Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

INTRODUZIONE AGLI OPERATORI COMPATTI NEGLI SPAZI DI BANACH

Relatrice:
Chiar.ma Prof.
Simonetta Abenda

Presentata da:
Maria Vittoria Sissa

Sessione Straordinaria
2019-2020

A me

Indice

Introduzione

In analisi funzionale, un operatore compatto è un operatore lineare e continuo tra spazi di Banach tale che l'immagine di ogni sottoinsieme limitato del dominio ha come immagine un insieme relativamente compatto nel codominio cioè tale che la sua chiusura sia compatta. In questo lavoro di tesi si intendono illustrare i risultati principali relativi alla teoria degli operatori compatti, tra i quali il teorema detto alternativa di Fredholm, le proprietà dello spettro di un operatore compatto, la decomposizione spettrale degli operatori autoaggiunti compatti.

Nella parte iniziale della tesi si danno definizioni e risultati preliminari, tra cui alcuni elementi di topologia. Nel primo capitolo vengono definiti gli operatori compatti, viene affrontato il problema della approssimazione di operatori compatti con operatori lineari e continui di rango finito ed esaminato il comportamento della proprietà di compattezza rispetto alla operazione di composizione. Si prosegue con i principali risultati della Teoria di Riesz-Fredholm, tra i quali il fondamentale Teorema di Alternativa di Fredholm. E' noto che un operatore lineare da uno spazio vettoriale in sé di dimensione finita è iniettivo se e solo se è suriettivo, cosa in generale falsa quando la dimensione è infinita. Il Teorema dell'Alternativa di Fredholm afferma, tra altre proprietà, che l'operatore che è somma dell'identità e di un operatore compatto gode invece di questa proprietà. Nel secondo capitolo si danno la definizione di insieme risolvente, di spettro e di autovalore di un operatore lineare e si fornisce una descrizione dello spettro di un operatore compatto. Infine, nel terzo capitolo, viene preso in esame il caso particolare di operatori compatti autoaggiunti in uno spazio di Hilbert, se ne studia lo spettro e si mostra che gli autovettori di un operatore compatto da uno spazio di Hilbert separabile in sé costituiscono una base Hilbertiana dello spazio.

Nozioni preliminari

Definizione 0.0.1. *Sia V un insieme e $\mathbb{K}$ un campo. Si dice che V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ se esistono due applicazioni*

$$+ : V \times V \to V, \quad (u, v) \mapsto u + v \quad e \quad \cdot : \mathbb{K} \times V \to V, \qquad (k, v) \mapsto kv$$

dotato delle seguenti proprietà:

1. *$(V, +)$ è un gruppo commutativo cioè:*

   - *l'operazione binaria $+$ gode della proprietà associativa:*

   $$(u + v) + w = u + (v + w) \qquad \forall u, v, w \in V;$$

   - *in V esiste l'elemento neutro di $+$ cioè $\exists\, 0_V \in V$ tale che*

   $$v + 0_V = v \qquad \forall v \in V;$$

   - *ogni elemento ammette l'inverso rispetto a $+$ in V cioè $\forall v \in V$ $\exists w \in V$ tale che*

   $$v + w = 0_V;$$

   - *l'operazione binaria $+$ gode della proprietà commutativa:*

   $$u + v = v + u \qquad \forall u, v \in V;$$

2. *l'operazione $\cdot$ di prodotto di un elemento di V per uno scalare:*

   - *gode della proprietà associativa cioè $\forall \lambda, \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall v \in V$:*

   $$(\lambda \cdot \alpha) \cdot v = \lambda \cdot (\alpha \cdot v);$$

- *esiste l'elemento neutro in V rispetto a $\cdot$ che viene indicato con 1_V tale che $\forall v \in V$:*
$$1_V \cdot v = v = v \cdot 1_V;$$
- *gode della proprietà distributiva rispetto alla somma di elementi di V cioè se $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ e $\forall v, w \in V$ vale:*
$$\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w;$$
- *gode della proprietà distributiva rispetto alla somma tra scalari cioè se $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall v \in V$ vale*
$$(\lambda + \beta) \cdot v = \lambda \cdot v + \beta \cdot v.$$

Esempio 0.0.2.

1. *Se $\mathbb{K}$ è un campo e n un numero naturale, allora*
$$\mathbb{K}^n := \{(x_1, ..., x_n) \mid x_1, ..., x_n \in \mathbb{K}\}$$
è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con le operazioni di somma e prodotto per scalare definite termine a termine (in modo puntuale);

2. *L'insieme dei polinomi $\mathbb{K}[x]$ nella variabile x e a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$, dotato delle operazioni usuali di somma fra polinomi e prodotto di un polinomio per uno scalare è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale;*

3. *L'insieme delle matrici $\mathbb{K}^{m \times n}$ con le operazioni somma tra matrici e prodotto di uno scalare per una matrice è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale;*

4. *L'insieme $\mathbb{K}^X = \{f\colon X \to \mathbb{K}\}$ dove le operazioni tra funzioni sono definite così:*
   - *somma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;*
   - *prodotto per scalare: $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$;*

   è uno spazio vettoriale.

Definizione 0.0.3. *Siano X e Y due spazi vettoriali e sia $F\colon X \to Y$ un'applicazione lineare. Si definiscono:*

- *l'immagine di F*

$$Im(F) := \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ per cui } F(x) = y\};$$

- *il nucleo di F*

$$Ker(F) := \{x \in X \mid F(x) = 0_Y\};$$

- *il rango di F*

$$r(F) := dim(Im(F)).$$

  Un'applicazione lineare si dice di rango finito se $r(F) < \infty$.

Definizione 0.0.4. *Sia X uno spazio vettoriale e $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ un'applicazione, questa si dice una norma su X se:*

1. $\|x\| \geq 0 \ \ \forall x \in X$ *e* $\|x\| = 0$ *se e solo se* $x = 0$; *(Positività)*
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \ \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \ \ \forall x \in X$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \ \forall x, y \in X$. *(Disuguaglianza triangolare)*

Esempio 0.0.5. *Si può verificare che le seguenti scritture sono norme:*

1. *sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ sia $\|\cdot\|_{eucl}$ la norma euclidea:*

$$\|x\|_{eucl} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

2. *sullo spazio $\mathbb{R}^n$ sia $\|\cdot\|_1$ la norma-1 data da:*

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

3. *sullo spazio $\mathbb{R}^n$ altrimenti sia $\|\cdot\|_0$ la norma-0 data da:*

$$\|x\|_0 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

4. *sia* $[a, b] \subset \mathbb{R}$*, sullo spazio vettoriale* $C([a, b])$ *delle funzioni continue da* $[a, b]$ *in* $\mathbb{R}$ *si può considerare la norma:*

$$\|f\|_{C([a,b])} = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|.$$

Definizione 0.0.6. *Uno spazio vettoriale dotato di norma* $(V, \|\cdot\|)$ *si dice uno spazio normato.*

Definizione 0.0.7. *Sia* $(V, \|\cdot\|)$ *uno spazio normato e sia* $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *una successione di elementi di* V*, diciamo che* (v_n) *è di Cauchy in* V *se* $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tale che* $\forall m, n \geq n_0$ *si ha* $\|v_n - v_m\| < \epsilon$.

Definizione 0.0.8. *Sia* $(V, \|\cdot\|)$ *uno spazio normato,* $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *una successione in* V *e* $v \in V$*. Diciamo che* $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge a* v *se:*

$$\lim_{n \to \infty} \|v_n - v\| = 0.$$

Definizione 0.0.9. *Sia* X *un insieme sul quale è definita una metrica cioè una funzione* $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ *tale che:*

1. $d(x, y) \geq 0 \;\; \forall x, y \in X$ *e* $d(x, y) = 0$ *se e solo se* $x = y$*;* *(Positività)*

2. $d(x, y) = d(y, x) \;\; \forall x, y \in X$*;* *(Simmetria)*

3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \;\; \forall x, y, z \in X$*.* *(Disuguaglianza triangolare)*

Se su X *è definita una metrica, la coppia* (X, d) *si dice spazio metrico.*

Osservazione 0.0.10. *Ogni spazio vettoriale normato* $(V, \|\cdot\|)$ *è uno spazio metrico con la metrica* d *indotta dalla norma:*

$$d(x, y) := \|x - y\| \;\; \forall x, y \in V.$$

Definizione 0.0.11. *Sia* (X, d) *uno spazio metrico, questo si dice completo se ogni successione* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *in* X *di Cauchy è convergente in* X*.*

0.1 Spazi di Banach e spazi di Hilbert

Definizione 0.1.1. *Sia* $(X, \|\cdot\|)$ *uno spazio normato e sia* d *la metrica indotta dalla norma. Si dice che* (X, d) *è uno spazio di Banach se* X *è completo rispetto a* d.

Esempio 0.1.2. *Sono degli spazi di Banach i seguenti:*

1. $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_{eucl})$
2. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{eucl})$
3. *sia* $a = (a_n)_{n\geq 1}$ *una successione in* $\mathbb{K}$ *con* $\mathbb{K}$ *uguale a* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$, *e si definiscano*

$$\|a\|_\infty := \sup_{n\geq 1} |a_n|, \qquad |a|_p := (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)^{1/p}.$$

Allora gli spazi:

- $l_\infty = \{a \,:\, a \text{ è una successione in } \mathbb{K} \text{ e } \|a\|_\infty < \infty\}$;
- $l_p = \{a \,:\, a \text{ è una successione in } \mathbb{K} \text{ e } |a|_p < \infty\}$

sono degli spazi di Banach.

