ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

STIME SUBELLITTICHE PER OPERATORI SOMMA DI QUADRATI

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
BRUNO FRANCHI

Presentata da:
LAURA VENIERI

I Sessione
Anno Accademico 2010/2011

Introduzione

Le equazioni differenziali alle derivate parziali di secondo ordine con forma caratteristica non negativa e degenere comparvero in letteratura fin dai primi anni del 1900, studiate da M. Picone.

Il loro interesse applicativo, in particolare in fisica per processi di diffusione, fu scoperto successivamente da A.D. Fokker, M. Planck e A.N. Kolmogorov, per poi trovare riscontro in diversi ambiti di ricerca teorica e applicata, fra cui geometria di Cauchy-Riemann, calcolo delle variazioni, superfici minimali e convessità in insiemi sub-Riemanniani, teoria cinetica dei gas e modelli matematici in finanza.

Per un'introduzione storica completa e una bibliografia esaustiva sulle equazioni di secondo ordine con forma caratteristica non negativa e degenere rinviamo a [1], dove viene presentato un quadro aggiornato delle ricerche nel settore.

Fichera fu il primo a compiere studi sistematici sui problemi al contorno per operatori ellittico-parabolici e nel 1956 provò teoremi di esistenza di soluzioni deboli del problema di Dirichlet.

Alcuni anni più tardi O.A. Oleĭnik, E.V. Radevič, J.J. Kohn e L. Niremberg dimostrarono diversi risultati di esistenza e regolarità per operatori ellittico-parabolici.

I risultati più interessanti vennero raggiunti studiando le proprietà di regolarità delle soluzioni di equazioni ellittico-paraboliche dipendenti solo da proprietà geometriche dell'operatore. Particolare importanza ha il teorema dimostrato da L. Hörmander nel 1967.

Teorema 0.0.1 (Teorema di Hörmander)**.** *Siano $X_1, \dots, X_m$ e Y campi vettoriali regolari, cioè operatori differenziali di primo ordine con coefficienti C^∞ nell'aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Se in ogni punto $x \in \Omega$ si possono trovare N operatori linearmente indipendenti fra $X_1, \dots, X_m, Y$ e tutti i loro commutatori, allora l'operatore*

$$L = \sum_{j=1}^{m} X_j^2 + Y$$

è ipoellittico, cioè ogni distribuzione u che soddisfa Lu=f è di classe C^∞ in ogni aperto $V \subset \Omega$ tale che $f \in C^\infty(V)$.

Il significato geometrico della condizione del teorema di Hörmander è stato chiarito da C. Caratheodory, W.L. Chow e P.K. Rashevsky mediante il seguente teorema.

Teorema 0.0.2. *Se sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Hörmander, allora dati due punti $x, y \in \Omega$, sufficientemente vicini, esiste una curva regolare a tratti, contenuta in Ω e che collega x e y, che è la somma di traiettorie integrali dei campi vettoriali $\pm X_1, \dots, \pm X_m, \pm Y$.*

Dato un campo vettoriale $X = \sum_{j=1}^N a_j \partial_j$, si dice che una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$, con I intervallo reale, è una traiettoria integrale di X se

$$\dot{\gamma}(t) = (a_1(t), \dots, a_N(t))$$

per ogni $t \in I$.

Presentiamo due semplici esempi.

Esempio 0.1. Si considerano in $\mathbb{R}^2$ i due campi vettoriali $X_1 = \partial_x$, $X_2 = x\partial_y$ e l'operatore $L = X_1^2 + X_2^2$.

Dato che $[X_1, X_2] = \partial_x(x\partial_y) - x\partial_y(\partial_x) = \partial_y + x\partial_{xy} - x\partial_{yx} = \partial_y$, si ha che X_1 e $[X_1, X_2]$ sono linearmente indipendenti, cioè soddisfano la condizione di Hörmander. Per il teorema di Chow, quindi, dati due punti (a, b) e (a', b') in $\mathbb{R}^2$ si può trovare una curva che li congiunge che sia somma di traiettorie integrali dei campi $\pm X_1, \pm X_2$.

Si possono considerare, senza perdere generalità, i due punti allineati in orizzontale o in verticale poiché, nel caso in cui non lo fossero potrebbero essere congiunti mediante un tratto di curva orizzontale e un tratto verticale.

Se i due punti sono allineati orizzontalmente, cioè sono del tipo (a, b) e (a', b), si cerca una curva $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ tale che $\dot{\gamma}(t) = (1, 0)$ e $\gamma(0) = (a, b)$. Si trova che $\gamma(t) = (t + a, b)$ soddisfa le richieste, quindi il punto di arrivo viene raggiunto in un tempo pari a $t = a' - a$.

Se, invece, i punti sono allineati verticalmente, cioè sono del tipo (a, b) e (a, b') bisogna distinguere due casi a seconda che a sia o meno uguale a 0.

Se $a \neq 0$ allora si cerca una curva $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ che congiunga i due punti con $\dot{\gamma}(t) = (0, \gamma_1(t))$ e $\gamma(0) = (a, b)$. Si trova quindi $\gamma(t) = (a, at+b)$. Il punto di arrivo viene raggiunto quando $at + b = b'$, cioè in un tempo $t = \frac{b'-b}{a}$. Se a è piccolo, cioè se il punto di partenza è vicino all'asse x, allora il tempo impiegato per raggiungere il secondo punto può essere molto grande.

Se $a = 0$ allora non si può andare da $(0, b)$ a $(0, b')$ lungo un segmento verticale ma bisogna percorrere un tratto orizzontale fino ad un punto (a, b), poi un tratto verticale fino a (a, b') e infine un altro orizzontale per raggiungere $(0, b')$.

In questo caso se a è grande allora si impiega molto tempo per percorrere i due segmenti orizzontali ma poco per percorrere quello verticale, se a è piccolo avviene invece il contrario. Il tempo totale è dato da $t = \frac{b'-b}{a} + a$. Si trova che il tempo è minimo quando $\frac{b'-b}{a} = a$, cioè $a = \sqrt{b'-b}$, ossia il tempo è dell'ordine di $\sqrt{b'-b}$.

Esempio 0.2. Si considerano in $\mathbb{R}^3$ i due campi vettoriali $X_1 = \partial_x - \frac{1}{2}y\partial_z$, $X_2 = \partial_y + \frac{1}{2}x\partial_z$ e l'operatore $L = X_1^2 + X_2^2$, il cosiddetto sub-Laplaciano del gruppo di Heisenberg.

Dato che $[X_1, X_2] = \partial_{xy} + \frac{1}{2}\partial_z + \frac{1}{2}x\partial_{xz} - \frac{1}{2}y\partial_{yz} - \frac{1}{4}xy\partial_{zz} - \partial_{xy} + \frac{1}{2}\partial_z + \frac{1}{2}y\partial_{yz} - \frac{1}{2}x\partial_{xz} + \frac{1}{4}xy\partial_{zz} = \partial_z$, si ha che X_1, X_2 e $[X_1, X_2]$ sono linearmente indipendenti quindi soddisfano la condizione di Hörmander. Così l'operatore L è ipoellittico e vale il teorema di Chow.

In questa tesi viene presentata una dimostrazione del teorema di Hörmander proposta da J.J. Kohn, che fa uso di alcune nozioni elementari sugli operatori pseudodifferenziali e il cui punto cruciale è la prova della stima subellittica $||u||_\epsilon \leq C(||Pu|| + ||u||)$ per $u \in C_0^\infty$, dove P è un operatore del tipo di quelli che compaiono nel teorema.

Il Capitolo 1 contiene alcune definizioni utili nel seguito ed è suddiviso in tre parti riguardanti le distribuzioni, gli operatori differenziali e gli operatori pseudodifferenziali.

