

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

ENUMERAZIONE DI CAMMINI RETICOLARI

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
MARILENA BARNABEI

Presentata da:
MARCO BORTOLINI

VI SESSIONE
Anno Accademico 2019/2020

*Never gonna give you up
Never gonna let you down
Never gonna run around and desert you*

Introduzione

Questa tesi tratterà l'argomento dell'enumerazione dei cammini reticolari, ovvero una successione di punti nel reticolato euclideo (\mathbb{Z}^n , nel nostro caso $n = 2$) dove ogni punto è determinato dal precedente aggiungendo (tramite la usuale somma termine a termine) un elemento dall'insieme dei passi. Affronteremo l'argomento avendo introdotto preliminarmente alcune restrizioni come, per esempio, l'imposizione che il cammino non entri in determinati sottoinsiemi del piano \mathbb{Z}^2 , oppure sull'insieme dei passi che vogliamo usare. Il primo capitolo è una premessa con gli strumenti principali che verranno utilizzati. Per quanto riguarda il calcolo umbrale molti dettagli sono stati omessi per favorire lo scorrimento del documento e per evitare di andare fuori argomento. I dettagli sono comunque presenti in [9] G. C. Rota, D. Kahaner, A. Odlyzko, 1973, *On the foundations of combinatorial theory. VIII. Finite operator calculus* e in [11] H. Niederhausen, 1980, *Linear Recurrences Under Side Conditions* e verranno opportunamente richiamati nelle sezioni rispettive.

Il secondo capitolo contiene alcuni tra i metodi che sono stati utilizzati per contare i cammini. Si è partiti da un problema reale, il *Ballot Problem*, e lo si è trasformato in un problema astratto, ovvero contare i cammini da $(0, 0)$ a (β, α) , chiedendo che l'ordinata rimanga sempre maggiore (o maggiore o uguale) di k volte l'ascissa, per un certo k intero positivo. La soluzione è stata data guardando il problema da punti di vista differenti: chi l'ha risolto dal punto di vista combinatorio, chi ha ridotto il calcolo a situazioni più semplici (usando il *metodo delle immagini* o il *lemma ciclico*), chi ha notato che una particolare applicazione del calcolo umbrale permetteva di trovare una formula per la soluzione, chi ha usato strumenti dell'analisi complessa e funzionale.

Il terzo e ultimo capitolo contiene un rapido elenco di alcune successioni numeriche, e delle rispettive proprietà, che vengono generate a seconda di come scegliamo le restrizioni: i numeri di Catalan, di Narayana, di Schröder, di Motzkin e di Delannoy.

Indice

Introduzione	i
1 Richiami e premesse	1
1.1 Introduzione ai cammini reticolari	1
1.2 Serie formali e serie di Laurent	3
1.2.1 Serie formali	3
1.2.2 Serie di Laurent	5
1.3 Coefficienti binomiali	7
1.4 Calcolo umbrale	7
1.4.1 Nozioni di base	7
1.4.2 Polinomi di Sheffer	10
1.4.3 Valori iniziali	11
2 Metodi di conteggio	14
2.1 Il ‘ <i>Ballot Problem</i> ’	14
2.1.1 Il principio di riflessione	17
2.1.2 Il metodo delle immagini	18
2.1.3 Il lemma ciclico	21
2.2 I polinomi di Sheffer	21
2.3 Il metodo del kernel	22
3 Alcuni cammini interessanti	31
3.1 Cammini di Dyck	31
3.1.1 Cammini di Dyck e numeri di Catalan	32
3.1.2 I numeri di Narayana	34
3.2 Cammini di Motzkin	35
3.3 Cammini di Schröder	36
3.4 Cammini di Delannoy	36
3.4.1 Numeri di Delannoy centrali	37
Bibliografia	39

Ringraziamenti

41

Capitolo 1

Richiami e premesse

1.1 Introduzione ai cammini reticolari

Questa dissertazione si focalizzerà sul problema dell'enumerazione dei cammini reticolari. Ma cosa sono? Come vengono definiti? Il nome, di per sè, già fornisce un'idea generale della loro consistenza: sono cammini in cui i punti sono punti di un reticolato discreto. Partiamo dalle basi:

Definizione 1.1.0.1. *Un **reticolato** Λ è una coppia (V, E) , dove:*

- $V \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme di vertici;
- $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ è un insieme di spigoli;

con non più di due spigoli per ogni coppia di vertici.

In generale i cammini in \mathbb{Z}^n sono più interessanti da studiare.

Definizione 1.1.0.2. \mathbb{Z}^n prende il nome di **reticolato euclideo**.

Questo è il caso che tratteremo noi, nello specifico con $n = 2$.

Definizione 1.1.0.3. *Sia $S \subset \mathbb{Z}^2$ un insieme di passi. Un **cammino** di m passi da $A \in \mathbb{Z}$ a $B \in \mathbb{Z}$ è una successione $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m)$ tale per cui:*

- $A = \omega_0$ e $B = \omega_m$;
- $\omega_{i+1} - \omega_i \in S \quad \forall i = 0, \dots, m - 1$.

m è detta la **lunghezza** del cammino e si indica con $|\omega| = m$.
Sovente i passi vengono indicati anche $\overrightarrow{\omega_i \omega_{i+1}}$.

Da questo punto in poi tratteremo il caso di cammini in \mathbb{Z}^2 e, per convenienza e semplicità di trattazione, considereremo il punto di partenza l'Origine $(0, 0)$.

Non è restrittivo, nel nostro caso, supporre che i passi s_j siano della forma (a_j, b_j) , $a_j, b_j \in \mathbb{Z}$.

Definizione 1.1.0.4. Se i passi sono della forma $(1, b_j) \forall 1 \leq j \leq k$ l'insieme dei passi si dice **semplice** e si può scrivere come $S = \{b_1, \dots, b_n\}$.

Definizione 1.1.0.5. Se $S \subseteq \{-1, 0, 1\}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ allora S prende il nome di insieme di piccoli passi e, per comodità, questo tipo di passi viene indicato con terminologia meteorologica: **N**, **NE**, **E**, **SE**, **S**, **SW**, **W**, **NW** (corrispondenti a $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(1, -1)$, $(0, -1)$, $(-1, -1)$, $(-1, 0)$, $(-1, 1)$).

Esempio 1. Vediamo un esempio:

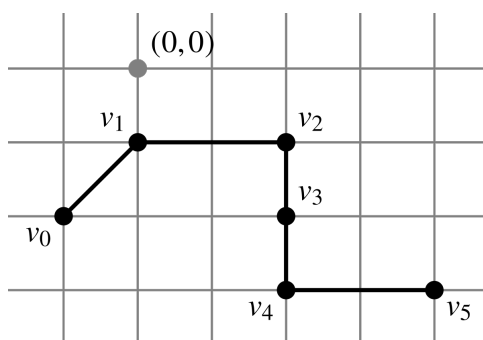


Figura 1.1: cammino di 5 passi in \mathbb{Z}^2

In questo caso si ha che

- $V = \mathbb{Z}^2$;
- $E = \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$;
- $S = \{(1, 1), (2, 0), (0, -1)\}$.

Notazione 1. Se A e B sono due punti, con $|\mathbf{AB}|$ indichiamo il numero di tutti i cammini da A a B .

Possiamo definire diversi tipi di cammini, in base alle caratteristiche che presentano:

Definizione 1.1.0.6. Definiamo un **ponte** un cammino che termina sull'asse x , in un punto $(\alpha, 0)$.

Definizione 1.1.0.7. Definiamo un **meandro** un cammino che rimane nel primo quadrante del piano cartesiano.

Definizione 1.1.0.8. Definiamo un'**escursione** un cammino che è sia un ponte che un meandro, ovvero inizia nell'origine, termina in un punto di ordinata nulla e rimane nel primo quadrante.

1.2 Serie formali e serie di Laurent

1.2.1 Serie formali

Notazione 2. Per evitare promiscuità di notazione considereremo in questa tesi $\mathbb{N}_0 = 0, 1, 2, \dots$ e $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \dots$.

Definizione 1.2.1.1. Sia K un campo. Una **serie formale** a coefficienti in K è una scrittura formale

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n \quad a_n \in K.$$

Su questa struttura è possibile definire delle operazioni:

- somma:

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n + \sum_{n \geq 0} b_n x^n := \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n;$$

- prodotto per scalare:

$$\lambda \left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) := \sum_{n \geq 0} (\lambda a_n) x^n \quad \text{dove } \lambda \in K;$$

- prodotto di convoluzione:

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} b_n x^n \right) := \sum_{n \geq 0} c_n x^n \quad \text{dove } c_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}.$$

Si vede subito che somma e prodotto sono commutativi e associativi e inoltre valgono le regole di distribuzione del prodotto sulla somma.

E' inoltre possibile definire l'elemento **0** e l'elemento **1**:

- **0** := $\sum_{n \geq 0} 0_K x^n$;
- **1** := $1_K + \sum_{n > 0} 0_K x^n$.

Teorema 1.2.1.2. *Una serie formale $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ è invertibile se e solo se $a_0 \neq 0$.*

L'insieme delle serie formali $K[[x]]$ è quindi un anello commutativo con unità e , con il prodotto per scalare, assume anche la struttura di K -spazio vettoriale.

Abbiamo richiamato la definizione di serie di potenze e le operazioni di base perchè ci servono per definire il successivo strumento che useremo.

Definizione 1.2.1.3. *Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ una successione, $a_n \in \mathbb{C}$ (anche se noi tratteremo il caso di successioni a termini in \mathbb{N}). Definiamo la **funzione generatrice di una successione** la serie formale*

$$G(a_n; x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^n,$$

dove sostanzialmente l' n -esimo coefficiente della successione è l' n -esimo coefficiente della serie.

Nel caso generale in cui la successione sia indicizzata con un multi-indice $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_p)$ la funzione generatrice è:

$$G(a_{\mathbf{i}}; \mathbf{u}) := \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{Z}^p} a_{i_1, \dots, i_p} u^{i_1} \dots u^{i_p}.$$

Vediamo un esempio: la serie di Fibonacci.

Esempio 2. *La serie di Fibonacci è una successione definita per ricorrenza, dati i primi due termini.*

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... **OEIS** A000045

Cerchiamo una formula chiusa per la funzione generatrice, usando la relazione di ricorrenza e definendo $\Phi(x) := G(F_n; x)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} F_{n+2} x^n &= \sum_{n \geq 0} (F_{n+1} + F_n) x^n \\
\sum_{n \geq 0} F_{n+2} x^n &= \sum_{n \geq 0} F_{n+1} x^n + \sum_{n \geq 0} F_n x^n \\
F_2 + F_3 x + F_4 x^2 + \dots &= (F_1 + F_2 x + F_3 x^2 + \dots) + (F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \dots) \\
(\Phi(x) - F_0 - F_1 x) \frac{1}{x^2} &= (\Phi(x) - F_0) \frac{1}{x} + \Phi(x) \\
(\Phi(x) - x) \frac{1}{x^2} &= (\Phi(x)) \frac{1}{x} + \Phi(x) \\
\Phi(x) &= \frac{x}{1 - x - x^2}
\end{aligned}$$

1.2.2 Serie di Laurent

Quando analizzeremo il metodo del kernel, dovremo maneggiare delle serie di Laurent. E' perciò necessario introdurre i risultati di base che verranno utilizzati nel corso delle dimostrazioni.