4. *sia* (X, S, μ) *uno spazio di misura, lo spazio* $L^p(X, \mu) = \{f \colon X \to \mathbb{R} : \int_X |f|^p d\mu < \infty\}$, *dove si sottintende che si identificano le funzioni* f *e* g *se esse coincidono* μ*-quasi dappertutto, è uno spazio di Banach se dotato della norma* $\|f\|_{L^p(X,\mu)} = (\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$.

Definizione 0.1.3. *Siano* $(X, \|\cdot\|_X)$ *e* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *due spazi normati e sia* $T \colon X \to Y$ *un'applicazione, questa si dice lineare se:*

$$\forall x, y \in X \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ si ha } T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

Teorema 0.1.4. *Siano* X,Y *due spazi normati e sia* $T \colon X \to Y$ *un'applicazione lineare allora sono equivalenti:*

1. T *è continua;*

2. *T è continua in 0;*

3. *T è limitata.*

Definizione 0.1.5. *Siano X,Y due spazi normati, si definisce lo spazio $L(X,Y)$ lo spazio delle applicazioni lineari e continue da X in Y.*

$$L(X,Y) = \{T\colon X \to Y \,:\, T \text{ è lineare e continua }\}.$$

Su $L(X,Y)$ si considera la norma data da:

$$\|T\|_{L(X,Y)} = \inf\{M > 0 \,:\, \|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X\} = \sup\{\|T(x)\|_Y \colon \|x\|_X \leq 1\}.$$

Teorema 0.1.6. *Siano X uno spazio normato e Y uno spazio di Banach, allora $L(X,Y)$ è di Banach.*

Il teorema sopra ci permette di definire e caratterizzare lo spazio duale e lo spazio biduale.

Definizione 0.1.7. *Lo spazio $L(X,\mathbb{R})$ si dice spazio duale di X e si indica con X^*.*

Osservazione 0.1.8. *Si osservi che $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_{eucl})$ è uno spazio di Banach, perciò per il teorema sopra lo spazio duale di qualsiasi spazio normato X è uno spazio di Banach.*

Un'applicazione lineare e continua definita su un sottospazio di uno spazio di Banach, si può prolungare a tutto lo spazio. Precisamente, vale infatti il seguente risultato.

Teorema 0.1.9 (di Hahn-Banach)**.** *Sia X uno spazio di Banach reale, $Y \subseteq X$ un sottospazio di X, sia $f \in Y^*$ allora*

$$\exists\, F \in X^* \text{ tale che } F_{|Y} = f \text{ e tale che } \|F\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}.$$

Definizione 0.1.10. *Sia X uno spazio di Banach, lo spazio biduale di X è definito come $X^{**} = L(X^*,\mathbb{R})$ che è l'insieme dei funzionali lineari continui che agiscono sui funzionali lineari continui. Si definisce poi l'applicazione $i_X\colon X \to X^{**}$ tale che per ogni $f \in X^*$, $i_X(x)(f) := f(x)$.*

Teorema 0.1.11. *Sia X uno spazio di Banach. Siano G e L due sottospazi vettoriali chiusi tali che $G + L$ è chiuso. Allora esiste una costante $C \geq 0$ tale che ogni $z \in G + L$ ammette una decomposizione del tipo*

$$z = x + y \qquad \text{con } x \in G, y \in L, \|x\| \leq C\|z\| \text{ e } \|y\| \leq C\|z\|$$

Definizione 0.1.12. *Sia X uno spazio di Banach e sia $Y \subset X$ un suo sottospazio chiuso, un sottospazio $Z \subset X$ si dice complemento topologico di Y o più semplicemente complemento di Y se*

- *Z è chiuso;*
- *$Z \cap Y = \{0\}$;*
- *$Z + Y = X$.*

Possiamo anche dire che Y e Z sono sottospazi complementari di X.

Osservazione 0.1.13. *Sia X uno spazio di Banach, sia $Y \subset X$ un suo sottospazio chiuso e sia $Z \subset X$ il suo complemento topologico si ha che ogni $x \in X$ si può scrivere come $x = y + z$ con $y \in Y$ e $z \in Z$. Dal teorema 0.1.11 segue che le proiezioni $x \mapsto y$ e $x \mapsto z$ sono continue e lineari.*

Esempio 0.1.14. *Ogni sottospazio Y di X finito dimensionale ammette un complemento. Suppongo che Y abbia dimensione n e che $e_1, ..., e_n$ i vettori della base di Y. Ogni $x \in Y$ si può quindi scrivere come $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ e sia $\varphi_i(x) = x_i$. Per il Teorema di Hahn-Banach 0.1.9, ogni φ_i si può estendere ad una funzione lineare e continua $\overline{\varphi_i}$ definita su X. Si trova che $Z = \bigcap_{i=1}^{n} (\overline{\varphi_i})^{-1}(0)$ è un complemento di Y.*

Esempio 0.1.15. *Ogni sottospazio chiuso G di codimensione finita ammette un supplementare topologico. Infatti basta scegliere un qualunque supplementare algebrico (che è automaticamente chiuso perchè di dimensione finita). Ne facciamo un esempio. Sia $N \subset X^*$ un sottospazio di dimensione p. Allora l'insieme $G = \{x \in X \quad < f, x >= 0 \; \forall f \in N\}$ è chiuso e di codimensione p. Infatti siano $f_1, \cdots, f_p$ una base di N, allora esistono $e_1, \cdots, e_p \in X$ tali che*

$$< f_i, e_j >= \delta_{ij} \qquad \forall i, j = 1, 2, \cdots, p.$$

Consideriamo l'applicazione $\phi\colon X \to \mathbb{R}^p$ definita da $x \in X \mapsto \phi(x) = (< f_1, x >, \cdots, < f_p, x >)$. L'applicazione ϕ deve essere suriettiva altrimenti si potrebbe determinare $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \neq$ tali che

$$\alpha \cdot \phi(x) = < \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i, x > = 0 \qquad \forall x \in X$$

ma questo è assurdo. Si verifica che le $(e_i)_{1 \le i \le p}$ sono linearmente indipendenti e che lo spazio vettoriale generato dalle $(e_i)_{1 \le i \le p}$ è un supplementare di G.

Definizione 0.1.16. *Siano X, Y due spazi di Banach e $T\colon X \to Y$ tale che $T \in L(X, Y)$, si definisce operatore aggiunto di T l'operatore lineare e continuo:*

$$T^*\colon Y^* \to X^*$$

che agisce sulle applicazioni di Y^* così:

$$(T^*\phi)(x) := \phi(Tx) \;\; \forall x \in X, \; \forall \phi \in Y^*.$$

Se $T = T^*$ l'operatore si dice autoaggiunto.

Circa le proprietà dell'operatore aggiunto, vale la seguente proposizione.

Proposizione 0.1.17. *Sia $A\colon D(A) \subseteq X \to Y$ un operatore chiuso e tale che $\overline{D(A)} = X$. Allora:*

1. *Ker(A) =Im(A^*)$^\perp$;*
2. *Ker(A^*) =Im(A)$^\perp$;*
3. *Im(A)$^\perp \supset \overline{Im(A^*)}$;*
4. *Im(A^*)$^\perp = \overline{Im(A)}$.*

Teorema 0.1.18. *Sia $A\colon D(A) \subset X \in Y$ un operatore chiuso e tale che $\overline{D(A)} = X$. Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1. *Im(A) è chiuso;*

2. *Im*(A^*) *è chiuso;*

3. *Im*(A) =*Ker*$(A^*)^\perp$*;*

4. *Im*(A^*) =*Ker*$(A)^\perp$.

Diamo ora la definzione di prodotto scalare per uno spazio vettoriale.

Definizione 0.1.19. *Sia* X *uno spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$. *Si chiama prodotto scalare su* X *un'applicazione* $< \cdot\,, \cdot >: X \times X \to \mathbb{R}$ *tale che:*

1. $< x, x > \geq 0\ \forall x \in X,\ < x, x >= 0$ *se e solo se* $x = 0$*;*

2. $< x, y >=< y, x >\ \forall x, y \in X$*;*

3. $\lambda < x, y >=< \lambda x, y >=< x, \lambda y >\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$*;*

4. $< x' + x'', y >=< x', y > + < x'', y >\ \forall x', x'' \in X$*;*

5. $< x, y' + y'' >=< x, y' > + < x, y'' >\ \forall y', y'' \in X$.

Definizione 0.1.20. *Sia* $(X, < \cdot\,, \cdot >)$ *uno spazio con prodotto interno,* X *è di Hilbert se, rispetto alla norma*

$$\|x\| =< x, x >^{\frac{1}{2}}$$

lo spazio $(X, \|\cdot\|)$ *è uno spazio di Banach.*

Esempio 0.1.21. *Sono spazi di Hilbert i seguenti:*

1. *Lo spazio vettoriale* $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, ..., x_n) : x_j \in \mathbb{R}\}$ *con il prodotto scalare:*
$$< x, y >_{\mathbb{R}^n} := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

2. *Lo spazio vettoriale* l^2 *delle successioni* $x = (x_j)_{j\geq 1}$ *con* $x_j \in \mathbb{R}$ *a quadrato sommabile cioè che soddisfano* $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty$ *con il prodotto scalare:*
$$< x, y >_{l^2} := \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$$

3. *Lo spazio* $L^2(\Omega, \mu)$ *con* Ω *aperto di* $\mathbb{R}^n$ *e* μ *la misura di Lebesgue, dotato del prodotto scalare dato da:*
$$< f, g >:= \int_\Omega fg \, d\mu.$$

Molto importanti sono i seguenti tre teoremi.

