\mathcal{S}_<$ avremo $t^2 > 0$, per $\mathcal{S}_=$ avremo $t^2 \geq 0$ ed infine per $\mathcal{S}_>$ avremo $t^2 \leq 0$. Dunque un ipotetico cono luce potrà avere tre comportamenti distinti a seconda del tipo di ipersuperficie \mathcal{S} . Nel caso di un punto su $\mathcal{S}_>$ il cono il vettore tangente potrà essere sia time-like che space-like che null-like quindi un'ipotetica particella potrà attraversare la superficie in entrambe le direzioni. Nel caso di un punto su $\mathcal{S}_=$ e su $\mathcal{S}_<$ inevitabilmente il vettore tangente potrà essere solo space-like o al più null-like causando quindi un'attraversabilità dell'ipersuperficie in una sola direzione : quella verso valori sempre più piccoli di r . In questi ultimi due casi quindi il futuro della particella, o di un raggio di luce se vogliamo, sarà interamente contenuto in valori di r sempre pi piccoli e non potrà più quindi riuscire dalla superficie $\mathcal{S}_=$ che assume il nome di orizzonte degli eventi.

2.4 Metrica di Rindler

Introduciamo ora, seguendo la trattazione di Frolov e Zelnikov [2] una metrica che sarà molto importante successivamente per una dimostrazione : la metrica di Rindler. Consideriamo quindi il cammino seguito, o worldline, da un oggetto nello spazio-tempo di Minkowski dato dalla seguente espressione:

$$X^\mu(\tau) = (a^{-1} \sinh(a\tau), a^{-1} \cosh(a\tau), 0, 0) \quad (2.30)$$

dove τ è il parametro caratterizzante la traiettoria. Chiaramente tale cammino rappresenterà un'iperbole equilatera nel piano (X^0, X^1) . Analizzando tale traiettoria è immediato notare che la distanza tra $X^\mu(\tau)$ e l'origine $(X^0, X^1) = (0, 0)$ rimarrà invariata e pari a $l = a^{-1}$. Infatti, utilizzando la metrica di Minkowski, avremo che : $\eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = a^{-2} \cosh^2(a\tau) - a^{-2} \sinh^2(a\tau) = a^{-2}$.

Per capire ora cosa rappresentino τ e a conviene procedere derivando la X^μ rispetto a τ :

$$u^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau} = (\cosh(a\tau), \sinh(a\tau), 0, 0), \quad w^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = (a \sinh(a\tau), a \cosh(a\tau)) \quad (2.31)$$

da cui segue banalmente che $u^2 = u_\mu u^\mu = -1$ e $w^2 = w_\mu w^\mu = a^2$ ovvero, rispettivamente, che potremo considerare τ come il tempo proprio lungo il cammino e che, così facendo, l'accelerazione è costante. Tale moto sarà dunque un moto uniformemente accelerato.

Per l'osservatore situato in tale sistema di riferimento gli eventi simultanei ad un certo istante di tempo τ saranno localizzati su di un iperpiano Π_τ ortogonale alla velocità $u^\mu(\tau)$ e contenente quindi anche il vettore accelerazione dato che $w_\mu u^\mu = 0$. I punti di tale piano potranno quindi essere parametrizzati, nel nostro caso 4-dimensionale, da un set di 3 coordinate (ρ, X^2, X^3) mediante l'equazione $Y^\mu(\tau) = a\rho X^\mu(\tau) + (0, 0, X^2, X^3) =$

$(\rho \sinh(a\tau), \rho \cosh(a\tau), X^2, X^3) := (X^0, X^1, X^2, X^3)$. Utilizzando quindi il set di coordinate (τ, ρ, X^2, X^3) è immediato notare che un cammino con un valore fissato delle ultime tre coordinate rappresenta un osservatore uniformemente accelerato con accelerazione ρ^{-1} .

Considerando $Y^\mu(\tau)$ possiamo quindi scrivere che $dX^0 = \sinh(a\tau)d\rho + a\rho \cosh(a\tau)d\tau$ e che $dX^1 = \cosh(a\tau)d\rho + a\rho \sinh(a\tau)d\tau$. Ponendo ora $X^2 := y$ e $X^3 := z$, utilizzando la metrica di Minkowski, avremo che :

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu = -a^2\rho^2 d\tau^2 + d\rho^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.32)$$

dalla quale notiamo come, fissati ρ, y e z , la distanza misurata rimanga fissata. In questo sistema di riferimento, un osservatore a riposo sarà quindi, per quanto detto, un osservatore che si muove con accelerazione costante nello spazio-tempo di Minkowski. Tale metrica descritta dalla 2.32 è invece nota come *metrica di Rindler* e può essere usata per descrivere un campo gravitazionale omogeneo a cui è soggetto un osservatore che, in uno spazio tempo piatto, si muove con accelerazione costante rispetto ad un punto. È chiaro che sussiste un'analogia tra questo caso e quello di accelerazione a cui è sottoposto un corpo in un campo gravitazionale generato da un corpo massivo. Sfruttare tale analogia sarà la chiave per una dimostrazione nel seguente capitolo.

2.5 Propagazione della luce nello spazio-tempo

Vogliamo ora considerare il moto della luce o di una particella massiva nello spazio-tempo di Schwarzschild. Come noto, poiché tale metrica è a simmetria sferica e dunque invariante per rotazioni sulla sfera parametrizzata da (t, r, θ, ϕ) , non sarà restrittivo assumere il punto iniziale del moto in $(t_0, r_0, \theta_0 = \pi/2, \phi_0 = 0)$. Ponendo infine la velocità $u^{\theta_0}(\tau_0) = 0$ avremo che la particella considerata si troverà sul piano equatoriale di tale sfera e avrà velocità iniziale tangente ad essa. Posto τ pari al tempo proprio consideriamo quindi l'equazione della curva geodesica :

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\theta \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (2.33)$$

Per via della nostra scelta delle condizioni iniziali avremo che $\ddot{\theta} = 0$ nel caso che entrambe o una tra μ e ν siano uguali a θ . Nel caso invece in cui questi ultimi siano entrambi diversi da θ avremo che $\Gamma_{\mu\nu}^\theta = 0$. Ciò può essere banalmente verificato utilizzando l'equazione 1.6 che lega i simboli di Christoffel alla metrica, che per comodità qui riportiamo :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) \quad (2.34)$$

Sviluppando i calcoli si osserva che i $\Gamma_{\mu\nu}^\theta$, dove $\mu, \nu \neq \theta$ si annullano tutti banalmente eccetto $\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin\theta \cos\theta$; quest'ultimo si annulla però per via delle nostre condizioni

iniziali ($\theta = \frac{\pi}{2}$). Notiamo infine come avremmo potuto ottenere gli stessi risultati utilizzando il concetto di curva trasportata autoparallelamente (1.2) calcolando le geodesiche sulla sfera utilizzando una carta opportuna (ad esempio le coordinate sferiche).

Tutte le orbite sono dunque planari, esattamente come nel caso non relativistico. Nel caso della luce, come proveremo tra poco, vale il medesimo risultato, con l'unica differenza che dovremo utilizzare al posto del tempo proprio τ il parametro di affinità λ . Ora, lo studio che ora segue è semplicemente lo studio energetico delle particelle e della luce nello spazio tempo considerato. Per svolgere i calcoli e presentare i risultati seguiremo quindi un approccio che delle notazioni già usate, in particolare quelle di Frolov e Zelnikov[2]. Per quanto argomentato, nel caso della metrica di Schwarzschild con $\theta = \pi/2$, possiamo dunque ridurre il nostro problema, da quattro a tre dimensioni, utilizzando la seguente metrica :

$$ds^2 = -gdt^2 + \frac{1}{g}dr^2 + r^2d\phi^2 \quad , \quad g = 1 - \frac{r_s}{r} \quad (2.35)$$

Se ora consideriamo l'azione per una particella massiva :

$$S[x^\mu(\tau)] = m \int_0^\tau \sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} d\tau' \equiv m \int_0^\tau \sqrt{2T} d\tau' \quad (2.36)$$

ed imponiamo che

$$2T = g\dot{t}^2 - g^{-1}\dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) = 1 \quad (2.37)$$

potremo allora identificare le quantità conservate durante il moto :

$$E = \frac{\partial T}{\partial \dot{t}} = g\dot{t} \quad , \quad L = -\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = r^2 \sin^2\theta\dot{\phi} = r^2\dot{\phi} \quad (2.38)$$

Dalle quali otteniamo, sostituendo nella 2.37, che :

$$\dot{r}^2 = E^2 - g\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \quad (2.39)$$

Sostituendo l'espressione per E nella 2.37 possiamo quindi ottenere che vale la seguente :

$$\dot{t} = g^{-1}E \quad (2.40)$$

e dunque otterremo che :

$$\frac{1}{g^2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{g}{E^2} \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \quad (2.41)$$

Potremo quindi ricondurci ad un'espressione del tipo:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \mathcal{E}^2 - U \quad (2.42)$$

Come familiare, con problemi dipendenti dall'inverso del raggio, adoperiamo un cambio di coordinate ponendo $\zeta = r_s/r$ ed $l = L/r_s$ dove utilizziamo r_s in quanto è l'unico parametro adoperato della dimensione di r a nostra disposizione. Ponendo $\sigma = \lambda/r_s$ avremo quindi che :

$$\zeta^{-4} \left(\frac{d\zeta}{d\sigma} \right)^2 = \mathcal{E}^2 - U, \quad U = g(1 + l^2\zeta^2) \quad (2.43)$$

Nel caso particolare della metrica di Schwarzschild avremo poi che $g = 1 - \zeta$. Considerando quindi il potenziale efficace come funzione di queste due variabili. Per un valore fissato di l avremo che $U_{,\zeta} = -1 - 3l^2\zeta^2 + 2l^2\zeta$ che posto uguale a zero fornisce le soluzioni : $\zeta_{\pm}(l) = (1 \pm \sqrt{1 - 3l^{-2}})/3$. Se continuiamo quindi la nostra analisi possiamo calcolare la derivata seconda di U rispetto a ζ :

$$U_{,\zeta\zeta} = 2l^2(1 - 3\zeta) \quad (2.44)$$

tramite la quale è immediato verificare che $U_- := U(\zeta_-)$ è un minimo mentre $U_+ := U(\zeta_+)$ è un massimo. Svolgendo i calcoli otteniamo infatti che :

$$U_{\pm} = \frac{2[l(l^2 + 9 \pm (l^2 - 3)^{3/2})]}{27l} \quad (2.45)$$

Dove è immediato notare come l'unico caso nel quale $U_+ = U_- := U_0$ sia quando $l = \sqrt{3}$. Possiamo infine completare lo studio di funzione sulla U calcolando le altre derivate :

$$U_{,l} = 2(1 - \zeta)l\zeta^2, \quad U_{,ll} = 2(1 - \zeta)\zeta^2, \quad U_{,\zeta l} = 4\zeta l(1 - 3\zeta/2) \quad (2.46)$$

e dunque per un valore di ζ fissato U è monotona crescente per la variabile l . Dunque, qualitativamente, la cattura gravitazionale potrà avvenire solo nel caso in cui $\mathcal{E}^2 > U_+$. Questo nel caso di particelle massive.