Definizione 1.2.2.1. Sia D un aperto di \mathbb{C} . Una funzione si dice **olomorfa su D** se è derivabile in ogni suo punto.

Definizione 1.2.2.2. Siano $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ e $\sum_{n < 0} a_n z^n$ con raggi di convergenza R_1 e $\frac{1}{R_2}$ rispettivamente. Definiamo

$$f(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n := \sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{n < 0} a_n z^n.$$

$f(z)$ si chiama **serie di Laurent** sulla corona circolare $R_2 < |z| < R_1$.

Definizione 1.2.2.3. Una funzione $g(z)$ si dice **svilupicabile in serie di Laurent** sulla corona $R_2 < |z| < R_1$ se esiste $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ tale che $g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ sulla corona. Se esiste, lo sviluppo è unico.

Definizione 1.2.2.4. $\sum_{n < 0} a_n z^n$ si chiama **parte principale** di g .

Definizione 1.2.2.5. Sia $f(z)$ olomorfa su $0 < |z| < R$ e $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ sulla corona. 0 è un **punto singolare** per f se f non è prolungabile a una funzione olomorfa. Si distinguono 3 casi:

- **singolarità apparente** se $a_n = 0 \quad \forall n < 0$. In questo caso $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ e poniamo $f(0) = a_0$;
- **polo di ordine k** se esistono finiti n tali che $a_n \neq 0$, cioè esiste un k tale che $g(z) := z^k f(z)$ è olomorfa su $|z| < R$;

- **singolarità essenziale** se $a_n \neq 0$ per infiniti n .

Uno strumento che useremo è la formula di Cauchy:

Definizione 1.2.2.6. Sia $D \subset \mathbb{R}^2$. Un **cammino differenziabile** è una funzione $\gamma \in C^1([a, b], D)$. Per un **cammino** si richiede solo la continuità.

Definizione 1.2.2.7. Un cammino γ si dice **chiuso** se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Notazione 3. Poniamo $\gamma^* := \gamma([a, b])$.

Definizione 1.2.2.8. Sia γ un cammino chiuso, $c \notin \gamma^*$. L'**indice di γ rispetto a c** è la quantità

$$I(\gamma, c) := \int_{\gamma} \frac{1}{z - c} dz.$$

Teorema 1.2.2.9 (Formula di Cauchy). Sia $f(z)$ una funzione olomorfa su un aperto D , $a \in D$, γ cammino chiuso, $a \notin \gamma^*$, γ omotopo ad un punto in D . Allora:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz = I(\gamma, a)f(a).$$

Un altro strumento che useremo è il teorema dei residui:

Definizione 1.2.2.10. Sia D un aperto di \mathbb{C} , $z_0 \in D$ una singolarità isolata per una funzione $f(z)$ olomorfa su $D \setminus \{z_0\}$. Se $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(z - z_0)^n$ è lo sviluppo di f intorno a z_0 definiamo il **residuo di f** come

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1}.$$

Teorema 1.2.2.11 (Teorema dei residui). Sia D un aperto di \mathbb{C} , $f(z)$ una funzione olomorfa su $D \setminus \{z_1, \dots, z_p\}$, $\gamma(t)$ un cammino chiuso tale che $z_1, \dots, z_p \notin \gamma^*$, γ omotopo ad un punto su D . Allora:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{j=1}^p \text{Res}(f, z_j) I(\gamma, z_j).$$

Vediamo come si calcola il residuo di una funzione in un polo di ordine 1:

Sia z_0 un polo di ordine 1 per f . Scriviamo $f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}$, con $g(z_0) \neq 0$, $g(z)$ olomorfa in un intorno di z_0 e $g(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n(z - z_0)^n$. Allora $\text{Res}(f, z_0) = a_0 = g(z_0)$. Ma $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = g(z_0)$. Quindi $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$.

In un intorno di z_0 $f(z)$ sarà scritta come $f(z) = \frac{l(z)}{h(z)}$, con $l(z_0) \neq 0$ e $h(z) = \sum_{n \geq 1} a_n(z - z_0)^n$, dunque

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{l(z)}{h(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{l(z)}{h(z) - h(z_0)} = \frac{l(z_0)}{h'(z_0)}.$$

1.3 Coefficienti binomiali

Nel nostro *viaggio* dovremo spesso contare quanti cammini è possibile fare da un punto di partenza (a, b) a un punto di arrivo (c, d) con $c - a$ passi $(1, 0)$ e $d - b$ passi $(0, 1)$, $c \geq a$ e $d \geq b$ (ovvero in modo che il cammino non esca dal rettangolo individuato dai vertici (a, b) , (a, d) , (c, d) , (c, b)). Ebbene, questi sono

$$\binom{(c+d) - (a+b)}{d-b} = \binom{(c+d) - (a+b)}{c-a} = \frac{(c+d-a-b)!}{(c-a)!(d-b)!}.$$

Dato che noi considereremo cammini dall'origine, questa formula diventa

$$\binom{c+d}{d} = \binom{c+d}{c} = \frac{(c+d)!}{c!d!}.$$

Inoltre ci tornerà utile l'**identità (o convoluzione) di Vandermonde**:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} \quad \forall m, n, r \in \mathbb{N}_0. \quad (1.1)$$

1.4 Calcolo umbrale

1.4.1 Nozioni di base

In questa sezione richiameremo alcuni concetti e alcuni risultati del calcolo umbrale che ci serviranno in seguito come punto di partenza per descrivere un metodo di enumerazione di cammini. Il calcolo umbrale è una branca della matematica molto giovane, introdotta negli anni '30 del '900 e sviluppata ulteriormente nella seconda metà del secolo. Per i dettagli si fa riferimento a [9].

Definizione 1.4.1.1. Sia \mathbb{P} l'algebra (su un campo F di caratteristica zero) dei polinomi in una variabile. Una **successione di polinomi** è una successione

$$\{p_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0} \quad p_n(x) \in \mathbb{P} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

in cui $\deg(p_i(x)) = i$ per ogni i .

Definizione 1.4.1.2. Una successione di polinomi è detta di **tipo binomiale** se è verificata

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

La successione di polinomi di tipo binomiale più semplice è $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, dato che vale l'espansione di Newton.

Introduciamo ora un'altra algebra, che indicheremo con Σ , ovvero l'**algebra degli operatori shift-invarianti** (tutti gli operatori che considereremo sono, tacitamente, lineari). Un esempio è l'operatore traslazione $E^a \in \text{End}(\mathbb{P})$, dove a è una costante, definito come $(E^a p)(x) := p(x + a)$.

Definizione 1.4.1.3. *Un operatore R è detto essere **shift-invariante** se commuta con tutti gli operatori traslazione, ovvero*

$$(E^a R) = (R E^a) \quad \forall a \in F.$$

Definizione 1.4.1.4. *Chiamiamo **operatore delta** un operatore Q che sia shift-invariante e tale che $Qx = c \neq 0$.*

Si vede immediatamente che vale il seguente fatto:

Proposizione 1.4.1.5. *Se Q è un operatore delta allora $Qa = 0$ per ogni costante a .*

Dimostrazione. Consideriamo $QE^a x$. Per ipotesi Q è un operatore delta e quindi shift-invariante, dunque:

$$\begin{aligned} QE^a x &= E^a Qx \\ Q(x + a) &= E^a c \\ Qx + Qa &= c \\ c + Qa &= c \end{aligned}$$

Dunque necessariamente $Qa = 0$. □

Proposizione 1.4.1.6. *Se $p(x)$ è un polinomio di grado $n > 1$ e Q è un operatore delta, allora $(Qp)(x)$ è un polinomio di grado $n - 1$.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione ci basta il caso $q(x) = x^n$.

$$\begin{aligned} (QE^a)(x^n) &= (E^a Q)(x^n) \\ Q(x + a)^n &= r(x + a) \quad \text{dove } r(x) \text{ è un certo polinomio} \\ Q \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k} &= r(x + a) \\ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (Qx^k) a^{n-k} &= r(x + a) \end{aligned}$$

ora poniamo $x=0$ e otteniamo che $r(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [Qx^k]_{x=0} a^{n-k}$. Per $k=0$ abbiamo il monomio di grado massimo, ma $[Qx^0]_{x=0} [Q1]_{x=0} = 0$. Dunque $r(x)$ è un polinomio di grado al più $n-1$. Guardiamo il coefficiente di a^{n-1} :

$$\binom{n}{1} (Qx) = nc \neq 0$$

dunque $r(x)$ è un polinomio di grado $n-1$. \square

Definizione 1.4.1.7. *Sia Q un operatore delta. Una successione di polinomi $\{q_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ è chiamata **successione di polinomi basici per Q** se:*

- $q_0(x) = 1$;
- $q_n(0) = 0 \quad \forall n > 0$;
- $(Qq_n)(x) = nq_{n-1}(x)$.

La successione di polinomi $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ è basica per l'operatore derivata D .

Teorema 1.4.1.8. *Ogni operatore delta ha un'unica successione di polinomi basici.*

Vediamo un interessante risultato che lega operatori delta a polinomi di tipo binomiale.

Teorema 1.4.1.9. *Valgono i seguenti fatti:*

1. *Se $\{q_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ è una successione di polinomi basici per un operatore delta Q , allora questi sono di tipo binomiale;*
2. *Se $\{p_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ è una successione di polinomi di tipo binomiale, allora è anche basica per un certo operatore delta \tilde{Q} .*

Dunque ad ogni operatore delta possiamo associare un'unica successione di polinomi basici e inoltre questi sono anche di tipo binomiale.

Il prossimo teorema generalizza il teorema di espansione di Taylor e lo riformula in termini di operatori delta e rispettivi polinomi basici.

Teorema 1.4.1.10 (Primo teorema di espansione). *Sia T un operatore shift-invariante e Q un operatore delta con polinomi basici $\{q_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. Allora*

$$T = \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{k!} Q^k \quad \text{con} \quad a_k = [(Tq_k)(x)]_{x=0}.$$

Il successivo teorema ci permette di stabilire una relazione biunivoca tra operatori shift-invarianti e serie formali.

Teorema 1.4.1.11. *Sia Q un operatore delta, $K[[x]]$ l'anello delle serie formali in una variabile x . Allora esiste un isomorfismo $\phi : K[[x]] \rightarrow \Sigma$ che mappa*

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{a_k x^k}{k!} \quad \text{in} \quad T = \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{k!} Q^k.$$

Definizione 1.4.1.12. *Chiamiamo $f(t)$ l'indicatore di T .*

Corollario 1.4.1.13. *Un operatore shift-invariante T è invertibile se e solo se $T1 \neq 0$.*

Dimostrazione. Da (1.2.1.2) sappiamo che $\sum_{k \geq 0} \frac{a_k x^k}{k!}$ è invertibile se e solo se $a_0 \neq 0$. Applicando l'isomorfismo questa condizione diventa $0 \neq a_0 = [(Tq_0)(x)]_{x=0} = T1$. \square

Con quest'ultimo corollario si evince come gli operatori delta non siano invertibili.