Teorema 0.1.22 (di rappresentazione di Riesz). *Sia* X *uno spazio di Hilbert e sia* $f \in X^*$ *con* $f \neq 0$ *allora* $\exists!\ y \in X$ *tale che* $f(x) =< x, y > \forall x \in X$.

Teorema 0.1.23 (Lax-Milgram). *Sia* X *uno spazio di Hilbert e sia* $A\colon X \times X \to \mathbb{R}$ *tale che:*

- $A(\cdot, y)$ *è lineare* $\quad \forall y \in X$;
- $A(x, y) = A(y, x) \quad \forall x, y \in X$;
- $\exists C > 0$ *tale che* $|A(x, y)| \leq C\|x\|\|y\| \ \ \forall x, y \in X$;
- $\exists \lambda > 0$ *tale che* $A(x, x) \geq \lambda \|x\|^2 \ \forall x \in X$.

allora per ogni $F \in X^*$ *esiste un unico* $x_F \in X$ *tale che* $A(x, x_F) = F(x)$ *per ogni* $x \in X$.

Teorema 0.1.24 (Proiezione su un convesso chiuso). *Sia* H *uno spazio di Hilbert e* $K \subset H$ *un suo sottoinsieme convesso chiuso non vuoto. Allora per ogni* $f \in H$ *esiste un unico* $u \in K$ *tale che*
$$|f - u| = \min_{v \in K} |f - v| = \ dist(f, K).$$
Poniamo $u = P_K f$ *che chiamiamo proiezione di* f *su* K.

In virtù del Teorema 0.1.24 è definita una applicazione $P_K : H \to K$. Essa è Lipschitziana. Precisamente vale il seguente risultato.

Proposizione 0.1.25. *Sotto le ipotesi del Teorema 0.1.24 l'applicazione* $P_K : H \to H$ *è tale che*
$$|P_K f_1 - P_K f_2| \leq |f_1 - f_2| \qquad \forall f_1, f_2 \in H.$$

0.2 Nozioni di topologia

Definizione 0.2.1. *Sia X un insieme, $X \neq \emptyset$, una topologia su X è una famiglia di insiemi $\tau \subseteq P(X)$ (dove $P(X)$ è l'insieme delle parti di X) tale che:*

1. $\emptyset, X \in \tau$;
2. *τ è chiusa per unioni qualsiasi cioè $\forall$ famiglia $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$ si ha:*
$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau;$$
3. *τ è chiusa per intersezioni finite cioè $\forall A_1, ..., A_n \in \tau$ si ha:*
$$A_1 \cap ... \cap A_n \in \tau.$$

Gli elementi di τ si chiamano aperti della topologia o direttamente aperti di X.

Definizione 0.2.2. *Sia (X, τ) uno spazio topologico, un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice chiuso se il suo complementare è aperto cioè:*

$$A \text{ chiuso se e solo se } A^C \in \tau.$$

Definizione 0.2.3. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $A \neq \emptyset$, $A \subset X$, $x \in X$ si dice punto interno di A se:*

$$\exists\ B \in \tau \text{ tale che } x \in B \subseteq A.$$

Definizione 0.2.4. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $x \in X$, un intorno di x è un qualsiasi sottoinsieme $N \subseteq X$ tale che x sia un punto interno di N. Introduciamo la notazione $N(x)$ per indicare l'insieme di tutti gli intorni di x. Un sistema fondamentale d'intorni o base locale di $x \in X$ è una famiglia F_x di intorni di x tali che:*

$$\forall A \in N(x)\ \exists\ B \in F_x \text{ tale che } B \subseteq A.$$

Definizione 0.2.5. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e $A \subseteq X$ un sottoinsieme di X, la chiusura di A è l'intersezione di tutti i chiusi contenenti A e si indica con $\overline{A}$.*

Definizione 0.2.6. *Uno spazio topologico* (X, τ) *si dice localmente numerabile se ogni* $x \in X$ *ammette un sistema fondamentale d'intorni numerabile.*

Definizione 0.2.7. *Sia* (X, d) *uno spazio metrico,* $\forall x \in X$ *e* $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ *la palla di centro* x *e raggio* ϵ *è:*

$$B(x, \epsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}.$$

Osservazione 0.2.8. *Ogni spazio metrico è localmente numerabile poichè* $\forall x \in X$ *si può considerare come sistema fondamentale d'intorni numerabile l'insieme* $B_x = \{B(x, \epsilon); 0 < \epsilon \in \mathbb{Q}\}$.

Il seguente teorema sugli spazi topologici localmente numerabili ci permette di utilizzare la definizione di chiusura metrica per gli spazi metrici.

Teorema 0.2.9. *Sia* (X, τ) *uno spazio topologico localmente numerabile allora* $\forall A \subseteq X$ *si ha che* $\overline{A}$ *è l'insieme dei limiti di successioni in* A.

Lavorando con spazi metrici perciò si può utilizzare la definizione di chiusura metrica:

$$A \text{ è chiuso se e solo se } A = \overline{A} \text{ se e solo se (per sopra)}$$

$$\forall (a_n) \subset A \text{ si ha } a_n \overset{n \to \infty}{\to} a \in A.$$

Definizione 0.2.10. *Sia* (X, d) *uno spazio metrico, la topologia* τ *indotta dalla metrica* d *è:*

$$\tau = \{\emptyset, X\} \cup \{A \subset X \mid \forall a \in A \; \exists \, \epsilon > 0; B(a, \epsilon) \subseteq A\}$$

Definizione 0.2.11. *Sia* (X, τ) *uno spazio topologico un ricoprimento di* X *è un insieme* $U = \{U_i\}_{i \in I}$ *di sottoinsiemi di* X *tali che:*

$$X \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Un sottoricoprimento di U *è un ricoprimento di* X *della forma* $\{U_i\}_{i \in J}$ *con* $J \subseteq I$.

Definizione 0.2.12. *Sia X uno spazio metrico, X si dice totalmente limitato se per ogni $\epsilon > 0$ esistono $x_1, \cdots, x_n$ in X tali che $B(x_1, \epsilon), \cdots, B(x_n, \epsilon)$ ricoprono tutto lo spazio.*

Teorema 0.2.13. *Sia X uno spazio metrico completo e $A \subseteq X$ un suo sottoinsieme, allora A è compatto se e solo se A è chiuso e totalmente limitato.*

Definizione 0.2.14. *Siano V, V' due spazi vettoriali, $f : V \to V'$ si dice isomorfismo tra V e V' se f è un'applicazione biiettiva. Due spazi vettoriali si dicono isomorfi se esiste un isomorfismo $f : V \to V'$.*

Teorema 0.2.15. *Ogni spazio vettoriale di dimensione n è isomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Definizione 0.2.16. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $A \subseteq X$ allora A si dice compatto se ogni ricoprimento aperto di A ammette un sottoricoprimento finito.*

Il teorema di Heine-Borel ci permette di caratterizzare gli spazi compatti in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{eucl})$.

Teorema 0.2.17 (di Heine-Borel)**.** *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, allora E è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Capitolo 1

Gli operatori compatti

1.1 Definizione e proprietà

Definizione 1.1.1. *Siano X, Y due spazi di Banach, B_X la palla unitaria di X*

$$B_X := \{x \in X \,:\, \|x\| \leq 1\}$$

e $T \in L(X, Y)$ un operatore lineare e continuo da X in Y. T si dice compatto se $T(B_X)$ ha chiusura compatta in Y secondo la topologia indotta dalla metrica di Y. L'insieme degli operatori compatti da X in Y è denotato con $K(X, Y)$. Nel caso in cui $X = Y$ si usa anche la notazione $K(X)$ per indicare lo spazio $K(X, X)$.

Si noti che stiamo considerando $L(X, Y)$ con la topologia indotta dalla norma, che risulta così essere uno spazio topologico localmente numerabile. Perciò per dimostrare che $K(X, Y)$ è un sottospazio chiuso di $L(X, Y)$ potremo utilizzare la caratterizzazione metrica della chiusura di un sottoinsieme in uno spazio localmente numerabile.

Teorema 1.1.2. *Siano X, Y due spazi di Banach, l'insieme $K(X, Y)$ degli operatori compatti è un sottospazio lineare chiuso di $L(X, Y)$ per la topologia indotta da $\|\cdot\|_{L(X,Y)}$.*

Dimostrazione. Iniziamo col dimostrare che $K(X, Y)$ è un sottospazio vettoriale di $L(X, Y)$. Siano $T, S \in K(X, Y)$. Dimostriamo che $T + S$ è un operatore compatto, ossia che $(T+S)(B_X)$ ha chiusura compatta in Y. Siccome $T, S \in L(X,Y)$ sappiamo che

$$(T+S)(B_X) = T(B_X) + S(B_X),$$

ma dato che $T(B_X), S(B_X)$ hanno chiusura compatta in Y consideriamo i due loro ricoprimenti finiti rispettivamente $U = (U_{i \in I})$ con I finito e $V = (V_{j \in J})$ con J finito; allora $W = U \cup V$ è un ricoprimento finito di $T(B_X) + S(B_X)$ e di conseguenza è un ricoprimento finito di $(T+S)(B_X)$.