Il Capitolo 2 contiene invece la dimostrazione della stima subellittica, preceduta da quella di una stima di energia sulla quale si basa. Termina con un lemma di localizzazione della stima subellittica.

Nel Capitolo 3 viene infine proposta la dimostrazione del fatto che la stima subellittica implica l'ipoellitticità per l'operatore P considerato.

Indice

Capitolo 1

Definizioni

1.1 Distribuzioni

Le distribuzioni possono essere considerate come generalizzazioni delle funzioni. Per definirle è necessario introdurre lo spazio delle *funzioni test*, che è lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ delle funzioni $C_0^\infty(\Omega)$ con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$.

Si dice che una successione $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\Omega)$ converge a $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se:

- $\exists$ K compatto, $K \subset \Omega$, tale che $supp\phi_k \subseteq K \ \forall k \in \mathbb{N}$
- $\forall$ multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ la successione delle derivate $D^\alpha(\phi_k)$ converge uniformemente a $D^\alpha\phi$, dove $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ con $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Definizione 1.1. Una **distribuzione** T è un funzionale lineare $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ tale che se $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a ϕ in $\mathcal{D}(\Omega)$ allora $T(\phi_k)$ converge a $T(\phi)$.
Si scrive $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Una funzione $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ può essere vista come una distribuzione, ponendo per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$T_f(\phi) = \int_\Omega f\phi dx.$$

Una proprietà fondamentale delle distribuzioni è che sono derivabili quante volte si vuole.

Data una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, si definisce la sua derivata di ordine α come segue:

$$D^\alpha T(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi)$$

per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

La *trasformata di Fourier* non può essere definita per distribuzioni qualunque, ma solo per quelle temperate. In questo caso lo spazio delle funzioni test è lo spazio di Schwartz:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \lim_{x\to\infty} x^\alpha D^\beta u(x) = 0 \ \forall \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n\}.$$

Si dice che $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge a 0 in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \phi_k| \to 0$ per $x \to \infty$ per ogni $\alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$.

Definizione 1.2. Una *distribuzione temperata* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è un funzionale lineare $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ tale che $T(\phi_k) \to 0$ se $\phi_k \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Si ha che $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
Data $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ si definisce la sua trasformata di Fourier come segue:

$$\hat{T}(\phi) = T(\hat{\phi})$$

per ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definizione 1.3. Sia $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e sia $s \in \mathbb{R}$.
Si dice che $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ (*spazio di Sobolev*) se $\hat{u}(\xi)(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, dove $\hat{u}(\xi)$ è la trasformata di Fourier di u.
In tal caso si pone:

$$||u||_s^2 = \int |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi.$$

Si ha il seguente lemma:

Lemma 1.1.1. *Siano $s, t \in \mathbb{R}$. Se $s < t$ allora $H^t(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$ con continuità.*

Dimostrazione. Basta provare che $||u||_s \leq ||u||_t$ per ogni $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Infatti in tal caso risulta che la funzione di immersione di H^t in H^s è continua.
D'altra parte, poiché $1 + |\xi|^2 \geq 1$, la funzione di elevamento a potenza è crescente quindi si ha:

$$\begin{aligned} ||u||_s^2 = \int (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \\ \leq \int (1 + |\xi|^2)^t |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = ||u||_t^2 \end{aligned}$$

□

1.2 Operatori differenziali

Dato un intorno U dell'origine in $\mathbb{R}^n$ e una funzione u di classe almeno C^1 su U si denota con $\frac{\partial}{\partial x_j}$ oppure con D_j la derivata parziale di u rispetto alla j-esima componente.

Data una funzione $F : U \to \mathbb{R}^n$, $F = (F_1, \ldots, F_n)$, $F \in C^1(U)$, si definisce *divergenza* di F:

$$\mathrm{div}F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

Le applicazioni

$$u \longmapsto \frac{\partial u}{\partial x_j} \qquad \text{e} \qquad F \longmapsto \mathrm{div}F$$

sono esempi di *operatori differenziali di primo ordine.*

Definizione 1.4. Un *campo vettoriale* X su U è un operatore differenziale di primo ordine su U senza il termine di ordine zero:

$$X = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

dove i coefficienti a_j sono funzioni C^∞ su U a valori reali.

Definizione 1.5. Sia X un operatore differenziale lineare. Si definisce il suo *aggiunto* X^* come l'operatore tale che:

$$\langle Xu, v \rangle = \langle u, X^* v \rangle$$

dove la notazione $\langle \quad , \quad \rangle$ indica il prodotto scalare in L^2.

Nel seguito si denoterà con P l'*operatore differenziale di secondo ordine* definito da:

$$Pu = \sum_{j=1}^{k} X_j^2 u + X_0 u + cu \tag{1.1}$$

dove $X_j = \sum_{m=1}^{n} a_j^m \frac{\partial}{\partial x_m}$, $j = 0, \ldots, k$ e $a_j^m : U \to \mathbb{R}$ sono funzioni di classe C^∞.

Definizione 1.6. Siano u e f due distribuzioni su U e sia V un sottoinsieme aperto di U tale che $f|_V \in C^\infty(V)$.
L'operatore P si dice **ipoellittico** se $Pu = f$ implica che anche $u|_V \in C^\infty(V)$.

1.3 Operatori pseudodifferenziali

Definizione 1.7. Sia $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Si dice che a è un *simbolo* di ordine m e si scrive $a \in S^m$ se $\forall \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ esiste una costante C tale che:

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta a| \leq C(1 + |\xi|)^{m-|\alpha|}.$$

Definizione 1.8. Sia $a \in S^m$ e sia $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Si definisce l'**operatore pseudodifferenziale** $a(x, \xi)$ di simbolo a e ordine m come l'operatore tale che:

$$a(x, \xi)u = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} a(x, \xi)\hat{u}(\xi)d\xi.$$

Alcuni esempi di operatori pseudodifferenziali sono:

1. Moltiplicazione per $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $|D_x^\beta a(x)| \leq M$ per ogni $\beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ con M costante opportuna. Si può infatti scrivere:
$$a(x)u = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} a(x)\hat{u}(\xi)d\xi.$$
2. Derivazione $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$. Infatti si ha:
$$D^\alpha u = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{u}(\xi)d\xi.$$
3. Per $s \in \mathbb{R}$ l'operatore $\Lambda^s : C_0^\infty(U) \to C^\infty(U)$ definito da $\Lambda^s u(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi)$.

Se P è un operatore di ordine m allora $\forall s \in \mathbb{R}$ esiste una costante C_s tale che:

$$||Pu||_s \leq C_s ||u||_{s+m}$$

per ogni $u \in C_0^\infty(U)$.

Definizione 1.9. Dati due operatori P e P' si definisce il loro *commutatore* nel modo seguente:

$$[P, P'] = PP' - P'P$$

L'insieme degli operatori pseudodifferenziali con le operazioni di somma, composizione e aggiunto formale costituisce un'algebra, le cui proprietà di base sono riassunte nel seguente teorema.

Teorema 1.3.1. *Siano P e P' due operatori pseudodifferenziali di ordini ripsettivamente m e m'.
Allora PP' è di ordine $m+m'$, P^* è di ordine m e $[P, P']$ è di ordine $m+m'-1$. L'operatore di moltiplicazione in 1. è di ordine zero, la derivata D^α è di ordine $|\alpha|$ e Λ^s è di ordine s.*

Capitolo 2

Stima subellittica

Teorema 2.0.2 (Teorema di Hörmander)**.** *Sia U un intorno aperto dell'origine in $\mathbb{R}^n$, U limitato. Se ogni campo vettoriale su U può essere espresso come combinazione lineare con coefficienti C^∞ di $X_0, X_1, \dots, X_k, \dots, [X_i, X_j], \dots$ $\dots, [X_i, [X_j, X_m]], \dots, [X_{i_1}, [X_{i_2}, \dots, X_{i_p}], \dots]$ allora l'operatore P è ipoellittico.*

Il punto di partenza per la dimostrazione del teorema è la seguente stima di energia.