1.4.2 Polinomi di Sheffer

Finita questa veloce premessa, introduciamo lo strumento che useremo più avanti:

Definizione 1.4.2.1. *Una successione di polinomi $\{s_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ è detta essere **di Sheffer per un operatore delta Q** se:*

- $s_0(x) = c \neq 0$;
- $Qs_n(x) = ns_{n-1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

E' evidente che se una successione di polinomi è basica per un operatore Q , allora è anche di Sheffer per l'operatore.

Il prossimo risultato ci dimostra che c'è una relazione biunivoca tra i polinomi di Sheffer relativi ad un operatore delta Q e i suoi polinomi basici.

Teorema 1.4.2.2. *Sia Q un operatore delta con polinomi basici $\{q_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. $\{s_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ è una successione di Sheffer per Q se e solo se esiste un operatore shift-invariante e invertibile S tale che $s_n(x) = S^{-1}q_n(x)$.*

Teorema 1.4.2.3 (Secondo teorema di espansione). *Sia Q un operatore delta con polinomi basici $\{q_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. Sia S un operatore shift-invariante invertibile con polinomi di Sheffer $\{s_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. Se T è un operatore shift-invariante e $p(x)$ un polinomio, allora*

$$Tp(x+y) = \sum_{n \geq 0} \frac{s_n(y)}{n!} Q^n STp(x) \quad \forall y.$$

Corollario 1.4.2.4. *Se sostituiamo $T = S^{-1}$ e $y = 0$, allora otteniamo una formula esplicita per S^{-1}*

$$S^{-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{s_n(0)}{n!} Q^n.$$

Teorema 1.4.2.5 (Teorema binomiale). *Sia Q un operatore delta con polinomi basici $\{q_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ e sia $\{s_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ la successione di Sheffer relativa a Q e ad un certo operatore shift-invariante invertibile S . Allora vale che*

$$s_n(x+y) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} s_k(x) q_{n-k}(y). \quad (1.2)$$

Corollario 1.4.2.6. *Se poniamo $x = 0$ in (1.2), allora otteniamo:*

$$s_n(y) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} s_k(0) q_{n-k}(y).$$

Definizione 1.4.2.7. *Una successione di Sheffer $\{s_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ si dice **simmetrica** se*

$$s_n(m) = s_m(n) \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Ovvero se il polinomio di grado n calcolato in m è uguale al polinomio di grado m calcolato in n per tutti i naturali.

1.4.3 Valori iniziali

Per i dettagli di questa sezione si fa riferimento a [11].

Sia $M \subseteq F$ non vuoto. Per il nostro scopo vogliamo studiare successioni polinomiali con dei dati valori iniziali, $p_n(\nu(n))$, dove $\nu : \mathbb{N}_0 \rightarrow M$.

Definizione 1.4.3.1. *Se $\nu : \mathbb{N}_0 \rightarrow M$, allora diciamo che una successione polinomiale $\{p_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ha **radici in ν** se:*

$$p_n(\nu(n)) = \delta_{0,n} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n > 0 \end{cases}.$$

Teorema 1.4.3.2. *Sia $(k_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ una successione in F di valori iniziali in ν (dunque $k_0 \neq 0$). Se le funzioni $(\nu_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ sono definite come $\nu_i(n) := \nu(n+i)$ e se $(t_{i,n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ sono successioni polinomiali di Sheffer per Q con radici in ν_i , allora*

$$p_n(x) = \sum_{i \geq 0}^n k_i t_{i,n-i}(x) \quad n \in \mathbb{N}_0$$

definisce una successione polinomiale di Sheffer per Q con i valori iniziali $p_n(\nu(n)) = k_n$.

Proposizione 1.4.3.3. *Se $\nu(n) = mn + v$ ($m, v \in F$), allora $\{s_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ è la successione di Sheffer con radici in ν per un operatore delta Q se e solo se:*

$$s_n(x) = \frac{x - \nu(n)}{x - v} q_n(x - v) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.3)$$

dove $\{q_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ è la successione di polinomi basici di Q .

Se $\{q_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ sono i polinomi basici per Q , allora si ha che:

1. $r_n(x) := \frac{x + (q-u)n + y}{x+y} q_n(x+y)$ è una successione di Sheffer per Q ($\nu(n) = (u-q)n - y$, con $q, u, y \in F$);
2. $t_{i,n}(x) = \frac{x - \nu(n+i)}{x - \nu(i)} q_n(x - \nu(i))$ ha radici in $\nu_i(n) := \nu(n+i)$.

Dunque per il teorema (1.4.3.2) $r_n(x) = \sum_{i \geq 0}^n k_i t_{i,n-i}(x)$ definisce una successione polinomiale di Sheffer con valori iniziali $r_n(\nu(n)) = k_n$. Dunque, se in (2) prendiamo $\nu(n) = un$, si ha che:

$$r_n(x) = \frac{x + qn - un + y}{x + y} q_n(x + y)$$

e contemporaneamente

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \sum_{i=0}^n k_i t_{i,n-i}(x) = \\ &= \sum_{i=0}^n r_i(\nu(i)) \frac{x - \nu(n)}{x - \nu(i)} q_{n-i}(x - \nu(i)) = \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{qi + y}{ui + y} q_i(ui + y) \frac{x - un}{x - ui} q_{n-i}(x - ui). \end{aligned}$$

Dunque:

$$\frac{x + qn - un + y}{x + y} q_n(x + y) = \sum_{i=0}^n \frac{qi + y}{ui + y} q_i(ui + y) \frac{x - un}{x - ui} q_{n-i}(x - ui).$$

Poniamo $q = u$

$$q_n(x + y) = \sum_{i=0}^n q_i(ui + y) \frac{x - un}{x - ui} q_{n-i}(x - ui).$$

Poniamo $z := x + y$

$$q_n(z) = \sum_{i=0}^n q_i(ui + y) \frac{z - y - un}{z - y - ui} q_{n-i}(z - y - ui).$$

Poniamo $x := z$

$$q_n(x) = \sum_{i=0}^n q_i(ui + y) \frac{x - y - un}{x - y - ui} q_{n-i}(x - y - ui).$$

Sia ora \tilde{S} l'operatore shift-invariante invertibile tale per cui $s_n(x) = \tilde{S}^{-1}q_n(x)$. Applichiamo \tilde{S}^{-1} ad ambo i lati:

$$s_n(x) = \sum_{i=0}^n s_i(ui + y) \frac{x - y - un}{x - y - ui} q_{n-i}(x - y - ui).$$

Con una opportuna definizione di $\tilde{\nu}(n)$ si ottiene il seguente corollario:

Corollario 1.4.3.4. *Se $L \subset \mathbb{N}_0$, $u, v \in F$, φ una funzione, $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ i polinomi basici di Q e*

$$\tilde{\nu}(n) = \begin{cases} \varphi(n) & \forall n \in L \\ \nu(n) = un + v & \forall n \in \mathbb{N}_0 \setminus L \end{cases},$$

allora l'equazione:

$$s_n(x) = \sum_{i \in L} s_i(ui + v) \frac{x - v - un}{x - v - ui} q_{n-i}(x - v - ui)$$

vale per la successione di Sheffer dell'operatore Q $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ con radici in $\tilde{\nu}$.

Capitolo 2

Metodi di conteggio

In questa sezione vedremo alcuni metodi di conteggio di cammini che sono stati sviluppati nel corso della storia. Come spesso accade, molte soluzioni sono state scoperte in relazione a problemi che, soltanto all'apparenza, sembrano essere totalmente diversi ma che attraverso opportune modellizzazioni assumono forme e formulazioni diverse. Ogni tipologia di cammino, in base ai passi ammessi, avrà il suo metodo.

2.1 Il ‘*Ballot Problem*’

Nel 1887 Joseph Bertrand pose il seguente problema:

Supponiamo che ad una tornata elettorale si presentino due candidati A e B . A prende α voti e viene eletto, mentre B prende $\beta < \alpha$ voti. Ci chiediamo qual è la probabilità che A rimanga in vantaggio su B durante tutto lo spoglio dei voti. Più generalmente, ci possiamo chiedere qual è la probabilità che i voti di A si mantengano almeno un certo multiplo k dei voti di B durante tutta la durata del conteggio.

Possiamo immaginare lo scrutinio dei voti come un cammino in \mathbb{Z}^2 originato in $(0, 0)$, dove un voto per A corrisponde ad un passo $(0, 1)$ e un voto per B ad un passo $(1, 0)$. (β, α) è il punto di arrivo. La condizione che i voti di A si mantengano sempre almeno una costante k per i voti di B è come chiedere che questo cammino si mantenga sempre al di sopra della retta $y = kx$.

Lemma 2.1.0.1. *Sia $k \in \mathbb{N}$. Siano $S_1 := \{(0, 1), (1, 0)\}$ e $S_2 := \{(1, 1), (1, -k)\}$. Sia P_1 un cammino formato dai passi S_1 e supponiamo che P_1 conti α passi $(0, 1)$ e β passi $(1, 0)$. Se chiamiamo P_2 il cammino con α passi $(1, 1)$ e β passi $(1, -k)$, allora chiedere*

che P_1 rimanga sempre sopra la retta $y = kx$ è equivalente a chiedere che P_2 rimanga sempre sopra l'asse x .

Dimostrazione. Per definizione P_1 arriva a (β, α) e si vede subito che P_2 arriva a $\alpha(1, 1) + \beta(1, -k) = (\alpha + \beta, \alpha - k\beta)$.

P_1 rimane sopra la retta $y = kx \iff \alpha > k\beta \iff \alpha - k\beta > 0 \iff$
 P_2 rimane sopra l'asse x . □

Per capire meglio il significato che P_2 assume nel 'Ballot Problem' lo si può pensare come il cammino che ci indica quanto lontani siamo dal rompere la condizione e la cui ascissa tiene il conto del numero di voti scrutinati.

Teorema 2.1.0.2. *La soluzione al 'Ballot Problem' è data da*

$$\frac{\alpha - k\beta}{\alpha + \beta},$$

dove k è quel certo intero tale per cui $\alpha > k\beta$ durante tutta la durata dello spoglio.

Dimostrazione. Il quesito originale era $k = 1$ e la prima dimostrazione viene attribuita al matematico francese Désiré André. Il suo approccio si basa, praticamente, sul contare le permutazioni che non vanno bene per poi toglierle dal totale.

Dividiamo allora le permutazioni sfavorevoli in base al primo voto scrutinato. Se il primo voto è per B , allora B passa in vantaggio, e la nostra condizione cade. Quindi ogni permutazione con il primo voto è per B non va bene. Di permutazioni così ce n'è

$$\binom{\alpha + \beta - 1}{\alpha}$$

perchè stiamo considerando cammini da $(1, 0)$ a (β, α) .

Consideriamo ora il caso in cui il primo voto sia per A . Nella permutazione togliamo il primo voto per B che rompe la condizione, ovvero il primo voto che dà la temporanea parità tra i due contendenti. Rimangono due sequenze e ne formiamo una nuova scambiandole. Quello che abbiamo ottenuto è una sequenza di α voti per A e $\beta - 1$ voti per B , unicamente determinata. Contrariamente, data una combinazione di α voti per A e $\beta - 1$ voti per B , la consideriamo da destra verso sinistra e ci fermiamo quando il numero di voti per A eccede di 1 il numero di voti per B . Mettiamo questa nuova sequenza all'inizio, ma in mezzo inseriamo un voto per B . Otteniamo quindi una sequenza di α 'A' e β 'B', unicamente determinata.