Verifichiamo che $K(X,Y)$ è chiuso rispetto al prodotto per scalari. Siano $T \in K(X,Y)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$; dato che $T \in L(X,Y)$:

$$(\lambda T)(B_X) = \lambda(T(B_X))$$

e $T \in K(X,Y)$ per cui $T(B_X)$ ha chiusura compatta in Y e $\lambda(T(B_X))$ ha chiusura compatta in Y in quanto è una dilatazione di λ di $T(B_X)$ in Y. Di conseguenza anche $(\lambda T)(B_X)$ ha chiusura compatta in Y e abbiamo dimostrato che $(\lambda T)(B_X) \in K(X,Y)$.

Dimostriamo ora che $K(X,Y)$ è chiuso in $L(X,Y)$ rispetto alla topologia generata da $\|\cdot\|_{L(X,Y)}$. Prendiamo una successione di operatori compatti $(T_n) \in K(X,Y)$ e $T \in L(X,Y)$ tale che $\|T_n - T\|_{L(X,Y)} \to 0$. Vogliamo dimostrare che $T \in K(X,Y)$. La chiusura di $T(B_X)$ è un sottoinsieme chiuso dello spazio Y, che è completo, quindi anche $T(B_X)$ è completo. Resta da dimostrare che $T(B_X)$ è totalmente limitato, ossia che per ogni $\epsilon > 0$ $T(B_X)$ può essere ricoperto da un numero finito di palle $B(y_i, \epsilon)$ di Y. Fissiamo $n > 0$ tale che $\|T_n - T\|_{L(X,Y)} < \frac{\epsilon}{2}$; siccome $T_n(B_X)$ ha la chiusura compatta in Y vale che $T_n(B_X) \subset \bigcup_{i \in I} B(y_i, \frac{\epsilon}{2})$ con I insieme finito di indici e $y_i \in Y$ per ogni $i \in I$. Dimostriamo che $T(B_X) \subset \bigcup_{i \in I} B(y_i, \epsilon)$. Sia $x \in B_X$. Allora esiste $j \in I$ tale che $T_n(x) \in B(y_j, \frac{\epsilon}{2})$. Pertanto

$$|T(x) - y_j| \leq |T(x) - T_n(x)| + |T_n(x) - y_j| \leq \|T_n - T\|_{L(X,Y)} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

Un operatore $T \in L(X,Y)$ si dice di rango finito se la dimensione dell'immagine di T è finita, ossia $dim(Im(T)) < \infty$. Il seguente risultato afferma che gli operatori lineari e continui di rango finito sono compatti.

Proposizione 1.1.3. *Siano X, Y due spazi di Banach e $T \in L(X,Y)$ di rango finito, allora $T \in K(X,Y)$.*

Dimostrazione. Per ipotesi si ha che $T(X)$ è un sottospazio vettoriale di Y di dimensione finita, sia essa $k < \infty$. Dunque $T(X)$ è isomorfo a $\mathbb{R}^k$. Dobbiamo dimostrare che $T(B_X)$ ha chiusura compatta in Y per dimostrare che $T \in K(X,Y)$. Notiamo che B_X è un insieme limitato di X, T è continua e limitata perciò $T(B_X)$ è un sottoinsieme limitato dello spazio di dimensione finita $T(X)$. Ogni sottoinsieme limitato in uno spazio finito dimensionale è relativamente compatto, quindi la chiusura di $T(B_X)$ è compatta. $\square$

Corollario 1.1.4. *Siano X, Y due spazi di Banach e sia (T_n) una successione in $L(X,Y)$ di operatori di rango finito e $T \in L(X,Y)$ tale che $\|T_n - T\|_{L(X,Y)} \to 0$. Allora $T \in K(X,Y)$.*

Dimostrazione. Siccome per ipotesi $T_n \in L(X,Y)$ e T_n è di rango finito $\forall n$, per la Proposizione 1.1.3 gli operatori T_n sono compatti. Per il Teorema 1.1.2 sappiamo che $K(X,Y)$ è un sottospazio chiuso di $L(X,Y)$ e perciò ogni successione in $K(X,Y)$ convergente in norma ha limite in $K(X,Y)$. Quindi dato che T è il limite in norma di T_n si ha $T \in K(X,Y)$. $\square$

Osserviamo che il viceversa di quanto affermato nel Corollario 1.1.4 non è valido in generale, ma solo in casi particolari. Ossia se X e Y sono spazi di Banach e $T \in K(X,Y)$ non è detto che sia approssimabile con operatori di rango finito, ossia che esista una successione (T_n) di operatori di rango finito tale che $\|T_n - T\|_{L(X,Y)} \to 0$. Tuttavia, se Y è uno spazio di Hilbert, l'approssimazione è possibile. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 1.1.5. *Siano X uno spazio di Banach e Y uno spazio di Hilbert. Sia $T \in K(X,Y)$. Allora esiste una successione $(T_n) \in K(X,Y)$ di operatori di rango finito tale che $\|T - T_n\|_{L(X,Y)} \to 0$.*

Dimostrazione. Siccome $T \in K(X,Y)$ per ipotesi, definiamo $K = \overline{T(B_X)}$ che è compatto in Y perciò, dato $\epsilon > 0$, si ha $K \subseteq \bigcup_{i \in I} B(y_i, \epsilon)$ con I finito e $y_i \in Y$. Sia G lo spazio vettoriale generato dall'insieme degli $\{y_i\}_{i \in I}$, Sia P_G la proiezione su G definita dal Teorema 0.1.24. Sia $T_\epsilon = P_G \circ T$ (T_ϵ è di rango finito perché P_G ha rango finito). Verifichiamo che $\|T_\epsilon - T\|_{L(X,Y)} \leq 2\epsilon$. Sia $x \in B_X$ allora esiste un $i_0 \in I$ tale che

$$\|Tx - y_{i_0}\| < \epsilon$$

perché $Tx \in K$. Dunque esiste $B(y_{i_0}, \epsilon) \in \bigcup_{i \in I} B(y_i, \epsilon)$ tale che $Tx \in B(y_{i_0}, \epsilon)$. Quindi, in virtù della Proposizione 0.1.25,

$$\|P_G \circ Tx - P_G y_{i_0}\| \leq \|Tx - y_{i_0}\| < \epsilon$$

da cui, essendo $P_G y_{i_0} = y_{i_0}$,

$$\|P_G \circ Tx - y_{i_0}\| < \epsilon.$$

Si ottiene:

$$\|P_G \circ Tx - Tx\| = \|P_G \circ Tx - y_{i_0} + y_{i_0} - Tx\| \leq \text{ (per la disuguaglianza triangolare)}$$

$$\leq \|P_G \circ Tx - y_{i_0}\| + \|Tx - y_{i_0}\| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Abbiamo così dimostrato che

$$\|T_\epsilon x - Tx\| < 2\epsilon \qquad \forall x \in B_X$$

ossia

$$\|T_\epsilon - T\|_{L(X,Y)} \leq 2\epsilon.$$

□

Illustriamo ora come agisce la composizione di operatori sulla proprietà di compattezza.

Proposizione 1.1.6. *Siano X, Y, Z tre spazi di Banach e siano $T \in L(X,Y)$ e $S \in K(Y,Z)$ allora $S \circ T \in K(X,Z)$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che $(S \circ T)(B_X)$ ha chiusura compatta in Z. Si ha

$$(S \circ T)(B_X) = S(T(B_X)).$$

Siccome B_X è un insieme limitato in X, $T(B_X) \subset Y$ è ancora limitato e $S(T(B_X)) \subset Z$ ha chiusura compatta in Z perché S è compatto. □

Teorema 1.1.7 (di Schauder). *Siano X, Y due spazi di Banach allora $T \in K(X,Y)$ se e solo se $T^* \in K(Y^*, X^*)$.*

Prima di dimostrare il teorema di Schauder richiamiamo il teorema di Ascoli-Arzelà.

Teorema 1.1.8 (di Ascoli-Arzelà). *Sia $A \subseteq C^0([a,b])$ allora A è compatto se e solo se:*

- *A è equilimitato cioè esiste $C > 0$ tale che $\sup_{u \in A} \|u\|_{C^0([a,b])} \leq C$;*
- *A è equicontinuo cioè per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che*

$$|u(x) - u(y)| < \epsilon \;\; \forall x, y \in [a,b] \text{ tali che } |x-y| < \delta_\epsilon \;\; \forall u \in A.$$

Dimostrazione del Teorema 1.1.7. Dimostriamo la prima implicazione cioè supponiamo $T \in K(X,Y)$ e dimostriamo che $T^* \in K(Y^*, X^*)$ cioè che $T^*(B_{Y^*})$ ha chiusura compatta in X^*. Precisamente, sia (v_n) una successione in B_{Y^*} e dimostriamo che la sua immagine mediante T^*, ossia la successione $(T^*(v_n))$, ha una sottosuccessione convergente. Per ipotesi le v_n sono applicazioni lineari e continue in Y^* tali che $v_n \in B_{Y^*} \subseteq Y^*$ cioè tali che:

$$\|v_n\|_{Y^*} = \sup_{y \in Y; \|y\|_Y \leq 1} |v_n(y)| \leq 1.$$

Sia $K = \overline{T(B_X)} \subseteq Y$ con K che è compatto di Y in quanto T è compatto. Consideriamo $C^0(K)$ lo spazio delle funzioni continue da K in $\mathbb{R}$ e $H \subset C^0(K)$ il suo sottoinsieme

$$H := \{f_n \colon K \to \mathbb{R}; f_n(x) = < v_n, x >, \;\; n \in \mathbb{N}\}.$$

Notiamo che H soddisfa le ipotesi del teorema di Ascoli-Arzelà in quanto è equilimitato ed equicontinuo.

