

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

REGOLARITÀ HÖLDERIANA E TEOREMA DI DE GIORGI

Tesi di Laurea in Istituzioni di Analisi Superiore

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Bruno Franchi

Presentata da:
Diego Ricciotti

I Sessione
Anno Accademico 2010-2011

Indice

Introduzione	III
1 Nozioni fondamentali	1
1.1 Richiami su Spazi di Sobolev e di Hölder	1
1.1.1 Mollificatori e funzioni di cut-off	2
1.1.2 Calcolo differenziale in spazi di Sobolev	4
1.2 Teorema di immersione di Sobolev	6
1.3 Equazioni ellittiche del secondo ordine in forma di divergenza a coefficienti misurabili e limitati	10
2 TEOREMA DI DE GIORGI	13
2.1 L'insieme di De Giorgi	13
2.2 Locale limitatezza delle funzioni nella classe di De Giorgi	15
2.3 Il Teorema di De Giorgi	21
Bibliografia	26

Introduzione

Questa esposizione contiene la prova di un celebre teorema di De Giorgi pubblicata nel 1957 sulla regolarità hölderiana delle soluzioni di equazioni lineari del secondo ordine ellittiche in forma di divergenza con coefficienti limitati e misurabili, con cui si risolveva uno dei problemi del millennio proposti da Hilbert, precisamente il 23-esimo : "Le soluzioni di problemi regolari del calcolo delle variazioni sono sempre necessariamente analitiche? ".

Il teorema viene spesso chiamato di De Giorgi-Nash-Moser poiché una diversa dimostrazione fu fornita da John Nash nel 1958 indipendentemente da De Giorgi, e Moser estese il risultato negli anni successivi.

Tale risultato è motivato dallo studio della regolarità dei minimi di funzionali integrali quadratici del calcolo delle variazioni del tipo

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} F(\nabla u(x)) dx \quad (0.0.1)$$

dove Ω è un aperto di \mathbb{R}^n e $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un'opportuna funzione di classe C^2 tale che $\forall p \in \mathbb{R}^n$

$$|D^2 F(p)| \leq C \quad (0.0.2)$$

$$\exists \lambda > 0 : \langle D^2 F(p)\xi, \xi \rangle \geq \lambda |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (0.0.3)$$

Ambientando problemi di questo tipo nello spazio di Sobolev $W_{loc}^{1,2}(\Omega)$ si trova che i minimi del funzionale (0.0.1) sono soluzioni deboli dell'equazione di Eulero-Lagrange

$$\operatorname{div} F(\nabla u(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (0.0.4)$$

cioè soddisfano

$$\int_{\Omega} \langle \nabla F(\nabla u), \nabla \phi \rangle dx = 0 \quad \forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega). \quad (0.0.5)$$

Inoltre si trova che una soluzione u di (0.0.5) possiede derivate deboli seconde, precisamente $u \in W_{loc}^{2,2}(\Omega)$ e le sue derivate prime $v_k = D_k u$ sono soluzioni deboli dell'equazione lineare del secondo ordine in forma di divergenza

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla v_k(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega' \subset\subset \Omega \quad (0.0.6)$$

con $A(x) = (a_{i,j}(x)) = F_{p_i, p_j}(\nabla u(x))$ $i, j = 1 \dots n$ che risulta simmetrica (poiché $F \in C^2(\Omega)$) e limitata (per la (0.0.2)). Tale equazione risulta inoltre ellittica

in virtù dell'ipotesi (0.0.3) cioè

$$\lambda|\xi|^2 \leq \langle A(x)\xi, \xi \rangle \quad \text{per q.o. } x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (0.0.7)$$

Prima del risultato di De Giorgi era già noto dalle stime di Schauder che nelle ipotesi precedenti se $a_{i,j} \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, con $k \geq 0$, $\alpha > 0$ e v_k è soluzione debole di (0.0.6) allora $v_k \in C^{k+1,\alpha}(\Omega)$. Supponiamo allora di sapere che $F \in C^\infty(\Omega)$ e che un estremales u di F è hölderiano di esponente $\alpha \in (0, 1)$. Allora l'equazione (0.0.6) ha coefficienti in $C^{0,\alpha}(\Omega)$, e quindi $v_k \in C^{1,\alpha}(\Omega)$. Poiché questo argomento è vero per ogni $k = 1, \dots, n$, ne segue che $\nabla u \in (C^{1,\alpha}(\Omega))^n$, e quindi che $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$. Ma allora i coefficienti di (0.0.6) appartengono a $C^{1,\alpha}(\Omega)$, e quindi, utilizzando ancora le stime di Schauder, $u \in C^{3,\alpha}(\Omega)$. Iterando questo ragionamento, con un ragionamento di bootstrap, si conclude che $u \in C^\infty(\Omega)$. Questo ragionamento però richiede che $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ per innescare la procedura iterativa. D'altra parte, tutto quello che sappiamo è che $u \in W_{loc}^{2,2}(\Omega)$, e questo non permette di innescare l'iterazione.

È in questo contesto che si inserisce il teorema di De Giorgi che permette di colmare proprio questa lacuna, affermando che nelle ipotesi precedenti di limitatezza e misurabilità dei coefficienti si può dedurre la locale hölderianità delle soluzioni, e quindi rifarsi ai teoremi precedenti per applicare il procedimento di bootstrap sopra descritto.

La dimostrazione del teorema di De Giorgi che viene presentata segue varie tappe. Inizialmente si introduce l'insieme di De Giorgi $DG(\Omega)$ su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ che sarà utile in quanto permette di trasferire lo studio della regolarità delle soluzioni di (0.0.6) a quello delle funzioni in tale insieme. Infatti si dimostrerà che se u è soluzione di (0.0.6) allora u e $-u$ appartengono a $DG(\Omega)$. In seguito si proveranno una serie di disuguaglianze integrali soddisfatte dalle funzioni in $DG(\Omega)$ volte a dimostrare la locale limitatezza di tali funzioni. Per fare questo si studieranno le misure degli insiemi di sopralivello delle funzioni in $DG(\Omega)$. Si troverà quindi il principale risultato di limitatezza, il quale afferma che se $u \in DG(\Omega)$ allora se $B_r \subset\subset \Omega$ si ha

$$\sup_{B_{r/2}} \text{ess } u \leq c \left(\int_{B_r} |u|^2 dx \right)^{1/2}$$

che è finito in quanto $u \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$.

Infine si utilizzerà questa informazione per dedurre la locale hölderianità di tali funzioni e quindi delle soluzioni di (0.0.6). Più precisamente sarà fondamentale la dimostrazione di una stima di riduzione dell'oscillazione essenziale ω di tali funzioni su palle di raggio decrescente indipendentemente dal raggio stesso, cioè

$$\omega\left(\frac{r}{2}\right) \leq A\omega(2r)$$

se $B_{2r} \subset\subset \Omega$ e con $0 < A < 1$. Da questo seguirà poi la prova del teorema.

Capitolo 1

Nozioni fondamentali

1.1 Richiami su Spazi di Sobolev e di Hölder

Si richiamano in questo capitolo le definizioni ed alcune proprietà basilari degli spazi di Sobolev e di Hölder che saranno ampiamente utilizzati in seguito.

Definizione 1.1.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *hölderiana di esponente $\alpha \in]0, 1]$* su Ω se

$$[f]_{\alpha, \Omega} := \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \quad (1.1.1)$$

Si osservi che le funzioni lipschitziane sono hölderiane di esponente $\alpha = 1$. Si osservi anche che le funzioni hölderiane sono continue, ma esistono funzioni hölderiane che non sono derivabili in senso classico (si pensi ad esempio a $f(x) = |x|$).

Definizione 1.1.2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in]0, 1]$. Si definiscono gli *Spazi di Hölder*

$$C^{k, \alpha}(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega) \mid [D^\beta f]_{\alpha, K} < \infty \quad \forall \beta : |\beta| = k, \quad \forall K \text{ compatto } \subset \Omega\}$$

Oltre a questi, si introducono gli spazi di Sobolev i quali necessitano della nozione di derivata debole:

Definizione 1.1.3. Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n , $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, α un multiindice. Una funzione $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ si dice la α -esima derivata debole di u se vale

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_\alpha \phi dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Notazione 1. Nelle condizioni precedenti la derivata debole v_α verrà denotata con uno qualsiasi dei simboli utilizzati per le derivate classiche come $D^\alpha u$ o $\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^\alpha}$.

Definizione 1.1.4 (Spazi di Sobolev). *Sia Ω aperto di \mathbb{R}^n , $1 \leq p \leq \infty$. Si definisce lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \quad \forall i = 1 \dots n \right\}$$

Tali spazi vengono muniti di una delle seguenti norme equivalenti che li rendono spazi di Banach:

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} &= \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \\ \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} &= \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

1.1.1 Mollificatori e funzioni di cut-off

Si presenta ora una breve digressione su particolari tipi di funzioni regolari che verranno ampiamente usati in seguito.

Definizione 1.1.5. *Sia $\varepsilon > 0$. Un mollificatore è una funzione $w_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$ tale che*

$$w_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (1.1.3)$$

$$\text{supp } w_\varepsilon \subseteq B_\varepsilon(0) \quad (1.1.4)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} w_\varepsilon(x) dx = 1 \quad (1.1.5)$$

Osservazione 1. *Si consideri la funzione*

$$w : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty[, \quad w(x) = \begin{cases} ce^{\frac{1}{|x|^2-1}} & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

con c tale che sia soddisfatta la (1.1.5). Allora si verifica che

$$w_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

è un mollificatore.