Nel caso di particelle non massive, come un fotone, dobbiamo riprendere la 2.37 ed imporre che $2T = 0$. Mediante procedimenti analoghi a quelli precedenti otterremo dunque:

$$\left(\frac{d\left(\frac{r_s}{\zeta}\right)}{\lambda} \right)^2 = E^4 \zeta^{-4} \left(\frac{d\zeta}{d\sigma} \right)^2 = E^2 - gL^2/r^2 = E^2(1 - gl^2\zeta^2) \quad (2.47)$$

A meno di una costante moltiplicativa avremo quindi che $\zeta' := d\zeta/d\sigma = 0$ quando $(1 - g^2l^2\zeta^2) = 0$.

2.5.1 Cattura gravitazionale

Abbiamo osservato come, nel caso del moto di una particella nel campo gravitazionale generato da un buco nero a simmetria sferica, con $\mathcal{E}^2 > U_+$ sia possibile la cattura

gravitazionale. Poiché si tratta sempre semplicemente di svolgere alcuni calcoli lo faremo seguendo anche qui la trattazione di Frolov e Zelnikov [2] . Proviamo quindi a calcolare la sezione trasversale di carruta di un buco nero di Schwarzschild :

$$\sigma(v) = \pi b^2(v) \quad (2.48)$$

dove v è la velocità misurata all'infinito e il momento angolare $L = bp = mr_s l$ dove p è la quantità di moto. Avremo quindi che

$$b = mr_s l / p \quad (2.49)$$

Sostituendo la condizione minima per la cattura gravitazionale $\mathcal{E}^2 = U_+$ nella relazione $\mathcal{E}^2 m^2 = p^2 + m^2$ otteniamo che $p = m\sqrt{1 - U_+}$. Essendo $p = mv/\sqrt{1 - v^2}$ avremo che $\sqrt{U_+ - 1} = v/\sqrt{1 - v^2}$ e quindi dalla 2.49 avremo che :

$$b = \frac{r_s l}{\sqrt{U_+(l) - 1}} = \frac{r_s l(v)\sqrt{1 - v^2}}{v} \implies \sigma = \pi \left(\frac{r_s l(v)\sqrt{1 - v^2}}{v} \right)^2 \quad (2.50)$$

Dato che $U_+ = 1/(1 - v^2)$ utilizzando la 2.45 che ci fornisce U_+ in funzione di l avremo che nel caso di moto ultrarelativistico $v \rightarrow 1$ e $l \rightarrow +\infty$. Sempre dalla 2.45 avremo anche che con $l \rightarrow +\infty$, $U \approx 4l^2/27$. Dunque nel caso ultrarelativistico avremo che :

$$\sigma(v \rightarrow 1) \rightarrow \frac{27}{4} \pi r_s^2 \quad (2.51)$$

Sempre considerando la metrica di Schwarzschild, nel caso della luce, dalla 2.47 avremo che :

$$\zeta' = 0 \iff 1 - l^2 \zeta^2 (1 - \zeta) = 0 \quad (2.52)$$

dalla quale otteniamo $l = 1/\zeta\sqrt{1 - \zeta}$. È quindi abbastanza immediato ricavare il minimo di $l(\zeta)$ che si ha per $\zeta = 2/3$. Il valore di $\zeta' = 0$ rappresenta poi un punto di non ritorno. Infatti per valori positivi di ζ' , e quindi per $l < l_{min}$, avremo che un eventuale raggio di luce si propagherà da $+\infty$ finendo per essere inghiottito dall'orizzonte degli eventi. Per valori di $l > l_{min}$ avremo invece che ci sarà un punto di inversione e il quanto di luce riuscirà a sfuggire all'attrazione gravitazionale del buco nero. Abbiamo quindi ritrovato le superfici che avevamo considerato precedentemente nella 2.29 ovvero : $\mathcal{S}_<$, $\mathcal{S}_=$ e $\mathcal{S}_>$. La superficie $\zeta = 0$ è allora nient'altro che l'orizzonte degli eventi.

Nel caso del fotone avremo poi che $L = bp = Er_s l$ e dunque che $b = r_s l$. Dunque in questo caso avremo che :

$$\sigma_{min} = \pi b^2 = \pi r_s^2 l_{min}^2 = \frac{27}{4} \pi r_s^2 \quad (2.53)$$

come d'altronde ci dovevamo aspettare dato che deve coincidere con la 2.51.

2.6 Redshift nel campo gravitazionale

Il redshift gravitazionale è un particolare fenomeno a cui è soggetta la luce, e più in generale le radiazioni elettromagnetiche, che comporta la perdita di energia da parte di queste ultime in seguito alla fuoriuscita da una buca di potenziale gravitazionale. Il nome redshift è appunto dovuto allo "spostamento verso il rosso" che sta a significare l'incremento della lunghezza d'onda della luce a seguito della diminuzione della frequenza. Anche in relatività generale infatti continua a valere la relazione di Plank-Einstein $E = hf$ che in unità geometrizzate diventa $E = \omega$. Posta λ_e la lunghezza d'onda della sorgente di emissione della luce e λ_o la lunghezza d'onda misurata da un osservatore, il redshift z è in generale definito come :

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} \quad (2.54)$$

Alternativamente il redshift può anche essere descritto mediante la più generale definizione di Weyl. Consideriamo infatti due osservatori distinti le cui linee integrali del moto (o geodesiche) sono γ' e γ . Il redshift z tra i due osservatori è definito da Weyl nel seguente modo :

$$1 + z = \frac{ds'}{ds} \quad (2.55)$$

Dato che il nostro intento sarà alla fine quello di applicare i nostri risultati allo studio dei buchi neri scegliamo quindi una metrica adatta. Nel caso dei buchi neri, come anche di altri oggetti molto massivi, tale scelta, nel caso più semplice, ricade sulla metrica di Schwarzschild. Riscriviamo quindi l'equazione che determina il tensore metrico :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\omega^2, \quad r_s = 2M \quad (2.56)$$

Dove ricordiamo di aver posto $d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Il valore $r = 2M$ è noto come raggio di Schwarzschild e rappresenta la distanza dell'orizzonte degli eventi dal centro del buco nero. Sofferamoci quindi un attimo su questa metrica che abbiamo precedentemente ricavato.

È possibile dimostrare che la 2.56 rappresenta la metrica dello spazio tempo deformato soggetto all'azione gravitazionale di un singolo corpo massivo di massa M . Notiamo quindi che con il limite $r \rightarrow \infty$ la 2.56 tende alla metrica di Minkowski. La metrica 2.56 è poi dotata di due singolarità : $r = \frac{2MG}{c^2}$ ed $r = 0$. Di queste due è possibile dimostrare che la prima è essenzialmente dovuta alla scelta delle coordinate sferiche e quindi eliminabile attraverso un cambiamento di coordinate della varietà riemanniana mediante ad esempio le coordinate di Kruskal¹.

Richiamiamo quindi il fatto che una metrica è chiamata a simmetria sferica se può essere

¹Posto $U = (X^0 - X^1)/\sqrt{2}$ e $V = (X^0 + X^1)/\sqrt{2}$ la metrica di Kruskal è definita nel seguente modo : $ds^2 = 2BdUdV + r^2d\omega^2$ dove $B = B(U,V)$ ed $r = r(U,V)$.

scritta nella forma : $ds^2 = \Omega_{ij}dx^i dx^j + r^2 d\omega^2$, $i, j \in \{1, 2\}$ e $d\omega^2 = w_{kl}dy^k dy^l = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ dove $\Omega_{ij} = \Omega_{ij}(x)$ ed $r = r(x)$. Come dimostrato nel paragrafo sui vettori di Killing in questo caso generale potremo ottenere dalla metrica tre vettori di Killing dati dalle 1.20, 1.21, 1.22. Se osserviamo quindi il caso della metrica di Schwarzschild, e ragioniamo in maniera inversa a quanto fatto per ricavarla (dove avevamo supposto la simmetria sferica), possiamo notare che questa ha effettivamente simmetria sferica come ci attendevamo. Tale metrica presenta poi una caratteristica non propria in generale delle metriche a simmetria sferica; essa è infatti indipendente dal tempo. Più in generale possiamo definire tali metriche nel seguente modo.

Definizione. *Sia (M, g) una varietà riemanniana dotata del tensore metrico g . Diremo che tale metrica è statica se è indipendente dal tempo o, in altre parole, se ammette come vettore di Killing $k\partial_t$, $k \in \mathbb{R}$.*

Essendo la metrica 2.56 indipendente dal tempo sarà quindi lecito affermare che essa è una metrica statica. Oltre al vettore di Killing ∂_t è poi facile individuare anche ∂_ϕ vista l'indipendenza della metrica anche dalla coordinata ϕ .

Se vogliamo ora determinare il redshift gravitazione tra due osservatori nello spazio tempo di Schwarzschild dobbiamo applicare la definizione di Weyl sfruttando la nostra conoscenza del tensore metrico. Dalla 2.56 da 2.55, nel caso in cui entrambi gli osservatori siano al riposo, avremo quindi :

$$1 + z = \frac{ds'}{ds} = \frac{\sqrt{g'_{\alpha\beta}\xi^\alpha(y')\xi^\beta(y')}}{\sqrt{g_{\mu\nu}\xi^\mu(y)\xi^\nu(y)}} = \frac{\sqrt{g'_{tt}}}{\sqrt{g_{tt}}} \quad (2.57)$$

Nell'equazione precedente abbiamo quindi espresso i ds' e i ds mediante i vettori di Killing ξ dato che questi sono sempre tangenti alla world-line sia della sorgente di luce che dell'osservatore poiché la metrica è stazionaria e ammette un $\xi = \partial_t$. Nel caso poi in cui il secondo osservatore, denotato senza indice "''" sia infinitamente lontano dalla sorgente gravitazionale, allora come precedentemente detto la metrica, nel caso dello spazio-tempo di Schwarzschild, tenderà alla metrica di Minkowski. Avremo quindi il noto fattore di redshift di Schwarzschild :

$$\alpha = 1 + z = \sqrt{-g'_{tt}} = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \quad (2.58)$$

Il parametro α rappresenta quindi il fattore che riscalda la frequenza di un fotone emesso f_{em} in un punto a distanza r dal centro della sorgente gravitazionale fornendoci la frequenza misurata f_{oss} da un osservatore all'infinito : $f_{oss} = \alpha f_{em}$. Se osserviamo quest'ultima espressione potremo infine accorgerci di un fatto degno di nota. Per $r \rightarrow r_s$ avremo infatti un "redshift infinito" ($f_{oss} = 0$) e quindi non misureremo nulla. La superficie $r = r_s$ è infatti nota come *superficie di redshift infinito*.

Per esprimere l'equazione precedente mediante i vettori di Killing della metrica proviamo a studiare uno spazio tempo statico, non necessariamente a simmetria sferica, del tipo : $ds^2 = e^{-2U} dt^2 + h_{ij} dy^i dy^j$. Per quanto detto, in tale metrica, essendo lo spazio tempo statico, avremo che il quadrato del vettore di Killing $\xi^2 = \xi_\alpha \xi^\alpha = -e^{2U}$. Poniamo ora $w_\mu = U_{;\mu}$.