Proposizione 2.0.3. *Esiste una costante $C > 0$ tale che:*

$$\sum_{j=1}^{k} ||X_j u||^2 \leq C(|\langle Pu, u\rangle| + ||u||^2) \tag{2.1}$$

per ogni $u \in C_0^\infty(U)$.

Dimostrazione. Si calcola innanzitutto $X_j^* u = -X_j u + f_j u$, dove $f_j = -\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial a_j^m}{\partial x_m}$. Infatti:

$$\begin{aligned}
\langle X_j u, v\rangle &= \int (X_j u) v dx = \sum_{m=1}^{n} \int a_j^m \frac{\partial u}{\partial x_m} v dx = \\
&= -\sum_{m=1}^{n} \int \frac{\partial a_j^m}{\partial x_m} u v dx - \sum_{m=1}^{n} \int a_j^m \frac{\partial v}{\partial x_m} u dx = \\
&= \int f_j u v dx - \int u (X_j v) dx
\end{aligned}$$

dove si è integrato per parti. Da qui si ha per ogni $j = 1, \dots, k$:

$$\begin{aligned}
\langle X_j^2 u, u\rangle &= \langle X_j u, X_j^* u\rangle = \\
&= -\langle X_j u, X_j u\rangle + \langle X_j u, f_j u\rangle = \\
&= -||X_j u||^2 + O(||X_j u|| ||u||)
\end{aligned}$$

dove si è usata la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz. Inoltre:

$$\begin{aligned}\langle X_0 u, u\rangle &= \langle u, X_0^* u\rangle = \\ &= -\langle u, X_0 u\rangle + \langle u, f_0 u\rangle = \\ &= -\langle u, X_0 u\rangle + O(||u||^2)\end{aligned}$$

quindi

$$|\langle X_0 u, u\rangle| = O(||u||^2).$$

Osservando che, dati due numeri $a, b \geq 0$ e $\epsilon > 0$ piccolo a piacere, si può sempre scrivere:

$$ab = \frac{a}{\sqrt{\epsilon}}\sqrt{\epsilon}b \leq \frac{1}{2\epsilon}a^2 + \frac{\epsilon}{2}b^2$$

si ha quindi:

$$||u||||X_j u|| \leq \frac{1}{2\epsilon}||u||^2 + \frac{\epsilon}{2}||X_j u||^2.$$

Da qui si ottiene quindi la stima cercata. Infatti:

$$\begin{aligned}|\langle Pu, u\rangle| &\leq \sum_{j=1}^{k} |\langle X_j^2 u, u\rangle| + |\langle X_0 u, u\rangle| + |\langle cu, u\rangle| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{k} |-||X_j u||^2 + O(||u||||X_j u||)| + O(||u||^2) + c||u||^2 \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{k} ||X_j u||^2 + C||u||^2.\end{aligned}$$

□

Inoltre, sotto le ipotesi del teorema, si può dimostrare la seguente stima subellittica.

Teorema 2.0.4. *Esistono $\epsilon > 0$ e $C > 0$ tali che:*

$$||u||_\epsilon \leq C(||Pu|| + ||u||) \tag{2.2}$$

per ogni $u \in C_0^\infty(U)$.

Dimostrazione. Si osserva innanzitutto che vale la seguente stima:

$$||u||_\epsilon \leq C'\left(\sum_{j=1}^{n} ||D_j u||_{\epsilon-1} + ||u||\right). \tag{2.3}$$

Infatti:

$$||u||_\epsilon^2 = \int (1+|\xi|^2)^\epsilon |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int (1+|\xi|^2)^{\epsilon-1}(1+|\xi|^2)|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi =$$
$$= \int (1+|\xi|^2)^{\epsilon-1}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi + \sum_{j=1}^n \int (1+|\xi|^2)^{\epsilon-1}\xi_j^2|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi =$$
$$= ||u||_{\epsilon-1}^2 + \sum_{j=1}^n ||D_j u||_{\epsilon-1}^2.$$

Per stimare $||u||_{\epsilon-1}^2$ si divide l'integrale in due parti, per un qualunque $M > 1$:

1. nell'insieme $\{\xi : |\xi| \leq M\}$ si ha:
   - se $\epsilon \geq 1$: $(1+|\xi|^2)^{\epsilon-1} \leq (1+M^2)^{\epsilon-1}$
   - se $0 < \epsilon < 1$:$(1+|\xi|^2)^{\epsilon-1} \leq 1$

   Quindi, posto $C_M = max\{1, (1+M^2)^{\epsilon-1}\}$, si ottiene:

   $$\int_{|\xi|\leq M} (1+|\xi|^2)^{\epsilon-1}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq C_M \int |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq C'_M ||u||^2$$

2. nell'insieme $\{\xi : |\xi| > M\}$ si ha:

   $$(1+|\xi|^2)^{\epsilon-1}|\hat{u}(\xi)|^2 = \frac{1}{1+|\xi|^2}(1+|\xi|^2)^\epsilon|\hat{u}(\xi)|^2 \leq$$
   $$\leq \frac{1}{1+M^2}(1+|\xi|^2)^\epsilon|\hat{u}(\xi)|^2 \leq \frac{1}{2}(1+|\xi|^2)^\epsilon|\hat{u}(\xi)|^2$$

   quindi:

   $$\int_{|\xi|>M} (1+|\xi|^2)^{\epsilon-1}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{1}{2}||u||_{\epsilon-1}^2.$$

Da qui si ottiene la stima cercata.

Per le ipotesi del teorema le derivate D_j possono essere espresse come:

$$D_j = \sum a_j^{i_1\dots i_p} F_{i_1\dots i_p}$$

con $0 \leq i_m \leq k$ e

$$F_{i_1\dots i_p} = \begin{cases} X_{i_p} & p = 1 \\ [X_{i_p}, F_{i_1\dots i_{p-1}}] & p > 1 \end{cases}$$

Per semplicità si userà la notazione $F^p = [X, F^{p-1}]$. È quindi sufficiente stimare $||F^p u||_{\epsilon-1}$ con il secondo membro della (2.2). Si ha:

$$||F^p u||^2_{\epsilon-1} = \langle \Lambda^{\epsilon-1} F^p u, \Lambda^{\epsilon-1} F^p u \rangle = \langle F^p u, \Lambda^{2\epsilon-2} F^p u \rangle.$$

Dato che $\Lambda^{2\epsilon-2}$ è un operatore di ordine $2\epsilon - 2$ e F^p è di ordine 1, il loro prodotto è un operatore di ordine $2\epsilon - 1$ che sarà indicato con $T^{2\epsilon-1}$. Si ha quindi che $||F^p u||^2_{\epsilon-1}$ risulta uguale a:

$$\langle F^p u, T^{2\epsilon-1} u \rangle = \langle X F^{p-1} u, T^{2\epsilon-1} u \rangle - \langle F^{p-1} X u, T^{2\epsilon-1} u \rangle. \tag{2.4}$$

Si stimeranno ora separatamente i due termini della (2.4), considerando i due casi seguenti:

1. $X = X_j$ con $1 \leq j \leq k$;
2. $X = X_0$.