Definizione 1.1.6. *Si introduce l'operazione di convoluzione $*$ tra due funzioni f e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita come:*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

che ha senso ad esempio se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e se g è a supporto compatto. Si osservi che in questo caso l'integrale è in realtà calcolato sul supporto di g .

La convoluzione con i mollificatori risulta essere un ottimo metodo di regolarizzazione, procedimento su cui non si spenderanno molte parole, ma per gli scopi successivi viene semplicemente enunciata la seguente

Proposizione 1.1.1. *Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Allora $f * w_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Definizione 1.1.7. Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n e siano $B_r \subset\subset B_R \subset\subset \Omega$. Una funzione $\eta : \Omega \rightarrow [0, 1]$ è detta di cut-off tra $B_r(x_0)$ e $B_R(x_0)$ se vale identicamente 1 su $B_r(x_0)$, 0 su $\Omega \setminus B_R(x_0)$ e $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$.

Osservazione 2. Una funzione di cut-off si può costruire considerando

$$f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ \frac{1}{a-b}(|x| - b) & a < |x| < b \\ 0 & |x| > b \end{cases}$$

con $a < b$ fissati e considerandone la convoluzione con un mollificatore w_ε . In questo modo si ha che

$$\text{supp}(f * w_\varepsilon) \subseteq [-(b + \varepsilon), b + \varepsilon]$$

e

$$f * w_\varepsilon(x) = 1 \quad \text{per } |x| < a - \varepsilon.$$

Infatti se $|x| > b + \varepsilon$ e $|y| < \varepsilon$ allora $f(x - y) = 0$, per cui

$$f * w_\varepsilon(x) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x - y)w_\varepsilon(y)dy = 0,$$

mentre se $|x| < a - \varepsilon$ e $|y| < \varepsilon$ allora $f(x - y) = 1$ e quindi

$$f * w_\varepsilon(x) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x - y)w_\varepsilon(y)dy = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} w_\varepsilon(y)dy = 1.$$

Inoltre essendo $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ risulta $f * w_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ per la Proposizione (1.1.1). Scegliendo ad esempio $a = r + \varepsilon$, $b = R - \varepsilon$ ed $\varepsilon < \frac{R-r}{2}$ e considerando $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$, $\eta(x) = f * w_\varepsilon(|x|)$ si ottiene una funzione di cut-off tra $B_r(0)$ e $B_R(0)$ per r ed R fissati.

Osservazione 3. Si osservi che per la η appena costruita vale

$$|\nabla \eta(x)| < \frac{C}{R-r} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

dove C è una costante che non dipende da nulla.

Dimostrazione. Infatti, nelle notazioni precedenti si ha

$$|(f * w_\varepsilon)'(x)| \leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(x - y)|w'_\varepsilon(y)dy \leq 2\varepsilon \max_{[-\varepsilon, \varepsilon]} w'_\varepsilon \quad (1.1.6)$$

dal momento che $|f| \leq 1$ e si può dimostrare che $(f * w_\varepsilon)'(x) = f * w'_\varepsilon(x)$. Ora

$$w'_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \max_{\mathbb{R}} w. \quad (1.1.7)$$

Quindi scegliendo $\varepsilon = \frac{R-r}{3}$ mettendo insieme la (1.1.6) e la (1.1.7) si ottiene $|(f * w_\varepsilon)'(x)| \leq \frac{C'}{R-r}$. Per concludere basta osservare che

$$|\nabla \eta(x)| = \left| \frac{x}{|x|} (f * w_\varepsilon)'(|x|) \right| \leq \frac{C'}{R-r}.$$

□

1.1.2 Calcolo differenziale in spazi di Sobolev

Vengono ora presentati una serie di risultati che cercano di estendere le regole del calcolo differenziale classico agli spazi di Sobolev. Per fare questo sarà necessario un teorema fondamentale di approssimazione mediante funzioni molto regolari, la cui dimostrazione fa uso dei mollificatori e può essere trovata in [3].

Teorema 1.1.1 (Meyers-Serrin). $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ è denso in $W^{1,p}(\Omega)$, $p \neq \infty$.

Notazione 2. $W_0^{1,p}(\Omega)$ indica la chiusura di $C_c^\infty(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$.

Proposizione 1.1.2. Sia $u \in L_{loc}^1(\Omega)$, α un multiindice. $v \in L_{loc}^1(\Omega)$ è l' α -esima derivata debole di u se e solo se esiste una successione $u_n \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ tale che

- $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u$ in $L_{loc}^p(\Omega)$
- $D^\alpha u_n \rightarrow v$ in $L_{loc}^p(\Omega)$.

I risultati successivi rappresentano l'analogo delle formule classiche di derivazione di composizioni e prodotti di funzioni.

Proposizione 1.1.3. Siano $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ tale che $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Allora $f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ e vale

$$\nabla(f \circ u) = f'(u)\nabla u \quad (1.1.8)$$

Dimostrazione. $u \in W^{1,p}(\Omega)$, quindi per la Proposizione (1.1.2) esiste una successione $u_n \in C^1(\Omega) : u_n \rightarrow u$ in $L_{loc}^p(\Omega)$ e $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ in $L_{loc}^p(\Omega)$. Allora (per il teorema del valor medio di Lagrange) $\forall \Omega' \subset\subset \Omega$ vale

$$\int_{\Omega'} |f(u_n) - f(u)|^p dx \leq \|f'\|_{L^\infty}^p \int_{\Omega'} |u_n - u|^p dx$$

che tende a zero poiché $f' \in L^\infty(\Omega)$ e $u_n \rightarrow u$ in $L_{loc}^p(\Omega)$. Quindi $f \circ u_n \rightarrow f \circ u$ in $L_{loc}^p(\Omega)$.

Sommando e sottraendo $f'(u_n)\nabla u$ si ha

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega'} |f'(u_n)\nabla u_n - f'(u)\nabla u|^p dx \\ & \leq \int_{\Omega'} |f'(u_n)|^p |\nabla u_n - \nabla u|^p dx + \int_{\Omega'} |\nabla u|^p |f'(u_n) - f'(u)|^p dx \\ & \leq \|f'\|_{L^\infty}^p \int_{\Omega'} |\nabla u_n - \nabla u|^p dx + \int_{\Omega'} |\nabla u|^p |f'(u_n) - f'(u)|^p dx \end{aligned}$$

Ora il primo termine tende a 0 in quanto $f' \in L^\infty(\Omega)$ e $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ in $L_{loc}^p(\Omega)$. Per quanto riguarda il secondo poiché $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u$ in $L_{loc}^p(\Omega')$ esiste una sottosuccessione u_{n_k} che tende a u puntualmente quasi ovunque in Ω' . Essendo f' continua vale $f'(u_{n_k}) \rightarrow f'(u)$ q.o. in Ω' , quindi $|f(u_{n_k}) - f(u)|^p \rightarrow 0$ ed essendo $|\nabla u|^p \in L^1(\Omega')$ è possibile utilizzare il teorema della convergenza dominata di Lebesgue. In sintesi si ha

$$\begin{aligned} f \circ u_{n_k} &\rightarrow f \circ u \text{ in } L^p_{loc}(\Omega) \\ f'(u_{n_k})\nabla u_{n_k} &\rightarrow f'(u)\nabla u \text{ in } L^p_{loc}(\Omega) \end{aligned}$$

dove $f \circ u_{n_k} \in C^1(\Omega)$, da cui segue la tesi per la Proposizione (1.1.2). \square

Lemma 1.1.1. *Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Allora $u^+ \in W^{1,p}(\Omega)$ e vale*

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & \{u > 0\} \\ 0 & \{u \leq 0\} \end{cases}$$

Dimostrazione. Si consideri $\forall \varepsilon > 0$ $f_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}.$$

Si ha che

$$f'_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

è continua.

Inoltre

$$\frac{x^2}{x^2 + \varepsilon^2} \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0$$

quindi $f_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ e $f'_\varepsilon \in L^\infty \quad \forall \varepsilon > 0$.

Dalla Proposizione (1.1.3) $f_\varepsilon \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\nabla(f_\varepsilon \circ u) = f'_\varepsilon(u)\nabla u$.

Cioè $\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\sqrt{u^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon)\nabla \phi dx &= - \int_{\Omega} \frac{u\nabla u}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}} \phi dx \\ &= - \int_{\{u>0\}} \frac{u\nabla u}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}} \phi dx. \end{aligned}$$

Ora poiché

$$\frac{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon}{|u|} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1$$

vale

$$|\sqrt{u^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon| |\nabla \phi| \leq 2 \left(\max_K |\nabla \phi| \right) |u| \chi_K \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_0$$

dove K è il supporto di ϕ . Dal momento che $|u|\chi_K \in L^p(K) \subset L^1(K)$ e che $f'_\varepsilon(u) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u^+$ per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue

$$\int_{\Omega} (\sqrt{u^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon)\nabla \phi dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^+ \nabla \phi dx.$$

Analogamente

$$\left| \frac{u\nabla u}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}} \phi \right| \leq \left(\max_K |\phi| \right) |\nabla u| \chi_K \in L^1(\{u > 0\})$$

quindi per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue

$$\int_{\{u>0\}} \frac{u\nabla u}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}} \phi dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{u>0\}} \nabla u \phi dx.$$

Dall'unicità del limite segue

$$\int_{\Omega} u^+ \nabla \phi dx = - \int_{\Omega} (\nabla u) \chi_{\{u>0\}} \phi dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) \quad (1.1.9)$$

cioè la tesi. \square

Lemma 1.1.2. *Siano $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$. Allora $u\eta \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e vale*

$$\nabla(u\eta) = \eta \nabla u + u \nabla \eta \quad (1.1.10)$$

Dimostrazione. Per il teorema di Meyers-Serrin esiste una successione $u_n \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega) : u_n \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$ e $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ in $L^p(\Omega)$. Si indichi con K il supporto di η e si ponga $v_n = \eta u_n \in C_c^\infty(\Omega)$. Allora

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v_n - u\eta|^p dx &= \int_{\Omega} |\eta|^p |u_n - u|^p dx \\ &\leq \max_K |\eta|^p \int_K |u_n - u|^p dx \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

che tende a zero poiché $\max_K |\eta|^p < \infty$. Quindi $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \eta u$ in $L^p(\Omega)$.