Abbiamo quindi messo in relazione biunivoca le permutazioni sfavorevoli che iniziano con un voto per A con le sequenze di α 'A' e $\beta - 1$ 'B' e perciò contare le une è equivalente a contare le altre. Le sequenze così fatte sono

$$\binom{\alpha + \beta - 1}{\alpha}.$$

Le permutazioni favorevoli sono dunque

$$\binom{\alpha + \beta}{\alpha} - 2 \binom{\alpha + \beta - 1}{\alpha}.$$

Ora si tratta di effettuare alcuni semplici passaggi algebrici:

$$\begin{aligned} \binom{\alpha + \beta}{\alpha} - 2 \binom{\alpha + \beta - 1}{\alpha} &= \frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha! \beta!} - 2 \frac{(\alpha + \beta - 1)!}{\alpha! (\beta - 1)!} = \\ &= \frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha! \beta!} - 2 \frac{(\alpha + \beta - 1)!}{\alpha! (\beta - 1)!} \left(\frac{\beta}{\beta} \right) = \\ &= \frac{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 1)!}{\alpha! \beta!} - 2 \frac{(\alpha + \beta - 1)! \beta}{\alpha! \beta!} = \\ &= (\alpha + \beta - 2\beta) \frac{(\alpha + \beta - 1)!}{\alpha! \beta!} = \\ &= (\alpha - \beta) \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta} \right) \frac{(\alpha + \beta - 1)!}{\alpha! \beta!} = \\ &= \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right) \frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha! \beta!} = \\ &= \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \binom{\alpha + \beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

Che è il risultato che ci aspettavamo per $k = 1$.

Vediamo ora la dimostrazione più generale per $k \geq 1$.

Possiamo pensare allo spoglio come un cammino in \mathbb{Z}^2 con punto iniziale $(0, 0)$ dove i voti per A sono passi $(1, 1)$ ('passi in sù') e i voti per B sono passi $(1, -k)$ ('passi in giù'), come il P_2 del lemma di prima. Cerchiamo dunque il numero di cammini con α passi in su e β passi in giù che rimanga sempre al di sopra dell'asse delle ascisse. Cammini che rispettano queste richieste sono *buoni*, se non le rispettano sono *cattivi*. Un passo che inizia sopra l'asse delle ascisse e termina sotto è un *cattivo passo*.

Per $0 \leq i \leq k$ definiamo \mathcal{B}_i come l'insieme dei cammini cattivi il cui primo passo cattivo arriva in un punto di ordinata $-i$ (lo indicheremo come $(\sim, -i)$). E' abbastanza evidente che questi $k+1$ insiemi sono disgiunti (se un cammino sta in \mathcal{B}_i e in \mathcal{B}_j allora $i = j$) e che

$$\cup_{0 \leq i \leq k} \mathcal{B}_i = \text{Insieme di tutti i cammini cattivi.}$$

Notiamo subito che \mathcal{B}_k è composto da tutti e soli i cammini che iniziano con un passo in giù. Potrebbero essere di più, ma se considerassimo cammini che finiscono in $(\sim, -k)$ non al primo passo, allora necessariamente si dovrebbero fermare sull'asse x , e quindi rientrerebbero in \mathcal{B}_0 .

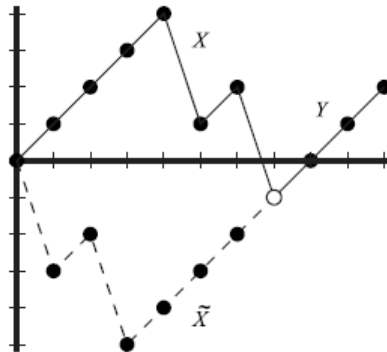


Figura 2.1: Un cammino XY in B_1 con $k=3$. $\tilde{X}Y \in B_3$

Mostriamo che per ogni i vale $|\mathcal{B}_i| = |\mathcal{B}_k|$.

Sia P un cammino in \mathcal{B}_i , $i \neq k$. Concentriamoci sul primo passo cattivo: chiamiamo X la parte di P che termina in $(\sim, -i)$ e Y la parte rimanente di P , così che $P = XY$. Ora ruotiamo X di 180° sul piano del reticolo e chiamiamo questo nuovo cammino \tilde{X} . Visto che X termina con un passo in giù (è un passo cattivo), \tilde{X} inizia con un passo in giù, quindi $\tilde{X}Y \in \mathcal{B}_k$.

Se ora consideriamo un cammino in \mathcal{B}_k e riapplichiamo lo stesso procedimento con un certo $0 \leq \tilde{i} < k$ otteniamo un cammino proprio in $\mathcal{B}_{\tilde{i}}$.

Abbiamo messo in relazione biunivoca i cammini di \mathcal{B}_k con quelli di \mathcal{B}_i per tutti gli i . Possiamo, finalmente, concludere che $|\mathcal{B}_i| = |\mathcal{B}_k| \quad \forall \quad 0 \leq i \leq k$. I cammini in \mathcal{B}_k sono $\binom{\alpha+\beta-1}{\alpha}$, dunque i cammini che rimangono al di sopra dell'asse x sono tutti meno quelli dei $k+1$ \mathcal{B}_i , ovvero

$$\binom{\alpha + \beta}{\alpha} - (k + 1) \binom{\alpha + \beta - 1}{\alpha} = \frac{\alpha - k\beta}{\alpha + \beta} \binom{\alpha + \beta}{\alpha}.$$

□

2.1.1 Il principio di riflessione

Storicamente uno dei primi metodi scoperti per il conteggio dei cammini è il **principio di riflessione**, attribuito proprio ad André. Tuttavia il matematico francese non ha utilizzato e nè addirittura enunciato il principio di riflessione nel suo articolo. Il primo a dimostrare il *'Ballot Problem'* usando il principio di riflessione fu lo svizzero Aeppli nel 1923. Questo principio si è reso indispensabile nel momento in cui si sono dovuti contare i cammini da $(1, 1)$ a $(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$ che però possono uscire dal rettangolo individuato da $(1, 1)$, $(1, \alpha - \beta)$, $(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$, $(\alpha + \beta, 1)$.

Teorema 2.1.1.1 (Principio di riflessione). *L'insieme dei cammini da $(1, 1)$ a $(a+b, a-b)$ che toccano l'asse x è in corrispondenza biunivoca con l'insieme di tutti i cammini da $(1, -1)$ a $(a+b, a-b)$.*

Dimostrazione. Nella precedente dimostrazione abbiamo dedotto che ogni cammino buono deve necessariamente iniziare con un passo in sù, arrivando al punto $(1, 1)$. Quindi ci sono tanti cammini buoni quanti sono i cammini da $(1, 1)$ a $(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$ che non toccano mai l'asse x .

Consideriamo un cammino da $(1, 1)$ a $(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$ che tocchi l'asse x in un certo punto $(\tilde{\alpha}, 0)$. Prendiamo la prima parte, fino a dove il cammino tocca l'asse x , e la riflettiamo rispetto all'asse x . Abbiamo ottenuto un cammino da $(1, -1)$ a $(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$, unicamente determinato.

Contrariamente, consideriamo un cammino da $(1, -1)$ a $(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$. Il procedimento è identico, solamente che ora il cammino staziona necessariamente sull'asse x poichè il punto di partenza ha ordinata negativa e quello di arrivo ha ordinata positiva e un cammino lo si può vedere come una funzione continua (quindi usiamo il teorema di Bolzano per le funzioni continue). \square

I cammini da $(1, 1)$ a $(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$ sono tanti quanti i cammini da $(0, 1)$ a (β, α) , ovvero $\binom{\alpha + \beta - 1}{\alpha - 1}$. I cammini da $(1, -1)$ a $(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$ sono tanti quanti i cammini da $(1, 0)$ a (β, α) , ovvero $\binom{\alpha + \beta - 1}{\beta - 1}$. Dunque sottraendo:

$$\begin{aligned} \binom{\alpha + \beta - 1}{\alpha - 1} - \binom{\alpha + \beta - 1}{\beta - 1} &= \frac{(\alpha + \beta - 1)!}{(\alpha - 1)!\beta!} - \frac{(\alpha + \beta - 1)!}{(\beta - 1)!\alpha!} = \\ &= \frac{(\alpha + \beta - 1)!}{(\alpha - 1)!\beta!} \left(\frac{\alpha}{\alpha}\right) - \frac{(\alpha + \beta - 1)!}{(\beta - 1)!\alpha!} \left(\frac{\beta}{\beta}\right) = \\ &= \frac{\alpha(\alpha + \beta - 1)!}{\alpha!\beta!} - \frac{\beta(\alpha + \beta - 1)!}{\alpha!\beta!} = \\ &= (\alpha - \beta) \frac{(\alpha + \beta - 1)!}{\alpha!\beta!} = \\ &= (\alpha - \beta) \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta}\right) \frac{(\alpha + \beta - 1)!}{\alpha!\beta!} = \\ &= \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha!\beta!} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \binom{\alpha + \beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

2.1.2 Il metodo delle immagini

Dal XVIII gli scienziati cominciarono ad intensificare i loro studi e la formulazione di nuove teorie sulla natura e sui fenomeni che potevano osservare, in particolare nell'ambito dell'ottica e dell'elettrostatica. Durante lo studio e la risoluzione dei problemi che di

volta in volta si ponevano, arrivarono a capire che spesso era molto utile creare un oggetto fittizio che racchiudesse le caratteristiche di alcuni altri oggetti presenti nel problema. Guardiamo per esempio ad una carica puntiforme vicino ad una superficie conduttrice. La carica positiva, come è noto, induce una carica negativa sulla superficie. Thomson (più tardi divenuto famoso con il nome di Lord Kelvin) si accorse verso la metà del 1800 che questo era equivalente a creare un'altra carica negativa fittizia *dietro* la superficie, alla distanza da essa pari alla distanza tra la superficie e la carica positiva. L'effetto sull'ambiente circostante era lo stesso.

Nulla ci vieta di applicare questo principio anche ai problemi di conteggio che stiamo affrontando. Per esempio se dobbiamo contare il numero di cammini data una certa limitazione, possiamo creare una immagine (o '*pseudo-immagine*', come è stata chiamata da J. Peacock nel suo articolo sulla '*The Mathematical Gazette*') che ci semplifichi la situazione, senza cambiare la sostanza delle cose. Possiamo dire che il metodo delle immagini è stretto parente del principio di riflessione ma, a detta di Peacock, è più generale (anche se Takàcs li mette sullo stesso livello - il più alto).

Teorema 2.1.2.1 (Metodo delle immagini). *Sia $Q := (\beta, \alpha)$ un punto in un reticolo. I cammini dall'Origine a Q che non attraversano la retta $y = kx$ sono*

$$\frac{c+1}{\alpha+1} \binom{\alpha+\beta}{\beta},$$

dove $c := \alpha - k\beta > 0$.