H è equilimitato se esiste $M > 0$ tale che $|f_n(y)| \leq M$ per ogni $y \in K$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si ha:

$$|f_n(y)| = |< v_n, y >| \leq \|v_n\|_{Y^*}\|y\| \leq \|y\| \qquad \forall y \in K, \ \forall n.$$

Essendo $K = \overline{T(B_X)}$ compatto, esso è anche limitato, quindi esiste $C > 0$ tale che $\|y\| \leq C$ per ogni $y \in K$, da cui

$$\sup_{y \in K} |f_n(y)| \leq C\|v_n\|_{Y^*} \leq C \qquad \forall n.$$

Dimostriamo ora che H è equicontinuo. Dobbiamo dimostrare che $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che se $y_1, y_2 \in K$ e $\|y_1 - y_2\| < \delta$ allora

$$|f_n(y_1) - f_n(y_2)| < \epsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sia $\epsilon > 0$. Per ogni $y_1, y_2 \in K$ si ha

$$\begin{aligned} |f_n(y_1) - f_n(y_2)| &= |< v_n, y_1 > - < v_n, y_2 >| = |< v_n, y_1 - y_2 >| \\ &\leq \|v_n\|_{Y^*}\|y_1 - y_2\| \leq \|y_1 - y_2\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Quindi, scegliendo $\delta = \epsilon$ e $y_1, y_2 \in K$ tali che $\|y_1 - y_2\| < \delta$, si ha la disuguaglianza cercata.

Quindi H è anche equicontinuo.

Dato che le ipotesi del teorema di Ascoli-Arzelà sono soddisfatte possiamo estrarre da (f_n) una sottosuccessione f_{n_k} convergente a $f \in C^0(K)$, in particolare tale che:

$$\sup_{y \in T(B_X)} |f_{n_k}(y) - f(y)| = \sup_{x \in B_X} |< v_{n_k}, Tx > - f(Tx)| \underset{k \to \infty}{\to} 0.$$

La successione (f_{n_k}) è dunque di Cauchy in $C^0(K)$, cioè

$$\sup_{x \in B_X} |< v_{n_k}, Tx > - < v_{n_i}, Tx >| \underset{k,i \to \infty}{\to} 0$$

da cui $(T^* v_{n_k})$ è di Cauchy in X^*. Per la completezza di X^* deduciamo che $(T^* v_{n_k})$ converge in X^*.

Ora dimostriamo la seconda implicazione: per ipotesi supponiamo $T^* \in K(Y^*, X^*)$ e dobbiamo dimostrare che T è compatto. Per quello che abbiamo dimostrato nella prima implicazione si ha che se $T^* \in K(Y^*, X^*)$ allora $T^{**} \in K(X^{**}, Y^{**})$ e in particolare $T^{**}(B_X)$ ha chiusura compatta in X^{**}. Dato che $i_X(B_X) \subseteq B_{X^{**}}$ dove i_X è l'applicazione

$$i_X : X \to X^{**}, \quad i_X(x) \in X^{**}, \text{ è tale che } i_X(x)(f) = f(x) \qquad \forall f \in X^*,$$

l'insieme $T^{**}(i_X(B_X))$ è relativamente compatto in Y^{**}. Tale insieme coincide con $i_Y(T(B_X))$. Poiché i_Y è una isometria, $T(B_X)$ risulta relativamente compatto in Y. Ciò conclude la dimostrazione. □

1.2 La teoria di Riesz-Fredholm

Lemma 1.2.1 (di Riesz). *Sia X uno spazio vettoriale normato e sia $M \subset X$ un sottospazio chiuso tale che $M \neq X$ allora*

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, u \in X \textit{ tale che } \|u\| = 1 \textit{ e tale che } dist(u, M) \geq 1 - \epsilon.$$

Dimostrazione. Sia $v \in X$ tale che $v \notin M$ allora, essendo M chiuso,

$$d := \text{dist}(v, M) > 0$$

(altrimenti v sarebbe contenuto in M). Sia $\epsilon > 0$. Se $\epsilon \geq 1$ non c'è nulla da dimostrare. Sia $\epsilon < 1$. Scegliamo $m_0 \in M$ tale che:

$$d \leq \|v - m_0\| \leq \frac{d}{1 - \epsilon}$$

allora u definito nel seguente modo

$$u := \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|}$$

soddisfa le condizioni. Infatti u ha ovviamente norma unitaria. Dobbiamo verificare che $\text{dist}(u, M) = \inf_{m\in M} \text{dist}(u, m) \geq 1 - \epsilon$. Sia $m \in M$,

$$\text{dist}(u,m) = \|u - m\| = \|\frac{v - m_0}{\|v - m_0\|} - m\| = \|\frac{v - m_0 - m\|v - m_0\|}{\|v - m_0\|}\| =$$

$$= \|\frac{v - (m_0 + m\|v - m_0\|)}{\|v - m_0\|}\| \geq \frac{d}{\|v - m_0\|} \geq 1 - \epsilon.$$

dato che, essendo M un sottospazio, $m_0 + \|v - m_0\|m \in M$. □

Osservazione 1.2.2. *Se siamo nel caso finito dimensionale cioè se dim M $< \infty$ o più in generale se M è riflessivo, si può scegliere $\epsilon = 0$ nel lemma di Riesz.*

Teorema 1.2.3 (di Riesz). *Sia X uno spazio vettoriale normato tale che B_X sia compatto, allora X ha dimensione finita.*

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per assurdo quindi sia X uno spazio vettoriale normato di dimensione infinita, allora esiste una successione (X_n) di sottospazi di X di dimensione finita tali che $X_{n-1} \subset X_n$. Grazie al Lemma 1.2.1 sappiamo che si può costruire una successione (u_n) con $u_n \in X_n$ tale che

$$\|u_n\| = 1 \text{ e } \text{dist}(u_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2} \ .$$

Gli u_n hanno tutti norma unitaria perciò appartengono tutti al bordo di B_X. Si ha che per ogni $m < n$ vale che $\|u_n - u_m\| \geq \frac{1}{2}$ per cui la successione (u_n) così costruita non ammette nessuna sottosucccessione convergente e questo è assurdo, perché per ipotesi B_X è compatta e quindi è compatta per successioni perciò ogni successione in B_X dovrebbe avere una sottosuccessione convergente. □

Dato T operatore compatto, l'Alternativa di Fredholm esprime la circostanza che per ogni $f \in X$ l'equazione $u - Tu = f$ ammette un'unica soluzione oppure l'equazione omogenea $u - Tu = 0$ ammette n soluzioni linearmente indipendenti e in tal caso, l'equazione non omogenea $u - Tu = f$ è risolubile se e solo se $f \in$Ker$(I - T^*)^\perp$ e quindi f verifica n condizioni di ortogonalità.

Teorema 1.2.4 (Alternativa di Fredholm)**.** *Sia X uno spazio vettoriale normato. Sia $T \in K(X,X) = K(X)$ allora:*

1. *Ker$(I-T)$ ha dimensione finita;*

2. *Im$(I-T)$ è chiuso e più precisamente vale che Im$(I-T)$ =Ker$(I-T^*)^{\perp}$;*

3. *Ker$(I-T) = \{0\}$ se e solo se Im$(I-T) = X$;*

4. *dim Ker$(I-T)$ =dim Ker$(I-T^*)$.*

Osservazione 1.2.5. *Se dim$X < \infty$ un operatore lineare da X in X è iniettivo se e solo se esso è suriettivo per cui la proprietà del punto* 3 *è scontata. In dimensione infinita un operatore limitato può essere iniettivo senza essere suriettivo e viceversa.*

Dimostrazione. Dimostriamo inizialmente che $Ker(I-T)$ ha dimensione finita. Sia X_1 =Ker$(I-T)$ allora per ogni $x \in X_1$ si ha $x - T(x) = 0$ da cui segue che $B_{X_1} \subset T(B_X)$. Quindi B_{X_1} è compatto, in quanto sottoinsieme chiuso del compatto $\overline{T(B_X)}$, perciò per il Teorema 1.2.3 di Riesz X_1 ha dimensione finita. Dimostriamo il secondo punto e per mostrare che Im$(I-T)$ è chiuso consideriamo la successione $f_n = u_n - Tu_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} f$ in Im$(I-T)$ e mostriamo che $f \in$ Im$(I-T)$. Poniamo d_n =dist$(u_n,$ Ker$(I-T))$ e dato che, per il punto 1 si ha che Ker$(I-T)$ ha dimensione finita,

$$\exists\, v_n \in \text{ Ker}(I-T) \text{ tale che } d_n = \|u_n - v_n\|.$$

Si ha

$$f_n = (u_n - v_n) - T(u_n - v_n) \tag{1.1}$$

Verifichiamo che $d_n = \|u_n - v_n\|$ è limitata. Per assurdo supponiamo che esista una sottosuccessione tale che $\|u_{n_k} - v_{n_k}\| \to \infty$. Ponendo $w_n = \frac{u_n - v_n}{\|u_n - v_n\|}$ avremmo per (1.1)

$$w_{n_k} - Tw_{n_k} = \frac{u_{n_k} - v_{n_k}}{\|u_{n_k} - v_{n_k}\|} - T\frac{u_{n_k} - v_{n_k}}{\|u_{n_k} - v_{n_k}\|} \to 0. \tag{1.2}$$