Ora

$$\nabla(u_n \eta) = u_n \nabla \eta + \eta \nabla u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \nabla \eta + \eta \nabla u \quad \text{in } L^p(\Omega)$$

dal momento che

$$\int_{\Omega} |u_n \nabla \eta - u \nabla \eta|^p dx \leq \max_K |\nabla \eta|^p \int_K |u_n - u|^p dx$$

e

$$\int_{\Omega} |\eta \nabla u_n - \eta \nabla u|^p dx \leq \max_K |\eta|^p \int_K |\nabla u_n - \nabla u|^p dx$$

tendono entrambi a zero poiché $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$. Quindi per la Proposizione (1.1.2) vale la (1.1.10). Inoltre poiché $v_n \in C_c^\infty(\Omega)$ tende a $u\eta$ in $W^{1,p}(\Omega)$ segue $u\eta \in W_0^{1,p}(\Omega)$. \square

1.2 Teorema di immersione di Sobolev

Il teorema di immersione di Sobolev stabilisce che una funzione appartenente ad uno spazio di Sobolev in un insieme abbastanza regolare, in virtù dell'appartenenza del suo gradiente debole ad uno spazio L^p , acquista maggiore sommabilità. Per gli scopi successivi sarà sufficiente limitarsi al caso di funzioni in $W_0^{1,p}$, per cui non saranno necessarie ipotesi di regolarità sul dominio.

Lemma 1.2.1. *Siano $f_1, \dots, f_m \in L^m(\Omega)$, Ω aperto di \mathbb{R}^n . Allora*

$$\left\| \prod_{i=1}^m f_i \right\|_{L^1(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L^m(\Omega)} \quad (1.2.1)$$

Dimostrazione. Si proceda per induzione.

Per $m = 2$ è Cauchy-Schwartz.

Sia vera per m . Siano $f_1, \dots, f_{m+1} \in L^{m+1}(\Omega)$. Allora utilizzando la disuguaglianza di Hölder e in seguito l'ipotesi induttiva si ottiene

$$\begin{aligned} \left\| \prod_{i=1}^{m+1} f_i \right\|_{L^1(\Omega)} &= \int_{\Omega} \prod_{i=1}^m |f_i| |f_{m+1}| dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f_{m+1}|^{m+1} dx \right)^{\frac{1}{m+1}} \left(\int_{\Omega} \prod_{i=1}^m |f_i|^{\frac{m+1}{m}} dx \right)^{\frac{m}{m+1}} \\ &\leq \|f_{m+1}\|_{L^{m+1}(\Omega)} \prod_{i=1}^m \left(\int_{\Omega} |f_i|^{\frac{m+1}{m} m} dx \right)^{\frac{1}{m+1}}. \end{aligned}$$

Quindi la relazione è vera per $m+1$, e per induzione segue la tesi $\forall m \in \mathbb{N}$. \square

Notazione 3. *Sia $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Si distinguerà l'ultima componente utilizzando la scrittura $x = (\underline{x}, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.*

Si indicherà con \check{x}_i il vettore ottenuto da $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ sopprimendo l' i -esima componente, e con \check{x}_i il vettore ottenuto da \underline{x} sopprimendo l' i -esima componente.

Lemma 1.2.2. *Sia $n \geq 2$ e siano $f_1, \dots, f_n \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = f_1(\check{x}_1) \cdots f_n(\check{x}_n) = \prod_{i=1}^n f_i(\check{x}_i)$. Allora*

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}. \quad (1.2.2)$$

Dimostrazione. Per induzione. Per $n=2$ segue dal teorema di Fubini-Tonelli. Infatti

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f_1(x_2)| |f_2(x_1)| dx_1 dx_2 = \int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2)| dx_2 \int_{\mathbb{R}} |f_2(x_1)| dx_1$$

e si ha quindi l'uguaglianza.

Sia vero per n . Siano $g_1, \dots, g_{n+1} \in L^n(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Utilizzando il fatto che $g_{n+1}(\check{x}_{n+1})$ non dipende da x_{n+1} e la disuguaglianza di Hölder

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \prod_{i=1}^{n+1} |g_i(\check{x}_i)| dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{n+1} |g_i(\check{x}_i)| dx_{n+1} \right) d\underline{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g_{n+1}(\check{x}_{n+1}) \left(\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^n |g_i(\check{x}_i)| dx_{n+1} \right) d\underline{x} \\ &\leq \|g_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^n |g_i(\check{x}_i)| dx_{n+1} \right)^{\frac{n-1}{n-1}} d\underline{x} \right]^{\frac{n-1}{n}} \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Per il Lemma (1.2.1)

$$\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^n |g_i(\check{x}_i)| dx_{n+1} \leq \prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}} |g_i(\check{x}_i)|^n dx_{n+1} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} & \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^n |g_i(\check{x}_i)| dx_{n+1} \right)^{\frac{n-1}{n}} d\check{x} \right]^{\frac{n-1}{n}} \\ & \leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}} |g_i(\check{x}_i)|^n dx_{n+1} \right)^{\frac{1}{n-1}} d\check{x} \right]^{\frac{n-1}{n}} \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Dette

$$f_i(\check{x}_i) := \left(\int_{\mathbb{R}} |g_i(\check{x}_i)|^n dx_{n+1} \right)^{\frac{1}{n-1}} \in L^{n-1}(\mathbb{R}^n)$$

e applicando l'ipotesi induttiva

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n |f_i(\check{x}_i)| d\check{x} \right)^{\frac{n-1}{n}} & \leq \left(\prod_{i=1}^n \|f_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} \right)^{\frac{n-1}{n}} = \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{L^{\frac{n-1}{n}}(\mathbb{R}^{n-1})} \\ & = \prod_{i=1}^n \left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g_i(\check{x}_i)|^n dx_{n+1} \right) d\check{x}_i \right]^{\frac{1}{n}} \\ & = \prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g_i(\check{x}_i)|^n d\check{x}_i \right)^{\frac{1}{n}} = \prod_{i=1}^n \|g_i\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Mettendo insieme (1.2.3), (1.2.4) e (1.2.5) si ottiene la tesi per induzione. \square

Notazione 4. Si indica con p^* l'esponente di Sobolev

$$p^* = \frac{np}{n-p}$$

che risulta essere strettamente maggiore di p se $p < n$.

Teorema 1.2.1 (Immersione di Sobolev). Sia $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < n$. Allora

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C_{n,p} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad (1.2.6)$$

Dimostrazione. Caso $p = 1$.

Sia $u \in C_c^\infty(\Omega)$. u si può estendere ad una funzione $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ che vale 0 fuori da Ω che verrà denotata di nuovo con u . Allora vale $\forall i = 1 \dots n$

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx_i.$$

Quindi

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{x_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| dx_i \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| dx_i$$

Moltiplicando le disuguaglianze corrispondenti ai vari indici $i = 1 \dots n$ ed elevando a $1/(n-1)$ si ottiene

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}} = \prod_{i=1}^n f_i \quad (1.2.7)$$

dove $f_i \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$. Quindi per il Lemma (1.2.2), indicando con \tilde{x}_i il vettore di \mathbb{R}^{n-1} ottenuto da x sopprimendo l' i -esima componente si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx &\leq \prod_{i=1}^n \left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| dx_i \right) d\tilde{x}_i \right]^{\frac{1}{n-1}} \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| dx \right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{n-1} &\leq \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| dx \\ &\leq \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)| dx = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)| dx \right)^n. \end{aligned}$$

Elevando a $1/n$ e ricordando che in realtà gli integrali sono calcolati su $\text{supp } u \subset \Omega$ si ottiene la tesi per $p=1$.

Sia $1 < p < n$. Si ponga $v(x) = (u(x))^{\alpha+1}$, $\alpha > 0$. Allora $v \in C_c^\infty(\Omega)$ e vale $|\nabla v(x)| = (\alpha+1)|u(x)|^\alpha |\nabla u(x)|$. Quindi applicando il risultato appena provato per $p=1$, e utilizzando la disuguaglianza di Hölder:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(x)| dx \\ &= (\alpha+1) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^\alpha |\nabla u(x)| dx \\ &\leq (\alpha+1) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{\alpha p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

Ora esplicitando il primo integrale della precedente catena di disuguaglianze si giunge a

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{(\alpha+1)\frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \\ &\leq (\alpha+1) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{\alpha p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

Nella precedente disuguaglianza si cerca il valore di α tale che l'integrale al primo membro sia uguale al secondo fattore del secondo membro, cioè $\frac{\alpha p}{p-1} = (\alpha + 1) \frac{n}{n-1}$ da cui $\alpha = \frac{n(p-1)}{n-p}$.
Con tale scelta si ha $\frac{\alpha p}{p-1} = (\alpha + 1) \frac{n}{n-1} = p^*$. Dividendo si ottiene

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p^*} dx \right)^{\frac{n-1}{n} - \frac{p-1}{p}} \leq \frac{p(n-1)}{n-p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Sia $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Allora esiste $(u_k)_k \in C_c^\infty(\Omega)$, $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Quindi si può estrarre una sottosuccessione u_{k_l} che converge a u quasi ovunque. Per quanto dimostrato si ha $\|u_{k_l}\|_{L^{p^*}} \leq C_{n,p} \|\nabla u_{k_l}\|_{L^p}$. Utilizzando il lemma di Fatou

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} &= \left(\int_{\Omega} \liminf_{l \rightarrow \infty} |u_{k_l}|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |u_{k_l}|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq C_{n,p} \liminf_{l \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_{k_l}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = C_{n,p} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

in quanto $\|\nabla u_{k_l}\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ dal momento che $u_k \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. \square

1.3 Equazioni ellittiche del secondo ordine in forma di divergenza a coefficienti misurabili e limitati

Si introducono in questa sezione le equazioni oggetto di studio di tutta l'esposizione.