Proposizione 1. *In uno spazio tempo statico a simmetria sferica vale la seguente :*

$$\xi_{\mu;\nu} = \xi_\mu w_\nu - \xi_\nu w_\mu \quad (2.59)$$

Dimostrazione. *Notiamo innanzitutto che : $\xi = -e^{2U} \partial_t$. Per la verifica si deve procedere attraverso il calcolo diretto sfruttando la relazione 1.6 tra i simboli di Christoffel e la metrica. Notiamo poi che, vista l'indipendenza di U dalla coordinata temporale (trattandosi di una metrica statica), avremo che la 2.59 si annulla identicamente ogni qualvolta μ e ν sono entrambe contemporaneamente spaziali o temporali. Nei restanti casi, una volta notato che $\Gamma_{0\nu}^0 = U_{;\nu} := w_\nu$, la 2.59 segue banalmente. Ad esempio, nel caso $\mu = 0$ e $\nu \in \{1, 2, 3\}$ avremo che $\xi_{0;\nu} := \xi_{0;\nu} - \Gamma_{0\nu}^0 \xi_0 = 2w_\nu \xi_0 - w_\nu \xi_0$. Essa coincide con la 2.59 poiché, in questo caso, $\xi_\nu = 0$*

È poi possibile provare che, nel caso della metrica stazionaria a simmetria sferica precedentemente considerata, la w coincide con la quadri-accelerazione.

Proposizione 2. *In uno spazio tempo analogo a quello della proposizione precedente, poniamo la quadri-velocità di un osservatore istantaneamente a riposo pari a $u^\mu = dx^\mu/d\tau$. Posto $\alpha = \sqrt{-\xi^2}$ è possibile dimostrare che se $w_\mu = \nabla_\mu \ln \alpha$ allora w non è altro che la quadri-accelerazione ed inoltre $u^\nu_{;\nu} = 0$.*

Dimostrazione. *Possiamo costruire la quadri-velocità di un tale osservatore mediante il vettore di Killing nel seguente modo : $u^\mu = \xi^\mu / |\xi^2|^{1/2} = \xi^\mu / \alpha$. In tal modo avremo infatti che $u^\mu u_\mu = -1$. Sostituendo tale espressione nella 2.59 avremo che :*

$$(\alpha u_\mu)_{;\nu} = \alpha u_\mu w_\nu - \alpha u_\nu w_\mu$$

Da questa, se dividiamo entrambi i membri per α , segue velocemente che :

$$u^\nu u^\mu_{;\nu} = w^\mu$$

Ciò verifica banalmente che w , nel modo da noi definito, coincida con la quadri-accelerazione. Inoltre, per via dell'annullarsi identicamente della 2.59 nel caso in cui $\mu = \nu$, avremo che $u^\nu_{;\nu} = 0$

Dato che i vettori di Killing rappresentano direzioni lungo le quali la metrica è conservata è abbastanza immediato notare un collegamento con il teorema di Noether. Infatti, dato che i vettori di Killing non fanno altro che rappresentare alcune simmetrie della

metrica, essi dovranno essere collegati a delle quantità fisiche conservate.

Poniamoci dunque in una metrica dotata di un qualche vettore di Killing ξ^μ . Sia poi $x^\mu(\lambda)$ la world-line di un raggio di luce, con λ parametro di affinità della curva.

Dimostriamo ora una proprietà importante, trovabile in un contesto più ampio anche sul libro di Frolov e Zelnikov (equazione 3.7.22) [2].

Proposizione 3. *Per un moto lungo una curva geodesica, quindi lungo una curva autoparallela trasportata, la quantità*

$$E^* = u_\mu \xi^\mu$$

è conservata.

Dimostrazione. Avremo infatti che $\frac{dE^*}{d\lambda} = u^\nu (u^\mu \xi_\mu)_{;\nu} = u^\nu u^\mu \xi_{\mu;\nu} + u^\nu \xi_\mu u^\mu_{;\nu}$. Tale espressione si annullerà però identicamente dato che per la definizione di curva geodesica $u^\nu u^\mu_{;\nu} = 0$; se operiamo invece sui dummy indices avremo che $\xi_{\mu;\nu} u^\mu u^\nu = \frac{1}{2}(\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}) u^\mu u^\nu$ che si annulla identicamente per la definizione 1.19 che abbiamo dato sui vettori di Killing.

Ciò ha immediate conseguenze sulle quantità che vengono conservate durante il redshift. Sia infatti u^μ la velocità dell'osservatore e p_μ il momento associato ad un raggio di luce. Dall'equazione per misurare l'energia in relatività ristretta $E = -\eta_{\mu\nu} u^\mu p^\nu$, per il principio di covarianza, in relatività generale avremo immediatamente $E = -u^\mu p_\mu$. Possiamo quindi riconoscere che $E^* = -E$. Nel caso specifico di particella amassiva in uno spazio tempo statico, e quindi con vettore di Killing $\xi = k\partial_t$, se consideriamo quindi un osservatore stazionario (e quindi con opportuna normalizzazione tale che $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$) posto all'infinito spaziale avremo che :

$$E = -\omega = -u^\mu \xi_\mu = \frac{\text{const}}{\sqrt{-g_{tt}}} \quad (2.60)$$

La quantità $\omega\sqrt{-g_{tt}}$ sarà dunque conservata durante il moto.

Capitolo 3

Introduzione alla termodinamica di un buco nero

Nel seguente capitolo ci proponiamo di introdurre ai concetti cardine della termodinamica dei buchi neri partendo dallo studio della metrica di Kerr ed esplorando da questa tutte le analogie fondamentali con la termodinamica classica. Per questo capitolo seguiremo la trattazione di Frolov e Zelnikov [2] evitando però di introdurre calcoli di Quantum Field Theory. Cercheremo, per quanto possibile, di dare delle dimostrazioni facili di concetti generali e in generale non semplici mediante o la riduzione a casi particolari o sfruttando analogie. Dopo aver enunciato i principi della "nuova" termodinamica, seguirà un breve trattazione del problema aperto legato alla teoria dell'informazione e i buchi neri.

3.1 Buchi neri : un'introduzione

I buchi neri sono oggetti fisici predetti dalla teoria della relatività generale di Einstein. Essi sono corpi di massa M la cui dimensione è inferiore, nel caso della metrica di Schwarzschild ad esempio, del raggio gravitazionale $r_s = 2MG/c^2$. Albert Einstein nel 1939, a seguito dello studio di modelli stellari, affermò che le singolarità presenti nella metrica di Schwarzschild non potevano essere reali. Il padre stesso della relatività non nutriva quindi abbastanza fiducia per credere fino in fondo alle predizioni della sua stessa teoria e nel farlo commise un errore. I buchi neri infatti esistono e ad oggi sono avvenute molteplici osservazioni di questi oggetti.

Quello che rende i buchi neri oggetti così intriganti è proprio il fatto che non si possono estrarre direttamente informazioni da questi dato che non si possono "vedere" nell'usuale senso della parola. Non possiamo infatti aspettarci di poter estrarre informazioni da questi oggetti con gli stessi metodi con cui osserviamo ad esempio la luna. Ci troviamo quindi in una situazione simile a quando la luce visibile non era più adatta ad indagare la struttura della materia poiché con lunghezza d'onda troppo grande, con la differenza

che adesso è proprio la luce stessa a non essere più adatta. L'unico strumento che ad oggi ed in un futuro prossimo può infatti portare grandi informazioni su questi oggetti celesti sono le onde gravitazionali ora quantomeno rilevabili grazie a LIGO e VIRGO. Si ritiene che i buchi neri si formino dalle stelle. Queste infatti al loro interno, per "alimentarsi", provocano reazioni nucleari esoenergetiche che portano alla formazione del ferro. Raffreddandosi una volta esaurito "il carburante", dato dai materiali più leggeri, le stelle vanno quindi incontro ad un collasso interno poiché la pressione non è più sufficiente a sostenere la forza gravitazionale che è quindi libera di "rimpicciolire" le dimensioni della stella fino a poterla portare a dimensioni a volte inferiori al raggio gravitazionale stesso. Affinchè ciò avvenga però la massa deve essere tale che la forza gravitazionale vinca la pressione di degenerazione dei componenti interni.

Nella trattazione delle metrica di Schwarzschild (2.56) avevamo anticipato come queste non descrivessero correttamente la superficie determinata dal tendere di r al raggio gravitazionale r_s . Il fattore $g := \sqrt{1 - r/r_s}$ presentava infatti delle problematiche nella parte radiale e nella parte temporale. Sappiamo tuttavia che tale singolarità è solo apparente in quanto può essere eliminata, come anticipato, con un opportuno cambio di coordinate. Cerchiamo quindi di trattare quantomeno l'accelerazione sulla superficie mediante le coordinate di Schwarzschild. L'accelerazione misurata da un osservatore all'infinito che deve essere esercitata per restare fermi sulla superficie $r = r_s$ è detta gravità di superficie κ .

Un osservatore stazionario all'infinito, come già anticipato, può essere descritto mediante il vettore di Killing $\xi^\mu = \partial_t$ e scelto in modo tale che $\xi^\mu \xi_\mu = -1$. Tenendo a mente l'equazione delle curve geodesiche 1.5 avremo che il moto non soggetto ad accelerazioni sarà dato da : $\xi^\nu \nabla_\nu \xi^\mu = 0$. Un risultato diverso da zero implicherebbe infatti un'accelerazione. Potremo quindi definire la gravità di superficie nel seguente modo :

$$(\xi^\nu \nabla_\nu \xi^\mu = \kappa \xi^\mu) \Big|_{r=2M} \quad (3.1)$$

Per non ottenere un'espressione triviale dobbiamo andare a risolvere l'equazione. Nel caso particolare della metrica di Schwarzschild, abbassando gli indici degli ξ^μ e svolgendo i conti avremo che :

$$\xi^\nu (-\Gamma_{\nu\mu}^\sigma \xi_\sigma) = \kappa \xi_\mu$$

Tenendo quindi presente che l'unico termine rilevante risulta essere $\Gamma_{11}^2 = \frac{M(r-2M)}{r^3}$, semplificando i vari termini e calcolando il risultato in $r = 2M$ avremo che :

$$\kappa = \frac{1}{4M} \quad (3.2)$$

3.2 Buchi neri rotanti

Anche a livello intuitivo nulla vieta che i buchi neri siano oggetti rotanti. Anzi, sarebbe abbastanza strano che, a seguito della sua formazione, questo venga prodotto senza una

certa quantità di momento angolare. Se poi questo avvenisse, si può dimostrare che la cattura di un oggetto, dato che questo ruoterà attorno al buco nero compiendo orbite sempre più piccole, non farà altro che incrementare la velocità di rotazione del buco nero stesso. I buchi neri rotanti ci sembrano quindi una descrizione più che giustificata.