Essendo $\|w_{n_k}\| = 1$ e T compatto, è possibile estrarre una sottosuccessione di (w_{n_k}), per semplicità indicata ancora con w_{n_k}, tale che $Tw_{n_k} \to z$, quindi, per (1.2), che $w_{n_k} \to z$, da cui si deduce che $z \in \mathrm{Ker}(I-T)$. D'altra parte

$$\mathrm{dist}(w_n,\ \mathrm{Ker}(I-T)) = \frac{\mathrm{dist}(u_n,\ \mathrm{Ker}(I-T))}{\|u_n - v_n\|} = 1$$

perché $v_n \in \mathrm{Ker}(I-T)$ e abbiamo preso d_n =dist $(u_n$, $\mathrm{Ker}(I-T)) = \|u_n - v_n\|$. Al limite si ottiene dist(z , $\mathrm{Ker}(I-T)) = 1$ e questo è assurdo dato che $z \in \mathrm{Ker}(I-T)$. Quindi troviamo che $\|u_n - v_n\|$ è limitata e dato che T è compatto si può estrarre una sottosuccessione in modo che $T(u_{n_k} - v_{n_k}) \to l$. Da (1.1) segue $u_{n_k} - v_{n_k} = f_{n_k} + T(u_{n_k} - v_{n_k}) \to f + l$. Ponendo $g = f + l$ si ha $g - Tg = f$ cioè $f \in$Im$(I-T)$. Abbiamo così dimostrato che l'operatore $I - T$ ha immagine chiusa. Possiamo perciò applicare il Teorema 0.1.18 si ha

$$\mathrm{Im}(I-T) = \mathrm{Ker}(I-T^*)^{\perp}.$$

Ora dimostriamo il terzo punto. Per la prima implicazione cioè se Ker$(I - T) = \{0\}$ allora Im$(I-T) = X$ ragioniamo per assurdo e supponiamo che X_1 =Im$(I-T) \neq X$. Per il punto precedente X_1 è uno spazio di Banach e $T(X_1) \subset X_1$ quindi $T_{|X_1} \in K(X_1)$. Detto $X_2 = (I-T)(X_1)$, si ha che $X_2 \subset X_1$ e $X_2 \neq X_1$ perché $(I-T)$ è iniettivo. Ponendo $X_n = (I-T)^n(X)$ otteniamo così una successione strettamente decrescente di sottospazi chiusi, per il lemma di Riesz sappiamo che esiste una successione (u_n) tale che $u_n \in X_n$ con $\|u_n\|= 1$ e dist$(X_{n+1}, u_n) \geq \frac{1}{2}$. Si ha $Tu_n - Tu_m = -(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + (u_n - u_m)$. Osserviamo che se $n > m$, $X_{n+1} \subset X_n \subset X_{m+1} \subset X_m$ e dato che $u_n \in X_n$ e $u_m \in X_m$, allora $(u_n - Tu_n) \in X_{n+1}$, $(u_m - Tu_m) \in X_{m+1}$ e allora si ha:

$$-(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + u_n \in X_{m+1}$$

e quindi, essendo

$$Tu_n - Tu_m = (-(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + u_n) - u_m,$$

e dist$(X_{m+1}, u_m) \geq \frac{1}{2}$, deduciamo $\|Tu_n - Tu_m\| \geq \frac{1}{2}$. Ciò è assurdo perché T è compatto, quindi Im$(I - T) = X$. Dimostriamo l'altra implicazione cioè che se Im$(I - T) = X$ allora Ker$(I - T) = \{0\}$. Dato che Im$(I - T) = X$ allora per la Proposizione 0.1.17 si ha Ker$(I - T^*)$ =Im$(I - T)^\perp = \{0\}$. Poichè $T^* \in K(X^*)$ possiamo applicare il procedimento precedente a T^* e concludere che Im$(I - T^*) = X^*$. Per la Proposizione 0.1.17 abbiamo Ker$(I - T)$ =Im$(I - T^*)^\perp = \{0\}$.
Infine dimostriamo il quarto punto considerando $d = dimKer(I - T)$, $d^* = dimKer(I - T^*)$. Vogliamo dimostrare che $d = d^*$; partiamo mostrando che $d^* \leq d$. Supponiamo per assurdo che sia $d < d^*$. Per il primo punto sappiamo che Ker$(I - T)$ ha dimensione finita per cui grazie all'Esempio 0.1.14 sappiamo che esso ammette un supplementare topologico in X e perciò esiste un proiettore continuo P di X su Ker$(I - T)$. Poichè per l'esempio 0.1.14 ogni sottospazio chiuso di dimensione finita ammette un supplemento topologico e per il punto 2 si ha che Im$(I - T)$ =Ker$(I - T^*)^\perp$ ha codimensione finita d^* allora Im$(I - T)$ ammette in X un supplementare topologico F di dimensione d^*. Abbiamo supposto $d < d^*$ per cui esiste un'applicazione lineare $\Lambda\colon$ Ker$(I - T) \to F$ che è iniettiva e non suriettiva infatti è un'applicazione lineare da uno spazio di dimensione d ad uno spazio di dimensione d^*. Posto $S = T + (\Lambda \circ P)$ allora $S \in K(X)$ infatti $\Lambda \circ P$ ha rango finito e $T \in K(X)$. D'altra parte Ker$(I - S) = \{0\}$ infatti sia $u \in$Ker$(I - S)$, allora

$$0 = u - Su = (u - Tu) - (\Lambda \circ Pu),$$

e dato che per la Proposizione 0.1.17 e per il Teorema 0.1.18 si ha $(\Lambda \circ Pu) \in$ Im$(I - T)^\perp$ e $u - Tu \in$Im$(I - T)$ allora necessariamente $u - Tu = 0$ e $\Lambda \circ Pu = 0$ quindi si ha $u \in$Ker$(I - T) \cap$ Im$(I - T)$ quindi $u = 0$. Per il punto 3 dato che Ker$(I - S) = \{0\}$ vale che Im$(I - S) = X$ ma questo è assurdo perché esiste $f \in F$, $f \notin$ Im(Λ) tale che l'equazione $u - Su = f$ non ammetta soluzioni. Quindi dato che abbiamo trovato un assurdo sappiamo che $d^* \leq d$. Ora ripetiamo il ragionamento applicandolo a T^* e si vede che

$$\dim \operatorname{Ker}(I - T^{**}) \leq \dim \operatorname{Ker}(I - T^{*}) \leq \dim \operatorname{Im}(I - T).$$

D'altra parte $\operatorname{Ker}(I - T^{**}) \supset \operatorname{Ker}(I - T)$ e questo ci dice che $d \leq d^*$. Abbiamo così dimostrato che $d = d^*$. □

Chiudiamo questo paragrafo introducendo una classe notevole di operatori compatti, che è quella costituita dagli operatori di Hilbert-Schmidt.

Definizione 1.2.6 (Operatori di Hilbert-Schmidt)**.** *Sia H uno spazio di Hilbert separabile, si dice che T è un operatore di Hilbert-Schmidt se esiste una base (e_n) di H tale che $\|T\|_{HS}^2 = \sum |Te_n|^2 < \infty$. La definizione è indipendente dalla scelta della base e definisce una norma; inoltre T è compatto e gli operatori di Hilbert-Schmidt costituiscono un sottospazio notevole di $K(H)$.*

Un esempio di operatore di Hilbert-Schmidt è il seguente.

Teorema 1.2.7. *Sia Ω sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$, $H = L^2(\Omega)$ e $K(x, y) \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Allora l'operatore*

$$u \mapsto (Ku)(x) = \int_\Omega K(x, y)u(y)dy$$

è un operatore di Hilbert-Schmidt. Viceversa ogni operatore di Hilbert-Schmidt su $L^2(\Omega)$ si rappresenta in modo unico mediante una funzione $(x, y) \mapsto K \in L^2(\Omega \times \Omega)$.

Capitolo 2

Spettro di un operatore compatto

Definizione 2.0.1. *Sia $T \in L(X)$. Il suo insieme risolvente è*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} \,:\, (T - \lambda I) \text{ è biiettivo da } X \text{ in } X\}.$$

Lo spettro dell'operatore T, $\sigma(T)$, si definisce come il complementare dell'insieme risolvente $\sigma(T) = \rho(T)^C = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$. Si dice che λ è un autovalore e si scrive $\lambda \in \; VP(T)$ se

$$Ker(T - \lambda I) \neq \{0\};$$

in tal caso Ker($T - \lambda I$) è l'autospazio associato a λ.