Dimostrazione. Sia $r < \beta$. Siano $I := (1, -1)$, $O := (0, 0)$ e $P_r := (r, kr - 1)$. Inizialmente si vede che per qualsiasi r vale che:

$$k \binom{kr+r-1}{r-1} = k \frac{(kr+r-1)!}{(r-1)!(kr)!} \binom{r}{r} = \frac{(kr)(kr+r-1)!}{r!(kr)(kr-1)!} = \frac{(kr+r-1)!}{r!(kr-1)!} = \binom{kr+r-1}{r}.$$

Se consideriamo i cammini da O a P_r questi sono $\binom{r+kr-1}{r}$, ovvero il termine di destra nell'equazione.

I cammini da I a P_r sono $\binom{r+kr-1}{r-1}$, ovvero il termine di sinistra a meno di moltiplicazione per k .

Dunque $k|IP_r| = |OP_r|$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n k|IP_r||P_rQ| &= \sum_{r=1}^n |OP_r||P_rQ| \\ k \sum_{r=1}^n |IP_r||P_rQ| &= \sum_{r=1}^n |OP_r||P_rQ| \end{aligned}$$

A sinistra abbiamo k volte i cammini da I a Q , mentre a destra i cammini da O a Q che toccano la retta $y = kx - 1$ nel punto P_r e che, quindi, attraversano la retta $y = kx$.

$$k|IQ| = \sum_{r=1}^n |OP_r| |P_rQ|$$

Dunque i cammini da O a Q che non attraversano la retta $y = kx$ sono, tautologicamente, tutti meno quelli che la attraversano, dunque:

$$\begin{aligned} |OQ| - k|IQ| &= \binom{\alpha + \beta}{\alpha} - k \binom{\alpha + \beta}{\beta - 1} = \\ &= \frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha! \beta!} - k \frac{(\alpha + \beta)!}{(\beta - 1)! (\alpha + 1)!} = \\ &= \frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha! \beta!} - k \frac{(\alpha + \beta)!}{(\beta - 1)! (\alpha + 1) \alpha!} \binom{\beta}{\beta} = \\ &= \frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha! \beta!} - \frac{k\beta(\alpha + \beta)!}{\alpha! \beta! (\alpha + 1)} = \\ &= \left(1 - \frac{k\beta}{\alpha + 1}\right) \binom{\alpha + \beta}{\alpha} = \\ &= \left(\frac{\alpha + 1 - k\beta}{\alpha + 1}\right) \binom{\alpha + \beta}{\alpha} = \frac{c + 1}{\alpha + 1} \binom{\alpha + \beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

□

In questa dimostrazione abbiamo contato quanti cammini da $(0, 0)$ a (β, α) toccano la retta $y = kx$. Nei termini del ‘*Ballot Problem*’ sono i modi di contare i voti che al massimo tollerano un temporaneo pareggio o, più generalmente, tali che $\alpha \geq k\beta$ per tutta la durata dello scrutinio. Il caso in cui il nostro cammino tocca la retta $y = kx - 1$, si traduce nel vantaggio temporaneo di B .

Ma il metodo delle immagini? E’ presto detto. Se P è un cammino che tocca la retta $y = kx - 1$, costruiamo P' riflettendo P rispetto ad \mathbf{s} , ma solo la parte dall’origine fino al punto di incidenza. P' è quindi un cammino da $(1, -1)$ fino a (α, β) . Abbiamo così creato un oggetto fittizio dietro alla superficie (\mathbf{s}) che, senza cambiare la sostanza delle cose, semplifica la risoluzione del problema. La sua incredibile somiglianza con il principio di riflessione ci fa capire perchè Takàcs li mette sullo stesso livello. Personalmente mi trovo più in linea con quest’ultimo, la tentazione di vedere il metodo delle immagini come una riformulazione del principio di riflessione è effettivamente molto forte, anche se, per come è formulato, il metodo delle immagini ha un ventaglio di applicazioni molto più vasto e generale (abbiamo visto il caso dell’elettrostatica).

2.1.3 Il lemma ciclico

Nel 1947 Dvoretzky e Motzkin risolsero i ‘*Ballot Problem*’ introducendo il lemma ciclico (‘*The cycle lemma*’), che rende evidente l’origine della frazione $\frac{\alpha-k\beta}{\alpha+\beta}$.

Dimostrazione. Disponiamo gli α voti per A e i β voti per B in un ciclo C , rappresentando con un ‘1’ i primi e con ‘-k’ i secondi.

Inizialmente si vede che esiste una sequenza $X = 1, 1, 1, 1, \dots, 1, -k$, con k ‘1’ consecutivi: se non esistesse avremmo al massimo sequenze ‘ $-k, 1, 1, \dots, 1, -k'$ ’ con $m < k$ ‘1’. Questo non può accadere perchè nel momento in cui siamo sul primo ‘ $-k'$ ’, la somma parziale è al minimo 1, superati gli m ‘1’ saremmo a $m + 1$, dopo il secondo ‘ $-k'$ ’ a $m + 1 - k < 1$. Assurdo.

Nessun termine di X può iniziare una sequenza buona, perchè la somma parziale diventerebbe negativa oppure zero nel momento in cui si conta il ‘ $-k'$ ’. La somma parziale di X è 0, quindi possiamo togliere X da C senza alterare le sequenze buone. Chiamiamo C' la nuova sequenza ottenuta, che ha lo stesso numero di sequenze buone di C . Dato un elemento di C , questo è il primo elemento di una sequenza buona se e solo se è il primo elemento di una sequenza buona in C' . Ripetiamo questo procedimento, togliendo da C tutte le sequenze come X fino a che rimangono solo $\alpha - k\beta$ termini. \square

2.2 I polinomi di Sheffer

Questo metodo consiste nel contare i cammini da $(0, 0)$ a (m, n) calcolando un certo polinomio $p_n(x)$ in $x = m$. Iniziamo con chiamare $D(m, n)$ il numero di cammini da $(0, 0)$ a (m, n) . Ovviamente $D(m, n) = \binom{m+n}{n}$ e vale la legge ricorsiva $D(m, n) = D(m-1, n) + D(m, n-1)$. Cerchiamo dei vincoli che ci permettano di vedere $D(m, n)$ come la soluzione di

$$\nabla_m D(m, n) := D(m, n) - D(m-1, n) = D(m, n-1), \quad (2.1)$$

con alcune condizioni supplementari, per esempio

$$D(m, n) = 0 \text{ per } m < 0.$$

Questa è la condizione che riassume la richiesta “i cammini rimangono nel primo quadrante senza mai entrare nel secondo” e verrà sempre imposta. Se vogliamo introdurre un’ulteriore restrizione, per esempio la richiesta che i cammini rimangano al di sotto della retta $y = x + l$ ($l \in \mathbb{N}$), allora questa condizione diventa

$$D(m, n) = 0 \text{ per } n = m + l.$$

La (2.1) diventa un sistema di equazioni da risolvere

$$Bd_n(x) = d_{n-1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

dove B è un operatore lineare shift-invariante e $\{d_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ certi polinomi.

Dalla teoria delle ricorrenze lineari con condizioni al bordo sappiamo che questo tipo di equazione ammette un'unica soluzione, che è

$$d_n(x) = \sum_{i \in L} \frac{(u-a)i+1-w}{ui+1-w} b_i(ui-w) \frac{x-un+w}{x-ui+w} b_{n-i}(x-ui+w),$$

dove:

- $0 \leq a \leq u$ e $w \in \mathbb{N}$;
- $L = \{n \in \mathbb{N}_0 \text{ tali che } an - 1 \geq un - w\}$;
- $d_n(an - 1) = \delta_{0,n}$ per $n \in L$;
- $d_n(un - w) = 0$ per $n \in \mathbb{N} \setminus L$;
- $\{b_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ sono i polinomi elementari di B , con valore iniziale $b_n(0) = \delta_{0,n}$ che risolve (2.2).

Le prime due condizioni sono sostanzialmente la definizione della $\tilde{v}(n)$ del corollario (1.4.3.4).

Nel caso $B = \nabla_m$, $b_n(x) = \binom{n+x-1}{n}$, $L = \{n \in \mathbb{N}_0 \text{ tali che } -1 \geq n-l\} = \{0, \dots, l-1\}$ e valori iniziali:

- $d_n(-1) = \delta_{0,n}$ per $n = 0, \dots, l-1$ (il cammino rimane nel primo quadrante);
- $d_n(n-l) = 0$ per $n \geq l$ (il cammino non tocca la retta $y = x+l$).

la soluzione diventa

$$d_n(m) = \sum_{i=0}^{l-1} \frac{m+l-n}{m+l-i} \binom{2i-l-1}{i} \binom{n+m+l-2i-1}{n-i}$$

cammini che partono da $(0,0)$ e arrivano a (m,n) , $n < m+l$, senza toccare la retta $y = x+l$.

2.3 Il metodo del kernel

Questo metodo è stato introdotto per la prima volta dal matematico e informatico francese Philippe Flajolet. Le sue più semplici applicazioni studiano equazioni funzionali della forma:

$$K(z, u)F(z, u) = p(z, u) + q(z, u)G(z),$$

dove $p(z, u)$, $q(z, u)$ e $K(z, u)$ sono funzioni date e $F(z, u)$ e $G(z)$ sono funzioni generatrici incognite. K è un polinomio in u , prende il nome di **kernel** e il nostro scopo è trovare funzioni $u(z)$ che lo annullino. Il caso più semplice è quello con una *ramificazione* $u_1(z)$ tale per cui $K(z, u_1(z)) = 0$ e $u_1(0) = 0$. In questo caso una semplice sostituzione ci fornisce una forma chiusa per G :

$$G(z) := -\frac{p(z, u_1(z))}{q(z, u_1(z))}.$$

Questo metodo è stato poi generalizzato nella forma:

$$K(z, u)F(z, u) = \sum_{i=1}^m p_i(z, u)G_i(z),$$

dove $K(z, u)$ e $p_i(z, u)$ sono polinomi noti e $F(z, u)$ e $G_i(z)$ sono funzioni incognite.

Vediamo come questo metodo ci può aiutare nel nostro scopo:

Sia \mathcal{C}_n l'insieme dei cammini di lunghezza n e $\mathcal{C}_{n,k}$ l'insieme dei cammini di lunghezza n che terminano in un punto di ordinata k . Banalmente $\mathcal{C}_{n,k} \subset \mathcal{C}_n$. Ora definiamo $C_n = |\mathcal{C}_n|$ e $C_{n,k} = |\mathcal{C}_{n,k}|$ e introduciamo le corrispondenti funzioni generatrici:

$$C(z) := \sum_{n \geq 0} C_n z^n \quad \text{e} \quad C(z, u) := \sum_{n, k \geq 0} C_{n,k} u^k z^n$$

Definizione 2.3.0.1. *Se $S = \{b_1, \dots, b_m\}$ è un insieme semplice di passi, definiamo il polinomio caratteristico di S come:*

$$P(u) := \sum_{j=1}^m u^{b_j}.$$

Ora chiamiamo $c := -\min_j b_j$ e $d := \max_j b_j$ e li assumiamo sempre positivi. Il polinomio caratteristico di S diventa dunque:

$$P(u) = \sum_{j=-c}^d p_j u^j \quad \text{con } p_j \in \{0, 1\}.$$

Definizione 2.3.0.2. *Dato $P(u)$ e c come prima, definiamo la curva caratteristica come:*

$$1 - zP(u) = 0 \quad \text{o, equivalentemente} \quad u^c - zu^c P(u) = 0. \quad (2.3)$$

Definizione 2.3.0.3. La quantità $K(z, u) := u^c - zu^c P(u)$ è chiamata **kernel** e (2.3) prende il nome di **equazione del kernel**.