La soluzione delle equazioni di campo di Einstein per un buco nero rotante venne trovata "solo" nel 1963 dal fisico e matematico Roy Kerr. Per tale metrica, utilizzando le coordinate di Boyer-Liquidist vige la seguente equazione :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{4Mra \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{A \sin^2 \theta}{\Sigma} d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \quad (3.3)$$

dove abbiamo che :

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad A = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta \quad (3.4)$$

Com'è possibile notare tale metrica non dipende esplicitamente dai parametri t e ϕ ed ammetterà dunque due vettori di Killing che richiediamo anche essere commutanti. Per comprendere che cosa significhino i vari parametri possiamo provare a scrivere la metrica nel limite $r \rightarrow \infty$. In questo modo otteniamo :

$$ds^2 \approx - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 - \frac{4Mra \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (3.5)$$

Da queste sfruttando le varie analogie con la metrica di Schwarzschild possiamo concludere che M è la massa del corpo e $J = aM$ è il momento angolare. Il parametro a è poi noto come parametro di rotazione ed ha le stesse dimensioni di M . Con l'annullarsi di questo la metrica di Kerr si riduce quindi alla metrica di Schwarzschild.

Dalla forma della 3.5 è facile notare che il vettore di Killing temporale ξ_t è tale che $\xi_t^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right)$. Se proviamo quindi a calcolare quale sia la superficie di redshift infinito, facendo riferimento alla 2.57 dovremo imporre $g_{tt} = 0$, o allo stesso modo, $\xi^2 = 0$. Avremo quindi che :

$$r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta = 0 \quad (3.6)$$

Risolvendo tale equazione troviamo quindi due valori possibili di r che chiameremo r_{\pm} . Essi sono banalmente dati dalla seguente :

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (3.7)$$

Per tali valori avremo quindi due superfici di redshift infinito. Una semplice analisi dei segni porta poi alla conclusione che $g_{tt} \geq 0$ nella regione per cui $r \in [r_-, r_+]$ e $g_{tt} < 0$ nel resto dello spazio. Tale equazione determina quindi una superficie nota con il nome di *ergosuperficie*. In assenza di rotazione, e quindi del parametro a , tale superficie coincide con l'orizzonte degli eventi della metrica di Schwarzschild ($r = 2M$). Nel caso della metrica di Kerr ciò non è però vero. Per dimostrare che la ergosuperficie non rappresenta

infatti un orizzonte degli eventi è solamente necessario notare che un vettore normale a tale superficie è del tipo time-like e quindi non può rappresentare l'orizzonte degli eventi. Equivalentemente, in base alle notazioni introdotte precedentemente, possiamo affermare che una superficie del tipo $\mathcal{S}_>$, per definizione, non può essere un orizzonte in quanti attraversabile in entrambe le direzioni.

Per capire che cosa rappresenti l'ergosuperficie scriviamo quindi la quadrivelocità normalizzata a -1 di una particella in moto ad r e θ costanti attorno al buco nero di Kerr. Essa sarà della forma $u^\mu = (u^t, 0, 0, u^\phi)$. Ora se la velocità angolare dell'osservatore stazionario all'orbita circolare è $\omega = d\phi/dt$ allora potremo imporre che $u^\phi = \omega u^t$. Imponendo quindi anche la condizione di normalizzazione troveremo che la velocità è esprimibile nel seguente modo :

$$u^\mu = \frac{\eta^\mu}{|\eta^2|^{1/2}}, \quad \eta^\mu = \xi_t^\mu + \omega \xi_\phi^\mu \quad (3.8)$$

Imponendo ora la condizione $u^2 = 0$ avremo che $\xi_t^2 + 2\omega(\xi_t, \xi_\phi) + \omega^2 \xi_\phi^2 = 0$. Utilizzando il tensore metrico, al posto dei quadrati dei vettori di Killing, otteniamo i seguenti valori risolutivi per ω :

$$\omega_\pm = \frac{-g_{t\phi} \pm \sqrt{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}}{g_{\phi\phi}} \quad (3.9)$$

con la condizione che l'espressione sotto radice sia maggiore di zero. Mediante la metrica di Kerr tale espressione può essere riscritta come :

$$g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi} = \Delta \sin^2 \theta \quad (3.10)$$

Dunque avremo due soluzioni reali per ω nel solo caso in cui $\Delta > 0$.

Avendo quindi trovato le soluzioni per cui $u^2 = 0$ potremo affermare che la velocità u sarà del tipo time-like nell'intervallo compreso tra i due valori di ω_\pm .

La sezione compresa tra la superficie di redshift infinito e la superficie determinata da $\Delta = 0$ è quindi chiamata ergosfera. È facile dimostrare, semplicemente svolgendo i calcoli, che tale superficie è determinata dall'equazione $g_{tt} = 0$. Inserendo tale soluzione nella 3.9 otteniamo due soluzioni di cui una nulla. Quest'ultima è molto importante a livello fisico perché rappresenta il punto di inversione del moto. Dopo questa superficie, con valori di $g_{tt} > 0$, come possibile vedere dalla 3.10, un ipotetico fotone rotante attorno al buco nero di Kerr sarà obbligato a muoversi con velocità radiale dello stesso segno della velocità radiale del buco nero, ovvero con lo stesso segno del parametro a . Dalla 3.9 avremo infatti che solo se $g_{tt} < 0$ allora può sussistere $\omega_\pm > 0$. Dentro la ergosfera dunque le particelle potranno avere velocità radiali sia positive che negative ma dovranno necessariamente ruotare nello stesso verso del buco nero con velocità angolari comprese tra ω_- e ω_+ (entrambe maggiori di zero).

Poniamoci adesso proprio sulla superficie tale che $\Delta = 0$. Questa rappresenta il punto in cui l'intervallo permesso di velocità angolari si è ristretto ad un punto e precisamente

al valore di :

$$\omega_{\pm} = \Omega = \frac{-g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} = \frac{a}{r_{\pm}^2 + a^2} \quad (3.11)$$

Per i calcoli svolti precedentemente avremo quindi che il quadrato del vettore di Killing $\eta^{\mu} = \xi_t^{\mu} + \Omega \xi_{\phi}^{\mu}$ si annullerà identicamente su tale superficie nota come *orizzonte di Killing*. Tale orizzonte sarà univocamente determinato dalla soluzione r_{\pm} dell'equazione in r : $\Delta(r) = 0$. Avremo quindi :

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad (3.12)$$

con la condizione quindi che $M \geq a$ (in caso contrario avremmo infatti una singolarità nuda). Se osserviamo la 3.12 possiamo poi notare che, nel caso della metrica di Kerr e a differenza di quella di Schwarzschild, l'orizzonte degli eventi non coincide in generale con la superficie di redshift infinito. Da un confronto con l'equazione 3.7 avremo infatti tale coincidenza solo nel caso in cui $\theta = 0, \pi$. Ricapitolando dunque la superficie esterna di redshift infinito è più esterna dell'orizzonte degli eventi eccetto nei punti per cui $\theta = 0, \pi$ nei quali tali superfici sono tangenti. Lo spazio tra tali superfici, come detto, è chiamato ergosfera e a volte anche ergoregione.

Ai fini di studiare i buchi neri rotanti dobbiamo ora studiare gli integrali del moto di particelle che entrano l'orbita di tali oggetti. La nostra conoscenza di essi infatti, dato che è impossibile estrarre informazioni da una zona oltre l'orizzonte degli eventi, può solo dipendere (eccetto che da onde gravitazionali) da ipotetiche particelle che partendo dall'infinito, entrano nella loro orbita, e tornano all'infinito. Lo studio di tale moto è poi molto importante per un effetto, chiamato effetto Penrose, che può avvenire proprio durante il periodo di avvicinamento al buco nero. Andiamo però per gradi.

Ai fini di semplificare il nostro studio assumeremo orbite che giacciono sul piano equatoriale ($\theta = \pi/2$). Se a tale condizione iniziale aggiungiamo infatti che la particella abbia $\dot{\theta} = 0$ allora, dato che la metrica non dipenderà più esplicitamente da θ , il moto rimarrà confinato al piano equatoriale in maniera simile a quanto visto precedentemente mediante la 2.33. Su di esso, sfruttando la conoscenza dei vettori di Killing, avremo che l'energia E ed il momento angolare L saranno dati da :

$$E = -\xi_{(t)\mu} p^{\mu} = -g_{tt}\dot{t} - g_{t\phi}\dot{\phi}, \quad L = \xi_{(\phi)\mu} p^{\mu} = g_{t\phi}\dot{t} + g_{\phi\phi}\dot{\phi} \quad (3.13)$$

Utilizzando poi la quantità di moto normalizzata $g_{\mu\nu} p^{\mu} p^{\nu} = -m^2$ insieme alle equazioni 3.13 avremo un sistema a 3 incognite che se risolto fornisce i seguenti risultati :

$$\dot{r} = \pm r^{-3/2} \sqrt{E^2 (r^3 + a^2 r + 2a^2 M) - 4aME L - (r - 2M)L^2 - m^2 r \Delta} \quad (3.14)$$

$$\dot{\phi} = \frac{(r - 2M)L + 2aME}{r \Delta} \quad (3.15)$$

$$\dot{t} = \frac{Er(r^2 + a^2) - 2aM(L - aE)}{r \Delta} \quad (3.16)$$

Dalla 3.14 è quindi immediato che \dot{r} abbia un punto di inversione del moto quando l'argomento sotto radice si annulla. Imponendo tale uguaglianza a zero avremo un'equazione di secondo grado per la variabile E che se risolta porta a due soluzioni V_{\pm} tali che :

$$V_{\pm} = \frac{2aML \pm \sqrt{W^2}}{r^3 + a^2r + 2a^2M} \quad (3.17)$$

dove abbiamo posto :

$$W^2 = rm^2 \left(r^3 + \left(\left(\frac{L}{m} \right)^2 + a^2 \right) r + 2a^2M \right) \Delta$$

Dato che la quantità sotto radice della 3.14 deve essere maggiore o uguale di zero il moto sarà possibile solo nel caso in cui $E \leq V_-$ oppure $E \geq V_+$. Notando infine che $V_{\pm}(r \rightarrow \infty) = \pm 1$ potremo affermare che una ipotetica particella con energia positiva riuscirà a "scappare" dall'attrazione gravitazionale se e solo se la sua energia è maggiore del valore della sua massa. Soffermiamoci quindi sul caso $\Delta = 0$ che avevamo precedentemente studiato.

Osserviamo ora l'equazione 3.17. Una soluzione energetica con valori negativi può essere permessa (ma anche non esserlo) se $L < 0$ e $|2aML| > \sqrt{W}$. Tali soluzioni possono però esistere solo all'interno dell'ergosfera. In tale regione dello spazio infatti il vettore di Killing ξ_t , per via del cambio di segno di g_{tt} , non è più time-like e quindi l'energia $E = -p_{\mu}\xi_t^{\mu}$ può essere sia positiva che negativa. L'energia potrebbe essere dunque negativa non solo sul piano $\theta = \pi/2$ ma anche in tutta la regione dello spazio dell'ergosfera. Per via di questa caratteristica, propria della metrica di Kerr, di possedere un'ergosfera per via della non coincidenza dell'orizzonte degli eventi con la superficie di redshift infinito, è possibile parlare di effetto Penrose.