Per le motivazioni fornite nell'Introduzione su questioni riguardanti i minimi di particolari funzionali integrali è di notevole interesse studiare le proprietà di regolarità delle soluzioni di equazioni lineari in forma di divergenza del tipo

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1.3.1)$$

con Ω aperto di \mathbb{R}^n e dove $A(x) = (a_{i,j}(x))$ è una matrice simmetrica che soddisfa le ipotesi

$$a_{i,j} \in L^\infty(\Omega) \quad i, j = 1 \dots n \quad (\text{limitatezza}) \quad (1.3.2)$$

$$\langle A(x)\xi, \xi \rangle \geq \lambda |\xi|^2 \quad \text{per q.o. } x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (\text{ellitticità}) \quad (1.3.3)$$

Osservazione 4. La condizione di limitatezza di A si esprime nella relazione

$$\langle A(x)\xi, p \rangle \leq \Lambda |\xi| |p| \quad \text{per q.o. } x \in \Omega, \forall \xi, p \in \mathbb{R}^n \quad (1.3.4)$$

dove Λ è la norma L^∞ di A .

Si cerca una formulazione diversa del problema che richieda meno regolarità alle soluzioni di tale equazione, che verrà chiamata (formulazione) debole. Moltiplicando ambo i membri per una funzione $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, integrando su Ω e applicando il teorema della divergenza si arriva a giustificare la seguente

Definizione 1.3.1. Una funzione $u \in W^{1,2}(\Omega)$ si dice soluzione debole dell'equazione ellittica in forma di divergenza (1.3.1) se soddisfa

$$\int_{\Omega} \langle A\nabla u, \nabla \phi \rangle dx = 0 \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) \quad (1.3.5)$$

Osservazione 5. La limitatezza di A permette di affermare che la (1.3.5) è valida $\forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Infatti sia $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, e sia $\phi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ una successione che tende a ϕ in $W^{1,2}(\Omega)$. Vale

$$\int_{\Omega} \langle A\nabla u, \nabla \phi_n \rangle dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora

$$\int_{\Omega} |\langle A\nabla u, \nabla \phi_n - \nabla \phi \rangle| dx \leq \Lambda \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \phi_n - \nabla \phi\|_{L^2(\Omega)} \quad (1.3.6)$$

che tende a zero, quindi

$$0 = \int_{\Omega} \langle A\nabla u, \nabla \phi_n \rangle dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \langle A\nabla u, \nabla \phi \rangle dx = 0.$$

Sarà utile nel seguito lavorare con sopra- e sottosoluzioni, che per completezza vengono ora definite prendendo in considerazione l'ultima osservazione

Definizione 1.3.2. Una funzione $u \in W^{1,2}(\Omega)$ si dice soprasoluzione (risp. sottosoluzione) debole di (1.3.1) se soddisfa

$$\int_{\Omega} \langle A\nabla u, \nabla \phi \rangle dx \geq 0 \text{ (risp. } \leq 0) \quad \forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega). \quad (1.3.7)$$

Osservazione 6. u è soprasoluzione debole di (1.3.1) se e solo se $-u$ è sottosoluzione debole della stessa.

Infatti se u è soprasoluzione di (1.3.1) allora

$$\int_{\Omega} \langle A\nabla u, \nabla \phi \rangle dx \geq 0 \quad \forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

Quindi

$$\int_{\Omega} \langle A\nabla(-u), \nabla \phi \rangle dx = - \int_{\Omega} \langle A\nabla u, \nabla \phi \rangle dx \leq 0$$

e viceversa.

Notazione 5. Nel seguito ci si riferirà all'equazione (1.3.1) sottintendendo che valgano le condizioni di limitatezza e ellitticità (1.3.2) e (1.3.3). Inoltre si parlerà di soluzioni intendendo sempre soluzioni deboli.

Capitolo 2

TEOREMA DI DE GIORGI

2.1 L'insieme di De Giorgi

La teoria presentata in questo capitolo è volta alla dimostrazione del fondamentale teorema di De Giorgi sulla regolarità hölderiana delle soluzioni di (1.3.1). Si lavora sulla classe di De Giorgi, che viene ora presentata.

Definizione 2.1.1 (Insieme di De Giorgi). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in \Omega$, $r \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{R}$.*

Si ponga $A(k, x_0, r) := B_r(x_0) \cap \{u > k\}$.

Una funzione $u \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$ appartiene all'insieme di De Giorgi $DG(\Omega)$ se soddisfa

$$\int_{A(k, x_0, r)} |\nabla u(x)|^2 dx \leq \frac{C}{(R-r)^2} \int_{A(k, x_0, R)} |u(x) - k|^2 dx \quad (2.1.1)$$

$\forall k \in \mathbb{R}$, per q.o. $x_0 \in \Omega$ e $\forall r, R$ t.c. $0 < r < R < d(x_0, \partial\Omega)$.

Osservazione 7. *La condizione (2.1.1) è equivalente alla seguente*

$$\int_{B_r(x_0)} |\nabla(u(x) - k)^+|^2 dx \leq \frac{C}{(R-r)^2} \int_{B_R(x_0)} |(u(x) - k)^+|^2 dx \quad (2.1.2)$$

$\forall k \in \mathbb{R}$, per q.o. $x_0 \in \Omega$ e $\forall r, R$ t.c. $0 < r < R < d(x_0, \partial\Omega)$

$$\text{dove } (u(x) - k)^+ := \max\{0, u(x) - k\} = \begin{cases} u(x) - k & x \in \{u > k\} \\ 0 & x \in \{u \leq k\} \end{cases}$$

Dimostrazione. È sufficiente osservare che per il Lemma (1.1.1)

$$\nabla(u - k)^+ = \begin{cases} \nabla u & x \in \{u > k\} \\ 0 & x \in \{u \leq k\} \end{cases}$$

e che quindi gli integrali sono in realtà calcolati su $B_r(x_0) \cap \{u > k\} = A(k, x_0, r)$ e $B_R(x_0) \cap \{u > k\} = A(k, x_0, R)$. \square

Notazione 6. *D'ora in poi per non appesantire troppo la lettura si scriverà B_R e $A(k, R)$ in luogo di $B_R(x_0)$ e $A(k, x_0, R)$.*

I prossimi risultati mettono in luce il legame tra la classe di De Giorgi e le soluzioni di (1.3.1) e saranno poi utilizzati per dedurre la regolarità hölderiana di tali soluzioni.

Teorema 2.1.1. *Se u è sottosoluzione di (1.3.1) allora $u \in DG(\Omega)$.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in \Omega$. Siano r, R con $0 < r < R < d(x_0, \partial\Omega)$. Sia η una funzione cut-off tra B_r e B_R con $|\nabla\eta| \leq \frac{c}{R-r}$ (cfr. Osservazione (3)). Testando la (1.3.1) con $\phi = v\eta^2$ dove si è posto per semplicità $v = (u - k)^+$ (è lecito per il Lemma (1.1.2)) si ottiene:

$$\int_{\Omega} \langle A\nabla u, \nabla(v\eta^2) \rangle dx = \int_{\Omega} \eta^2 \langle A\nabla u, \nabla v \rangle dx + 2 \int_{\Omega} \eta v \langle A\nabla u, \nabla \eta \rangle dx \leq 0$$

Quindi poiché A ha elementi in $L^\infty(\Omega)$ ((1.3.4))

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \eta^2 \langle A\nabla u, \nabla v \rangle dx &\leq -2 \int_{\Omega} \eta v \langle A\nabla u, \nabla \eta \rangle dx \leq \\ 2 \int_{\Omega} |\eta v| |\langle A\nabla u, \nabla \eta \rangle| dx &\leq 2\Lambda \int_{\Omega} \eta v |\nabla \eta| |\nabla v| dx. \end{aligned}$$

Osservando che gli integrali sono calcolati in realtà su $\Omega \cap \{u > k\}$ (dal momento che i supporti di v e ∇v sono ivi inclusi) e che su questo insieme si ha $\nabla v = \nabla u$ si ottiene per la proprietà di ellitticità (1.3.3):

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} \eta^2 |\nabla v|^2 dx &\leq \int_{\Omega} \eta^2 \langle A\nabla v, \nabla v \rangle dx \leq 2\Lambda \int_{\Omega} \eta v |\nabla v| |\nabla \eta| dx \\ &\leq 2\Lambda \left(\int_{\Omega} \eta^2 |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v|^2 |\nabla \eta|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

per la disuguaglianza di Hölder. Dividendo per $\|\eta \nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ ed elevando al quadrato si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \eta^2 |\nabla v|^2 dx &\leq \left(\frac{2\Lambda}{\lambda} \right)^2 \int_{\Omega} |v|^2 |\nabla \eta|^2 dx = \left(\frac{2\Lambda}{\lambda} \right)^2 \int_{B_R} |v|^2 |\nabla \eta|^2 dx \\ &\leq \left(\frac{2\Lambda}{\lambda} \right)^2 \frac{c^2}{(R-r)^2} \int_{B_R} |v|^2 dx \quad (2.1.3) \end{aligned}$$

per le proprietà di η . Inoltre poiché $\eta^2 |\nabla v|^2 \geq 0$ e $\eta \equiv 1$ su B_r si ha:

$$\int_{\Omega} \eta^2 |\nabla v|^2 dx \geq \int_{B_r} \eta^2 |\nabla v|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx. \quad (2.1.4)$$

Mettendo insieme (2.1.3) e (2.1.4) e ricordando la (2.1.2) segue la tesi con $C = \left(\frac{2\Lambda c}{\lambda} \right)^2$.