L'equazione caratteristica ha grado $c + d$ in u e perciò ha, al più, $c + d$ radici. Queste costituiscono le *ramificazioni* della curva caratteristica (2.3):

- c ramificazioni piccole $\{u_j(z)\}_{j=1, \dots, c}$, esprimibili in serie di potenze in $z^{\frac{1}{c}}$ tali che $\lim_{z \rightarrow 0} u_j = 0$;
- d ramificazioni grandi $\{v_j(z) := u_{c+j}(z)\}_{j=1, \dots, d}$, esprimibili in serie di Laurent in $z^{-\frac{1}{d}}$ tali che $\lim_{z \rightarrow 0} v_j = \infty$.

Notazione 4. Data la serie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$, indichiamo con $[z^k]$ ($\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$) il k -esimo coefficiente, ovvero a_k .

Teorema 2.3.0.4. La funzione generatrice di cammini relativi ad un insieme semplice di passi con polinomio caratteristico $P(u)$, ramificazioni piccole $\{u_j(z)\}_{j=1, \dots, c}$ e ramificazioni grandi $\{v_j(z)\}_{j=1, \dots, d}$ è data da:

$$W(z, u) = \frac{1}{1 - zP(u)}, \quad (2.4)$$

dove z è la lunghezza del cammino e u è l'altezza finale.

La funzione generatrice dei ponti è:

$$B(z) = z \sum_{j=1}^c \frac{u'_j(z)}{u_j(z)} = z \frac{d}{dz} \left(\log \left(\prod_{j=1}^c u_j(z) \right) \right), \quad (2.5)$$

dove z è la lunghezza del ponte (l'altezza finale è 0, in quanto i ponti finiscono sull'asse x per definizione).

In generale la funzione generatrice $W_k(z)$ di cammini con altezza finale k è, per $-\infty < k < c$:

$$W_k(z) = z \sum_{j=1}^c \frac{u'_j(z)}{u_j(z)^{k+1}} = -\frac{z}{k} \frac{d}{dz} \left(\sum_{j=1}^c u_j(z)^{-k} \right) \quad (2.6)$$

e per $-d < k < \infty$:

$$W_k(z) = -z \sum_{j=1}^d \frac{v'_j(z)}{v_j(z)^{k+1}} = \frac{z}{k} \frac{d}{dz} \left(\sum_{j=1}^d v_j(z)^{-k} \right). \quad (2.7)$$

Dimostrazione. Sia $w_n(u) = [z^n]W(z, u)$, il polinomio di Laurent che descrive le possibili altitudini dei cammini che ci arrivano in n passi. Si ha $w_0(u) = 1$ (solo il cammino

costante in $(0, 0)$, $w_1(u) = P(u)$ e $w_{n+1}(u) = P(u)w_n(u)$ e dunque $w_n(u) = P(u)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$. Da questo si evince come

$$W(z, u) = \sum_{n \geq 0} w_n(u) z^n = \sum_{n \geq 0} P(u)^n z^n = \frac{1}{1 - zP(u)}$$

converge nei due argomenti se e solo se $|z| < \frac{1}{P(|u|)}$. Possiamo anche osservare come $P(u)$ sia una serie di Laurent in u e quindi $W(z, u)$ lo sia a sua volta, mentre $W(z, u)$ è intera se viene guardata nell'incognita z . Per $u > 0$ il raggio di convergenza è esattamente $\frac{1}{P(u)}$. Per come sono fatti i coefficienti di $P(u)$ il raggio di convergenza di $B(z)$ è almeno $\frac{1}{P(1)}$. Consideriamo ora $|z| < r$, dove $r := \frac{1}{2P(1)}$. Dal momento che $\frac{1}{P(u)} \in C((0, \infty))$ e $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{P(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{P(u)} = 0$, allora esiste un intervallo (a, b) tale per cui per $a \leq u \leq b$ si ha $\frac{1}{P(u)} > r$ ($\frac{1}{P(1)}$ non è, a priori, il massimo di $\frac{1}{P(u)}$). La funzione $W(z, u)$ è dunque analitica nell'insieme $\{z, |z| < r\} \times \{u, a < |u| < b\}$ (in questo insieme si verifica inoltre che $|zP(u)| < 1$). Possiamo dunque applicare la formula di Cauchy a $W(z, u)$ come funzione di u e con $\gamma(t) = \frac{a+b}{2} e^{it} \quad t \in [0, 2\pi)$ (γ è un cammino chiuso in $\{u, a < |u| < b\}$ e $I(\gamma, 0) = 1$):

$$B(z) = W(z, 0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{W(z, u)}{u} du = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{u(1 - zP(u))} du.$$

Ora prendiamo $|z|$ piccolo, in modo che le ramificazioni grandi rimangano fuori da $|u| \leq \frac{a+b}{2}$ e che le ramificazioni piccole siano tutti distinti. Dato che ora solo le piccoli ramificazioni rimangono dentro, ci sono solo poli semplici (gli u_j) e dunque

$$\text{Res} \left(\frac{1}{u(1 - zP(u))}, u_j \right) = -\frac{1}{u_j z P'(u_j)}. \quad (2.8)$$

L'insieme di integrazione può essere ristretto all'origine ($W(z, u)$ rimane dell'ordine di $O(1)$) e il teorema dei residui (possiamo usarlo perchè $\frac{1}{u(1 - zP(u))}$ è analitica sull'insieme aperto che abbiamo preso in considerazione meno le ramificazioni piccole, distinte per costruzione; γ è una curva chiusa) ci fornisce $B(z)$ come somma di residui della forma di (2.8):

$$B(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{u(1 - zP(u))} du = -\frac{1}{2i\pi} 2i\pi \sum_{j=1}^c \frac{1}{u_j z P'(u_j)} = -\frac{1}{z} \sum_{j=1}^c \frac{1}{u_j P'(u_j)}.$$

Derivando rispetto a z l'equazione caratteristica si ottiene:

$$\begin{aligned}
K(z, u(z)) &= 0 \\
\frac{d}{dz}K(z, u(z)) &= 0 \\
\frac{d}{dz}(1 - zP(u(z))) &= 0 \\
-z \frac{d}{du}P(u(z))u'(z) - P(u(z)) &= 0 \\
\frac{d}{du}P(u(z)) &= -\frac{P(u(z))}{zu'(z)} \\
\frac{1}{\frac{d}{du}P(u(z))} &= -\frac{zu'(z)}{P(u(z))} \\
\text{sappiamo che } 1 - zP(u(z)) = 0, \text{ dunque } P(u(z)) &= \frac{1}{z} \\
\frac{1}{\frac{d}{du}P(u(z))} &= -z^2u'(z)
\end{aligned}$$

$\frac{1}{P'(u)} = -z^2u'$ per ogni ramificazione piccola e dunque otteniamo (2.5):

$$B(z) = -\frac{1}{z} \sum_{j=1}^c \frac{-z^2u'}{u_j} = z \sum_{j=1}^c \frac{u'_j}{u_j}.$$

La stessa argomentazione si può applicare a

$$W_k(u) = [u^k]W(z, u) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{W(z, u)}{u^{k+1}} du$$

nel caso $-\infty < k < c$.

In questo caso $\frac{W(z, u)}{u^{k+1}}$ è dell'ordine di u^{c-k-1} e rimane limitata per $u \rightarrow 0$. (2.6) segue naturalmente e (2.7) segue considerato il caso $k > -d$. \square

Esempio 3. Vediamo il caso $S = \{(1, 1), (1, -1)\}$. Questo è un insieme semplice di passi, perciò lo possiamo anche scrivere come $S = \{1, -1\}$. Per come è stato definito si ha che $P(u) = u + \frac{1}{u}$.

La curva caratteristica ha grado 2, quindi c'è una sola ramificazione piccola, che si ottiene studiando $K(z, u) = 1 - zP(u) = 0$. Le due candidate sono

$$u_1(z) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4z^2}}{2z} \quad e \quad u_2(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2z}.$$

Tra queste due, quella che va a 0 (risultato derivato nella teoria delle espansioni di Newton-Puiseux) per $z \rightarrow 0$ è $u_2(z)$.

Derivando $u(z)$ si ottiene

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2z^2\sqrt{1 - 4z^2}}$$

e, conseguentemente:

$$B(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4z^2}} = 1 + 2z^2 + 6z^4 + 20z^6 + \dots$$

I coefficienti sono i numeri che si possono scrivere come $\binom{2n}{n}$ per $n \in \mathbb{N}_0$, la sequenza OEIS **A000984**. Inoltre si noti che compaiono solo i termini con esponente pari: con l'insieme dei passi definito così è necessario richiedere sempre un numero pari di passi per terminare sull'asse x (bisogna fare tanti passi in alto quanti in basso).

Esempio 4. Per il caso $S = \{(1, 1), (1, 0), (1, -1)\}$ si ha che $P(u) = u + 1 + \frac{1}{u}$. Studiando $K(z, u) = 1 - zP(u) = 0$ si vince come

$$u(z) = \frac{1 - z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z}.$$

Derivando $u(z)$ si ottiene conseguentemente

$$B(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2z - 3z^2}} = 1 + z + 3z^2 + 7z^3 + 19z^4 + 51z^5 + \dots$$

I coefficienti sono la sequenza OEIS **A002426**.

Introduciamo ora una condizione aggiuntiva ai nostri cammini e vediamo ora il caso dei meandri e delle escursioni, ovvero quei cammini che si mantengono nel primo quadrante e, nel caso delle escursioni, terminano sull'asse x . Sia $F_{n,k}$ il numero di meandri di lunghezza n e altezza finale k : la funzione generatrice è

$$F(z, u) = \sum_{n,k \geq 0} F_{n,k} u^k z^n.$$

In seguito faremo anche uso delle scritture

$$F(z, u) = \sum_{n \geq 0} f_n(u) z^n = \sum_{k \geq 0} F_k(z) u^k.$$

dove i polinomi $f_n(u)$ rappresentano le possibili posizioni dopo n passi.

Notazione 5. Poniamo:

$$\{u^{<r}\} \left(\sum_{j=-a}^{\infty} b_j u^j \right) := \sum_{j=-a}^{r-1} b_j u^j.$$

Con questa notazione si può scrivere:

$$f_0(u) = 1 \quad f_{n+1}(u) = P(u)f_n(u) - \{u^{<0}\}(P(u)f_n(u)).$$

Ovvero: di cammini con lunghezza 0 ce n'è 1 e di cammini lunghi $n+1$ ce n'è $P(u)f_n(u)$ meno quelli che finiscono sotto l'asse x .