Consideriamo quindi una particella 1 con energia E_1 che entra nell'ergosfera e qui dentro decade in due particelle : la particella 2 e la particella 3. Siano ora queste tali che $E_2 < 0$. La particella 2 sarà quindi inglobata dal buco nero mentre la particella 3 tornerà all'infinito con un'energia maggiore della particella di partenza. In questo processo è stata quindi estratta dal buco nero un'energia pari a $E_3 - E_1$. Se accettiamo che tale processo possa avvenire, allora, almeno in linea teorica, i buchi neri potrebbero essere fonti di energia. Data la difficoltà di trattare con tali oggetti, tale possibilità rimane comunque solo a livello teorico e speculativo. Proviamo ora a trattare in maggior dettaglio il processo di Penrose.

Nel decadimento della particella 1 nelle particelle 2 e 3 dovremo imporre la conservazione del momento : $p_1 = p_2 + p_3$. Come prima assumiamo che sia la particella 2 quella ad essere prodotta con energia negativa e venire quindi risucchiata dentro l'orizzonte degli eventi. Per quanto detto precedentemente il vettore di Killing sull'orizzonte del buco nero con velocità angolare Ω (dalla 3.11) sarà $l^{\mu} = \xi_t^{\mu} + \Omega\xi_{\phi}^{\mu}$ e come detto sarà null-like ovvero tale che $l^2 = 0$. Ora, dato che il prodotto scalare tra un vettore di tipo null-like

e un vettore di tipo time-like è minore di zero, allora, denotando con j_2 il momento angolare lungo ϕ della particella 2, avremo che :

$$0 \geq l^\mu p_{2\mu} = -E_2 + j_2\Omega \quad (3.18)$$

da cui segue che $j_1 - j_3 = j_2 \leq E_2/\Omega$. Di conseguenza avremo che l'estrazione di energia implicherà irrimediabilmente estrazione di momento angolare. Dopo aver inglobato dentro di sé la particella 2 dunque il buco nero avrà registrato una perdita di energia e quindi di massa pari a $\delta M = E_2$ ed una perdita di quantità di moto pari a $\delta J = j_2$. Dalla queste ultime e dalla relazione 3.18 seguirà quindi la relazione fondamentale :

$$\delta M \geq \Omega \delta J \quad (3.19)$$

Tale relazione è la prima relazione pseudo-termodinamica che incontriamo. Essa parla infatti di un processo, a seguito del quale, abbiamo un cambiamento di una certa quantità che al massimo, nel caso che potremmo chiamare reversibile (?), coinciderà con una quantità e nel resto dei casi sarà maggiore di quest'ultima. Il punto interrogativo posto tra parentesi non è stato messo a caso. Fino adesso infatti tale ragionamento non riesce ancora a fare intravedere come mai potremmo davvero chiamare reversibile tale processo. In termodinamica chiamavamo infatti reversibile un processo a seguito del quale l'entropia totale dell'universo non aumentava. Intuitivamente quindi possiamo pensare che tale quantità, collegata ai buchi neri, sia direttamente proporzionale al fattore $\delta M - \Omega \delta J$. Tale fattore sarebbe infatti sempre positivo e al più nullo nel caso in cui $\delta M - \Omega \delta J = 0$. In tal caso avrebbe senso parlare di processo reversibile.

La nostra ricerca si direziona quindi verso una quantità la cui variazione sia sempre positiva e che presumibilmente, almeno nel caso di Kerr, sia dipendente dal fattore $\delta M - \Omega \delta J$. A priori non vi è un modo diretto per identificare tale quantità. I parametri che caratterizzano il buco nero di Kerr non sono però molti. Tra questi vi è l'area di superficie. Proviamo quindi a calcolarla.

Dovremo valutare la radice del determinante della parte angolare (θ e ϕ) del tensore metrico e quindi $\sqrt{\det|g_{ang}|}$. L'elemento di area infinitesimo sarà infatti dato da : $d\mathcal{A} = \sqrt{\det|g_{ang}|}d\theta d\phi$. Svolgendo i calcoli sull'orizzonte degli eventi avremo che $r = r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$ e quindi seguendo anche l'esempio 1.26:

$$\begin{aligned} d\mathcal{A} &= \sqrt{\det g_{ang}}d\theta d\phi \\ &= \sqrt{(r_+^2 + a^2 \cos^2 \theta) \left(r_+^2 + a^2 + \frac{2Mr_+a^2 \sin^2 \theta}{r_+^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right)} \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \sqrt{(r_+^2 + a^2 \cos^2 \theta) (r_+^2 + a^2) + 2Mr_+a^2 (1 - \cos^2 \theta)} \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \sqrt{(r_+^4 + a^2r_+^2 + 2Mr_+a^2) + a^2 (r_+^2 - 2Mr_+ + a^2) \cos^2 \theta} \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

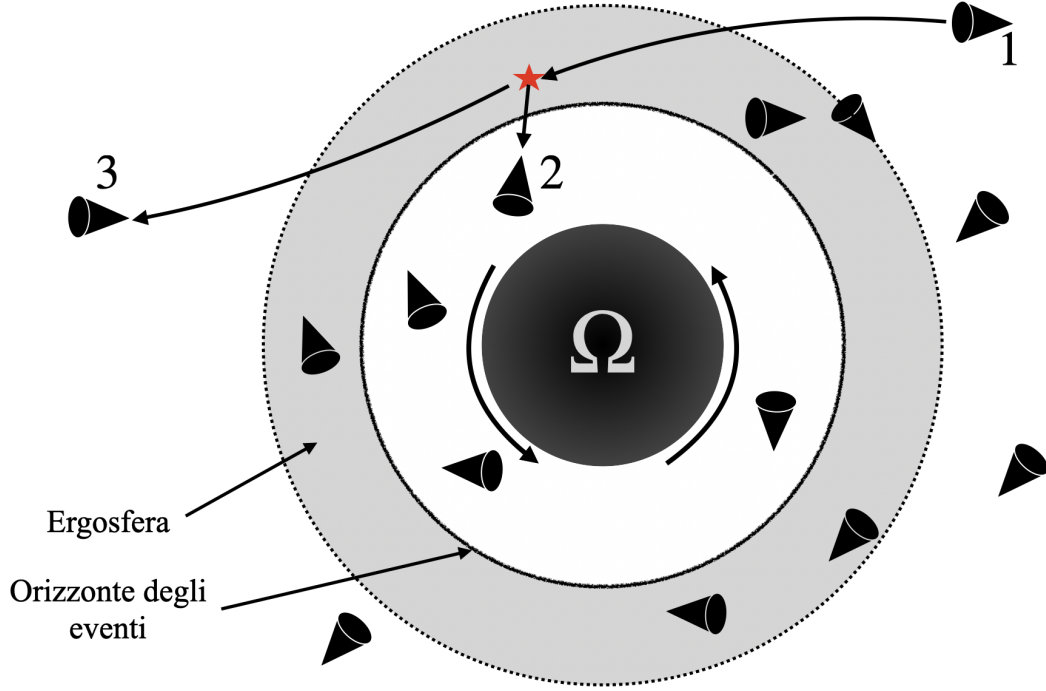


Figura 3.1: E' mostrata la traiettoria, con coni luce, di una particella che entra nell'ergosfera di un Buco nero di Kerr ed è soggetta all'effetto Penrose. Per maggiore chiarezza grafica non si è disegnata l'ergosfera tangente all'orizzonte degli eventi nei poli

la quale andando a sostituire l'espressione per r_+ si riduce a : $(r_+^2 + a^2) \sin \theta d\theta d\phi$. Integrando le variabili angolari otterremo infine :

$$\mathcal{A} = 4\pi(r_+^2 + a^2) \quad (3.20)$$

Se esplicitiamo il fattore r_+ , tenendo conto che $J = Ma$, potremo quindi scrivere $\mathcal{A} = 8\pi M r_+ = 8\pi (M^2 + \sqrt{M^4 - J^2})$. Differenziando il differenziale di area rispetto alla massa M otterremo quindi :

$$\delta\mathcal{A} = 16\pi M \delta M + \frac{16\pi M^3 \delta M}{\sqrt{M^4 - a^2 M^2}} - \frac{8\pi a^2 M \delta M}{\sqrt{M^4 - a^2 M^2}} \quad (3.21)$$

Se ora notiamo che l'ultimo termine , sfruttando l'identità $\frac{2Mr_+}{a} = \Omega^{-1}$, può essere riscritto come :

$$\begin{aligned} \frac{-8\pi a \delta J}{r_+ - M} &= \frac{-8\pi a \delta J}{r_+ - M} \frac{2Mr_+}{a} \Omega = -16\pi \Omega \delta J \frac{Mr_+}{r_+ - M} = \\ &= -16\pi \Omega \delta J \frac{M (M + \sqrt{M^2 - a^2})}{\sqrt{M^2 - a^2}} = -16\pi \Omega \delta J \left(\frac{M^3}{\sqrt{M^4 - a^2 M^2}} + M \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Sostituendo la 3.22 nella 3.21 avremo quindi la seguente :

$$\delta\mathcal{A} = 16\pi \left(M + \frac{M^3}{\sqrt{M^4 - J^2}} \right) (\delta M - \Omega\delta J) \geq 0 \quad (3.23)$$

Abbiamo quindi trovato una quantità, precisamente l'area dell'orizzonte degli eventi, la cui variazione dipende direttamente dalla quantità $\delta M - \Omega\delta J$. Facendo riferimento quindi alla 3.19 potremo affermare che in un generico processo la superficie dell'orizzonte degli eventi non potrà far altro che aumentare, al più potrà rimanere immutata. È ora naturale vedere un collegamento tra tale quantità e l'entropia.

Quello che abbiamo dimostrato non è altro che il caso particolare del Teorema di Hawking sull'area di un buco nero. Esso recita nel seguente modo :

Teorema 1. *Sia \mathcal{A} l'area di un buco nero in uno spazio tempo privo di singolarità visibili dall'infinito. Se le condizioni di energia debole sono soddisfatte la superficie del buco nero è una funzione non decrescente nel tempo.*

In conclusione vogliamo notare un'ultima analogia che può essere estrapolata dalla 3.21. Il differenziale di variazione di area può infatti darci la variazione del termine di massa:

$$\delta M = \Omega \delta J + \frac{\kappa}{8\pi} \delta\mathcal{A}, \quad \kappa = \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{r_+^2 + a^2} \quad (3.24)$$

A priori non c'è modo di intuire che cosa sia κ . Di nuovo, tuttavia, le quantità caratteristiche del buco nero sono poche e possiamo infatti mostrare come tale parametro coincida con la gravità di superficie della metrica di Kerr all'orizzonte individuato da $\Delta = 0$. Per calcolarlo è conveniente notare che la condizione di gravità di superficie è anche riscrivibile, utilizzando la definizione di vettore di Killing, come $\nabla_\nu(-\xi^\mu\xi_\mu) = 2\kappa\xi_\mu$. Dato che abbiamo che :

$$\xi^\mu\xi_\mu = \frac{A}{\Sigma} \sin^2\theta \left(\Omega - \frac{2Mar}{A} \right)^2 - \frac{\Sigma}{A} \Delta \quad (3.25)$$

derivando e valutando nel punto $\Delta = 0$ il primo termine scomparirà dato che l'equazione tra parentesi annullerà la derivata e rimarremo con l'equazione : $\nabla_\nu(-\xi^\mu\xi_\mu) = (\Sigma/A)\nabla_\nu\Delta$ dalla quale otterremo l'espressione di κ visibile nella 3.24.