□

Teorema 2.1.2. *Se u è soprasoluzione di (1.3.1) allora $-u \in DG(\Omega)$.*

Dimostrazione. Se u è soprasoluzione allora $-u$ è sottosoluzione per l'Osservazione (6). Si conclude utilizzando il Teorema (2.1.1). \square

2.2 Locale limitatezza delle funzioni nella classe di De Giorgi

Questa sezione è volta a dimostrare la locale (essenziale) limitatezza delle funzioni appartenenti all'insieme di De Giorgi. Come si vedrà in seguito questo fatto è importante in quanto permette di affermare che l'oscillazione (essenziale) di tali funzioni è limitata. I prossimi risultati forniscono delle stime integrali che coinvolgono anche la misura degli insiemi di sopralivello.

Proposizione 2.2.1. *Se $u \in DG(\Omega)$ allora $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall x_0 \in \Omega$ e $\forall r, R$ t.c. $0 < r < R < d(x_0, \partial\Omega)$ si ha:*

$$\int_{B_r} |(u(x) - k)^+|^2 dx \leq \frac{C_n}{(R-r)^2} |A(k, R)|^{\frac{2}{n}} \int_{B_R} |(u(x) - k)^+|^2 dx \quad (2.2.1)$$

dove C_n è una costante che dipende solo da n .

Dimostrazione. Sia $0 < r < R < d(x, \partial\Omega)$, $\bar{r} = \frac{R+r}{2}$, quindi $r < \bar{r} < R$. Sia $k \in \mathbb{R}$ e si ponga per semplicità notazionale $v = (u - k)^+$. Dal momento che $u \in DG(\Omega)$:

$$\int_{B_{\bar{r}}} |\nabla v|^2 dx \leq \frac{C}{(R-\bar{r})^2} \int_{B_R} |v|^2 dx = \frac{C}{(R-r)^2} \int_{B_R} |v|^2 dx \quad (2.2.2)$$

Si consideri η funzione cut-off tra $B_{\bar{r}}$ e B_r con $|\nabla\eta| \leq \frac{c}{R-r}$. Per il Lemma (1.1.2) si ha $\nabla(v\eta) = v\nabla\eta + \eta\nabla v$ da cui

$$|\nabla(v\eta)|^2 \leq (|v\nabla\eta| + |\eta\nabla v|)^2 \leq 2(|v\nabla\eta|^2 + |\eta\nabla v|^2).$$

Quindi passando alle disuguaglianze tra gli integrali e utilizzando le proprietà di η :

$$\begin{aligned} \int_{B_{\bar{r}}} |\nabla(v\eta)|^2 dx &\leq 2 \left[\int_{B_{\bar{r}}} |\nabla v|^2 \eta^2 dx + \int_{B_{\bar{r}}} |v|^2 |\nabla\eta|^2 dx \right] \\ &\leq 2 \left[\int_{B_{\bar{r}}} |\nabla v|^2 dx + \frac{c^2}{(R-r)^2} \int_{B_{\bar{r}}} |v|^2 dx \right] \leq \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

poichè $u \in DG(\Omega)$ e $|v|^2 \geq 0$

$$\leq 2 \left[\frac{C}{(R-r)^2} \int_{B_R} |v|^2 dx + \frac{c^2}{(R-r)^2} \int_{B_R} |v|^2 dx \right] \leq 2 \frac{C}{(R-r)^2} \int_{B_R} |v|^2 dx$$

dove nell'ultima disuguaglianza si è utilizzata $C = \max\{C, c^2\}$. Si è quindi ottenuto

$$\int_{B_{\bar{r}}} |\nabla(v\eta)|^2 dx \leq \frac{C}{(R-r)^2} \int_{B_R} |v|^2 dx. \quad (2.2.4)$$

Ora per il Lemma (1.1.2) $\eta v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, quindi applicando la disuguaglianza di Sobolev e ricordando che $\eta \equiv 1$ su B_r :

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_r} |v|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} &= \left(\int_{B_r} |\eta v|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \\ &C_n \int_{B_r} |\nabla(\eta v)|^2 dx \leq C_n \int_{B_{\bar{r}}} |\nabla(\eta v)|^2 dx \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che la funzione integranda è non negativa e $B_{\bar{r}} \subset B_r$. Inoltre risulta

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |v|^2 dx &\leq \left(\int_{B_r} |v|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} |A(k, r)|^{1 - \frac{2}{2^*}} \\ &= \left(\int_{B_r} |v|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} |A(k, r)|^{\frac{2}{n}} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

dalla disuguaglianza di Hölder con $\frac{2}{2^*} > 1$ e osservando che l'integrale è in realtà calcolato su $A(k, r)$. Ora mettendo insieme i risultati precedenti si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |v|^2 dx &\leq |A(k, r)|^{\frac{2}{n}} \left(\int_{B_r} |v|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} && \text{per la (2.2.6)} \\ &\leq C_n |A(k, r)|^{\frac{2}{n}} \int_{B_{\bar{r}}} |\nabla(\eta v)|^2 dx && \text{per la (2.2.5)} \\ &\leq C_n \frac{C}{(R-r)^2} |A(k, r)|^{\frac{2}{n}} \int_{B_R} |v|^2 dx && \text{per la (2.2.4)} \\ &\leq \frac{C_n}{(R-r)^2} |A(k, R)|^{\frac{2}{n}} \int_{B_R} |v|^2 dx \end{aligned}$$

dove nell'ultima disuguaglianza si è sfruttato il fatto che $A(k, r) \subseteq A(k, R)$ e si è utilizzata un'unica costante che dipende solo da n .

□

Notazione 7. Si ponga $\forall h \in \mathbb{R}, \forall r > 0 : B_r \subset \subset \Omega$

$$u(h, r) := \int_{A(h, r)} |u(x) - h|^2 dx. \quad (2.2.7)$$

Proposizione 2.2.2. $\forall h > k, \forall x \in \Omega, \forall r, R : 0 < r < R < d(x, \partial\Omega)$ vale

$$|A(h, r)| \leq \frac{1}{(h-k)^2} u(k, R) \quad (2.2.8)$$

$$u(h, r) \leq \frac{C_n}{(R-r)^2} |A(k, R)|^{\frac{2}{n}} u(k, R). \quad (2.2.9)$$

Dimostrazione. Sia $h > k$. Su $A(h, r)$ si ha $u(x) > h > k$ per cui $u(x) - k > h - k \Rightarrow |u(x) - k|^2 > |h - k|^2$. Quindi

$$(h-k)^2 |A(h, r)| = \int_{A(h, r)} (h-k)^2 dx \leq \int_{A(h, r)} |u(x)-k|^2 dx \leq \int_{A(k, r)} |u(x)-k|^2 dx$$

Dividendo e osservando che $A(k, r) \subset A(k, R)$

$$|A(h, r)| \leq \frac{1}{(h-k)^2} \int_{A(k, r)} |u(x)-k|^2 dx \leq \frac{1}{(h-k)^2} \int_{A(k, R)} |u(x)-k|^2 dx$$

che è la (2.2.8).

Ora $(u(x)-h)^+ \leq (u(x)-k)^+$ implica

$$\begin{aligned} \int_{A(h, r)} |u(x)-h|^2 dx &= \int_{B_r} |(u(x)-h)^+|^2 dx \\ &\leq \int_{B_r} |u(x)-k|^2 dx = \int_{A(k, r)} |u(x)-k|^2 dx \end{aligned}$$

Quindi per la Proposizione (2.2.1)

$$\begin{aligned} \int_{A(h, r)} |u(x)-h|^2 dx &\leq \int_{A(k, r)} |u(x)-k|^2 dx \\ &\leq \frac{C_n}{(R-r)^2} |A(k, R)|^{\frac{2}{n}} \int_{A(k, R)} |u(x)-k|^2 dx \end{aligned}$$

che è la (2.2.9). □

Si considerino due numeri positivi η e ξ . Elevando i membri di (2.2.8) e (2.2.9) rispettivamente a η e a ξ e moltiplicando membro a membro le due disuguaglianze si ha

$$|A(h, r)|^\eta u(h, r)^\xi \leq \frac{C_n^\xi}{(h-k)^{2\eta}(R-r)^{2\xi}} |A(k, R)|^{\frac{2\xi}{n}} u(k, R)^{\xi+\eta}. \quad (2.2.10)$$

Notazione 8. Si ponga $\forall h \in \mathbb{R}, \forall r > 0 : B_r \subset \subset \Omega$

$$\phi(h, r) := |A(h, r)|^\eta u(h, r)^\xi \quad (2.2.11)$$

$$\bar{\phi}(h, r) := |\{u \geq h\} \cap \bar{B}_r|^\eta u(h, r)^\xi. \quad (2.2.12)$$

Si cerca ora di scrivere il secondo membro della disuguaglianza (2.2.10) come potenza di $\phi(k, R)$. Quindi si vuole trovare un $\theta > 0$ tale che $\frac{2\xi}{n} = \eta\theta$ e $\xi + \eta = \xi\theta$. Ricavando η dalla seconda uguaglianza e semplificando si trova che θ deve soddisfare l'equazione di secondo grado: $\theta^2 - \theta - \frac{2}{n} = 0$. Si scelga la soluzione positiva $\theta = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{n+8}{4n}} > 1$.