Ora moltiplichiamo entrambi i lati per z^{n+1} e sommiamo su $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} f_{n+1}(u)z^{n+1} &= \sum_{n \geq 0} z^{n+1} (P(u)f_n(u) - \{u^{<0}\}(P(u)f_n(u))) \\ f_1(u)z + f_2(u)z^2 + \dots &= P(u)F(z, u) - \{u^{<0}\}(P(u)F(z, u)) \\ -f_0(u) + f_0(u) + f_1(u)z + f_2(u)z^2 + \dots &= zP(u)F(z, u) - z\{u^{<0}\}(P(u)F(z, u)) \\ -1 + F(z, u) &= zP(u)F(z, u) - z\{u^{<0}\}(P(u)F(z, u)) \\ F(z, u) &= 1 + zP(u)F(z, u) - z\{u^{<0}\}(P(u)F(z, u)). \end{aligned}$$

Definizione 2.3.0.5.

$$F(z, u) = 1 + zP(u)F(z, u) - z\{u^{<0}\}(P(u)F(z, u))$$

prende il nome di **equazione funzionale fondamentale**. Con qualche ulteriore manipolazione algebrica si arriva a:

$$F(z, u)(1 - zP(u)) = 1 - z\{u^{<0}\}(P(u)F(z, u)) = 1 - z \sum_{k=0}^{c-1} r_k(u)F_k(z), \quad (2.9)$$

per $r_k(u) := \{u^{<0}\}(P(u)u^k) = \sum_{j=-c}^{-k-1} p_j u^{j+k}$

Teorema 2.3.0.6. *La funzione generatrice di meandri relativi ad un insieme semplice di passi con polinomio caratteristico $P(u)$, ramificazioni piccole $\{u_j\}_{j \in \{1, \dots, c\}}$ e ramificazioni grandi $\{v_j\}_{j \in \{1, \dots, d\}}$ è data da:*

$$F(z, u) = \frac{\prod_{j=1}^c (u - u_j(z))}{u^c(1 - zP(u))} = -\frac{1}{p_d z} \prod_{j=1}^d \frac{1}{u - v_j(z)}. \quad (2.10)$$

In particolare, le escursioni:

$$E(z) = F(z, 0) = \frac{(-1)^{c-1}}{p_{-c} z} \prod_{j=1}^c u_j(z) = \frac{(-1)^{d-1}}{p_d z} \prod_{j=1}^d \frac{1}{v_j(z)}. \quad (2.11)$$

Dimostrazione. Si nota subito che (2.9) ha $c+1$ funzioni incognite ($\{F_k(z)\}_{k=0, \dots, c-1}$ e $F(z, u)$). La principale idea del *metodo del kernel* è quella di legare u e z in modo che il

membro di sinistra si annulli. Prendiamo $|z| < \frac{1}{P(1)}$ e poi lo restringiamo sempre di più, fino a che le ramificazioni siano distinte e $|u_j(z)| < 1 \quad \forall j$. Ora sostituiamo $u = u_j \quad \forall j$ e otteniamo c equazioni in c incognite:

$$\begin{cases} u_1^c - z \sum_{k=0}^{c-1} u_1^c r_k(u_1) F_k(z) = 0 \\ \vdots \\ u_c^c - z \sum_{k=0}^{c-1} u_c^c r_k(u_c) F_k(z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z \sum_{k=0}^{c-1} u_1^c r_k(u_1) F_k(z) = u_1^c \\ \vdots \\ z \sum_{k=0}^{c-1} u_c^c r_k(u_c) F_k(z) = u_c^c \end{cases} \iff$$

$$\iff z \begin{pmatrix} r_0(u_1)u_1^c & \dots & r_{c-1}(u_1)u_1^c \\ \vdots & & \vdots \\ r_0(u_c)u_c^c & \dots & r_{c-1}(u_c)u_c^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0(z) \\ \vdots \\ F_{c-1}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^c \\ \vdots \\ u_c^c \end{pmatrix}.$$

Il determinante è una variante del determinante di Vandermonde e le ramificazioni sono tutte distinte, quindi la matrice è invertibile e il sistema è perciò risolvibile. Al posto di risolvere questo sistema possiamo invece notare come la quantità

$$N(z, u) := u^c - z \sum_{k=0}^{c-1} u^c r_k(u) F_k(z) \quad (2.12)$$

sia polinomiale in u e abbia proprio nelle u_j le sue radici. Il coefficiente direttore è u^c . Dunque si può scrivere

$$N(z, u) := \prod_{j=1}^c (u - u_j(z)) \quad (2.13)$$

ma da (2.9) possiamo ricavare che

$$F(z, u)(1 - zP(u))u^c = N(z, u)$$

dunque

$$F(z, u) = \frac{N(z, u)}{u^c(1 - zP(u))}.$$

Guardiamo ora a $F(z, 0)$: il termine noto di $N(z, u)$ è dato da $(-1)^c \prod_{j=1}^c u_j(z)$ (lo si vede da (2.13)). Se però espandiamo $N(z, u)$ da (2.12) calcolando anche i $r_k(u)$ da (2.9) otteniamo:

$$\begin{aligned} N(z, u) &= u^c - zu^c(r_0(u)F_0(z) + \dots + r_{c-1}(u)F_{c-1}(z)) = \\ &= u^c - zu^c((p_{-c}u^{-c} + \dots + p_{-1}u^{-1})F_0(z) + \dots + p_{-c}u^{-1}F_{c-1}(z)) = \\ &= u^c - ((zp_{-c} + \dots + p_{-1}u^{c-1})F_0(z) + \dots + p_{-c}u^{c-1}F_{c-1}(z)) = \\ &= u^c - (p_{-c}F_{c-1}(z) + \dots + p_{-1}F_0(z))u^{c-1} + \dots - zp_{-c}F_0(z) \end{aligned}$$

da cui si evince come il termine noto sia $-zp_{-c}F_0(z)$. Dunque

$$-zp_{-c}F_0(z) = (-1)^c \prod_{j=1}^c u_j(z)$$

$$F_0(z) = \frac{(-1)^{c-1}}{zp_{-c}} \prod_{j=1}^c u_j(z).$$

□

Esempio 5. Riprendiamo S come nell'esempio (3), $S = \{(1, -1), (1, 1)\}$. Applicando la formula appena dimostrata otteniamo che

$$E(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2z^2} = 1 + z^2 + 2z^4 + 5z^6 + 14z^8 + 42z^{10} + \dots$$

I coefficienti di questa funzione generatrice originano la sequenza **OEIS** A000108, ovvero i numeri di Catalan, che vedremo meglio nel prossimo capitolo.

Esempio 6. Ora, invece prendiamo S come nell'esempio (4), $S = \{(1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$. Applicando l'ultimo teorema si vede che

$$E(z) = \frac{1 - z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z^2} = 1 + z + 2z^2 + 4z^3 + 9z^4 + 21z^5 + \dots$$

I coefficienti di questa funzione generatrice, invece, sono la sequenza **OEIS** A001006, ovvero i numeri di Motzkin. Nel prossimo capitolo troveremo più informazioni anche su questa sequenza di interi.

Capitolo 3

Alcuni cammini interessanti

A seconda di come scegliamo i passi da fare e del punto al quale vogliamo arrivare, possiamo, in maniera abbastanza ovvia, generare diverse categorie di cammini che, a loro volta, generano delle interessanti successioni numeriche.

Richiamiamo i diversi tipi di cammini che abbiamo enunciato all'inizio:

Definizione 3.0.0.1. *Un **ponte** è un cammino che termina sull'asse x , in un punto $(\alpha, 0)$.*

Definizione 3.0.0.2. *Un **meandro** è un cammino che rimane nel primo quadrante del piano cartesiano.*

Definizione 3.0.0.3. *Un'**escursione** è un cammino che è sia un ponte che un meandro, ovvero inizia nell'origine, termina in un punto di ordinata nulla e rimane nel primo quadrante.*

3.1 Cammini di Dyck

Consideriamo come insieme dei passi l'insieme $S = \{(1, 1), (1, -1)\}$.

Nei meandri distinguiamo due casi:

1. il caso in cui l'asse x venga toccato solo ed esclusivamente nel punto d'origine;
2. il caso in cui l'asse x venga toccato anche in uno o più punti intermedi.

Vediamoli in dettaglio:

1. per il primo caso dobbiamo contare i cammini con α passi $(1, 1)$ e β passi $(1, -1)$ che rimangono strettamente sopra l'asse x . Per (2.1.0.1) questi sono equivalenti ai cammini con α passi $(1, 0)$ e β passi $(0, 1)$ che rimangono sopra la retta $y = x$. Ma

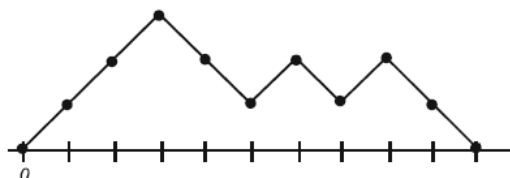


Figura 3.1: un cammino di Dyck

li abbiamo già contati quando abbiamo studiato il *ballot problem* con l'ausilio del *principio di riflessione* (2.1.1.1): questi sono $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} \binom{\alpha+\beta}{\alpha}$;

- per il secondo caso dobbiamo contare i cammini con α passi u e β passi d che rimangono sopra o, al massimo, toccano l'asse x . Per (2.1.0.1) questi sono equivalenti ai cammini con α passi $(1,0)$ e β passi $(0,1)$ che rimangono sopra o, al massimo, toccano la retta $y = x$ che abbiamo già contato quando abbiamo studiato il *metodo delle immagini* (2.1.2.1): questi sono $\frac{\alpha-\beta+1}{\alpha+1} \binom{\alpha+\beta}{\alpha}$.

3.1.1 Cammini di Dyck e numeri di Catalan

Ma veniamo alle escursioni. Questi sono cammini che, come già ampiamente detto, terminano sull'asse x e quindi, devono necessariamente avere tanti passi $(1,1)$ quanti $(1,-1)$. La loro lunghezza è $2n$, se n è il numero di passi $(1,1)$. Dunque possiamo sostituire $n = \alpha = \beta$ nel secondo punto della sotto-sezione precedente e ottenere che ci sono esattamente

$$C_n := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

escursioni. I numeri della successione

$$\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$$

prendono il nome di **numeri di Catalan**. I primi numeri sono 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, ... successione **OEIS A000108**. Possiamo notare come questi siano i coefficienti dell'esempio (5).

Vediamo ora alcune proprietà dei numeri di Catalan.