3.2.1 Buchi neri rotanti carichi

Torniamo ora a considerare la metrica 3.5. Oltre a tale soluzione delle equazioni di Einstein ne esiste anche un'altra, molto simile, che considera però il caso in cui il buco nero sia carico con carica Q localizzata sulla superficie. Introducendo tale parametro la metrica di Kerr si modifica leggermente fornendoci le soluzioni per un buco nero rotante

e carico. La metrica in questo caso prende il nome di Kerr-Newmann e ha la seguente forma :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{(2Mr - Q^2)2a \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{A \sin^2 \theta}{\Sigma} d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \quad (3.26)$$

dove stavolta abbiamo le seguenti espressioni :

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2, \quad A = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta \quad (3.27)$$

In modo analogo al caso precedente possiamo trovare che la soluzione r_+ per l'orizzonte degli eventi, stavolta denotata tramite r_+^* , assumerà il valore di :

$$r_+^* = M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} \quad (3.28)$$

e la superficie dell'orizzonte degli eventi utilizzando questa soluzione avrà una formula analoga al caso precedente :

$$\mathcal{A} = 4\pi \sqrt{(r_+^*)^2 + a^2} \quad (3.29)$$

Come lecito aspettarsi tali soluzioni si riducono identicamente al caso della metrica di Kerr se poniamo la carica Q pari a zero. Si può poi dimostrare [2] che il quadripotenziale A relativo al buco nero carico soddisfa la seguente :

$$A_\alpha dx^\alpha = -\frac{Qr}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\phi) \quad (3.30)$$

Con calcoli del tutto analoghi al caso precedente con la metrica di Kerr possiamo quindi generalizzare i risultati ottenuti. Considerando sempre il vettore di Killing sull'orizzonte $l^\mu = \partial_t + \Omega \partial_\phi$. Allora il potenziale elettrostatico di una particella carica sull'orizzonte sarà:

$$\Phi = -A_\mu l^\mu = -(A_t + \Omega A_\phi)|_{r=r_+^*} = \frac{Qr_+^*}{(r_+^*)^2 + a^2} \quad (3.31)$$

La relazione 3.19 nel caso del buco nero carico rotante si trasforma quindi nella seguente più generale :

$$\delta M \geq \Omega \delta J + \Phi \delta Q \quad (3.32)$$

dove chiaramente δQ rappresenta l'incremento (o decremento) di carica portato da una particella che viene inglobata dall'orizzonte degli eventi. Ingenuamente si potrebbe pensare che la variazione di massa del buco nero in questo modo sia sempre e soltanto positiva. Tuttavia proviamo a svolgere i conti per realizzare meglio se questo sia vero oppure no. Consideriamo quindi il caso dei fotoni. Per maggiore similitudine con le formule di meccanica quantistica, trattandosi di una disuguaglianza, possiamo abbandonare l'uso delle coordinate geometrizzate. Come noto quindi dalla meccanica quantistica l'energia portata dai fotoni è $\epsilon = \hbar\omega$ mentre la quantità di moto p è semplicemente data

da un multiplo intero m della costante di Plank : $p = \hbar\omega$. La 3.32 può quindi essere riscritta come :

$$\frac{\delta M}{\hbar\omega}(\hbar\omega - \hbar m\Omega - e\Phi) \geq 0 \quad (3.33)$$

Avremo quindi che se $\hbar\omega \leq \hbar m\Omega + e\Phi$ allora la variazione di massa δM del buco nero sarà minore di zero proprio come nel caso dell'effetto Penrose . Tale effetto può infatti essere ricondotto [2] ad un'interazione del campo elettromagnetico con il buco nero che risulta in "un'amplificazione" dell'onda scatterata rispetto a quella incidente con conseguente estrazione energetica dal buco nero. In particolare, non potendo esserci effetti sulla frequenza dell'onda, tale interazione provocherà l'aumento dell'ampiezza di quest'ultima. Tale effetto è noto con il nome di super-radianza. Concludiamo quindi il paragrafo di generalizzazione dei risultati precedenti al caso dei buchi neri carichi riportando l'analogo del teorema di Hawking sull'area 3.24 nel caso della metrica di Kerr-Newmann nel caso "reversibile" :

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta \mathcal{A} + \Omega \delta J + \Phi \delta Q, \quad \kappa = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}}{(r_+^*)^2 + a^2} \quad (3.34)$$

3.3 Temperatura di Tolman

In meccanica statistica è una dimostrazione standard mostrare il fatto che per un gas di fotoni la pressione equivalga a un terzo della densità di energia : $P = 1/3\rho$. L'annullarsi della 2.14 prenderà dunque, in questo caso, la seguente forma :

$$P_{;\mu} = -4\rho w_\mu \quad (3.35)$$

Come studiato nel capitolo precedente il fattore di redshift α può essere espresso mediante i vettori di Killing della metrica. In particolare, nel caso di una metrica statica a simmetria sferica avremo che $\alpha = \sqrt{-g_{tt}}$. Ricordandoci poi che, come dimostrato nella proposizione 2 nel capitolo precedente, che $w_\mu = \nabla_\mu \ln \alpha$, avremo allora che se integriamo rispetto ad r seguirà la relazione $\rho = c/\alpha^4$. È poi un fatto noto che, sempre dalla meccanica statistica, la teoria della radiazione di corpo nero afferma che la densità energetica ρ è proporzionale alla quarta potenza della temperatura Θ . Sostituendo nell'equazione appena integrata avremo immediatamente che :

$$\alpha^4 \Theta^4 = c \implies \alpha \Theta = \text{const} := \Theta_0 \quad (3.36)$$

Nel caso particolare della metrica di Schwarzschild da noi analizzato avevamo notato che all'infinito spaziale, e quindi a una distanza infinitamente grande dalla sorgente gravitazionale, il tensore metrico tenderà a quello di Minkowski. Perciò il parametro α all'infinito tenderà a nient'altro che a $\sqrt{1}$. Possiamo quindi affermare che Θ_0 non è nient'altro che la temperatura misurata all'infinito spaziale.

Tale fatto non deve però stupirci. Avevamo infatti dimostrato nell'equazione 2.60 che

l'energia "redshiftata" $\omega\alpha$ del fotone rimaneva costante. È però un fatto noto che in un gas di fotoni sussista una relazione simile a quella dei gas perfetti : $U/3 = PV = c_1 NkT$, dove c_1 è una costante moltiplicativa. Dunque l'energia ω di ogni singolo fotone è direttamente proporzionale alla temperatura mediante un'altra costante moltiplicativa. Dunque, dato che $\alpha\omega$ è costante, anche $\alpha\Theta$ lo è. Muovendosi dunque in una zona dello spazio-tempo con un valore inferiore del parametro α la temperatura misurata aumenterà subendo il cosiddetto bluishift. Un altro argomento può essere quindi portato a sostegno di questa tesi. Se il bluishift non avvenisse andremmo incontro ad un problema dato che il fotone non potrebbe più essere in equilibrio termico con gli altri fotoni. Se associamo infatti il valore dell'energia ad una certa funzione della temperatura tale che $dE/d\Theta > 0$, il fatto che l'energia cambi nello spazio-tempo non deve sorprenderci né più né meno del fatto che il fotone subisca un redshift/bluishift.

Ribadiamo infine il fatto che essendo $\alpha = \sqrt{-g_{00}(r)}$ la temperatura misurata dipenderà di osservatore in osservatore :

$$\Theta(r) = \Theta_0 \sqrt{-g_{00}(r)} \quad (3.37)$$

Tutti concorderanno però sulla temperatura misurata all'infinito spaziale.

3.4 Buco nero in bagno fotonico

Viste le analogie dei buchi neri di Kerr con la termodinamica vogliamo ora cercare di approfondire i collegamenti termici studiando i buchi neri in un bagno termico di fotoni. Se proviamo però ad applicare la formula di Tolman ai buchi neri incorriamo in un primo problema : il fattore di redshift svanisce identicamente sulla superficie di redshift infinito e ci lascia quindi con una temperatura che, nel caso della metrica di Schwarzschild, diverge verso infinito. Ciò non è chiaramente un valore fisicamente possibile.

Consideriamo quindi un buco nero in un bagno termico di fotoni non interagenti con temperatura Θ_0 all'infinito. Come noto dalla meccanica statistica il numero di stati in un guscio sottile di spessore dk nello spazio degli impulsi sarà dato da :

$$dN = g \frac{4\pi k^2 dk}{\frac{(2\pi)^3}{V}} = V \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2} \quad (3.38)$$

Utilizzando la distribuzione di Bose-Einstein potremo quindi esprimere il numero di fotoni con energia compresa tra ω e $\omega + d\omega$:

$$N(\omega)d\omega = g \frac{V\omega^2}{\pi^2} \frac{1}{e^{\omega/\Theta}} \quad (3.39)$$

Se vogliamo capire come si comportino i fotoni del bagno termico quando passano vicino alla superficie del buco nero conviene considerare un guscio sferico di spessore ΔR determinato da due sfere di raggio R ed $R + \Delta R$. La condizione per cui un fotone in tale

regione venga assorbito è che l'angolo θ determinato dalla direzione di moto del fotone e la normale verso il centro del buco nero sia compreso tra 0 e θ^* dove, facendo riferimento alla 2.53 :

$$\sin \theta^* = b = r_s l_{min} = \frac{3\sqrt{3}}{2} r_s \quad (3.40)$$

che per piccoli angoli (quando $R \gg r_s$) può essere approssimata fornendoci la seguente :

$$\theta^* = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{r_s}{R} \quad (3.41)$$

Dato che per i fotoni l'energia non è altro che ω conseguentemente, come noto, la densità energetica spettrale sarà data da :

$$u(\omega) = \frac{1}{\pi^2} \frac{\omega^3}{e^{\omega/\Theta_0} - 1} \quad (3.42)$$

Dunque l'energia ΔE portata dai fotoni e assorbita dal buco nero nel bagno termico sarà semplicemente data integrando l'angolo θ nei limiti opportuni e calcolando la densità di energia totale integrando $u(\omega)$ su tutto il range delle frequenze. Avremo quindi :

$$\Delta E = R^2 \Delta R \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta^*} \sin \theta d\theta \int_0^\infty u(\omega) d\omega \quad (3.43)$$

Se come prima cosa calcoliamo l'ultimo integrale avremo che :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{\pi^2} \frac{\omega^4}{e^{\omega/\Theta_0} - 1} d\omega &= \frac{\Theta_0^4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{x^3 e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{\Theta_0^4}{\pi^2} \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty x^3 e^{-(n+1)x} dx \\ &= \frac{\Theta_0^4}{\pi^2} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^{3+1}} \int_0^\infty y^3 e^{-y} dy \\ &= \frac{\Theta_0^4}{\pi^2} \Gamma(3+1) \zeta(3+1) = \frac{\Theta_0^4}{\pi^2} \frac{\pi^4}{15} = \frac{\Theta_0^4 \pi^2}{15} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Utilizzando la 3.41 potremo infine valutare l'integrale su θ . Qui, molto semplicemente, avremo che :

$$\int_0^{\theta^*} \sin \theta d\theta \approx \frac{(\theta^*)^2}{2} = \frac{27}{8} \left(\frac{r_s}{R} \right)^2 \quad (3.45)$$

Ora, dato che l'angolo θ è molto piccolo, potremo approssimare le traiettorie dei fotoni assorbiti come parallele alla normale verso il centro del buco nero ottenendo l'uguaglianza tra i differenziali di spazio ΔR e di tempo Δt . Inserendo le soluzioni 3.44 e 3.45 nella 3.43 e differenziando rispetto al tempo avremo infine :

$$\dot{E} = \frac{9}{20} \pi^3 r_s^2 \Theta_0^4 = 27 \pi \sigma r_s^2 \Theta_0^4 \quad (3.46)$$

dove $\sigma = \frac{\pi^2}{60}$ non è altro che la costante di Stefan–Boltzmann in unità geometrizzate. Tale formula sembra dunque ricalcare, a meno di una costante moltiplicativa, la formula di emissione di energia da un corpo nero. L'unica differenza è però che in quest'ultimo caso l'energia non sarà emessa ma assorbita.