Si ha quindi nei due casi:

1. Se $X = X_j$ con $1 \leq j \leq k$ allora, indicando con $X^* = -X + f_j$ l'aggiunto di X, si ottiene:

$$\langle X F^{p-1} u, T^{2\epsilon-1} u \rangle = \langle F^{p-1} u, X^* T^{2\epsilon-1} u \rangle =$$

$$= -\langle F^{p-1} u, X T^{2\epsilon-1} u \rangle + \langle F^{p-1} u, f_j T^{2\epsilon-1} u \rangle =$$

$$= -\langle F^{p-1} u, X T^{2\epsilon-1} u \rangle + \langle F^{p-1} u, S^{2\epsilon-1} u \rangle \tag{2.5}$$

dove $S^{2\epsilon-1}$ denota un altro operatore di ordine $2\epsilon - 1$ in quanto è prodotto di un operatore di ordine $2\epsilon - 1$ e di uno di ordine 0. Quindi per il secondo termine della (2.5) si ottiene:

$$\langle F^{p-1} u, S^{2\epsilon-1} u \rangle = \langle S^{2\epsilon-1} F^{p-1} u, u \rangle = O(||F^{p-1} u||_{2\epsilon-1} ||u||)$$

dove con $S^{2\epsilon-1}$ si è indicato anche l'aggiunto dell'operatore stesso, in quanto hanno entrambi ordine $2\epsilon - 1$.

Per il primo termine si ha, invece:

$$-\langle F^{p-1} u, X T^{2\epsilon-1} u \rangle = -\langle F^{p-1} u, T^{2\epsilon-1} X u \rangle - \langle F^{p-1} u, [X, T^{2\epsilon-1}] u \rangle \tag{2.6}$$

Qui per il primo termine a destra si stima:

$$\langle F^{p-1} u, T^{2\epsilon-1} X u \rangle = \langle T^{2\epsilon-1} F^{p-1} u, X u \rangle = O(||F^{p-1} u||_{2\epsilon-1} ||X u||).$$

Per quanto riguarda il secondo termine si ha:

$$\langle F^{p-1}u, [X, T^{2\epsilon-1}]u\rangle = \langle F^{p-1}u, V^{2\epsilon-1}u\rangle = \\ = \langle V^{2\epsilon-1}F^{p-1}u, u\rangle = O(||F^{p-1}u||_{2\epsilon-1}||u||)$$

dove $V^{2\epsilon-1}$ denota un altro operatore di ordine $2\epsilon - 1$.
In conclusione, per il primo termine della (2.4) si ha in questo caso:

$$\langle XF^{p-1}u, T^{2\epsilon-1}u\rangle = O(||F^{p-1}u||_{2\epsilon-1}(||Xu|| + ||u||))$$

da cui, usando la (2.1) ,si ottiene:

$$|\langle XF^{p-1}u, T^{2\epsilon-1}u\rangle| \leq C(||F^{p-1}u||^2_{2\epsilon-1} + ||Pu||^2 + ||u||^2). \qquad (2.7)$$

Analogamente per il secondo termine della (2.4) si ha:

$$\begin{aligned}
&\langle F^{p-1}Xu, T^{2\epsilon-1}u\rangle = \langle Xu, (F^{p-1})^* T^{2\epsilon-1}u\rangle = \\
&= -\langle Xu, F^{p-1}T^{2\epsilon-1}u\rangle + O(||Xu||||u||_{2\epsilon-1}) = \\
&= -\langle Xu, T^{2\epsilon-1}F^{p-1}u\rangle - \langle Xu, [F^{p-1}, T^{2\epsilon-1}]u\rangle + O(||Xu||||u||_{2\epsilon-1}) = \\
&= -\langle Xu, T^{2\epsilon-1}F^{p-1}u\rangle + O(||Xu||||u||_{2\epsilon-1}) = \\
&= O(||Xu||(||F^{p-1}u||_{2\epsilon-1} + ||u||)).
\end{aligned}$$

Riassumendo, nel caso in cui $X = X_j$ con $1 \leq j \leq k$, si è ottenuta la stima:

$$||F^p u||_{\epsilon-1} \leq C(||F^{p-1}u||_{2\epsilon-1} + ||Pu|| + ||u||). \qquad (2.8)$$

2. Se $X = X_0$ si può scrivere innanzitutto $X_0 = -P^* + \sum_{j=1}^k X_j^2 + \sum_{j=1}^k b_j X_j + g$. Infatti:

$$\begin{aligned}
(X_j^2)^* &= X_j^*(-X_j u - f_j u) = \\
&= -X_j(-X_j u - f_j u) - f_j(-X_j u - f_j u) = \\
&= X_j^2 u + (X_j f_j)u + 2f_j X_j u + (f_j)^2 u = \\
&= X_j^2 u + c_j u + 2f_j X_j u
\end{aligned}$$

dove si è posto $c_j = X_j f_j + (f_j)^2$.
Quindi si ha:

$$\begin{aligned}
-P^* u &= -\sum_{j=1}^k (X_j^2)^* u - X_0^* u - cu = \\
&= -\sum_{j=1}^k X_j^2 u - \sum_{j=1}^k c_j u - 2\sum_{j=1}^k f_j X_j u + X_0 u + f_0 u - cu = \\
&= -\sum_{j=1}^k X_j^2 u - \sum_{j=1}^k b_j X_j u + X_0 u - g
\end{aligned}$$

dove si è posto $b_j = 2f_j$, $g = \sum_{j=1}^k c_j - f_0 + c$.
Si ricava quindi l'espressione desiderata per X_0.
Sostituendo nel primo termine della (2.4), si trova:

$$\begin{aligned}
&\langle X_0 F^{p-1}u, T^{2\epsilon-1}u\rangle = \\
&= -\langle P^* F^{p-1}u, T^{2\epsilon-1}u\rangle + \sum_{j=1}^k \langle X_j^2 F^{p-1}u, T^{2\epsilon-1}u\rangle + \\
&+ \sum_{j=1}^k \langle b_j X_j F^{p-1}u, T^{2\epsilon-1}u\rangle + \langle gF^{p-1}u, T^{2\epsilon-1}u\rangle.
\end{aligned}$$

Cconsiderando ora ciascun termine separatamente si ha:

- 1° termine:

$$\begin{aligned}
&\langle P^* F^{p-1}u, T^{2\epsilon-1}u\rangle = \langle F^{p-1}u, PT^{2\epsilon-1}u\rangle = \\
&= \langle F^{p-1}u, T^{2\epsilon-1}Pu\rangle + \langle F^{p-1}u, [P, T^{2\epsilon-1}]u\rangle \leq \\
&\leq \frac{1}{2}||F^{p-1}u||^2_{2\epsilon-1} + \frac{1}{2}||Pu||^2 + \langle F^{p-1}u, [P, T^{2\epsilon-1}]u\rangle.
\end{aligned}$$

  Si ha:

$$[P, T^{2\epsilon-1}]u = \sum_{j=1}^k T_j^{2\epsilon-1} X_j u + T_{k+1}^{2\epsilon-1} u. \tag{2.9}$$