Teorema 3.1.1.1. *Valgono per ogni n intero non negativo:*

- $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$;

$$2. C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1} C_n;$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = 4;$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}^{\frac{3}{2}}};$$

$$5. C_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2;$$

Dimostrazione. Dimostriamo (1):

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \\ &= \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)(n-1)!} \right) = \\ &= \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{1}{n(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)(n-1)!} \right) = \\ &= \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \\ &= \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} \left(\frac{1}{n(n+1)} \right) = \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} \frac{1}{n+1} = \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1} = C_n. \end{aligned}$$

Dimostriamo (2):

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= \frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1} = \\ &= \frac{1}{n+2} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \\ &= \frac{1}{n+2} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)(n+1)n!n!} = \\ &= \frac{1}{n+2} \frac{2(2n+1)}{(n+1)} \binom{2n}{n} = \\ &= \frac{2(2n+1)}{n+2} \frac{1}{(n+1)} \binom{2n}{n} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n. \end{aligned}$$

Questo punto ci fornisce una legge ricorsiva per i numeri di Catalan e ci fornisce (3):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = 4.$$

Per (4) ci serve l'approssimazione di Stirling di $n!$:

$$n! \sim \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{4n\pi} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2n(n+1)\pi \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{2^{2n}}{(n+1)\sqrt{n\pi}} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n^{\frac{3}{2}}}}.$$

Per (5) usiamo l'identità di Vandermonde (1.1):

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

□

Teorema 3.1.1.2. *Se consideriamo la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definita come:*

$$(A)_{i,j} = C_{i+j-2} \quad i, j = 1, \dots, n$$

allora questa ha determinante 1 per tutti gli n naturali.

Inoltre vale anche che:

Teorema 3.1.1.3.

$$C_0 = 1 \quad C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

3.1.2 I numeri di Narayana

Se vogliamo contare i cammini di Dyck da $(0, 0)$ a $(2n, 0)$ che hanno esattamente k picchi (ovvero un passo $(1, 1)$ succeduto da un passo $(1, -1)$), questi sono enumerati dai **numeri di Narayana** e sono

$$N(n, k) = \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1}.$$

La sequenza bi-indicizzata

$$\{N(n, k)\}_{n \in \mathbb{N}_0, k \in \{0, \dots, n\}}$$

è la sequenza **OEIS A0001263** e spesso viene rappresentata come un triangolo, con $N(n, k)$ nella n -esima riga, al k -esimo posto.

Partizionando i cammini di Dyck in base al numero di picchi si vede come

$$C_n = \sum_{k=0}^n N(n, k),$$

dove C_n è l' n -esimo numero di Catalan.

3.2 Cammini di Motzkin

Consideriamo come insieme dei passi l'insieme $S = \{(1, 1), (1, 0), (1, -1)\}$. Le escursioni con l'insieme dei passi definito in questo modo prendono il nome di **cammini di Motzkin**. Nell'esempio (6) abbiamo visto come la funzione generatrice sia

$$E(z) = 1 + z + 2z^2 + 4z^3 + 9z^4 + 21z^5 + \dots$$

I coefficienti di questa successione sono chiamati **numeri di Motzkin** e vengono indicati con

$$\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$$

sequenza **OEIS A001006**.

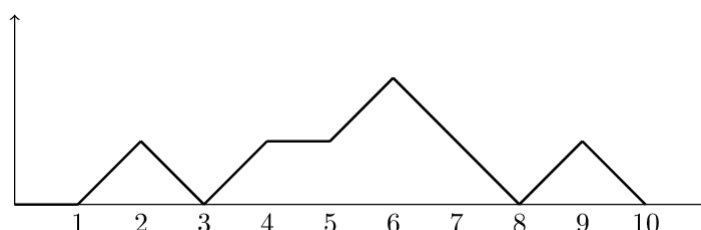


Figura 3.2: un cammino di Motzkin di 10 passi

Come tutti gli oggetti matematici, anche questa successione ha alcune proprietà interessanti:

1. M_n conta i cammini da $(0, 0)$ a $(n, 0)$ con passi in S ;
2. vale la legge ricorsiva $M_n = \frac{2n+1}{n+2} M_{n-1} + \frac{3n-3}{n+2} M_{n-2}$;
3. $M_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} C_k$ dove C_k è il k -esimo numero di Catalan;
4. la funzione generatrice dei numeri di Motzkin $m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n x^n$ soddisfa

$$x^2 m(x)^2 + (x-1)m(x) + 1 = 0;$$

5. ponendo $M_0 = M_1 = 1$ vale

$$M_n = M_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} M_k M_{n-2-k} \quad \forall n = 2, 3, \dots;$$

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{M_{n-1}} = 3$.

3.3 Cammini di Schröder

Consideriamo ora le escursioni con $S = \{(1, 1), (1, -1), (2, 0)\}$ che partono da $(0, 0)$ e arrivano a $(2n, 0)$. Questi cammini prendono il nome di **cammini di Schröder** e vengono enumerati con la successione

$$\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$$

sequenza **OEIS A006318 (grandi numeri di Schröder)**.



Figura 3.3: un cammino di Schröder di 17 passi

Vediamo alcune proprietà:

1. I primi numeri sono 1, 2, 6, 22, 90, 394, 1806, 8558, 41586, ...;
2. Ponendo $S_0 = 1$ e $S_1 = 2$ vale la legge ricorsiva

$$S_n = 3S_{n-1} + \sum_{k=1}^n S_k S_{n-k-1} \quad \forall n = 2, 3, \dots;$$

3. La funzione generatrice è

$$G(S_n; x) = \sum_{n \geq 0} S_n x^n = \frac{1 - x - \sqrt{x^2 - 6x + 1}}{2x};$$

4. Se consideriamo la matrice simmetrica $(A)_{i,j} = S_{i+j-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, questa ha determinante $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

3.4 Cammini di Delannoy

Consideriamo ora i cammini di Schröder con la formulazione alternativa: $S = \{(0, 1), (1, 1), (1, 0)\}$ e i cammini partono da $(0, 0)$ e arrivano a (m, n) , senza alcuna condizione sulla diagonale. Questi cammini prendono il nome di **cammini di Delannoy** e vengono enumerati dai **numeri di Delannoy**

$$\{D(m, n)\}_{(m,n) \in \mathbb{N}_0^2}$$

sequenza **OEIS** 008288.

Proprietà dei numeri di Delannoy:

1. se disposti a forma di triangolo, dove $D(m, n)$ è l'elemento sulla $(m+n)$ -esima riga nella n -esima posizione, formano il **triangolo di tribonacci**, dove ogni elemento è la somma dei tre soprastanti, dunque vale la legge di ricorrenza

$$D(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 0 \text{ o } n = 0; \\ D(m-1, n) + D(m-1, n-1) + D(m, n-1) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2. consideriamo cammini con k passi diagonali. Allora necessariamente dovremo avere $m-k$ passi orizzontali e $n-k$ passi verticali, allora valgono:

$$D(m, n) = \sum_{k=0}^{\min(m, n)} \binom{m+n-k}{m} \binom{m}{k};$$

$$D(m, n) = \sum_{k=0}^{\min(m, n)} \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k;$$

$$D(m, n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{n} \binom{k}{m};$$

3. la funzione generatrice è

$$G(D(m, n); x, y) = \sum_{n, m \geq 0} D(m, n) x^m y^n = \frac{1}{1-x-y-xy}.$$

3.4.1 Numeri di Delannoy centrali

Se consideriamo cammini di Delannoy con il punto di arrivo sulla diagonale, allora questi sono enumerati dai **numeri di Delannoy centrali** e sono indicati con

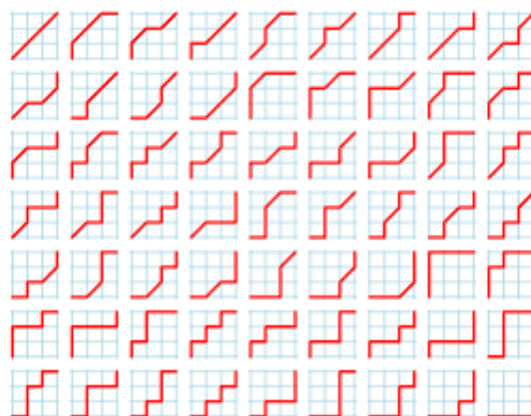
$$\{D(n)\}_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ con } D(n) = D(n, n)$$

sequenza **OEIS** A001850. Questi non sono nient'altro che la colonna centrale del triangolo di tribonacci.

Proprietà:

1. Posto $D(0) = 1$, vale:

$$D(n) = \frac{3(2n-1)D(n-1) - (n-1)D(n-2)}{n};$$

Figura 3.4: $D(4)$

2. sostituendo $m = n$ in (2), si ottiene che:

$$D(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n+k}{k};$$

$$D(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 2^k;$$

$$D(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{n}^2;$$

3. la funzione generatrice è

$$G(D(n); x) = \sum_{n \geq 0} D(n)x^n = \frac{1}{\sqrt{1-6x-x^2}}.$$

Bibliografia

- [1] R. P. Stanley, 2011, *Enumerative Combinatorics, vol. 1, 2nd edition*
- [2] M. Wallner, 2013, *Lattice Path Combinatorics*, Diploma Thesis, Vienna University of Technology
- [3] D. André, 1887, *Direct solution of the problem solved by Mr. Bertrand*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Vol. 105), 436–437
- [4] M. Renault, 2007, *Four proofs of the ballot problem*, Mathematics Magazine (Vol. 80, No.5), 345-362
- [5] M. Renault, 2008, *Lost (and found) in translation: André's actual method and its application to the generalized ballot problem*, The American Mathematical Monthly (Vol. 115 No. 4), 358-363
- [6] J. Peacock, 1941, *On "Al Capone and the Death Ray"*, The Mathematical Gazette (Vol. 25, Issue 267), 283-287
- [7] J. Aebly, 1923, *Démonstration du problème du scrutin par des considérations géométriques*, L'Enseignement Mathématique 23, 185–186
- [8] K. Humphreys, 2010, *A history and a survey of lattice path enumeration*, Department of Mathematical Sciences, Florida Atlantic University
- [9] G. C. Rota, D. Kahaner, A. Odlyzko, 1973, *On the foundations of combinatorial theory. VIII. Finite operator calculus*, Journal of Mathematical Analysis and Applications (Vol. 42 Issue 3), 684-760
- [10] H. Niederhausen, 1996, *Symmetric Sheffer sequences, and their applications to lattice path counting*, Journal of Statistical Planning and Inference (Vol. 54, Issue 1), 87-100
- [11] H. Niederhausen, 1980, *Linear Recurrences Under Side Conditions*, European Journal of Combinatorics (Vol. 1, Issue 4), 353-368

-
- [12] C. Banderier, M. Wallner, 2016, *The kernel method for lattice paths below a line of rational slope*, Springer, 119-154
 - [13] C. Banderier, P. Flajolet, 2002, *Basic analytic combinatorics of directed lattice paths*, Theoretical Computer Science (Vol. 281, Issues 1–2), 37-80
 - [14] S. Roman, 2015, *An introduction to Catalan Numbers*, Birkhauser
 - [15] M. Aigner, 1998, *Motzkin Numbers*, European Journal of Combinatorics (Vol. 19, Issue 6), 663-67

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare, per primi, i miei genitori che mi hanno supportato (tanto) e sopportato (ancora di più). Secondariamente ringrazio la professoressa Barnabei per la disponibilità mostrata e per avermi suggerito un argomento che può sembrare banale, ma che ha stimolato la mia curiosità e che continuerò ad approfondire nel tempo libero. Ringrazio, infine, tutti gli amici che mi sono stati vicino (nell'ultimo anno e mezzo nel pieno rispetto delle regole di distanziamento sociale) in questi tre anni e mezzo di percorso. Vi aspetto al Mc Donald, raga.