Così con questa scelta di θ la (2.2.10) si scrive :

$$\phi(h, r) \leq \frac{C_n^\xi}{(R-r)^{2\xi}(h-k)^{2\eta}} \phi(k, R)^\theta, \quad \theta > 1 \quad (2.2.13)$$

Osservazione 8. Dal momento che $\{u > h\} \cap B_r \subseteq \{u \geq h\} \cap \overline{B_r}$ si ha

$$\phi(h, r) \leq \overline{\phi}(h, r). \quad (2.2.14)$$

Lemma 2.2.1. Siano $(k_n)_n, (r_n)_n$ due successioni : $k_n \nearrow k_0$ e $r_n \searrow r_0$, $r_n > 0$. Allora

$$\phi(k_n, r_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \overline{\phi}(k_0, r_0).$$

Dimostrazione. Si ponga $a_n = |\{u > k_n\} \cap B_{r_n}|$

$$\left. \begin{array}{l} k_n \nearrow \Rightarrow \left(\{u > k_n\} \right)_n \searrow \\ r_n \searrow \Rightarrow \left(B_{r_n} \right)_n \searrow \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\{u > k_n\} \cap B_{r_n} \right)_n \searrow.$$

Inoltre $\left| \{u > k_1\} \cap B_{r_1} \right| < +\infty$ quindi

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left| \bigcap_{n=1}^{\infty} (\{u > k_n\} \cap B_{r_n}) \right| = \left| \{u \geq k_0\} \cap \overline{B_{r_0}} \right|. \quad (2.2.15)$$

Si ponga

$$h_n = \int_{B_{r_n}} |(u(x) - k_n)^+|^2 dx = \int_{B_{r_1}} |(u(x) - k_n)^+|^2 \mathcal{X}_{B_r} dx$$

poiché $B_{r_1} \supseteq B_{r_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Ora

$$|(u(x) - k_n)^+|^2 \mathcal{X}_{B_{r_n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |(u(x) - k_0)^+|^2 \mathcal{X}_{B_{r_0}} \quad \text{puntualmente q.o.}$$

La successione $f_n = |(u - k_n)^+|^2$ è \searrow . Quindi $|f_n \mathcal{X}_{B_{r_n}}| \leq |f_n| \leq |f_1| = |(u - k_1)^+|^2 \in L^1(B_{r_1})$. Quindi per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue

$$h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{B_{r_1}} |(u(x) - k_0)^+|^2 \mathcal{X}_{B_{r_0}} dx = \int_{B_{r_0}} |(u(x) - k_0)^+|^2 dx \quad (2.2.16)$$

Mettendo insieme (2.2.15) e (2.2.16) si ottiene

$$\phi(k_n, r_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left| \{u \geq k_0\} \cap \overline{B_{r_0}} \right|^\eta u(k_0, r_0)^\xi$$

cioè la tesi. □

Proposizione 2.2.3. Sia $R_0 > 0 : B_{R_0} \subset\subset \Omega$. Allora $\forall k_0 \in \mathbb{R}$ e $\forall \sigma \in]0, 1[\quad \exists d \in \mathbb{R} :$

$$\phi(k_0 + d, R_0 - \sigma R_0) = 0. \quad (2.2.17)$$

In particolare d soddisfa la relazione

$$d^{2\eta} = \frac{2^{(2\xi+2\eta)\frac{\theta}{\theta-1}} c^\xi}{\sigma^{2\xi} R_0^{2\xi}} \phi(k_0, R_0)^{\theta-1} \quad (2.2.18)$$

Dimostrazione. Si considerino le successioni

$$k_n = k_0 + d - \frac{d}{2^n} \nearrow k_0 + d \quad (2.2.19)$$

$$r_n = R_0 - \sigma R_0 + \frac{\sigma R_0}{2^n} \searrow R_0 - \sigma R_0. \quad (2.2.20)$$

Si dimostra che $\forall n \geq 1$ vale

$$\phi(k_n, r_n) \leq \frac{\phi(k_0, R_0)}{2^{\lambda n}}, \quad \lambda = \frac{2\xi + 2\eta}{\theta - 1}. \quad (2.2.21)$$

Infatti per $n=1$ poiché $k_1 > k_0$ e $r_1 < R_0$ per (2.2.10) si ha

$$\begin{aligned} \phi(k_1, r_1) &= \phi\left(k_0 + \frac{d}{2}, R_0 - \frac{\sigma R_0}{2}\right) \leq \frac{c^\xi}{\left(\frac{\sigma R_0}{2}\right)^{2\xi} \left(\frac{d}{2}\right)^{2\eta}} \phi(k_0, R_0)^\theta \\ &= \frac{2^{2\xi+2\eta}}{2^{(2\xi+2\eta)\frac{\theta}{\theta-1}}} \phi(k_0, R_0) = \frac{\phi(k_0, R_0)}{2^{\frac{2\xi+2\eta}{\theta-1}}}. \end{aligned}$$

Supponendo che valga per n , poiché $k_{n+1} > k_n$ e $r_{n+1} < r_n$ si ha per l'ipotesi induttiva:

$$\begin{aligned} \phi(k_{n+1}, r_{n+1}) &\leq \frac{c^\xi \phi(k_n, r_n)^\theta}{\left(\frac{\sigma R_0}{2^{n+1}}\right)^{2\xi} \left(\frac{d}{2^{n+1}}\right)^{2\eta}} = \frac{2^{(n+1)(2\xi+2\eta)}}{2^{(2\xi+2\eta)\frac{\theta}{\theta-1}}} \frac{\phi(k_n, r_n)^\theta}{\phi(k_0, R_0)^{\theta-1}} \\ &\leq \frac{2^{(n+1)(2\xi+2\eta)}}{2^{(2\xi+2\eta)\frac{\theta}{\theta-1}} \phi(k_0, R_0)^{\theta-1}} \frac{\phi(k_0, R_0)^\theta}{2^{\frac{2\xi+2\eta}{\theta-1} n \theta}} = \frac{\phi(k_0, R_0)}{2^{\lambda(n+1)}}. \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Quindi per induzione la (2.2.21) vale $\forall n \geq 1$, e ricordando il Lemma (2.2.1) si ottiene

$$\bar{\phi}(k_0 + d, R_0 - \sigma R_0) \leq 0$$

che insieme all'osservazione (8) fornisce

$$0 \leq \phi(k_0 + d, R_0 - \sigma R_0) \leq \bar{\phi}(k_0 + d, R_0 - \sigma R_0) \leq 0$$

da cui la tesi. \square

Dal risultato precedente segue ora una stima generale dall'alto dell'estremo superiore essenziale di una funzione in $DG(\Omega)$.

Teorema 2.2.1. *Sia $u \in DG(\Omega)$, $r > 0 : B_r \subset\subset \Omega$. Allora $\forall k_0 \in \mathbb{R}$ vale*

$$\sup_{B_{r/2}} \text{ess } u \leq k_0 + c \left(\frac{1}{r^n} \int_{A(k_0, r)} |u - k_0|^2 dx \right)^{1/2} \left(\frac{|A(k_0, r)|}{r^n} \right)^{\frac{\theta-1}{2}}. \quad (2.2.23)$$

Dimostrazione. Preso $\sigma = 1/2$ dalla proposizione (2.2.17) si ha:

$$0 = \phi(k_0 + d, r/2) = |\{u > k_0 + d\} \cap B_{r/2}|^n \left(\int_{A(k_0+d, r/2)} |u - (k_0 + d)|^2 dx \right)^\xi$$

da cui o

$$|\{u > k_0 + d\} \cap B_{r/2}| = 0$$

cioè

$$\sup_{B_{r/2}} \text{ess } u \leq k_0 + d$$

o

$$\int_{A(k_0+d, r/2)} |u - (k_0 + d)|^2 dx = 0$$

e dato che $|u - (k_0 + d)| > 0$ in $A(k_0 + d, r/2)$ anche in questo caso segue

$$|A(k_0 + d, r/2)| = 0.$$

Ora dalla (2.2.18) si ha

$$d = \frac{C}{r^{\frac{n}{2}}} |A(k_0, r)|^{\frac{\theta-1}{2}} \left(\int_{A(k_0, r)} |u(x) - k_0|^2 dx \right)^{(\theta-1)\frac{\xi}{2\eta}}.$$

Ricordando che $\frac{2\xi}{n} = \eta\theta$ si ha $\frac{\xi}{\eta} = n\frac{\theta}{2} = \frac{n}{2} + n\frac{\theta-1}{2}$, mentre da $\xi + \eta = \xi\theta$ segue $\frac{\xi}{2\eta}(\theta - 1) = \frac{1}{2}$, e quindi la tesi. \square

Segue quindi che per una funzione in $DG(\Omega)$ l'estremo superiore essenziale su una palla si controlla con una 'media integrale quadratica' fatta su una palla di raggio doppio:

Teorema 2.2.2. *Se $u \in DG(\Omega)$ allora $\forall r > 0 : B_r \subset\subset \Omega$ si ha*

$$\sup_{B_{r/2}} \text{ess } u \leq c \left(\int_{B_r} |u|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (2.2.24)$$

Dimostrazione. Dal teorema precedente scegliendo $k_0 = 0$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \sup_{B_{r/2}} \text{ess } u &\leq c \left(\frac{1}{r^n} \int_{A(0, r)} |u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\frac{|A(0, r)|}{r^n} \right)^{\frac{\theta-1}{2}} \\ &\leq c \left(\frac{1}{r^n} \int_{A(0, r)} |u|^2 dx \right)^{1/2} \omega_n^{\frac{\theta-1}{2}} \leq c \omega_n^{\frac{\theta}{2}} \left(\frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r} |u|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

\square

Osservazione 9. *Se $-u \in DG(\Omega)$ applicando il risultato precedente si ottiene:*

$$\sup_{B_{R/2}} \text{ess } (-u) \leq c \left(\int_{B_R} |-u|^2 dx \right)^{1/2}$$

quindi

$$\inf_{B_{R/2}} \text{ess } u \geq -c \left(\int_{B_R} |u|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (2.2.25)$$

Dal Teorema (2.2.2) e da (2.2.25) ricordando che se u è soluzione di (1.3.1) allora u e $-u \in DG(\Omega)$ si ottiene il risultato fondamentale del paragrafo riguardante la locale limitatezza:

Teorema 2.2.3. *Se u è soluzione di (1.3.1) allora $u \in L_{loc}^\infty(\Omega)$. Precisamente $\forall r > 0 : B_r \subset\subset \Omega$ vale*

$$\|u\|_{L^\infty(B_{r/2})} \leq c \left(\int_{B_r} |u|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (2.2.26)$$

2.3 Il Teorema di De Giorgi

Questo paragrafo contiene il risultato principale dell'esposizione, il teorema di De Giorgi sulla regolarità hölderiana delle funzioni in $DG(\Omega)$, quindi delle soluzioni di (1.3.1).