  Infatti:

$$\begin{aligned}
&[P, T^{2\epsilon-1}] = \left[\sum_{j=1}^k X_j^2 + X_0 + c, T^{2\epsilon-1}\right] = \\
&= \sum_{j=1}^k [X_j^2, T^{2\epsilon-1}] + [X_0, T^{2\epsilon-1}] + [c, T^{2\epsilon-1}] = \\
&= \sum_{j=1}^k X_j[X_j, T^{2\epsilon-1}] + \sum_{j=1}^k [X_j, T^{2\epsilon-1}]X_j + [X_0, T^{2\epsilon-1}] = \\
&= 2\sum_{j=1}^k [X_j, T^{2\epsilon-1}]X_j + \sum_{j=1}^k [X_j, [X_j, T^{2\epsilon-1}]] + [X_0, T^{2\epsilon-1}] = \\
&= \sum_{j=1}^k T_j^{2\epsilon-1} X_j + T_{k+1}^{2\epsilon-1}
\end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che c e $T^{2\epsilon-1}$ commutano quindi il loro commutatore è nullo, $[X_j, T^{2\epsilon-1}]$ ha ordine $2\epsilon-1+1-1=2\epsilon-1$, $[X_j,[X_j,T^{2\epsilon-1}]]$ e $[X_0,T^{2\epsilon-1}]$ hanno ordine $2\epsilon-1$.
Quindi, applicando la (2.9), si ha:

$$\begin{aligned}
&\langle F^{p-1}u, [P, T^{2\epsilon-1}]u\rangle = \\
&= \sum_{j=1}^{k} \langle F^{p-1}u, T_j^{2\epsilon-1}X_j u\rangle + \langle F^{p-1}u, T_{k+1}^{2\epsilon-1}u\rangle \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} ||F^{p-1}u||_{2\epsilon-1}||X_j u|| + ||F^{p-1}u||_{2\epsilon-1}||u|| \leq \\
&\leq C||F^{p-1}u||^2_{2\epsilon-1}(||Pu||^2 + ||u||^2).
\end{aligned}$$

- $2°$ termine:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k}\langle X_j^2 F^{p-1}u, T^{2\epsilon-1}u\rangle = \\
&= -\sum_{j=1}^{k}\langle X_j F^{p-1}u, X_j T^{2\epsilon-1}u\rangle + \sum_{j=1}^{k}\langle X_j F^{p-1}u, f_j T^{2\epsilon-1}u\rangle \leq \\
&\leq -\sum_{j=1}^{k}\langle X_j F^{p-1}u, X_j T^{2\epsilon-1}u\rangle + C(||F^{p-1}u||^2_{2\epsilon-1} + ||Pu||^2 + ||u||^2)
\end{aligned}$$

dove si è stimato il secondo termine come nel caso 1.
Per quanto riguarda il termine restante si ha invece:

$$\begin{aligned}
&-\langle X_j F^{p-1}u, X_j T^{2\epsilon-1}u\rangle = \\
&= -\langle X_j F^{p-1}u, T^{2\epsilon-1}X_j u\rangle - \langle X_j F^{p-1}u, [X_j, T^{2\epsilon-1}]u\rangle = \\
&= -\langle S^{2\epsilon-1}X_j F^{p-1}u, X_j u\rangle + O(||F^{p-1}u||_{2\epsilon-1}(||Xu|| + ||u||))
\end{aligned}$$

dove il secondo termine è stato stimato come nel caso 1.
Resta quindi:

$$\begin{aligned}
&-\langle S^{2\epsilon-1}X_j F^{p-1}u, X_j u\rangle = \\
&= -\langle X_j S^{2\epsilon-1}F^{p-1}u, X_j u\rangle - \langle [S^{2\epsilon-1}, X_j]F^{p-1}u, X_j u\rangle \leq \\
&\leq C(||X_j S^{2\epsilon-1}F^{p-1}u||^2 + ||X_j u||^2) + O(||F^{p-1}u||_{2\epsilon-1}||X_j u||).
\end{aligned}$$

Ora per la (2.1) si ha:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k} ||X_j S^{2\epsilon-1}F^{p-1}u||^2 \leq \\
&\leq C(|\langle PS^{2\epsilon-1}F^{p-1}u, S^{2\epsilon-1}F^{p-1}u\rangle| + ||F^{p-1}u||^2_{2\epsilon-1}).
\end{aligned}$$

Inoltre:

$$\langle PS^{2\epsilon-1}F^{p-1}u, S^{2\epsilon-1}F^{p-1}u\rangle = \langle PT^{2\epsilon}u, S^{2\epsilon-1}F^{p-1}u\rangle =$$
$$= \langle [P, T^{2\epsilon}]u, S^{2\epsilon-1}F^{p-1}u\rangle + \langle T^{2\epsilon}Pu, S^{2\epsilon-1}F^{p-1}u\rangle =$$
$$= \langle [P, T^{2\epsilon}]u, S^{2\epsilon-1}F^{p-1}u\rangle + \langle Pu, T^{4\epsilon-1}F^{p-1}u\rangle. \tag{2.10}$$

Dato che, analogamente a quanto visto nella (2.9), si ha:

$$[P, T^{2\epsilon}] = \sum_{j=1}^{k} T_j^{2\epsilon}X_j + T_{k+1}^{2\epsilon}$$

si può maggiorare la (2.10) con:

$$C(||F^{p-1}u||^2_{4\epsilon-1} + ||Pu||^2 + ||u||^2).$$

- 3° termine:
  Indicando con T^0 l'operatore aggiunto di b_j, che è di ordine 0, si ha:

$$\sum_{j=1}^{k}\langle b_jX_jF^{p-1}u, T^{2\epsilon-1}u\rangle = \sum_{j=1}^{k}\langle X_jF^{p-1}u, T^0T^{2\epsilon-1}u\rangle =$$
$$= \sum_{j=1}^{k}\langle X_jF^{p-1}, T^{2\epsilon-1}u\rangle.$$

  Questa è un'espressione analoga a quella trattata nel caso 1, che si può quindi maggiorare con:

$$C(||F^{p-1}u||^2_{2\epsilon-1} + ||Pu||^2 + ||u||^2).$$

- 4° termine:

$$\langle gF^{p-1}u, T^{2\epsilon-1}u\rangle = \langle S^{2\epsilon-1}gF^{p-1}u, u\rangle \leq$$
$$\leq ||F^{p-1}u||_{2\epsilon-1}||u|| \leq \frac{1}{2}(||F^{p-1}u||^2_{2\epsilon-1} + ||u||^2).$$

Per completare il caso 2 resta da trattare il secondo termine della (2.4). Sostituendo l'espressione

$$X_0u = Pu - \sum_{j=1}^{k} X_J^2u - cu$$

nel secondo termine della (2.4) si ha:

$$\langle F^{p-1} X_0 u, T^{2\epsilon-1} u\rangle =$$
$$= \langle F^{p-1} Pu, T^{2\epsilon-1} u\rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle F^{p-1} X_j^2 u, T^{2\epsilon-1} u\rangle - \langle F^{p-1} cu, T^{2\epsilon-1} u\rangle.$$

Si considera anche qui ciascun termine separatamente e si ottiene:

- 1° termine:
  Dato che

  $$\begin{aligned}
  &\langle F^{p-1} Pu, T^{2\epsilon-1} u\rangle = \langle Pu, (F^{p-1})^* T^{2\epsilon-1} u\rangle = \\
  &= -\langle Pu, F^{p-1} T^{2\epsilon-1} u\rangle + \langle Pu, f_j T^{2\epsilon-1} u\rangle = \\
  &= -\langle Pu, T^{2\epsilon-1} F^{p-1} u\rangle - \langle Pu, [F^{p-1}, T^{2\epsilon-1}] u\rangle + O(||Pu|| ||u||_{2\epsilon-1}) = \\
  &= O(||Pu|| ||F^{p-1} u||_{2\epsilon-1}) + O(||Pu|| ||u||_{2\epsilon-1})
  \end{aligned}$$

  si ritrova in questo caso la maggiorazione del caso 1.
- 2° termine:
  Commutando F^{p-1} e X_j^2 si trova:

  $$\begin{aligned}
  &\langle F^{p-1} X_j^2 u, T^{2\epsilon-1} u\rangle = \\
  &= \langle X_j^2 F^{p-1} u, T^{2\epsilon-1} u\rangle + \langle [F^{p-1}, X_j^2] u, T^{2\epsilon-1} u\rangle
  \end{aligned} \tag{2.11}$$

  in cui il primo termine è stato stimato precedentemente nel 2° termine.
  Per trattare il secondo termine, invece, si può scrivere:

  $$\begin{aligned}
  [F^{p-1}, X_j^2] &= [F^{p-1}, X_j] X_j + X_j [F^{p-1}, X_j] = \\
  &= -\tilde{F}^p X_j - X_j \tilde{F}^p
  \end{aligned}$$

  dove $\tilde{F}^p = [X_j, F^{p-1}]$. Si ritrova quindi un commutatore come quello trattato nel caso 1.
  In conclusione il secondo termine della (2.11) può essere maggiorato con:

  $$C(||\tilde{F}^p u||_{2\epsilon-1}^2 + \sum_{j_1}^{k} ||X_j u||^2 + ||u||^2).$$

  Applicando ora la (2.8) e sostituendo 2ϵ al posto di ϵ si ottiene:

  $$||\tilde{F}^p u||_{2\epsilon-1} \le C(||F^{p-1} u||_{4\epsilon-1} + ||Pu|| + ||u||).$$