È chiaro che stiamo iniziando ad accumulare molte similitudini tra la termodinamica statistica e la trattazione dei buchi neri. Tutte queste similitudini non sono infatti un caso. Una volta che avremo trattato le più note analogie tra buchi neri e termodinamica potremo quindi enunciare quelle che sono le leggi della termodinamica dei buchi neri.

3.5 Effetto Unruh

L'effetto Unruh è un particolare fenomeno in fisica che afferma come un osservatore accelerato nello spazio tempo vuoto di Minkowski osservi sé stesso come "immerso in un bagno termico" (Unruh and Wald [9]) di temperatura non nulla ma pari a :

$$\Theta_U = \frac{a}{2\pi} \frac{\hbar}{k_B c} \quad (3.47)$$

dove il parametro a rappresenta l'accelerazione del corpo e, chiaramente, k_B è la costante di Boltzmann. La domanda che dovrebbe sorgere spontanea è come si possa rilevare della temperatura se lo spazio è vuoto. Classicamente sarebbe infatti impossibile. Il vuoto tuttavia, in meccanica quantistica, non è altro che lo stato quantico con l'autovalore energetico più basso.

La prova rigorosa di tale effetto prevederebbe molti calcoli di Quantum Field Theory e ciò fuorvierebbe dallo scopo di questo capitolo che mira solamente a introdurre l'effetto. Per non lasciare però tale effetto indimostrato opteremo quindi per una via intermedia sfruttando un'analogia tra meccanica quantistica e meccanica statistica.

Nella formulazione di Schroedinger della meccanica quantistica l'operatore hamiltoniano H genera l'evoluzione temporale degli stati quantici. Se un certo stato quantico è indipendente dal tempo avremo poi che sussisterà la seguente relazione :

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\psi(0)\rangle \quad (3.48)$$

Se ora operiamo la sostituzione $\tau = it$ potremo riscrivere la prima parte del membro di destra come $e^{-H\tau/\hbar}$. La parte, se vogliamo, "poco rigorosa" consiste proprio adesso nel notare la somiglianza tra questa equazione e la quella della meccanica statistica $e^{-\beta H}$. Che tale relazione possa sussistere non deve però stupirci. La meccanica quantistica è infatti collegata a doppio filo con la meccanica statistica dato che gli ensemble di una particella quantistica non sono altro che ensemble statistici. Una volta ammessa tale relazione potremo quindi scrivere $\beta = \tau$. È poi un fatto noto della meccanica statistica che $\beta = 1/\Theta$. Quello che ci manca ora è solamente inserire in tale ragionamento lo

spazio tempo di Minkowski visto da un osservatore accelerato : lo spazio tempo di Rindler descritto dalla metrica 2.32. Se supponiamo ora che l'osservatore compia il suo moto su orbite circolari di raggio pari ad a^{-1} avremo quindi che la periodicità temporale sarà la lunghezza della circonferenza : $2\pi/a$. Uguagliando tale espressione a β troveremo quindi che (ricordando la scelta $\hbar = 1$) :

$$\Theta = \frac{a}{2\pi} \quad (3.49)$$

La nostra dimostrazione è quindi conclusa. Infatti per passare da quest'ultima relazione alla 3.47 non dovremo far altro che aggiungere il fattore k_B se vorremo misurare la temperatura in Kelvin e poi moltiplicare nel modo opportuno per \hbar e c in modo da ottenere il risultato in unità non geometrizzate.

Possiamo quindi notare un fatto di grande rilevanza. Se sostituiamo all'accelerazione a nella formula 3.49 la gravità di superficie di un buco nero allora avremo che :

$$\Theta_H = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{8\pi M} \quad (3.50)$$

Che in unità non geometrizzate restituisce la seguente :

$$\Theta_H = \frac{\hbar c^3}{k_B G} \frac{1}{8\pi M} \quad (3.51)$$

Tale temperatura è nota in letteratura come temperatura di Hawking. Come possibile osservare dalla presenza simultanea di \hbar , G , c e k_b questa non può che essere una delle leggi più importanti della natura che collega in un certo qual modo il mondo dell'estremamente piccolo con il mondo della relatività generale a sua volta collegati entrambi con la termodinamica.

La dimostrazione che porta alla 3.51 non è però di così immediata derivazione come quella da noi presentata ma è stata fatta per la prima volta da Hawking ([3]) mediante calcoli ben più complessi di Quantum Field Theory. Cerchiamo però di illustrare, quantomeno a livello qualitativo, a che cosa sia dovuta questa temperatura e che cosa sia l'effetto Hawking di un buco nero. Si pensa ad un buco nero come ad un oggetto che inglobi tutto quello che gli passa abbastanza vicino. Ciò infatti avviene, e avviene in modo tale che qualsiasi cosa attraversi la superficie dell'orizzonte degli eventi non possa tornare più indietro per via del fatto che g_{tt} passi dall'essere time-like a space-like. Nulla quindi vieta che possa verificarsi una sorta di effetto Penrose in prossimità della superficie. In quantum field theory si afferma infatti l'esistenza di fenomeni come la polarizzazione del vuoto. Dato che lo spazio è infatti tutto permeato da campi è possibile che avvenga l'emissione, dal nulla, seppur per brevissimo tempo, di due particelle virtuali di energia uguale e opposta. Nulla vieta poi che la particella con energia negativa, nella sua brevissima vita, attraversi l'orizzonte degli eventi non potendosi più ricongiungere con la particella di energia positiva che sarà ora libera di allontanarsi dal buco nero. Tale

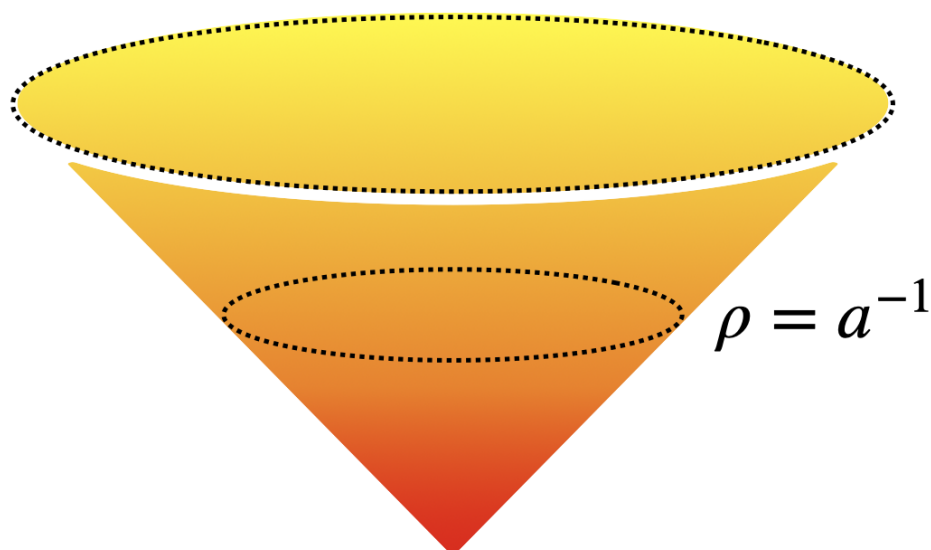


Figura 3.2: E' mostrata la temperatura di Unruh in scala cromatica crescente verso il rosso in funzione del raggio dell'orbita compiuta considerando la metrica di Rindler

fenomeno quindi non fa altro che alleggerire energeticamente il buco nero e quindi causa l'emissione di energia da parte del buco nero verso l'esterno. I calcoli che descrivono tale effetto, noto come effetto Hawking, non fanno altro che riprodurre il valore di temperatura 3.51 da noi indovinato mediante l'analogia con l'effetto Unruh.

Per completare l'analisi della temperatura di Hawking possiamo quindi essenzialmente chiederci due cose : primo quale sia l'ordine di grandezza di tale temperatura e secondo a che tasso di velocità tale perdita di energia avvenga. Se supponiamo infatti che un buco nero non acquisisca massa e sia in una condizione di "isolamento", allora l'effetto Hawking non farà altro che farlo lentamente evaporare. Per quanto riguarda la prima domanda non esiste una risposta precisa. Esistono buchi neri con svariati valori di massa; ad esempio uno con la massa del sole avrebbe una temperatura dell'ordine del μK mentre uno della massa di una supergigante rossa (poniamo 60 masse solari) ne avrebbe una dell'ordine di $10^{-8} K$. Per quanto riguarda il tempo di "evaporazione" si può dimostrare che, in assenza di assorbimento, un buco nero della massa del sole impiegherebbe circa la durata stessa dell'età dell'universo : 13,72 miliardi di anni. L'evaporazione sarebbe dunque un fenomeno rilevante solo per i cosiddetti micro buchi neri con una massa di circa 0,1-0,01 grammi.

3.6 Principi di Termodinamica

Riprendiamo adesso l'espressione 3.23. Da questa espressione avevamo capito che potevamo mettere in relazione in un qualche modo l'area di un buco nero con l'entropia. Ciò era dovuto al fatto che in un processo generale la variazione di area era sempre maggiore o uguale a zero, proprio come nel caso dell'entropia. Non disponevamo tuttavia di quella che era la costante di proporzionalità che poteva legarle e non potevamo quindi scrivere ancora la formula per esprimere l'entropia di un buco nero in funzione della sua area. A priori infatti, senza la radiazione di Hawking, non sono stati trovati modi per fare ciò se non trovare che la costante di proporzionalità che legava area ed entropia doveva essere circa $\ln 2/(8\pi) \approx 0.03$. Il valore esatto di tale costante ci è fornito appunto dalla 3.51. Infatti se $\delta J = 0$, dalla 3.24 avevamo che $\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta \mathcal{A}$. Se usiamo ora la relazione della termodinamica classica tra entropia e temperatura in un processo reversibile ($dU = TdS$) avremo allora che : $\kappa/(8\pi)\delta \mathcal{A} = \delta M \sim \delta U = \Theta_H dS$. Utilizzando la 3.50, potremo quindi scrivere :

$$S = \frac{\mathcal{A}}{4} \quad (3.52)$$

Tale legge è proprio la legge proposta da Hawking sulla relazione area-entropia nell'anno 1974 ([3]) a seguito della dimostrazione sulla radiazione di Hawking con temperatura appunto data dalla 3.50.