Notazione 9. *Sia $x \in \Omega$, $r > 0 : r < d(x, \partial\Omega)$. Si utilizzeranno in seguito le notazioni*

$$M(r) := \sup_{B_r} u \quad m(r) := \inf_{B_r} u$$

dove come al solito B_r è centrata in x .

Lemma 2.3.1. *Sia $x \in \Omega$, $r > 0 : 2r < d(x, \partial\Omega)$. Posto $K_0 = \frac{M(2r)+m(2r)}{2}$ e $k_i = M(2r) - \frac{M(2r)-K_0}{2^i}$ si ha che se $|A(K_0, r)| \geq \frac{1}{2}|B_r|$ allora $\forall m > \bar{m}$*

$$|A(k_m, r)| \leq C_n r^n \left(\frac{1}{m} \right)^N \quad \text{con } N = \frac{n}{2n-2} \quad (2.3.1)$$

Dimostrazione. Siano $h > k > K_0$ e si ponga

$$v(x) := \min\{u(x), h\} - \min\{u(x), k\} = \begin{cases} h - k & x \in \{u \geq h\} \\ u(x) - k & x \in \{k < u < h\} \\ 0 & x \in \{u \leq k\}. \end{cases}$$

Da questa espressione di v si può osservare che negli insiemi $\{u \geq h\}$ e $\{k < u < h\}$ si ha $v(x) \neq 0$, perché nel primo è una costante strettamente positiva e nel secondo vale banalmente $u(x) - k > 0$.

In definitiva $v(x)=0$ solo per gli $x \in \{u \leq k\}$. Da questo, dal fatto che $\{u \leq k\} \supseteq \{u < K_0\}$ e sfruttando l'ipotesi si ha

$$|B_r \cap \{v = 0\}| = |B_r \cap \{u \leq k\}| \geq |B_r \cap \{u < K_0\}| \geq \frac{1}{2}|B_r|. \quad (2.3.2)$$

Applicando la disuguaglianza di Sobolev a $v(x)$ con $p=1$

$$\left(\int_{B_r} |v|^{\frac{n-1}{n}} dx \right)^{\frac{n}{n-1}} \leq C_n \int_{B_r} |\nabla v| dx = C_n \int_{A(k,r) \setminus A(h,r)} |\nabla u| dx \quad (2.3.3)$$

dal momento che $\nabla v = \nabla u$ in $\{k < u < h\}$ mentre si annulla altrove per il Lemma (1.1.1). Ora scrivendo la misura di un insieme come integrale della

funzione 1 e portando dentro la costante $h - k$ si ha

$$\begin{aligned} (h - k)|A(h, r)|^{\frac{n-1}{n}} &= \left(\int_{A(h, r)} (h - k)^{\frac{n-1}{n}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\int_{A(h, r)} |v|^{\frac{n-1}{n}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &\leq C_n \int_{A(k, r) \setminus A(h, r)} |\nabla u| dx \leq C_n |A(k, r) \setminus A(h, r)|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{A(k, r) \setminus A(h, r)} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

dove le ultime disuguaglianze seguono rispettivamente dalla (2.3.3) e dalla disuguaglianza di Hölder applicata alle funzioni 1 e $|\nabla u|$.

Adesso elevando al quadrato e osservando banalmente che

$A(k, r) \setminus A(h, r) \subseteq A(k, r)$ e che la funzione integranda è non negativa si ottiene

$$\begin{aligned} (h - k)^2 |A(h, r)|^{\frac{2n-2}{n}} &\leq C_n |A(k, r) \setminus A(h, r)| \int_{A(k, r) \setminus A(h, r)} |\nabla u|^2 dx \\ &\leq C_n |A(k, r) \setminus A(h, r)| \int_{A(k, r)} |\nabla u|^2 dx \leq \\ &\leq C_n |A(k, r) \setminus A(h, r)| \frac{C}{r^2} \int_{A(k, r)} |u(x) - k|^2 dx \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che $u \in DG(\Omega)$.

Ora poiché $u(x) - k \leq M(2r) - k$ e $|A(k, 2r)| \leq |B_{2r}| = \omega_n r^n$ si ha

$$\begin{aligned} C_n |A(k, r) \setminus A(h, r)| \frac{C}{r^2} \int_{A(k, r)} |u(x) - k|^2 dx \\ \leq \frac{C_n}{r^2} |A(k, r) \setminus A(h, r)| |M(2r) - k|^2 |A(k, 2r)| \\ \leq \frac{C_n}{r^2} |A(k, r) \setminus A(h, r)| |M(2r) - k|^2 \omega_n r^n \\ = C_n r^{n-2} (|A(k, r)| - |A(h, r)|) |M(2r) - k|^2 \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

dove si è indicato con C_n il prodotto di costanti dipendenti solo da n e si è usato il fatto che la misura della differenza di due insiemi (di misura finita) di cui uno include l'altro è la differenza delle misure.

Mettendo ora insieme (2.3.4) e (2.3.5) si ha:

$$(h - k)^2 |A(h, r)|^{\frac{2n-2}{n}} \leq C_n r^{n-2} |M(2r) - k|^2 (|A(k, r)| - |A(h, r)|). \quad (2.3.6)$$

Ora per semplicità si scriva M in luogo di $M(2r)$ e si consideri la successione

$$k_i = M - \frac{M - K_0}{2^i} \nearrow M.$$

Si osservi che $k_0 = K_0$. Inoltre un semplice calcolo mostra che

$$k_i - k_{i-1} = \frac{M - k_0}{2^i} \quad (2.3.7a)$$

$$M - k_{i-1} = \frac{M - k_0}{2^{i-1}}. \quad (2.3.7b)$$

Usando (2.3.6) e (2.3.7b) per $k_i > k_{i-1}$ si ottiene $\forall i \geq 1$

$$\begin{aligned} (k_i - k_{i-1})^2 |A(k_i, r)|^{\frac{2n-2}{n}} &\leq C_n r^{n-2} |M - k_i|^2 (|A(k_{i-1}, r)| - |A(k_i, r)|) \\ &= C_n r^{n-2} \frac{|M - K_0|^2}{2^{2i-2}} (|A(k_{i-1}, r)| - |A(k_i, r)|). \end{aligned}$$

Considerando ora (2.3.7a)

$$\frac{|M - K_0|^2}{2^{2i}} |A(k_i, r)|^{\frac{2n-2}{n}} \leq C_n r^{n-2} \frac{|M - K_0|^2}{2^{2i-2}} (|A(k_{i-1}, r)| - |A(k_i, r)|)$$

e semplificando si giunge a

$$|A(k_i, r)|^{\frac{2n-2}{n}} \leq C_n r^{n-2} (|A(k_{i-1}, r)| - |A(k_i, r)|). \quad (2.3.8)$$

Sia $m \in \mathbb{N}$. $\forall i \leq m$ vale $|A(k_i, r)| \geq |A(k_m, r)|$. Sommando da i a m

$$\sum_{i=1}^m |A(k_i, r)|^{\frac{2n-2}{n}} \geq \sum_{i=1}^m |A(k_m, r)|^{\frac{2n-2}{n}} = m |A(k_m, r)|^{\frac{2n-2}{n}}.$$

Quindi usando (2.3.8)

$$m |A(k_m, r)|^{\frac{2n-2}{n}} \leq \sum_{i=1}^m |A(k_i, r)|^{\frac{2n-2}{n}} \leq \quad (2.3.9)$$

$$C_n r^{n-2} \sum_{i=1}^m (|A(k_{i-1}, r)| - |A(k_i, r)|) =$$

(essendo una somma telescopica)

$$= C_n r^{n-2} (|A(k_0, r)| - |A(k_m, r)|) \leq C_n r^{n-2} |A(k_0, r)|. \quad (2.3.10)$$

Mettendo insieme (2.3.9) e (2.3.10)

$$\begin{aligned} |A(k_m, r)| &\leq (C_n r^{n-2} |A(k_0, r)|)^{\frac{n}{2n-2}} \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{n}{2n-2}} \leq (C_n r^{n-2} |B_r|)^{\frac{n}{2n-2}} \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{n}{2n-2}} \\ &= (C_n r^{n-2} \omega_n r^n)^{\frac{n}{2n-2}} \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{n}{2n-2}} = C_n r^n \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{n}{2n-2}}. \end{aligned}$$

□

Notazione 10. Si ponga $\forall r > 0 : B_r \subset\subset \Omega$

$$\omega(r) := M(r) - m(r) \quad (2.3.11)$$

che è l'oscillazione essenziale di una funzione sulla palla di raggio r . Si osservi che siccome le funzioni in $DG(\Omega)$ sono limitate lo è anche la loro oscillazione essenziale.