- 3° termine:

$$\begin{aligned}\langle F^{p-1}cu, T^{2\epsilon-1}\rangle &= \langle S^{2\epsilon-1}F^{p-1}cu, u\rangle = \\ &= O(||F^{p-1}u||_{2\epsilon-1}||u||)\end{aligned}$$

Riunendo quindi i casi 1 e 2, si trova in conclusione:

$$||F^p u||_{\epsilon-1} \leq C(||F^{p-1}u||_{4\epsilon-1} + ||Pu|| + ||u||). \tag{2.12}$$

Procedendo per induzione si ottiene quindi:

$$||F^p u||_{\epsilon-1} \leq K\left(\sum_{j=0}^{k} ||X_j u||_{4^{p-1}\epsilon-1} + ||Pu|| + ||u||\right) \tag{2.13}$$

dove K è una costante opportuna.

Infatti applicando la (2.12) a $||F^{p-1}u||_{4\epsilon-1}$ si trova:

$$||F^{p-1}u||_{4\epsilon-1} \leq C(||F^{p-2}u||_{4^2\epsilon-1} + ||Pu|| + ||u||)$$

che, sostituita nella (2.12), fornisce la stima:

$$||F^p u||_{\epsilon-1} \leq C'(||F^{p-2}u||_{4^2\epsilon-1} + ||Pu|| + ||u||).$$

Dopo aver applicato la (2.12) p-1 volte si trova quindi la (2.13).

Dimostrando ora che:

$$||X_j u||_{-\frac{1}{2}} \leq c(||Pu|| + ||u||) \tag{2.14}$$

si ottiene la stima desiderata $||u||_\epsilon \leq C(||Pu|| + ||u||)$ per ogni $\epsilon \leq \frac{2}{4^p}$.

Per $1 \leq j \leq k$ la (2.14) è una conseguenza della (2.1). Infatti:

$$\begin{aligned}||X_j u||^2_{-\frac{1}{2}} &= \langle \Lambda^{-\frac{1}{2}}X_j u, \Lambda^{-\frac{1}{2}}X_j u\rangle = \\ &= \langle X_j u, \Lambda^{-1}X_j u\rangle = \langle X_j u, T^0 u\rangle \leq \\ &\leq ||X_j u||||u|| \leq \frac{1}{2}(||X_j u||^2 + ||u||^2) \leq \\ &\leq C(||Pu||^2 + ||u||^2).\end{aligned}$$

Per stimare $||X_0 u||_{-\frac{1}{2}}$ si ha:

$$\begin{aligned}||X_0 u||^2_{-\frac{1}{2}} &= \langle \Lambda^{-\frac{1}{2}}X_0 u, \Lambda^{-\frac{1}{2}}X_0 u\rangle = \\ &= \langle X_0 u, \Lambda^{-1}X_0 u\rangle = \langle X_0 u, T^0 u\rangle = \\ &= \langle Pu, T^0 u\rangle - \sum_{j=1}^{k}\langle X_j^2 u, T^0 u\rangle - \langle cu, T^0 u\rangle \leq \\ &\leq ||Pu||||u|| - \sum_{j=1}^{k}\langle X_j^2 u, T^0 u\rangle - ||u||^2.\end{aligned}$$

Dato che:

$$\left|\sum_{j=1}^{k}\langle X_j^2 u, T^0 u\rangle\right| \leq c\left(\sum_{j=1}^{k}||X_j u||^2 + ||u||^2\right)$$

applicando la (2.1) si maggiora anche questo termine con $C(||Pu||^2 + ||u||^2)$. Questo conclude la dimostrazione della (2.2). □

La stima appena dimostrata può essere localizzata come nel seguente lemma:

Lemma 2.0.5. *Per ogni $\zeta, \zeta_1 \in C_0^\infty(U)$ con $\zeta_1 = 1$ sul supporto di ζ esiste una costante $C' > 0$ tale che:*

$$||\zeta u||_\epsilon \leq C'(||\zeta_1 Pu|| + ||\zeta_1 u||) \tag{2.15}$$

per ogni $u \in C^\infty(U)$.

Dimostrazione. Sostituendo ζu al posto di u nella (2.2), si trova:

$$||\zeta u||_\epsilon \leq C(||P\zeta u|| + ||\zeta u||) = C(||[P,\zeta]u|| + ||\zeta Pu|| + ||\zeta u||)$$

da cui si vede che è sufficiente maggiorare la $||[P,\zeta]u||$ con il secondo membro della (3.2).

Con calcoli analoghi a quelli della (2.9), si trova:

$$[P,\zeta]u = 2\sum_{j=1}^{k}[X_j,\zeta]X_j u + \sum_{j=1}^{k}[X_j,[X_j,\zeta]]u + [X_0,\zeta]u. \tag{2.16}$$

Considerando ciascun termine separatamente, si ottiene:

1. 1° termine: dato che $[X_j,\zeta]v = X_j(\zeta v) - \zeta X_j v = \zeta X_j v + (X_j\zeta)v - \zeta X_j v = (X_j\zeta)v$, si ha $[X_j,\zeta]X_j u = (X_j\zeta)X_j u = (X_j\zeta)X_j(\zeta_1^2 u)$.

   Quindi:

   $$\begin{aligned}&||[X_j,\zeta]X_j u||^2 = ||(X_j\zeta)X_j(\zeta_1^2 u)||^2 \leq \\ &\leq \max_{supp\zeta}||X_j\zeta||^2||X_j(\zeta_1^2 u)||^2 = K||X_j(\zeta_1^2 u)||^2\end{aligned}$$

   che, usando la (2.1), può essere maggiorato con

   $$C(|\langle P\zeta_1^2 u, \zeta_1^2 u\rangle| + ||\zeta_1^2 u||^2).$$

Ora, scrivendo $P\zeta_1^2 u = \zeta_1^2 Pu + [P, \zeta_1^2]u$ e considerando che:

$$|\langle \zeta_1^2 Pu, \zeta_1^2 u\rangle| \le c||\zeta_1 Pu||||\zeta_1 u|| \le \frac{c}{2}(||\zeta_1 Pu||^2 + ||\zeta_1 u||^2)$$

resta solo da stimare $|\langle [P, \zeta_1^2]u, \zeta_1^2 u\rangle|$.
Sostituendo ζ_1^2 al posto di ζ nella (2.16), si ha:

$$\begin{aligned}
\langle [P, \zeta_1^2]u, &\zeta_1^2 u\rangle = \\
&= 2\sum_{j=1}^{k} \langle [X_j, \zeta_1^2] X_j u, \zeta_1^2 u\rangle + \\
&+ \sum_{j=1}^{k} \langle [X_j, [X_j, \zeta_1^2]]u, \zeta_1^2 u\rangle + \langle [X_0, \zeta_1^2]u, \zeta_1^2 u\rangle = \\
&= I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