Per completare la nostra trattazione sulle analogie termodinamiche dei buchi neri vogliamo quindi seguire l'enunciazione delle leggi formulate da Bardeen et al. nel 1973 ([1]). Prima di farlo però richiamiamo alla memoria i 4 principi della termodinamica classica.

Legge "zero" della termodinamica classica

Se due corpi sono separatamente in equilibrio termico con un terzo corpo allora lo sono anche tra loro.

Prima legge della termodinamica classica

L'energia termica di un sistema termicamente isolato è costante. In una trasformazione quasi statica avremo quindi che $dU = TdS - \delta L$

Seconda legge della termodinamica classica

In un sistema isolato l'entropia è una funzione non decrescente nel tempo

Terza legge della termodinamica classica

Formulazione di Planck. *L'entropia di un sistema tende, col tendere della temperatura $\Theta \rightarrow 0$, ad un valore costante che può essere posto uguale a zero*

Formulazione di Nerst. *È impossibile ridurre la temperatura di un sistema allo zero assoluto mediante un qualsiasi numero finito di operazioni*

Dalla nostra trattazione è emersa una quantità propria dei buchi neri che durante un qualsiasi processo non registra alcuna diminuzione ed al contrario è una funzione non decrescente del tempo. Tale quantità è l'area di superficie dell'orizzonte degli eventi. Abbiamo poi visto come se un osservatore è dotato di accelerazione allora osserverà una temperatura non nulla anche nel vuoto di Minkowski. In particolare abbiamo poi messo in relazione questa accelerazione con l'accelerazione di superficie di un buco nero ottenendo la cosiddetta temperatura di Hawking di un buco nero (3.50). Ricollegandoci quindi al primo principio della termodinamica, tramite la temperatura di Hawking potremo dire che se due parti della superficie del buco nero sono in equilibrio termico, intendendo quindi che hanno la stessa temperatura Θ_H , allora avremo che conseguentemente anche la gravità di superficie dovrà essere la stessa. Possiamo quindi formulare la prima legge.

Legge "zero" della termodinamica di un buco nero. *Se un buco nero è stazionario se e solo se la sua gravità di superficie è costante su tutta la superficie dell'orizzonte degli eventi*

Dalla nostra trattazione sui buchi neri rotanti, facendo riferimento alla 3.32, possiamo vedere un'analogia al primo principio della termodinamica considerando una trasformazione reversibile se con il minor incremento possibile di massa. E poiché in relatività la massa non è altro che energia avremo quindi che, nel caso reversibile, $\delta M = \Omega \delta J$. Generalizzando tale risultato a buchi neri carichi Bardeen et al. hanno quindi formulato la prima legge nel modo seguente :

Prima legge della termodinamica di un buco nero. *Quando un sistema composto anche da un buco nero passa da uno stato stazionario all'altro allora il suo cambiamento di massa sarà vincolato dalla seguente espressione :*

$$dM = \Theta dS + \Omega dJ + \Phi dQ + \delta q \quad (3.53)$$

dove dJ è la variazione di momento angolare del buco nero, dQ la variazione di carica elettrica e δq è un contributo, da noi non trattato, che rappresenta il contributo alla variazione di massa dovuto alla distribuzione di materia al di fuori dell'orizzonte degli eventi

Richiamando adesso la legge 3.52 che lega area ed entropia potremo enunciare la seconda legge di non diminuzione dell'area-entropia di un buco nero.

Seconda legge della termodinamica di un buco nero. *In un qualsiasi processo che soddisfa le condizioni del teorema di Hawking sull'area allora vale la seguente relazione:*

$$\Delta \left(\frac{A}{4} \right) = \Delta S \geq 0 \quad (3.54)$$

Come la termodinamica stabiliva il verso della freccia del tempo, ovvero verso un processo ad energia maggiore, ora la termodinamica dei buchi neri sembra segnare l'inesorabile

verso dell'universo, nelle condizioni di energia debole, che porta i buchi neri ad incrementare sempre e comunque la loro area. Inoltre, possiamo spingere più a fondo l'analogia con la termodinamica classica. Come infatti lì l'entropia simboleggiava il nostro grado di ignoranza sul sistema, nei buchi neri rappresenta proprio l'informazione alla quale non abbiamo accesso poiché situata oltre all'orizzonte degli eventi.

Passiamo quindi alla formulazione del terzo principio della termodinamica da parte di Bardeen et al. :

Terza legge della termodinamica di un buco nero. *È impossibile ridurre a zero la temperatura (e quindi l'entropia) di un buco nero mediante un numero finito di operazioni*

Benché esistano altre formulazioni della terza legge, questa è forse quella con un parallelo più immediato al terzo principio di termodinamica classica. Se cerchiamo di comprendere cosa significhi per un buco nero azzerare la sua temperatura quello che dobbiamo fare è semplicemente fare riferimento alla espressione della gravità di superficie per un buco nero di Kerr-Newmann 3.34. Da questa abbiamo infatti che la κ , e quindi anche la temperatura, si annulleranno nel caso in cui $M^2 = Q^2 + a^2$. Un buco nero di questo tipo si chiama *buco nero estemale*. Il terzo principio della termodinamica quindi, oltre a impedire la formazione di buchi neri estremali, proibisce quelli per cui $M^2 < Q^2 + a^2$. Cerchiamo quindi di capire che cosa rappresenti una soluzione di questo tipo. Per un valore tale avremmo infatti che la soluzione che determina il raggio dell'orizzonte degli eventi (interno ed esterno) di un buco nero di Kerr-Newmann data dalla seguente :

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} \quad (3.55)$$

non darebbe più soluzioni reali e quindi il buco nero non avrebbe più un orizzonte degli eventi e la singolarità sarebbe "nuda". Il terzo principio della termodinamica dei buchi neri assumerebbe quindi lo stesso significato del cosiddetto principio di censura cosmica che afferma che in natura non esistano che singolarità "vestite" dalla superficie dell'orizzonte degli eventi.

3.6.1 Seconda legge generalizzata

Per quanto visto, la radiazione di Hawking fa molto lentamente evaporare i buchi neri. Dunque, tale fenomeno non farebbe altro che violare quello che noi abbiamo formulato come il secondo principio della termodinamica dei buchi neri. Possiamo apportare una semplice correzione a ciò semplicemente ponendo l'entropia S pari alla cosiddetta entropia generalizzata \tilde{S} :

$$\tilde{S} = S_H + S_R \quad (3.56)$$

dove S_H è l'entropia del buco nero mentre S_R è l'entropia della radiazione e della materia fuori dal buco nero. Si può infatti dimostrare, calcolando la formula per la diminuzione

di massa mediante la radiazione di Hawking, che \tilde{S} non può che aumentare in qualsiasi processo. Seguendo i calcoli di Frolov e Zelnikov [2], considerando un campo amassivo con spin, seguendo un ragionamento simile a quello da noi fatto per ricavare l'accrescimento di massa di un buco nero in campo bosonico, avremo infatti che :

$$\frac{dS_R}{dt} = \frac{1}{3}C\Sigma_S\Theta_H^3 \quad (3.57)$$

dove la C è costante moltiplicativa che dipende dal numero di polarizzazioni del campo e Σ_S è la sezione di cattura. Dato che nel caso dell'entropia derivante dalla sola temperatura di Hawking avremo che $dS_H = \Theta^{-1}dM$ allora se compariamo le due variazioni tramite il parametro R definito come :

$$R := -\frac{dS_R}{dS_H} \quad (3.58)$$

tramite calcoli numerici ([10]) è possibile mostrare che $R > 1$ eccetto in un caso particolare dove vale esattamente 1. Dunque che \tilde{S} può solo aumentare o al più rimanere costante.

Dato che adesso la formula dell'entropia non è più legata solamente al buco nero ma anche allo spazio circostante possiamo identificare la $\Delta\tilde{S}$ con la nostra ΔS_U , ovvero la variazione di entropia dell'universo. Abbiamo recuperato in questo modo la seconda legge della termodinamica classica.

3.7 Teoria dell'informazione e buchi neri

Per concludere vogliamo dare una breve trattazione qualitativa di un problema termodinamico che presentano i buchi neri: quello dell'informazione. Supponiamo infatti di conoscere completamente un sistema fisico. Tale conoscenza ci permetterebbe di predire il comportamento di tale sistema nel futuro. Supponiamo quindi che tale sistema si diriga verso un buco nero e attraversi l'orizzonte degli eventi. Cosa potrebbe quindi succedere? Irrimediabilmente l'informazione che abbiamo su tale oggetto andrebbe persa, non riuscendo più essa ad attraversare l'orizzonte degli eventi per via del passaggio da superfici del tipo $\mathcal{S}_>$ a superfici del tipo $\mathcal{S}_<$. Ora, cosa possa accadere all'informazione di tale sistema è stato oggetto di dibattito tra noti fisici. Alcuni, tra cui in particolare Hawking, sostennero infatti che questa dovesse per forza essere irrimediabilmente persa per sempre salvo poi, Hawking, cambiare idea proponendo una dimostrazione (non universalmente accettata) per la quale perturbazioni quantistiche dell'orizzonte degli eventi permettano la fuoriuscita di informazione; si eviterebbe quindi una perdita totale di quest'ultima. In questo modo si collegherebbe quindi l'informazione della radiazione che lentamente fuoriesce dal buco nero a quella dell'oggetto che entra dentro di esso. Apparentemente questi non sembrerebbero però collegati da nulla. Infatti, tra le altre ipotesi, ci sarebbe

quella che afferma che la radiazione non porti con sé l'informazione ma piuttosto questa si manifesti nel residuo plankiano presente dopo la completa evaporazione del buco nero a seguito della radiazione di Hawking. Tale teoria eviterebbe quindi una formulazione di come l'informazione possa fuoriuscire dal buco nero nel corso del tempo. Trattandosi però di un problema ancora aperto non ci addentriamo maggiormente in esso.

Bibliografia

- [1] B. Carter, B. Carter, and S.W. Hawking. The four laws of black hole mechanics. *Commun.Math. Phys.*, 31, 1973.
- [2] Valeri P Frolov and Andrei Zelnikov. *Introduction to black hole physics*. Oxford Univ. Press, Oxford, 2011.
- [3] S. W. HAWKING. Black hole explosions? *Nature*, 248, 1974.
- [4] John Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer-Verlag New York, 2 edition, 2012.
- [5] Frederic P. Schuller. *Lectures on General Relativity*. 2015.
- [6] Frederic P. Schuller. *Lectures on the Geometric Anatomy of Theoretical Physics*. 2016.
- [7] Bernard Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2 edition, 2009.
- [8] Loring Tu, W. *An Introduction to Manifolds*. Springer-Verlag New York, 2 edition, 2011.
- [9] William G. Unruh and Robert M. Wald. What happens when an accelerating observer detects a rindler particle. *Phys. Rev. D*, 29:1047–1056, Mar 1984.
- [10] W. H. Zurek. Entropy evaporated by a black hole. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1683–1686, Dec 1982.