Il prossimo risultato mostra una stima di riduzione dell'oscillazione essenziale di funzioni che con le loro opposte appartengono a $DG(\Omega)$ da una palla ad una concentrica di raggio minore. Più precisamente:

Teorema 2.3.1. *Se u e $-u \in DG(\Omega)$, allora $\forall r > 0 : B_{2r} \subset\subset \Omega$ vale*

$$\omega\left(\frac{r}{2}\right) \leq A\omega(2r) \quad (2.3.12)$$

dove A è una costante minore di 1 indipendente da r .

Dimostrazione. Si osservi che

$$\begin{aligned} K_0(u) &= \frac{1}{2} \left(\sup_{B_r} \text{ess } u + \inf_{B_r} \text{ess } u \right) = -\frac{1}{2} \left(\inf_{B_r} \text{ess } (-u) + \sup_{B_r} \text{ess } (-u) \right) \\ &= -K_0(-u). \end{aligned}$$

Quindi $\{u \leq K_0(u)\} = \{-u \geq K_0(-u)\}$, per cui se

$$|B_r \cap \{u \geq K_0(u)\}| \leq \frac{1}{2}|B_r|$$

si ha

$$|B_r \cap \{-u \geq K_0(-u)\}| = |B_r \cap \{u \leq K_0(u)\}| > \frac{1}{2}|B_r|.$$

Perciò a meno di utilizzare $-u$ al posto di u , si può assumere $|B_r \cap \{u \geq K_0(u)\}| > \frac{1}{2}$ e si scriverà $K_0 = K_0(u)$. Dal Teorema (2.2.1) con $k_i = M(2r) - \frac{(M(2r)-m(2r))}{2^{i+1}} = M - \frac{M-K_0}{2^i}$ si ha:

$$M\left(\frac{r}{2}\right) = \sup_{B_{r/2}} \text{ess } u \leq k_i + \frac{C}{r^{n/2}} \left(\int_{A(k_i, r)} |u(x) - k_i|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{|A(k_i, r)|}{r^n} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.3.13)$$

Ora su $A(k_i, r)$ si ha $u(x) - k_i \leq M(2r) - k_i$ quindi

$$\int_{A(k_i, r)} |u(x) - k_i|^2 dx \leq (M(2r) - k_i)^2 |A(k_i, r)|$$

e dalla (2.3.13) segue

$$\begin{aligned} M\left(\frac{r}{2}\right) &\leq k_i + C \left(\frac{|A(k_i, r)|}{r^n} \right)^{\frac{1}{2}} (M(2r) - k_i) \left(\frac{|A(k_i, r)|}{r^n} \right)^{\frac{\theta-1}{2}} \\ &= k_i + C(M(2r) - k_i) \left(\frac{|A(k_i, r)|}{r^n} \right)^{\frac{\theta}{2}}. \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Per il Lemma (2.3.1)

$$C \left(\frac{|A(k_i, r)|}{r^n} \right)^{\frac{\theta}{2}} \leq C_n \left(\frac{1}{i} \right)^{\frac{n\theta}{4n-4}} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$$

quindi $\exists \nu \in \mathbb{N}$ (indipendente da r) tale che

$$C \left(\frac{|A(k_i, r)|}{r^n} \right)^{\frac{\theta}{2}} < \frac{1}{2}. \quad (2.3.15)$$

Allora da (2.3.14) e (2.3.15) :

$$M \left(\frac{r}{2} \right) \leq k_\nu + \frac{M(2r) - k_\nu}{2} = \frac{1}{2}k_\nu + \frac{1}{2}M(2r) = M(2r) - \frac{M(2r) - m(2r)}{2^{\nu+2}}.$$

Sottraendo ad ambo i membri $m(\frac{r}{2})$

$$\omega \left(\frac{r}{2} \right) = M \left(\frac{r}{2} \right) - m \left(\frac{r}{2} \right) \leq M(2r) - m \left(\frac{r}{2} \right) - \frac{M(2r) - m(2r)}{2^{\nu+2}}.$$

Dal momento che $m(\frac{r}{2}) \geq m(2r)$ si ha:

$$\omega \left(\frac{r}{2} \right) \leq (M(2r) - m(2r)) \left(1 - \frac{1}{2^{\nu+2}} \right) = A\omega(2r) \quad (2.3.16)$$

dove $A = A_\nu$ dipende solo da ν , $0 < A = 1 - \frac{1}{2^{\nu+2}} < 1$. □

Si mostrano due lemmi che permetteranno di utilizzare la stima precedente sulla riduzione dell'oscillazione per dimostrare il carattere hölderiano di funzioni in $DG(\Omega)$.

Lemma 2.3.2. *Sia $(a_n)_n$ una successione numerica infinitesima decrescente e sia $t \in \mathbb{R}$, $0 < t < a_1$. Allora $\exists k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ t.c. $a_k < t \leq a_{k-1}$*

Dimostrazione. Poichè la successione è infinitesima e $t > 0$

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : a_n < t \quad \forall n > \bar{n}.$$

Ponendo

$$k := \min\{n > \bar{n} \mid a_n < t\} > 1.$$

Allora si ha che $a_k < t \leq a_{k-1}$ per la decrescenza e la definizione di k . □

Lemma 2.3.3. *Sia $R > 0$, $\phi : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ una funzione crescente ed esistano due costanti positive $C, A < 1$ tali che*

$$\phi(Ct) \leq A\phi(t) \quad \forall t \leq R. \quad (2.3.17)$$

Allora

$$\exists \alpha > 0 \quad \text{t.c.} \quad \phi(t) \leq \frac{1}{A} \left(\frac{t}{R} \right)^\alpha \phi(R) \quad \forall t < R.$$

Dimostrazione. Poichè $C < 1$ la successione $c_n = C^{n-1}$ è strettamente decrescente e tende a zero per k che tende all'infinito.

Sia $t < R$. Allora $\frac{t}{R} < 1 = c_1$ e per il lemma precedente

$$\exists k \in \mathbb{N} : C^{k+1} < \frac{t}{R} \leq C^k.$$

Dalla monotonia di ϕ e iterando k volte la proprietà (2.3.17) segue

$$\phi(t) \leq \phi(C^k R) \leq A\phi(C^{k-1}R) \leq A^2\phi(C^{k-2}R) \leq \dots \leq A^k\phi(R). \quad (2.3.18)$$

Ora $C^{k+1} < \frac{t}{R}$, quindi $k > -1 + \log_C \frac{t}{R}$ e ricordando che $A < 1$ si ha

$$\begin{aligned} A^k\phi(R) &\leq A^{-1}A^{\log_C \frac{t}{R}}\phi(R) = \frac{1}{A} (C^{\log_C A})^{\log_C \frac{t}{R}} \phi(R) \\ &= \frac{1}{A} \left(\frac{t}{R}\right)^{\log_C \frac{t}{R}} \phi(R). \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Ponendo $\alpha := \log_C A$ e mettendo insieme (2.3.18) e (2.3.19) si ha la tesi. \square

Osservazione 10. *Si osservi che se $C < A$ nel teorema precedente si ha $\alpha \in]0, 1[$.*

Sfruttando la teoria precedente è ora possibile dimostrare il

Teorema 2.3.2 (De Giorgi). *Se u e $-u$ appartengono a $DG(\Omega)$, allora $\exists \alpha \in]0, 1[: u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.*

Dimostrazione. $\omega(r) = \sup_{B_r} u - \inf_{B_r} u$ è una funzione crescente.

Sia $R > 0 : R < d(x, \partial\Omega)$. Il Teorema (2.3.1) stabilisce la disuguaglianza

$$\omega(Cr) \leq A\omega(r) \quad \forall r > 0 : r \leq R$$

dove $C = 1/4$, $A = A_\nu < 1$. È allora possibile applicare il Lemma (2.3.3):

$$\omega(r) \leq \frac{1}{A} \left(\frac{r}{R}\right)^\alpha \omega(R) \quad \forall r < R. \quad (2.3.20)$$

Da questo seguirà la (locale) hölderianità di u .

Si osservi innanzitutto che $\alpha \in]0, 1[$ purché ν sia abbastanza grande in modo che $A = 1 - \frac{1}{2\nu+2} > \frac{1}{4} = C$. Siano $x, y \in B_R$, $|x - y| = r < R$. Allora utilizzando la (2.3.20)

$$|u(x) - u(y)| \leq \omega(r) \leq \frac{1}{A} \left(\frac{r}{R}\right)^\alpha \omega(R) = \left(\frac{1}{A} \frac{\omega(R)}{R^\alpha}\right) |x - y|^\alpha = L|x - y|^\alpha$$

quindi $u \in C^{0,\alpha}(B_R)$. Dall'arbitrarietà di R , $R < d(x, \partial\Omega)$ segue la tesi. \square

Corollario 2.3.1. *Se u è soluzione di (1.3.1) allora $\exists \alpha \in]0, 1[: u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$*

Dimostrazione. Segue direttamente dai Teoremi (2.1.1) e (2.1.2) e dal Teorema di De Giorgi. \square

Bibliografia

- [1] E. De Giorgi. *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*. Mem. Accad. Sci. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., Torino, 1957.
- [2] M. Giaquinta. *Introduction to regularity theory for nonlinear elliptic systems*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.
- [3] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.
- [4] E. Giusti. *Equazioni ellittiche del secondo ordine*. Pitagora Editrice, Bologna, 1978.