Si considerano anche qui i tre termini separatamente:

- Integrando per parti, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\langle [X_j, \zeta_1^2] X_j u, \zeta_1^2 u\rangle &= \int (X_j \zeta_1^2) X_j u \zeta_1^2 u dx = \\
&= -\int (X_j^2 \zeta_1^2)\zeta_1^2 u^2 dx - \int (X_j \zeta_1^2)^2 u^2 dx + \\
&- \int (X_j \zeta_1^2) u \zeta_1^2 (X_j u) dx - \int f_j (X_j \zeta_1^2) u^2 \zeta_1^2 dx
\end{aligned}$$

dove il secondo termine è negativo. Quindi si ha:

$$\begin{aligned}
I_1 \le -\sum_{j=1}^{k} \int (X_j^2 \zeta_1^2)\zeta_1^2 u^2 dx - \sum_{j=1}^{k} \int (X_j \zeta_1^2) u \zeta_1^2 (X_j u) dx + \\
-\sum_{j=1}^{k} \int f_j (X_j \zeta_1^2) u^2 \zeta_1^2 = A - I_1 + B
\end{aligned}$$

da cui ne viene $2I_1 \le A + B$. Poiché si ha:

$$|A| \le \sum_{j=1}^{k} ||(X_j^2 \zeta_1^2)(\zeta_1 u)||||\zeta_1 u|| \le K||\zeta_1 u||$$

$$|B| \le K'||\zeta_1 u||$$

si maggiora I_1 in questo modo:

$$I_1 \le \frac{K + K'}{2}||\zeta_1 u||$$

- Per quanto riguarda I_2, dato che $[X_j,[X_j,\zeta_1^2]]u = (X_j^2\zeta_1^2)u$, si ha:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{j=1}^{k} \langle [X_j,[X_j,\zeta_1^2]]u, \zeta_1^2 u\rangle = \\
&= \sum_{j=1}^{k} \int (X_j^2\zeta_1^2) u \zeta_1^2 u dx = \\
&= \sum_{j=1}^{k} \int (X_j^2\zeta_1^2)(\zeta_1 u)(\zeta_1 u) dx \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} ||(X_j^2\zeta_1^2)(\zeta_1 u)|| ||\zeta_1 u|| \leq C||\zeta_1 u||.
\end{aligned}$$

- Per finire, poiché $[X_0,\zeta_1^2]u = (X_0\zeta_1^2)u = 2(X_0\zeta_1)\zeta_1 u$, si ha per I_3:

$$I_3 = \langle [X_0,\zeta_1^2]u, \zeta_1^2 u\rangle \leq 2||(X_0\zeta_1)\zeta_1 u|| ||\zeta_1^2 u|| \leq C'||\zeta_1 u||^2.$$

  Così è concluso il primo termine della (2.16).

2. 2° termine: poiché $[X_j,[X_j,\zeta]]u = (X_j^2\zeta)u = (X_j^2\zeta)\zeta_1 u$, si ottiene per il secondo termine:

$$||[X_j,[X_j,\zeta]]u|| = ||(X_j^2\zeta)\zeta_1 u|| \leq K||\zeta_1 u||.$$

3. 3° termine: utilizzando il fatto che $[X_0,\zeta]u = (X_0\zeta)u = (X_0\zeta)\zeta_1 u$, si ha infine:

$$||[X_0,\zeta]u|| = ||(X_0\zeta)\zeta_1 u|| \leq K||\zeta_1 u||.$$

Questo conclude la prova. $\square$

Capitolo 3

Ipoellitticità

Per dimostrare il *teorema di Hörmander* resta ora da provare che per un operatore P della forma (1.1) la stima data nel precedente lemma di localizzazione implica l'ipoellitticità.

Si osserva innanzitutto che vale la seguente stima.

Proposizione 3.0.6. *Dati $s \in \mathbb{R}$ e $N > 0$ esiste una costante $C_{s,N}$ tale che:*

$$||u||_{s+\epsilon} \leq C_{s,N}(||Pu||_s + ||u||_{-N}) \tag{3.1}$$

per ogni $u \in C_0^\infty(U)$.

Dimostrazione. Applicando la (2.2) a $\Lambda^s u$ (anche se $\Lambda^s u \notin C_0^\infty(U)$ si vede che si può fare) si ottiene:

$$||u||_{s+\epsilon} = ||\Lambda^s u||_\epsilon \leq C(||P\Lambda^s u|| + ||\Lambda^s u||). \tag{3.2}$$

Inoltre per ogni δ esiste una costante $C(s, N, \delta)$ tale che:

$$||u||_s \leq \delta||u||_{s+\epsilon} + C(s, N, \delta)||u||_{-N} \tag{3.3}$$

per ogni $u \in C_0^\infty(U)$.

Infatti basta provare che per ogni δ esiste $C(s, N, \delta)$ tale che:

$$(1 + |\xi|^2)^s \leq \delta(1 + |\xi|^2)^{s+\epsilon} + C(s, N, \delta)(1 + |\xi|^2)^{-N}.$$

Dato che

$$\lim_{\xi\to\infty} \frac{(1 + |\xi|^2)^s}{(1 + |\xi|^2)^{s+\epsilon}} = 0$$

allora per $|\xi| > M_\delta$ si ha:

$$\frac{(1 + |\xi|^2)^s}{(1 + |\xi|^2)^{s+\epsilon}} < \delta.$$

Per $|\xi| \le M_\delta$, invece:

$$(1+|\xi|^2)^s = (1+|\xi|^2)^{-N}(1+|\xi|^2)^{N+s} \le$$
$$\le (1+M_\delta^2)^{N+s}(1+|\xi|^2)^{-N} = C(s,N,\delta)(1+|\xi|^2)^{-N}.$$

Quindi dalla (3.3) si vede che per provare la (3.1) è sufficiente provare:

$$||[P,\Lambda^s]u|| \le C(||Pu||_s + ||u||_s).$$

Infatti in tal caso si avrebbe:

$$\begin{aligned} ||u||_{s+\epsilon} &\le C(||[P,\Lambda^s]u|| + ||\Lambda^s u||) \le \\ &\le C(C(||Pu||_s + ||u||_s) + ||\Lambda^s u||) \le \\ &\le C(||Pu||_s + \delta||u||_{s+\epsilon} + C(s,N,\delta)||u||_{-N}) \end{aligned}$$

da cui

$$(1-C\delta)||u||_{s+\epsilon} \le C(||Pu||_s + C(s,N,\delta)||u||_{-N})$$

cioè si ha la stima cercata.