Osserviamo che se $\lambda \in \rho(T)$ allora $T - \lambda I$ è biiettivo da X in X per cui $(T - \lambda I)^{-1} \in L(X)$ dato che $T \in L(X)$.

Osservazione 2.0.2. *Evidentemente risulta $VP(T) \subset \sigma(T)$ e in generale l'inclusione è stretta: può esistere infatti $\lambda \in \sigma(T)$ tale che*

$$Ker(T - \lambda I) = \{0\} \quad e \quad Im(T - \lambda I) \neq X.$$

Un tale λ appartiene allo spettro ($\in \sigma(T)$) ma non è un autovalore ($\notin VP(T)$). Ad esempio se $X = l^2, Tu = (0, u_1, u_2, ...)$ dove $u = (u_1, u_2, ...)$ cioè T è la traslazione verso destra. Allora $0 \in \sigma(T)$ e $0 \notin VP(T)$.

Osservazione 2.0.3. *Notiamo che se si avesse X spazio di dimensione finita, si avrebbe $VP(T) = \sigma(T)$. In questo caso quindi non possono esistere λ appartenenti allo spettro che non sono autovalori di T.*

Proposizione 2.0.4. *Lo spettro $\sigma(T)$ di un operatore compatto è un insieme compatto e vale:*

$$\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|].$$

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ con $|\lambda| > \|T\|$; dimostriamo che $T - \lambda I$ è biiettiva per cui $\lambda \in \rho(T)$ e da cui segue che $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$. Data $f \in X$ l'equazione $Tu - \lambda u = f$ ammette un'unica soluzione, infatti equivale a risolvere $u = \frac{1}{\lambda}(Tu - f)$ e il teorema del punto fisso di Banach ci garantisce che ammette un'unica soluzione, dato che $\frac{1}{\lambda}(Tu - f)$ è una contrazione, infatti:

$$\begin{aligned}\|\frac{1}{\lambda}(Tu - f) - \frac{1}{\lambda}(Tv - f)\| &= \|\frac{1}{\lambda}Tu - \frac{1}{\lambda}Tv\| = \|\frac{1}{\lambda}T(u - v)\| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|}\|T\|\|u - v\| < \|u - v\| \qquad \forall u, v \in X.\end{aligned}$$

Vediamo ora che $\rho(T)$ è aperto: sia $\lambda_0 \in \rho(T)$, dato $\lambda \in \mathbb{R}$ (prossimo a λ_0) e data $f \in X$ cerchiamo di risolvere

$$Tu - \lambda u = f.$$

Sommiamo e sottraiamo $\lambda_0 u$ e abbiamo

$$Tu - \lambda_0 u = f + (\lambda - \lambda_0)u$$

cioè

$$u = (T - \lambda_0 I)^{-1}[f + (\lambda - \lambda_0)u].$$

Applicando nuovamente il teorema del punto fisso di Banach si vede che l'equazione possiede un'unica soluzione se $(T - \lambda_0 I)^{-1}[f + (\lambda - \lambda_0]$ è una contrazione cioè:

$$\|(T - \lambda_0 I)^{-1}(f + (\lambda - \lambda_0)u) - (T - \lambda_0 I)^{-1}(f + (\lambda - \lambda_0)v)\| =$$

$$= \|(T - \lambda_0 I)^{-1}(\lambda - \lambda_0)(u - v)\|$$

quindi se $|\lambda - \lambda_0|\|(T - \lambda_0 I)^{-1}\| < 1$. Dunque esiste un intorno di λ_0 che è contenuto nel risolvente di T. $\square$

Teorema 2.0.5. *Sia $T \in K(X)$ con dim $X = \infty$. Allora si ha:*

1. $0 \in \sigma(T)$;

2. $\sigma(T) \setminus \{0\} = VP(T) \setminus \{0\}$;

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $0 \notin \sigma(T)$ allora $0 \in \rho(T)$ quindi T è biettiva. Allora $I = T \circ T^{-1}$ è un operatore compatto per la Proposizione 1.1.6. Perciò B_X è compatta e per il Teorema di Riesz sappiamo che questo implica che dim $X < \infty$, ma ciò è assurdo. Ciò dimostra che $0 \in \sigma(T)$.

Dimostriamo ora la seconda affermazione. Per l'Osservazione 2.0.2 $VP(T) \subseteq \sigma(T)$ quindi $VP(T) \setminus \{0\} \subseteq \sigma \setminus \{0\}$. Ora dimostriamo che $\sigma(T) \setminus \{0\} \subseteq VP(T) \setminus \{0\}$. Sia $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ e verifichiamo che $\lambda \in VP(T)$. Supponiamo per assurdo che sia $\mathrm{Ker}(T - \lambda I) = \{0\}$. Allora per il Teorema dell'Alternativa di Fredholm 1.2.4 si deduce che $\mathrm{Im}(T - \lambda I) = X$, quindi avremmo $T - \lambda I$ biiettivo cioè $\lambda \in \rho(T)$ e ciò è assurdo. □

Per completare la descrizione dello spettro di un operatore compatto necessitiamo di un risultato preliminare.

Lemma 2.0.6. *Sia $T \in K(X)$ con dim $X = \infty$. Sia $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ una successione di numeri reali tutti distinti tali che $\lambda_n \to \lambda$ e tali che $\lambda_n \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ $\forall n$. Allora si ha $\lambda = \{0\}$. In altre parole tutti i punti di $\sigma(T) \setminus \{0\}$ sono isolati.*

Dimostrazione. Dal Teorema 2.0.5 sappiamo che per ogni n è $\lambda_n \in VP(T)$ e che $\mathrm{Ker}(T - \lambda_n I) \neq \{0\}$. Sia $e_n \neq 0$ tale che $(T - \lambda_n)e_n = 0$. Consideriamo una famiglia numerabile di spazi vettoriali generata dagli e_n: precisamente

$$X_n := < e_1, e_2, ..., e_n >$$

Dimostriamo che per ogni n si ha $X_n \subset X_{n+1}$ strettamente. Per far questo ci basta dimostrare che per ogni n i vettori $e_1, ..., e_n$ sono linearmente indipendenti. Ragioniamo per induzione su n.

Se $n = 1$ la proposizione è banalmente vera. Supponiamo che la proposizione sopra sia vera fino all'ordine n e dimostriamo che essa è vera per l'ordine

$n+1$. Suppongo per assurdo che $e_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ cioè che e_{n+1} si scriva come una combinazione lineare degli $e_1, ..., e_n$ quindi si ha

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \lambda_{n+1} \, e_i = \lambda_{n+1} e_{n+1} = T e_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \lambda_i \, e_i,$$

perciò si trova che $\alpha_i \, (\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0 \;\; \forall i = 1, ..., n$ cioè $\alpha_i = 0 \;\; \forall i = 1, ..., n$ e questo è assurdo. Abbiamo così dimostrato per induzione che $X_n \subset X_{n+1}$ per ogni n. Si nota che $(T - \lambda_n) X_n \subset X_{n-1}$ e applicando il lemma di Riesz possiamo costruire una successione $(u_n)_{n \geq 1}$ tale che $u_n \in X_n$, $\| u_n \| = 1$ e tali che la dist$(u_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ per $n \geq 2$. Siano m, n tali che $2 \leq m < n$ in modo che $X_{m-1} \subset X_m \subset X_{n-1} \subset X_n$ allora si ha:

$$\| \frac{T u_n}{\lambda_n} - \frac{T u_m}{\lambda_m} \| = \| \frac{(T u_n - \lambda_n u_n)}{\lambda_n} - \frac{(T u_m - \lambda_m u_m)}{\lambda_m} + u_n - u_m \| \geq$$

$$\geq \; \text{dist}(u_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Quindi se $\lambda_n \to \lambda \neq 0$ abbiamo una contraddizione perché si trova che $(T u_n)$ non ammette una sottosuccessione convergente. □

Siamo ora in grado di descrivere compiutamente lo spettro di un operatore compatto.

Teorema 2.0.7. *Sia $T \in K(X)$ con dim $X = \infty$. Allora si verifica uno dei seguenti casi:*

1. $\sigma(T) = \{0\}$*;*

2. $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *è finito;*

3. $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *è una successione che tende a zero.*

Dimostrazione. Per ogni intero $n \geq 1$ l'insieme

$$\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{R} \, : \, |\lambda| \geq \frac{1}{n}\}$$

è vuoto o finito. Infatti se contenesse infiniti punti, allora ne esisterebbe uno di accumulazione dato che $\sigma(T)$ è compatto e si avrebbe una contraddizione con il Lemma 2.0.6. Ne deduciamo che $\sigma(T) \setminus \{0\}$ è vuoto, finito o numerabile e che, in tal caso, per il Lemma 2.0.6, ha gli elementi che si possono ordinare in una successione che tende a 0. □

Osservazione 2.0.8. *Data una successione* (α_n) *che tende a 0, vediamo che possiamo costruire un operatore compatto* T *tale che* $\sigma(T) = (\alpha_n) \cup \{0\}$. *Ci basta considerare in* $X = l^2$ *l'operatore* $T : u = (u_n) \mapsto Tu = (\alpha_n u_n)$. T *è compatto infatti esiste una successione* T_n *di operatori di rango finito tali che* $\|T_n - T\| \rightarrow 0$. *Questo esempio ci mostra anche che* 0 *può appartenere o non appartenere a* $VP(T)$*; nel caso in cui* 0 *appartenesse a* $VP(T)$ *può accadere che Ker(*T*) sia di dimensione infinita.*

Osservazione 2.0.9. *Sia* $T \in K(X)$ *e sia* $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$. *Si dimostra che la successione Ker(*$(T - \lambda I)^k$*)*, $k = 1, 2, ...$ *è strettamente crescente fino ad un certo rango finito* p *e che essa in seguito si stabilizza. Si dice che* p *è l'ordine di* λ. *Si chiama molteplicità geometrica dell'autovalore* λ *la dimensione di Ker(*$T - \lambda I$*) e molteplicità algebrica la dimensione di Ker*$((T - \lambda I)^p)$ *e si verifica che esse coincidono se* X *è uno spazio di Hilbert e* T *è autoaggiunto.*

Capitolo 3

Decomposizione spettrale

Nel seguito supponiamo che $X = H$ sia uno spazio di Hilbert e che $T \in L(H)$ cioè T sia un operatore lineare e continuo da H in H. Identificando H^* e H possiamo assumere che $T^* \in L(H)$.