Ora per le proprietà degli operatori pseudodifferenziali, con calcoli analoghi a quelli visti nel capitolo 2 nella (2.9), si ha:

$$[P,\Lambda^s] = \sum_{j=1}^{k} T_j^s X_j + T^s \tag{3.4}$$

dove T_j^s e T^s sono operatori pseudodifferenziali di ordine s. Quindi si ottiene:

$$||[P,\Lambda^s]u|| \le \sum_{j=1}^{k} ||T_j^s X_j u|| + ||T^s u|| \le \sum_{j=1}^{k} ||X_j u||_s + ||u||_s$$

per cui basta provare:

$$\sum_{j=1}^{k} ||X_j u||_s \le C(||Pu||_s + ||u||_s).$$

Dato che:

$$||X_j u||_s = ||\Lambda^s X_j u|| \le ||X_j \Lambda^s u|| + ||[X_j,\Lambda^s]u|| \le ||X_j\Lambda^s u|| + C||u||_s$$

dove vale l'ultima disuguaglianza perchè $[X_j, \Lambda^s]$ ha ordine $s+1-1=s$, si ha, applicando la (2.1):

$$\sum_{j=1}^{k} ||X_j u||_s^2 \leq \sum_{j=1}^{k} ||X_j \Lambda^s u||^2 + C||u||_s^2 \leq |\langle P\Lambda^s u, \Lambda^s u\rangle| + C||u||_s^2 \leq$$
$$\leq |\langle [P, \Lambda^s]u, \Lambda^s u\rangle| + |\langle \Lambda^s P u, \Lambda^s u\rangle| + C||u||_s^2 \leq$$
$$\leq |\langle [P, \Lambda^s]u, \Lambda^s u\rangle| + C(||Pu||_s^2 + ||u||_s^2).$$

Resta quindi da stimare il primo termine, che per la (3.4) diventa:

$$\langle [P, \Lambda^s]u, \Lambda^s u\rangle = \sum_{j=1}^{k} \langle T_j^s X_j u, \Lambda^s u\rangle + \langle T^s u, \Lambda^s u\rangle \leq$$
$$\leq C' \sum_{j=1}^{k} ||X_j u||_s ||u||_s + C'' ||u||_s^2$$

da cui, considerando che $||X_j u||_s ||u||_s \leq a||X_j u||_s^2 + A||u||_s^2$, dove a è una costante piccola e A una costante grande, si ha:

$$\sum_{j=1}^{k} ||X_j u||_s^2 \leq C' \left(a \sum_{j=1}^{k} ||X_j u||_s^2 + A||u||_s^2 \right) + C''||u||_s^2 + c(||Pu||_s^2 + ||u||_s^2)$$

che permette di ottenere la stima desiderata. □

Ora, applicando lo stesso metodo usato nel capitolo 2 per il lemma di localizzazione, si ottiene:

$$||\zeta u||_{s+\epsilon} \leq C(||\zeta_1 P u||_s + ||\zeta_1 u||_{-N})$$

per ogni $u \in C^\infty(U)$, dove $\zeta, \zeta_1 \in C_0^\infty(U)$ e $\zeta_1 = 1$ sul supporto di ζ.

Si supponga ora che u sia una distribuzione tale che $Pu = f$ e che $f|_V \in C^\infty(V)$ con $V \subset U$. Si vuole provare che allora $u|_V \in C^\infty(V)$. Basta provare che se $x_0 \in V$ allora u è C^∞ in un intorno di x_0.

Si considera la regolarizzata di u mediante convoluzione con un mollificatore di Friedrichs $\phi_\delta(y) = \delta^{-n}\phi\left(\frac{y}{\delta}\right) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ per $\delta > 0$:

$$S_\delta u(x) = \int u(x+\delta y)\phi(y)dy = \delta^{-n} \int u(y)\phi\left(\frac{y-x}{\delta}\right) dy = u * \phi_\delta(x)$$

dove $dy = dy_1 \ldots dy_n$ e $\int \phi(y)dy = 1$.

Allora $S_\delta u \in C^\infty$ e se u è una distribuzione allora $u \in H^s$ in un intorno di x_0 se e solo se esiste $\zeta \in C_0^\infty(V)$, $\zeta = 1$ in un intorno di x_0 tale che $||S_\delta \zeta u||_s$ sia limitata indipendentemente da δ. Infatti:

$$||\zeta u * \phi_\delta||_s \le C \Longrightarrow \zeta u \in H^s$$

dove C è una costante indipendente da δ.

Dimostrazione. Dato che $\zeta u \hat{*} \phi_\delta = \hat{\zeta u}\hat{\phi}_\delta$, si ha:

$$||\zeta u * \phi_\delta||_s^2 = \int (1+|\xi|^2)^s |\hat{\zeta u}|^2 |\hat{\phi}_\delta|^2 d\xi \le C$$

quindi:

$$\int_{|\xi|\le M} (1+|\xi|^2)^s |\hat{\zeta u}|^2 |\hat{\phi}_\delta|^2 d\xi \le C$$

per ogni δ e per ogni $M > 0$.

Inoltre si ha:

$$\hat{\phi}_\delta(\xi) = \delta^{-n} \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} \phi\left(\frac{x}{\delta}\right) dx = \int e^{-i\langle y,\delta\xi\rangle} \phi(y) dy = \hat{\phi}(\delta\xi).$$

Dato che $\phi \in C_0^\infty \subset \mathcal{S}$, ne segue che $\hat{\phi} \in \mathcal{S}$, quindi $|\hat{\phi}| \le c$. Nell'insieme $\{|\xi| \le M\}$ si ha dunque:

$$\begin{aligned}(1+|\xi|^2)^s |\hat{\zeta u}|^2 |\hat{\phi}(\delta\xi)|^2 &\le c(1+|\xi|^2)^s |\hat{\zeta u}|^2 = \\ &= c(1+|\xi|^2)^{-N}(1+|\xi|^2)^{N+s} |\hat{\zeta u}|^2 \le \\ &\le c(1+M^2)^{N+s}(1+|\xi|^2)^{-N} |\hat{\zeta u}|^2\end{aligned}$$

che è una funzione sommabile.

Dato che se $\delta \to 0$ si ha:

$$\hat{\phi}(\delta\xi) \longrightarrow \hat{\phi}(0) = \int \phi(x) dx = 1$$

ne segue per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue:

$$\int_{|\xi|\le M} (1+|\xi|^2)^s |\hat{\zeta u}|^2 |\hat{\phi}_\delta|^2 d\xi \longrightarrow \int_{|\xi|\le M} (1+|\xi|^2)^s |\hat{\zeta u}|^2 d\xi \le C.$$

Si può quindi applicare il teorema di Beppo Levi e concludere che per $M \to \infty$:

$$\int_{|\xi|\le M} (1+|\xi|^2)^s |\hat{\zeta u}|^2 d\xi \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{\zeta u}|^2 d\xi = ||\zeta u||_s^2 \le C$$

cioè $\zeta u \in H^s$. □

Inoltre se $u \in H^s$ in un intorno di x_0 e T^1 è un operatore pseudodifferenziale di ordine 1, allora:

$$||[S_\delta \zeta, T^1]u||_s \leq c||u||_s$$

dove c è una costante indipendente da δ.

In modo analogo a quanto visto prima si trova, se $Pu = f$ e $\zeta u \in H^s$:

$$||S_\delta \zeta u||_{s+\epsilon} \leq C(||S_\delta \zeta_1 f||_s + ||S_\delta \zeta_1 u||_{-N} + ||\zeta_1 u||_s). \tag{3.5}$$

Quindi se u è una distribuzione allora per qualche N si ha che $\zeta_1 u \in H^{-N}$ e si possono scegliere ζ e ζ_1 in modo che ζu abbia un supporto piccolo e $\zeta_1 f \in C_0^\infty(V)$.

Ponendo ora $s = -N$ nella (3.5) si conclude che $\zeta u \in H^{-N+\epsilon}$.

Ripetendo queste argomentazioni si conclude che esiste un intorno W di x_0 tale che per ogni $\zeta \in C_0^\infty(W)$ si ha che $\zeta u \in H^s$ per ogni s, cioè $u|_W \in C^\infty(W)$.

Si è quindi dimostrato che l'operatore P considerato è ipoellittico.

Bibliografia

[1] Lanconelli E. Uguzzoni F. Bonfiglioli, A. *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their Sub-Laplacians*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, first edition, 2007.

[2] Lars Hörmander. Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Math.*, 119:147–171, 1967.

[3] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I*, volume 256 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1990. Distribution theory and Fourier analysis.

[4] J. J. Kohn. Pseudo-differential operators and hypoellipticity. In *Partial differential equations (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIII, Univ. California, Berkeley, Calif., 1971)*, pages 61–69. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973.