Definizione 3.0.1. *Un operatore $T \in L(H)$ si dice autoaggiunto se $T^* = T$ cioè se*

$$< Tu, v > = < u, Tv > \quad \forall u, v \in H.$$

Proposizione 3.0.2. *Sia $T \in K(H)$ un operatore autoaggiunto. Poniamo*

$$m = \inf_{u \in H; \|u\|=1} < Tu, u > \qquad e$$

$$M = \sup_{u \in H; \|u\|=1} < Tu, u > .$$

Allora $\sigma(T) \subset [m, M]$, $m \in \sigma(T)$ e $M \in \sigma(T)$.

Dimostrazione. Sia $\lambda > M$; verifichiamo che $\lambda \in \rho(T)$. Si ha che $< Tu, u > \leq M\|u\|^2 \;\; \forall u \in H$ e di conseguenza si ha

$$< \lambda u - Tu, u > \geq (\lambda - M)\|u\|^2 \quad \forall u \in H.$$

Applicando il teorema di Lax-Milgram, Teorema 0.1.23, si vede che $\lambda I - T$ è biiettivo per cui $\lambda \in \rho(T)$. Verifichiamo che $M \in \sigma(T)$. La forma

$a(u,v) =< Mu - Tu, v >$ è bilineare e simmetrica e $a(v,v) \geq 0 \ \ \forall v \in H$. Applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz alla forma $a(u,v)$ si ha:

$$|a(u,v)| = | < Mu - Tu, v > | \leq < Mu - Tu, u >^{\frac{1}{2}} < Mv - Tv, v >^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in H,$$

da cui in particolare risulta che

$$\| Mu - Tu \| \leq C < Mu - Tu, u >^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in H. \tag{3.1}$$

Per definizione di M, esiste una successione (u_n) tale che $\|u_n\| = 1$ e $< Tu_n, u_n > \to M$. Da (3.1) si deduce che $\|Mu_n - Tu_n\| \to 0$. Se fosse $M \in \rho(T)$ allora risulterebbe $u_n = (MI - T)^{-1}(Mu_n - Tu_n) \to 0$ ma questo non è possibile perché $\|u_n\| = 1$. Per cui deve essere $M \in \sigma(T)$. Le proprietà di m si ottengono sostituendo T con $-T$. □

Corollario 3.0.3. *Sia $T \in K(H)$ un operatore autoaggiunto tale che $\sigma(T) = \{0\}$ allora $T = 0$.*

Dimostrazione. Grazie alla Proposizione 3.0.2 sappiamo che se $\sigma(T) = \{0\}$ allora $M = 0, m = 0$ quindi $< Tu, u >= 0 \ \ \forall u \in H$. Ne segue che $2 < Tu, v >=< T(u+v), u+v > - < Tu, u > - < Tv, v >= 0 \ \ \forall u, v \in H$ perciò $T = 0$. □

Definizione 3.0.4. *Sia H uno spazio di Hilbert, si chiama base Hilbertiana una successione (e_n) di elementi di H tali che:*

- $\|e_n\| = 1 \ \forall n$ *e* $< e_m, e_n >= 0 \ \ \forall n, m$ *tali che* $n \neq m$*;*
- *lo spazio vettoriale generato da (e_n) è denso in H.*

Teorema 3.0.5. *Ogni spazio di Hilbert separabile ammette una base Hilbertiana.*

Il risultato che segue è fondamentale: esso mette in evidenza che un operatore autoaggiunto compatto è diagonalizzabile in una base scelta opportunamente.

Teorema 3.0.6. *Supponiamo che H sia separabile, sia T un operatore autoaggiunto compatto, allora H ammette una base Hilbertiana costituita da autovettori di T.*

Dimostrazione. Sia $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ la successione degli autovalori distinti di T, escluso lo 0 e poniamo $\lambda_0 = 0$. Poniamo X_0 =Ker(T) e X_n =Ker($T - \lambda_n I$); ricordiamo che, per il Teorema di Fredholm 1.2.4,

$$0 \leq \dim X_0 \leq \infty \quad \text{e} \quad 0 < \dim X_n < \infty.$$

Verifichiamo ora che H è somma Hilbertiana degli $(X_n)_{n\geq 0}$. Gli $(X_n)_{n\geq 0}$ sono a due a due ortogonali. Infatti se $u \in X_m$ e $v \in X_n$ con $m \neq n$ allora si ha

$$Tu - \lambda_m u = 0 \quad \text{cioè} \quad Tu = \lambda_m u$$

$$\text{e} \quad Tv - \lambda_n v = 0 \quad \text{cioè} \quad Tv = \lambda_n v$$

inoltre, essendo T autoaggiunto

$$\lambda_m < u, v > = < \lambda_m u, v > = < Tu, v > = < u, Tv > = < u, \lambda_n v > = \lambda_n < u, v > .$$

Sappiamo che $\lambda_m \neq \lambda_n$ per cui deduciamo che $< u, v > = 0$. Sia F lo spazio vettoriale generato dagli $(X_n)_{n\geq 0}$, verifichiamo che F è denso in H. Evidentemente si ha $T(F) \subset F$. Ne segue che $T(F^\perp) \subset F^\perp$; infatti, se $u \in F^\perp$ e $v \in F$ allora $< Tu, v > = < u, Tv > = 0$. L'operatore $T_0 = T_{|F^\perp}$ è autoaggiunto e compatto su $F^\perp$. D'altra parte $\sigma(T_0) = \{0\}$ infatti se $\lambda \in \sigma(T_0) \setminus \{0\}$ allora $\lambda \in VP(T_0)$ e dunque esiste $u \in F^\perp, u \neq 0$ tale che $T_0 u = \lambda u$. Di conseguenza λ è uno degli autovalori λ_n di T e $u \in F^\perp \cap X_n$. Dunque $u = 0$ il che è assurdo. Dal Corollario 3.0.3 risulta che $T_0 = 0$ pertanto

$$F^\perp \subset \text{Ker}(T) \subset F \quad \text{e} \quad F^\perp = \{0\}.$$

Per cui F è denso in H. Infine scegliamo in ciascun X_n una base Hilbertiana. L'unione di queste basi è una base Hilbertiana di H costituita da autovettori di T. □

Osservazione 3.0.7. *Sia T un operatore compatto autoaggiunto. Possiamo esprimere ogni $u \in H$ per quanto appena detto come:*

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad \textit{con} \quad u_n \in X_n$$

così che $Tu = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n$. *Definiamo l'operatore* $T_k : H \to H$, $T_k u = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n u_n$. *Ovviamente* T_k *è un operatore di rango finito per cui è compatto e si ha:*

$$\|T_k - T\| \leq \sup_{n \geq k+1} |\lambda_n| \underset{k \to \infty}{\to} 0 \, .$$

Dunque T *è limite di una successione* T_k *di operatori di rango finito.*

Bibliografia

[1] Brezis.H, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations* , Springer Science, New York, 2011

[2] Rudin.W, *Functional Analysis* , International Editions, 1991

Ringraziamenti

Vorrei dedicare questo spazio a chi, con dedizione, ha contribuito al raggiungimento di questo importante obiettivo.
Per prima voglio ringraziare la mia relatrice, Simonetta Abenda, per il suo tempo, i suoi indispensabili consigli e l'entusiasmo con il quale mi ha trasmesso passione per la sua materia; voglio anche ringraziare il professor Giovanni Cupini per la disponibilità e la pazienza con le quali ha corretto il mio elaborato nonostante il poco tempo a disposizione. Ringrazio mio fratello Gabriele che ha speso ore e ore ad interrogarmi e a sentirmi ripetere a voce alta; al quale devo almeno la metà di tutti gli esami superati. Ringrazio i miei genitori che mi hanno supportata durante tutto il percorso, aiutata in momenti di sconforto e spronata a non mollare mai. Ringrazio i miei amici Chiara e Manfredi che, nei primi due anni da lontano, nell'ultimo anno più da vicino mi sono stati accanto anche e soprattutto quando invece avrei voluto mollare. Vorrei ringraziare coloro che ogni giorno per tre anni hanno condiviso con me pianti e risate: Valentina, Diletta, Giulia e Darya.
Infine vorrei ringraziare i miei coinquilini Isotta e Davide che sono riusciti a farmi sentire a casa anche in una città tanto lontana da casa mia.